बी.एड., प्रथम वर्ष

गणित का शिक्षण

(TEACHING OF MATHEMATICS)

GEDE-15

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

COURSE WRITERS

Dr Nidhi Agarwal, HOD, Department of Education, Integrated School of Education (INMANTEC), Ghaziabad
Prof (Dr) Puneet Kumar, Institute of Management Research, Ghaziabad
Units (1.2.9, 1.4, 1.5.2-1.5.3)

Dr Pooja Pant, Asst. Professor, (Grade - II), Amity Institute of Education, Amity University, Noida
Units (1.0-1.2.8, 1.3, 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.5-1.5.1, 1.5.4-1.5.7, 1.6-1.10, 2.0-2.2, 2.3-2.5, 2.6-2.10)

Dr. Pratiksha Saxena, Assistant Professor, School of Applied Sciences, Gautam Buddha University, Greater Noida
Units (3.0-3.2, 3.3, 3.4.2, 3.5, 3.6-3.10, 4.0-4.1, 4.2, 4.3, 4.5-4.5.2, 4.6-4.10)

Sunita Bhatnagar, Librarian, All India Institute of Medical Sciences (AIIMS), Jodhpur
Unit (3.4)

Dr. Rupesh Tyagi, Assistant Professor (Contractual), Department of Economics, CCS University, Meerut
Unit (3.4.1)

Rohit Khurana, CEO, ITL Education Solutions Ltd., 2nd Floor, GD-ITL Tower, Netaji Subhash Place, Pitampura, New Delhi
Units (4.2.1-4.2.2)

N Ch S N Iyengar, Professor, Deptt of Computer Applications, Vellore Institute of Technology, Vellore
V M Chandrasekaran, Asstt Professor, Deptt of Mathematics, Vellore Institute of Technology, Vellore
K A Venkatesh, Head Deptt of Computer Applications, Alliance Business Academy, Bangalore
P S Arunachalam, Senior Lecturer, Department of Mathematics, SRM Engineering College, Chennai
Unit (4.4)

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

गणित का शिक्षण

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 गणित की प्रकृति पाठशाला के पाठ्यक्रम में गणित की प्रकृति, आवश्यकता, महत्व एवं स्थान • गणित की प्रकृति • स्कूल के अन्य विषयों के साथ गणित का सह–संबंध • स्कूलों में गणित पढ़ाने का इतिहास • स्कूली पाठ्यक्रम में गणित की आवश्यकता, महत्व और स्थान • गणितीय विवरणों की सत्यापन प्रक्रिया प्रमाण, प्रतिपरीक्षा–उदाहरण, अनुमान और भ्रम • गणित में रचनात्मक सोच • गणित का कलात्मक बोध • गणित और समाज • कुछ प्रख्यात गणितज्ञों का योगदान– आर्यभट्ट, श्रीनिवास रामानूजन, भास्कराचार्य, यूक्लिड, पाइथागोरस तथा रेने डेसकार्टेस स्कूल के लिए गणितीय पाठ्यक्रम • गणितीय पाठ्यक्रम के उद्देश्य • स्कूल गणित की परिकल्पना, गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य, स्कूल गणित में चिंता के मुख्य क्षेत्र, स्कूल गणित शिक्षा के विभिन्न चरणों में पाठयक्रम विकल्प • पाठ्यक्रम विकास के आधुनिक के रुझान पाठ्यक्रम विकास में व्यवहारवादी से रचनात्मक दृष्टिकोण से संबंधित विषय का केंद्रीयकरण • पाठशाला शिक्षण के विभिन्न स्तरों पर गणित में विभिन्न विषयों का शैक्षणिक विश्लेषण– अंकगणित (संख्या प्रणाली का विकास), बीजगणित, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी और प्रायिकता, इत्यादि गणित सीखने के लिए दृष्टिकोण और रणनीतियां • शैक्षणिक बदलाव – रचनात्मकता से व्यवहारवादी तक • गणित शिक्षण के लिए शैक्षणिक दृष्टिकोण • गणित के लेनदेन के लिए तकनीकों का महत्व गणित के प्रभावी शिक्षण सीखने की योजना • गणित में एक अच्छे अनुदेशात्मक कार्यक्रम की आकर्षक विशेषताएं • विषय वस्तु विश्लेषण • सीखने के उद्देश्यों और परिमाणों का निर्माण • शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में शिक्षार्थी को शामिल करना • रूपरेखित किए गए अध्ययन का अनुभव • विषयगत दृष्टिकोण के आधार पर इकाई और पाठ योजना तैयार करना • दिव्यांग बच्चों के लिए सीखने के अनुभवों की योजना बनाना	**इकाई 1** : गणित की प्रकृति **(पृष्ठ 3–176)**

इकाई–2 गणित शिक्षण को प्रोत्साहन प्रदान करने के उपाय

गणित के शिक्षण को प्रोत्साहित करना

- शिक्षार्थियों की सामर्थ्यता और निर्बलता की पहचान
- जांच, प्रशंसा और संवाद के लिए शिक्षार्थी को प्रोत्साहित करना
- मनोरंजक गणित– खेल, पहेलियां, प्रश्नोत्तरी तथा तरकीब
- रचनात्मक कक्षा प्रक्रिया
- एक रचनात्मक कक्षा का निर्माण
- विभिन्न प्रतियोगिताओं के लिए छात्रों को ज्ञान के आधार पर तैयार करना

गणितीय शैक्षणिक संसाधनों के स्रोत और सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी)

- शैक्षणिक संसाधन– महत्व और उपयोग
- तात्कालिक वातावरण द्वारा शैक्षणिक संसाधनों से अध्ययनपूर्वक होना
- गणितीय प्रयोगशाला, संघ एवं प्रदर्शन
- कम लागत में शिक्षण अधिगम सहायक पाठ्यक्रम की तैयारी
- गणितीय प्रतिरूप, लेखाचित्र, आदि, का उपयोग
- गणित के शिक्षण में आईसीटी का उपयोग
- गणित शिक्षण के लिए उपयुक्त माध्यम का उपयोग करना और चयन करना

गणित में मूल्यांकन

- गणित में मूल्यांकन की भूमिका
- गणित में सतत और व्यापक मूल्यांकन (सीसीई)
- स्व और सहकर्मी मूल्यांकन
- उपलब्धि परीक्षण की तैयारी
- गणित शिक्षण के मूल्यांकन के लिए संसाधन और तकनीक
- दिव्यांग छात्रों की शैक्षणिक व्यवस्था का मूल्यांकन करना

गणित शिक्षकों का अनुभवी या व्यवसायिक विकास

- गणित शिक्षकों के लिए व्यवसायिक या अनुभवी विकास कार्यक्रम, सेवा कार्यक्रम
- व्यवसायिक या अनुभवी विकास के लिए संगोष्ठी, कार्यशाला, सम्मेलन, ऑनलाइन साझाकरण में भागीदारी
- व्यवसायिक या अनुभवी संगठनों/संघों की सदस्यता
- गणित शिक्षक के व्यवसायिक या अनुभवी विकास में ई–पत्रिकाओं, ई–पुस्तकालयों, ई–पुस्तकों की भूमिका
- विश्वविद्यालयों के साथ पाठशालाओं की सहकार्यता
- गणित शिक्षकों के व्यवसायिक या अनुभवी विकास में विचारात्मक कार्यप्रणाली की भूमिका
- एक शोधकर्ता के रूप में शिक्षक– कैसे बच्चों को गणित पढ़ना और समझाना है
- क्रियाशीलता पर शोध और नई पद्धति

इकाई–3 अध्यापन : अंकगणित और व्यवसायिक गणित सीखना

संख्या पद्धति, संख्या सिद्धान्त, घातांक और लघुगुणक

- संख्याओं का समुच्चय, प्राकृत संख्याएं, परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएं, वास्तविक संख्याओं की संक्रियाएं और उनके गुण
- वर्गमूल
- लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक

प्रतिशत

- प्रतिशत सामान्य भिन्न और दशमलव
- लाभ और हानि
- साधारण ब्याज

सांख्यिकी

- केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप
- प्रायिकता

ज्यामिति और क्षेत्रमिति

- परिमाप और क्षेत्रफल
- त्रिभुज
- समांतर रेखाएँ
- वृत्त की परिधि

इकाई–4 शिक्षणशास्त्र में बीजगणित का महत्व

बहुपद

- समीकरण और बहुपद–मूलभूत तथ्य
- बहुपदों पर संक्रियाएँ

सरल समीकरण

- बहुपद में असमानता
- द्विघात समीकरण

समुच्चय, संबंध एवं फलन

निर्देशांक ज्यामिति

- निर्देशांक ज्यामिति की मूल अवधारणाएँ एवं उपयोग
- दूरी एवं विभाजन सूत्र

विषय–सूची

परिचय

टिप्पणी

गणित के क्षेत्र का विस्तार समय के साथ–साथ तीव्र गति से हुआ है। एक समय था जब गणित को अंकगणित के समानार्थी माना जाता था। उस समय के हमारे पूर्वजों को गणित के नाम पर गिनती और पहाड़े ही आते थे। संसार के प्रायः सभी देशों में गणित का आरंभ अंकों और गिनती से ही हुआ। यही गिनती कुछ समय पश्चात अंकगणित में परिणत हो गई। दीर्घकाल में गणित रूपी वृक्ष से बीजगणित, रेखागणित और त्रिकोणमिति जैसी कई शाखाओं का विस्तार हुआ।

गणित मानव मस्तिष्क की उपज है। मानव की गतिविधियों एवं प्रकृति के निरीक्षण द्वारा ही गणित का उद्भव हुआ। गणित वास्तविक जगत को नियमित करने वाली मूर्त धारणाओं के पीछे काम करने वाले नियमों का अध्ययन करता है। दैनिक जीवन का गणित ज्यादातर इन मूल धारणाओं का ही सार है और इसीलिए इसे आसानी से समझा जा सकता है।

गणित एक महत्वपूर्ण विषय है। हमारे दैनिक जीवन में गणित पूरी तरह से समाया हुआ है। विद्यार्थियों में तार्किक चिंतन तथा सोच के विकास के लिए गणित शिक्षण को बेहद उपयोगी और महत्वपूर्ण माना गया है। प्राथमिक स्तर के छात्रों में तार्किक चिंतन के विकास के लिए गणित शिक्षक से विशेष तैयारी की अपेक्षा की जाती है। गणित एक ऐसा विषय है जो छात्रों के मस्तिष्क को आंदोलित करता है, सक्रिय बनाता है। गणित संबंधी समस्या के समाधान के लिए मस्तिष्क की बड़ी भूमिका होती है। छात्रों की मानसिक क्रियाएं गणित सीखने से सुदृढ़ होती हैं। इन मानसिक क्रियाओं में निरीक्षण, परीक्षण एवं सामान्यीकरण प्रमुख हैं।

अध्ययन एवं अधिगम प्रक्रिया में मूल्यांकन का महत्वपूर्ण स्थान है। शिक्षण का अंतिम पद मूल्यांकन होता है। यह अधिगम परिणामों का पता लगाने के लिए आवश्यक है। शिक्षण उद्देश्यों और विधि की उपयुक्तता को भी मूल्यांकन के बाद ही जांचा जा सकता है। अतः मूल्यांकन अध्यापन और अधिगम प्रक्रम की प्रामाणिकता की जांच करने में सहायक होता है और सुधार करने के लिए सही दिशा का ज्ञान प्रदान करता है। उपर्युक्त कारणों से शिक्षा के क्षेत्र में मूल्यांकन का महत्व बढ़ता जा रहा है। मूल्यांकन सही मापन पर निर्भर होता है। इसके लिए शिक्षा के क्षेत्र में कई साधनों एवं प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है। शिक्षा, शिक्षक और शिक्षण के बीच एक ऐसा त्रिकोणीय संबंध है जिससे शैक्षिक जीवन की नींव का निर्माण होता है। शिक्षा के अभाव में उन्नत समाज की कल्पना नहीं की जा सकती। शिक्षा केवल अर्थोपार्जन के लिए ही नहीं प्राप्त की जाती, यह व्यक्ति में नैतिक गुणों का विकास करती है और उसे सामाजिक भी बनाती है। यह लक्ष्य मार्गदर्शक शिक्षक और अच्छे शिक्षण द्वारा ही प्राप्त होता है। शिक्षा और शिक्षण के महत्व को रेखांकित करती यह पुस्तक शिक्षा के महत्व तथा शिक्षण के विविध पहलुओं से हमारा परिचय कराती है।

गणित शिक्षा, दैनिक आर्थिक व्यवस्थाओं और व्यापारिक गतिविधियों को समझने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। आज जीवन के सभी क्षेत्रों गणित के नियम एवं

सिद्धांतों का प्रयोग किया जाता है। इसके लिए गणित विषय का व्यावहारिक ज्ञान होना आवश्यक है। इन सभी जरूरतों को देखते हुए आज विद्यालयों में गणित शिक्षण का महत्व भी बढ़ता जा रहा है।

प्रस्तुत पुस्तक ''गणित का शिक्षण'' विश्वविद्यालय द्वारा निर्धारित बी.एड के पाठ्यक्रम के अनुरूप लिखी गई है।

प्रस्तुत पुस्तक में गणित शिक्षण के विभिन्न पक्षों का सांगोपांग विवेचन किया गया है। प्रत्येक इकाई के प्रारंभ में विषय का विश्लेषण करने से पहले उसके निहित उद्देश्यों को स्पष्ट कर दिया गया है। इकाई के बीच–बीच में 'अपनी प्रगति जांचिए' के माध्यम से विद्यार्थियों की योग्यता को परखने के लिए प्रश्न दिए गए हैं। पाठ्य सामग्री तैयार करते समय विषय में विद्यार्थियों की रुचि जगाने तथा रोचकता लाने का भरपूर प्रयास किया गया है। अध्ययन की सुविधा के लिए संपूर्ण पुस्तक को 4 इकाइयों में बांटा गया है, जिनका विवरण इस प्रकार है–

पहली इकाई में पाठशाला पाठ्यक्रम में गणित की प्रकृति, उद्देश्य और उसके महत्व का परिचय दिया गया है।

दूसरी इकाई में गणित शिक्षण को प्रोत्साहन प्रदान करने के उपायों की विवेचना की गई है।

तीसरी इकाई में अंकगणित तथा व्यवसायिक गणित पद्धतियों की अध्यापन प्रक्रिया को विश्लेषित किया गया है।

चौथी इकाई में बीजगणित, बहुपद, समुच्चय तथा निर्देशांक ज्यामिति की विस्तृत व्याख्या की गई है।

प्रस्तुत पुस्तक में गणित शिक्षण के स्वरूप को सरल भाषा में रुचिकर ढंग से उदाहरण सहित प्रस्तुत किया गया है। हमें पूरा विश्वास है कि यह पुस्तक गणित शिक्षा के स्वरूप को समझने में सहायक सिद्ध होगी।

इकाई 1 गणित की प्रकृति

टिप्पणी

संरचना

टिप्पणी

1.0 परिचय

गणित मानव सभ्यता का प्रतिबिंब है। मानव जाति की उन्नति तथा सभ्यता के विकास में गणित का विशेषत योगदान रहा है। सभ्यता के प्रारंभ से ही मानव तथा गणित का अटूट संबंध रहा है तथा मानव जीवन से संबंधित समस्याओं को हल करने में इस विषय ने विभिन्न तरह से सहायता की है। भारत वर्ष में गणित का अध्ययन उत्तर वैदिक काल में प्रारंभ हुआ है। यदि हम अतीत की ओर बढ़े तो इस तथ्य की पुष्टि हो जाती है कि ''आवश्यकता अविष्कार की जननी है'', मानव जाति की उन्नति तथा सभ्यता के विकास में गणित का महत्वपूर्ण योगदान है। गणित का संबंध संक्रियाओं से है तथा इसके सिद्धान्तों के अभाव में नाप तौल करना असंभव है। यह तर्कपूर्ण भाषा है तथा यह विषय सार्वभौमिक विषय है। गणित कई विषयों का आधार है, क्योंकि गणित के बिना भौतिक विज्ञान, अर्थशास्त्र, ज्योतिष, खगोलशास्त्र, भूगोल, भू–विज्ञान, रसायन विज्ञान, इत्यादि, विषयों की कल्पना नहीं की जा सकती है अर्थात् कह सकते हैं कि गणित विषय विज्ञान का आधार है। गणित में अमूर्त प्रत्ययों की व्याख्या की जाती है व्याख्या के आधार पर उनमें विचार दृढ़ बनते हैं, तथा उन्हें मूल रूप में परिवर्तन किया जा सकता है। रचनात्मक कार्यों का मूल आधार गणित है। ज्यामिति में विभिन्न रचनाएं तथा अंकों का लिखना गणित की रचनात्मक ज्यामिति का आधार है। इसके अलावा गणित का समाज में महत्वपूर्ण योगदान है, जो व्यापारिक गतिविधियों, सामाजिक कार्यों तथा लेन–देन की प्रक्रिया में शामिल है। अर्थशास्त्र एवं ज्योतिष शास्त्र और गणित में आर्यभट्ट का महत्वपूर्ण योगदान है। श्री निवास रामानुज का गणित इतिहास में महत्वपूर्ण भूमिका रही है इन्होंने विश्लेषण एवं संख्यात्मक सिद्धांत में गहन योगदान दिया है। भास्कराचार्य प्राचीन भारत में गणितज्ञ एवं ज्योतिषी थे। इनके द्वारा रचित मुख्य ग्रंथ सिद्धांत शिरोमणि है, जो अंकगणित, बीजगतिणत और ग्रहों की गति से संबंधित है। यूक्लिड द्वारा रचयित पुस्तक 'एलीमेण्ट्स (Elements)' नामक पुस्तक गणित के इतिहास में सफलतम् पुस्तक है। जिसमें स्वयंसिद्धों के आधार पर ज्यामिति के बहुत से सिद्धांत संपादित किए गए है जिन्हें आज भी यूक्लिडीयन ज्यामिति के रूप में माना जाता है। पाइथागोरस महान गणितज्ञ और दार्शनिक थे। उन्हें अक्सर एक महान गणितज्ञ, रहस्यवादी और वैज्ञानिक के रूप में सम्मान दिया जाता है। इन्हीं के नाम पर पाइथागोरस प्रमेय की उत्पत्ति हुई। रेन डेसकार्टेस दार्शिनक होने के साथ ही सुप्रसिद्ध गणितज्ञ थे वे दर्शन को विज्ञान में परिवर्तित करना चाहते थे। आधुनिक पाश्चत्य दर्शनशास्त्री के रूप में इन्हें जाना जाता है।

इनके अलावा इस इकाई में हम माध्यामिक स्कूल के पाठ्यक्रम में गणित के स्थान के संबंध में अध्ययन करेंगे। पाठ्यक्रम का मुख्य उद्देश्य छात्रों के ज्ञानात्मक, भावनात्मक एवं क्रियात्मक पक्ष का विकास करना है। इस के अतिरिक्त, इस पाठ्यक्रम का उद्देश्य छात्रों का नैतिक एवं चारित्रिक विकास करने से है। जब शिक्षक पाठ्यक्रम को रूपरेखित करते हैं तो वे पहचानते हैं, कि क्या किया जाएगा और कौन क्या करेगा और विकास अनुसूची का पालन करेगा। शिखक प्रत्येक पाठ्यक्रम को एक विशिष्ट

टिप्पणी

शैक्षिक उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए पाठ को रूपरेखित करते हैं। गणितीय प्रमाण को अक्सर गणित का महत्वपूर्ण आधार माना जाता है। गणित एक ऐसा विषय है, जिसमें छात्रों की तर्क शक्ति का विकास किया जाता है। गणितीय शिक्षा में रचनावाद की जड़े ज्ञान मीमांस में है जो दर्शनशास्त्र में ज्ञान का एक सिद्धांत है, जो तार्किक श्रेणियों और इसके औचित्य पूर्ण आधार से संबंधित है। अतः गणित ऐसी विद्याओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमाणों और आपसी गुणों, इत्यादि, का अध्ययन करती है। यह एक अमूर्त एवं निगमनात्मक प्रणाली है। गणित की कई शाखाएं है, जो अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी, बीजगणित, कलन, इत्यादि, है। गणित में अभ्यस्त व्यक्ति या खोज करने वाले को गणितज्ञ कहा जाता है।

गणित विषय में अमूर्त अवधारणाएं शामिल है, लेकिन उन अमूर्त अवधारणाओं को समझने के लिए छात्रों को गणित के आधार से अवगत कराना अनिवार्य है। छात्रों को आधार ज्ञान से अवगत करना चाहिए अपितु वह उच्च अवधारणाओं को नहीं समझ सकता है। इसके अतिरिक्त रचनावाद एक अधिगम सिद्धांत है या शैक्षिक दर्शन है जिस पर अनेक शिक्षकों ने 1990 के दशक में विचार करना शुरू कर दिया था। रचनावादी अधिगम में ज्ञान की आवश्यकता होती है ताकि छात्र अपने पूर्व ज्ञान एवं अनुभवों को प्रयोग कर अधिगम की नई संबद्ध और अनुकूली अवधारणाएं तैयार कर सके। लेकिन विद्यार्थियों को अक्सर गणित एक जटिल विषय लगता है क्योंकि वे गणितीय तथ्यों को वास्तविक जीवन शैली से संबद्ध नहीं कर पाते है और न ही इसके विपरीत कर पाते हैं।

अन्य विषयों की तरह भी गणित को कक्षा में बेहतर ढंग से पढ़ाया जाता है जिससे छात्रों को उस विषय में रूचि बढ़े। इसके अलावा शिक्षक छात्रों के लिए आदर्श होता है और उसी शिक्षक का शिक्षण आदर्श शिक्षण कहलाता है। जो पाठ्य सामग्री को रोकच सहायक सामग्री से प्रस्तुत करता है क्योंकि ये छात्रों का केवल ध्यान केन्द्रित नहीं करती वरन् उन्हें प्रेरणा भी देती है। इसके अतिरिक्त यदि दिव्यांग छात्रों की ओर जाया जाए तो दिव्यांग बच्चों के लिए शिक्षण के लिए सब कुछ मूर्त होना चाहिए। कक्षा एवं शिक्षक के अन्य वातावरण इस प्रकार होने चाहिए जो बच्चों को खेल–खेल में सीखने के पर्याप्त अवसर दे। पाठशाला में दिव्यांग बच्चों के लिए पर्याप्त संसाधन होना अत्यावश्यक है।

इस इकाई में आप शिक्षणशास्त्र में गणित की प्रकृति, आवश्यकता महत्व तथा उसे कई विषयों के साथ सह–संबंध, रचनात्मक प्रभाव एवं सौंदर्यबोध तथा महान गणितज्ञों का गणित में योगदान, पाठशाला में गणित के अध्ययन के बारे में रोचक तथ्य, उसके उद्देश्य एवं विभिन्न विषयों में शिक्षणशास्त्र का विश्लेषण, गणित के अध्ययन से अवगत कराने की योजनाएं, शैक्षणिक बदलाव एवं शैक्षणिक दृष्टिकोण, गणित में उपयोगी तकनीकों का महत्व, गणित के प्रभावी शैक्षणिक योजनाएं, , पाठ्यक्रम विश्लेषण तथा सीखने के उद्देश्य से लेकर निष्कर्ष तथा योजनाएं, सीखने के अनुभवों का रूपरेखा तथा भिन्नात्मक रूप में वर्णन तथा दिव्यांग बच्चों की शैक्षणिक व्यवस्था के लिए सीखाने के अनुभवों के बारे में अध्ययन करेंगे।

1.1 उद्देश्य

टिप्पणी

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप—

- गणित की प्रकृति से संबंधित मूलपदों, अर्थ व विभिन्न परिभाषाओं, तर्क शक्ति के विकास एवं एक उपकरणीय विषय के रूप में व्यक्त कर पाएंगे;
- गणित विषय को खोजों के आधार पर इसका विकास, आवश्यकता और महत्व को समझ पाएंगे;
- गणित की रचनात्मक सोच एवं कलात्मकबोध का वर्णन कर पाएंगे;
- महान गणितज्ञों जैसे कि आर्यभट्ट, श्रीनिवास रामानुजन, भास्कराचार्य, यूक्लिड, पाइथागोरस और रेन डेस्कार्टेस का गणित विषय में दिए गए योगदान के बारे में चर्चा कर पाएंगे;
- पाठशाला में प्रयुक्त किए गए गणितीय पाठ्यक्रम के उद्देश्य तथा रूपरेखा के बारे में व्याख्या कर पाएंगे;
- पाठ्यक्रम के विकास, माध्यमिक शिक्षा के विभिन्न स्तरों पर गणित के विभिन्न विषयों का शैक्षणिक विश्लेषण, संख्या पद्धति, इत्यादि, के महत्व का वर्णन कर पाएंगे;
- गणित सिखाने के शैक्षणिक दृष्टिकोण, शैक्षणिक बदलाव तथा गणित विषय में तकनीकों के महत्वों का विश्लेषण कर पाएंगे;
- गणित के प्रभावी शिक्षण की शैक्षणिक योजना, पाठ्य विश्लेषण सीखाने के अनुभवों को रूपरेखित कर पाएंगे;
- दिव्यांग छात्रों को गणित के ज्ञान से अवगत कराने की विधि जान पाएंगे।

1.2 पाठशाला के पाठ्यक्रम में गणित की प्रकृति, आवश्यकता, महत्व एवं स्थान

गणित के शिक्षण शास्त्र को समझने हेतु हमें गणित की प्रकृति को समझना जरूरी हो जाता है। इस इकाई में गणित की प्रकृति को विस्तारपूर्वक वर्णित किया गया है। गणित एक महत्वपूर्ण विषय है। जो शिक्षक बनने हेतु बहुत जरूरी है। गणित सामान्य रूप से एक गणनाओं का विज्ञान है। मूल रूप से गणित एक ऐसा शास्त्र है जिसमें गणनाओं की प्रधानता व अंक, अक्षर चिन्ह इत्यादि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है, जिसकी सहायता से परिणाम, दिशा तथा स्थान का बोध होता है। गणित विषय का आरंभ हिंदी माध्यम से हुआ है, आगे चलकर यह विस्तारित रूप में संख्या पद्धति बन गया है जिसकी सहायता से गणित की अन्य शाखाओं को विकसित किया गया है। गणित विषय पढ़ाने का भी एक उद्देश्य होता है जिसकी एक संरचना स्थापित की जाती है। जिसके आधारपूर्वक उस विषय की प्रकृति निश्चित होती है। गणित विषय की प्रकृति

अन्य विषय की अपेक्षा मजबूत एवं शक्तिशाली होती है। गणित का ज्ञान का आधार हमारी ज्ञानेंद्रियां है। गणित की भाषा सुपरिभाषित, उपयुक्त व स्पष्ट होती है। गणित के ज्ञान से बालकों में प्रशंसात्मक दृष्टिकोण तथा भावना का विकास होता है। गणित से बालकों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है। गणित में अध्याय से प्रत्येक प्रश्न सूचना स्पष्ट होती है। तथा उसका संभावित उत्तर निश्चित होता है। गणित की विभिन्न नियमों सिद्धांतों सूत्र आदि में संदेश की संभावना नहीं होती है। गणित में अमूर्त प्रत्ययों को मूर्त रूप में परिवर्तित कर व्याख्यित किया जाता है।

टिप्पणी

गणित विज्ञान की क्रमबद्ध संगठित तथा यथार्थ शाखा है। यह विज्ञान का एक सौंदर्यपूर्वक अमूर्त रूप है। गणित वह विज्ञान है, जिसके आवश्यक निष्कर्ष निकाले जाते हैं। यह तार्किक, आगनात्मक तथा प्रायोगिक विज्ञान है। इसके अध्ययन से ही मनुष्य के मस्तिष्क में तर्क करने की सामर्थ्यता उत्पन्न हो जाती है। गणित में ज्यामिति, त्रिकोणमिती आदि विषयों में अनेक ऐसे उपविषय होते हैं जिसमें प्रयोगात्मक कार्य द्वारा प्रत्ययों एवं संकल्पनाओं का स्पष्टकीकरण कराया जा सकता है। क्षेत्रफल ऊंचाई एवं दूरी आदि उपविषयों में प्रयोगात्मक कार्य बहुत उपयोगी है। गणित का मूल्यात्मक प्रयोग व्यवसायिक एवं शैक्षिक निर्देशन देने के लिए आवश्यक है।

इसके अतिरिक्त शिक्षण कार्य की प्रक्रिया का विधिवत् अध्ययन शिक्षाशास्त्र या शिक्षणशास्त्र कहलाता है। इसमें अध्यापन की शैली या नीतियों का अध्ययन किया जाता है। शिक्षण अध्यापन कार्य करता है तो वह इस बात को ध्यान में रखता है कि अधिगमकर्ता को अधिक से अधिक समझ आए तथा इस दिशा का लक्ष्य निर्धारण शिक्षाशास्त्र करता है।

1.2.1 गणित की प्रकृति

आज की दुनिया, जो विज्ञान और प्रौद्योगिकी पर अधिक निर्भर करता है, विश्लेषण करने के आधार पर वैज्ञानिकों की ओर से अधिक गणितीय ज्ञान की मांग करता है। और इस तरह वह गणितीय साक्षरता की डिग्री या शैक्षिक उपाधि प्राप्त करेगा। हालांकि गणित हमारे साथ 5000 साल पूर्व से अधिक समय से है, लेकिन उस समय विषय को कभी भी जीवंत नहीं बनाया गया है जितना कि आज है। गणितीय खोज और आविष्कार की गति में पिछले कुछ दशकों के दौरान आश्चर्यजनक रूप से तेजी आई है। कहा गया है कि, गणित सीखने की एकमात्र शाखा है, जिसमें दो हजार साल पुराने सिद्धांत आज भी मान्य हैं तथा गणित की अधिक से अधिक मांग करने के फलस्वरूप ही आगामी समय में तकनीकी समाज का प्रत्येक व्यक्ति सुविधापूर्वक शिक्षित होगा।

गणित – अर्थ और परिभाषाएं

गणित का शब्दकोश अर्थ यह है, कि 'यह या तो संख्या और स्थान का विज्ञान है या मात्रा, माप और स्थानिक संबंधों का विज्ञान है। यह विज्ञान की एक व्यवस्थित, संख्याओं और सटीक शाखा है। यह मात्रात्मक तथ्यों, संख्याओं के साथ–साथ समष्टि रूप से जुड़ी समस्याओं से संबंधित है। यह आकार, व्यवस्था और मात्रा का तार्किक

टिप्पणी

अध्ययन है। गणित को विभिन्न लेखकों द्वारा विभिन्न तरीकों से परिभाषित किया गया है। हमें उनमें से कुछ की जांच करनी चाहिए। तथापि गणित एक ऐसी विधाओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमापों, रूपों के गुणों का अध्ययन करती है। यह एक अमूर्त प्रणाली है। गणित की कई शाखाएंः अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिती, सांख्यिकी, बीजगणित कलन इत्यादि। गणित में अभ्यस्त व्यक्ति या खोज करने वाले को वैज्ञानिक कहा जाता है।

पुरातन काल में ही सभी प्रकार के ज्ञान–विज्ञान में गणित का स्थान सर्वोपरि रहा है–

यथा शिखा मयूराणां नागानां मणयो यथा।

तथा वेदांगशास्त्राणां गणितं मूर्ध्नि स्थितम्।।

(वेदांग ज्योतिष ग्रंथानुसार)

अर्थात् जिस प्रकार मोरों में शिखा और नागों में मणि का स्थान सबसे ऊपर है, उसी प्रकार सभी वेदांग और शास्त्रों में गणित का स्थान सर्वोपरि है।

कांत (Kant) के अनुसार गणित सभी भौतिक शोधों का अपरिहार्य साधन है।

गॉस (Gauss) ने कहा 'गणित विज्ञान की रानी है और अंकगणित सभी गणित की रानी है' गणित विज्ञान और प्रोद्योगिकी का महत्वपूर्ण उपकरण है। भौतिक, रसायन विज्ञान, खगोल विज्ञान का अध्ययन गणित के बिना अधूरा है। ऐतिहासिक रूप से देखा जाए तो वास्तव में गणित की अनेक शाखाओं का विकास इसलिए किया गया है कि प्राकृतिक विज्ञान में इसकी आवश्यकता आ पड़ी थी।

रोजर बेकन (Roger Bacon) ने कहा कि 'गणित प्रवेश द्वार और सभी विज्ञानों के लिए महत्वपूर्ण है'।

लिंडसे (Lindsay) के अनुसार, 'गणित भौतिक विज्ञान की भाषा है और निश्चित रूप से मनुष्य के मस्तिष्क में उत्पन्न इससे उत्तम अन्य कोई भाषा नहीं है।

लोके (Loke) के अनुसार 'गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन मास्तिष्क में तर्क करने की आदात स्थापित होती है।'

आइन्सटीन (Einstein) के अनुसार 'गणित एक मानव चिन्तन का प्रतिफल है जो अनुभवों से स्वतंत्र है तथा सत्य के अनुरूप है'।

गैलिलीयों (Galileo) के अनुसार 'गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने संपूर्ण जगत या ब्रह्माण्ड को लिख दिया है।

मार्शल हार्वे स्टोन (Marshall Harvey Stone) के अनुसार, 'गणित अमूर्त तत्वों से निर्मित अमूर्त प्रणाली का अध्ययन है। इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया गया है'।

बर्ट्रेंड रसेल (Bertrand Russell) के अनुसार, 'गणित को उस विषय के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें हम कभी नहीं जानते कि हम क्या कह रहे

हैं, न ही में यह पता होता है कि जो हम कह रहे हैं वह सत्य भी है या नहीं'। गणित कुछ अमूर्त धारणाओं एवं नियमों का संकलन मात्र ही नहीं है, बल्कि दैनिक जीवन का मूलाधार है।

टिप्पणी

बेंजामिन पीर्स (Benjamin Peirce) ने जोर देकर कहा कि, ''गणित एक ऐसा विज्ञान है जो कि आवश्यक निष्कर्ष पर पहुंचता है''।

गणित की एक अधिक व्यापक परिभाषा कोर्टेंट और रॉबिन द्वारा दी गई थी जब उन्होंने गणित को निम्नलिखित तरीके से परिभाषित किया था ''गणित मानव मन की अभिव्यक्ति है जो सक्रिय इच्छा, चिंतनशील कारण और सौंदर्य पूर्णता की इच्छा को दर्शाता है। इसके मूल तत्व तर्क और अंतर्ज्ञान, विश्लेषण और निर्माण, सामान्यता और व्यक्तित्व हैं''।

गणित की प्रकृति

गणित की प्रकृति निम्नलिखित तथ्यों के तहत इस पर चर्चा करके स्पष्ट किया जाता है—

1. गणितः वैज्ञानिक खोजों के आधार पर
2. गणितः एक बौद्धिक खेल
3. गणितः निष्कर्ष निकालने की कला
4. गणितः एक उपकरण विषय
5. गणितः तार्किक प्रक्रियाओं की एक प्रणाली
6. गणितः एक सहज विधि।

1. गणित – वैज्ञानिक खोजों के आधार पर

गणितीय गणनाओं तथा आकलन का महत्वपूर्ण भाग भारतीय उपमहाद्वीप में उत्पन्न हुआ है। संख्या, शून्य, स्थानीय मान, अंकगणित, ज्यामिती, बीजगणित, कैलकुलस आदि का प्रारंभ काल भारत में सम्पन्न हुआ। गणित विज्ञान न केवल औद्योगिक क्रांति ही नहीं बल्कि परवर्ती काल में हुई वैज्ञानिक उन्नति का भी केन्द्र बिन्दु रहा है। गणित के अभाव में विज्ञान की सभी शाखाएं अपूर्ण है। विदेशी विद्वानों ने भी गणित के क्षेत्र में भारत के योगदान का मुक्तकंठ से सराहना की है।

अध्ययन का क्षेत्र जो गणित के इतिहास के रूप में जाना जाता है। प्रारंभिक रूप से गणित में आविष्कारों की उत्पत्ति में एक जांच है जो कुछ हद तक अतीत के अंकन और गणितीय विधियों की एक जांच है।

ए.एन. व्हाइटहेड (A.N. Whitehead) (1912) ''हर बच्चे को खोज की खुशी का अनुभव करना चाहिए''।

बच्चों को न केवल गणितीय विचारों की अपनी खोजों बनाने के लिए अवसर होना चाहिए, लेकिन वे भी अपनी गणना में सटीकता प्राप्त करने के लिए आवश्यक अभ्यस्त होना आवश्यक है। आज यह खोज तकनीक है, जो शानदार प्रगति कर रहे

हैं। उन्हें दो क्षेत्रों में प्रयोग किया जा रहा हैः शुद्ध संख्या संबंधों में और रोजमर्रा की समस्याओं में पैसे, वजन और अध्ययन हेतु गणितीय ज्ञान परमावश्यक है।

टिप्पणी

2. गणित – एक बौद्धिक खेल

गणित को अपने नियमों के साथ और बाहरी मानदंडों से किसी भी संबंध के बिना एक बौद्धिक खेल के रूप में माना जा सकता है। इस दृष्टिकोण से, गणित मुख्य रूप से पहेली, विरोधाभास, और समस्या को सुलझाने का मामला है – एक प्रकार का स्वस्थ मानसिक व्यायाम है। गणितीय प्रमाण को अवसर गणित का एक महत्वपूर्ण आधार माना जाता है। गणित की समझ विकसित करने के लिए कक्षाओं में प्रमाणित करने की प्रक्रिया भी एक अच्छी गतिविधि हो सकती है। इस इकाई में आप गणितीय प्रमाण के बारे में तथा इन तथ्यों के आधार पर विचार करेंगे कि किस प्रकार का इसका उपयोग कर विद्यार्थियों की गणितीय समझ को बेहतर बनाने में किया जा सकता है।।

3. गणित – निष्कर्ष निकालने की कला

स्कूल के महत्वपूर्ण कार्यों में से एक विचार की एक विधा है जो उन्हें सही निष्कर्ष ज्ञात करने में मदद करता है के साथ बच्चों को परिचित कराने के लिए उपयुक्त है। जे डब्ल्यूए यंग (J.W. Young) के अनुसार इस उद्देश्य के लिए एक विषय में तीन विशेषताएं होनी चाहिएः

1. इसके निष्कर्ष निश्चित हैं। सबसे पहले, कम से कम, यह आवश्यक है कि शिक्षार्थी को पता होना चाहिए कि उसने सही निष्कर्ष निकाला है या नहीं।
2. शिक्षार्थी सरल और बहुत आसान निष्कर्ष के साथ शुरू करने के लिए बहुत मुश्किल स्तरों को अच्छी तरह से वर्गीकृत अनुक्रम में पारित करने की अनुमति देता है तथा कठिन से कठिन प्रश्नों का निवारण हेतु महारत हासिल करता है।
3. परिचयात्मक विषय में उदाहरण देने वाले निष्कर्षों का प्रकार अन्य विषयों में भी और सामान्य रूप से सरल व सुगम पाया जाए।

   ये विशेषताएं गणित में किसी भी अन्य उपलब्ध विषय की तुलना में काफी हद तक मौजूद हैं।

4. गणित – एक उपकरण विषय के रूप में

गणित एक उपकरण विषय है। विज्ञान और उद्योग की समस्याओं को प्रकट करने और उन्हें हल करने के लिए गणित के उत्तरोत्तर बढ़ते हुए प्रयोग ने ऐसे तीव्र और मितव्ययी साधनों का विकास किया है जिनसे इन समस्याओं से प्रस्तुत गणितीय प्रश्नों के उत्तर सरलता से मिलते हैं। स्थूल रूप से ऐसे उत्तरों को देने वाला कोई भी उपकरण गणितीय उपकरणिका कहलाता है। इनके अंतर्गत संख्यात्मक प्रश्नों का हल गणनात्मक और अंकीय विधि से करने वाले गणनायंत्र भी सम्मिलित है। गणितीय उपकरणिकाओं में गणितीय राशियों को मापनीय भौतिक राशियों जैसे रेखा पर अंकित दो बिंदुओं की बीच की दूरी, तारों में वैद्युतधारा इत्यादि द्वारा निरूपित किया जाता है और इस

उपकरणिका से भौतिकी के जो नियम लगते हैं वे उन गणितीय संबंधों के प्रतिरूप है जिन्हें हल करना अभीष्ट है। पहले के दिनों में यह विज्ञान के लिए गणनात्मक प्रयोगों के रूप में व्यक्त किया जाता है। आजकल यह अन्य विषयों के लिए उपयोगी है, लेकिन यह उनमें से किसी पर निर्भर नहीं है। अपनी नई मिली स्वतंत्रता के साथ, गणित को आगे बढ़ाने के लिए अपने लक्ष्यों की स्थापना की गई है।

गणित की अपनी अखंडता, इसकी सुंदरता, इसकी संरचना और कई अन्य विशेषताएं हैं जो गणित से संबंधित हैं जो अपने आप में एक अंत के रूप में हैं। विज्ञान, अर्थशास्त्र और अन्य कई क्षेत्रों में प्रयोग किया जाने वाला गणित प्रयोगिक गणित है और इसके अंतर्गत अध्ययन किए जाने वाले गणितीय समस्याओं का स्रोत किसी और क्षेत्र में होता है। इसके अंतर्गत यंत्रशास्त्र, भूमापन, भूपदार्थ विज्ञान, ज्योतिष, आदि, विषय है।

5. गणित – तार्किक प्रक्रिया की एक प्रणाली

पॉयला (Palya) ने सुझाव दिया कि गणित के वास्तव में दो फलक हैं। एक फलक 'व्यवस्थित विज्ञानिक प्रणाली' है। इसके परिणामस्वरूप गणित को परिभाषाओं, अपरिभाषित शब्दों, स्वयंसिद्ध और प्रमेय के स्वयंसिद्ध इत्यादि के रूप में प्रस्तुत किया गया है। मारियो पियरी (Mario Pierre) ने कहा ''गणित एक परिकल्पनात्मक प्रणाली है''। इस कथन का अर्थ है कि गणित तार्किक प्रक्रियाओं की एक प्रणाली है जिससे निष्कर्ष कुछ मौलिक मान्यताओं और परिभाषाओं से कम हो जाते हैं जिन्हें परिकल्पना की गई है।

पॉयला ने गणित के दूसरे फलक को यह कहते हुए वर्णित किया कि गणित एक प्रायोगिक, प्रेरक विज्ञान के रूप में वर्णित है। यह सिद्धांत पर आधारित है कि यदि कोई संबंध कुछ विशेष मामलों के लिए सटीक अर्थ का वर्णन करता है, तो यह किसी भी सामान्यीकृत मामले के लिए सटीक व प्रभावशाली है और इसलिए संबंध को सामान्यीकृत किया जा सकता है। ऐसी प्रक्रिया को प्रेरक तर्क कहा जाता है। उदाहरण के लिए, छात्र किसी समस्या को सामान्यीकृत करता है कि कई त्रिकोणों में इस गुण को देखने के बाद 'त्रिकोण में कोणों का योग 180° है'।

6. गणित – एक सहज विधि

यह एक सरल व सहज विधि है। इसे विद्यार्थियों को समझने भर की जरूरत है। गणित के समीकरणों को याद किया जा सकता है, लेकिन अन्य विषयों की तरह इसके सवालों के जबाव को रटे नहीं जा सकते हैं। गैलीलियो के अनुसार 'गणित वह भाषा है, जिसमें भगवान ने ब्रह्मांड को लिखा है। ब्रह्माण्ड को तब तक नहीं पढ़ा जा सकता है जब तक हमने गणितीय भाषा नहीं सीखी और उन पत्रो से परिचित नहीं हो गए जिनमें यह गणितीय भाषा में वर्णित 'अक्षर' त्रिकोण, वृत्त और अन्य ज्यामितीय के आंकड़े वर्णित किए गए हैं, जिसके बिना किसी एक शब्द को समझना मानवीय रूप से परे है। यह एक सार्वभौमिक भाषा है। समीकरण बनाने के प्रतीक और संगठन दुनिया के हर देश में समान है। गणितीय गतिविधि का एक रूप है जो हर समय सही उत्तरों के महत्व के बजाय प्रक्रिया की प्रयोज्यता में विश्वास पर निर्भर करता है।

गणित पर लागू होने पर अंतर्ज्ञान में उदाहरण के लिए किसी प्रकार के संचालन के रूप में अभी तक नहीं बताए गए विचार का संक्षिप्तीकरण शामिल है। जब गणित तार्किक नियमों और एल्गोरिदम (Algorithm) बताते हुए बहुत औपचारिक तरीके से पढ़ाया जाता है, तो यह हमें गणितीय प्रक्रियाओं को करने की उसकी क्षमता में उसके आत्मविश्वास को बढ़ा देते हैं। शिक्षक अक्सर प्रत्यक्ष अंतर्ज्ञान के स्थान पर औपचारिक प्रमाण प्रदान करते हैं।

1.2.2 स्कूल के अन्य विषयों के साथ गणित का सह–संबंध

कला के साथ गणित

कला और गणित में छात्रों को विभिन्न कला रूपों और गणितीय विचारों में इन अमूर्त अवधारणाओं के अनुभव के माध्यम से समय और स्थान, लय और रेखा के बीच संबंधों की समझ शामिल है। गणितीय रूप से संबंधित सौंदर्य विचार, जैसे कि गोल्ड अनुपात (Gold Ratio), परिकल्पना, प्रदर्शन और बहुप्रतिरूपक कला रूपों में उपयोग किया जाता है।

नागरिक शास्त्र और नागरिकता के साथ गणित

गणित के अध्ययन में विकसित अवधारणाएं नागरिक और नागरिकता समझ की एक शृंखला पर प्रयोग होती हैं। गणितीय संरचना और तथ्य हमारे समाज के प्रमुख पहलुओं के साथ ही प्रमुख नागरिक शास्त्र अवधारणाओं में आवश्यक भूमिका निभाते हैं। नागरिक शास्त्र और नागरिकता के विशेष पहलुओं को गणितीय समझ की आवश्यकता होती है, जिसमें बहुमत शासन की अवधारणाएं, पूर्ण बहुमत, एक वोट एक मूल्य प्रतिनिधित्व और आनुपातिक मतदान प्रणाली शामिल हैं।

भूगोल में गणित

भूगोल अपने ब्रह्मांड में हमारी पृथ्वी का वैज्ञानिक और गणितीय वर्णन के अलावा कुछ नहीं है। पृथ्वी का ब्रह्मांड में आयाम और परिमाण की स्थिति और स्थिति दिन और रातों का गठन, चंद्र और सौर ग्रहण, अक्षांश और देशांतर, अधिकतम और न्यूनतम वर्षा, आदि भूगोल के कई सीखने के क्षेत्रों में से कुछ हैं जिन्हें गणित के अनुप्रयोग की आवश्यकता है। भूगोल में सर्वेक्षण करने वाले यंत्रों को गणितीय रूप से सटीक रखना होगा। मिट्टी की उर्वरता में परिवर्तन, वनों के वितरण में परिवर्तन, पारिस्थितिकी आदि में परिवर्तन होते हैं, जिन्हें गणितीय रूप से निर्धारित किया जाना होता है, ताकि उन पर वांछनीय नियंत्रण किया जा सके।

संचार के साथ गणित

गणित संरचना और गणितीय काम प्राकृतिक और मानव दुनिया को समझने में आवश्यक भूमिका निभाते हैं। गणित की भाषाओं के विकास इसके प्रायोगिक क्रियाकलापों के लिए महत्वपूर्ण हैं। छात्र अनुशासन के भीतर ही गणित की भाषा और अवधारणाओं का उपयोग करना सीखते हैं और अन्य क्षेत्रों में प्रतिरूपी और अन्य समस्या को हल

करने के लिए इसके अनुप्रयोग पर निर्भर करते हैं। इस प्रक्रिया में वे संक्रियाओं को चित्रित करने और वेन आरेख (Venn Diagram) और ट्री आरेख (Tree Diagram) जैसे परिणाम प्रदर्शित करने के लिए संचार उपकरणों की एक श्रृंखला प्रदान करते हैं।

टिप्पणी

अंग्रेजी के साथ गणित

गणित, अनुमान और सबूत के उपयोग सहित, संरचनाओं के विकास और बोलने में सुसंगत तर्क के लिए स्पष्ट श्रृंखला है। गणितीय संरचना शब्दार्थ वाक्य रचना और भाषा से और प्राकृतिक भाषाओं में सैद्धांतिक तर्क में अंतनिर्हित और मात्रात्मक के उपयोग से दृढ़ता से संबंधित है।

स्वास्थ्य और शारीरिक शिक्षा के साथ गणित

स्वास्थ्य और शारीरिक शिक्षा में, गणित उपकरणीका और प्रक्रियाएं प्रदान करता है जिनका उपयोग स्थितियों को प्रतिदर्श करने और क्षेत्रों में समस्याओं को हल करने के लिए किया जा सकता है, जैसेः

1. विभिन्न खेल स्पर्धाओं में समय की दूरी, वजन और चर के रूप में संख्या शामिल है।
2. योग्यता परीक्षण या शारीरिक गतिविधियों में प्रदर्शन के माध्यम से एकत्र किए गए आंकड़ों से परिणामों में प्रतिशत सुधार की गणना करना।

मानविकी–अर्थशास्त्र के साथ गणित

अर्थशास्त्र और मानविकी गणित के उपयोग के माध्यम से आर्थिक, राजनीतिक और सामाजिक घटनाओं की एक विस्तृत श्रृंखला प्रतिदर्श (Extended Chain Model) के लिए संबंधित हैं। उदाहरणों में जनगणना में सांख्यिकीय प्रतिदर्श और विश्लेषण का उपयोग, चुनाव परिणामों की भविष्यवाणी करने के लिए आबादी का नमूना लेना, और उपभोक्ता मूल्य सूचकांक और व्यापार जैसे आर्थिक संकेतकों का प्रतिरूप और पूर्वानुमान शामिल है।

इतिहास के साथ गणित

इतिहास के अध्ययन में जनसंख्या लेखा–चित्र और आरेख और अन्य सांख्यिकीय (Statistic) जानकारी सहित ऐतिहासिक जानकारी की एक श्रृंखला का विश्लेषण और व्याख्या शामिल है। गणित में विकसित अवधारणाओं और कौशल छात्र समझ और इतिहास स्रोतों की एक श्रृंखला की व्याख्या और प्रदर्शन ऐतिहासिक समझ में सबूत के रूप में उनकी प्रस्तुति का समर्थन करते हैं।

विज्ञान के साथ गणित

ज्ञान और कौशल छात्रों को गणित के विभिन्न आयामों के भीतर संलग्न विज्ञान के सभी पहलुओं के अपने अध्ययन में छात्रों का समर्थन करते हैं। विज्ञान में छात्र विशेष रूप से त्रुटि विश्लेषण और सूचना के तरीकों के आंकड़ों का संग्रह अनुमान में माप और

टिप्पणी

संख्या अवधारणाओं का उपयोग करते हैं। गणित क्षेत्र में संख्या का संचालन कौशल विकसित करने में छात्रों का समर्थन करता है। अभिलेख की उचित रूप से व्याख्या और प्रदर्शित करने के लिए, नमूने की खोज में, निष्कर्ष निकालना और सामान्यीकरण करना, इत्यादि शामिल है। विश्लेषण करने के आधार पर प्रायोगिक तथा प्रक्षेप और इंटरपोलेशन (Interpolation) के लिए भविष्यवाणियां उनके स्वयं के प्रायोगिक परिणामों से या विश्वसनीय दूसरे और आंकड़ों से की जा सकती हैं।

जैविक विज्ञान में गणित

गणित का विज्ञान में इतना महत्व है तथा विज्ञान की इतनी शाखाओं में इसकी उपयोगिता है कि गणितज्ञ एरिक टेम्पल बेल (Eric Temple Bell) ने इसे विज्ञान की साम्राज्ञी और सहायक की संज्ञा दी है। प्राणी विज्ञान में कुछ जीव–जंतुओं के वृद्धि प्रतिरूपों के विश्लेषण के लिए विमीय विश्लेषण की मदद ली जाती है।

जैव गणित गणितीय आनुवंशिकी, गणितीय पारिस्थितिकी, गणितीय न्यूरॉन–कार्यिकी, विशेष जैविक और चिकित्सा समस्याओं के लिए कंप्यूटर सॉफ्टवेयर का विकास, निषेचन के गणितीय सिद्धांत, जैव विज्ञान में गणितीय प्रोग्रामिंग और गणितीय सिद्धांत का उपयोग और जैव अभियांत्रिकी, जैव यांत्रिकी और जैव विद्युतीय पाठ्यक्रम में जैविक मूल सिद्धांतों के साथ–साथ ही गणित का विशेष महत्व है। गणित की मदद से ही विशेषज्ञ वैज्ञानिक विभिन्न रोग–विषयों के परीक्षण करते हैं तथा रोग का निर्धारण करते हैं। तथा इसमें आंकड़ों एवं सांख्यिकीय का विशेष रूप से महत्व होता है। इसके अतिरिक्त डीएनए (DNA) प्रोटीन और कोशिकीय संरचनाओं की ज्यामितीय, सांस्थिति और अन्य भौतिक विशेषता उनके कार्य व उनके कार्यों को बढ़ाने या बाधित करने के कार्यों पर इसके अध्ययन का विशेष महत्व है। वैज्ञानिक गणित का प्रयोग एक कोशिका का अंग या पूरे जीव के सभी अलग–अलग हिस्सों को एक साथ अध्ययन करने हेतु व ये भाग किस प्रकार अंर्तक्रिया करते हैं। कभी–कभी प्रयोगशाला प्रयोगों के माध्यम से किसी शोध प्रश्न का उत्तर देना असंभव या बहुत कठिन हो जाता है। इसलिए जीव विज्ञान उन प्रतिरूपों को विकसित करने के लिए गणित पर विश्वास करता है। जो अध्ययन कर रही प्रणाली चाहे वह मितस्तरीय कैंसर कोशिका हो या एक उभरती संक्रामक बीमारी का प्रतिनिधित्व करते हैं।

प्राणी जगत में संरचनात्मक, ऊर्जावान और गतिज अणुओं की विस्तृत श्रृंखला का वर्णन में गणितीय सांख्यिकीय का विशेष रूप से महत्व है, जो कि कोशिकीय विज्ञान में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। कोशिकीय जैव विज्ञान का एक प्रमुख लक्ष्य उन घटनाओं के समझना है जो बाहरी किंवदंतियों (हार्मोन, परिवहन प्रोटीन, एंटीजन, आदि) के लिए कोशिकाओं की प्रतिक्रिया को नियंत्रित करती हैं। गणितीय प्रतिरूपों ने तंत्रिका विज्ञान पर भी भारी प्रभाव डाला है। त्रि–आयामी संस्थिति और दो आयामी अंतर ज्यामिति गणित के दो अतिरिक्त क्षेत्र हैं जब यह जीव विज्ञान के साथ अंर्तक्रिया करता है। इसका अनुप्रयोग संरचनात्मक जीव विज्ञान के क्षेत्र में कोशिकीय और आणविक जीव विज्ञान के लिए भी बहुत महत्वपूर्ण है। यह क्षेत्र जीव विज्ञान, गणित और भौतिकी तीन विषयों के अंतःफलक पर है। जनसंख्या गतिशीलता में, हम जन्म, मृत्यु,

आव्रजन और उत्प्रवास के दिए गए नियमों के अधीन सूक्ष्म जीवों और जानवरों की जनसंख्या के विकास के लिए निर्धारक और प्रसंभात्यद प्रतिरूपों का अध्ययन करते हैं। यह प्रतिरूप अंतर समीकरणों, अंतर समीकरणों, अंतर–अंतर समीकरणों और एकात्मक समीकरणों के विषय में निहित हैं।

टिप्पणी

आंतरिक शारीरिक द्रव गतिशीलता में, हम हृदय और अन्य प्रणालियों के जटिल तंत्र में रक्त और अन्य तरल पदार्थों के प्रवाह का अध्ययन करते हैं। हम मानव या पशु शरीर की व्यक्तिगत कोशिकाओं और मानव जोड़ों में श्लेष तरल पदार्थ (Synovial Fluid) के प्रवाह के लिए फेफड़ों के वायुमार्ग और धमनियों के माध्यम से ऑक्सीजन के प्रवाह का भी अध्ययन करते हैं। बाहरी शारीरिक द्रव गतिशीलता में हम पानी में सूक्ष्म जीवों और मछली के तैराकी और हवा में पक्षियों की उड़ान का अध्ययन करते हैं।

गणितीय पारिस्थितिकी में, हम खाद्य श्रृंखला (Food Chain) और प्रतिरूपों का अध्ययन करते हैं जहां भौगोलिक अंतरिक्ष में प्रजातियों पर विचार किया जाता है। पौधों और जानवरों में महामारी को नियंत्रित करने के लिए महामारी प्रतिरूपों पर विचार किया जाता है और विभिन्न गणितीय प्रतिरूप कीट नियंत्रण की गंभीर जांच की जाती है। गणितीय आनुवंशिकी में, हम पीढ़ी से पीढ़ी के लिए आनुवांशिक विशेषताओं की विरासत और आनुवांशिक रूप से पौधे और जानवरों की प्रजातियों में सुधार के लिए विधि का अध्ययन करते हैं। आनुवांशिक कोड और अनुवांशिक अभियांत्रिकी में अनुसंधान के डिकोडिंग में काफी गणितीय प्रतिरूप शामिल है। महामारी के प्रसार का गणितीय सिद्धांत अंतर समीकरणों की प्रणालियों को हल करके किसी भी समय अतिसंवेदनशील, संक्रमित और प्रतिरक्षा व्यक्तियों की संख्या निर्धारित करता है।

औषध बलगति में, हम मानव शरीर के विभिन्न भागों में दवाओं या औषधियों के प्रसार का अध्ययन करते हैं। कैंसर और अन्य रोगों के लिए गणितीय प्रतिरूपों में, हम गणितीय विकसित विभिन्न उपचारों के तुलनात्मक प्रभावों के अध्ययन के लिए प्रयुक्त करते हैं। ठोस जैव यांत्रिकी मांसपेशियों और हड्डियों में तनाव और तनाव से संबंधित है, जिसमें फ्रैक्चर और खोपड़ी आदि में चोटें हैं और गैर–सममित आकार और इन पदार्थों की समग्र संरचनाओं के कारण बहुत जटिल है। इसमें आंशिक अंतर समीकरणों का समाधान शामिल है। प्रदूषण नियंत्रण प्रतिरूप में, हम इस बात का अध्ययन करते हैं कि दिए गए व्यय के साथ वायु, जल या शोर में प्रदूषण के स्तर में अधिकतम कमी कैसे प्राप्त की जाए या न्यूनतम लागत के साथ प्रदूषण में दी गई कमी कैसे प्राप्त की जाए।

रसायन विज्ञान में गणित

गणित भौतिक रसायन विज्ञान विशेष रूप से उन्नत विषयों जैसे क्वांटम या सांख्यिकीय यांत्रिकी में अत्यंत महत्वपूर्ण है। क्वांटम सिद्धांत, रैखिक बीजगणित पर काफी निर्भर करता है और इस तरह के हिलबर्ट स्थान (Hilbert Space) और हैमिल्टन ऑपरेटरों (Hamiltonian Operator) के रूप में गणितीय तथा भौतिक विषयों के ज्ञान की आवश्यकता है। सांख्यिकीय यांत्रिकी संभावना सिद्धांत पर काफी निर्भर करता है। रसायन विज्ञान के अन्य क्षेत्रों में भी गणित की एक महत्वपूर्ण राशि का उपयोग करता

टिप्पणी

है। उदाहरण के लिए, अधिकांश आधुनिक अवरक्त और नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद वर्णक्रम प्राप्त करने के लिए फोरियर ट्रांसफॉर्म (Fourier Transform) का उपयोग करते हैं। यहां तक कि जैव रसायन में महत्वपूर्ण विषय हैं जो गणित पर काफी हद तक निर्भर है। यहां तक कि दवा कंपनियों को गणितज्ञों की टीमों को नई दवाओं की प्रभावशीलता या खतरों के बारे में रोग विशेषज्ञ आंकड़ों पर काम करने की आवश्यकता होती है। रसायन विज्ञान और जीव विज्ञान में शुद्ध वैज्ञानिक अनुसंधान भी गणितज्ञों की जरूरत है, विशेष रूप से कंप्यूटर विज्ञान में उच्च डिग्री के साथ उन, जटिल प्रक्रियाओं के प्रतिरूप विकसित करने में मदद करने के लिए उपयोग किया जाता है।

सभी रासायनिक संयोजन और उनके समीकरण कुछ गणितीय सिद्धांतों पर निर्भर करते हैं। रासायनिक यौगिकों का गठन गणितीय गणनाओं द्वारा नियंत्रित होता है। उदाहरण के लिए, पानी एक यौगिक है, इसका गठन तब संभव है जब हाइड्रोजन के वास्तव में दो परमाणु ऑक्सीजन के एक परमाणु के साथ जुड़ता है। किसी भी रसायन के निर्माण में कुछ गणितीय अनुपात होता है जिसमें विभिन्न तत्वों को मिलाना पड़ता है। जैविक यौगिकों में तत्वों के आकलन के लिए प्रतिशत और अनुपात का उपयोग किया जाना चाहिए। कार्बनिक यौगिकों के आणविक वजन, आणविक ऊर्जा, एन्थेलपी, अभिक्रिया की दर गणितीय सांख्यिकी पर निर्भर है। इसके अतिरिक्त उष्मागतिकी में उष्मा, कार्य, तापक्रम तथा उनके ऊर्जा, विकिरण एवं भौतिक गुणों से संबंधों में गणित अपनी महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। रासासनिक बलगति में अभिक्रिया की दर, मुक्त उष्मा की गणना, इत्यादि, की गणना में गणित का विशेष महत्व है।

1.2.3 स्कूलों में गणित पढ़ाने का इतिहास

'गणित का इतिहास सभ्यताओं और संस्कृति की प्रगति की कहानी है। ''गणित सभ्यता का दर्पण है''। एक देश की सभ्यता और संस्कृति में परिलक्षित होता है गणित का ज्ञान भंडार है। गणित संरक्षण, संस्कृतियों का संचरण पदोन्नति में मदद करता है। कविता, चित्रकला, जैसी विभिन्न सांस्कृतिक कलाएं मूर्तिकला गणितीय ज्ञान का उपयोग करता है। समरूपता, ज्यामितीय, समानता, रूप और आकार जैसी अवधारणाएं कला के सभी काम का आधार बनाती हैं।

उदाहरण– सभी कविता और संगीत गणित का उपयोग करता है। प्रश्नोत्तरी, पहेली, और जादू वर्ग दोनों मनोरंजक और चुनौतीपूर्ण हैं। इसलिए, गणित का शिक्षण हमारे स्कूलों में अपरिहार्य है।

सभी प्राचीन सभ्यताओं में गणित विधा की पहली अभिव्यक्ति गणना प्रणाली के रूप में प्रकट होती है। अति प्रारंभिक समाजों में संख्याएं रेखाओं के समूहों द्वारा प्रदर्शित की जाती है। यद्यपि बाद में, विभिन्न संख्याओं को विशिष्ट संख्यात्मक नामों और चिन्हों द्वारा प्रदर्शित किया जाने लगा। भारत के दशमलव प्रणाली हड़प्पाकाल के अस्तित्व में थी जैसा कि हड़प्पा की खोज एवं मापों के विश्लेषण से ज्ञात होता है। उस काल में 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, और 500 वाले बाट पहचान में आए थे। इसके अतिरिक्त वैदिक काल में गणितीय गतिविधियों के अभिलेख वेदों में

अधिकतर धार्मिक कर्मकांडों के साथ मिलते हैं। अन्य कई कृषि आधारित प्राचीन सभ्यताओं की तरह यहां भी अंकगणित और ज्यामिती का अध्ययन धर्मनिरपेक्ष क्रियाकलापों से भी प्रेरित था। अंकगणितीय क्रियाओं जैसे योग, घटाना, गुणा, भाग, वर्ग, घन और मूल नारद विष्णु पुराण में वर्णित है। ज्यामिती, रेखा गणित के उदाहरण 800 ई.पू. में बौधरान के शुल्व सूत्र में और 600 ई.पू. आपस्तम्ब सूत्र में मिलते हैं। विगत वर्षों से पाठशाला में छात्रों को अध्ययन कराए जाने वाली पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem) का पूर्ण विवरण बौधायन सूत्र में इस प्रकार मिलता है 'किसी वर्ग के विकर्ण पर बने हुए वर्ग का क्षेत्रफल उस वर्ग के क्षेत्रफल का दुगुना होता है।

टिप्पणी

1.2.4 स्कूली पाठ्यक्रम में गणित की आवश्यकता, महत्व और स्थान

गणित पाठ्यक्रम विषय को पढ़ाने के प्रस्तावित उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए एक साधन है। व्यापक शब्दों में यह छात्र के सभी अनुभवों का योग है कि वह स्कूल, घर में और शिक्षक और छात्र के बीच अनौपचारिक संपर्कों में गुजरता है। माध्यमिक स्तर पर गणित में पाठ्यक्रम के महत्व और विषय–वस्तु को ऊपर चर्चा किए गए तथ्यों और महत्व के परिणाम के रूप में सूचीबद्ध किया जा सकता है। इनका संक्षेप में यहां उल्लेख किया गया है।

1. एक अच्छा गणित कार्यक्रम नागरिकों और एक व्यक्ति के रूप में विशेष जरूरतों के रूप में आम जरूरतों को बढ़ावा देने के लिए उपयुक्त सीखने के अनुभवों को पेश करना चाहिए। प्रारंभिक और माध्यमिक शिक्षा के समग्र प्रयोजनों के भीतर वांछनीय छात्र विकास पर मुख्य विचार दिया जाना चाहिए। जो निम्नलिखित है–
   (क) गणित की बुनियादी अवधारणाओं, योग्यता और कौशल को विकसित करने का प्रयास करें।
   (ख) संख्या सिद्धान्त के बारे में बुनियादी बातें, आकार और स्थानिक सोच की पहचान, बुनियादी बीजगणित, ज्यामिति, अंश दशमलव और आंकड़ों की निर्धारण क्षमता।
   (ग) उन व्यवहारों पर जोर दें जो विद्यार्थियों के लिए उपयोगी और बेहतर हो और नैतिक जीवन के लिए उपयुक्त हो।
   (घ) समाज के विकास में गणित के महत्व और सार्मथ्य का मूल्यांकन करें।
   (ङ) व्यावसायिक संभावनाओं की खोज।
   (च) विश्लेषण करने के लिए और रोजमर्रा की जिंदगी की स्थितियों की समस्याओं को हल करने की क्षमता विकसित और संचार की एक विधि के रूप में गणित में प्रवीणता का विकास, इत्यादि।
2. शिक्षा के क्षेत्र में किसी भी विषय का महत्व एवं स्थान इस बात पर निर्भर करता है, कि यह विषय शिक्षा के उद्देश्य प्राप्त करने में किसी सीमा तक सहायक हो रहा है। यदि कोई विषय शिक्षा की प्राप्ति में सहायक सिद्ध होता है तो उस

टिप्पणी

विषय की महत्ता अधिक हो जाती है। प्राचीन काल से गणित अन्य विषयों की अपेक्षा शिक्षा के उद्देश्य की प्राप्ति में सहायक सिद्ध हुआ।

3. किसी भी विषय या पाठ्यक्रम की उपयोगिता इस बात पर निर्भर करती है कि वह दैनिक जीवन के लिए कितना उपयोगी है तथा उद्देश्य प्राप्ति के लिए कितना उपयोगी है और छात्रों के मस्तिष्क विकास के लिए कितना उपयोगी है। अतः हमें निरीक्षण से पता चलता है कि गणित इन सभी विषयों की उद्देश्यों की पूर्ति में खरा उतरता है।
4. अधिक ध्यान अब उच्च स्तर पर गणित के बाद के अध्ययन के लिए विद्यार्थियों को तैयार करने के लिए दिया जा रहा है।

कई पाठ्यक्रम के विकासशील सीखने की स्थितियों की योजना बनाने के लिए सीखने के चार चरणों का उपयोग करें। ये चरण निम्न हैं—

(क) जन्म से चार या पांच वर्ष की आयु तक पूर्व—वैचारिक चरण।

(ख) पांच से आठ साल की उम्र से सहज चरण।

(ग) आठ से तेरह साल की उम्र तक ठोस परिचालन चरण।

(घ) बारह या तेरह वर्ष की आयु से औपचारिक परिचालन चरण, जहां तर्क प्रक्रिया को सीखना, मूल्यांकन करना, परिकल्पना बनाना, सामान्यीकरण, अनुमानित करना और साबित करने पर जोर दिया जाता है।

गणित विज्ञान विषय का आधार है इसके बिना विज्ञान का अस्तित्व असंभव है। विज्ञान की सभी गणनाएं, सिद्धांत तथा निष्कर्ष गणित की सहायता से निकाले जाते हैं। गणित बच्चों की तार्किक क्षमता का विकास करता है। यह एक तार्किक विषय है तथा प्रत्येक समस्या को हल करने के लिए तर्कपूर्ण विचार करना पड़ता है। इसलिए बच्चों की तार्किक क्षमता बढ़ती है। यह छात्रों की सर्वांगीण विकास में सहायक है।

1.2.5 गणितीय विवरणों की सत्यापन प्रक्रिया प्रमाण, प्रतिपरीक्षा—उदाहरण, अनुमान और भ्रम

सत्यापन, गैर—गणितीय ग्रंथों के पढ़ने की तुलना में, पाठक तर्क की समझ में कुछ अतिरिक्त प्रयास करने के लिए की आवश्यकता है। सत्यापन में आमतौर पर अधिक समय लगता है, सत्यापनकर्ता कई बार इसके पूरे प्रमाण या भागों पर विचार कर सकता है। गणितीय प्रमाण को अक्सर गणित का एक महत्वपूर्ण आधार माना जाता है। व्यवसायिक गणितज्ञ विकासशील अनुमान लगाते है फिर उस पर कार्य करते है कि क्या वे अनुमान सभी स्थितियों में प्रयोग होते हैं। कुछ स्थिति में प्रयोग है या किसी स्थिति में प्रयोग नहीं है। प्रमाण और औचित्य परिशुद्ध व ज्ञात गणितीय तथ्यों एवं गुणों पर आधारित होने चाहिए। गणित की समझ विकसित करने के लिए कक्षाओं में प्रमाणित करने की प्रक्रिया भी एक अच्छी गतिविधि हो सकती है। इससे विद्यार्थी गतिविधियों में व्यक्त रहते हैं। तथा यह वास्तविक गणितज्ञों द्वारा की गई गतिविधि है।

अनुमान

अनुमान कभी–कभी, बच्चे विभिन्न घटकों के बीच संबंधों का पता लगाते हैं, प्रतिरूपों की पहचान करते हैं और टिप्पणियों के आधार पर कुछ प्रश्नों के परिणामों को विकसित करते हैं। लेकिन, इस बात की कोई गारंटी नहीं है कि वे परिणाम सही हैं या गलत है। इसे ज्ञान के संगठित निकाय के रूप में स्वीकार करने के लिए हमें तर्क के माध्यम से इसे साबित करने की जरूरत है। यह इस स्तर पर है कि बच्चों को आम तौर पर तार्किक तर्क और स्पष्टीकरण की श्रृंखला के रूप में साबित करने के लिए या विकसित परिणाम असत्य साबित भी हो सकते हैं। परिणामों पर पहुंचने के लिए गणितीय समस्याओं को हल करने या घटकों के बीच संबंधों की जांच करने में भी यही देखा जाता है कि स्तर दर स्तर का परिणाम सत्य है या नहीं है जबकि बच्चों को गणितीय समस्याओं के समाधान खोजने की कोशिश, वे अनुमान है, जो उनके लिए प्रमाण उस प्रश्न के किए जाने हल के लिए उचित है या नहीं है। 'अनुमान' शब्द का प्रयोग गणितीय समस्याओं में उपयुक्त होने वाले उचित हल के लिए किया जाता है। उदाहरणार्थ यदि छात्र किसी समस्याओं को हल करने के लिए उस प्रश्न में उचित समीकरण का प्रयोग करें जो उस समस्या का सुविधापूर्वक हल निकलें। अनुमान हमारे दैनिक जीवन का एक अनिवार्य हिस्सा है, क्योंकि ज्यादातर संदर्भों में हम किसी माप के वास्तविक मान की अपेक्षा अनुमान लगाकर करते हैं। उदाहरण के लिए यदि हमें स्थान A से स्थान B की ओर जाना होता है, हमारी रुचि यात्रा पूरे होने में लगने वाले वास्तविक समय की अपेक्षा यात्रा की अवधि का अनुमान लगाने में रहती है। अनुमान करते समय, विद्यार्थी अपने सामने मौजूद समस्या को हल करने के लिए आवश्यक सोच प्रक्रिया पर वास्तव में विचार शुरू कर सकते हैं, इन बातों के दबाव में बिना कि उन्हें एकदम सही उत्तर प्राप्त करना है और उन्हें सही गणनाओं के विस्तार में जाना है। अनुमान लगाना सोच की रूपरेखा बनाना है, जो विकसित होगी साथ ही उन क्षेत्रों का बोध होता है, जहां समस्या का समाधान हो सकता है।

टिप्पणी

सबूत

प्रमाण वह प्रक्रिया है जो बच्चों को परिकल्पना की वैधता स्थापित करने के लिए तार्किक तर्कों और ठोस तथ्यों को विकसित करने में मदद करती है, जो प्रेरक तर्कों के परिणामस्वरूप उभरी है। इस प्रकार, एक गणितीय परिकल्पना साबित करने में, हम सामान्य मामले से विशेष उदाहरणों में जाते हैं। गणितीय प्रमाण कठिन हो सकते है, लेकिन गणित और प्रमाण के प्रारूप दोनों के उचित पृष्ठभूमि ज्ञान से विजय प्राप्त की जा सकती है। दुर्भाग्य से प्रमाण बनाने का तरीका सीखने का कोई त्वरित और आसान तरीका नहीं है। अपने प्रमाण को तार्किक रूप से तैयार करने के लिए उचित प्रमेयों और परिभाषाओं के साथ आने ही बुनियादी आधार होने चाहिए।

भ्रम

भ्रम एक गलत या भ्रामक धारणा या गलत तथ्यों या अमान्य तर्क के आधार पर राय है या हम कह सकते है कि भ्रम कुछ जाहिरा तौर पर तार्किक संक्रमण है कि लोगों

टिप्पणी

को लगता है कि किया जा सकता है, लेकिन है कि वास्तव में नहीं किया जा सकता है। यह सोच में एक त्रुटि की तरह है। एक शिक्षक के रूप में, आपको यह पहचानना होगा कि आपके छात्रों के पास किस प्रकार के गणित में सामान्य भ्रम हैं। फिर, आप ऐसे तरीके ढूंढ सकते हैं जो बच्चों को इन भ्रम और गलतियों से बचने में मदद करते हैं। ऐसा ही एक तथ्य यह है कि हम एक संख्या को शून्य से विभाजित नहीं कर सकते। अक्सर हम इस तथ्य को लागू करना भूल जाते हैं जो भ्रम की ओर जाता है।

प्रतिपरीक्षा

प्रतिपरीक्षा एक विशेष प्रकार का उदाहरण है जो किसी कथन या प्रस्ताव को गलत साबित करता है। संभावित प्रमेय की सीमाओं को साबित करने के लिए अक्सर गणित में प्रमेय या उपप्रमेय का उपयोग किया जाता है। बीजगणित, ज्यामिति, और गणित की अन्य शाखाओं में, एक प्रमेय प्रतीकों या एक सूत्र द्वारा व्यक्त एक नियम है। प्रतिपरीक्षा मददगार होते हैं क्योंकि वे गणितज्ञों के लिए जल्दी से यह दिखाना आसान बनाते हैं कि कुछ अनुमान, या विचार झूठे हैं। यह गणितज्ञों को समय बचाने और साध्य प्रमेय का उत्पादन करने के लिए विचारों पर अपने प्रयासों को ध्यान केंद्रित करने की अनुमति देता है।

1.2.6 गणित में रचनात्मक सोच

वैश्विक प्रतिस्पर्धा के इस दौर में रचनात्मक सोच बहुत महत्वपूर्ण है, क्योंकि आधुनिक जीवन के सभी पहलुओं में जटिलता समस्याओं का स्तर अधिक है। रचनात्मक सोच में दिमाग के दो हिस्सों की जरूरत होती है। तर्क और अंतर्ज्ञान के बीच संतुलन आवश्यक है। यदि किसी में रचनात्मक रूप से सोचने की क्षमता है, तो वे वास्तविक जीवन में अपनी समस्याओं को विभिन्न संभावित तरीकों से हल कर सकते हैं। रचनात्मक तथ्यों के तहत् व्यक्ति अलग–अलग दृष्टिकोण से किसी समस्या को देख सकते हैं। यह दृष्टिकोण व्यक्ति को समस्या को हल करने के लिए विभिन्न प्रकार के उपयुक्त वैकल्पिक समाधान प्राप्त करने की अनुमति देता है।

सीखने में रचनात्मकता की क्षमता को देख, प्रयोग, संबद्ध, और जालक्रम द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। शिक्षकों को छात्रों को रचनात्मक सोच बनाने की जरूरत है।

1. ऐसे कार्य देना जिनका कोई विविधता उत्तर हो।
2. असमान्य उत्तरों की जांच करना।
3. परिणाम नहीं प्रक्रिया पर जोर देना।
4. छात्रों को प्रोत्साहित करने की कोशिश और ज्ञान की अपनी व्याख्या का निर्धारण करना।
5. संरचित और सहज गतिविधि के बीच संतुलन स्थापित करना।

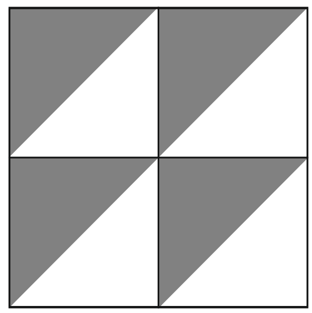
शिक्षण में रचनात्मकता पिछले कुछ वर्षों से अत्यधिक चलन में आई है। रचनात्मक का तात्पर्य कुछ हद तक विद्यार्थियों को शिक्षण में आनंद देने और स्वयं

टिप्पणी

सोचने से संबंधित है। त्रिकोणमिति रचनात्मक गणित में अहम भूमिका निभाती है। यह आकृति और स्थान की अवधारणाओं को अनुपात, निगमन और गणितीय प्रमाण जैसे अन्य गणितीय विचारों से जोड़ती है। जैसे कि बहुभुज को दो समकोण त्रिभुज में बांटा जा सकता है, जो निम्न प्रकार है।

उदाहरण

नीचे एक वर्ग दिया–



चित्र 1.1 *वर्ग का समकोण त्रिभुजों में विभाजन*

(a) एक चतुर्भुज बनाते हैं, जिसमें ऊपर की छवि के साथ एक ही क्षेत्र होने चाहिए।

(b) इस तस्वीर को बनाने के लिए अलग–अलग तरीके दिखाएं।

(c) वर्ग से संबंधित कम से कम दो अलग–अलग प्रश्न बनाएं और इसे हल करें।

(d) आपके द्वारा बनाए गए प्रश्नों से, क्या एक से अधिक समाधान हैं।. यदि है, तो अलग–अलग उत्तर दिखाएं! यदि ऐसा नहीं है, तो एक और प्रश्न बनाएं कि समाधान एक से अधिक हैं।

1.2.7 गणित का कलात्मक बोध

गणित एक सुंदर तथा सुरुचिपूर्ण विषय है। जो कि विभिन्न कलाकृतियों से परिपूर्ण है। तथा गणित को कला के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं कुछ गणितज्ञों का मत है, कि गणित का कार्य आविष्कार के खोज के करीब है। गणितज्ञों का मानना है कि जिस ब्रह्मांड में हम रहते हैं, उस पर किसी भी निर्भरता के बिना गणित के विस्तृत व सटीक परिणामों को यथोचित रूप से लिया जा सकता है। उदाहरण के लिए वे तर्क देंगे कि सिद्धांत प्राकृतिक संख्याएं मौलिक रूप से मान्य है, एक तरह से जिसे किसी विशिष्ट संदर्भ की आवश्यकता नहीं है। कुछ गणितज्ञों ने इस दृष्टिकोण को स्पष्ट किया है कि गणितीय सुंदरता आगे की सच्चाई है।

सौंदर्य कारणों से हम उन्हीं कारणों से गणित का अध्ययन करते हैं जिनमें हम कविता या संगीत या चित्रकला या साहित्य का अध्ययन करते हैं। सीधे शब्दों में कहें, हम गणित का अध्ययन करते हैं क्योंकि यह मनुष्य के लिए गणितीय ज्ञान सबसे समुचित विषयों में से एक है।

''एक गणितज्ञ, एक चित्रकार या एक कवि की तरह, प्रतिरूप के एक निर्माता है।'' गणितज्ञ के प्रतिरूप, जैसे चित्रकारी या तथ्य सुंदर होना चाहिए। रंगों या शब्दों की तरह विचारों को एक साथ सामंजस्यपूर्ण तरीके से उचित होना चाहिए।

टिप्पणी

कुछ गणितज्ञ अपने अविष्कार से और सामान्य रूप से गणित से सौंदर्य या कलात्मक बोध प्राप्त करते हैं। इसे ही गणितीय सौंदर्य कहा जाता है। गणितज्ञ इसे यह कहकर अभिव्यक्त करते हैं कि गणित सभी विषयों में सबसे सुन्दर है। गणितज्ञ गणित को कला के रूप में ही समझते है। इसके अतिरिक्त इसे रचनात्मक गतिविधि के रूप में भी समझा जा सकता है। एक विज्ञान के रूप में गणित की छवि किसी तपस्वी की साधना के समान है। प्रत्यक्षीकरण और निरुपण ऐसे कौशल है जिनको विकसित करने में गणित सहायक हो सकता है। परिमाण आकार व रूपों का प्रयोग करके स्थितियों का प्रतिरूपपण करने में गणित का सर्वश्रेष्ठ प्रयोग होता है। गणितीय अवधारणाओं को भी कई तरीकों से निरुपित किया जा सकता है। और ये निरूपण विभिन्न संदर्भों में विभिन्न प्रयोजनों का कार्य करते हैं। इस प्रकार यह गणित की सामर्थ्यता को बढ़ावा देता है। उदाहरण के लिए एक भिन्न (x/y) को बीजगणितीय तौर पर निरूपित किाा जा सकता है। तथा इसे आलेख के रूप में भी निरूपित किया जा सकता है। अब अगर x/y को एक पूर्ण इकाई के अंश के रूप में प्रयुक्त किया गया है। तो वह दो अंकों x तथा y के भागफल को भी इंगित कर सकता है। गणित व अन्य विषयों के बीच संबंध बनाने की भी अपनी महत्ता व विशेषता है। यदि छात्र आलेख बनाते हैं तो उन्हें भू–विज्ञान सहित विभिन्न विज्ञानों के संबंध के बारे में सोचने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए। अर्थात् गणित ज्यामितीय रेखाओं, अक्षरों के प्रतिरूप व सुंदरता से परिपूर्ण विषय है।

1.2.8 गणित और समाज

आजकल समाज को प्रभावित करने वाले मुख्य मुद्दों में निम्नलिखित तथ्यों को संश्लेषित किया जा सकता हैः

- राष्ट्रीय सुरक्षा
- व्यक्तिगत सुरक्षा
- सरकार
- राजनीतिशास्त्र
- अर्थशास्त्र
- सामाजिक और पर्यावरणीय प्रभाव
- राष्ट्रों के बीच संबंध
- सामाजिक वर्गों के बीच संबंध
- प्राकृतिक और सांस्कृतिक संसाधनों का संरक्षण

गणित, गणितज्ञ और गणित शिक्षक इन सभी मुद्दों के साथ गहराई से जुड़े हुए हैं। इतिहास हमें बताता है कि तकनीकी, औद्योगिक, आर्थिक और राजनीतिक परिसरों में गणितीय उपकरणों को विकसित किया है क्योंकि गणित अपनी सतत प्रगति के भौतिक स्थानों के लिए इन परिसरों पर निर्भर किया गया है। यह भी व्यापक रूप से मान्यता प्राप्त है कि गणित विचार का सबसे सार्वभौमिक मोड़ है। वास्तविक रूप से गणित विषय को इतना महत्व देने, अनिवार्य विषय बनाने तथा इसके अध्ययन से बच्चों को विभिन्न लाभ होते हैं, जिन्हें हम गणित शिक्षण में पढ़ाए जाने से होने वाले लाभ का अध्ययन गणित शिक्षण के मूल्यों में किया जाता है। मनुष्य एक सामाजिक प्राणी है तथा सामाजिक जीवन एक दूसरे के परस्पर सहयोग पर निर्भर करता है। सामाजिक जीवन यापन के लिए गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है। क्योंकि समाज में लेन–देन व्यापार उद्योग आदि व्यवसाय गणित पर ही निर्भर है। एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाना तथा समाज के विभिन्न अंगों को निकट लाने में सहायक विभिन्न अविष्कारों, सामाजिक कठिनाइयों में मनुष्य को सहायता देने के लिए गणित का महत्वपूर्ण योगदान है। क्योंकि वैज्ञानिक खोजों का आधार ही गणित है। इसके अतिरिक्त आदर्श शिक्षा वही है जो बालक को प्रारंभ से ही समाज के लिए योग्य नागरिक बनाने में सहायता प्रदान करती है। नेपोलियन बोनार्पाट (Napolean Bonapart) ने गणित शिक्षण के सामाजिक महत्व को स्वीकार करते हुए स्पष्ट किया कि गणित की उन्नति तथा वृद्धि देश की संपन्नता से संबंधित है। इस प्रकार समाज की उन्नति को उचित ढंग से समझने के लिए ही नहीं बल्कि समाज को आगे बढ़ाने के लिए गणित महत्वपूर्ण भूमिका निभा रही है। वर्तमान में हमारी सामाजिक संरचना इतनी वैज्ञानिक एवं सुव्यवस्थित नजर आती है जिसका श्रेय भी गणित को ही जाता है। गणित के अभाव में संपूर्ण सामाजिक व्यवस्था एवं संरचना का स्वरूप ही बिगड़ जाएगा।

हर सभ्यता में और हर समय में, शिक्षा के कुछ रूप जटिल शिक्षा प्रणालियों के माध्यम से सामाजिक प्रणालियों से, प्रमुख लक्ष्य से संबंधित होते हैंः

- रचनात्मकता को बढ़ावा देने के लिए
- लोगों को अपनी क्षमता और उनकी क्षमता के प्रगति के लिए
- नागरिकता को बढ़ावा देने के लिए
- मूल्यों का प्रसारण और समाज में अधिकारों और जिम्मेदारियों के लिए

1.2.9 कुछ प्रख्यात गणितज्ञों का योगदान– आर्यभट्ट, श्रीनिवास रामानूजन, भास्कराचार्य, यूक्लिड, पाइथागोरस तथा रेने डेसकार्टेस

आर्यभट्ट (Aryabhata)

आर्यभट्ट का जन्म 475 पूर्वाह्न में हुआ था। अन्य मान्यता के अनुसार जन्म महाराष्ट्र के अश्मक में हुआ था। यद्यपि आर्यभट्ट के जन्म के वर्ष का आर्यभटीय में स्पष्ट उल्लेख है, तथा उनके जन्म के वास्तविक स्थान के बारे में भी विवाद है। कुछ मानते हैं कि उनका जन्म पटना के समीप कुसुमफर में हुआ था। कुछ का मानना है कि वे नर्मदा

टिप्पणी

और गोदावरी के मध्य स्थित क्षेत्र में पैदा हुए थे, जिसे अश्मक के रूप में जाना जाता है। आर्यभट्ट द्वारा रचित तीन ग्रंथों की जानकारी आज भी उपलब्ध है। जिनके नाम दशगीतिका, आर्यभट्टीयम् तथा तंत्र है। इन्होंने आर्यभट्टीयम् नामक महत्वपूर्ण ज्योतिष ग्रंथ लिखा, जिसके अंतर्गत वर्गमूल, घनमूल, समान्तर श्रेणी तथा विभिन्न प्रकार के समीकरणों का वर्णन है। उन्होंने अपने आर्यभट्टीयम् नामक ग्रंथ में तीन पृष्ठों में समा सकने वाले 33 श्लोकों में गणित विषयक सिद्धांत तथा 5 पृष्ठों में 75 श्लोकों में खगोल–विषयक सिद्धांन्त का भी उल्लेख किया है। ऐतिहासिक अभिलेखों से पुरातत्वविदों का मानना था कि उन्होंने कुसुमपुरा में अपनी आगे की पढ़ाई जारी रखी। क्योंकि कुसुमापुरा में उनकी प्रमुख खगोलीय वेधशाला स्थित थी। इसलिए हम यह पता लगा सकते हैं कि आर्यभट्ट ने ज्यादातर समय वहां बिताया। इसके अलावा कुछ इतिहासकारों का मानना है कि वह कुसुमपुरा में नालंदा विश्वविद्यालय के प्रमुख भी थे। हालांकि ये सिद्धांत सभी संभावित आधार पर हैं क्योंकि उनके जीवनकाल में लिखी गई पुस्तकों आर्यभट्टीय के अलावा कोई उचित सबूत नहीं था।

इसके अलावा, उन्होंने कई किताबें लिखीं जो अभी भी हमें विभिन्न गणनाओं को करने में मदद करते हैं। आर्यभट्ट कई युवाओं के लिए एक मिसाल के रूप में थे। क्योंकि उन्होंने बहुत कम उम्र से ही शिक्षाविदों में उत्कृष्ट प्रदर्शन किया। इसके अलावा, उन्होंने समाज में उनके कार्यों और सिद्धांतों का आज तक बहुत योगदान दिया और इसलिए आज भी उन्हें सम्मानित किया जाता है।

गणित के क्षेत्र में आर्यभट्ट का बहुत योगदान रहा। उदाहरण के लिए, वह विभिन्न त्रिकोणमितीय संरचनाओं की खोज की थी जो आधुनिक युग में भी हमारे लिए उपयोगी हैं।

इसके अलावा, π के मान के लिए उनकी खोज गणित में जटिलताओं को आसान। इन सबसे ऊपर, वह संख्या शून्य जो गणित के इतिहास में अपने प्रमुख योगदान में से एक है। सबसे उल्लेखनीय बात यह है कि हर सिद्धांत उनकी पुस्तक 'आर्यभट्टीयम्' में है जो खगोलीय सिद्धांतों को बताता है। इसके अलावा, उनकी पुस्तक गणित और खगोल विज्ञान के विभिन्न वर्गों में विभाजित है।

भारतीय गणित शास्त्र के इतिहास में आर्यभट्ट एक बहुत ही सम्मानीय एवं प्रभावपूर्ण नाम है। इतिहास में जहां–तहां हम इस नाम की पुनरावृत्ति पाते हैं। ऐसी अवस्था में यह कठिन हो जाता है कि प्राचीनकाल में इस नाम के कितने गणितज्ञ भारत में हुए परंतु इतना तो निर्विवाद रूप से आज माना ही जा सकता है कि इस नाम के कम से कम दो गणितज्ञ तो भारतभूमि ने अवश्य पैदा किए। इन दोनों से एक जो 476 ई. में वर्तमान पटना के निकट कुसुमपुर (पाटलिपुत्र) नामक नगर में पैदा हुए थे और जिन्होंने 499 ई. में 'आर्यभट्टीयम्' नामक पुस्तक लिखी थी, उन्हें 'आर्यभट्ट प्रथम' के नाम से जाना जाता है। इसी नाम के एक और गणितज्ञ इनके बाद में हो चुके हैं, जिन्होंने 950 ई. के लगभग 'महाचार्य सिद्धांत' नामक पुस्तक की रचना की थी। अतः इन्हें 'आर्यभट्ट द्वितीय' के नाम से जाना जाता है। आर्यभट्ट प्रथम (499 ई.) के समय

से भारतीय गणित विज्ञान का स्वर्णिम युग आरंभ हुआ, इस बात में कोई संदेह नहीं है।

टिप्पणी

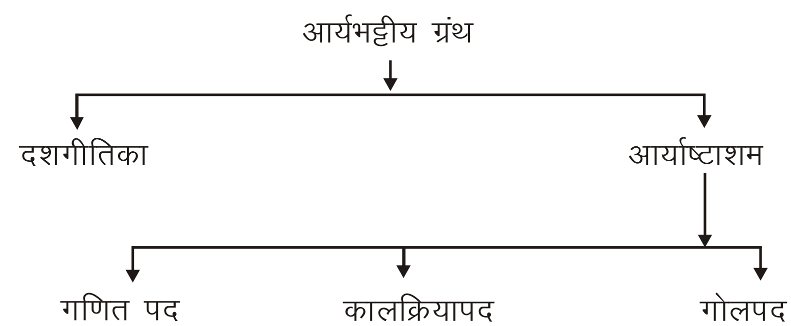
आर्यभट्ट का जन्म कहां हुआ इस विषय पर भी कुछ मतभेद हैं। उनका कार्यस्थल कुसुमपुर था परंतु इससे वह स्पष्ट नहीं होता है कि यहीं के रहने वाले थे। कुछ लेखकों ने उन्हें केरल निवासी सिद्ध करने का भी प्रयास किया है। अपने मत की पुष्टि में वे यह तर्क प्रस्तुत करते हैं कि केरल में आर्यभट्ट द्वारा आविष्कृत कैलेंडर पद्धति अभी भी प्रयोग में लाई जाती है। मूलतः वे किसी भी प्रदेश के निवासी रहे हों परंतु इस बात में कोई संदेह नहीं है कि कुसुमपुर से इनकी सुगंधि विश्व में व्याप्त हो सकी। यहीं उन्होंने अपने प्रसिद्ध ग्रंथ आर्यभट्टीय की रचना की।

'आर्यभट्टीय' सार रूप में लिखा हुआ एक छोटा–सा ग्रंथ है। इसमें कुल 121 श्लोक हैं। प्रसिद्ध गणितज्ञ ब्रह्ममुक्त ने अपनी टीका में प्रारंभ तथा समाप्ति के तीन श्लोकों को छोड़कर इस कार्य को मुख्य रूप से तीन भागों में बांटा है। पहला भाग 'गीतिका' छंद में लिखा गया है। इसमें 10 श्लोक हैं। ब्रह्मगुप्त ने इसको 'दशगीतिका' नाम दिया है। दूसरे भाग में 108 श्लोक हैं और यह आर्यव्रत छंद में लिखा गया है। ब्रह्मगुप्त ने इस भाग को 'आर्याष्टशम' नाम दिया है। आर्याष्टशम के अध्ययन की सुविधा के दृष्टिकोण से तीन भाग किए जा सकते हैं, ये भाग हैं–गणित पद, कालक्रिया पद और गोलपद। 'गोलपद' ग्रंथ अत्यंत लघु है और इसमें केवल 11 श्लोक हैं परंतु इन 11 श्लोकों में ही आर्यभट्ट ने अत्यधिक सामग्री प्रस्तुत की है। ग्रंथ में संख्या लिखने की विचित्र रीति का उल्लेख किया गया है। इस ग्रंथ में एक श्लोक है–

"वर्गाक्षराणि वर्गडवर्गे वर्गाक्षराणि कानङ्मौहा।

खार्द्धनव के स्वरानव वर्गेडचर्गे न वान्त्यवर्गेवा।।"

इस श्लोक का अर्थ है कि एक से आरंभ करें। वर्ग अक्षरों को वर्ग स्थानों में और 'अ' वर्ग अक्षरों को अ वर्ग स्थानों में व्यवहार करना चाहिए। इस प्रकार ङ् म मिलकर 'य' होता है और वर्ग और अवर्ग स्थानों के पूरे शब्दों के 9 स्वर प्रकट करते हैं। यह क्रिया 9 वर्ग के अंत में स्थानों तक दुहरानी चाहिए। आर्यभट्टीयम् ग्रंथ आर्यभट्ट की प्रखर प्रतिभा का ज्वलंत प्रमाण है। इसके कुछ निम्न आविष्कारों द्वारा इनकी प्रतिभा को और भी अच्छी तरह देखा जा सकता है–



1. **अक्षर संकेत**– इस पद का आविष्कार आर्यभट्ट प्रथम ने ही किया। इस पद्धति को वर्णमाला के अक्षरों द्वारा प्रकट किया जाता है। स्वरों को छोड़कर देवनागरी

टिप्पणी

वर्णमाला में 25 वर्गीय व्यंजन होते हैं तथा 9 अवर्गीय। 1 से 25 वर्गीय व्यजंनों द्वारा क्रमशः 1 से लेकर 25 तक के अंकों को प्रकट किया जा सकता है। जैसे 'ख' द्वारा 2 को, 'च' द्वारा 6 को इत्यादि। 9 अ वर्गीय व्यंजनों य, र, ल, व, श, ष, स, ह इत्यादि के अनुसार 30, 40, 50, 60 इत्यादि को प्रकट किया जा सकता है व अ, आ, इ, ई, उ इत्यादि क्रमश : 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, इत्यादि को प्रकट करते हैं। आर्यभट्टीय में दिए गए निम्न उदाहरण द्वारा इस प्रक्रिया पर प्रकाश डाला जा सकता है।

ख्य = ख + य = 2 + 30 = 32

ख्यु = (ख+य) × 3 = 32 × 10^4 = 3,20,000

गि = 3 × 10^2 = 300

यि = 30 × 10^2 = 30 × 100

2. आर्यभट्ट प्रथम से पहले जैन गणितज्ञों ने यद्यपि वर्गमूल निकालने की विधि का आविष्कार कर लिया था। परंतु उसका स्पष्टीकरण आर्यभट्ट द्वारा ही संभव हो सका। आर्यभट्ट में इसका वर्णन निम्न प्रकार से मिलता है–

"अस्तिय वर्ग स्थान में से बड़ी से बड़ी जो वर्ग संख्या घट जाए उसे घटा दो। इसके पश्चात सदैव वर्गमूल के दुगने से अ वर्ग स्थान को भाग दो। भाग करने से प्राप्त भागफल की और प्रथम शक्ति पंक्ति में रखी गयी संख्या, वर्ग मूल सूचित करती है। आर्यभट्टीय में जो वर्गमूल और घनमूल निकालने की रोचक विधियां दी हुई हैं, उनमें आर्यभट्ट की गणितीय प्रतिभा के दर्शन होते हैं। आज जो वर्गमूल और घनमूल निकालने का आधुनिक स्वरूप है, वह और कुछ नहीं बल्कि आर्यभट्ट की विधियों का लघुरूप है। इसका प्रथम, आर्यभट्टीय में जो वर्गमूल निकालने की विधि दी हुई है, उनमें मिल सकता है। निम्न उदाहरण देखिए–

बड़ी से बड़ी संख्या घटाने पर $\begin{array}{|ccccc} \surd & \times & \surd & \times & \surd \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & & & & \end{array}$

यहां वर्ग और अ वर्ग स्थानों को क्रमश : √ तथा × से प्रदर्शित किया जा सकता है। #–वर्गमूल = 2(वर्ग = 4)

वर्गमूल के दुगने के

भाग देने पर $\begin{array}{r} 4\overline{)10} \\ -8 \\ 26 \end{array}$ → भागफल अथवा वर्गमूल का दूसरा अंक

भागफल के वर्ग को घटाने पर अब त का वर्गमूल = 22

$$\begin{array}{r} 44\overline{)222} \\ 200 \\ 25 \\ 25 \\ \times \end{array}$$

टिप्पणी

वर्गमूल के दुगुने के भाग देने पर भागफल अथवा वर्गमूल की तीसरा अंक भागफल को घटाने पर।

3. दशमलव पद्धति को ठीक प्रकार से प्रयोग के लिए भी आर्यभट्ट ने प्रशंसनीय प्रयास किया। इसके अतिरिक्त क्षेत्रफल और घनफल निकालने, विषम चतुर्भुज का क्षेत्रफल, वृत्त का क्षेत्रफल, गोले तथा शंकु का घनफल तथा सभी प्रकार के क्षेत्रों का औसत लंबाई और चौड़ाई जानकर क्षेत्रफल निकालने से संबंधित सभी विषय इससे मिलते हैं। इससे आर्यभट्ट की रेखागणित में प्रयोगात्मक रूप से कितनी रुचि थी और इसका पूर्व आभास हो सकता है। ऐसे श्लोक भी हैं, जिनमें वृत्त, त्रिभुज और चतुर्भुज खींचने की रीतियां और लंबक प्रयोग करने की रीतियों का उल्लेख हुआ है। कुछ श्लोकों में दीपक और उससे बनी शंकु की छाया के आधार पर दीपक की ऊंचाई और दूरी जानने की रीति का उल्लेख किया गया है।

4. $\pi = 3.1416$ (लगभग) आज हम सभी इस संबंध में अच्छी तरह परिचित हैं परंतु क्या कभी हमने यह सोचने का प्रयत्न किया कि π को यह मान किसने दिया। विश्व में सबसे पहले आर्यभट्ट ने ही π के मान को प्रदर्शित करने वाला श्लोक लिखा था। इस निम्न श्लोक में इसका उल्लेख इस प्रकार मिलता है–

"चतुर्धिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तया सहस्त्राणाम्।
अयुत द्वय विवकंथस्यासन्तो वृज परिणाह।।"

अर्थात 20,000 व्यास की परिधि का 62832 के होता है। इसलिए,

$$\pi = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{62832}{20000} = 3.1416 \text{ (लगभग)}$$

5. केवल अंकगणित ही नहीं, बीजगणित भी आर्यभट्ट का बहुत ऋणी है। बीजगणित की राशियों के जोड़, बाकी गुणा और भाग के अतिरिक्त भिन्नों के हरों को सामान्य हरों में बदलने की रीति, भिन्नों में गुणा और भाग देने की रीति, बीजगणित के कुछ साधारण सूत्र जैसे $(\text{अ}+\text{ब})^2 = \text{अ}^2+\text{ब}^2+2$ अब। भाग भिन्न–भिन्न प्रकार के समीकरणों को हल करने की विधि आर्यभट्टीय में दी गई है। $ax + by = c$ के प्रकार समीकरणों को हल करने का प्रथम प्रयत्न आर्यभट्ट जैसा मेधावी गणितज्ञ ही कर सकता है। इन्होंने 20 श्लोकों

टिप्पणी

में बीजगणित के अनेक नियमों का उल्लेख किया है। यदि आधुनिक परिस्थिति के अनुसार इनके आधार पर कोई पुस्तक तैयार की जाए तो एक विस्तृत ग्रंथ तैयार हो जाएगा।

यही नहीं, आर्यभट्ट ने सामानांतर श्रेणी के ऊपर भी अपनी लेखनी बहुत ही सुनियोजित ढंग से उठायी है। निम्न प्रकार की बीजीय सर्वसंविकाओं के दर्शन हमें प्रत्यक्ष बार आर्यभट्टीय में ही मिलते हैं।

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2m+1)$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+\ldots\ldots+n)^2$$

6. आर्यभट्ट कोरे गणितज्ञ ही नहीं खगोल विज्ञान के भी प्रकांड पंडित भी थे। उन्होंने संसार के सम्मुख यह कहने का साहस किया कि 'ब्रह्मांड की दिन–प्रतिदिन की गतिशीलता का कारण पृथ्वी का एकधुरी के सहारे घूमते रहना ही है।

इस तरह से आर्यभट्ट अपने समय से बहुत आगे थे। उन्होंने गणित और खगोल विषय के क्षेत्र में एक नए अध्याय का सूत्रपात किया। भारतीय गणित शास्त्ररूपी आकाश 'गागर में सागर' भरने का कार्य संपन्न किया।

श्रीनिवास रामानुजन (Srinivasa Ramanujan)

श्रीनिवास रामानुजन भारत की महानतम गणितीय प्रतिभाओं में से एक थे। 1900 में उन्होंने ज्यामितीय और अंकगणित श्रृंखला को संक्षेप में गणित पर अपने दम पर काम करना शुरू किया।

अपने गणितीय कार्य को जारी रखते हुए रामानुजन ने 1908 में निरंतर अंशों और भिन्न श्रृंखलाओं का अध्ययन किया. इस स्तर पर वह फिर से गंभीर रूप से बीमार हो गया और अप्रैल १९०९ में एक ऑपरेशन किया जिसके बाद वह उसे ठीक होने के लिए कुछ काफी समय लगा।

रामानुजन ने समीकरणों और पहचानों से मिलकर लगभग ३,९०० परिणाम संकलित किए। उनके सबसे कीमती निष्कर्षों में से एक पाई π के लिए अपनी अनंत श्रृंखला थी। यह श्रृंखला आज हमारे द्वारा उपयोग किए जाने वाले कई एल्गोरिदम का आधार बनाती है। उन्होंने कई अपरंपरागत तरीकों से पाई के अंकों की गणना करने के लिए कई आकर्षक सूत्र दिए।

उन्होंने कई चुनौतीपूर्ण गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए नए विचारों की एक लंबी सूची की खोज की, जिनसे संख्या सिद्धांत के विकास को एक महत्वपूर्ण प्रोत्साहन दिया। संख्या सिद्धांत के लिए उनका योगदान विशुद्ध रूप से अंतर्ज्ञान और प्राकृतिक प्रतिभा पर आधारित है।

टिप्पणी

उन्होंने अनुकरणीण थीटा फलन का विस्तार से वर्णन किया, जो गणित में मापांक रूप के दायरे में एक अवधारणा है। कुछ समय पहले तक एक पहेली माना जाता है, अब इसे बड़े पैमाने पर रूपों के पूर्णसममितिक भागों के रूप में पहचाना जाता है।

रामानुजन की स्मरण पुस्तक में से एक की खोज जॉर्ज एंड्रयूज ने ट्रिनिटी कॉलेज की लाइब्रेरी में १६७६ में की थी। बाद में इस स्मरण पुस्तक की सामग्री एक पुस्तक के रूप में प्रकाशित की गई।

1729 रामानुजन संख्या के नाम से जाना जाता है। इसमें दो नंबर 10 और 9 के घन का योग है। उदाहरण के लिए, 1000 (10 का घन) और 729 (9 का घन) जोड़ने से 1729 परिणाम है। यह सबसे छोटी संख्या है जिसे दो अलग–अलग तरीकों से व्यक्त किया जा सकता है क्योंकि यह इन दो घनों का योग है। दिलचस्प बात यह है कि 1729 1728 और पूर्ववर्ती 1730 के बाद एक प्राकृतिक संख्या है।

रामानुजन का योगदान गणित के क्षेत्रों में फैला है, जिसमें जटिल विश्लेषण, संख्या सिद्धांत, अनंत श्रृंखला और निरंतर अंश शामिल हैं।

रामानुजन के अन्य उल्लेखनीय योगदानों में अतिपरवलय ज्यामितीय श्रृंखला, रिमैन श्रृंखला, दीर्घवृत्तीय, अलग श्रृंखला का सिद्धांत और जीटा फलन के कार्यात्मक समीकरण शामिल हैं।

प्राथमिक स्कूल का एक अध्यापक तीसरी श्रेणी के अपने विद्यार्थियों को समझा रहा था कि किसी संख्या को उसी संख्या से भाग देने पर भागफल एक होता है। सब बच्चे एक–दूसरे की सुनते रहे, परंतु एक से न रहा गया और वह एक एकदम खड़ा होकर बोला सर, "यह नियम शून्य पर भी लागू होता है।" अपने अध्यापक को भी इतनी छोटी–सी अवस्था में इस प्रकार के गूढ़ प्रश्नों द्वारा चक्कर में डालने वाले महानुभाव और कोई नहीं प्रख्यात गणितज्ञ रामानुजन ही थे। तीसरी कक्षा में ही इन्होंने बीजगणित आदि का इंटरमीडिएट कक्षाओं तक का पाठ्यक्रम समाप्त कर लिया था तथा चौथी कक्षा में आते–आते बी.ए की त्रिकोणमिति के कठिन प्रश्न हल करने लग गए थे।

ऐसी ही एक कहानी मद्रास 'पोर्ट ट्रस्ट कार्यालय' में बहुत पहले घटी। मध्यावकाश के समय जब सभी कर्मचारीगण चाय–पान आदि के लिए बाहर चले गए तो चेयरमैन सर फ्रांसिस स्प्रिंग ने अचानक कार्यालय का निरीक्षण किया। उसे फर्श पर गिरा हुआ कागज का एक पन्ना दिखाई पड़ा। उसने उसे उठाकर पढ़ना शुरू किया। वह आश्चर्यचकित होकर बोला–ओह! यह क्या, इसमें तो गणित के अत्यंत कठिन प्रश्नों का हल किया गया है। उसने एक बार पुनः कार्यालय में चारों तरफ नजर दौड़ाई। इस बार उसने देखा कि एक दुबला–पतला व्यक्ति चीखता हुआ कुछ लिए खोया हुआ है। उस व्यक्ति के पास पहुंचकर सर स्प्रिंग ने पूछा– "तुम अकेले बैठे–बैठे यहां क्या कर रहे हो?"

"जी गणित के सवाल लगा रहा हूं।"

"क्या यह तुम्हारा ही लिखा हुआ है?"

"जी हां, मेरा ही लिखा हुआ है।"

"तुमने यह गणित कहां से सीखा?"

देवनागरी की कृपा से अपने आप।"

टिप्पणी

राख के ढेर में इस अमूल्य हीरे के देखकर उस विद्वान अधिकारी ने कहा—मित्र तुम्हें तो गणित की दुनिया का बादशाह होना चाहिए। तुम यहां कहां पड़े हो? यह प्रतिभाशाली नवयुवक रामानुजन था, जिसने भारत का सर ऊंचा किया। ऐसी प्रतिभा केधनी बालक का जन्म 22 दिसंबर, 1887 ई. मद्रास में तंजौर जिले में स्थित इरीद नाम के छोटे से गांव में हुआ था। पिता एक साधारण परिवार में निर्धन ब्राह्मण थे तथा एक कपड़े की दुकान पर मुनीमी करके अपना पेट पालते थे। रामानुजन ने अपनी प्रारंभिक शिक्षा पास के कस्बे कुम्बुकोनम, जहां इनके पिता नौकरी करते थे, से प्राप्त की। अपनी कक्षाओं में ये सदैव ही प्रथम आते। इन्हें बाल्यास्था से ही गणित से बेहद प्रेम था, यहां तक कि अपने दोस्तों का मनोरंजन भी वे गणित के सूत्रों से किया करते थे। इसकी गणितीय प्रतिभा से प्रभावित होकर इनके अध्यापकों ने इन्हें 12 वर्ष की आयु में ही बाल विद्वान घोषित कर दिया था, क्योंकि इस छोटी आयु में इन्होंने गणित संबंधी जो मौलिक कार्य किए, वे बड़े—बड़े गणितज्ञों की संपूर्ण आयु के परिश्रम से भी अधिक थे।

17 वर्ष की आयु में इन्होंने सरकारी छात्रवृत्ति प्राप्त करते हुए हाई—स्कूल की परीक्षा पास की तथा छात्रवृत्ति के बल पर ही कॉलेज में प्रवेश भी ले लिया। परंतु यहां पर इनका गणित प्रेम समाप्त हो गया। गणित के अध्याय में डूबे रहने के कारण ये अंग्रेजी में अनुत्तीर्ण हो गए। फलस्वरूप इनकी छात्रवृत्ति बंद हो गयी और साथ ही इस निर्धन छात्र की पढ़ाई का भी यहीं अंत हो गया।

पर ये भी अपनी लगन के पक्के थे। घर पर ही गणित की पढ़ाई में जुट गए। इस बीच इनका विवाह हो गया और अब इनके सामने अपने अतिरिक्त परिवार का पालन—पोषण करने की समस्या भी आ खड़ी हुई। हितैषियों ने थोड़ी बहुत सहायता करनी चाही भी, परंतु स्वाभिमानी व्यक्तित्व यह मानने को तैयार नहीं हुआ। अंत में बहुत दिन मारे—मारे फिरने के पश्चात 25 वर्ष की अवस्था में 25 रु. एवं मासिक वेतन पर इन्हें पोस्ट ट्रर्ट में लिपिक की नौकरी मिल गई। क्योंकि रामानुजन की शिक्षा कॉलेज स्तर पर औपचारिक रूप में बहुत कम हुई थी, अतः रामानुजन ने अनेक परिवारों को स्वाध्याय से ही निकाला। उन्होंने अनेक ज्ञानी परिवारों को बिना किसी सहायता के पुनः स्थापित किया और कई ऐसे परिणाम ज्ञात किए, जो उनकी सूझ—बूझ और अंतदृष्टि के परिपालक थे। 15 वर्ष की उम्र में ही उन्होंने मायावी (जादू के) वर्गों की रचना के नियम ज्ञात किए। उसके बाद ज्यामिती में कार्य प्रारंभ किया। यहां उन्होंने वृत्त को वर्ग के रूप में व्यक्त करने के प्रश्न पर विचार किया और यहां तक पहुंच गए कि उन्होंने पृथ्वी की भूमध्य रेखीय परिधि की माप इतनी शुद्धता से ज्ञात की कि सही माप से केवल कुछ फीट का अंतर रह गया।

सभी पूर्ण संख्याएं रामानुजन की मित्र थीं। एक बार जब वे बीमार थे और उन्हें देखने के लिए मि. लिहिलवुड टैक्सी न. 1729 में आए तो रामानुजन ने 1729 के विषय

में कहा कि यह ऐसी छोटी–सी संख्या है जिसे दो संख्याओं के घनों के रूप में दो भिन्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

टिप्पणी

बीजगणितीय सूत्र, अपरिमित श्रेणी के रूपांतरण आदि में रामानुजन की अंतदृष्टि अचंभे में डालने वाली थी। इस दृष्टि से उनकी तुलना ऑइलट या जैकोबी से की जा सकती है। उनकी कार्य विधि आगमानात्मक होती थी। वे उदाहरणों से प्रारंभ करते हुए आगमन द्वारा व्यापकीकृत परिणामों पर पहुंचते थे। विभाजन के सर्वांगसम संबंधी अधिकांश गुणधर्म उन्होंने उसी प्रकार प्राप्त किए थे। अपनी तीव्र स्मरण शक्ति,धैर्य, परिकलन संबंधी अद्भुत योग्यता के साथ उनमें व्यापीकरण की एक प्रवृत्ति, स्वरूप की संबंधी अद्भुत परिकल्पना को तीव्रता से सुधार लेने की क्षमता भी थी और इन्हीं गुणों के कारण अपने समय में उनका कोई प्रतिद्वंद्वी न रहा। इस तरह संसार के सबसे प्रथम गणितज्ञ बालक के रूप में रामानुजन ने भारत माता को जो गौरव प्रदान किया, वह न केवल चिरस्मरणीय ही रहेगा वरन् भारत की आने वाली पीढ़ी का युगों तक अपने दिव्य आदर्श और अटूट लागन की लौ द्वारा स्पष्ट मार्ग–दर्शन करता रहेगा।

न तो बेकारी के ही निराशाजनक समय में और न ही नौकरी के व्यस्त क्षणों में उन्होंने गणित से अपना नाता तोड़ा। इनका प्रथम लेख गणित शास्त्र, संस्था के मुख्य पत्र में प्रकाशित हुआ। आपने इन्हीं दिनों प्रो. हार्डी, जो कैम्ब्रिज में गणित के प्रोफेसर थे, को विनम्रतापूर्वक एक पत्र लिखा तथा साथ ही अपने गणित के 120 साध्यों को भेजा। थामस हार्डी को भेजे गये 120 प्रमेयों में से हार्डी ने 15, प्रमेय छांटे, जो रामानुजन के कार्य के यथेष्ट परिचायक थे। उन्होंने पाया कि इनमें से कुछ ऐसे थे, जिनके विषयों में स्वयं हार्डी आश्चर्यचकित थे। इनमें इलिप्टिकल इंटीग्रल, हाइपट ज्यातितिक सेवी और अपसाटी पर भी उदाहरण शामिल थे। यद्यपि यूरोप में इन प्रश्नों पर से पहले से विचार हो रहा था। परंतु रामानुजन को इस संबंध में कुछ भी पता नहीं था। डॉ. हार्डी इनकी प्रतिभा से बहुत–ही प्रभावित थे। उन्हीं के प्रयत्न से आपको मद्रास विश्वविद्यालय से छात्रवृति मिल पाई और साथ ही इंग्लैंड जाने की भी व्यवस्था हुई। रामानुजन ने वहां जाकर जो कुछ भी करके दिखाया तथा जो कुछ वे बनकर यहां लौटे उससे किसी भी भारतीय का सिर गर्व से ऊंचा उठ सकता है।

सन् 1914 को लंदन के लिए रवाना हो गए। उन्हें सन् 1916 में बैचलर ऑफ साइंस डिग्री बाय रिसर्च प्रदान की गई। बाद में इसी को पी.एच.डी. के नाम से जाना जाने लगा।

20 फरवरी, 1918 को आप रॉयल सोसायटी के फैलो बनाए गए। यह सम्मान प्राप्त करने वाले वे पहले भारतीय थे। 27 फरवरी, 1919 को आप लंदन से भारत के लिए रवाना हुए और 27 मार्च को बंबई पहुंचे। विदेश में रहने पर जलवायु अनुकूल न होने से रामानुजन का स्वास्थ्य काफी खराब हो गया।

स्वास्थ्य खराब होने से इनको कावेरी कोटू–मंडी ले जाया गया। वहां से वे कुम्भ कोनम ले जाए गए। इनका स्वास्थ्य दिन–प्रतिदिन बिगड़ता ही गया। लेकिन

मस्तिष्क का प्रकाश अंत तक मंद नहीं हुआ। मृत्यु तक वे कार्य में लगे रहे। मॉक थिटा फंक्शन (Mock Theta Functions) पर उनका सब कार्य मृत्यु–शैय्या पर ही हुआ। हालत खराब होती देखकर वे मद्रास ले जाए गए। 26 अप्रैल, 19

भास्कराचार्य (Bhaskaracharya)

भास्कराचार्य (भाष्कर शिक्षक)12वीं शताब्दी ईस्वी के भारतीय गणितज्ञ और खगोलशास्त्री थे। भास्कर द्वितीय का परिवार देशस्थ ब्राह्मण समाज से ताल्लुक रखते थे, जिसने राजाओं के किलों में दरबार विद्वान के रूप में कार्य किया। उन्होंने अपने पिता महेश्वर से गणित सीखा, जो एक ज्योतिषी शिक्षा के रूप में प्रयुक्त हैं।

भास्कराचार्य नाम से भारतीय गणित एवं ज्योतिष संसार को दो बार सुशोभित होने का सुअवसर प्राप्त हुआ है। भास्कराचार्य प्रथम, जो आर्यभट्ट प्रथम के पश्चात पैदा हुए, ज्योतिष एवं गणित के अच्छे स्नातक तथा टीकाकार हो गए परंतु जिन भास्कराचार्य की सुगंधि से आज तक गणित एवं ज्योतिष में सुरक्षित है, वे भास्कराचार्य प्रथम से कई शताब्दियों पश्चात पैदा हुए। इन्हें विश्व में 'भास्कराचार्य द्वितीय' के नाम से जाना जाता है।

भास्कराचार्य (द्वितीय) के जन्म के बारे में उनके अपने लिखे हुए ग्रंथ 'सिद्धांत शिरोमणि' से ज्ञात होता है कि ये 1114 ई. में सहस्थावि पर्वत के पास बिज्जड़विड नामक गांव में पैदा हुए थे। यह गांव किस प्रांत में स्थित है, उसके बारे में विद्वानों में मतभेद है। परंतु अधिक विद्वान बिज्जड़विड़ को वर्तमान बीजापुर (मैसूर प्रांत) ही मानने के पक्ष में है। इनके पिता महेश्वर थे और वे ही इनके गुरु थे। इन्होंने प्रसिद्ध ग्रंथ 'सिद्धांत शिरोमणि' की रचना की। 1150 ई. में ये 36 वर्ष के थे।

सिद्धांत शिरोमणि ग्रंथ को चार खंडों या अध्यायों में बांटा गया है। ये खंड हैं– 1. लीलावती, 2. बीजगणित, 3. गोलाध्याय और 4. ग्रहगणित। भास्काराचार्य ने प्रथम खंड का जो अंकगणित से संबंधित है, 'लीलावती' नाम क्यों रखा, इनके बारे में कई किंवदंतियां प्रचलित हैं। कई लोग इसे लीलावती से जोड़ते हैं तो कई लीलावती संबोधन को उस समय के लेखन की परिपाटी का अंग मानते हैं।

नामकरण के मूल में चाहे जो भी कारण रहा हो, 'लीलावती' वास्तव में एक रोचक और दुर्लभ ग्रंथ है। इसमें 278 पद्य हैं। सिद्धांत शिरोमणि के अतिरिक्त भास्कराचार्य ने कई और दुर्लभ ग्रंथ लिखे हैं, इनमें कारणकौतुहल, समयसिद्धांत शिरोमणि, गोलाध्यायसगुण तथा सूर्यसिद्धांत प्रमुख हैं।

इन बहुमूल्य ग्रंथों के द्वारा इन्होंने भारतीय गणित एवं ज्योतिष संसार को जो कुछ दिया उसकी गणना करना कुछ कठिन ही है। परंतु फिर भी नीचे हम इनके कुछ विशेष प्रयत्नों की चर्चा करेंगे।

1. भास्कराचार्य ही विश्व के प्रथम गणितज्ञ थे, जिन्होंने किसी संख्या को 0 से भाग देने पर परिणाम में अनंत की कल्पना की। इसके बारे में वे लिखते हैं कि–"जिस

प्रकार अनंत और अत्युत ईश्वर में, प्रलय के समय बहुत से भूतगुणों का प्रवेश होने से सृष्टि के समय उनके जाने से, कोई विकार नहीं होता, उसी प्रकार इस शून्य हर वाली ये बहुत बड़ी संख्या को भी जोड़ने अथवा घटाने पर कोई परिवर्तन नहीं होता।'' अब इस बात में कोई संदेह नहीं कि भास्कराचार्य यह जानते थे कि– $\frac{\text{क}}{0} = 8$, 8 + क = 8, 8–क = 8

टिप्पणी

2. क्षेत्रमिति के क्षेत्र में भी भास्कर का काफी योगदान है। उन्होंने विभिन्न क्षेत्रों के क्षेत्रफल और घनफल के संबंध में बहुत ही महत्वपूर्ण सूत्र दिए हैं। उदाहरणार्थ–

   गोले का क्षेत्रफल = 4 × वृत्त का क्षेत्रफल

   गोले का घनफल = गोले का क्षेत्रफल× $\frac{1}{6}$ व्यास

3. जिस विषय को आज क्रमचय और संचय (Permutation and Combination) के नाम से जानते हैं, उस पर भी भास्कर ने अपनी लेखनी उठायी थी। उन्होंने अपने ग्रंथों में इसका नाम 'अंक पाश' दिया है। इस विषय पर उनके द्वारा खोजे गए एक सिद्धांत की तो हम आज तक भी काम में ले रहे हैं, इसका प्रचलित रूप इस प्रकार का है–

   वस्तुओं की क्रमचय संख्या = $\varnothing \frac{\pi!}{K!|!}$

   जबकि K और | भिन्न–भिन्न प्रकार की वस्तुएं हैं।

4. ज्योतिषी और गणितज्ञ होने के साथ–साथ भास्कराचार्य ऊंचे दर्जे के कवि भी थे। इन्होंने गणित के प्रश्नों को अपनी काव्यात्मक शैली में पद्यबद्ध करके विषय को अधिक से अधिक सुगम, रोचक एवं व्यावहारिक बनाने का जो उदाहरण प्रस्तुत किया वह आजकल के अध्यापक एवं पुस्तक लेखकों के लिए एक अमूल्य प्रेरणादायक तत्व सिद्ध हो सकता है।

   समकोण त्रिभुज से संबंधित इनके एक पद्य को देखिए।

   ''अस्ति स्तम्भतले बिलं तदुपरिक्रीड़ा शिखंडी स्थितः

   स्तंमेहस्ता बोच्छिते त्रिगुणित स्तंभ प्रयाणांवरे

   द्वास्द्वाहि विमलाव्रजया तमपतत् तिर्यक समस्योपरि

   क्षिपंछूहि तपो बिलति कतियिलैसयाभ्ये नगल्योयतिः''

   एक बिल के ऊपर 9 हाथ ऊंचे एक मयूर बैठा था। उसने 27 हाथ की दूरी पर एक सर्प को स्तंथ में स्थित बिल की ओर आते देखा और तिरछी चाल से उसी तरफ झपटा। तो बताओ मयूर ने बिल से कितनी दूरी पर आते हुए सर्प को पकड़ा।

5. करणी (Surds) के बारे में भी भास्कराचार्य को अच्छा ज्ञान था जैसा कि उनके ग्रंथों में पाए जाने वाली निम्न प्रकार की समस्याओं से स्पष्ट होता है।

एक त्रिभुज की भुजाएं $\sqrt{13}$ और $\sqrt{5}$ हैं अगर उसका क्षेत्रफल 4 है तो आधार की लंबाई बताओ।

टिप्पणी

6. घन समीकरण और द्विवर्णात्मक समीकरणों का भी वितरण भास्कर के ग्रंथों में पाया जाता है।

   $x^3 + 12x = 6x^2 + 35$ जैसी घन समीकरणों तथा $x^4 - 2x^2 = 400x \times 9999$ जैसे द्विवर्णात्मक समीकरणों का पूर्ण हल सहित 'सिद्धांत शिरोमणि' के द्वितीय अध्याय बीजगणित में पाया जाना यह सिद्ध करता है कि भास्कराचार्य इस क्षेत्र में भी अग्रणी पंक्ति में रह चुके हैं।

7. अवकलन कलन (Differential Calculus) के क्षेत्र में भी भास्कराचर्य ही विश्व के प्रथम के प्रथम गणितज्ञ थे, जिन्होंने अवकलनीय नियतांक (Differential Coefficent) से संबंधित उदाहरण प्रस्तुत किए।

8. रोले प्रमेय (Rolle's Theorm) के आधारभूत तत्वों को भी भास्कराचार्य ने ही जीवन दिया है। ग्रहगणित में वे लिखते हैं:

   यत्र ग्रहस्यं परमफलं तत्रेवर्गातफला भावेन भवित्वयं!

   यतोवक्रारंभे वक्रत्यागेच गतिः पूर्वभवति

9. त्रिकोणमिति के क्षेत्र में भी इनका काफी योगदान है उदाहरण के लिए गोलाध्याय के निम्न हलों को देखिए–

   ''चापयोरिष्टयोः दोर्ज्पे मिथः कोहि ज्यकाहते!

   त्रिज्याभक्ते तयोरक्यं स्यात् चापकस्य दोर्ज्यका!

   चौपंतरस्य जीवास्यात् तयोरंतरसंमियता!''

   ये श्लोक स्पष्ट रूप से निम्न सूत्र की ओर ही संकेत करते हैं। इन श्लोकों से निम्न सूत्र प्राप्त होते हैं–

$$\text{Sin}\left(\frac{\text{A}-\text{B}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[(\text{Sin A}+\text{Sin B})^2+(\text{Cos A}-\text{Cos})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Sin}\,18^\circ=\frac{\sqrt{5-1}}{4}R$$

$$\text{Sin}\,36^\circ=\frac{\sqrt{5\text{R}^2-\sqrt{5R^4}}}{8}$$ (जबकि R वृत्त का अर्धव्यास है।)

10. भास्कराचार्य कई बातों में अपने समय से बहुत आगे थे। पृथ्वी के गोल होने का प्रमाण देते हुए वे 'गोलाध्याय' में लिखते हैं– 'गोले की परिधि का सौवां भाग एक सीधी रेखा प्रतीत होती है। हमारी पृथ्वी भी एक विशाल गोला है, मनुष्य को उसकी परिधि एक बहुत ही छोटा भाग दिखाई देता है इसलिए यह चपटी दिखाई देती है।

11. इसी प्रकार न्यूटन के बहुत पहले भास्कराचार्य को गुरुत्वाकर्षण शक्ति का ज्ञान हो चुका था। इसे उन्होंनेधारविकात्मक शक्ति कहा है। इस संबंध में वे लिखते हैं– "पृथ्वी अपनी आकर्षण शक्ति की ओर से सब वस्तुओं को अपनी ओर खींचती है इसलिए सभी पदार्थ इस तरह गिरते हुए दृष्टिगोचर होते हैं।"

इस तरह भास्कराचार्य की गणित संसार को जो देन है, उस पर विचार करते रहा जाये तो एक विशाल ग्रंथ तैयार हो सकता है। भास्कर अर्थात सूर्य के भी आचार्य जैसे नाम को सार्थक करने वाले इस महान गणितज्ञ और ज्योतिषविद् की जितनी प्रशंसा की जाए कम ही है। डॉ. स्पॉटवुड ने उनकी प्रतिभा का लोहा मानते हुए रायल सोसायटी के जनरल ने लिखा है–

"हमें यह स्वीकार करने में तनिक भी संकोच नहीं करना चाहिए कि भास्कराचार्य की विवेचन सूक्ष्मता उच्चकोटि की थी। उन्होंने गणित एवं ज्योतिष के जिन सिद्धांतों की स्थापना की और जिस ढंग से की, वह अत्यंत प्रशंसनीय है।''

यूक्लिड (Euclid)

यूक्लिड इतिहास में प्रमुख गणितज्ञ के रूप में जाने जाते हैं और उन्हें अक्सर ज्यामिति के पिता के रूप में संदर्भित किया जाता है। स्कूल में सीखी गई हम में से अधिकांश मानक ज्यामिति को यूक्लिडियन ज्यामिति के नाम से जाना करते हैं।

यूक्लिड एक ग्रीक गणितज्ञ थे और उनके साथ ही वह ज्यामिति के जनक भी कहलाते है। गणित के इतिहास में इन्होंने प्रभावशाली कार्य किए है। यूक्लिड ने ज्यामिति के बहुत से अवयवों की खोज की थी जिन्हें आज यूक्लिडीयन ज्यामिति के नाम से जाना जाता है। जिनमें सूक्तियों की छोटी आकृति का उपयोग किया जाता था। इसके साथ ही यूक्लिड ने दृष्टिकोण, शंक्वावर्ग, गोलीय ज्यामिति, संख्या सिद्धांत का वर्णन अपने लेखों में किया है। यूक्लिड के अस्तित्व में कुछ ही जानकारियां इतिहास में मौजूद है, इसलिए उनकी जिंदगी के बारे में बहुत कम जानकारी लिमती है। उनके जन्म और मृत्यु की तारीख, जगह और परिस्थितियां दोनों का अब तक ज्ञात नहीं है। यूक्लिड का सबसे बड़ा ग्रंथ एलीमेंट्स (Elements) है जिसे तेरह भागों में विभाजित किया गया है। यूक्लिड ने नई उत्पत्तियां दी उत्पत्तियों के क्रम भी बदल दिए जिनसे पूर्व विकसित की गई उत्पत्तियों में क्रांति आई। उन्होंने उस समय तक के सभी अनुसंधानों को अपनी पुस्तक में दे दिया था। उन्होंने सभी तथ्यों को तार्किकता में इस क्रम में वर्णन किया कि प्रत्येक नवीन प्रमेय का प्रयोग किया जा सके। इनकी रचित पुस्तक एलिमेण्ट्स में कुछ गिने–चुने स्वयंसिद्ध के आधार पर ज्यामिति के बहुत से सिद्धांत निष्पादित किए गए है। इनके नाम पर ही इस तरह की ज्यामिति का नाम यूक्लिडीयन ज्यामितिय रखा गया हमारों वर्षों के बाद भी गणितीय प्रमेयों को सिद्ध करने की यूक्लिड की विधि संपूर्ण गणित की रीढ़ बनी हुई है। यूक्लिड के शांकवों, गोलीय, ज्यामिति और संभवतः द्विघातीय समतलों पर भी पुस्तकें लिखी।

टिप्पणी

यूक्लिड द्वारा रचियत अन्य ग्रंथ इस प्रकार हैं–

1. **डाटा (Data)**– इसमें 14 प्रमेय है, जो इस बात से संबंध रखते हैं कि 'यदि किसी आकृति के अवयव ज्ञात हो तो उसके निष्कर्ष कैसे ज्ञात किए जाते हैं।'
2. **भाग (Division)**– इस पुस्तक का अरबी भाषा में रूपांतरण ज्ञात है तथा इसका संपादन 1851 ई. में यूरोपीय भाषाओं में हुआ। इस पुस्तक में किसी आकृति को बराबर भागों या किसी नियत अनुपातों के विभाजित के संबंध में बहुत से प्रमेय दिए है।
3. **ऑप्टिक्स (Optics)**– यह पुस्तक ग्रीक भाषा में भी उपलब्ध है।
4. **फेनॉमिना (Phaenomena)**– इस ग्रंथ में गोले की ज्यामिति की व्याख्या की है, जो ज्योतिष से संबंध रखती है।

यूक्लिड के एलिमेंट्स का बहुत ही भाषाओं में अनुवाद किया गया है। इसका सर्वप्रथम लैटिन और अरबी भाषा में अनुवाद हुआ, जिसका 1570 ई. में अंग्रेजी के अनुवाद हुआ। इसके अतिरिक्त 1798 ई. में इसकी स्मृति में यूक्लिड नामक शहर बसाया गया जो अमेरिका के ओहायो प्रान्त में है।

यूक्लिड के महान काम में गणितीय ज्ञान के एक विशाल ज्ञान को आच्छादित करने वाली तेरह पुस्तकें शामिल है, जो अंकगणित, ज्यामिति और संख्या सिद्धांत में वर्णित की गई थी। यूनानियों द्वारा विकसित गणित, गणित विज्ञान हर क्षेत्र के विषय में ज्ञान देता है।

एलिमेंट्स की बुनियादी संरचना यूक्लिड द्वारा स्वयंसिद्ध की स्थापना के साथ शुरू होती है, शुरुआती बिंदु जिसमें से उन्होंने 465 संक्रियाएं विकसित किए, अपने पहले स्थापित सिद्धांतों से अज्ञात तक कदमों की एक श्रृंखला में प्रगति करते हैं।

पाइथागोरस (Pythagoras)

इनका जन्म अनुमानिक रूप से 580–570 ई.पू. के मध्य हुआ था। इन्हें अक्सर एक महान गणितज्ञ, रहस्यवादी और वैज्ञानिक रूप से सम्मान दिया जाता है। इन्हें संपूर्ण जगत में ख्याति 'पाइथागोरस प्रमेय' की रचना से मिली। जिसका नाम उन्हीं के नाम पर दिया गया। इन्हें संख्या के जनक के रूप में भी जाना जाता है। छठी शताब्दी में धार्मिक शिक्षण और दर्शनशास्त्र में इनका महत्वपूर्ण योगदान रहा। पाइथागोरस और उनके शिष्यों का यह मानना था कि सब कुछ गणित से संबंधित है और संख्याओं में ही अंततः वास्तविकता है। इसके मध्यम से ही हर तथ्य के बारे में भविष्यवाणी की जा सकती है। पाइथागोरस का गणित के बारे में यह तथ्य था कि ''संख्या ही विचारों और रूपों का शासक है तथा देवताओं और राक्षसों का कारण है''।

रेने डेसकार्टेस (Rene Descartes)

रेने डेसकार्टेस, फ्रांसीसी गणितज्ञ और दार्शनिक का जन्म 1596 में हुआ था। आंशिक रूप से उनके योगदान के कारण ही पश्चिमी दर्शन और गणित का विकास हुआ। उनके

योगदान की मान्यता में, उन्हें अक्सर ''आधुनिक दर्शन के पिता या संस्थापक पिता'' के रूप में जाना जाता है। वह भी विचार के तर्कवादी अग्रदूत के रूप में माना जाता है।

टिप्पणी

गणित में, उनका योगदान मुख्यतः ज्यामिति में निहित है यही कारण है कि आज उन्हें ''विश्लेषणात्मक ज्यामिति के पिता'' के रूप में जाना जाता है। उनकी मुख्य उपलब्धि बीजगणित और ज्यामिति के बीच के संबंध से था। इस प्रकार उन्हें पहले गणितज्ञ के रूप में व्यापक रूप से सराहा जाता है जिन्होंने आधुनिक ज्यामिति की नींव रखी जिसके परिणामस्वरूप विश्लेषण और समीकरण सिद्धांत का विकास हुआ। बीजगणित के संबंध में उन्होंने विस्तार से बताया कि ज्यामितीय आकृतियों के उपयोग के माध्यम से बीजगणितीय समीकरणों को कैसे व्यक्त और समझाया जा सकता है।

उन्होंने गणितीय तकनीकों के अनुप्रयोग द्वारा ज्ञान का व्यवस्थित अर्थ भी जानने की खोज की। इस प्रकार, परंपरा का पालन करने के बजाय, उन्होंने चीजों की प्रकृति के इस आकस्मिक विवरण को अधिक वैज्ञानिक विधि से बदल दिया। ये दार्शनिक के साथ ही सुप्रसिद्ध गणितज्ञ थे। वे दर्शनशास्त्र को विज्ञान में परिवर्तित करना चाहते थे। साथ ही इन्होंने ज्ञान के लिए बुद्धि को सर्वोत्तम राह बताया क्योंकि इसमें ज्ञान सार्वभौमिक व अनिवार्य होता है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

1. गणित का अर्थ क्या है?
2. आइन्सटीन के अनुसार गणित से क्या अभिप्राय है?
3. कला के साथ गणित का संबंध बताएं।
4. भूगोल में गणित की उपलब्धता का वर्णन करें।
5. गणित का इतिहास के साथ सह–संबंध को व्याख्यित करें।
6. आर्यभट्ट के बारे में संक्षिप्त जानकारी प्रदान करें।

1.3 स्कूल के लिए गणितीय पाठ्यक्रम

गणित जीवन के सभी पहलुओं में व्याप्त है, चाहे घर पर, नागरिक जीवन में या कार्यस्थल में हो। यह लगभग सभी प्रमुख वैज्ञानिक और तकनीकी प्रगति के लिए एक केन्द्रीय विषय माना गया है। इसके अलावा, वाणिज्य में किए गए कई घटनाक्रम और निर्णय, सामाजिक और सामुदायिक सेवाओं के प्रावधान के साथ–साथ सरकारी नीति और योजना, गणित के उपयोग पर एक हद तक भरोसा करते हैं।

हमारे छात्रों के लिए यह महत्वपूर्ण है कि वे गणितीय अनुभव प्राप्त करें और गणित में नींव कौशल और ज्ञान का निर्माण करें जो विभिन्न पहलुओं में उनके भविष्य के विकास को सुगम बना सकते हैं। यह भी महत्वपूर्ण है कि हमारे छात्र गणित को महत्व देने में सक्षम हों और स्कूल में गणित की शिक्षा के बाद गणित के कलात्मक एवं तार्किक संबंधें का विश्लेषण कर पाये।

टिप्पणी

गणितीय के पाठ्यक्रम निर्धारण के सिद्धांत

गणित के पाठ्यक्रम पर विचार करने से पूर्व यह आवश्यक हो जाता है कि पाठ्यक्रम शब्द के अर्थ को समझा जाए। पाठ्यक्रम शब्द अंग्रेजी के 'करिक्यलम' शब्द का पर्यायवाची है। पाठ्यक्रम (Curriculum) शब्द एक लैटिन शब्द है, इसकी उत्पत्ति लैटिन (Latin) शब्द 'Currere' से हुई जिस का अर्थ है Run अतः इस संदर्भ में पाठ्यचर्या का अर्थ है– किसी निश्चित लक्ष्य तक पहुंचने के लिए दौड़ना। शिक्षा के क्षेत्र में इसका तात्पर्य विद्यार्थी के ज्ञान के लिए दौड़ना या दौड़ से है। शिक्षा की तुलना एक दौड़ से की जाती है, जिसमें पाठ्यक्रम वह दौड़ का मैदान है, जिसको पार करके वह दौड़ने वाला अपने गंतव्य स्थान पर पहुंच जाता है। दूसरे शब्दों में यह वह मार्ग है, जिसका अनुसरण करके विद्यार्थी शिक्षा के लक्ष्य को प्राप्त करता है। कनिंघम (Cunningham) के अनुसार, "पाठ्यक्रम कलाकार (शिक्षक) के हाथ में वह साधन है, जिससे कि पदार्थ (शिक्षार्थी) को अपने आदर्श (उद्देश्य) के अनुसार अपनी विशाल चित्रशाला (स्कूल) में चित्रित कर सके।

दूसरे शब्दों में, "पाठ्यक्रम वह मार्ग है, जिसका अनुसरण करके विद्यार्थी शिक्षा के लक्ष्य को प्राप्त करता है।"

विभिन्न विद्वानों ने पाठ्यक्रम को विभिन्न ढंगों से परिभाषित किया है, यथा–

1. हेनरी जे ऑटो (Henry J Auto) के अनुसार, "पाठ्यक्रम वह साधन है, जिसके द्वारा हम बालकों को शिक्षा के उद्देश्यों को प्राप्त करने के योग्य बनाने की आशा करते हैं।"
2. शिक्षा आयोग के अनुसार, "विद्यालय के पर्यवेक्षण में उसके अंदर तथा बाहर अनेक प्रकार की क्रियाओं से विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के अधिगम अनुभव प्राप्त होते हैं। हम विद्यालय पाठ्यक्रम को ऐसे सभी अधिगम अनुभवों की समविष्टि मानते हैं।"
3. रेन्डाल मुनरोए (Randall Munroe) के अनुसार, "पाठ्यक्रम में वे समस्त अनुभव निहित हैं, जिनको विद्यालय द्वारा शिक्षा के उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए उपयोग में लाया जाता है।

इस तरह पाठ्यक्रम को सभी प्रकार से एक ऐसे साधन या मार्ग के रूप में जाना जाता है, जिसका अनुसरण कर अध्यापक और विद्यार्थियों, दोनों मिलकर शिक्षा के उद्देश्य रूपी मंजिल को तय करते हैं। जैसा कि उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि पाठ्यक्रम को कभी भी ऐसे संकुचित अर्थ जैसे 'कक्षा के कमरे के अंदर दिए हुए ज्ञान' अथवा गिनती के कुछ प्रकरणों और अधिगम अनुभवों के रूप में ग्रहण नहीं किया जा सकता। इनमें तो जैसे कि मुनरोए का विचार है, उन सभी प्रकार के अनुभवों का समावेश किया जाता है, जो किसी न किसी रूप में शिक्षा के उद्देश्यों की पूर्ति में सहायक होते हैं।

इस दृष्टि से गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम में भी जो सभी विषयों और अनुभवों से मिश्रित पाठ्यक्रम का एक अंश होता है– ऐसे सभी विषय–वस्तु तथा अनुभवों का

समावेश किया जाता है, जो गणित विज्ञानों के शिक्षण के उद्देश्यों की पूर्ति में किसी न किसी तरह से सहायक हैं।

टिप्पणी

इस तरह से जैविक विज्ञानों की कक्षा में एक अध्यापक द्वारा जो कुछ पढ़ाया जाता है अथवा उनकी पुस्तकों में जो विषय सामग्री होती है, उसके अध्ययन–अध्यापन के अतिरिक्त जो कुछ भी क्रियाएं तथा कार्यक्रम एक विद्यालय तथा गणित विज्ञान शिक्षकों द्वारा अपने विद्यार्थियों के लिए गणित विज्ञानों के निर्धारित उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु विद्यालय में आयोजित किए जाते हैं उन सभी को गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम का अंग माना जाता है।

पाठ्यक्रम तथा पाठ्य विवरण में अंतर

कई बार पाठ्यक्रम तथा पाठ्यक्रम विवरण को एक ही अर्थ में प्रयुक्त करने की भूल हो जाती है। वास्तव में ये दोनों पद, अर्थ एवं क्षेत्र की दृष्टि से बहुत अंतर रखते हैं। पाठ्यक्रम एक काफी विषद तथा व्यापक संप्रत्यय है जबकि पाठ्य विवरण उसकी तुलना में काफी संकुचित तथा छोटा संप्रत्यय है। किसी भी विषय के पाठ्यक्रम में, जैसा कि हम ऊपर अच्छी तरह स्पष्ट कर चुके हैं, मात्र कक्षा में पढ़ाई गयी पाठ्य सामग्री या दिए जाने वाले अनुभव ही सम्मिलित नहीं होते बल्कि उस विषय–विशेष के शिक्षण से संबंधित उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु विद्यालय की देख–रेख में किए जाने वाले सभी प्रयत्नों तथा प्रदान किए जाने वाले सभी अनुभवों का समावेश होता है। ये अनुभव गणित विज्ञान के विद्यार्थियों की कक्षा में चल रही शिक्षण अधिगम प्रक्रिया तथा कक्षा के बाहर विज्ञान प्रयोगशाला तथा गणित विज्ञान संबंधी अनुभवों को प्रदान करने के लिए आयोजित विभिन्न प्रकार की पाठ्य सहगामी क्रियाओं, समुदाय के साथ अंतर्क्रिया, समूह प्रोजेक्ट तथा भ्रमण आदि के द्वारा संयुक्त रूप से प्राप्त होते हैं और ऐसे सभी अनुभवों को गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम का एक अभिन्न अंग माना जाता है।

इसके विपरीत, जब हम जैविक विज्ञान के पाठ्य विवरण की बात करते हैं तो इससे तात्पर्य जैविक विज्ञान विषय को कक्षा विशेष में पढ़ने–पढ़ाने हेतु प्रकरणों तथा उसमें निहित विषय सामग्री की उस रूपरेखा या विवरण से है, जिसको आधार बनाकर पाठ्य पुस्तकों की रचना की जाती है। विद्यार्थियों तथा शिक्षकों के अध्ययन–अध्यापन के लिए विषय विस्तार का सीमांकन हो जाता है तथा परीक्षकों के लिए परीक्षा के प्रश्न–पत्र बनाने हेतु उपयुक्त आधार प्राप्त हो जाता है।

इस तरह गणित विज्ञानों का किसी कक्षा विशेष के लिए निर्धारित पाठ्य विवरण, उस कक्षा के लिए निर्धारित पाठ्यक्रम संबंधी उद्देश्यों को प्राप्त करने का ही प्रयास होता है। इससे केवल उन विषयगत प्रकरणों तथा उनमें निहित पाठ्य वस्तु का विवरण ही होता है, जिनकी चर्चा को संपूर्ण सत्र में कक्षा की अध्ययन–अध्यापन गतिविधियों का केंद्र बिंदु बनाया जाता रहेगा। इसलिए कभी–कभी इसे पाठ्यचर्चा का नाम भी दे दिया जाता है।

गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के निर्माण के सिद्धांत

गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के निर्माण का उद्देश्य यह होता है कि इस विषय के शिक्षण के लिए निर्धारित उद्देश्यों की अधिक से अधिक अच्छी तरह पूर्ति की जा सके। अतः इसके निर्माण कार्य में अपेक्षित सावधानी बरतने की दृष्टि से कुछ आवश्यक सिद्धांत निम्नलिखित हो सकते हैं–

1. **विद्यार्थियों के स्तर और मानसिक विकास के अनुकूल**–पाठ्यक्रम निर्धारित करते समय विद्यार्थियों के मानसिक विकास और स्तर को अवश्य ध्यान में रखना चाहिए। आयु के साथ बालकों की शारीरिक और मानसिक शक्तियों में परिवर्तन होते रहते हैं। अतः विभिन्न कक्षाओं में पाठ्यक्रम उनके इस परिवर्तन को ध्यान में रखकर बनाया जाना चाहिए।
2. **पाठ्यक्रम बालकों की रुचि के अनुकूल हो**– बच्चे जिस बात को पसंद करते हैं, उनकी रुचि के अनुकूल होती है। वे उसी ज्ञान को आसानी से ग्रहण कर सकते हैं और बहुत समय तक याद रख सकते हैं। अतः पाठ्यक्रम बच्चों की रुचि के अनुकूल ही होना चाहिए। एक बात यह भी है कि आयु, श्रेणी और मानसिक विकास के साथ–साथ बालकों की रुचियों में बहुत अंतर होता है। इसके अतिरिक्त देश, काल और परिस्थितियों के अनुसार बच्चों की रुचियों में अंतर आता है। इस दृष्टिकोण को ध्यान में रखते हुए विभिन्न श्रेणियों का पाठ्यक्रम उन श्रेणियों के बच्चों की जैसी रुचियां हों उसी के अनुकूल बनाया जाना चाहिए।
3. **पाठ्यक्रम वातावरण केंद्रित हो**–गणित विज्ञान के पाठ्यक्रम के लिए आवश्यक बात यह है कि इसे वातावरण केंद्रित होना चाहिए। जिस वातावरण में बच्चों की शिक्षा दी जा रही है, उससे संबंधित बातों को ध्यान में रखकर ही इसका निर्धारण किया जाना चाहिए। ग्रामीण क्षेत्रों में जहां खेती–बाड़ी और प्राकृतिक दृश्यों और परिवेश को अधिक महत्व दिया जाता है, वहीं शहरी क्षेत्रों में औद्योगिक जगत और आधुनिक चमत्कारों को पढ़ाई का केंद्र बनाया जाना चाहिए। इसी तरह मैदानी ओर पहाड़ी इलाकों, मरुस्थल तथा समुद्रतटीय, आदि, की विपरीत परिस्थितियां और सामाजिक तथा प्राकृतिक परिवेश को ध्यान में रखकर ही पाठ्यक्रम का चुनाव किया जाना चाहिए।
4. **दैनिक जीवन संबंधी आवश्यकताओं की पूर्ति करता हो**– गणित विज्ञान के जिस साधारण ज्ञान की बच्चों को अपने दिन–प्रतिदिन के जीवन में आवश्यकता हो, वही ज्ञान उन्हें दिया जाना चाहिए। क्या खाएं और क्या न खाएं। कैसा पानी पिएं? अशुद्ध पानी मिलने पर उसे कैसे शुद्ध करें? संक्रामक रोगों से कैसे बचा जाए? दैनिक जीवन में काम आने वाली वस्तुओं को अपने आप कैसे बनाएं? पौधों को हानिकारक कीड़ों से कैसे बचाएं?, इत्यादि। इसी प्रकार की बहुत सी दैनिक जीवन में काम आने वाली बातों को पाठ्यक्रम में स्थान दिया जाना चाहिए। यहां

इस बात को अवश्य ध्यान रखना चाहिए कि विभिन्न आयु स्तर पर बच्चों की आवश्यकताएं भिन्न–भिन्न होती हैं। इन्हीं आश्यकताओं की पूर्ति से संबंधित ज्ञान, उन्हें उस श्रेणी में दिया जाना चाहिए।

टिप्पणी

5. **विभिन्न विषयों से संबंधित**– पाठ्यक्रम बनाते समय जैविक विज्ञान के तथा गणित विज्ञान के अध्ययन का अन्य विषयों के साथ ही जो संबंध है, उसका भी ध्यान रखना चाहिए ताकि समयावी रूप से शिक्षा दी जा सके। इसके लिए सामग्री का चयन इस तरह करना चाहिए कि यह एक ओर तो दूसरे विषयों को पढ़ाने में सहायक हो और दूसरी ओर इसे पढ़ाने के लिए दूसरे विषयों से सहायता प्राप्त हो सके। अतः विभिन्न श्रेणियों में जाने वाले विषयों की सामग्री से उन विषयों में पढ़ाए जाने वाले साधारण विज्ञान की पाठ्य सामग्री को समन्वय कराने का प्रयत्न करना चाहिए।

6. **क्रियाशीलता को उचित स्थान दिया जाए**– बच्चे स्वभाव से ही क्रियाशील होते हैं तथा उन बातों में अधिक रुचि लेते हैं, जिनमें कुछ खेल–कूद तथा अन्य क्रियाएं होती हैं। अतः अगर उन्हें जैविक विज्ञान की शिक्षा क्रियात्मक कार्यों द्वारा ही दी जाए तो वे अधिक रुचि एवं उत्साह से शिक्षा ग्रहण कर सकते हैं। दूसरे, गणित विज्ञान का प्रत्यक्ष अनुभव, प्रत्यक्ष ज्ञान, क्रियात्मक कार्यों एवं स्वयं किए गए प्रयोगों द्वारा ही अच्छी तरह समझा तथा उपयोग में लाया जाता है। कोरे तथ्यों एवं सिद्धांतों का रटा–रटाया ज्ञान तो विद्यार्थियों के लिए निरर्थक बोझ ही है। अतः पाठ्यक्रम बनाते समय रचनात्मक क्रियाओं तथा स्वयं प्रत्यक्ष अनुभव प्राप्त करने को महत्वपूर्ण स्थान दिया जाना चाहिए।

7. **मनोरंजन संबंधी उद्देश्यों की पूर्ति हो सके**–पाठ्यक्रम में कुछ रुचिकर क्रियाओं एवं विनोदात्मक कार्यों का समावेश अवश्य होना चाहिए। इससे जैविक विज्ञान शिक्षण के खाली समय का सदुपयोग करने संबंधी उद्देश्य की पूर्ति होती है। तरह–तरह की क्रियात्मक क्रियाओं और प्रयोगों द्वारा बच्चों का मनोरंजन भी होता है और गणित विज्ञान का ज्ञान प्राप्त करने में भी आसानी रहती है। अतः इन्हें पाठ्यक्रम में उचित स्थान दिया जाना चाहिए।

8. **वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास हो सके**– पाठ्यक्रम में इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि विद्यार्थियों में सही अर्थों में किसी कार्य को करने का वैज्ञानिक ढंग आ सके तथा वे वैज्ञानिक ढंग से किसी चीज के बारे में सोच सकें और उसके औचित्य को परख सकें। गणित विज्ञान की पढ़ाई करते हुए अगर विद्यार्थियों में स्वयं कोई निर्णय न लेने तथा तथ्यों के अंदर गहराई तक जाने की आदत नहीं आती तो ऐसी विज्ञान की पढ़ाई से कोई लाभ नहीं है। कहने का तात्पर्य यह है कि वैज्ञानिक दृष्टिकोण को विकसित करने का उद्देश्य पाठ्यक्रम का निर्धारण करते समय सामने रखा जाना चाहिए। मुख्य बात यह नहीं कि वैज्ञानिक तथ्यों से तथा उपयोगी सिद्धांतों

से परिचित हुआ जाए बल्कि मुख्य बात यह है कि इस ज्ञान को ग्रहण करने तथा उपयोग में लाने का ढंग सीखा जाए। इस तरह से वैज्ञानिक ढंग से प्रशिक्षण देने और वैज्ञानिक दृष्टिकोण को विकसित करने को पाठ्यक्रम निर्धारण में प्रमुख स्थान मिलना चाहिए।

9. **पाठ्यक्रम प्रेरणादायक हो**— पाठ्यक्रम में ऐसी सामग्री को भी स्थान दिया जाना चाहिए, जिसे पढ़कर विद्यार्थी प्रेरणा पा सके। विज्ञान के आविष्कारों की कहानी, विभिन्न वैज्ञानिकों के जीवन की घटनाओं, इत्यादि, सामग्री से बच्चे बहुत कुछ सीखते हैं। किस तरह से प्रतिकूल परिस्थितियों में भी अपने निश्चित ध्येय ओर कठिन परिश्रम द्वारा वैज्ञानिकों ने सफलता प्राप्त की? किस तरह पाषाण युग की दुनिया आज की रॉकेट दुनिया में बदल गई? इस तरह की जानकारी विद्यार्थियों में आत्मविश्वास, आशा और उत्साह का संचार करती है। उन्हें कुछ करने की प्रेरणा देती है तथा उन्हें विज्ञान के और अधिक निकट लाने का प्रयत्न करती है।

10. **लचीलेपन का सिद्धांत**— पाठ्यक्रम चाहे कितनी भी अच्छी तरह सोच—समझकर निर्मित किया गया हो, उसमें कुछ न कुछ सुधार तथा परिमार्जन की आवश्यकता पड़ सकती है। साथ ही गणित विज्ञानों के शिक्षण के मूल्य और उद्देश्य, सामाजिक परिस्थितियां तथा शिक्षण अधिगम के तरीकों में भी परिवर्तन आ सकते हैं। इनके परिणामस्वरूप इसके पाठ्यक्रम में परिवर्तन तथा सुधार की आवश्यकता अनुभव की जा सकती है। अतः पाठ्यक्रम में जड़ता तथा अपरिवर्तनशीलता के स्थान पर लचीलेपन का गुण होना चाहिए, जिससे इसमे समय की मांग के अनुसार आवश्यक परिवर्तन व संशोधन लाए जा सकें। इसके अतिरिक्त पाठ्यक्रम को व्यावहारिक रूप में प्रयोग करते हुए भी शिक्षक को अपनी स्थानीय आवश्यकताओं तथा अधिगम परिस्थितियों को देखते हुए उससे कुछ इधर—उधर हटाकर अधिगम अनुभव प्रदान करने की पूर्व स्वतंत्रता भी होनी चाहिए ताकि पाठ्यक्रम का अधिक रचनात्मक ढंग से उपयोग किया जा सके।

11. **अध्यापक से परामर्श का सिद्धांत**— किसी भी स्तर के पाठ्यक्रम निर्माण में अध्यापक से परामर्श लेना बहुत उपयोगी सिद्ध हो सकता है। अध्यापक को ही पाठ्यक्रम का व्यावहारिक दृष्टि से उपयोग करना होता है। यदि जिसके लिए यह बनाया जाता है, उसी की राय न ली जाए तो फिर इसकी उपयोगिता में संदेह की गुंजाइश तो रहेगी ही। अध्यापक को अपने अनुभवों के आधार पर यह तय करने में आसानी रहती है कि किसी प्रकार के अधिगम अनुभव व्यावहारिक दृष्टि हमारी शिक्षा व्यवस्था के अंतर्गत प्रदान किए जा सकते हैं और किस प्रकार से निश्चित उद्देश्यों की प्राप्ति हो सकती है। अतः पाठ्यक्रम निर्माण के लिए अनुभवी अध्यापकों के सुझावों, निर्देशन तथा परामर्श आदि का पूरा—पूरा ध्यान रखा जाना चाहिए और इस दृष्टि से उनको पाठ्यक्रम निर्माण समिति में प्रतिनिधित्व भी दिया जाना चाहिए।

गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम का विकास

टिप्पणी

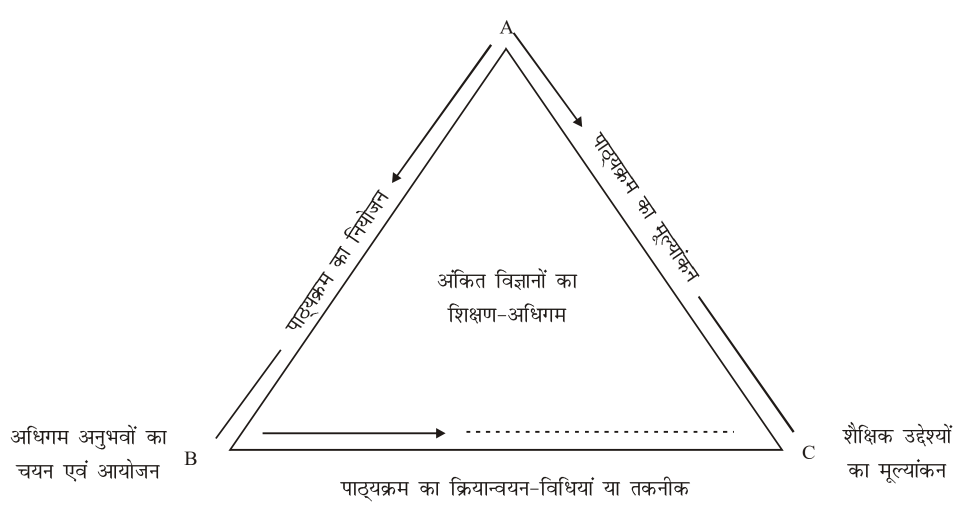
गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम को कैसे विकसित किया जाए इस बात पर विचार करने हेतु हम यहां रॉल्फ हाइलट (Ralph White) द्वारा सुझाए गए पाठ्यक्रम विकास के एक प्रतिमान की चर्चा करना चाहेंगे जिसका वर्णन उन्होंने अपनी पुस्तक **''पाठ्यक्रम तथा अनुदेशन के मूलभूत सिद्धांत''** में किया है। उन्होंने किसी भी विषय विशेष के लिए पाठ्यक्रम विकसित करने हेतु जिन चार सोपनों का अधिक अनुसरण करने की योजना प्रस्तुत की है, वे अग्रलिखित हैं–

1. प्रयोजनों या उद्देश्यों को परिभाषित करना।
2. प्रयोजनों से संबंधित शैक्षिक अनुभव।
3. इन अनुभवों का संगठन।
4. प्रयोजनों का अनुभव एवं मूल्यांकन।

अगर हम अपने ढंग से उपरोक्त सुझाए गए चार सोपानों की भाषा में जैविक विद्वानों में पाठ्यक्रम के विकास के परिप्रेक्ष्य में कुछ परिवर्तन कर लें तो इनका कुछ निम्न रूप हो सकता है–

1. गणित विज्ञान के शिक्षण के उद्देश्यों का निर्धारण।
2. उद्देश्यों की पूर्ति हेतु वांछित अधिगम अनुभवों का चयन।
3. चयनित अधिगम अनुभवों का संगठन।
4. उद्देश्यों की प्राप्ति के परिप्रेक्ष्य में मूल्यांकन सुझाव।

कुछ और अधिक सारांशिक रूप में गणित विज्ञान पाठ्यक्रम के विकास हेतु प्रयुक्त इन चारों सोपानों की चित्रात्मक रूप से निम्न प्रकार प्रस्तुति की जा सकती है–



__चित्र 1.2__ गणित विज्ञान पाठ्यक्रम विकास के सोपान

उपरोक्त चित्रात्मक प्रस्तुति के आधार पर हम गणित विज्ञान पाठ्यक्रम की विकास प्रक्रिया का निम्न रूप में वर्णन कर सकते हैं–

टिप्पणी

1. **उद्देश्य का निर्धारण**– गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के विकास की प्रक्रिया उसके शिक्षण अधिगम हेतु विशेष स्तर या कक्षा के लिए निर्धारित किए जाने वाले लक्ष्यों एवं उद्देश्यों को लेकर ही प्रारंभ होती है। जो प्रयोजन गणित विज्ञानों के शिक्षण द्वारा सिद्ध किए जाने हैं, जिन मूल्यों तथा उद्देश्यों की प्राप्ति की जानी है, उनका निर्धारण और वह भी निश्चित शब्दावली में किया जाना काफी आवश्यक होता है। अतः इन लक्ष्यों तथा उद्देश्यों के उचित निर्धारण के प्रयत्न ही पाठ्यक्रम विकास हेतु सबसे पहले किए जाने चाहिए। ज्ञानात्मक, क्रियात्मक तथा भावात्मक क्षेत्र में अभिव्यक्ति उपयुक्त व्यवहार परिवर्तन लाने हेतु शैक्षिक उद्देश्यों की व्यवहारजन्य शब्दावली में अभिव्यक्ति इस दृष्टि से यहां अवश्य ही की जानी चाहिए। जैविक तथा गणित विज्ञानों के शिक्षण में इन उद्देश्यों का निर्धारण और लेखन कैसे किया जाता है, इस विषय पर ध्यान दिया जाना चाहिए।
2. **अधिगम अनुभवों का चयन**– विषय शिक्षण के जो भी शैक्षिक उद्देश्य निर्धारित किए गए हैं, उन्हें प्राप्त करने हेतु वांछित अधिगम अनुभवों का चयन इस सोपान के अंतर्गत आता है। किस प्रकार के प्रकरणों को शामिल किया जाना है, उनमें किस प्रकार की विषय–वस्तु होनी चाहिए, किस प्रकार के सैद्धांतिक एवं व्यवहारात्मक ज्ञान एवं कौशलों हेतु कैसे अधिगम अनुभव दिए जाने चाहिए, इन सब बातों पर विचार करके अधिगम सामग्री एवं अनुभवों के चयन के बारे में निर्णय इसी तरह इसी सोपान में लिया जाता है। यह निर्णय लेते हुए किस प्रकार के सिद्धांतों को ध्यान में रखा जाना चाहिए, इसकी चर्चा हम पाठ्यक्रम निर्माण के सिद्धांत शीर्षक के अंतर्गत पहले ही कर चुके हैं।
3. **चयनित अधिगम अनुभवों का संगठन**– एक बार यह तय कर लेने के बाद कि किसी स्तर विशेष (प्राथमिक, माध्यमिक या उच्च माध्यमिक) या कक्षा विशेष में गणित विज्ञान के शिक्षण के रूप में क्या कुछ विषय, सामग्री प्रकरण तथा अधिगम अनुभव प्रदान किए जाने चाहिए, प्रश्न यह उठता है कि अब इसको किस रूप में व्यवस्थित एवं संगठित किया जाए। पहले किस प्रकार के प्रकरण विषय–वस्तु या अधिगम अनुभवों को रखा जाए और बाद में किसको। इस तरह का नियोजन ही पाठ्यक्रम विकास में अधिगम अनुभवों का आयोजन या संगठन कहलाता है। अधिगम अनुभवों का इस प्रकार से भली–भांति आयोजन करने हेतु कुछ विशेष उपागमों या सिद्धांतों का अनुसरण किया जाता है।
4. **पाठ्यक्रम का क्रियान्वयन**– विषय विशेष के प्रकरण, विषय वस्तु अधिगम अनुभवों को लेकर किसी स्तर या कक्षा विशेष के लिए जो सामग्री चुनी गई है, जिसका विधिवत संगठन किया गया है। उसे शिक्षण अधिगम के लिए प्रयुक्त कर निर्धारित शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए प्रयत्न रहना ही पाठ्यक्रम का क्रियान्वयन कहलाता है। पाठ्यक्रम चाहे कितने ही परिश्रम से तैयार किए जाएं,

जब तक उसमें विशेष रूप से यह उल्लेख न हो कि इसका क्रियान्वयन भलीभांति कैसे किया जा सकेगा, तब तक उसकी विकास प्रक्रिया अधूरी ही मानी जाएगी। अपने प्रयोजन में पाठ्यक्रम तभी सफल हो पाएगा, जब उसमें यह प्रावधान होगा कि उसका अच्छी तरह क्रियान्वयन कैसे संभव है? कौन–सी विधियों, प्रविधियों, तकनीक तथा व्यूह किस प्रकार की शिक्षण अधिगम सामग्री काम में लायी जाएगी, कैसा शिक्षण अधिगम वातावरण बनाए रखा जाएगा, आदि–आदि के बारे में नियोजन करना इस सोपान के अंतर्गत आता है।

5. **मूल्यांकन के अंतर्गत विधियां एवं तकनीक सुझाना**– पाठ्यक्रम की विकास प्रक्रिया तब तक अधूरी मानी जाएगी, जब तक उसमें इस बात को शामिल नहीं किया जाए कि जो कुछ भी अधिगम अनुभवों के रूप में आयोजित कर दिया गया है और जिसे वांछित शिक्षण विधियों तथा तकनीकों द्वारा विद्यार्थियों के द्वारा संभव हो सकी है। इस प्रकार के मूल्य निर्धारण हेतु उपयुक्त तकनीक तथा विधियों के द्वारा उनके प्रयोग से संबंधी सुझाव देना पाठ्यक्रम विकास प्रक्रिया का अंतिम चरण या सोपान कहा जाता है। यहां इस सोपान में स्पष्ट रूप से यह बताने की कोशिश की जाती है कि मूल्यांकन प्रक्रिया किस तरह की होगी और इसे कैसे क्रियान्वित किया जाएगा। ज्ञानात्मक, क्रियात्मक तथा भावात्मक क्षेत्र के परिवर्तनों की जांच कैसे की जाएगी? निबंधात्मक तथा भावात्मक क्षेत्र के परिवर्तनों की जांच कैसे की जाएगी? निबंधात्मक, लघुत्तरात्मक तथा वस्तुगत प्रश्नों को किस रूप में स्थान दिया जाएगा? मूल्यांकन में लिखित परीक्षा के साथ–साथ और किस प्रकार की परीक्षाओं को स्थान दिया जाएगा, आदि–आदि।

इस प्रकार से उपरोक्त वर्णित सोपानों का अनुसरण करके जैविक तथा गणित विज्ञानों के शिक्षण हेतु एक उपयुक्त पाठ्यक्रम का विकास किया जा सकता है। उपरोक्त पाठ्यक्रम विकास प्रक्रिया में जैसा कि हमें भली–भांति स्पष्ट हो सकता है, मुख्य बात निर्धारित शिक्षण उद्देश्यों की पूर्ति के परिप्रेक्ष्य में विषय विशेष संबंधी प्रकरणों, विषय वस्तु तथा अधिगम अनुभवों का चयन और आयोजन को लेकर ही होती है। चयन कैसे किया जाए, इससे संबंधित सिद्धांत तो पाठ्यक्रम निर्माण संबंधी सिद्धांतों के माध्यम से हमें प्राप्त हो गए हैं। इस आयोजन की प्रक्रिया किन सिद्धांतों या उपागमों पर आधारित हो, इसकी चर्चा अब हम यहां कर रहे हैं।

गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के आयोजन हेतु मुख्यतया जिन सिद्धांतों एवं उपागम का अनुसरण किया जा सकता है, उसका संक्षेप में परिचय नीचे दिया जा रहा है–

प्राकरणिक उपगाम

इस उपागम सिद्धांत के अनुसार, पाठ्यक्रम के गठन में इस बात पर जोर दिया जाता है कि पाठ्य वस्तु तथा अधिगम अनुभवों को प्रकरण अनुसार संगठित किया जाए। किसी स्तर विशेष प्राथमिक, माध्यमिक तथा अधिगम अनुभवों को प्रकरणों में बांट लिया जाए और फिर यह निश्चित कर दिया जाए कि कौन–कौन से प्रकरणों का शिक्षण,

टिप्पणी

कौन–कौन सी श्रेणियों में किया जाता है। जिन प्रकरणों को जिन श्रेणियों में प्रारंभ किया जाए, उनकी शिक्षा उसी श्रेणी में पूरी तरह से दे दी जाए। फिर उन्हें अगली श्रेणी में न पढ़ाया जाए। जैसे माना किसी श्रेणी के जैविक अध्ययन पाठ्यक्रम में 'मानव शरीर संस्थान' नामक प्रकरणों को स्थान दिया हुआ है, तो इनका अध्ययन–अध्यापन केवल इसी श्रेणी में किया जाना चाहिए। इससे पहले और बाद की श्रेणियों में नहीं।

इस उपागम का प्रयोग करते हुए अगर गणित जैविक विज्ञानों तथा गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम का गठन किया जाए तो जहां हमें यह सुविधा हो सकती है कि सरल प्रकरण पहले पढ़ा दें तथा कठिन बाद में। कक्षा विशेष में कुछ गिने–चुने प्रकरणों का ही शिक्षण–अधिगम कराने, आदि, बातों को लेकर सुविधा हो सकती है। इस उपागम में विद्यमान दोषों को लेकर निम्न प्रकार की कठिनाइयों का भी जिक्र करेंगे–

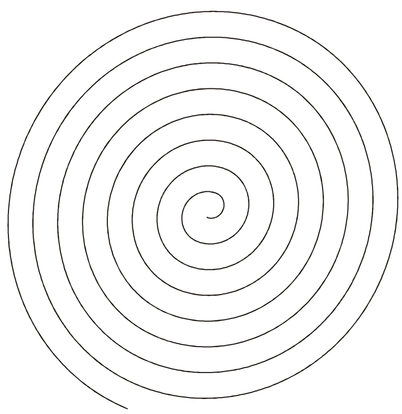
- एक प्रकरण के कुछ अंश सरल होते हैं तथा कुछ कठिन। उदाहरण के लिए अगर मानव शरीर संस्थान नामक प्रकरणों को ही लेकर चलें तो इनके कुछ अंशों का अध्ययन ज्ञान, अवबोध और कौशलों को लेकर काफी कठिन हो सकता है, जबकि कुछ काफी सरल। अतः इसे किसी एक कक्षा विशेष में ही प्रारंभ कर उसमें समाप्त करने की बात युक्तिसंगत नहीं लगती। प्रारंभिक कक्षाओं में तो इसके प्रारंभिक सरल अंश ही होने चाहिए तथा कठिन को बाद की कक्षाओं के लिए छोड़ देना चाहिए।
- बालकों को पर्यावरण और जीवन की समस्याओं से संबद्ध करके पाठ्यक्रम का आयोजन करने की बात इस उपागम के माध्यम से पूरी नहीं हो सकती।
- अगर इस उपागम का अनुसरण किया जाए तो जो प्रकरण पहले पढ़ा दिए जाते हैं, उन्हें दोबारा आगे की कक्षाओं में नहीं पढ़ाया जा सकता। पहले की कक्षाओं में जो वे पढ़ते हैं, उसे पूरी तरह याद रखना संभव नहीं हो पाता। अतः पूर्व ज्ञान के आधार पर नवीन ज्ञान प्रदान करने की बात इस उपागम के प्रयोग द्वारा संभव नहीं हो पाती।
- गणित विज्ञानों के शिक्षण द्वारा बालकों में अच्छी तरह जीवन यापन करने हेतु उपयुक्त चिंतन–मनन दृष्टिकोण, आदतों आदि के विकास पर जोर दिया जाता है। पाठ्यक्रम के विभिन्न अंशों की शिक्षण अधिगम प्रक्रिया इस नाते सभी कक्षाओं में बराबर चलते रहनी चाहिए परंतु प्राकरणिक क्रम का अनुसरण करने से ऐसा कर पाना संभव नहीं है।

इन सभी प्रकार के दोषों का निवारण करने हेतु पाठ्यक्रम गठन हेतु केंद्रीभूत उपागम को अपनाने का सुझाव दिया जाता है। इसकी चर्चा हम आगे करना चाहेंगे।

केंद्रीभूत या चक्राकार उपागम

इस उपागम का अनुसरण करके पाठ्यक्रम का आयोजन करने में किसी एक प्रकरण को किसी एक विषय कक्षा में प्रारंभ करके उसका अंत उसी कक्षा में समाप्त करने की

बात की जाती है। होता यह है कि किसी विशेष स्तर यानी प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर पढ़ाये जाने वाले प्रकरणों का चुनाव पहले कर लिया जाता है और फिर प्रकरणों को बालकों के मानसिक विकास तथा सामर्थ्य के अनुसार बढ़ती हुई कठिनाई के आधार पर उचित अंशों में विभक्त कर लिया जाता है। प्रारंभिक कक्षाओं में शुरुआत सरल अंशों के रूप में होती है, यानी प्रकरण की छोटी–सी शुरुआत भर की जाती है तथा फिर उसका दायरा धीरे–धीरे आगे की कक्षाओं में बढ़ाते जाते हैं। प्रकरण विशेष की जो सार वस्तु होती है, वह केंद्र का कार्य करती है और फिर उसके इर्द–गिर्द पाठ्य वस्तु की कठिनाई के आधार पर आगे की कक्षाओं में बढ़ाते जाते हैं। इस प्रकार का आयोजन, ज्यामित की चक्राकार यानी स्पाइरल आकृति की तरह हो जाता है। घड़ी की कमानी की तरह प्रकरण की विषय वस्तु एक बिंदु से प्रारंभ होकर आगे की कक्षाओं में अग्र प्रकार से विस्तृत होती चली जाती है।



चित्र 1.3 *केंद्रीभूत या चक्राकार संगठन*

उदाहरण के लिए 'प्रजनन' नामक प्रकरण की विषय–वस्तु का गठन करने हेतु जब हम इस उपागम का प्रयोग करेंगे तो शुरुआत बहुत ही सरल रूप में इस प्रकरण का परिचय देने मात्र से होगी। प्रजनन क्या है? पौधों और जंतुओं में इसकी क्या उपयोगिता है? इससे हमारे दिन–प्रतिदिन की जिंदगी में क्या लाभ है?, इत्यादि। इसके बाद प्रजनन संबंधी विभिन्न वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली, प्रक्रिया, प्रनियम आदि विषय वस्तु का आगे की कक्षाओं में क्रमशः बढ़ती हुई कठिनाई के आधार पर संगठन किया जाता रहेगा।

प्रक्रियात्मक उपागम

सभी विज्ञानों के, जिनमें जैविक व गणित विज्ञानों का अध्ययन भी सम्मिलित हों, विकास की अपनी एक विशेष प्रक्रिया होती है तथा उनकी इस विकास प्रक्रियाओं से जुड़ा हुआ होता है। परिणामस्वरूप जब हम विज्ञानों के अध्ययन एवं अध्यापन की बात करते हैं तो यहां भी हम विज्ञान के इस प्रक्रियात्मक प्रक्रिया में हम पूछताछ, जांच–पड़ताल, निरीक्षण, परीक्षण प्रयोग, निष्कर्ष निकालना, नियम तथा सिद्धांतों की स्थापना और उनका सत्यापन तथा वैज्ञानिक तथ्यों एवं सिद्धांतों के अनुप्रयोग आदि में जुटे रहते हैं। या यूं कहिए कि हमें विज्ञानों के बारे में जानने–समझने तथा उन्हें प्रयोग

टिप्पणी

में लाने हेतु उन्हीं विभिन्न प्रक्रियाओं से गुजरना होता है, जिनके माध्यम से विज्ञान का विकास होता है, उसके भंडार में वृद्धि होती है, नयी–नयी खोजें होती हैं तथा पुराने सिद्धांतों या ज्ञान का स्थान नए सिद्धांतों तथा ज्ञान द्वारा ले लिया जाता है। विज्ञान को पढ़ने–पढ़ाने का इस तरह अगर कोई अच्छा तरीका हो सकता है तो वह यही है कि उसे इस तरह की प्रक्रिया में से गुजरवाकर पढ़ा और पढ़ाया जाए, जिस तरह की प्रक्रिया का सहारा इसके क्रमिक विकास में लिया जाता है।

अगर इसी प्रक्रिया विशेष की नयी बात की जाए तो हमें यह ज्ञान होगा कि जिज्ञासा, संग्रह की प्रवृत्ति, कौतूहल तथा कुछ न कर नया करने या बनाने की इच्छा जैसी बातें, जो स्वाभाविक रूप से ही बच्चों में पायी जाती है, यहीं से विज्ञान की प्रक्रिया प्रारंभ होती है और वैज्ञानिक जानकारी को बढ़ावा मिलता है। इस तरह अगर यह बात ध्यान से सोची जाए कि बालक किस प्रक्रिया या प्रक्रियाओं में से गुजर कर शक्ति विज्ञानों के तथ्यों या नियमों से परिचित होते हैं? वे किसी की वैज्ञानिक जानकारी को लेने की आवश्यकता या किसी पाठ को पढ़ने की आवश्यकता कब अनुभव करते हैं?

गणित विज्ञानों में तथ्यों तथा सिद्धांतों को समझने तथा व्यावहारिक जीवन में उनके प्रयोग में लाने हेतु किस प्रकार की प्रक्रियाओं से गुजरते हैं? विद्यार्थी जिन प्रक्रियाओं से गुजरते हुए विज्ञान का ज्ञान ग्रहण कर सकते हैं, उन्हीं को केंद्र बिंदु बनाना होगा तथा विद्यार्थियों को मनोवैज्ञानिक आवश्यकताओं, मूल प्रवृत्तियों, संवेगों तथा जिज्ञासा एवं संग्रह, प्रवृत्ति, रचनात्मक एवं अन्वेषणात्मक प्रवृत्ति करके सीखने की इच्छा, कुछ न कुछ नया करने या खोज निकालने की चाह, इत्यादि, सभी बातों को उनकी आयु, परिवेश तथा कुछ विशेष के स्तर के हिसाब से ध्यान में रखते हुए गणित विज्ञानों के अध्ययन–अध्यापन के लिए उपलब्ध विषय वस्तु को क्रमिक रूप से कठिनाई स्तर का ध्यान रखते हुए विभिन्न कक्षाओं के अध्ययन–अध्यापन के लिए संगठित करना होगा। इस तरह जिस प्रक्रियाओं में से गुजरते हुए विद्यार्थी अपनी आयु, योग्यता, रुचि और स्वाभाविक प्रवृत्तियों के अनुकूल रहते हुए विज्ञान की विषय वस्तु का अध्ययन कर सकते हैं, उसी रूप में गणित विज्ञानों की विषय वस्तु का विभिन्न कक्षा स्तरों पर क्रमिक आयोजन किया जाएगा।

समन्वित या एकीकृत उपागम

पाठ्यक्रम संगठन हेतु काम में लाए जाने वाला यह उपागम समवाय तथा समन्वय के सिद्धांतों का अनुपालन करता है। इन सिद्धांतों के अनुसार, ज्ञान सदैव एक इकाई के रूप में इकट्ठा ही विद्यमान रहता है। यही कारण है कि हम अपने दिन–प्रतिदिन की जिंदगी में ज्ञान को सदैव एक इकाई के रूप में इकट्ठा ही प्रयोग में लाते हैं। विज्ञान विषयों के ज्ञान के बारे में तो यह बात नितांत ही खरी बैठती है। जब हम अपने व्यावहारिक जीवन में विज्ञान के ज्ञान और तकनीकी कुशलता का उपयोग करते हैं तो हम उसे एक इकाई के रूप में इकट्ठा ही प्रयोग में लाते हैं। ऐसा करने से हम कभी यह नहीं सोचते कि अब हम गणित शास्त्र में पढ़ी हुई बातों को काम में ला रहे हैं या अब रसायनशास्त्र, भौतिकशास्त्र तथा भू–विज्ञान की बातें हमें सहायता कर रही है। विषय की सभी शाखाओं, विषयों तथा

उप–विषयों से संबंधित ज्ञान और कौशलों का जो भंडार हमारे पास है, हम उनके मूल विभाजन या वर्गीकरण भी कोई परवाह किए बिना समूचे एकात्मक तथा समन्वित रूप में ही अपने व्यावहारिक जीवन में प्रयोग करते हैं। इस तरह जब ज्ञान का उपयोग ही समूचे और समन्वित रूप में ही होता है तो उससे अधिक लाभ होता है। टुकड़ों–टुकड़ों के आयोजन में एकीकृत या समन्वित उपागम के प्रयोग के पीछे यही सोच कार्य करती है।

टिप्पणी

इसी सोच का यह परिणाम रहा है कि विज्ञानों के अध्ययन हेतु हमारे विद्यालयों में साधारण विज्ञान या सामान्य विज्ञान विषय को पढ़ने–पढ़ाने हेतु प्रयत्न किए जाते रहे हैं। विज्ञान की पाठ्यवस्तु या इस विषय के रूप में संगठन करने हेतु इसमें विज्ञान की शाखाओं तथा उप–विषयों, जैसे–जैविक शास्त्र, रसायनशास्त्र, वनस्पति विज्ञान, प्राणी विज्ञान, भू–विज्ञान, नक्षत्र विज्ञान आदि से विषय सामग्री लेकर इसको इस तरह समन्वित और एकीकृत करने का प्रयत्न किया जाता रहा है कि विज्ञान के तथ्यों, सिद्धांतों तथा नियमों का ज्ञान और उनका प्रयोग का ढंग एकीकृत तथा समन्वित रूप में ही विद्यार्थियों के सामने आए ताकि वे इसका इसी रूप में अपने व्यावहारिक जीवन में उपयोग कर सकें।

इस तरह इस उपागम या सिद्धांत के अनुसरण में यह मूल मान्यता कार्य करती है कि ज्ञान और कौशलों का उपयोग बहुधा उनके एकीकृत या समन्वित रूप से ही किया जाता है। दैनिक जीवन में बालक जब अपने सामाजिक परिवेश को जानने और उसमें अपने आपको समायोजित करने के लिए आवश्यक ज्ञान एवं कौशलों को प्रयोग में लाते हैं तो उन्हें जैविक, रसायन तथा जीव विज्ञानों आदि विषयों के अकेले–अकेले ज्ञान एवं कौशलों की आवश्यकता नहीं पड़ती है। अतः ऐसी शिक्षा उन्हें गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के अध्ययन द्वारा प्राप्त होनी चाहिए। इस दृष्टि से गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के गठन में यह बात मुख्य रूप से मानकर चलनी चाहिए कि गणित विज्ञानों के शिक्षण के द्वारा बालकों को विभिन्न गणित विज्ञानों का अकेले–अकेले रूप में विस्तृत एवं गहन ज्ञान न दिया जाकर, ऐसा एकीकृत और समन्वित ज्ञान तथा अनुभव प्रदान किए जाए, जिनसे गणित विज्ञानों के शिक्षण संबंधी निर्धारित उद्देश्यों की भली–भांति प्राप्ति सहज ढंग से हो सके। सम्मिलित विषय अलग–अलग नजर न आएं परंतु वे एक माला में पिरोए हुए ऐसे पुष्प बने रहें, जिनमें एकीकृत रूप से इच्छित प्रयोजन सिद्ध हो सके। इस दृष्टि से गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम के आयोजन में हमें जहां इसकी विभिन्न शाखाओं, प्राणी विज्ञान, वनस्पति विज्ञान, कृषि विज्ञान, औषधि विज्ञान आदि से सामग्री लेकर उसे विद्यार्थियों की आयु तथा कक्षा स्तर को ध्यान में रखकर सरल से कठिन की ओर बढ़ते हुए क्रमिक रूप से संगठित करने का प्रयत्न करना चाहिए। वहां यह भी ध्यान रखना चाहिए कि इस प्रकार के समन्वय या एकीकरण में समन्वय या सह–संबंध के सिद्धांत का भी पूरी तरह अनुपालन हो जाए। सामान्यतया इस प्रकार के अनुपालन हेतु हमें कक्षा विशेष के लिए चयनित गणित विज्ञानों संबंधी विषय सामग्री तथा अधिगम अनुभवों के संगठन में निम्न प्रकार से समवाय या सह–संबंध स्थापित करने के प्रयत्न अवश्य करने चाहिए–

(क) विद्यार्थियों की दैनिक जीवन की क्रियाओं तथा उनके जैविक तथा सामाजिक परिवेश से जुड़ी हुई बातों के साथ समन्वय।

(ख) प्राणी विज्ञान, वनस्पति विज्ञान, कृषि विज्ञान, औषधि विज्ञान आदि जिन उप–विषयों या शाखाओं से गणित विज्ञान हेतु सामग्री ली गई है या अधिगम अनुभवों को शामिल किया गया है, उनमें अतः पारस्परिक समन्वय।

टिप्पणी

1.3.1 गणितीय पाठ्यक्रम के उद्देश्य

स्कूल में गणित पढ़ाने का उद्देश्य उपयोगी क्षमताओं को विकसित करना है, विशेष रूप से यह उद्देश्य संख्या, संख्या संचालन, माप, दशमलव और प्रतिशत से संबंधित होता है।

निम्नलिखित उद्देश्य हमें स्कूल गणित पाठ्यक्रम की दृष्टि को साकार करने में मदद करेंगे:

1. मौलिक गणितीय कौशल में प्रवीणता;
2. बुनियादी गणितीय अवधारणाओं को समझना;
3. तार्किक रूप से सोचने, कारण, विश्लेषण और मुखर करने के लिए वांछनीय दृष्टिकोण;
4. गणित के भीतर और अन्य विषय क्षेत्रों में ध्वनि गणितीय अनुप्रयोगों में दक्षता;
5. बुद्धिमान और स्वतंत्र व्याख्याएं करने में आत्मविश्वास बनाए रखना;
6. विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, मानविकी, कला, आदि, में इसके अनुप्रयोगों के लिए गणित की सामर्थ्यता और कार्यक्षमता की सराहना करना।

पाठ्यक्रम संगठन के दृष्टिकोण

किसी विषय का पाठ्यक्रम तैयार करते समय निम्नलिखित दृष्टिकोण अपनाए जाते हैं।

1. समयिक तथा चक्राकार दृष्टिकोण

सामयिक दृष्टिकोण अपने नाम अधिवक्ताओं द्वारा सुझाव दिया एक विशेष श्रेणी में एक पूरे के रूप में एक विषय को आच्छादित करने के लिए करते हैं।

2. तार्किक एवं मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण

तार्किक व्यवस्था से विषय–वस्तु का कठोर व्यवहार होता है जो तार्किक तर्क पर आधारित होता है जबकि मनोवैज्ञानिक व्यवस्था छात्रों की दृष्टि से होती है। ऐसा लगता है कि दोनों दृष्टिकोण अलग हैं लेकिन इन्हें आसानी से मिलाया जा सकता है। संगठन मनोवैज्ञानिक और तार्किक दोनों हो सकता है। सभी तर्क मनोवैज्ञानिक है। मनोविज्ञान एक विशेष चरण में छात्रों की समझ की शक्ति पर प्रकाश डालता है। हम विभिन्न तरीकों से तार्किकता का प्रयोग कर सकते हैं। मनोविज्ञान को यह तय करना चाहिए कि किसी विशेष विषय के लिए कौन सा तार्किक दृष्टिकोण उपयुक्त होगा। तर्क विषयों

के उचित अनुक्रम को बनाए रखने में मदद मिलेगी, इसलिए हमें विषयों को इस तरह से व्यवस्थित करना चाहिए कि हम एक ही समय में मनोवैज्ञानिक और तर्क का पालन कर सकें ताकि उपयुक्त समस्या का उचित हल प्राप्त किया जा सके।

टिप्पणी

मनोविज्ञान को यह तय करना चाहिए कि एक निश्चित उम्र के छात्र के लिए किस तरह का तर्क उपर्युक्त है और इस तरह की तार्किक सोच के विकास के लिए किस प्रकार के विषय सबसे उपयुक्त होंगे। तर्क बच्चे के लिए उपयोगी और सार्थक पाए जाने वाले विषयों की संधि और अनुक्रम को बनाए रखने में मदद करेगा।

3. सह–संबंधी दृष्टिकोण

गणित में समीकरणों का हल करते समय सह–संबंध के सिद्धांत को हमेशा उचित महत्व दिया जाना चाहिए। सह–संबंध विभिन्न किस्मों का हो सकता है। गणित में पाठ्यक्रम पर विचार करते समय निम्नलिखित प्रकार के सह–संबंध को ध्यान में रखा जाना चाहिएः

(क) रोजमर्रा की जिंदगी की समस्याओं के साथ गणित का सह–संबंध।

(ख) अन्य विषयों के साथ गणित का सह–संबंध।

(ग) गणित की विभिन्न शाखाओं के बीच सह–संबंध।

(घ) गणित की एक विशेष शाखा के विभिन्न विषयों के बीच सह–संबंध।

(ङ) शिल्प या कार्य अनुभव के साथ सह–संबंध।

संबंधित विषय–वस्तु को सहसंबद्ध करने के लिए हमें निम्नलिखित को जानना चाहिए–

- विद्यार्थियों की दिन–प्रतिदिन की जीवन गतिविधियां।
- एक ही अवस्था में अन्य विषयों में शामिल विषयों की प्रकृति।
- इस विषय की विभिन्न शाखाओं में शामिल विषय जैसे अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, आदि।
- विषय की एक ही शाखा के विषयों का क्रम।
- छात्रों द्वारा किए गए कार्य अनुभव या परियोजनाओं की प्रकृति।

4. संकेन्द्रित दृष्टिकोण

यह शिक्षण की विधि के बजाय एक पाठ्यक्रम के आयोजन की एक प्रणाली है। इसलिए इसे संकेन्द्रण प्रणाली या दृष्टिकोण कहना बेहतर है। इसका तात्पर्य ज्ञान को चौड़ा करना है, ठीक वैसे ही जैसे केन्द्रीकरण का विस्तार और चौड़ीकरण होता है। यह विषय–वस्तु की व्यवस्था की व्यवस्था है। इस विधि में विषय का अध्ययन कई वर्षों में फैला हुआ है। यह इस सिद्धांत पर आधारित है कि विषय को पहले चरण में व्यापक समर्थन नहीं दिया जा सकता है। प्रारंभ में, विषय की एक सरल प्रस्तुति दी जाती है और अगले वर्षों में आगे का ज्ञान प्रदान किया जाता है।

पाठ्यक्रम के रूपरेखण करने का सिद्धांत

1. **अनुशासनात्मक मूल्य का सिद्धांतः** जो मन को अनुशासित करने के कार्य में मदद करते हैं।

2. **उपयोगिता का सिद्धांतः** इस सिद्धांत के अनुसार जो उपयोगी है, उसे पाठ्यक्रम की रूपरेखण के लिए होना चाहिए। गणित पाठ्यक्रम में उन सभी विषयों को शामिल किया जाना चाहिए जो निम्नलिखित हैं–

- दिन–प्रतिदिन के जीवन में सहायक।
- अन्य विषयों को सीखने में सहायक।
- विषय गणित के सौंदर्य और कलात्मक मूल्य की प्राप्ति में सहायक।
- वैज्ञानिक और तकनीकी प्रगति को समझने और गणित और विज्ञान के क्षेत्र में आगे के शोध कार्य के लिए सहायता प्रदान करने में सहायक।

3. **बाल केंद्रितः** पाठ्यक्रम निर्माण में हमें उन छात्रों की जरूरतों और आवश्यकताओं को उचित महत्व देना चाहिए जिनके लिए हम एक पाठ्यक्रम तैयार करने जा रहे हैं। इसलिए पाठ्यक्रम निर्माण की किसी भी योजना में विशेष आयु, रुचि और समाज के बच्चों की आवश्यकताओं–क्षमता, रुचि और अन्य विकासात्मक विशेषताओं को ध्यान में रखा जाना चाहिए।

4. **अभ्यास के साथ सिद्धांत की अखंडताः** गणित पाठ्यक्रम विषयों, संक्रियाओं, समीकरणों और गतिविधियों का पालन आवश्यक है जिससे कि हमारे पास अभ्यास के साथ सिद्धांत को एकीकृत करने के पर्याप्त अवसर हो सकते हैं।

5. **सामुदायिक केंद्रितता का सिद्धांतः** पाठ्यक्रम का निर्माण और स्थानीय समुदाय के कल्याण के लिए आकार दिया जाना चाहिए।

6. **परामर्श विशेषज्ञों का सिद्धांतः** पाठ्यक्रम निर्माण को उन व्यक्तियों की मदद और मार्गदर्शन की आवश्यकता होती है जो उस विषय का विशेषज्ञ हो ताकि समुचित तरीकों से पाठ्यक्रम का रूपरेखण किया जा सके।

1.3.2 स्कूल गणित की परिकल्पना, गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य, स्कूल गणित में चिंता के मुख्य क्षेत्र, स्कूल गणित शिक्षा के विभिन्न चरणों में पाठयक्रम विकल्प

गणित विषय की अपनी एक अलग प्रकृति है। जिसके आधार पर हम इस विषय की तुलना अन्य किसी विषय से नहीं कर सकते हैं, किन्हीं दो या दो से अधिक विषयों की तुलना का आधार उन विषयों की प्रकृति से है, जिसके आधार पर हम विषय के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं।

गणित पाठ्यक्रम में मुख्य विशेषताएं

टिप्पणी

गणित की विशेषताएं निम्न है–

1. गणित के ज्ञान का आधार हमारी ज्ञानेंद्रियां है।
2. इसके ज्ञान का आधार निश्चित होता है।
3. गणित में संख्याएं, स्थान, दिशा तथा माप एवं परिणाम का ज्ञान प्राप्त किया जाता है।
4. इसके द्वारा मात्रात्मक तथ्यों एवं संख्यात्मक विश्लेषण का अध्ययन किया जाता है।
5. यह विज्ञान का अमूर्त रूप है।
6. यह तार्किक विचारों का विज्ञान है।
7. गणित के अध्ययन से मस्तिष्क में तर्क करने की शक्ति स्थापित होती है।
8. यह प्रयोगिक विज्ञान है।
9. गणित वह विज्ञान है जिसमें आवश्यक निष्कर्ष निकाले जाते हैं।
10. गणित विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में सहायक ही नहीं अपितु उनकी प्रगति एवं संगठन की आधारशिला है।
11. गणित का प्रयोग विज्ञान की विभिन्न शाखा जैसे भौतिक एवं रासायनिक विज्ञान, भू–विज्ञान, भूगोल शास्त्र इत्यादि में किया जाता है। अपितु यह कहना सत्य है कि गणित सभी विषयों की आधारशिला है।

गणित शिक्षा का लक्ष्य है

गणित का विशेषज्ञ होने के लिए अपनी क्षमताओं का विकास गणित शिक्षा का व्यापक उद्देश्य है जिसमें समस्या समाधान, हेरिस्टिक्स का उपयोग, अनुमान प्रतिरूपों सन्निकटन, अनुकूलन, पैटर्न का उपयोग, दृश्य, प्रतिनिधित्व, तर्क और प्रमाण, सह–संबंध का प्रयोग, गणितीय संचार जैसी क्षमताएं शामिल हैं। स्कूल गणित का संकीर्ण उद्देश्य तथाकथित 'उपयोगी' क्षमताओं को विकसित करना है, विशेष रूप से संख्यात्मक संख्या, संख्या संचालन, माप, दशमलव और प्रतिशत से संबंधित ज्ञान की प्राप्ति करना है। संज्ञानात्मक, भावात्मक और रचनात्मकता में गणित शिक्षा के विशिष्ट उद्देश्य उपयुक्त तरीकों, पाठ्यक्रम तैयार करने के लिए मार्गदर्शन, मूल्यांकन प्रश्न तैयार करने, आदि, को रूपरेखण करने में मदद करते हैं।

पाठशाला में गणित चिंताजनक रूप में

विद्यालय के गणित में और वास्तविक जीवन में ठोस आकृतियों और ठोस पदार्थों का ज्ञान अनिवार्य है, इमारतों, कुर्सियों, रंगोली के प्रतिरूप, मस्जिदों और मंदिरों सभी में केवल एक आकृति या ठोस वस्तु नहीं, बल्कि इनमें से केई आकृतियां एक साथ जुड़ी होती है। लोग आकृतियों, ठोस पदार्थों और आयतन के संयोजनों से परिचित होना

अनिवार्य है। लेकिन पाठशाला में विद्यार्थी गणित को जटिल विषय माना करते हैं। क्योंकि वे सर्वसमिकाएं एवं गणित की समस्या को हल करना एक जटिल प्रक्रिया के रूप में मानते हैं तथा इसका निवारण इनके पदों को रटना नहीं समझाकर व स्वयं तर्क का प्रयोग करके निष्कर्ष तक पहुंचना है।

पाठ्यक्रम में निरंतर मूल्यांकन का दायरा– छात्रों के सीखने का सतत और आवधिक मूल्यांकन यह निर्धारित करने के लिए आवश्यक है कि पूर्व निर्धारित उद्देश्यों को किस हद तक प्राप्त किया गया है। एक प्रभावी मूल्यांकन के लिए सरलता और नवीनता की आवश्यकता होती है। सैद्धांतिक ज्ञान केवल शिक्षकों को प्रदान करने से उन्हें कक्षा में प्रभावी मूल्यांकन रणनीतियों को लागू करने में मदद नहीं मिलेगी। शिक्षकों को प्रदर्शन के साथ मूल्यांकन रणनीतियों के विभिन्न उदाहरण उपलब्ध कराए जाएं। ताकि वह समुचित रूप से छात्रों का गणित विषय में सही मार्गदर्शन कर सकें।

शिक्षक द्वारा अपनाई गई शिक्षाशास्त्र– शिक्षक द्वारा अपनाए गए शिक्षाशास्त्र छात्रों की सफलता से सकारात्मक रूप से संबंधित है। गणित विषय को छात्रों के लिए आसान या कठिन बनाने में शिक्षक द्वारा उपयोग किए जाने वाले शैक्षणिक दृष्टिकोण की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। शिक्षाशास्त्र और अभ्यास के क्षेत्र में गणित के शिक्षकों को उचित अभिविन्यास और प्रशिक्षण प्रदान किए जाने की आवश्यकता है। पूर्व सेवा और सेवा में शिक्षक शिक्षा कार्यक्रमों में इस चिंता को समुचित रूप से दूर करने की आवश्यकता है।

स्कूल गणित शिक्षा के विभिन्न चरणों में पाठयक्रम विकल्प

स्कूल गणित के प्राथमिक चरण में पाठयक्रम विकल्प प्राथमिक स्कूल चरण मूल मंच है जिस पर बाद के चरणों का निर्माण करने की आवश्यकता है। विषय सूचि चुनते समय यहां दो बातों पर विचार करना होगा। सबसे पहले, यह वह चरण है जिस पर हमें बच्चों के बीच गणित के विषय के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण पैदा करने की आवश्यकता है। इस स्तर पर अधिक गणितीय खेल, पहेली और अन्य मनोरंजक गतिविधियों को शामिल करने के लिए पर्याप्त ज्ञान दिया जाना आवश्यक है। इसके अतिरिक्त चूंकि यह वह स्तर है जिस पर विभिन्न गणितीय विचारों की बुनियादी अवधारणाओं को विकसित किया जाना है। उच्च गणितीय अवधारणाओं को तभी विकसित किया जा सकता है जब बच्चों का एक मजबूत आधार हो। इसलिए विभिन्न गतिविधियों को प्रभावी ढंग से आयोजित करने के माध्यम से गणित के लिए मजबूत आधार बनाने के लिए और अधिक प्रयास किए जाने की आवश्यकता है। इन अवधारणाओं के अधिकांश बच्चों के शिक्षण जीवन के लिए अनिवार्य है। इसलिए, जहां तक संभव हो इन तथ्यों को रोजमर्रा की जिंदगी की स्थितियों से जोड़कर सिखाया जाना चाहिए। इस स्तर पर शामिल किए जाने वाले विभिन्न विषय संख्या और इसके संचालन, आकार, स्थानिक समझ, प्रतिरूप, माप और आंकड़ों हो सकते हैं।

स्कूल गणित के उच्च प्राथमिक चरण में पाठयक्रम विकल्प उच्च प्राथमिक चरण के दौरान, धीरे–धीरे बच्चों को अमूर्त अवधारणाओं से निपटने का अवसर दिया जाना चाहिए। उनकी रुचि को बनाए रखने और उन्हें डर और संदेह के बिना गणित सीखने

टिप्पणी

के लिए, विभिन्न गणितीय खेल, पहेली, लघुपथ, और मनोरंजक गतिविधियों प्रदान करने के लिए देखभाल की जानी चाहिए। यह वह अवस्था है जिस पर बीजगणित को शुरू करने की आवश्यकता है। इसे वास्तविक जीवन की स्थितियों से जोड़कर और जीवन की विभिन्न समस्याओं को हल करने में इसके उपयोग के माध्यम से पेश किया जाना चाहिए। यह वह अवस्था है जिस पर प्रतिशत, अनुपात, ब्याज, आदि, जैसी अवधारणाओं को शुरू किया जाना है। उन्हें वास्तविक जीवन की स्थिति से जोड़ने के बिना इन विषयों का परिचय देने का कोई फायदा नहीं है। अंतरिक्ष और आकार का व्यवस्थित अध्ययन और माप, आंकड़ों का संचालन, संक्रियाएं और व्याख्या के अपने ज्ञान को मजबूत करने के लिए इस स्तर पर पाठ्यक्रम का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है।

माध्यमिक स्तर पर स्कूल गणित के माध्यमिक चरण में पाठयक्रम विकल्प– माध्यमिक चरण में, छात्रों को गणित की संरचना को एक अनुशासन के रूप में अनुभव करना शुरू करते हैं। इसके अलावा प्रयोगिक ज्ञान के साथ वैचारिक ज्ञान से संबंधित करने के छात्रों को समझाना चाहिए। गणितीय संचार की विशेषताओं के माध्यम से विभिन्न अवधारणाओं को परिचित करने के लिए प्रदान किए जाने वाले उदाहरण और गतिविधियां, सावधानीपूर्वक परिभाषित शब्द और अवधारणाएं, उनका प्रतिनिधित्व करने के लिए प्रतीकों का उपयोग, सूत्र प्रमेय व सर्वसमिकाएं का समुचित रूप से उपयोग के ज्ञान से अवगत करना चाहिए। छात्र इस चरण के दौरान बीजगणित, गणितीय प्रतिरूपक, आंकड़े विश्लेषण और व्याख्या के साथ अपनी तार्किक शक्ति का विकास करते हैं। बीजगणित और अंकगणित को ज्यामिति के साथ सहसंबद्ध किया जा सकता है। बीजगणित और ज्यामिति त्रिकोणमिति के साथ सहसंबद्ध किया जा सकता है। भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान, भूगोल या सामाजिक विज्ञान जैसे अन्य विषयों के साथ गणित के संबंध पर भी ध्यान दिया जाना चाहिए।

स्कूल गणित के उच्च माध्यमिक चरण में पाठयक्रमविकल्प– उच्च माध्यमिक चरण में गणित के अनुशासन को समझना गणित के छात्रों को गणितीय अनुप्रयोगों की एक विस्तृत विविधता का ज्ञान से परिचित कराना चाहिए जो इन अनुप्रयोगों को सक्षम करते हैं। अर्थशास्त्र, वाणिज्य, ज्योतिष, संगणक विज्ञान आदि अन्य विषयों का गणित के साथ सह–संबंध पर इस स्तर पर जोर देने की जरूरत है। प्रथम चरण है, जिससे छात्र के भविष्य विकल्पों की ओर निर्देशित किया जाता है। इस समय तक, छात्रों के हितों और योग्यता काफी हद तक निर्धारित किया गया है और इन दो वर्षों में गणित शिक्षा उनकी क्षमताओं को तेज करने में मदद कर सकते हैं। बच्चों को उच्च स्तर पर गणित के बाद के अध्ययन के लिए तैयार करने पर अधिक ध्यान दिया जाना है।

1.3.3 पाठ्यक्रम विकास के आधुनिक के रुझान पाठ्यक्रम विकास में व्यवहारवादी से रचनात्मक दृष्टिकोण से संबंधित विषय का केंद्रीयकरण

किसी भी विषय का पाठ्यक्रम अपनी मूल अवधारणा के संदर्भ में एक ऐसे माध्यम, उपकरण या साधन के रूप में हमारे सामने आता है, जिसकी सहायता से उस विषय

विशेष के लिए निर्धारित शिक्षण अधिगम उद्देश्यों की प्राप्ति का रास्ता खुलता है। यह भी सही है कि विषय शिक्षण के उद्देश्यों एवं लक्ष्य को सदैव इस तरह निर्धारित किया जाता है, जिनसे विद्यार्थियों का अधिक से अधिक हित चिंतन हो सके। दूसरे शब्दों में, पाठ्यक्रम सभी प्रकार से विद्यार्थियों की, उनकी आवश्यकताओं, रुचियों तथा प्रयोजनों की सिद्धि में सहायता प्रदान करने के लिए होता है। यह बात गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम की सिद्धि में भी उतना ही सही है। इसके माध्यम से ही विद्यार्थियों की रुचियों तथा आवश्यकताओं की पूर्ति हेतु समुचित प्रयत्न किए जाने चाहिए। विद्यार्थियों की रुचियों एवं आवश्यकताओं से भली–भांति जुड़ने के लिए गणित विज्ञान के पाठ्यक्रम को विद्यार्थियों को सामाजिक, सांस्कृतिक, जैविक तथा कार्यस्थलों से संबंधित परिवेश की आवश्यकताओं तथा परिस्थितियों से जुड़े रहने की बात सामने आ सकती है। थोड़ा ओर सोचा जाए तो जो बात स्पष्ट रूप से उभर कर सामने आती है, वह यह है कि गणित विज्ञानों को पढ़ने–पढ़ाने से संबंधित जो परिस्थितियां एवं संसाधन स्थानीय रूप से उपलब्ध रहते हैं, उन्हीं को ध्यान में रखकर गणित विज्ञानों में क्या पढ़ा तथा पढ़ाया जाए यह बात सोची जानी चाहिए।

टिप्पणी

दूसरी बात यह भी है कि पाठ्यक्रम के निर्माण एवं विकास से भी महत्वपूर्ण कार्य उसको भली–भांति प्रयोग करने या उनके क्रियान्वयन को लेकर होता है। पाठ्यक्रम किसी भी मेहनत से, उसके माध्यम से, और कितनी भी अच्छी तरह तैयार किया जाए, जब तक उसका क्रियान्वयन ठीक तरह से नहीं होता, उसके माध्यम से निर्धारित उद्देश्यों की प्राप्ति में वांछित सफलता नहीं मिल सकती। अब वह क्रियान्वयन तो निश्चित रूप से स्थानीय संसाधनों तथा उपलब्ध परिस्थितियों पर भी निर्भर करता है और इस दृष्टि से यह काफी जरूरी हो जाता है कि निर्मित या विकसित पाठ्यक्रम में इतनी संभावना या लचीलापन अवश्य रखा जाए कि उसे स्थानीय आवश्यकताओं तथा संसाधनों की अपेक्षा अनुकूल रूप से ढालने का यह कार्य दो स्तरों पर किया जा सकता है। एक तो उस समय, जिस समय पाठ्यक्रम को विकसित किया जा रहा है और दूसरे उस समय, जब किसी पाठ्यक्रम का उसके निर्माण के बाद स्थानीय स्तर पर क्रियान्वयन किया जा रहा हो। आइए, देखें कि इन दोनों स्तरों पर पाठ्यक्रमों का अनुकूलन कैसे किया जा सकता है–

(क) **विकास स्तर पर किया जाने वाला अनुकूलन**– पाठ्यक्रम जब निर्माण या विकास अवस्था से गुजर रहा होता है तो पाठ्यक्रम निर्माण संबंधी समिति को अवश्य ही ध्यान रखना चाहिए कि पाठ्यक्रम निर्माण में स्थानीय आवश्यकताओं तथा संसाधनों की उपलब्धि संबंधी बातों से अवश्य ही तालमेल रखा जाए। सामान्तया निम्न बातों पर ध्यान देना इस दृष्टि से उपयोगी सिद्ध हो सकता है–

- उनके द्वारा उन सभी स्थानीय आवश्यकताओं की जानकारी लेने का प्रयत्न किया जाना चाहिए, जिनकी पूर्ति की अपेक्षा गणित विज्ञान के पाठ्यक्रम से की जाती है। उदाहरणार्थ कोई एक समाज या समुदाय अथवा भू–भाग में रहने वाले भौगोलिक स्थिति, जलवायु, ग्रामीण एवं शहरी क्षेत्र, आयु के

टिप्पणी

स्रोत, औद्योगीकरण, उपलब्ध प्राकृतिक संगठन आदि के संदर्भ में अगर अपने बालक को कोई विशेष शिक्षा व्यवस्था या अधिगम अनुभव चाहते हों तो पाठ्यक्रम में इसकी अनुपालना का विशेष रूप सेध्यान रखा जाना चाहिए। यह बात पाठ्य पुस्तक में शामिल करने को विवश कर सकती है ताकि पाठ्यक्रम स्थानीय लोगों की आवश्यकताओं तथा आकांक्षाओं से भली–भांति जुड़ सके। इस तरह मान लिया कि स्थानीय परिवेश में ऊर्जा पैदा करने वाले संयंत्र है या रासायनिक उद्योगों और खानों की प्रचुरता है तो पाठ्यक्रम में इस प्रकार के प्रकरण तथा इन स्थानीय उपलब्ध रोजगार साधनों के ज्ञान एवं कौशल से जुड़ी हुई बातों को जानने तथा समझने के यथोचित अवसर प्राप्त हो सकते हैं।

- एक बार यह तय कर लेने के बाद किस प्रकार की विषय वस्तु, प्रकरण या अधिगम अनुभव स्थानीय आवश्यकताओं की पूर्ति में सहायक होंगे, पाठ्यक्रम निर्माण समिति को अब इस प्रकार की संपूर्ण चयनित सामग्री को विभिन्न विद्यालय स्तरों और कक्षाओं में पढ़ाने हेतु अच्छी तरह बांट देना चाहिए। इस प्रकार का विभाजन और संगठन पाठ्यक्रम आयोजन संबंधी आवश्यक सिद्धांतों को ध्यान में रखकर ही इसी प्रकार किया जाना चाहिए कि छोटी कक्षाओं में सरल विषय वस्तु रहे और फिर उसका कठिनाई का दायरा धीरे–धीरे आगे की कक्षाओं में बढ़ता चला जाए।
- स्थानीय रूप से उपलब्ध संसाधनों (मानवीय एवं जैविकीय) के बारे में पूरी जानकारी पाठ्यक्रम निर्माण समिति द्वारा रखी जानी चाहिए। इन संसाधनों पर ही पाठ्यक्रम का क्रियान्वयन निर्भर करता है। इसलिए पाठ्यक्रम में ऐसी विषय वस्तु, क्रियाकलापों तथा शिक्षक अधिगम अनुभवों को स्थान दिया जाना चाहिए, जिनके भलीभांति क्रियान्यन हेतु स्थानीय परिवेश में अपेक्षित संसाधन उपलब्ध हों। उपरोक्त बातों को ध्यान में रखकर इस प्रकार से गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम को उसकी निर्माण अवस्था में ही स्थानीय आवश्यकताओं तथा संसाधनों के अनुकूल ढालने के यथोचित प्रयत्न अवश्य ही किए जाने चाहिए।

(ख) **क्रियान्वयन स्तर पर किया जाने वाला अनुकूलन**– किसी भी कारणवश यदि पाठ्यक्रम निर्माण अवस्था में स्थानीय आवश्यकताओं और संसाधनों की अनुकूलता को ध्यान में रखना संभव न हो सके या ऐसा करने में कुछ कमी रह जाए तो उस पाठ्यक्रम में इतना लचीलापन अवश्य होना चाहिए कि क्रियान्वयन स्तर पर विद्यालय या अध्यापक विशेष द्वारा इस प्रकार का आवश्यक अनुकूलन ठीक ढंग से किया जा सके। कई बार ऐसा भी होता है कि इस प्रकार की स्थानीय आवश्यकता या मांग या संसाधनों की कमी इत्यादि क्रियान्वयन स्तर पर अचानक उभर कर सामने आ जाती है। उस समय अपेक्षित अनुकूलन काफी

टिप्पणी

आवश्यक हो जाता है। इन सब बातों को ध्यान में रखते हुए विद्यालय और अध्यापकों को क्रियान्वयन स्तर पर किए जाने वाले अनुकूलन प्रयासों से अच्छी तरह परिचित होना आवश्यक है।

सामान्य तौर पर इस दिशा में निम्न प्रकार से आगे बढ़ना ठीक रहता है–

- विषय वस्तु या शिक्षण अधिगमों को प्रदान करने में स्थानीय आवश्यकताओं या संसाधनों के परिप्रेक्ष्य में उपयुक्त संशोधन या परिवर्तन कर लेने चाहिए।
- स्थानीय संसाधनों की उपलब्धि के संदर्भ में ही शिक्षण विधियों, व्यूह रचनाओं तथा अनुदेशात्मक सामग्री संबंधी नियोजन और क्रियान्वयन किया जाना चाहिए।
- स्थानीय आवश्यकताओं और संसाधनों की उपलब्धि संबंधी स्थिति में जैसे–जैसे परिवर्तन आते चले जाएं, उनको ध्यान में रखते हुए विद्यालयों और अध्यापकों को समुचित मात्रा में उतनी स्वतंत्रता अवश्य मिलनी चाहिए, जिससे वे पाठ्यक्रम संबंधी विषय वस्तु, प्रकरण और अधिगम अनुभवों के उचित शिक्षण अधिगम हेतु विधियों एवं व्यूह रचनाओं में आवश्यक परिमार्जन एवं सुधार कर सकें।
- अध्यापकों को अपने विषय संबंधी अधिगम अनुभव या अनुदेशन प्रदान करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि वे इस प्रकार की क्रियाओं, प्रयोगशाला कार्य तथा प्रोजेक्टों को अपने शिक्षण अधिगम का अभिन्न अंग बनने का प्रयास करें, जिनके द्वारा उपलब्ध सीमित स्थानीय संसाधनों में ही, स्थानीय समुदाय और विद्यार्थियों की आवश्यकताएं भली–भांति पूर्ण हो सकें।

इस तरह से पाठ्यक्रम के निर्माण तथा क्रियान्वयन दोनों स्तरों पर ही इस प्रकार के गंभीर प्रयत्न किए जाने चाहिए कि गणित विज्ञानों के पाठ्यक्रम का स्थानीय आवश्यकताओं एवं उपलब्ध संसाधनों से यथोचित अनुकूलन किया जा सके।

प्राचीन समय में ज्ञान प्राप्त करने का एक मात्र तरीका यह था, जिसमें मौखिक रूप से गुरु अपने आश्रम में बालकों को उपदेश दिया करते थे। लेकिन आज जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में ज्ञान का विस्तार हो रहा है। इसीलिए किसी भी विषय का क्रमबद्ध तथा नवीन ज्ञान प्राप्त करने के लिए पाठ्य पुस्तकें परम आवश्यक हैं। पाठ्य पुस्तकें शिक्षण प्रक्रिया में अध्यापक तथा छात्र दोनों का ही मार्ग–दर्शन करती हैं। कहा भी गया है कि– "जैसी पाठ्य पुस्तक होगी, वैसा ही शिक्षण भी होगा।" पाठ्य पुस्तक की सहायता से अध्यापक कक्षा में शिक्षण अधिगम की अनुकूल परिस्थितियों तथा विद्यार्थियों के व्यवहारों में अपेक्षित परिवर्तन करने के लिए अपने शिक्षण की समुचित रूपरेखा तैयार कर सकता है। सौभाग्य से आज के मशीनी युग ने पाठ्य पुस्तक की सुविधा मानव को प्रदान की है।

सर्वपल्ली डॉ. राधाकृष्णन (Sarvepalli Dr. Radhakrishnan) ने भी कहा है कि "जब तक शिक्षक शिक्षा के प्रति समर्पित और प्रतिबद्ध नहीं होगा, तब तक शिक्षा को मिशन का रूप नहीं मिल पाएंगा।"

टिप्पणी

कोठारी आयोग (Kothari Commission) के अनुसार, "यह बड़े ही दुर्भाग्य की बात है कि विज्ञान और शिल्प विज्ञान की पूर्व स्नातक स्तर की अधिकांश उत्कृष्ट पुस्तकें विदेशों से मंगानी पड़ती हैं। सभी बाहर से मंगाई गई पुस्तकें उत्कृष्ट नहीं होतीं। विज्ञान और शिल्प विज्ञान की पुस्तकों को बड़े पैमाने पर आयात करने से केवल अधिक धन और विदेशी मुद्रा ही खर्च नहीं होती, वरन इससे हमारे बौद्धिक साहस को भी हानि पहुंचती है। उत्तम पुस्तकों की रचना के लिए आवश्यक योग्यता और अन्य साधन तो देश में उपलब्ध हैं, पर संभवतः जिस चीज की कमी है, वह है—दृढ़ संकल्प एवं योजनाबद्ध प्रयास।"

विषय केंद्रित दृष्टिकोण

हम लंबे समय से विषय केंद्रित पाठ्यक्रम का पालन कर रहे हैं। इसे पारंपरिक पाठ्यक्रम के रूप में भी जाना जाता है और एनसीएफ–2005 के कार्यान्वयन के बाद हम इससे दूर चले गए हैं। पाठ्यक्रम के लिए यह दृष्टिकोण शिक्षार्थियों और शिक्षण प्रक्रिया की तुलना में विषय सूचि पर अधिक जोर देता है। इस पाठ्यक्रम में बच्चे की जरूरतों और रुचियों का कोई स्थान नहीं है। यहां शिक्षकों की भूमिका बहुत महत्वपूर्ण है, जिनसे छात्रों को विभिन्न विषयों को सीखने में मदद करने के उद्देश्य से पाठ्यक्रम ज्ञान वृद्धि करने से है। एक बच्चे को समय का सदुप्रयोग तरीके से विषयों को सीखना होता है। उनसे तथ्यों, अवधारणाओं, प्रक्रियाओं, कौशल आदि को सीखने और याद करने और परीक्षा के समय उन्हें पुनः पेश करने की अपेक्षा की जाती है।

व्यवहारवादी दृष्टिकोण

व्यवहारवादियों के अनुसार सीखने के अनुभव का एक परिणाम के रूप में व्यवहार के संशोधन के अलावा कुछ भी नहीं है। इस दृष्टिकोण में, पाठ्यक्रम का विकास एक योजना के साथ शुरू होता है, जिसे रूपरेखा कहा जाता है। रूपरेखा में विशेष विषय के सीखने के लक्ष्य और उद्देश्य होते हैं। इन पूर्व निर्धारित उद्देश्यों के आधार पर विषयों, विषयों और गतिविधियों की योजना बनाई जानी है। शिक्षक का कर्तव्य इन उद्देश्यों को साकार करने के लिए निर्दिष्ट गतिविधियों के लिए प्रदान करना है। मूल रूप से लिखित ज्ञान और परीक्षणों के रूप में छात्र मूल्यांकन, यह जानने के लिए आयोजित किए जाने की आवश्यकता है कि इन उद्देश्यों को कहां तक हासिल किया गया है। इस दृष्टिकोण से पता चलता है कि शिक्षक को अनुक्रमिक तरीके से जानकारी का प्रसार करना चाहिए और यह प्रदर्शित करना चाहिए कि किसी समस्या को कैसे हल किया जाए, एक सूत्र कैसे प्राप्त किया जाए, और छात्रों द्वारा स्वतंत्र अभ्यास के बाद एक आकार का निर्माण कैसे किया जाए।

इस दृष्टिकोण में छात्रों की भूमिका यह दोहराना है कि कक्षा में शिक्षक ने छात्र को किस ज्ञान से परिचित किया। जबकि शिक्षक पाठ्यक्रम को बताते हैं, प्रक्रियाओं को दर्शाता है। उन्हें पुनरावृत्ति या अभ्यास के माध्यम से अपने सीखने में सुधार करते हैं और जब और जहां आवश्यक हो, उसी को पुनः वर्णित करते हैं।

रचनात्मक दृष्टिकोण

टिप्पणी

रचनात्मकता का मानना है कि प्रत्येक बच्चे को अनुभव और प्रतिबिंब के माध्यम से विभिन्न चीजों के बारे में अपनी समझ और ज्ञान का निर्माण करने की क्षमता है। यह इस आधार पर आधारित है कि जब भी कोई बच्चा किसी नए अनुभव का सामना करता है, तो वह या तो आसानी से इसे मौजूदा ज्ञान से जोड़ सकता है या नए अनुभव को समायोजित करने के लिए मौजूदा ज्ञान में कुछ बदलाव कर सकता है। एक प्रसिद्ध रचनात्मक मनोवैज्ञानिक पियाजेट ने कहा कि गणित एक विषय है, जिसे पढ़ाने के लिए बहुत मुश्किल हो सकता है, इसके बजाय, इसे बच्चे द्वारा 'निर्माण' किया जाना चाहिए। इस उद्देश्य के लिए, बच्चे को विभिन्न प्रकार की गतिविधियों के साथ प्रदान किया जाना चाहिए, जो गणितीय संक्रियाओं के निर्माण के लिए आवश्यक हैं। एक अन्य मनोवैज्ञानिक, व्यागोत्स्की, जिसे सामाजिक रचनात्मक के रूप में भी जाना जाता है, इन्होंने यह तर्क दिया कि यह बढ़ते बच्चे और समाज के अन्य सदस्यों के बीच सामाजिक संपर्क के परिणामस्वरूप है कि बच्चा तर्क और सीखने के उपकरण प्राप्त करता है। जो उन्हें रचनात्मकता बनाता है कि पूर्व ज्ञान नींव बनाता है जिस पर नई शिक्षा का निर्माण किया जाता है। क्योंकि लोग और उनके अनुभव अलग हैं, वे रचनात्मकता में प्रमुख ध्यान शिक्षार्थी और सीखने की प्रक्रिया पर होता है।

1.3.4 पाठशाला शिक्षण के विभिन्न स्तरों पर गणित में विभिन्न विषयों का शैक्षणिक विश्लेषण– अंकगणित (संख्या प्रणाली का विकास), बीजगणित, त्रिकोणमिति, सांख्यिकी और प्रायिकता, इत्यादि

विद्यालयी शिक्षा में गणित एक महत्वपूर्ण स्थान रखता है। प्रारंभिक स्तर पर यह एक अनिवार्य विषय है। परंतु बहुत से लोगों का यह मानना है कि यह बच्चों के अंदर भय और तनाव को उत्पन्न करता है। गणित ने हमें विचारों को निर्धारित करने, सटीक होने और हमारे दैनिक जीवन में स्थानिक अवधारणाओं का उपयोग करने में मदद की है। इसे प्राकृतिक विज्ञान, अभियांत्रिकी, चिकित्सा एवं अर्थशास्त्र सहित कई क्षेत्रों में एक उपकरणीय विषय के रूप में दुनिया भर में उपयोगी विषय साबित है। विद्यालय के विभिन्न शीर्षकों का शिक्षाशास्त्रीय विश्लेषण निम्नांकित तथ्यों पर आधारित है।

1. अंकगणित (अंक प्रणाली का विकास) (Arithmetic)

अंकगणित का प्रारंभ अंक विज्ञान से हुआ और धीरे–धीरे समाज में विभिन्न गणितीय पक्षों को अंकगणित में सम्मिलित किया गया। अंकगणित एक ग्रीक शब्द से उत्पन्न किया गया है जिसका शाब्दिक अर्थ अंकों का विज्ञान तथा गणना की कला से संबंधित है। अर्थात् यह अंकों की गणना एवं कला की गणना का विज्ञान है। इसका विकास भारत में ज्योतिशास्त्र की आवश्यकताओं के संदर्भ में हुआ था। अंकगणित का प्रारंभ अंक विज्ञान से हुआ और धीरे–धीरे समाज में विभिन्न गणितीय पक्षों को अंकगणित में सम्मिलित किया गया। प्राचीन भारत में कला, विज्ञान, व्यापार आदि की प्रगति के कारण गणित की सभी शाखाओं का विकास होता जा रहा है।

अंकगणित को प्रायः प्राथमिक स्तन पर पढ़ाया जाता है जो कि कक्षा 1 से 5 तक माना जाता है। इस स्तर पर मुख्यतः अंकगणित से संबंधित संख्या, संख्यांक, अंक, अंको का स्थानीयमान, गणित की महत्वपूर्ण संक्रियाओं जैसे गिनती, जोड़, घटाना, गुणा, भाग, आदि, का अध्ययन किया जाता है।

2. बीजगणित (Algebra)

बीजगणित गणित की एक संक्षिप्त भाषा है जिसका विकास अंक गणित की उपलब्धता के भाव में किया जा सकता है। बीजगणित की भाषा, संकेतों, अक्षरों, संक्रियाओं आदि को समझने के लिए मस्तिष्क स्थियित्व रूप होना परमावश्यक है। यह एक सामान्यीकृत भाषा है जिसके द्वारा गूढ़ विचारों को संक्षिप्त भाषा के द्वारा प्रकट किया करते हैं।

बीजगणित दो शब्दों से मिलकर बना है जिसमें बीज का अर्थ है तत्व एवं गणित का अर्थ गणना से संबंधित अर्थात् वह विज्ञान जिसमें तत्वों की गणना का बोध होता है उसे बीजगणित कहते हैं अथवा गणित की वह शाखा, जिसमें संख्याओं के स्थान पर चिन्हों या अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, बीजगणित कहलता है। बीजगणित के द्वारा कथनों, निर्देशों और परिणामों को संक्षेप में वर्णित किया जाता है, इसलिए बीजगणित को गणित की आशुलिपि भी कहा जाता है। बीजगणित चर एवं अचर राशियों के समीकरण को हल करने तथा चर राशियों के मान निकालने पर आधारित है। बीजगणित में पक्षांतर करने के फलस्वरूप चिन्ह परिवर्तित हो जाते है। बीजगणित से साधारणतः तात्पर्य उस विज्ञान से होता है, जिसमें संख्याओं को अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है। परंतु संक्रिया चिन्ह का परिवर्तन नहीं होता है, जो अंक गणित में प्रयोग किए जाते हैं।

3. त्रिकोणमिति (Trigonometry)

त्रिकोणमिति को उच्च माध्यमिक स्तर पर पढ़ाया जाता है जिसका आरंभ कक्षा 9 से किया जाता है। त्रिकोणमिति में एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच परस्परिक संबंधों के अध्ययन से संबंधित है। आर्यभट्ट सम्राट चंद्रगुप्त की राज्यसभा में से एक महान गणितज्ञ और खगोलशास्त्री थे जिनको विश्व भर में शून्य एवं दशमलव पद्धति का महत्व बताने वाले त्रिकोणमिति के जनक के रूप में भी जाना जाता है। त्रिकोणमिति का संबंध गणित की वह शाखा से है जिसमें त्रिभुज और त्रिभुजों से बनने वाले बहुभुजों का अध्ययन होता है। त्रिकोणमिति का शाब्दिक अर्थ त्रिभुजों की मापन क्रिया से है। त्रिकोणमिति के सबसे महत्वपूर्ण समकोण त्रिभुजों का अध्ययन है। जो त्रिभुज के काण एवं लंबाई से संबंधित है। sin, cos, tan, sec, cosec और cot नाम के कुछ छः त्रिकोणमिति फलन ज्ञात है। त्रिकोणमिति फलन, त्रिकोणमिति सर्वसमिकाएं, ऊंचाई, दूरी, इत्यादि, का शिक्षाशास्त्रीय विश्लेषण किया जाता है।

4. सांख्यिकीय (Statistics)

सांख्यिकीय गणित की वह शाखा है जिसमें आंकड़ों का संग्रहण, प्रदर्शन, वर्गीकरण और उनके गुणों के आकलन का अध्ययन किया जाता है। सांख्यिकीय एक गणितीय

विज्ञान है जिसमें वस्तु/अवयव/प्रणाली से संबंधित आंकड़ों का संग्रह, विश्लेषण, व्याख्या या स्पष्टीकरण की प्रस्तुती की जाती है। सांख्यिकीय की उत्पत्ति गणित विषय की उपशाखा के रूप में हुआ है। ए.जी. कैण्डाल (A.G. Kendall) के अनुसार सांख्यिकीय प्रदत्तों के संकलन तथा उनके विश्लेषण और निष्कर्ष निकालने का विज्ञान है। सांख्यिकीय को उच्च माध्यमिक स्तर में पढ़ाया जाता है। इस स्तर पर सांख्यिकीय से संबंधित मुख्यतः केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (जैसे, मध्यमान, मध्यांक एवं बहुलक) आलेख, इत्यादि, का शिक्षाशास्त्रीय विश्लेषण किया जाता है। सर रोनाल्ड एलेमर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher) को सांख्यिकी के जनक के रूप में जाना जाता है।

5. प्रायिकता (Probability)

किसी घटना के होने की संभावना को प्रायिकता कहते हैं। इसका प्रयोग सांख्यिकी, गणित विज्ञान, दर्शनशास्त्र आदि क्षेत्रों में इसका बहुतायत से प्रयोग किया जाता है। इसे संभाव्यता भी कहा जाता है।

अतः प्रायिकता वह अवधारणा है जिससे घटनाओं के घटित होने या ना होने की संभावना को संख्यात्मक रूप से व्यक्त किया जा सके।

प्रायिकता की परिभाषानुसार $$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$$

प्रायिकता को प्रायः उच्च एवं उच्चतर माध्यमिक स्तर से पढ़ाया जाता है इस स्तर पर संबंधित विभिन्न घटनाओं के घटित होने या न होने आदि का शिक्षाशास्त्रीय विश्लेषण किया जाता है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

7. गणित विषय का तार्किक एवं मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण क्या है?
8. गणित शिक्षा के लक्ष्य से क्या अभिप्राय है?
9. प्रायिकता को परिभाषित करें।

1.4 गणित सीखने के लिए दृष्टिकोण और रणनीतियां

गणित उन कुछ विषयों में से एक है जिनका व्यावहारिक, सांस्कृतिक और अनुशासनात्मक मूल्य है। गणित में तीनों मूल्यों की क्षमता है, लेकिन अनुचित शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया के कारण इसकी क्षमता का उपयोग इसके इष्टतम स्तर तक नहीं किया जा रहा है। गणित शिक्षा का वर्तमान ध्यान ज्यादातर विशिष्ट समस्याओं को हल करने और उन्हें परीक्षा के सवालों के लिए प्रयोग करने तथा समीकरणों को हल करने के लिए किया जाता है।

1.4.1 शैक्षणिक बदलाव – रचनात्मकता से व्यवहारवादी तक

पाठ योजना वास्तव में कार्यों की योजना है। यह प्रभावी शिक्षण का हृदय है। एक शिक्षक अपने विषय का ज्ञाता हो सकता है, यदि उसने लक्ष्य के पथ को छोड़ दिया

टिप्पणी

है, जिस लक्ष्य को प्राप्त करने की वह कोशिश कर रहा है तो असफल हो सकता है। यदि शिक्षक बच्चे के सफल परिणाम प्राप्त करना चाहता है तो उसके शिक्षण में पूर्ण योजना तथा गहन चिंतन की आवश्यकता है। अतः पाठ योजना वह आलेख है, जिसमें शिक्षक एक निश्चित समय पाठ्य–वस्तु एवं उसके निर्धारित लक्ष्यों के रूप में छात्रों के सम्मुख करता है।

वस्तुतः, "पाठ योजना में उन उद्देश्यों और विशिष्ट माध्यमों को प्रदान किया गया एक शीर्षक है जिनके द्वारा क्रियाओं के परिणामस्वरूप उन्हें प्राप्त किया जाता है।"

गणितज्ञों के अनुसार– "पाठ योजना, वास्तव में कार्य की योजना है। अतः इसमें अध्यापक का क्रियात्मक दर्शन; उसका दर्शन संबंधी ज्ञान; अपने विद्यार्थियों के विषय में उसका ज्ञान तथा सूझ–बूझ, शैक्षणिक उद्देश्यों के प्रति उसका दृष्टिकोण; उसका विषय–वस्तु संबंधी ज्ञान और प्रभावपूर्ण विधियों के प्रयोग संबंधी उसकी योग्यता सम्मिलित है।"

रायबर्न (Ryburn) के अनुसार– "शिक्षा के लिए हमें प्राप्त अनुभव का प्रयोग अपने कार्य को करने के लिए करना चाहिए।"

बिनिंग और बिनिंग (Binning & Binning) के अनुसार– "दैनिक पाठ योजना के निर्माण में उद्देश्यों को परिभाषित करना, पाठ्य–वस्तु का चयन करना तथा उसे क्रमबद्ध रूप में व्यवस्थित करना और प्रस्तुतीकरण की विधियों तथा सक्रिय का निर्धारण करना है।"

पाठ योजना के संबंध में विद्वान बरेन्ट डेविस (Brent Davis) का विचार है कि– "कक्षा में जाने से पूर्व शिक्षक को पूरी तैयारी कर लेनी चाहिए, क्योंकि शिक्षक की प्रगति के लिए बात इतनी बाधक नहीं है जितनी कि शिक्षण की अपूर्ण तैयारी।"

पाठ योजना का विकास

पाठ योजना का विकास, गेस्टाल्ट मनोविज्ञान (Gestalt Psychology) के फलस्वरूप हुआ। गेस्टाल्ट मनोविज्ञान के अनुसार, हमारा ध्यान किसी आकृति के अंगों की अपेक्षा उसके पूर्ण स्वरूप की ओर आकर्षित होता है। जब हम किसी इकाई का प्रत्यक्षीकरण करते हैं तो हमारा ध्यान पहले उसके पूर्ण स्वरूप पर जाता है, उसके बाद ही उसके भिन्न अंगों पर जाता है। अतः पूर्ण को समझने के लिए विद्यार्थी इकाई की सहायता लेते हैं और पूर्ण का संप्रेषण, इकाई से किया जाता है। एक इकाई के अंतर्गत, ऐसी सार्थक क्रियाओं का परस्पर संबंध इस प्रकार से स्थापित किया जाता है कि उनकी सहायता से विद्यार्थियों में उपयुक्त सीखने के अनुभव उत्पन्न होते हुए उनके व्यवहार के परिणामस्वरूप इकाई योजना के संप्रत्यय का विकास हो।

पाठ योजना की आवश्यकता

1. पाठ योजना के द्वारा छात्रों को नया ज्ञान उसके पूर्व ज्ञान के आधार पर प्रदान किया जाता है।
2. इसके द्वारा पाठ सरल, स्पष्ट, रुचिकर तथा आकर्षक हो जाता है।

टिप्पणी

3. पाठ योजना के द्वारा शिक्षक समुचित नीतियों, विधियों, सहायक सामग्री तथा उपकरणों पर शिक्षण से पूर्व विचार कर लेते हैं।
4. पाठ योजना से शिक्षक पाठ–वस्तु संबंधी प्रत्येक तथ्य से अवगत हो जाता है। इससे वह प्रसंग को स्पष्ट रूप से कक्षा में प्रस्तुत कर सकता है।
5. पाठ योजना से शिक्षण को व्यावहारिक रूप प्रदान किया जाता है।
6. पाठ योजना द्वारा शिक्षक को संकेत दिया जाता है कि उन्हें अपना पाठ कहां से प्रारंभ करना है तथा कहां पर समाप्त करना है।
7. पाठ योजना से शिक्षण की क्रियाओं को प्रभावशाली, सार्थक तथा उद्देश्यपूर्ण बनाया जाता है।
8. पाठ योजना द्वारा छात्रों में तर्क, चिंतन, कल्पना आदि शक्तियों का प्रयोग किया जाता है।
9. पाठ योजना द्वारा शिक्षक कक्षा में जाने से पूर्व, पूर्ण तैयारी कर लेता है।
10. पाठ योजना द्वारा छात्रों के अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन के बारे में अनुमान लगाया जा सकता है। इसके आधार पर शिक्षण की व्यवस्था करता है।

पाठ योजना का महत्व

1. यह शिक्षक के लिए पथ–प्रदर्शक का कार्य करती है कि उसे क्या तथा किस प्रकार से शिक्षण करना है।
2. पाठ योजना द्वारा शिक्षक पाठ के उद्देश्यों को भली–भांति समझ लेता है।
3. पाठ योजना शिक्षक को संगठित एवं सुव्यवस्थित रूप से सोचने के लिए उत्तेजित करती है।
4. नए पाठ का पूर्व पाठ के साथ उचित संबंध स्थापित हो जाता है।
5. यह शिक्षक को सहायक–सामग्री के विषय में सोचने तथा उपयोग करने के लिए विवश करती है।
6. पाठ्य सामग्री द्वारा पाठन समय के अनुसार व्यवस्थित रहती है।
7. पाठ योजना द्वारा अध्यापक को उचित एवं महत्वपूर्ण प्रश्न करने की प्रेरणा प्राप्त होती है।
8. यह शिक्षक को उत्तम शिक्षण विधि चुनने में सहायता देती है।
9. यह शिक्षक को व्यवस्थित विभिन्नताओं को ध्यान में रखकर पढ़ाने के लिए प्रेरित करती है।
10. बालकों के स्तर एवं पूर्व ज्ञान का पूर्ण ध्यान रखती है।
11. यह अध्यापक तथा विद्यार्थी, दोनों के समय व ऊर्जा शक्ति की बचत करती है।
12. यह अध्यापक में आत्मविश्वास बढ़ाती है।

टिप्पणी

13. यह अध्यापक को, विद्यार्थियों की अभिवृत्ति, रुचि और योग्यताओं की सही तथा ऐच्छिक दिशा में परिवर्तित करने में सहायता करती है।
14. मूल्यांकन की उपयुक्त तकनीक के प्रयोग से यह अध्यापक की अपनी शिक्षण प्रविधि की प्रभावशीलता जांचने तथा विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त ऐच्छिक उपलब्धियों की जानकारी प्राप्त करने में सहायता करती है।
15. यह अध्यापन को क्रमबद्ध बनाती है।
16. यह कक्षा में विद्यार्थियों की समस्याओं तथा कठिनाइयों को जानने में अध्यापक की सहायता करती है।
17. यह अध्यापक को उपयुक्त दृष्टांतों का प्रयोग करने के लिए अभिप्रेरित करती है।
18. यह शिक्षण में स्वतंत्रता प्राप्त है। यदि अध्यापक जिसने पहले से ही पाठ योजना तैयार न की हो, कक्षा में बिना किसी उत्सुकता के, आत्मविश्वास के साथ दाखिल होता है तो एक अकुशल कारीगर की तरह है।
19. पाठ योजना अध्ययन की विभिन्न इकाइयों या विभिन्न पाठों में उचित संबंध स्थापित करती है। इस प्रकार यह शिक्षण प्रक्रिया में निरंतरता को प्रोत्साहित करती है।
20. यह अध्यापक को उचित दृश्य–श्रव्य सामग्री के प्रयोग के लिए प्रेरित करती है।
21. यह पर्याप्त रूप से पढ़ाने का सार प्रस्तुत करती है। इससे कक्षा को दिए जाने वाले कार्यो की निश्चित दिशा मिलती है, जो विद्यार्थियों में अंतर्दृष्टि व अंतर्सूझ उत्पन्न करती है।

अतः पाठ योजना कक्षा में चल रही शिक्षण प्रक्रिया में अपेक्षित सुधार लाने में सहायता करती है। जैसा कि डेविस ने कहा है, "पाठ निश्चित रूप से तैयार किया जाना चाहिए, क्योंकि अध्यापक की प्रगति में अनियमितता से अधिक कुछ भी घातक नहीं है।"

पाठ योजना तैयार करने संबंधी आवश्यक बातें

पाठ योजना निर्माण से पूर्व शिक्षक को निम्न बातों को जानना आवश्यक है–

1. **विषय–वस्तु का ज्ञान**– विषय–वस्तु का ज्ञान विषय की तैयारी पाठ योजना से पूर्व अत्यंत आवश्यक है। शिक्षक को अपने विषय पर जितना अधिकार होगा, उतना ही वह अध्यापन में सफल होगा।
2. **मनोवैज्ञानिक ज्ञान**– एक शिक्षक को बाल–मनोविज्ञान को जानना भी आवश्यक है छात्र की किस स्तर पर क्या आवश्यकताएं, रुचियां व क्षमताएं होती हैं यह जानना आवश्यक है, तब ही वह सफलतापूर्वक पाठ के अंतर्गत रुचिपूर्ण क्रियाएं जुटा सकेगा और कक्षा में रुचिपूर्ण वातावरण उपस्थित कर सकेगा।
3. **सीखने के सिद्धांतों का ज्ञान**– मनोविज्ञान को सीखने के संबंध में जो सामान्य उपलब्धियां व सिद्धांत हैं, शिक्षक का उनसे परिचित होना चाहिए तभी शिक्षक छात्रों को अधिक से अधिक पाठ्य–वस्तु ग्राह्य करा सकने में सफल हो सकेगा।

टिप्पणी

4. **शिक्षण सिद्धांतों का ज्ञान**– शिक्षक को शिक्षण के सिद्धांतों का ज्ञान, विषय सामग्री को अधिक से अधिक ग्राह्य बनाने के लिए अत्यंत आवश्यक है। उदाहरणार्थ, सरल से कठिन की ओर, ज्ञात से अज्ञात की ओर आदि, रुचि तथा उत्प्रेरण के सिद्धांतों, आवश्यक सहायक सामग्री का निर्माण आदि के बारे में पूर्णरूप से जानना नितांत आवश्यक है।
5. **शिक्षण विधियों का ज्ञान**– शिक्षक को विभिन्न शिक्षण विधियों के बारे में में भी ज्ञान होना चाहिए ताकि वह पाठ्य सामग्री का उपयुक्त पाठन विधि से पढ़ा सके। उदाहरणार्थ, भूमध्यरेखीय जलवायु पढ़ानी है तो किस विधि से पढ़ाए। प्रादेशिक और तुलनात्मक विधि ही क्यों ठीक रहेगी?, आदि। अतः भूगोल–शिक्षण के लिए जितनी भी विधियां हैं उनके बारे में जाना अत्यंत आवश्यक है।
6. **शिक्षा के उद्देश्यों का ज्ञान**– शिक्षक के सम्मुख शिक्षा के स्पष्ट होने चाहिए, क्योंकि प्रत्येक विषय के पढ़ाने के उद्देश्य भी शिक्षा के उद्देश्यों के पूरक हैं। इस दृष्टिकोण को सामने रखकर ही छात्रों की आवश्यकता और समाज व देश की सामयिक आवश्यकताओं को ध्यान में रखकर पाठ्य क्रियाएं, उदाहरण आदि जुटाने चाहिए।
7. **छात्रों के पूर्व अर्जित ज्ञान से भिन्नता**– प्रारंभ में ही शिक्षक जिस कक्षा को पढ़ाने जा रहा है, उस कक्षा में छात्रों ने क्या पढ़ रखा है, वे कितना विषय–वस्तु जानते हैं, उसके बाद क्या पढ़ना चाहिए, यह जान लेना चाहिए अन्यथा उसका पढ़ाना कभी सफल नहीं हो सकेगा।

पाठ योजना के लाभ

यूं तो मानव क्रियाओं के प्रत्येक क्षेत्र में योजना बनाना आवश्यक है। परंतु नियोजित शिक्षण के लिए योजना बनाने की आवश्यकता और भी अधिक है इसका प्रमुख कारण यह है कि पाठ–योजना के बिना संपूर्ण शिक्षण अस्त–व्यस्त हो जाता है। अतः नवीन शिक्षकों विशेषतः विद्यार्थी–शिक्षकों को शिक्षण कार्य आरंभ करने से पूर्व पाठ योजना अवश्य बनानी चाहिए। पाठ योजना बनाने के निम्नलिखित लाभ होते हैं

1. **उपयुक्त वातावरण बनाना**– पाठ योजना में पाठ पढ़ाने के उद्देश्यों को निश्चित करते हुए शिक्षण की विधियां अथवा नीतियां, युक्तियां, तीव्र विधियां तथा सहायक सामग्री आदि सभी बातें पहले से ही निश्चित हो जाती हैं। इससे विद्यार्थियों की पाठ में रुचि उत्पन्न होती है तथा शिक्षण के लिए उपयुक्त वातावरण का निर्माण करने में सहायता मिलती है जब उपयुक्त अथवा शैक्षिक वातावरण तैयार हो जाता है तो शिक्षण बड़े नियोजित ढंग से चलता रहता है।
2. **पूर्वज्ञान पर आधारित शिक्षण**– पाठ योजना बनाने में शिक्षण नवीन ज्ञान को विद्यार्थियों के पूर्वज्ञान के आधार पर प्रस्तुत करता है इसे जहां एक ओर विद्यार्थी ज्ञान को सहज ही में ग्रहण कर लेते हैं वहीं दूसरी ओर शिक्षक अपने उद्देश्य को प्राप्त करने में सफल हो जाता है।

टिप्पणी

3. **मनोवैज्ञानिक शिक्षण**— पाठ योजना बनाकर शिक्षक विद्यार्थियों को पढ़ाने के लिए उनकी रुचियों, अभिरुचियों, आवश्यकताओं, क्षमताओं तथा योग्यताओं को दृष्टि में रखते हुए उपयुक्त शिक्षण नीतियों, क्षमताओं, युक्तियों तथा उपकरणों का प्रयोग करता है। इससे शिक्षण मनोवैज्ञानिक हो जाता है।
4. **विषय—सामग्री का सीमित होना**— पाठ योजना में विषय—सामग्री परिमित तथा सीमित हो जाती है। इससे शिक्षक को अनावश्यक बातें छोड़ते हुए केवल निश्चित तथा सीमित बातों को याद करने तथा उन्हें विद्यार्थियों के सामने प्रस्तुत करने में आसानी होती है। दूसरी ओर विद्यार्थियों को भी ज्ञान, क्रमबद्ध तथा व्यवस्थित रूप में प्राप्त हो जाता है।
5. **निश्चित क्रियाएं**— पाठ योजना में शिक्षक तथा विद्यार्थियों की क्रियाएं कक्षा स्तर के अनुसार पहले से ही निश्चित हो जाती हैं। पाठ योजना बनाते समय शिक्षक यह पहले से ही निश्चित कर लेता है कि उसे तथा कक्षा विद्यार्थियों को क्या—क्या करना है इससे शिक्षण की क्रियाएं सार्थक तथा सोद्देश्य बन जाती हैं। परिणामस्वरूप शिक्षक तथा विद्यार्थी दोनों ही पाठ को विकसित करने के लिए सक्रिय रूप से भाग लेने लगते हैं।
6. **सहायक सामग्री की तैयारी**— पाठ योजना बनाते समय शिक्षक यह निश्चित कर लेता है कि कौन—कौन से तथ्यों को कौन—कौन सी विधियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा साधनों की सहायता से स्पष्ट करने के लिए किस—किस सहायक सामग्री का कब और कैसे प्रयोग करेगा। इसमें आवश्यक एवं प्रभावोत्पादक सहायक सामग्री शिक्षण आरंभ होने से पहले ही तैयार हो जाती है।
7. **शिक्षण कौशल का विकास**— पाठ योजना शिक्षण शिक्षा में विद्यार्थी शिक्षकों के अंदर शिक्षण कौशल को विकसित करने के लिए महत्वपूर्ण साधन का कार्य करती है।
8. **शिक्षण में सैद्धांतिक ज्ञान का प्रयोग**— विद्यार्थी—शिक्षकों को प्रशिक्षण काल में जो कुछ तथा जितना सैद्धांतिक ज्ञान दिया जाता है, उसको कक्षा शिक्षण में केवल पाठ योजना की सहायता से प्रयोग किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में पाठ योजना सैद्धांतिक ज्ञान को व्यावहारिक रूप प्रदान करने में सहायता करती है।
9. **चिंतन में क्रमबद्धता तथा विकास**— पाठ योजना तैयार करने से शिक्षक की चिंतन प्रणाली में क्रमबद्धता विकसित हो जाती है। इससे वह शिक्षण के समय पाठ्य—वस्तु को क्रमबद्ध रूप से प्रस्तुत करते हुए शिक्षण के उद्देश्य को प्राप्त करने में सफल हो जाता है।
10. **शक्ति तथा समय की बचत**— जो शिक्षण पाठ योजना बनाए बिना ही शिक्षण कार्य आरंभ कर देता है, वह सदैव इधर—उधर ही भटकता फिरता है। उसे

विषय—वस्तु प्रस्तुत करने में अधिक शक्ति भी लगानी पड़ती है तथा समय भी व्यर्थ में नष्ट होता है। इसके विपरीत जो शिक्षक शिक्षण से पहले पाठ योजना बना लेता है, वह नवीन ज्ञान को तार्किक क्रम में प्रस्तुत करके विद्यार्थियों की शंकाओं का समाधान भी उन्हीं की सहायता से सरलतापूर्वक कर देता है।

11. **आत्म विश्वास के साथ शिक्षण**— पाठ योजना बनाने से शिक्षण को अपने विषय तथा उससे संबंधित सभी विषयों का स्पष्ट ज्ञान होता है। इससे उसमें आत्म—विश्वास उत्पन्न हो जाता है। जब शिक्षक में आत्मविश्वास की भावना विकसित हो जाती है तो वह विद्यार्थियों के सामने नवीन ज्ञान को उत्साह तथा स्वाभाविकता के साथ प्रसन्नतापूर्वक प्रस्तुत करता है।
12. **कक्षा में अनुशासन**— पाठ योजना में बनाने से शिक्षक को इस बात का पूरा ज्ञान होता है कि उसे कक्षा में क्या, कितना और कब—कब करना है। इससे सभी विद्यार्थी अपने—अपने कार्य में लगे रहते हैं। जिससे कक्षा में प्रशंसनीय अनुशासन बना रहता है।
13. **ज्ञान का स्थायित्व**— पाठ योजना बनाने में शिक्षक पाठ का सारांश भी लिखता है। पाठ के सारांश को पढ़ने से विद्यार्थियों को पाठ दोहराने में सहायता मिलती है और ज्ञान भी स्थायी हो जाता है।
14. **मूल्यांकन संभव**— पाठ योजना में मूल्यांकन का विधान भी होता है। एक मूल्यांकन द्वारा शिक्षण को इस बात का पता आसानी से लग जाता है कि उसके शिक्षण का विद्यार्थियों के ऊपर क्या प्रभाव पड़ा? इससे शिक्षक द्वारा प्रयोग की गई विधियों एवं नीतियों, युक्तियों प्रविधियों तथा सहायक सामग्री का मूल्यांकन भी साथ के साथ हो जाता है। यदि शिक्षक यह देखता है कि उसके द्वारा प्रयोग की गई शिक्षण नीतियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा उपकरणों का विद्यार्थियों पर वांछनीय प्रभाव नहीं पड़ा तो वह इनमें आवश्यक सुधार कर सकता हे। इस प्रकार पाठ योजना में शिक्षक द्वारा प्रयुक्त की गई शिक्षण—नीतियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा उपकरणों एवं उनके प्रभावों का मूल्यांकन संभव है।
15. **शिक्षण अधिकगम व्यवस्था का व्यावहारिक रूप**— पाठ योजना के द्वारा ही शिक्षण को प्रभावशाली बनाते हुए शिक्षण के उद्देश्य को सफलतापूर्वक प्राप्त किया जा सकता है। शिक्षण की सफलता के लए सुव्यवस्थित पाठ योजना का महत्वपूर्ण स्थान है। विद्वान डेविस लिखते हैं— "कक्षा में जाने से पूर्व शिक्षक को पूरी तैयारी कर लेनी चाहिए, क्योंकि शिक्षा की उन्नति के लिए कोई वस्तु इतनी घातक नहीं है जितनी कि अपूर्ण तैयारी।"

एक आदर्श पाठ योजना की विशेषताएं

1. **उद्देश्य पर आधारित**— पाठ योजना किसी—न—किसी ध्येय अथवा उद्देश्यों पर आधारित होनी चाहिए। साथ ही इसको लिखते समय उद्देश्य अथवा उद्देश्यों को स्पष्ट शब्दों में परिभाषित भी कर देना चाहिए। इसका एक मात्र कारण यह है कि शिक्षण का मुख्य उद्देश्य किसी उद्देश्य अथवा उद्देश्यों को प्राप्त करना ही है।

टिप्पणी

2. **उपयुक्त सहायक सामग्री के संबंध में निर्णय**– अतः आदर्श पाठ योजना तैयार करते समय शिक्षक को चार्टों, ग्राफों, चित्रों, रेखाचित्रों एवं मानचित्रों आदि उपयुक्त सहायक सामग्री के संबंध में उचित निर्णय लेकर उसे यथास्थान अंकित करना चाहिए जिसे शिक्षक को शिक्षण के समय प्रयोग करना है।
3. **पूर्व ज्ञान पर आधारित**– आदर्श पाठ योजना विद्यार्थियों के पूर्वज्ञान पर आधारित होनी चाहिए। इससे विद्यार्थियों को नवीन ज्ञान के ग्रहण करने में कोई कठिनाई नहीं होती।
4. **सोपानों में विभाजित**– पाठ तीन प्रकार के होते हैं– 1. ज्ञान पाठ, 2. कौशल पाठ तथा 3. सहानुभूति के पाठ। आदर्श पाठ योजना में उक्त तीनों प्रकार के पाठों के अनुकूल आवश्यक पद निर्धारित करने चाहिए साथ ही प्रत्येक पाठ को उचित सोपानों में विभाजित कर देना चाहिए। जिससे पाठ थोड़ा–थोड़ा करके विद्यार्थियों की समझ में सरलतापूर्वक आ जाए।
5. **भाषा की सरलता**– आदर्श पाठ योजना में भाषा की सरलता तथा भावों की स्पष्टता विद्यार्थियों के मानसिक स्तर के अनुसार होनी चाहिए। पाठ योजना भाषा–प्रधान न होकर विषय प्रधान होनी चाहिए।
6. **क्रियाओं का निर्धारण**– आदर्श पाठ योजना में यह बात स्पष्ट कर देनी चाहिए कि शिक्षण के प्रत्येक पद पर शिक्षक तथा विद्यार्थियों को कौन–कौन सी क्रियाएं करनी हैं। पाठ योजना के अंतर्गत शिक्षक तथा विद्यार्थी दोनों की क्रियाएं पहले से ही निर्धारित कर देनी चाहिए।
7. **विधियों अथवा नीतियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा उपकरणों का प्रयोग**– आदर्श पाठ योजना तैयार करने के लिए शिक्षक को चाहिए कि वह मनोविज्ञान, शिक्षक सूत्रों तथा शिक्षण के सामान्य सिद्धांत का ज्ञान प्राप्त करें तभी वह विभिन्न परिस्थितियों में होने वाली घटनाओं तथा तथ्यों को स्पष्ट करने के लिए उपयुक्त विधियों अथवा नीतियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा उपकरणों का उचित प्रयोग कर सकेगा।
8. **समन्वय**– आदर्श पाठ योजना में यथासंभव समन्वय भी स्थापित करना चाहिए। इससे विद्यार्थी ज्ञान को समग्र रूप से प्राप्त कर सकेंगे।
9. **उदाहरणों का प्रयोग**– आदर्श पाठ योजना में ऐसे उदाहरणों का प्रयोग मिलना चाहिए, जिनका संबंध विद्यार्थियों के दैनिक जीवन से हो। यह बात शिक्षक के विस्तृत ज्ञान तथा अनुभव पर निर्भर करती है।
10. **व्यक्तिगत पथ प्रदर्शन**– आदर्श पाठ योजना में इस बात का संकेत मिलना चाहिए कि शिक्षक विद्यार्थियों का व्यक्तिगत पथ–प्रदर्शन कब और कैसे करेगा।
11. **शिक्षण स्मृति स्तर से चिंतन स्तर तक**– आदर्श पाठ योजना में विकासात्मक तथा विचारात्मक प्रश्नों का प्रयोग करना चाहिए। साथ ही शिक्षण कार्य को स्मृति स्तर से चिंतन स्तर तक पहुंचाने का प्रयास करना चाहिए।

12. **समय का ध्यान**— आदर्श पाठ योजना विद्यार्थियों के मानसिक स्तर को ध्यान में रखकर बनानी चाहिए। उसमें यह बात भी स्पष्ट कर देनी चाहिए कि शिक्षण के किस पद पर कितना समय लगने की संभावना है।

टिप्पणी

13. **श्यामपट्ट का प्रयोग**— आदर्श पाठ योजना में श्यामपट्ट सारांश का विकास साथ–साथ अथवा बोध प्रश्नों द्वारा किया जाना चाहिए। स्मरण रहे कि पाठ योजना को जितने सोपानों में विभाजित किया जाएगा, श्यामपट्ट पर सारांश प्रत्येक सोपानों को पढ़ाने के तुरंत पश्चात संक्षिप्त किंतु पूर्ण वाक्यों में लिखना चाहिए।
14. **मूल्यांकन**— आदर्श पाठ योजना में विद्यार्थियों पर पड़े हुए प्रभाव को जानने की विधि का उल्लेख किया जाना चाहिए। इससे शिक्षक द्वारा उपयोग की गई विधियों का मूल्यांकन भी हो जाएगा। साथ ही विद्यार्थी भी सीखने में रुचि लेने लगेंगे।
15. **गृहकार्य**— आदर्श पाठ योजना में गृहकार्य की व्यवस्था भी होनी चाहिए। इससे विद्यार्थी अर्जित किए हुए ज्ञान का उचित प्रयोग करना सीख जाएंगे।

पाठ योजना में आवश्यक बिंदु

1. **उद्देश्य की स्पष्टता**— पाठ योजना में उद्देश्य की स्पष्ट व्यवस्था होनी चाहिए। उद्देश्य के स्पष्ट अथवा परिभाषित होने से शिक्षक तथा विद्यार्थी दोनों पक्ष उसको प्राप्त करने के लिए सक्रिय हो जाएंगे।
2. **विषय का ज्ञान**— पाठ योजना बनाने के लिए शिक्षण को अपने विषय का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। कुछ शिक्षकों को अपना विषय स्पष्ट नहीं होता। इससे वे पाठ के विभिन्न तथ्यों तथा घटनाओं को स्पष्ट करने में असमर्थ हो जाते हैं। अतः प्रत्येक शिक्षक विशेषतः विद्यार्थी शिक्षकों की इस संबंध में सतर्क रहते हुए जिस पाठ की योजना बनानी हो, उसे पूरी तरह से पढ़ लेना चाहिए। यदि हो सके तो विद्यार्थी शिक्षक केवल पाठ्य–पुस्तक को ही न पढ़े अपितु अन्य सहायक पुस्तकों में भी प्रकरण संबंधी सामग्री पढ़कर लिखें।
3. **समस्त विषयों का सामान्य ज्ञान**— उत्तम पाठ योजना बनाने के लिए शिक्षक को अपने विषय का पूर्ण तथा अन्य सभी विषयों का आंशिक ज्ञान अवश्य होना चाहिए। इसका कारण यह है कि ज्ञान एक पूर्ण इकाई होती है। इसे अलग–अलग भागों में विभाजित नहीं किया जा सकता। अतः किसी भी विषय को उत्तम ढंग से पढ़ाने के लिए शिक्षक को विषय से संबंधित दूसरे विषयों का ज्ञान भी अवश्य होना चाहिए।
4. **शिक्षण के सिद्धांतों तथा विषयों अथवा नीतियों का ज्ञान**— पाठ योजना बनाने के लिए शिक्षक को शिक्षण सिद्धांतों, शिक्षण सूत्रों तथा शिक्षण विधियों एवं प्रविधियों का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। इससे वह पाठ योजना में प्रयोग की जाने वाली शिक्षण विधियों तथा प्रविधियों का ठीक–ठीक उल्लेख कर सकेगा।
5. **विद्यार्थियों की प्रकृति का ज्ञान**— प्रत्येक विषय को पढ़ाने की उपयुक्त विधि उस समय उपयोगी हो सकती है, जब शिक्षक को विषय सामग्री के साथ–साथ

विद्यार्थियों की प्रकृति का भी पूर्ण ज्ञान हो। अतः पाठ योजना बनाते समय शिक्षक को विषय के साथ–साथ विद्यार्थियों की प्रकृति का ज्ञान भी अवश्य होना चाहिए।

टिप्पणी

6. **पूर्व ज्ञान की स्पष्टता**– पाठ योजना बनाते समय शिक्षक को विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान को ध्यान में रखना चाहिए। पूर्व ज्ञान के आधार पर दिया हुआ नवीन ज्ञान स्थायी तथा ग्राह्यता हो जाता है। पाठ का सरलतापूर्वक विकास उसी समय हो सकता है, जब शिक्षक को विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान की स्पष्टता हो। अतः पाठ योजना बनाते समय शिक्षक को पाठ–सामग्री तथा विद्यार्थियों की प्रकृति के साथ–साथ विद्यार्थियों को पूर्व ज्ञान की स्पष्टता भी अवश्य होनी चाहिए।

7. **कक्षा–स्तर का ज्ञान**– पाठ योजना बनाने के लिए शिक्षक को कक्षा के स्तर का ज्ञान अवश्य होना चाहिए। कुछ नवीन शिक्षक पाठ योजना बनाते समय कक्षा के स्तर को ध्यान में नहीं रखते। इससे शिक्षण अस्त–व्यस्त हो जाता है और विद्यार्थियों की समझ में कुछ नहीं आता। अतः सभी विद्यार्थी–शिक्षक इस संबंध में विशेष रूप से सतर्क रहें।

8. **सोपान का विभाजन**– पाठ योजना बनाते समय शिक्षक को चाहिए कि वह प्रकरण को अथवा एक से अधिक आवश्यकतानुसार सोपानों में विभाजित कर ले। वह यह भी निश्चित कर ले कि किस सोपान में किस शिक्षण विधि अथवा नीति का प्रयोग किया जाएगा। इससे पाठ योजना सरलतापूर्वक बन जाती है तथा वह शिक्षक एवं विद्यार्थी दोनों पक्षों के लिए सरल एवं ग्राह्य हो जाती है।

9. **सहायक सामग्री का प्रयोग**– पाठ योजना बनाते समय यह निश्चित कर लेना चाहिए कि सहायक सामग्री का कौन से सोपान में किस तथ्य को स्पष्ट करने के लिए कब प्रयोग किया जाएगा? दूसरे शब्दों में सहायक सामग्री को आवश्यकतानुसार विधिपूर्वक प्रयोग करना चाहिए। इसे पाठ की स्वाभाविकता तथा रोचकता बनी रहेगी।

10. **लचीलापन**– पाठ योजना शिक्षक की दासी होती है, स्वामिनी नहीं। अतः शिक्षण में आकर्षण तथा रोचकता लाने के लिए शिक्षण पाठ योजना में आवश्यक परिवर्तन करने के लिए स्वतंत्र है।

11. **समय का ज्ञान**– पाठ योजना बनाते हुए शिक्षक को समय का ध्यान रखना चाहिए। दूसरे शब्दों में, शिक्षक को यह बात स्पष्ट रूप से मालूम होनी चाहिए कि पाठ योजना को विद्यार्थियों के सामने प्रस्तुत करने में कितना समय लगेगा तथा निर्धारित समय में कुल कितनी क्रियाएं सफलापूर्वक की जा सकती है।

पाठ योजनाओं का वर्गीकरण

पाठ योजना के विभिन्न उपागमों तथा स्वरूपों को ध्यान में रखते हुए निम्न पांच प्रकार पाठ योजनाओं को वर्गीकृत कर सकते हैं–

1. व्यापक पाठ योजनाएं,
2. लघु पाठ योजनाएं,

3. सूक्ष्म पाठ योजनाएं,
4. लिखित पाठ योजनाएं, एवं
5. अलिखित पाठ योजनाएं।

टिप्पणी

1. **व्यापक पाठ योजनाएं**— व्यापक पाठ योजनाएं पूरी कक्षा के लिए तथा कक्षा के पूरे घंटे के लिए बनायी जाती है इसमें पाठ इकाई का आधार बड़ा होता है। पाठ—वस्तु भी पर्याप्त होती है। भारतीय प्रशिक्षण कॉलेजों में प्रशिक्षण हासिल करने वालों द्वारा व्यापक पाठ योजनाएं बनाई जाती है। इसमें परंपरागत विधि के अनुसार, प्रत्येक पाठ योजना का शीर्षक दिया होता है।
2. **लघु पाठ योजनाएं**— लघु पाठ योजनाएं भी कक्षा की पूरी 30—40 मिनट जाती है, लेकिन लिखते समय व्यापक पाठ योजना की भांति इसमें सभी चीजें नहीं लिखी जाती हैं। लघु पाठ योजनाओं में निम्नांकित तत्वों पर ध्यान दिया जाता है।
   (क) पाठ योजना क्रम;
   (ख) प्रकरण;
   (ग) कक्षा एवं वर्ग;
   (घ) विशिष्ट उद्देश्य;
   (ङ) शिक्षण बिंदु;
   (च) मूल्यांकन;
   (छ) गृहकार्य।
3. **सूक्ष्म पाठ योजनाएं**— सूक्ष्म पाठ योजनाएं सूक्ष्म शिक्षण के अंतर्गत एक छोटे समूह को 5—10 मिनट तक पढ़ाने के लिए तैयार की जाती हैं। इसमें पाठ योजना एक प्रयत्न पर विशेष कौशल प्राप्त करने के लिए बनाई जाती है। इसमें, क्योंकि छात्रों की संख्या, पाठ्य—वस्तु तथा समय तीनों ही सूक्ष्म होते हैं, अतः इन्हें सूक्ष्म पाठ योजना कहा जाता है। इस प्रकार की पाठ योजना पर विभिन्न यूनिवर्सिटी आदि में अनेक प्रयोग एवं शोध किए जा रहे हैं।
4. **लिखित रूप**— प्रशिक्षण कॉलेजों में से सामान्यतः प्रशिक्षार्थी को पूरी पाठ योजना लिखित रूप तैयार करनी पड़ती है। अतः जो पाठ योजना लिखित रूप में रहती है, उसे लिखित पाठ योजना कहा जाता है। छात्रगण पहले से काफी सोच—विचार कर पाठ योजना लिखते हैं और शिक्षक इस लिखित योजना के आधार पर वास्तविक कक्षा शिक्षण से तुलना करता है और समुचित सुधार के लिए सुझाव देता है।
5. **अलिखित रूप**— कक्षा में जाने से पूर्व शिक्षक अपने अनुभवों के आधार पर कक्षा शिक्षण के लिए मन ही मन में योजना बनाता है कि कक्षा में वह क्या पढ़ाएगा—क्यों पढ़ाएगा—कब पढ़ाएगा? अतः इस प्रकार के अलिखित रूप की इन पाठ योजनाओं की अलिखित पाठ योजनाएं, कहा जाता है।

पाठ योजना के विविध उपागम अथवा पद्धतियां

टिप्पणी

पाठ योजनाओं के निर्माण के संबंध में विभिन्न शिक्षविदों द्वारा समय–समय पर अलग–अलग बातों पर बल दिया गया है। प्रमुख रूप से पाठ योजना संबंधी निम्नलिखित उपागम प्रस्तुत किए गए हैं–

1. हरबर्ट पंच–पद उपागम;
2. जॉन डीवी तथा किलपैट्रिक योजना उपागम;
3. मॉरिसन योजना उपागम;
4. अमेरिकन उपागम;
5. ब्रिटिश उपागम;
6. ब्लूम मूल्यांकन उपागम
7. क्षेत्रीय शिक्षा महाविद्यालय मैसूर उपागम।

1. हरबर्ट पंच–पद उपागम (Herbart Fire Step Taxonomy)

जर्मनी के प्रसिद्ध शिक्षाविद जे.एफ. हरबर्ट ने शिक्षण–विधि के निम्नलिखित चार पद निर्धारित किए–

(क) **स्पष्टता**– इस पद में पढ़ाई जाने वाली विषय–वस्तु को विभिन्न तथ्यों में दिया जाता था जिससे कक्षा के सभी विद्यार्थी प्रत्येक तत्व पर ध्यान दे सकें। साथ ही शिक्षक भी पाठ्य–वस्तु को स्पष्ट रूप से प्रस्तुत कर सकें।

(ख) **संबंध**– इस पद में नवीन ज्ञान का विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान से संबंध स्थापित किया जाता था।

(ग) **प्रणाली**– यह विद्वान हरबर्ट का तीसरा पद था। इसमें विशिष्ट को सामान्य से अलग किया जाता था जिससे विद्यार्थियों को विभिन्न तथ्यों में परस्पर संबंध दिखाई देते हुए पूर्ण का ज्ञान हो जाए। इस प्रकार पद में नवीन ज्ञान अथवा विचारों को तार्किक आधार पर क्रमबद्ध किया जाता था।

(घ) **विधि**– इस पद में विद्यार्थी सीखे हुए ज्ञान का नवीन परिस्थितियों में प्रयोग करते थे।

विद्वान हरबर्ट के प्रसिद्ध शिष्य 'जिलर' ने प्रथम अर्थात स्पष्टता के दो भागों– (i) प्रस्तावना अथवा तैयारी तथा (ii) प्रस्तुतीकरण में विभाजित कर दिया। हरबर्ट के एक अन्य शिष्य 'राइन' के इन दोनों पदों के बीच एक और पद जोड़ दिया जिसे उद्देश्य कथन की संज्ञा दी गई। इतना ही नहीं, हरबर्ट के शिष्यों ने शेष तीन पदों का नाम भी बदल दिए। दूसरे शब्दों में, हरबर्ट के दूसरे पर संबंध के स्थान पर तुलना, तीसरे पद पद प्रणाली के स्थान पर अभ्यास या अनुप्रयोग शब्दों का प्रयोग किया जाने लगा। इस प्रकार हरबर्ट द्वारा प्रतिपादित चारों पदों के स्थान पर शिक्षण के पांच पद हो गए। इन्हीं पांच पदों को हरबर्ट की पंचपद प्रणाली के नाम से संबोधित किया जाता है।

हरबर्ट प्रथम शिक्षाशास्त्री था जिसने शिक्षा में मनोविज्ञान को स्थान दिया और उसके अनुयायियों ने ज्ञान प्राप्ति के उद्देश्य से पढ़ाने के लिए पांच सोपानों पर बल दिया। यह ज्ञान संचित होता रहता है तथा नवीन ज्ञान को पूर्वज्ञान से संबंधित कर दिया जाए तो छात्र अच्छी प्रकार से सीख लेता है।

टिप्पणी

हरबर्ट द्वारा बताए गए पांच पदों का विवरण इस प्रकार है–

(क) **योजना**– शिक्षक पाठ्य–वस्तु के तत्वों की व्यवस्था क्रमबद्ध रूप में करता है इसके पश्चात छात्रों के पूर्वज्ञान के आधार पर प्रस्तावना देते हैं। प्रस्तावना के साथ ही उद्देश्य कथन को बताता है। तत्पश्चात पाठ आरंभ होता है।

(ख) **प्रस्तुतीकरण**– यहां से पाठ का आरंभ माना जाता है। शिक्षक पाठ का विकास प्रश्नों की सहायता से करता है तथा आवश्यकतानुसार उपकरण, चित्र, मानचित्र आदि सहायक सामग्री द्वारा पाठ्य–वस्तु का प्रस्तुतीकरण किया जाता है।

(ग) **तुलना एवं साहचर्य**– शिक्षक छात्रों को पाठ्य–वस्तु के नवीन तथ्यों को पूर्व तथ्यों से तुलना करता है तथा साथ–साथ स्पष्टीकरण भी करता है।

(घ) **सामान्यीकरण**– इस सोपान के अंतर्गत शिक्षक छात्रों को दो या दो से अधिक तथ्यों को सम्मिलित रूप से अवगत कराता है जिससे छात्र किसी नियम, अधिनियम आदि को स्थापित कर सकने में समर्थ हो सकें।

(ङ) **अनुप्रयोग**– शिक्षक ज्ञान को स्थायी बनाने हेतु इन परिस्थितियों का कक्षा में निर्माण करता है ताकि छात्र, सीखे हुए ज्ञान का प्रयोग कर सकें तथा उसका नवीन परिस्थितियों में प्रयोग कर सकें।

हरबर्ट उपागम के गुण

1. **मनोवैज्ञानिक सिद्धांतों पर आधारित**– हरबर्ट का यह सिद्धांत मनोविज्ञान पर आधारित है। यह अचेतन विचारों का चेतन मस्तिष्क में लौटने का प्रयास करता है। यह उपागम पूर्व–ज्ञान के सिद्धांत पर आधारित है।
2. **सुव्यवस्थित और सुनियंत्रित स्वरूप**– हरबर्ट का यह उपागम सुव्यवस्थित और सुनियंत्रित है। इसमें प्रत्येक पद का स्वरूप निश्चित है।
3. **सभी विषयों में प्रयुक्त होने वाला**– हरबर्ट उपागम का प्रयोग लगभग सभी विषयों के सभी प्रकारणों में बड़ी सुगमता से किया जा सकता है।
4. **पूर्व अर्जित ज्ञान के सिद्धांत पर आधारित**– इस उपागम द्वारा पाठ शुरू करने से पहले पूर्व–ज्ञान का परीक्षण किया जाता है तथा पूर्व–ज्ञान को नवीन–ज्ञान के साथ जोड़ा जाता है।
5. **विद्यार्थियों की सक्रियता**– इस उपागम के अंतर्गत विद्यार्थी सक्रिय रहते हैं तथा उन्हें मौलिक रूप से सोचने का अवसर मिल जाता है।
6. **आगमन और निगमन प्रणाली का प्रयोग**– इस उपागम में आगमन और निगमन प्रणाली का प्रयोग किया जाता है। जिससे विद्यार्थियों की सहभागिता तथा चिंतन का विकास होता है। इससे सामान्यीकरण में सहायता मिलती है।

टिप्पणी

7. **अर्जित ज्ञान नयी परिस्थितियों में प्रयोग**– इस उपागम द्वारा अर्जित किए गए ज्ञान को नयी परिस्थितियों में प्रयोग करना भी सिखाया जाता है। यह शिक्षा का बहुत ही महत्वपूर्ण पक्ष है।
8. **समस्त ज्ञान में समन्वय**– इस प्रणाली द्वारा समस्त ज्ञान समन्वित रूप में मिलता है। विषय–सामग्री के सभी पक्षों में समन्वय लाना इस उपागम द्वारा सरल है।
9. **शिक्षक प्रधान उपागम**– हरबर्ट के उपागम में शिक्षक को महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है अर्थात यह शिक्षक प्रधान उपागम है।

हरबर्ट उपागम के दोष

1. **प्रस्तुतीकरण पर अधिक बल**– हरबर्ट उपागम का मुख्य दोष यही है कि इसमें पाठ्य–वस्तु के प्रस्तुतीकरण पक्ष की ओर ही अधिकतम ध्यान दिया जाता है। अन्य पक्ष दुर्बल रह जाते हैं।
2. **शिक्षक की सीमित स्वतंत्रता**– इस उपागम का अनुकरण करते हुए शिक्षक की स्वतंत्रता भी सीमित होकर रह जाती है। शिक्षक कक्षा में अपनी ओर से कुछ भी नहीं कर सकता जो पाठ योजना में शामिल है उसे उसी का अनुकरण करना पड़ता है।
3. **ज्ञानात्मक पक्ष ही संभव**– इस उपागम द्वारा शिक्षा के ज्ञानात्मक पक्ष का ही शिक्षण संभव है, भावात्मक व क्रियात्मक पक्ष का शिक्षण असंभव है।
4. **कम लचीला उपागम**– यह उपागम कम लचीला है। इसमें शिक्षक कक्षा में या अचानक परिवर्तन करने में समर्थ नहीं होता।
5. **रुचियों व अभिरुचियों की ओर ध्यान नहीं**– इस उपागम में विद्यार्थियों की रुचियों और अभिरुचियों की ओर ध्यान नहीं दिया जाता। यह उपागम इस दृष्टि से अमनोवैज्ञानिक है।
6. **स्मृति–स्तर शिक्षण**– हरबर्ट उपागम द्वारा केवल स्मृति–स्तर तक शिक्षण स्तर शामिल है। इस उपागम द्वारा बोध स्तर का शिक्षण संभव नहीं।
7. **शिक्षक अधिक सक्रिय**– इस उपागम के अंतर्गत कक्षा में शिक्षक प्रायः अधिक रहते हैं और निष्क्रिय विद्यार्थियों को अपने विचार प्रस्तुत करने की स्वतंत्रता नहीं होती है।
8. **शिक्षण–अधिगत उद्देश्यों का विशिष्टीकरण नहीं**– इसमें शिक्षण अभिगम के उद्देश्यों का विशिष्टीकरण नहीं किया जाता जो कि प्रभावशाली शिक्षण के लिए अति आवश्यक है।
9. **शिक्षण पर अधिक बल**– इस उपागम द्वारा शिक्षण पक्ष पर अधिक बल दिया जाता है और अधिगम की ओर ध्यान नहीं दिया जाता।

टिप्पणी

2. जॉन डीवी तथा किलपैट्रिक योजना उपागम (Johan Deway and Kilpatrick Project Taxomony)

किलपैट्रिक प्रसिद्ध शिक्षा–शास्त्री जॉन डीवी के प्रिय शिष्य थे तथा कोलंबिया में शिक्षा–शास्त्र के प्राध्यापक थे। उनके ऊपर अपने गुरु जॉन डीवी के प्रयोजनवाद का गहरा प्रभाव था। अतः उनका विश्वास था कि शिक्षा को वास्तविक जीवन की गहराई में प्रवेश करना चाहिए। दुर्भाग्य से उस समय शिक्षा के अंदर अनेक दोष भरे हुए थे। चारों ओर विद्यार्थियों की वैयक्तिक विभिन्नता को ध्यान में रखते हुए रुचियों, भावों तथा प्रवृत्तियों का गला घोंटकर ऐसी कृत्रिम शिक्षा दी जाती थी कि उनका मानसिक विकास तो अवश्य हो जाता था परंतु व्यावहारिक जीवन में असफल हो जाते थे। ऐसी स्थिति में किलपैट्रिक महोदय ने अपने गुरु जॉन डीवी महोदय के प्रयोजनवादी सिद्धांतों पर आधारित, विद्यार्थियों को उनकी रुचियों के अनुसार क्रियाशील होकर व्यावहारिक ज्ञान प्राप्त करने के लिए एक 2–7वी शिक्षण पद्धति का अविष्कार किया जिसे प्रोजेक्ट पद्धति कहते हैं।

डीवी तथा किलपैट्रिक उपागम में अधिगम का आधार प्रोजेक्ट होता है। इसके माध्यम से विद्यार्थी अपने जीवन की समस्याओं को सुलझाते हुए नाना प्रकार के अनुभव प्राप्त करते हैं जिससे शिक्षण सोद्देश्य हो जाता है। इस प्रकार यह इकाई योजना अनुभवों पर आधारित है। इसके द्वारा विद्यार्थियों को ऐसे अनुभव प्रदान किए जाते हैं। जिससे उनमें सामाजिक क्षमता में विकसित होते हुए वे व्यावहारिक जीवन में सफल हो जाएं। स्मरण रहे कि इस उपागम का प्रयोग अमेरिका में सफलतापूर्वक किया जाता है। हमारे देश में भी गांधी जी ने अपनी बेसिक शिक्षा में प्राथमिक स्तर के लिए इस प्रकार की इकाइयों को प्रस्तावित किया था। प्रोजेक्ट पद्धति में किलपैट्रिक ने सात पदों का वर्णन किया है। वे पद हैं–

(क) परिस्थिति उत्पन्न करना;

(ख) योजना का चयन;

(ग) योजना का उद्देश्य;

(घ) योजना के कार्यक्रम की व्यवस्था;

(ङ) कार्यक्रम को कार्यान्वित करना;

(च) कार्य का मूल्यांकन तथा

(छ) विवरण लेखा तैयार करना।

3. मॉरिसन योजना उपागम (Marrison Project Taxonomy)

विद्वान मॉरिसन ने इकाई पद्धति का सर्वप्रथम विकास किया। इस पद्धति का प्रयोग अमेरिका के अंतर्गत अधिक प्रचलित है। यह पद्धति गेस्टाल्ट मनोविज्ञान के सिद्धांतों पर आधारित मानी जाती है। मॉरिसन के अनुसार– "इकाई एक संगठित तथा कला के वातावरण का व्यापक तथा उपयोगी पक्ष है।"

अतः यह शिक्षण की महत्वपूर्ण पद्धति मानी जाती है जिसमें पाठ्यक्रम के संगठनात्मक रूप पर बल दिया जाता है। इस पद्धति का प्रयोग विज्ञान में अधिक किया जाता है। मॉरिसन ने इकाई पद्धति में पांच पदों का उल्लेख किया है–

टिप्पणी

(क) खोज;

(ख) प्रस्तुतीकरण;

(ग) आत्मीकरण;

(घ) संगठन;

(ङ) अभिव्यक्तीकरण।

(क) **खोज**– इस पद में अध्यापक का कार्य, प्रश्नों के द्वारा परस्पर चर्चा के द्वारा विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान की खोज करना है। पूर्व ज्ञान की जानकारी के बिना इसे नवीन ज्ञान से संगठित करना होता है। अध्यापक को यह ध्यान रखा चाहिए कि पूर्व ज्ञान इकाई से संबंधित होना चाहिए।

(ख) **प्रस्तुतीकरण**– इस पद में पाठ्य–सामग्री की विवेचना की जाती है तथा पूरी इकाई के विभिन्न भागों को विभिन्न विधियों की सहायता से विद्यार्थियों के समक्ष प्रस्तुत किया जाता है। प्रत्येक इकाई प्रस्तुतीकरण के पश्चात उसका मूल्यांकन किया जाता है। इसमें विद्यार्थी के अधिगम की जांच की जाती है। यदि परिणाम संतोषजनक न हो तो प्रस्तुतीकरण के पद को फिर से दोहराया जाता है।

(ग) **आत्मीकरण**– इसका संबंध ज्ञान के स्थायीकरण से होता है अर्थात प्रस्तुतीकरण के दौरान जिस ज्ञान को अर्जित किया जाता है, आत्मीकरण के पद में उसी ज्ञान को प्रदान किया जाता है। छात्र विषय–सामग्री का गहन अध्ययन करते हैं, आपस में विचार–विमर्श करते हैं तथा उसे समझने का प्रयास करते हैं। इसके लिए वे पुस्तकालयों की सहायता लेते हैं, अध्यापक के परामर्श से वे अपनी आशंकाओं का समाधान करते हैं वे विषय–वस्तु का प्रत्यास्मरण करते हैं तथा तर्क–वितर्क प्रविधियों का प्रयोग करके अपने अर्जित ज्ञान को स्थायित्व प्रदान करते हैं।

(घ) **संगठन**– इस पद में विद्यार्थी अर्जित किए ज्ञान को अपनी समझ के आधार पर लिखित रूप में प्रस्तुत करता है। वह विषय–सामग्री पर अधिकार प्राप्त कर लेता है। इस पद का प्रयोग सामाजिक अध्ययन जैसे विषय में अधिक सुगमता एवं प्रभावशाली ढंग से किया जाता है। एक प्रकार से मूल्यांकन से संबंधित है।

(ङ) **अभिव्यक्तीकरण**– इस पद में विद्यार्थी अपने सहपाठियों और अध्यापक के सामने इकाई की विषय–सामग्री का मौखिक वर्णन करता है। इसे निपुण अभिव्यक्तीकरण भी कहते हैं। इससे विद्यार्थियों में आत्म–विश्वास बढ़ता है। यह अभिव्यक्ति मौखिक ही नहीं, बल्कि लिखित या श्यामपट्ट कार्य के रूप में भी हो सकती है।

इस प्रकार पाठ योजना में हम किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। संसार के विभिन्न देशों में पाठ योजना के प्रारूप भिन्न–भिन्न हैं।

टिप्पणी

मॉरिसन या इकाई उपागम

इस उपागम के प्रवर्तक प्रो. हेनरी सी. मॉरिसन हैं। इस उपागम का आधार गेस्टाल्ट मनोविज्ञान है। इस मनोविज्ञान के अनुसार हमारा ध्यान सर्वप्रथम उसके पूर्ण स्वरूप पर जाता है तथा इसके पश्चात हम उसके विभिन्न अंगों या अंशों का विश्लेषण करते हैं। मॉरिसन ने सर्वप्रथम सन् 1929 में अपनी पुस्तक 'माध्यमिक विद्यालयों में अध्यापक अभ्यास' में इस उपागम की व्याख्या की है। इस उपागम का अर्थ है–किसी विषय–वस्तु को इकाइयों या उप–इकाइयों में बांटना तथा इन इकाइयों का शिक्षण करके विद्यार्थियों को ज्ञान प्राप्त करवाना।

अतः इस उपागम का मुख्य उद्देश्य है–शिक्षण अधिगम प्रक्रिया द्वारा विद्यार्थियों को विषय–वस्तु में दक्षता प्रदान करवाना। मॉरिसन ने अपने इस उपागम में विद्यार्थियों के मन में अपने अधिगम उद्देश्यों की स्पष्टता पर अधिक बल दिया है। मॉरिसन के अनुसार विद्यार्थियों की आवश्यकता पर अधिक बल दिया जना चाहिए। हरबर्ट और मॉरिसन की पाठ योजनाओं में मुख्य अंतर यही है कि हरबर्ट विषय–वस्तु के प्रस्तुतीकरण पर अधिक बल देता है तथा मॉरिसन विषय–वस्तु की परिपाक क्रिया पर।

इस उपागम की मुख्य बातें निम्नलिखित हैं–

1. इसमें विषय–वस्तु को विभिन्न इकाइयों में बांटा जाता है।
2. प्रत्येक इकाई पहली इकाई से संबंधित होती है।
3. यह उपागम विषय–वस्तु की परिपाक क्रिया पर बल देता है।
4. इसमें अधिगम उद्देश्यों की स्पष्टता को महत्वपूर्ण माना गया है।
5. यह उपागम गेस्टाल्ट मनोविज्ञान पर आधारित है।

इकाई उपागम के पद

हरबर्ट की तरह मॉरिसन के इस इकाई उपागम के भी पांच पद हैं–

1. **खोज करना या अन्वेषण**– इकाई उपागम के इस पद में शिक्षक का विद्यार्थियों के ज्ञान की खोज करते हैं अर्थात उसके पूर्व–ज्ञान का पता लगाते हैं। पूर्वज्ञान के बिना नए ज्ञान को संगठित करना कठिन होता है। इसमें कुछ बातों पर ध्यान रखना आवश्यक है–

   (क) विद्यार्थियों की रुचियों तथा अभिरुचियों का अन्वेषण करना।

   (ख) पूर्व–ज्ञान की खोज करना लेकिन पूर्व–ज्ञान पाठ की इकाई से संबंधित होना चाहिए।

   (ग) प्रत्येक इकाई के प्रस्तुतीकरण के लिए उपयुक्त विधियों और प्रविधियों का अन्वेषण करना।

2. **प्रस्तुतीकरण**– इस पद में पाठ्य–सामग्री की विवेचना की जाती है तथा पूरी इकाई के स्वरूप को विद्यार्थियों के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है। इसमें शिक्षक की भूमिका अधिक सक्रिय होती है। प्रत्येक इकाई के प्रस्तुतीकरण के पश्चात

उसका मूल्यांकन किया जाता है। यदि मूल्यांकन के परिणाम संतोषजनक नहीं होते तो इस पद की पुनरावृत्ति भी की जा सकती है।

टिप्पणी

3. **आत्मीकरण**— इस पद का संबंध ज्ञान के स्थायीकरण से होता है। प्रस्तुतीकरण के दौरान जिस ज्ञान को अर्जित किया जाता है, आत्मीकरण के पद में उसी ज्ञान को स्थायित्व प्रदान किया जाता है। आत्मीकरण के दौरान ही विद्यार्थी अपनी शंकाओं का समाधान करते हैं। वे विषय—वस्तु का पुनः स्मरण करते हैं तथा तर्क वितर्क प्रविधियों का प्रयोग करके अपने अर्जित ज्ञान को स्थायित्व प्रदान करते हैं।
4. **संगठनात्मक व्यवस्थापक**— इस पद के दौरान विद्यार्थी अर्जित किसे ज्ञान के स्वतंत्र रूप से लिखित रूप से प्रस्तुतीकरण करता है तथा जानने का प्रयत्न करना है कि वह अपने ज्ञान को किस सीमा तक संगठित करके पुनः प्रस्तुत कर सकता है। इस पद का प्रयोग विस्तृत विषयों में अधिक सुगमता एवं प्रभावशाली ढंग से किया जा सकता है। एक तरह से यह पद मूल्यांकन की भूमिका निभाता है।
5. **आवृत्ति या अभिव्यक्तीकरण**— इस पद में विद्यार्थी भी सीखता है उसे वह अपने शिक्षक या सहपाठी को सुनाता है। इस पद के माध्यम विद्यार्थियों में स्वयं की अभिव्यक्ति करने के लिए आत्मविश्वास भी बढ़ जाता है। यह अभिव्यक्ति मौखिक ही नहीं बल्कि लिखित, श्याम पट्ट कार्य के रूप में या प्रयोगशाला में क्रिया के रूप में भी हो सकती है।

इकाई उपागम के सिद्धांत

मॉरिसन का इकाई उपागम कुछ आधारभूत सिद्धांतों पर आधारित है। ये सिद्धांत निम्नलिखित है।

1. **इकाई का सिद्धांत**— इकाई उपागम गेस्टाल्ट मनोविज्ञान पर आधारित है अर्थात इस उपागम अंश की अपेक्षापूर्ण को प्रधानता दी गयी है। इसमें पूर्ण पाठ्य—सामग्री को अंगों या इकाइयों में बांटकर प्रत्येक इकाई का शिक्षण किया जाता है।
2. **गतिशीलता का सिद्धांत**— इस सिद्धांत के अनुसार, सभी इकाइयां गतिशील होनी चाहिए। इनका प्रयोग आवश्यकतानुसार करना चाहिए। इन इकाइयों का क्षेत्र भी विस्तृत होना चाहिए।
3. **बालक की प्रधानता का सिद्धांत**—इकाई उपागम में विद्यार्थी को अधिक महत्व दिया गया है। इस सिद्धांत के अनुसार, विद्यार्थियों की आवश्यकतानुसार और उसकी मूल प्रवृत्तियों को ध्यान में रखा जाता है, तभी शिक्षण कार्य प्रारंभ किया जाता है।
4. **संगठन का सिद्धांत**— ज्ञान प्रदान करने के लिए पाठ्य—वस्तु उचित ढंग से संगठित नहीं की जाती तो उसका कक्षा में प्रस्तुतीकरण प्रभावशाली नहीं हो सकता।
5. **अभिव्यक्तीकरण का सिद्धांत**— इकाई उपागम में विद्यार्थी की अभिव्यक्ति बहुत महत्वपूर्ण होती है। विद्यार्थी को नया ज्ञान प्रदान करने के लिए उसकी

टिप्पणी

अभिव्यक्ति का विकास करना अति आवश्यक है। इससे विद्यार्थी ज्ञान आत्मसात कर लेते हैं तथा उनमें आत्मविश्वास बढ़ता है।

6. **रुचि एवं उद्देश्य का सिद्धांत**– इस उपागम में विद्यार्थियों की रुचि एवं उद्देश्यों पर बल दिया जाता है। हर इकाई के भिन्न उद्देश्य होते हैं। इन उद्देश्यों के प्रति सजग रहना पड़ता है।

इकाई उपागम के गुण

1. **विद्यार्थी प्रधान उपागम**– इकाई उपागम में चूंकि विद्यार्थी को प्रमुख स्थान दिया गया है, अतः यह विद्यार्थी प्रधान उपागम है।
2. **गेस्टाल्ट मनोविज्ञान पर आधारित**– इकाई उपागम में पूर्ण पर बल दिया गया है तथा अंश की ओर 'पूर्ण' देख लेने के बाद ध्यान देने को कहा गया है।
3. **इकाइयों के कारण सरल व रोचक**– इस उपागम में पाठ्य–वस्तु इकाइयों में बांट लेने से पाठ्य–वस्तु सरल एवं रोचक बनाने में सहायता मिलती है।
4. **स्पष्ट उद्देश्यों के कारण प्रभावशाली अधिगम**– इस उपागम में इकाई के विभिन्न उद्देश्य स्पष्ट होते हैं जिन्हें आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। इन उद्देश्यों की स्पष्टता के कारण विद्यार्थी का अधिगम अधिक प्रभावशाली होगा।
5. **सुगम आत्मसात**– प्रत्येक इकाई में सीमित पाठ्य–वस्तु होने के कारण विद्यार्थी उस पाठ्य–वस्तु को बड़ी आसानी से आत्मसात कर लेते हैं।
6. **स्वाध्याय की आदत**– इस उपागम में स्वाध्याय की आदत का विकास होता है। विद्यार्थी हर इकाई को आसान व रोचक मानता हुआ स्यवं अध्ययन करने का प्रयत्न करता है।
7. **हर प्रकार की अभिव्यक्ति की व्यवस्था**– इकाई उपागम में विद्यार्थी के लिए मौखिक तथा लिखित दोनों ही प्रकार की व्यवस्था है।
8. **स्वस्थ अन्तःक्रिया**– इसमें स्वस्थ अन्तःक्रिया को शिक्षकों व विद्यार्थियों के सहयोग से बल मिलता है।
9. **शिक्षण–सामग्री का उचित प्रयोग**– इकाई उपागम द्वारा विद्यार्थी विभिन्न प्रकार की शिक्षण सामग्री का उचित प्रकार से प्रयोग करना सीखता है।
10. **सामाजिक मूल्यों का विकास**– इस उपागम द्वारा विद्यार्थी में सामाजिक मूल्यों का विकास संभव है, क्योंकि शिक्षण अधिगम क्रिया में सामाजिक संदर्भ में की जाती है।

इकाई उपागम के दोष या सीमाएं

1. **अधिक समय की खपत**– इसमें समय की अधिक खपत होती है, क्योंकि पाठ्य–वस्तु को पहले इकाइयों में बांटना पड़ता है। और फिर प्रत्येक इकाई पर पाठ योजना तैयार करनी पड़ती है।
2. **सीमित कार्यक्षेत्र**– इस उपागम का क्षेत्र बहुत ही सीमित हो जाता है।

टिप्पणी

3. **हर इकाई को सार्थक बनाना कठिन**– प्रत्येक इकाई को सार्थक या उद्देश्यपूर्ण बनाना व्यावहारिक रूप से असुविधाजनक होता है।
4. **पदों या सोपानों में स्पष्टता की कमी**– इसकी सबसे बड़ी कमी यह है कि इसके पदों या सोपानों में स्पष्टता नहीं होती है। इस प्रकार की अस्पष्टता के कारण इनके प्रयोग में सुविधा नहीं रहती।
5. **धीमा शिक्षण**– इस उपागम के अंतर्गत शिक्षण प्रक्रिया धीमी गति से होती है, जिसके परिणामस्वरूप पाठ समय पर समाप्त नहीं होता।
6. **असंतुलित ज्ञान**– इन उपागम द्वारा विद्यार्थियों को किसी में बहुत कम ज्ञान प्राप्त होने की संभावना रहती है। इस प्रकार ज्ञान का असंतुलन बना रहता है।

4. अमेरिकन उपागम (American Taxonomy)

अमेरिका के पाठ योजना के आयामों की विशेषता है कि इसमें शिक्षण अधिगम उद्देश्यों को प्राथमिकता दी जाती है। शिक्षक तथा छात्रों की क्रियाएं इस प्रकार व्यवस्थित की जाती हैं जिससे उद्देश्यों की प्राप्ति भली प्रकार की जा सके। शिक्षक अपनी पाठ योजना में ऐसी क्रियाओं की व्यवस्था करता है जिससे समुचित अधिगम परिस्थितियां उत्पन्न की जा सकें। मूल्यांकन में मानदंड परीक्षाएं प्रयोग में लायी जाती हैं।

5. ब्रिटिश उपागम (British Taxonomy)

इसमें पाठ योजना के निर्माण में शिक्षक की क्रियाओं को अधिक महत्व दिया जाता है और छात्रों में मूल्यांकन पर अधिक बल देते हैं। इसके लिए निष्पति परीक्षण को प्रयुक्त किया जाता है।

6. ब्लूम मूल्यांकन उपागम (Bloom Assossement Taxonony)

यह मूल्यांकन उपागम शिक्षण के क्षेत्र में एक नवीन प्रत्यय के रूप में विकसित हुआ है। इसमें शिक्षण का उद्देश्य मूल्यांकन केंद्रित माना जाता है। इसलिए यह परीक्षण, शिक्षण उद्देश्यों पर पूर्ण रूप से आधारित होता है।

बी.एस. ब्लूम ने शिक्षक को त्रिपदी प्रक्रिया का नाम दिया है। अधिगत प्रक्रिया बहुत ही जटिल प्रक्रिया है जो निरंतर चलती रहती है। परंपरागत शिक्षण में शिक्षक द्वारा शिक्षण उद्देश्यों को निश्चित करना, पाठ्यक्रम संबंधी सूचनाओं का वितरण करना ही अपना कर्तव्य मानता या गिनता है। सत्र के अंत में निबंधात्मक परीक्षाओं द्वारा उनके ज्ञान का मूल्यांकन किया जाता था लेकिन वर्तमान वैज्ञानिक तथा मनोवैज्ञानिक युग में इस परंपरागत प्रणाली का स्थान नयी–नयी विधियां ले रही हैं। मूल्यांकन स्वयं एक प्रक्रिया है जो शिक्षण अधिगत प्रक्रिया में निरंतर होती है। शिक्षा के वर्तमान आधुनिक स्वरूप में शिक्षा का मुख्य उद्देश्य है–विद्यार्थियों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाना। इस अपेक्षित व्यवहार को जांचने के लिए मूल्यांकन प्रक्रिया में विभिन्न विधियों, उपकरणों तथा प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है।

पाठ योजना के लिए मूल्यांकन उपागम में शिक्षा को उद्देश्यपूर्ण प्रक्रिया माना है। इसके अनुसार, शिक्षक की सभी प्रक्रियाएं उद्देश्य केंद्रित होती हैं। शिक्षा में शिक्षण तथा

परीक्षण की क्रियाएं उद्देश्य केंद्रित कर दी जाती हैं। मूल्यांकन, विद्यार्थियों का तथा शिक्षक के सभी पक्षों के पृष्ठपोषण का नाम प्रमुख रूप से लिया जाता है। मूल्यांकन उपागम की कुछ मुख्य बातें इस प्रकार हैं–

टिप्पणी

1. मूल्यांकन उपागम, शिक्षा के क्षेत्र में एक नए संप्रत्यय के रूप में विकसित हुआ है।
2. यह उपागम को एक उद्देश्यपूर्ण प्रक्रिया मानता है।
3. मूल्यांकन उपागम में विद्यार्थियों के संपूर्ण व्यवहार को जांचा जाता है।
4. मूल्यांकन उपागम, शिक्षा को एक ध्रुवीय प्रक्रिया मानता है।

मूल्यांकन उपागम के पद

ब्लूम महोदय ने शिक्षा को त्रिपदी प्रक्रिया माना गया है। अतः यदि इस उपागम में पाठ योजना में उद्देश्य निर्धारित नहीं किए जाते तो शिक्षा प्रक्रिया अर्थहीन होकर रह जाती है। शैक्षिक उद्देश्यों के दौरान कुछ बातों का ध्यान रखना आवश्यक है।

1. प्रत्येक विषय के उद्देश्य भिन्न–भिन्न होते हैं, क्योंकि प्रत्येक विषय की प्रकृति भिन्न होती है।
2. विभिन्न स्तरों पर उद्देश्य भी भिन्न होने चाहिए अर्थात उद्देश्यों का निर्धारण स्तर केंद्रित होना चाहिए। बच्चों के विकासक्रम को ध्यान में रखना चाहिए।
3. शिक्षा के उद्देश्यों को निर्धारित करते समय समाज की आर्थिक, सांस्कृतिक और राजनीतिक आवश्कताओं को ध्यान में रखना चाहिए।
4. उद्देश्य के लिए उपयुक्त अधिगम–अनुभव प्रदान करना– अधिगम अनुभवों से अभिप्राय है, वे साधन जिनकी सहायता से शिक्षण उद्देश्यों को प्राप्त किया जा सकता है। इसी पर के अंतर्गत शिक्षण की विधि, प्रविधि, सहायक सामग्री तथा अनुदेशन आदि आते हैं जैसे ज्ञान का उद्देश्य प्राप्त करने के लिए शिक्षक चार्ट दिखाएगा, व्याख्यान देगा तथा गृहकार्य देगा। बोध उद्देश्य के लिए शिक्षक प्रश्नोत्तर विधि, वाद–विवाद विधि का प्रयोग करता है। इसी प्रकार सर्जनात्मक उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए समस्या–समाधान जैसी विधि का प्रयोग करके अनुभव प्रदान किए जा सकते हैं।

व्यवहार परितर्वन या अधिगम का मूल्यांकन– मूल्यांकन उपागम में दूसरे पद में बताए गए अधिगम–अनुभवों को प्रदान करके विद्यार्थियों में व्यवहार–परिवर्तन लाया जा सकता है। इस पद में अधिगम का मूल्यांकन प्रथम पद के अंतर्गत पूर्व निर्धारित उद्देश्यों को ध्यान में रखकर किया जाता है। दूसरे पद के अंतर्गत प्रदान किए गए अधिगम–अनुभव की प्रभावशीलता इसी बात से जांची जाती है कि प्रथम पद में निर्धारित उद्देश्यों को किस सीमा तक प्राप्त कर लिया गया है। विद्यार्थियों में व्यवहार परिवर्तन तीन प्रकार से होते हैं– 1. ज्ञानात्मक 2. भावात्मक 3. क्रियात्मक।

इस उपागम में तीनों प्रकार व्यवहार परिवर्तन को मापने और मूल्यांकन करने की व्यवस्था अलग–अलग विधियों से की गयी है। जैसे ज्ञानात्मक पक्ष के लिए रेटिंग,

अभिरुचि परीक्षण, क्रियात्मक पक्ष के लिए निरीक्षण, प्रयोगात्मक विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

टिप्पणी

मूल्यांकन उपागम में पाठ योजना के घटक

इस उपागम में पाठ योजना तैयार करने के लिए निम्नलिखित घटकों या बिंदुओं का प्रयोग किया जाता है–

1. **शिक्षण बिंदु**– पाठ योजना के घटक में इस बात को शामिल किया जाता है कि कक्षा में शिक्षा–प्रक्रिया के दौरान कौन–कौन शिक्षण बिंदु हो। अतः इन शिक्षण बिंदुओं का निर्धारण पहले ही लिया जाता है। इसमें विषय–वस्तु में से शिक्षण बिंदुओं को छांटकर लिखा जाता है।
2. **उद्देश्यों का निर्धारण**– इस पद में पहले सामान्य उद्देश्य तथा बाद में विशिष्ट उद्देश्यों को लिखा जाता है फिर इन विशिष्ट उद्देश्यों को व्यावहारिक शब्दावली में लिखा जाता है।
3. **शिक्षक की क्रियाएं**– उद्देश्यों के निर्धारण और विशिष्टीकरण के बाद शिक्षण द्वारा कक्षा में संपन्न की जाने वाली क्रियाओं को स्पष्ट रूप से निर्धारित किया जाता है। इससे शिक्षक में आत्म–विश्वास भी जागृत होता है।
4. **विद्यार्थी की क्रियाएं**– पाठ योजना के तीसरे घटक को निर्धारित करने के बाद तथा शिक्षक की क्रियाओं के अंतर में अनुक्रिया के रूप में, विद्यार्थियों की क्रियाओं का भी निर्धारण किया जाता है। इन क्रियाओं के तय होने से शिक्षक और विद्यार्थियों में अन्तःक्रिया का स्वरूप निश्चित हो जाता है।
5. **विधि, प्रविधि तथा शिक्षण सामग्री**– अधिगम अनुभव प्रदान करने के लिए पाठ योजना में इस घटक के अंतर्गत शिक्षण विधियों, प्रविधियों तथा शिक्षण–सामग्री का निर्धारण करना शामिल है।
6. **मूल्यांकन**– पाठ योजना के इस पद में शिक्षण–प्रक्रिया के मूल्यांकन की उन सभी प्रविधियों तथा विधियों का चयन करके लिखा जाता है। इन प्रविधियों का शिक्षण के पश्चात उपयोग किया जाता है। इस विधियों एवं प्रविधियों से यह जांचा जाता है कि शिक्षण तथा अधिगम उद्देश्य किस सीमा तक प्राप्त हुए हैं।

मूल्यांकन उपागम के गुण

1. **शिक्षण बिंदुओं का निर्धारण**– इस उपागम को सबसे प्रमुख गुण यह है कि इसमें सर्वप्रथम शिक्षण बिंदुओं को निर्धारित किया जाता है तथा उन्हें निर्धारित करके अधिगम अनुभवों को स्पष्टता से प्रस्तुत किया जा सकता है।
2. **शैक्षिक उद्देश्यों को व्यावहारिक शब्दावली में लिखना**– इस उपागम में शैक्षिक उद्देश्यों को व्यावहारिक शब्दावली में लिखने तथा उन्हें प्राप्त करने की व्यवस्था।
3. **शिक्षण अधिगम सिद्धांतों पर आधारित**– ब्लूम का यह उपागम मनोविज्ञान के नियमों तथा शिक्षण अधिगम सिद्धांतों पर आधारित है।

टिप्पणी

4. **शिक्षक और विद्यार्थी की स्पष्ट क्रियाएं**– पाठ योजना में इस उपागम में शिक्षक और विद्यार्थी की क्रियाओं को अधिक से अधिक स्पष्ट किया जाता है।
5. **विधियों, प्रविधियों तथा व्यूह रचनाओं का स्पष्ट वर्णन**– इस उपागम के अंतर्गत पाठ योजना में विषय–वस्तु के प्रस्तुतीकरण के लिए प्रयोग में आने वाली विधियों, प्रविधियों और व्यूह रचनाओं की चर्चा स्पष्ट रूप से पाठ–योजना में करती है।
6. **मूल्यांकन पर बल**– ब्लूम का यह उपागम अपेक्षित व्यवहार परिवर्तनों में विधिवत–मूल्यांकन पर बहुत बल देता है। बिना मूल्यांकन की व्यवस्था के पाठ योजना निरर्थक सिद्ध होता है।
7. **शिक्षा के तीन घटकों पर बल**– ब्लूम के इस उपागम में शिक्षा को त्रिपदी प्रक्रिया कहा गया है तथा इन तीनों घटकों अर्थात पदों को आपस में संबंधित किया गया है इन पदों पर ही समस्त मूल्यांकन उपागम पर निर्भर करता है।

मूल्यांकन उपागम के दोष

मूल्यांकन उपागम के कुछ दोष भी हैं। यह उपागम भी कई परिस्थितियों में उपयोग में नहीं लाया जा सकता। इस उपागम की भी कुछ सीमाएं हैं, जो कि निम्नलिखित हैं–

1. **शिक्षण का नियंत्रण**– इस उपागम का एक दोष तो यह है कि पाठ योजना को लागू करते समय शिक्षक का अधिक नियंत्रण रहता है तथा विद्यार्थियों का कम। इस शिक्षण से विद्यार्थियों को उन्नति करने अथवा आगे बढ़ने के अवसर नहीं मिलते।
2. **समन्वय में कठिनाई**– इस उपागम के अंतर्गत तैयार की गई पाठ–योजना में उद्देश्यों, अधिगम अनुभवों तथा मूल्यांकन प्रविधियों में समन्वय लाना व्यावहारिक दृष्टि से कठिन कार्य है।
3. **विद्यार्थियों और शिक्षक की स्वतंत्रता में कमी**– इस उपागम में शिक्षकों व विद्यार्थियों की कक्षा क्रियाओं को पहले से ही निर्धारित कर दिया जाता है। इस तरह शिक्षकों और विद्यार्थियों की स्वतंत्रता या तो छिन जाती है या कम हो जाती है।
4. **मानसिक योग्यताओं पर ध्यान नहीं**– इसमें मानसिक योग्यताओं की ओर ध्यान नहीं दिया जाता। ये मानसिक योग्यताएं प्रायः शैक्षिक उद्देश्यों को लिखने के लिए प्रयोग में लाई जाती हैं।

7. क्षेत्रीय शिक्षा महाविद्यालय मैसूर उपागम (Regional Institute of Education Mysore)

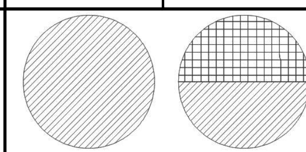
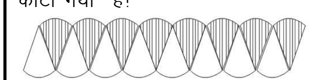
यह भी मूल्यांकन का एक प्रक्रिया है। इसका निर्माण तीन तत्वों शिक्षण उद्देश्य, सीखने के अनुभव तथा व्यवहार परिवर्तन या मूल्यांकन के सम्मिलित रूप में होता है। इन्हीं तीनों तत्वों का प्रयोग मूल्यांकन उपागम में स्पष्ट रूप से किया जाता है।

तालिका 1.1 मूल्यांकन उपागम में पाठयोजना के घटक–1

टिप्पणी

पाठ्य–वस्तु	विशिष्ट उद्देश्य एवं अपेक्षित व्यावहारिक परिवर्तन	शिक्षक प्रक्रिया	छात्र–प्रक्रिया	सहायक सामग्री, विधि, प्रविधि एवं श्यामपट्ट कार्य	मूल्यांकन
पूर्वज्ञान संबंधी प्रश्न	ज्ञान छात्र पूर्वज्ञान का समरण करते हैं।	अध्यापक छात्रों के पूर्वज्ञान करने तथा उसे नवीन ज्ञान से सम्बद्ध करके उनका ध्यान पाठ की ओर केंद्रित करने के लिए मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों को पूछेगा। (अध्यापक एक विद्यार्थी की ओर संकेत करता हुआ)	अध्यापक द्वारा मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों के पूछे जाने पर विद्यार्थी उनके उत्तर निम्न प्रकार से देंगे– 1. इस वृत्त का अर्द्धव्यास 9 cms होगा 2. वृत्त की परिधि और व्यास में 22/7 का संबंध होता है। 3. आयताकार आकृति का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई वर्ग इकाई होता है। 4. मेज का क्षेत्रफल 12 वर्ग मीटर होगा।	चाक, डस्टर, लपेट, श्यामपट्ट आदि।	1. एक वृत्त का व्यास 18 cms है तो इसका अर्द्धव्यास कितना होगा? 2. वृत्त की परिधि और व्यास में क्या संबंध होता है? 3. आयताकार आकृति का क्षेत्रफल निकालने का क्या सूत्र है? 4. यदि आपकी मेज की लंबाई 4 मीटर तथा चौड़ाई 3 मीटर हो, तो मेज का क्षेत्रफल कितना होगा?
	अवबोध	(अध्यापक 14 cms. व्यास का कार्ड बोर्ड का बना वृत्त प्रस्तुत करते हुए प्रश्न करना है) उद्देश्य कथनः "तो छात्रों आज हम वृत्त का क्षेत्रफल निकालने में प्रयुक्त सूत्र की स्थापना करेंगे एवं इस पर आधारित प्रश्नों को हल करने का अभ्यास करेंगे"	5. छात्र निरुत्तर हो जाते हैं अथवा संतोषजनक उत्तर नहीं दे पाते हैं।	कार्डबोर्ड की बनी वृत्ताकार आकृति प्रश्नोत्तर प्रविधि प्रश्न–एक वृत्त जिसका व्यास 14	

टिप्पणी

समस्या का विश्लेषण	रुचि	1. प्रश्न में हमें क्या दिया है? 2. प्रश्न में क्या ज्ञात करना है? 3. वृत्त का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे? 4. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का क्या सूत्र है? अध्यापक कथनः तो सर्वप्रथम हम वृत्त का क्षेत्रफल निकालने संबंधी सूत्र का निर्धारण करेंगे।	1. एक वृत्त जिसका व्यास 14 cms है। 2. वृत्त का क्षेत्रफल निकालना है। 3. सूत्र का प्रयोग करके। 4. छात्र निरुतर हो जाते है	विश्लेषण विधि	अर्द्धव्यास और व्यास में क्या संबंध होता है?
सूत्र का निर्धारण	ज्ञान	अध्यापक 14 cms. व्यास का कार्डबोर्ड का बना वृत्त प्रस्तुत करता है तथा एक छात्र को बुलाकर वृत्त का व्यास, अर्द्धव्यास, एवं परिधि निकलवाकर उसे श्यामपट्ट पर अंकित करता है।	अन्य छात्र ध्यानपूर्वक सुनते है एवं अक्सर मिलने पर निरीक्षण करते हैं।	 वृत्त का व्यास = 14 cms. अर्द्धव्यास = 7 cms. परिधि = 44 cms.	
समस्या का संश्लेषण		5. दिये गये वृत्त का व्यास कितना है? 6. वृत्त का अर्द्धव्यास कितना होगा? 7. अर्द्धव्यास 7 अर्द्धव्यास 7cms. क्यों है? 8. वृत्त की परिधि कितनी है?	5. व्यास = 14 cms. 6. अर्द्धव्यास = 7 cms. 7. क्योंकि अर्द्धव्यास व्यास का आधा होता है। 8. वृत्त की परिधि 44 cms. है।	संश्लेषण विधि एवं प्रश्नोत्र विधि वृत्त को 16 समान भागों में किस प्रकार काटा गया है?  22 cms.	
कागज का वृत्त	सौंदर्यानुभूति (छात्र रंगीन कागज की बनी आकृति को देखकर प्रसन्न होते हैं) अवबोध	(अब अध्यापक छात्रों के सामने एक रंगीन कागज के वृत्त को 16 समान भागों में काटकर उसको आयताकार रूप में प्रस्तुत करेगा तथा पुनः कुछ छात्रों को बुलाकर उनसे इस आकृति की लम्बाई, चौड़ाई, नपवाकर श्यामपट्ट पर अंकित कर देगा) 9. आयताकार आकृति की चौड़ाई क्या है? 10. आयताकार आकृति की लम्बाई क्या है? 11. इस प्रकार आयताकार आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा?	छात्र शांतिपूर्वक निरीक्षण करते हैं। 9. चौड़ाई = अर्द्धव्यास = 7 cms 10. लम्बाई = परिधि का आधा = 22 cms. 11. क्षे. = ल. × चौ. सूत्र का	आयताकार आकृति की लम्बाई = परिधि का आधा = 22 cms. चौड़ाई = अर्द्धव्यास = 7 cms. आयताकार आकृति का क्षेत्रफल = परिधि का आधा × अर्द्धव्यास = 22 × 7 या, $\frac{1}{2}$ परिधि = π × अर्द्धव्यास चूंकि, आकृति की लम्बाई = π × अर्द्धव्यास या, $\frac{1}{2}$ परिधि = तथा, आकृति की चौ. = अर्द्धव्यास। अतः क्षे. π ×	

टिप्पणी

सौंदर्यानुभूति (छात्र रंगीन कागज की बनी आकृति को देखकर प्रसन्न होते हैं) अवबोध रुचि सामान्यीकरण	(अब अध्यापक छात्रों के सामने एक रंगीन कागज के वृत्त को 16 समान भागों में काटकर उसको आयताकार रूप में प्रस्तुत करेगा तथा पुनः कुछ छात्रों को बुलाकर उनसे इस आकृति की लम्बाई, चौड़ाई, नपवाकार श्यामपट्ट पर अंकित कर देगा) 9. आयताकार आकृति की चौड़ाई क्या है? 10. आयताकार आकृति की लम्बाई क्या है? 11. इस प्रकार आयताकार आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा? 12. अभीष्ट क्षेत्रफल क्या है? 13. इसे हम दूसरे रूप में किस प्रकार लिख सकते हैं। 14. क्षेत्रफल का सामान्य रूप किस प्रकार लिया जा सकता है? 15. सूत्र रूप में इसे किस प्रकार लिख सकते हैं? 16. इस प्रकार दिये गये वृत्त का क्षेत्रफल कितना होगा? 17. वृत्त का क्षेत्रफल निकालने संबंधी सूत्र क्या है?	छात्र शांतिपूर्वक निरीक्षण करते हैं। 9. चौड़ाई = अर्द्धव्यास = 7 cms 10. लम्बाई = परिधि का आधा = 22 cms. 11. क्षे. = ल. × चौ. सूत्र का प्रयोग 12. 22 × 7 अभीष्ट क्षेत्रफल है। 13. $\frac{1}{2}$ परिधि π × अर्द्धव्यास। 14. क्षेत्रफल = π × अर्द्धव्यास × अर्द्धव्यास 15. क्षेत्रफल = πr^2 16. अभीष्ट क्षेत्रफल $= \pi \times (7)^2$ $= 22/7 \times (7)^2$ = 154 वर्ग सेमी. 17. वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$	आयताकार आकृति की लम्बाई = परिधि का आधा = 22 cms. चौड़ाई = अर्द्धव्यास = 7 cms. आयताकार आकृति का क्षेत्रफल = परिधि का आधा × अर्द्धव्यास = 22 × 7 या, $\frac{1}{2}$ परिधि = π × अर्द्धव्यास चूंकि, आकृति की लम्बाई = π × अर्द्धव्यास या, $\frac{1}{2}$ परिधि = तथा, आकृति की चौ. = अर्द्धव्यास। अतः क्षे. π × अर्द्धव्यास × अर्द्धव्यास = π × (अर्द्धव्यास)^2 $\pi \times r^2$ πr^2 विश्लेषण एवं संशोधन विधि	π का मान किसके बराबर होता है?
	आदर्श प्रश्न : एक गाय एक खूंटे से बंधी हुई है। वह खूंटे से 14 मी. की दूरी की घास चर लेती है। बताओ गाय कितने वर्ग मी. जमीन घास चर सकती है? 1. प्रश्न में क्या दिया है? 2. प्रश्न में क्या ज्ञात करना है? 3. गाय खूंटे से अधिक से अधिक कितनी दूरी	1. रस्सी की ल. 14 मीटर 2. घास चरी जाने वाली जमीन का क्षेत्रफल। 3. रस्सी की ल. के बराबर।	प्रश्नोत्तरी प्रविधि आदर्श हलः प्रश्नानुसार, रस्सी की ल. = 14 मी.	अभ्यासार्थ कार्य : उस वृत्त का क्षे. क्या होगा जिनके अर्द्धव्यास क्रमशः 7 मी. तथा 25 मी. है?

प्रश्न का विश्लेषण एवं संश्लेषण	अनुप्रयोग दक्षता/छात्र शीघ्रता एवं शुद्धता से उत्तर देते हैं)		4. गाय जिस पूरे क्षेत्र में घूमेगी वह कैसा क्षेत्र होगा 5. चरी जाने वाली भूमि की आकृति कैसे होगी? 7. प्रश्न में रस्से की लम्बाई, व्यास है अथवा अर्द्धव्यास? 8. यह लम्बाई कितनी है? 9. वृत्ताकार क्षेत्र का अभीष्ट क्षेत्रफल क्या है?		कक्षा कार्यः एक रंगीन फव्वारा अपने चारों ओर 2 मीटर 5 सेमी. तक पानी फेंक सकता है। फव्वारा के पानी से भीग सकने वाली जमीन का क्षेत्रफल क्या होगा? गृह कार्यः छात्र संबंधित अभ्यास के प्रथम पांच प्रश्न हल करके लाएंगे।
पुनरावृत्ति प्रश्न	दृष्टि–कोण एवं व्यक्तित्व के गुण	अध्यापक छात्रों को दिये गए कक्षा कार्य का घूम–घूमकर निरीक्षण करेगा तथा कमजोर छात्रों को प्रोत्साहित करेगा। साथ ही, कक्षा के सामान्य अनुशासन के प्रति भी सजग रहेगा।	छात्र शांतिपूर्वक दिये गए कक्षा कार्य को करने में संलग्न हैं।		

पाठ योजना–1

प्रकरण– वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

सामान्य उद्देश्य

1. छात्रों को गणित के तथ्यों का ज्ञान कराना तथा उनका व्यावहारिक प्रयोग सिखाना।
2. छात्रों में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करना तथा उनमें एकाग्रता, आत्मविश्वास एवं आत्मनिर्भरता का भाव उत्पन्न करना।
3. छात्रों की विचार शक्ति, कल्पना शक्ति, तर्क शक्ति आदि मानसिक शक्तियों का विकास करना।
4. छात्रों में क्रमबद्धतापूर्वक एवं विधिवत रूप से कार्य करने की आदत का निर्माण करना।
5. छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण उत्पन्न करना।

विशिष्ट उद्देश्य

1. कक्षा संबंधी सामान्य उपकरण।
2. गत्ते की कुछ वृत्ताकार आकृतियां।
3. एक चार्ट।
4. ज्यामितीय बॉक्स।

पूर्वज्ञान

छात्रों से यह आशा की जाती है कि वे 'वृत्त की परिधि एवं व्यास में संबंध' से परिचित हैं। साथ ही वे व्यास, परिधि, से भी भली–भांति परिचित हैं।

टिप्पणी

पाठ योजना–2

सामान्य उद्देश्य

1. छात्रों में एकाग्रचित्त होकर कार्य करने की क्षमता उत्पन्न करना।
2. छात्रों में गणितीय ज्ञान को प्रयोग द्वारा व्यावहारिक कुशलता का विकास करना।
3. छात्रों में अनुसंधान प्रवृत्ति जाग्रत करना।
4. छात्रों को चिंतन की मौलिकता, तर्क संगत विधि से निरीक्षण एवं निर्णय करने का अभ्यास करना।
5. गणितीय अध्ययन के प्रति जाग्रत करना।

विशिष्ट उद्देश्य

1. छात्रों की तर्क शक्ति एवं विचार शक्ति का विकास करना।
2. छात्रों को तादात्म्य $a^2–b^2 = (a–b)\ (a+b)$ की जानकारी देना एवं निर्धारण करना।
3. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे इस संबंध का उपयोग गणित की दूसरी शाखाओं की समस्याओं को हल करने में भी कर सकें।

सहायक सामग्री

1. कक्षा संबंधी सामान्य उपकरण
2. कार्डबोर्ड का बना वर्ग
3. चार्ट
4. ज्यामितीय उपकरण

पूर्व ज्ञान

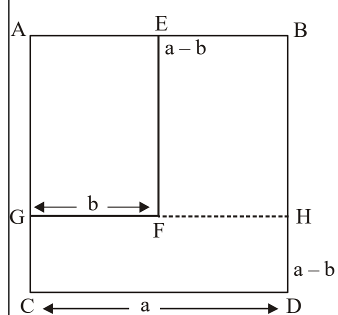
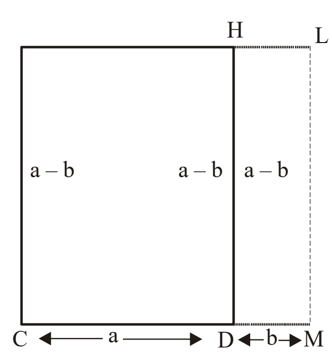
छात्रों से यह अपेक्षा की जाती है कि उन्हें बीजगणित की मूलभूत प्रक्रियाओं, जैसे–जोड़, घटना, गुणा व भाग इत्यादि का ज्ञान होगा। साथ ही, वे वर्ग एवं आकृतियों का क्षेत्रफल निकालना भी जानते होंगे।

तालिका 1.2 मूल्यांकन उपागम में पाठ योजना के घटक–2

टिप्पणी

पाठ्य–वस्तु	प्राप्य उद्देश्य एवं अपेक्षित व्यावसायिक परिवर्तन	शिक्षक प्रक्रिया	छात्र प्रक्रिया	सहायक सामग्री, विधि प्रविधि एवं श्यामपट्ट कार्य	मूल्यांकन
पूर्व ज्ञान पर आधारित प्रश्न	ज्ञान छात्र पूर्वज्ञान की स्मृति करते हैं उद्देश्य कथनः तो छात्रों आज हम इस प्रकार की समस्याओं को बीजगणित की सहायता से संक्षिप्त विधि से हल करना सीखेंगे।	अध्यापक छात्रों के पूर्व ज्ञान का मूल्यांकन करने हेतु तथा उसे नवीन ज्ञान से संबद्ध करके उनका अवधान पाठ की ओर केंद्रित करने के लिए मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों को पूछेगा	अध्यापक द्वारा मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों के पूछे जाने पर विद्यार्थी उनके उत्तर निम्न प्रकार से देंगें– 1. a^2 2. b^2 3. आयात का क्षेत्रफल 32 सेमी. होगा। 4. वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग सेमी. होगा 5. a^2 सेमी. होगा 6. आयात का क्षेत्रफल $= a \times b$ होगा।	चॉक, डस्टर, लपेट श्यामपट्ट आदि। प्रश्नोत्तर प्रविधि	1. $a \times a$ का मान क्या होगा? 2. $b \times b$ का मान क्या होगा? 3. एक आयात जिसकी ल. 8cms. है, उसका क्षेत्रफल क्या होगा? 4. एक वर्ग जिसकी भुजा 5 cms. उसका क्षेत्रफल क्या होगा? 5. उस वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा जिसकी भुजा 5 cms. है, 6. उस आयात का क्षेत्रफल कितना होगा जिसकी ल. 9 cms. तथा चौ. 6 cms. हो?
आदर्श–प्रश्न प्रस्तुतीकरण	अवबोध पहले स्वयं पढ़ेगा	आदर्श प्रश्न अध्यापक लपेट श्यामपट्ट पर लिखे प्रश्नों को उसके पश्चात दो–तीन छात्रों से पढ़वाएगा ताकि छात्रों के सहयोग से समस्या का भली प्रकार विश्लेषण किया जा सके। 1. दिए गए प्रश्नों में क्या समानता है? 2 इन प्रश्नों को एक सामान्य रूप किस प्रकार दिया जा सकता है?	7. छात्र असफल रहते हैं। 8. छात्र निरुत्तर हो जाते हैं विश्लेषण विधि 1. सभी प्रश्न दो वर्गों के अंतर के रूप में हैं। 2. पहले पद को a^2 तथा दूसरे पद को b^2 लिखकर।	1. $(16)^2 - (25)^2$ 2. $(125)^2 - (56)^2$ 3. $(625)^2 - (144)^2$ 4. $(55)^2 - (33)^2$	7. $5^2 – 3^2$ का मान बताओ? 8. $(101)^2 – (99)^2$ का हल कीजिए।

टिप्पणी

समस्या का विश्लेषण		3. इस प्रकार प्रश्नों का सामान्य रूप क्या हुआ? अध्यापक संकेत इस प्रकार हमारी समस्या का स्वरूप $a^2 - b^2$ हुआ। अब हम इसी प्रकार की समस्याओं को हल करने की विधि का अध्ययन करेंगे।	3. $a^2 - b^2$ सामान्य रूप है।	
कार्डबोर्ड का बना वर्ग	रुचि	(अध्यापक कार्डबोर्ड का बना वर्ग दिखाते हुए [जिसकी एक भुजा 9cm. है] प्रश्न पूछता है।) 4. वर्ग ABCD का क्षेत्रफल कितना है? 5. दूसरा वर्ग कौन सा है?	4. a^2 5. AEFG दूसरा वर्ग है।	
आकृति में से AEFG भाग का काटना		6. इस वर्ग का क्षेत्रफल कितना है? 7. यदि इस पूरी आकृति में से AEFG भाग को अलग काट दिया जाए तो शेष भाग कौन सा होगा? 8. इस शेष भाग का क्षेत्रफल कितना होगा?	6. b^2 7. शेष भाग EBCDGF होगा। 8. $a^2–b^2$	पूरी आकृति में से AEFG भाग को कैसे अलग करेंगें?
पुनः BHFE भाग को काटकर इसे शेष भाग GCDH के साथ रखना	सौंदर्यानुभूति (छात्र अध्यापक की सफाई से काटी गई आकृतियों की प्रशंसा करते हैं)	(अध्यापक पुनः BHEF भाग को काटेगा तथा इसे शेष बचे आयत GCDH के साथ मिलाकर रखेगा जिससे BE भुजा DH के साथ मिल जाए) 9. इस प्रकार अभीष्ट आकृति क्या है? 10. यह आकृति किस प्रकार की है? 11. आयत GLCM की लम्बाई कितनी है? 12. इसकी चौड़ाई कितनी है?	9. अभीष्ट आकृति GLCM है। 10. यह आयताकार है। 11. $(a + b)$ 12. $(a – b)$	

टिप्पणी

		13. इस आयत का क्षे. कितना होगा?	13. $(a + b)$ $(a - b)$ क्षेत्रफल होगा।	विश्लेषण एवं विश्लेषण विधि	
		14. इससे आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?	14. निष्कर्ष रूप में हम हम सकते हैं कि– a^2-b^2 $=(a+b)(a-b)$		आयत के क्षेत्रफल का क्या सूत्र है?
चार्ट (x^2-y^2) का प्रदर्शन		अध्यापक एक दूसरे चार्ट x^2-y^2 को प्रदर्शित करेगा तथा उपरोक्त समान प्रक्रिया को दोहराकर छात्रों से निष्कर्ष निकलवाएगा कि–x^2-y^2 $= (x+y)(x-y)$ (अध्यापक छात्रों से उपरोक्त दोनों तादाम्यों की वास्तविक गणना करने का कहेगा)		प्रश्नोत्रर प्रविधि	
		15. $(a+b)(a-b)$ का मान बताइए।	15. a^2-b^2	(i) $a+b$ $a-b$ a^2+ab $-ab-b^2$ a^2-b^2	
		16. $(x+y)$ $(x-y)$ का मान बताइए	16. x^2-y^2		
		17. $(c+d)$ $(c-d)$ का मान बताइए	17. c^2-d^2		
		18. $(f+m)$ $(f-m)$ का मान क्या होगा।	18. f^2-m^2	(ii) $x+y$ $x-y$ x^2+xy $-xy-y^2$ x^2-y^2	दो राशियों के वर्गों का अंतर किसके बराबर होता है?
		19. इन सभी परिणामों के दायें पक्ष में क्या विशेषता है?	19. ये सभी दो राशियों के वर्ग के अंतर है।		
नियमीकरण	सामान्यीकरण	20. इन सभी प्रश्नों के बायें पक्ष की क्या विशेषता है?	20. ये सभी प्रश्न क्रमागत राशियों के जोड़ एवं घटाने का गुणनफल है।		
		21. इन प्रश्नों की भाषा क्या हो सकती है? (अध्यापक लपेट श्यामपट्ट पर लिखे दो प्रश्न अभ्यास कार्य के लिए देगा।	21. दो राशियों के वर्गों का अंतर उनके जोड़ एवं अंतर का गुणनफल होता है।		
प्रश्न का विश्लेषण एवं संश्लेषण		1. दिए गए प्रश्नों में पहली राशि क्या है?	1. ax^2 पहली राशि है।		आदर्श प्रश्न 1 (ax^2-y^2) का मान ज्ञान कीजिए।
		2. दूसरी राशि क्या है?	2. y^2 दूसरी राशि है।		
		3. ax^2 किस राशि का वर्ग है?	3. $3x$ का वर्ग है।		

टिप्पणी

प्रश्न का हल	ज्ञान का प्रयोग	4. y^2 किस राशि का वर्ग है? 5. ay^2 को वर्ग के रूप में लिखिए? 6. y^2 को वर्ग के रूप में लिखिए? 7. प्रश्न का आदर्श रूप क्या हुआ है? 8. अभिष्ट उत्तर कितना है?	4. y का वर्ग है। 5. $(3x)^2$ 6. $(y)^2$ 7. $ax^2 - y^2$ $= (3x+y)\,(3x-y)$ 8. $(3x+y)\,(3x-y)$	विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि $ax^2 - y^2$ $= (3x)^2 - (y)^2$ $= (3x+y) - (3x-y)$	
आदर्श प्रश्न प्रस्तुतीकरण		(अध्यापक दूसरे प्रश्न को पहले स्वयं पढ़ेगा फिर दो–तीन छात्रों से पढ़वाएगा)			
	कौशल (छात्र पूछे गए प्रश्नों का शीघ्रता एवं शुद्धता से उत्तर देते हैं)	1. दिए गए प्रश्न में पहली राशि क्या है? 2. दूसरी राशि क्या है? 3. प्रश्न को कैसे हल करेंगे? 4. दोनों राशियों का जोड़ कितना है। 5. अंतर कितना है? 6. आगे क्या करना है? 7. गुणा करने पर कितना प्राप्त हुआ? 8. इस प्रकार अभीष्ट उत्तर क्या हुआ?	1. 101 पहली राशि है। 2. 99 दूसरी राशि है। 3. एक बार दोनों राशियों का जोड़ ज्ञात करेंगे फिर घटाएंगे। 4. 200 जोड़ है। 5. अंतर 2 है। 6. इन दोनों का गुणनफल ज्ञात करेंगे। 7. गुणनफल 400 आया। 8. $(101)^2 - (99)^2$ $= 400$	आदर्श प्रश्न 2 हल करो– $(101)^2 - (99)^2$	$m^2 - n^2$ का मान कितना होगा? कक्षा कार्यः निम्न प्रश्नों को हल करो– (i) $a^2 - 9$ (ii) $(16)^2 - (5)^2$ (iii) $(91)^2 - (9)^2$
पुनरावृत्ति	दृष्टिकोण एवं व्यक्तित्व के गुण	अध्यापक छात्रों को दिए गए कक्षा कार्य का घूम–घूम कर निरीक्षण करेगा तथा कमजोर छात्रों को व्यक्ति–गत रूप से प्रोत्साहन देगा। साथ ही, कक्षा का सामान्य अनुशासन बनाये रखने का प्रयास करेगा।	छात्र शांतिपूर्वक दिए गए कक्षा कार्य को करने में संलग्न हैं।		गृह कार्य : छात्र संबंधित अभ्यास के प्रथम दस प्रश्न हल करके लाएंगे।

टिप्पणी

पाठ योजना–3

प्रकरण– किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के सामानांतर तथा उसकी आधी होती है।

सामान्य उद्देश्य

1. छात्रों की तर्क शक्ति, चिंतन शक्ति, विश्लेषण शक्ति आदि शैक्षिक शक्तियों का विकास करना।
2. छात्रों में विशिष्ट रूप में स्वच्छंतापूर्वक कार्य करने की आदत का विकास करना।
3. छात्रों में एकाग्रता, सत्यता एवं ईमानदारी जैसे चारित्रिक गुणों का विकास करना।
4. छात्रों में ज्यामिति के कुछ व्यावहारिक उपयोगों से परिचित कराना।
5. छात्रों में रेखागणित के प्रति रुचि उत्पन्न करना।

विशिष्ट उद्देश्य

छात्रों में यह सिद्ध करने की क्षमता उत्पन्न करना कि "किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानांतर तथा उसकी आधी होती है।"

पूर्व ज्ञान

छात्रों से यह अपेक्षा की जाती है कि उन्हें निम्न तथ्यों का ज्ञान होगा–

1. त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की दशाएं।
2. समानांतर रेखाओं की विशेषताएं।
3. दो बराबर तथा समानांतर रेखाओं के सिरों को मिलाने वाली रेखाएं भी आपस में बराबर और समानांतर होती हैं।

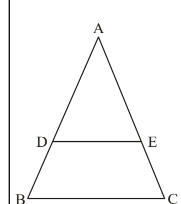
सहायक सामग्री

ज्यामितीय बॉक्स

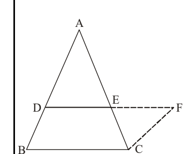
तालिका 1.3 मूल्यांकन उपागम में पाठ योजना के घटक–3

पाठ्य–वस्तु	प्राप्य उद्देश्य एवं अपेक्षित व्यावसायिक परिवर्तन	शिक्षक प्रक्रिया	छात्र प्रक्रिया	सहायक सामग्री, विधि प्रविधि एवं श्यामपट्ट कार्य	मूल्यांकन
पूर्व ज्ञान पर आधारित प्रश्न	ज्ञान छात्र पूर्वज्ञान की स्मृति करते हैं	अध्यापक छात्रों के पूर्व ज्ञान का मूल्यांकन करने हेतु तथा उसे नवीन ज्ञान से संबद्ध करके उनका अवधान	अध्यापक द्वारा मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों के पूछे जाने पर विद्यार्थी उनके उत्तर निम्न प्रकार से देंगें– 1. दोनों रेखाएं	चॉक, डस्टर, लपेट श्यामपट्ट आदि।	1. यदि दो
	पाठ की ओर	समानांतर होंगी।		रेखाओं को एक	

टिप्पणी

		केंद्रित करने के लिए मूल्यांकन स्तंभ में लिखित प्रश्नों को पूछेगा।			त्रिर्यक रेखा काटे और इस प्रकार बने एकांत कोण बराबर हों तो उन रेखाओं में आपस में कैसा संबंध होता है?
			2. दोनों रेखाएं बराबर तथा समानांतर होंगी।		2. दो बराबर तथा समानांतर रेखाओं के सिरों को मिलाने में आपस में क्या संबंध होगा?
			3. वह समानांतर चतुर्भुज होता है।		3. यदि किसी चतुर्भुज की आमने–सामने की भुजाएं आपस में बराबर तथा समानांतर हों तो वह कैसा चतुर्भुज कहलाता है?
			4. छात्र असंतोषजनक उत्तर देते हैं।	प्रश्नोत्तर प्रविधि	4. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा का त्रिभुज की तीसरी भुजा से क्या संबंध होता है?
साध्य प्रस्तुतीकरण	अवबोध	उद्देश्य कथन–तो छात्रों आज हम सैद्धांतिक रूप से यही सिद्ध करेंगे कि, "किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समानांतर तथा उसकी आधी होती है।"			
साध्य विश्लेषण		(अध्यापक दी गई साध्य को पहले स्वयं पढ़ेगा उसके पश्चात दो–तीन विद्यार्थियों से उसे पुनः पढ़वाएगा ताकि साध्य का विश्लेषण छात्रों के सक्रिय सहयोग से किया जा सके)			
	अवबोध	1. इस साध्य में हमें क्या दिया है?	1. एक त्रिभुज ABC तथा इसकी दो भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिंदुओं D तथा E को		

टिप्पणी

			मिलाने वाली रेखा DE		
		2. क्या सिद्ध करना है?	2. सिद्ध करना है कि DE रेखा आधार BC के समानांतर तथा उसकी आधी होगी।	विश्लेषण एव संश्लेषण विधि	
		3. एक रेखा दूसरी रेखा की आधी के बराबर कब सिद्ध की जा सकती है?	3. जब एक का दुगुना दूसरी के बराबर हो।		एक रेखा दूसरी रेखा की आधी कब सिद्ध की जा सकती है?
		4. इस प्रकार DE, BC के बराबर कब सिद्ध की जा सकती है?	4. जब DE का दुगना BC के बराबर सिद्ध कर दिया जाए।		
साध्य संश्लेषण		5. यहां DE का दुगना प्राप्त किया जा सकता है?	5. DE को आगे इतना बढ़ाकर जिससे DE, EF के बराबर हो जाए।		
	रुचि	6. अब DF तथा DE में कैसा संबंध स्थापित हो गया?	6. DF, DE का दुगुना हो गया।		
		7. DE को BC के समानांतर तथा आधा कैसे सिद्ध किया जा सकता है?	7. यदि हम DF को BC के बराबर तथा समानांतर सिद्ध करें।		
		8. इस प्रकार का संबंध किस आकृति में संभव होता है?	8. समानांतर चतुर्भुज में।		
		9. इसलिए आकृति DFBC किस प्रकार की होनी चाहिए?	9. समानांतर चतुर्भुज की।		समानांतर चतुर्भुंज की क्या विशेषताएं होती हैं?
	दक्षता	10. आकृति DFBC को चतुर्भुज बनाने के लिए हमें और क्या रचना करनी होगी?	10. F को C से मिला देंगे।		
रचना		11. चतुर्भुज DFBC को समानांतर चतुर्भुज कैसे सिद्ध किया जा सकता है?	11. भुजाओं DB तथा FC में संबंध स्थापित करके।		
		12. भुजाओं DB तथा FC में क्या संबंध होना चाहिए?			संगत भुजा से आप क्या समझते हैं?
		13. इस पूरी आकृति में DB और किस भुजा			

		के बराबर है? 14. DB, FC के बराबर कैसे सिद्ध की जा सकती है?			
समस्या का विश्लेषण	सौंदर्यानुभूति (अध्यापक द्वारा खींची गई आकृतियों की छात्र प्रशंसा करते हैं)	15. FC तथा AD में क्या संबंध स्थापित किया जाए? 16. FC, AD के बराबर किस दिशा में सिद्ध की जा सकती है?		प्रश्नोत्तर विधि	एकांतर कोण किसे कहते हैं?
		17. भुजाओं FC तथा AB कैसे समानांतर सिद्ध की जा सकती हैं?		विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि	
		18. ये दोनों कोण किस स्थिति में बराबर सिद्ध किए जा सकते हैं?	18. यदि संबंधित Δ FCE तथा Δ ADE को समरूप सिद्ध कर दिया जाए।		
		19. इस प्रकार FC तथा AD को बराबर एवं समानांतर सिद्ध करने के लिए क्या अभीष्ट है?	19. दोनों Δ FCE तथा Δ ADE को समरूप सिद्ध करना।		
समस्या का संश्लेषण	ज्ञान का प्रयोग	20. दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की कितनी शर्तें हैं?	20. तीन प्रमुख शर्तें हैं (i) SSS = SSS (ii) AAS = AAS (iii) SAS = SAS		दो त्रिभुजों किन–किन दशाओं में अनुरूप होते हैं?
साध्य उत्पत्ति	ज्ञान तथा अवबोध	21. Δ FCE तथा Δ ADE में क्या बराबर है?	21. DE=FE (रचनाएं) AE = EC (दिया है) $\angle$AED= $\angle$FEC (सम्मुख कोण)	प्रश्नोत्तर प्रविधि	सम्मुख कोण किसे कहते हैं?
		22. अतः Δ FCE तथा Δ ADE में क्या संबंध हुआ?	22. Δ FCE = Δ ADE		
		23. जब Δ FCE = Δ ADE तब $\angle$ACF तथा $\angle$CAB आपस में कैसे कोण हैं?	23. $\angle$ACF $\angle$CAB		
		24. $\angle$ACF तथा $\angle$LAB कैसे कोण हैं?	24. एकांतरकोण हैं?	श्यामपट्ट सारांश दिया है– Δ ABC तथा इसकी दो भुजाओं AB तथा AC के मध्य बिंदुओं D तथा E को मिलाने वाली सरल रेखा DE सिद्ध करना है– कि DE= $\frac{1}{2}$ BC तथा	
	कौशल	25. जब दोनों एकांतर कोण $\angle$ACF तथा $\angle$CAB बराबर हैं तब भुजा FC AB आपस में	25. इस स्थिति में भुजा FC, AB के समान्तर होगी।		

टिप्पणी

टिप्पणी

		कैसी हैं?		$DE \parallel BC$	
		26. इसी प्रकार जब $\Delta FCE = \Delta ADE$ तब भुजा FC तथा AD में आपस में क्या संबंध होगा?	26. भुजा FC=AD		
संश्लेषण		27. चूंकि भुजा AD=DB तब भुजा DB तथा FC में आपस में क्या संबंध होगा?		रचना–DE को आगे इतना बढ़ाया कि DE=EF, F को C से मिलाया। उपपत्तिः	त्रिभुजों के अनुरूप होने की प्रथम शर्त क्या है?
		28. अब, चूंकि चतुर्भुज DFCB में भुजा DB और FC आपस में बराबर तथा समानांतर हैं, तो चतुर्भुज DFCB किस प्रकार का चतुर्भुज होगा?	28. चतुर्भुज DFCB एक समानांतर होगा	ΔEFC तथा ΔADE में DE=EF (रचना) AE=EC (दिया है) $\angle ACF = \angle FEC$ (सम्मुख कोण)	त्रिभुजों के अनुरूप होने की द्वितीय शर्त क्या है? त्रिभुजों के अनुरूप होने की तीसरी शर्त क्या है?
	सामान्यीकरण	29. अतः भुजा DF तथा BC आपस में कैसी है?	29. भुजा DF, BC के बराबर तथा समानांतर है	$\therefore \Delta EFC = \Delta ADE$ अतः $\angle ACF = \angle CAB$	कक्षा कार्यः 1. एकांतर कोण किसे कहते हैं?
		30. भुजा DF तथा DE में क्या संबंध है?	30. $DE = \frac{1}{2} DF$	(एकांतर कोण) $\therefore AB \parallel CF$ तथा AD=DB लेकिन AD=DB	2. संगत भुजा से क्या समझते हो? 3. समान्तर चतुर्भुज किसे कहते हैं?
		31. इस प्रकार भुजा DE तथा BC में क्या अभीष्ट संबंध स्थापित हुआ?	31. अतः $DE = \frac{1}{2} BC$ तथा $DE \parallel BC$	अतः FC=DB परंतु ये दोनों समानांर भी हैं। $\therefore FC \parallel BC$ तथा $DF \parallel BC$	4.दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की क्या शर्तें हैं। 5. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं
पुनरावृत्ति प्रश्न	दृष्टिकोण एवं व्यक्तित्व के गुण	अध्यापक कक्षा में घूम–घूमकर यह निरीक्षण करेगा कि छात्र साध्य का श्यामपट्ट सारांश ठीक से अपनी कापियों में नोट कर रहे हैं अथवा नहीं। साथ ही, अत्यधिक कमजोर छात्रों को व्यक्गित प्रोत्साहन देते हुए कक्षा के सामान्य अनुशासन को भी बनाये रखने का प्रयास करेगा।	छात्र शांतिपूर्वक ध्यान मग्न होकर साध्य की आकृति बनाने एवं उपपत्ति कार्य लिखने में संलग्न है।	$(\because DE = \frac{1}{2} DF)$ अतः $DE = \frac{1}{2} BC$ तथा $DF \parallel BC$ Q.E.D.	के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तथा तीसरी भुजा में क्या संबंध होता है? गृह कार्य–छात्रों को इसी सिद्धांत पर आधारित उप–प्रमेय गृह कार्य के लिए दी जाएगी।

1.4.2 गणित शिक्षण के लिए शैक्षणिक दृष्टिकोण

गणित को पढ़ाने की कुछ रणनीतियां हैं जैसे प्रेरक–कटौती, विश्लेषण–संश्लेषण, समस्या समाधान, खोज, गतिविधि आदि जो शिक्षार्थी को उनके ज्ञान के निर्माण में मदद करते हैं। इन रणनीतियों का उद्देश्य शिक्षण–सीखने को अधिक आकर्षण और प्रभावी बनाना है। आप शिक्षार्थियों की जरूरतों के साथ–साथ सामग्री के लिए इसकी प्रासंगिकता के आधार पर एक विशेष रणनीति का चयन कर सकते हैं। शिक्षण सीखने के गणित की कुछ रणनीतियां इस प्रकार हैं।

गणित शिक्षण की विभिन्न विधियां

गणित शिक्षण में मुख्यतः निम्नलिखित विधियों का प्रयोग किया जाता है–

1. विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि,
2. आगमन तथा निगमन विधि,
3. ह्यूरिस्टिक प्रणाली,
4. प्रयोगशाला विधि एवं
5. परियोजना विधि।

विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि

विश्लेषण एवं संश्लेषण, गणित शिक्षण की दो प्रमुख विधियां हैं। इनका प्रयोग अधिकतर रेखागणित के शिक्षण में किया जाता है। यह तर्कशास्त्र की विधि है। विश्लेषण विधि में अज्ञात से अपना तर्क प्रारंभ करके हम ज्ञात पर पहुंचते हैं; जबकि संश्लेषण विधि में हम ज्ञात से अपना तर्क प्रारंभ करके अज्ञात पर पहुंचते हैं। इस प्रकार, विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि में हम क्रमशः 'अज्ञात से ज्ञात की ओर' तथा 'ज्ञात से अज्ञात की ओर' शिक्षण सूत्रों का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि हमें।. B और C में संबंध स्थापित करना है तो संश्लेषण विधि में हम तर्क करते हैं, क्योंकि। सत्य है, इसलिए B सत्य होगा, इसीलिए C भी सत्य होगा। लेकिन विश्लेषण विधि में हम इसी कथन को इस प्रकार तर्क करते हैं कि C के सत्य होने के लिए B सत्य होना चाहिए, B के सत्य होने के लिए। सत्य होना चाहिए और क्योंकि। हमको सत्य ज्ञात है, इसलिए C सत्य हुआ।

विश्लेषण विधि में किसी जटिल समस्या को सरल समस्याओं में विभक्त किया जाता है। इन सरल समस्याओं को बालक सरलता से हल कर सकते हैं तथा समझ भी सकते हैं। विश्लेषण कार्य अधिक होने के कारण सुंदर नहीं लगता लेकिन यह ही एक ऐसी विधि है, जो गणितीय क्रिया के प्रत्येक पहलू का पूरा विवरण देती है। भले ही बालक इस विधि से काम करने में पहले कम सफलता प्राप्त करें फिर भी, यह विधि कमजोर विद्यार्थियों को अच्छी लगती है, क्योंकि इसमें वे अधिकतर कार्य स्वयं करते हैं। ऐसा ज्ञान उनके लिए स्थायी होता है।

टिप्पणी

संश्लेषण विधि में जब कभी हमें प्रमेय का सत्यापन करना होता है तो हम अनुमान के आधार पर ही निष्कर्ष निकालते हैं। संश्लेषण में एक कथन की सत्यता की जांच तो होती है परंतु इससे प्रस्तुत पाठ का सही तथा वास्तविक ढांचा ज्ञात नहीं होता है। इस प्रकार संश्लेषण विधि प्रमेय का सत्यापन तो करती है परंतु उसकी व्याख्या नहीं करती।

विश्लेषण और संश्लेषण विधियों को निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है–

उदाहरण 1.1

यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तो सिद्ध करो

$$\frac{ac+2b^2}{cb}=\frac{c^2+2bd}{dc}$$

हलः संश्लेषण विधि के अनुसार – (ज्ञात से अज्ञात की ओर)

यहां $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (ज्ञात है)

दोनों ओर $\frac{2b}{c}$ जोड़ने पर

$$\frac{a}{b}+\frac{2b}{c} = \frac{c}{d}+\frac{2b}{c}$$

सरल करने पर,

$$\frac{ac+2b^2}{bc} = \frac{c^2+2bd}{cd}$$

यहां पर स्पष्ट नहीं है कि $2b/c$ क्यों जोड़ा गया है। चूंकि इससे निष्कर्ष प्राप्त किया जा सकता है, अतः $2b/c$ जोड़ना सही है। विद्यार्थियों को $2b/c$ जोड़ना रटकर याद करना पड़ता है।

विश्लेषण विधि के अनुसार– (अज्ञात से ज्ञात की ओर)

$$\frac{ac+2b^2}{bc}=\frac{c^2+2bd}{cd}$$ सत्य होगा।

यदि $\frac{ac+2b^2}{b} = \frac{c^2+2bd}{d}$

यदि $d(ac+2b^2) = b(c^2+2bd)$

यदि $dac + 2b^2d = bc^2 + 2b^2d$

यदि $dac = bc^2$

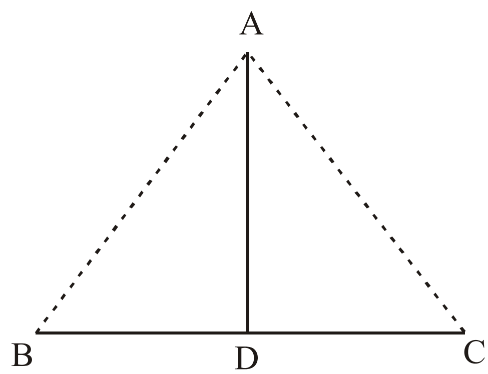
$ad = bc$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ जो कि सत्य ज्ञात है।

उदाहरण 1.2

सिद्ध करो कि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष बिंदु तथा आधार के मध्य बिंदु को मिलाने वाली रेखा आधार पर लंब होती है।

हलः संश्लेषण विधि के अनुसार,



दिया है– एक समद्विबाहु त्रिभुज ।BC जिसमें भुजा ।B =AC तथा ।D माध्यिका के आधार BC पर, इसलिए भुजा BD = DC। सिद्ध करना है– ।D BC पर लंब है।

उपपत्ति– ΔABD तथा ΔACD में

भुजा AB = भुजा ।C (दिया है)

भुजा AD = भुजा DA (उभयनिष्ठ)

भुजा BD = भुजा DC (दिया है)

$\therefore$ दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अतः $\angle ADB = \angle ACD$

चूंकि ये दोनों न्यूनकोण हैं

$\therefore$ प्रत्येक कोण 90^0 का होगा।

अतः ।D, BC पर लंब होगा। (यही सिद्ध करना था)

विश्लेषण विधि के अनुसार (अज्ञात से ज्ञात की ओर)

प्र. 1. हमें क्या सिद्ध करना है?	उ. ।D BC पर लंब होगा।
प्र. 2. AD BC पर लंब कब हो सकता है	उ. जब $\angle ADB$ और $\angle ADC$ प्रत्येक 90^0 के हों
प्र. 3. जब इनमें से प्रत्येक कोण 90^0 का होगा तो इन दोनों में आपस में क्या संबंध होगा?	उ. ये दोनों आपस में बराबर होंगे।
प्र. 4. ये दोनों कोण आपस में कब बराबर सिद्ध किए जा सकते हैं?	उ. जब $\angle ADB$ और $\angle ADC$ सर्वांगसम हों।
प्र. 5. $\angle ADB$ और $\angle ADC$ सर्वांगसम सिद्ध करने के लिए यहां क्या–क्या बराबर ज्ञात है?	उ. ।B =AC, BD = DC और ।D = DA उभयनिष्ठ हैं।

यहां हमें ।D को BC पर लंब सिद्ध करना था (जो अज्ञात है) इसे सिद्ध करने के लिए हम इस अज्ञात से चलते–चलते उस ज्ञात (तीन भुजा = तीन भुजा) तक पहुंच जाते हैं, जिसकी सहायता से हम अज्ञात को सिद्ध कर सकते हैं।

टिप्पणी

विश्लेषण विधि की विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. किसी साध्य की उत्पत्ति तथा निर्मेय की रचना, विश्लेषण विधि से ही बोधगम्य होती है।
2. विद्यार्थी स्वयं किसी समस्या का हल अथवा साध्य की रचना व उत्पत्ति खोज लेता है।
3. विद्यार्थी में अन्वेषण करने की क्षमता एवं आत्मविश्वास की भावना का विकास होता है।
4. बालकों में तर्क शक्ति, विचार शक्ति और निर्णय शक्ति का विकास होता है।
5. इसके द्वारा प्राप्त ज्ञान स्थायी होता है।
6. साध्य की उत्पत्ति बालक के लिए रहस्यात्मक नहीं रह पाती।
7. इस विधि में स्पष्ट करने की क्षमता निहित है।

सीमाएं– इस विधि की मुख्य सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि से हल ज्ञात करने में अधिक समय लगता है।
2. इस विधि में सीखने की मात्रा संश्लेषण विधि की तुलना में कम होती है।
3. यह विधि छोटे बालकों के लिए अधिक उपयोगी नहीं है।
4. प्रत्येक अध्यापक इस विधि का सफलतापूर्वक प्रयोग नहीं कर सकता।
5. इस विधि के प्रयोग से निर्धारित समय में पाठ्यक्रम को समाप्त नहीं किया जा सकता है।

संश्लेषण विधि की विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. यह विधि सरल, सूक्ष्म और क्रमबद्ध है।
2. इस विधि द्वारा प्रस्तुत हल अथवा उत्पत्ति छात्रों को सहज ही समझ में आ जाती है।
3. विश्लेषण विधि के पश्चात संश्लेषण विधि का उपयोग आवश्यक है। यह विधि विश्लेषण विधि की पूरक है।

4. यह विधि मनोवैज्ञानिक है। इसमें प्रयुक्त शिक्षण सूत्र 'ज्ञात से अज्ञात की ओर' विद्यार्थियों के लिए सुविधाजनक है।
5. यह विधि विश्लेषण विधि से सरल है।

टिप्पणी

सीमाएं— इस विधि की मुख्य सीमाएं निम्नलिखित हैं—

1. किसी साध्य अथवा समस्या का हल संश्लेषण विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता।
2. यह विधि सिद्ध तो कर सकती है किंतु समझा नहीं सकती।
3. इस विधि से छात्रों की तर्क शक्ति, निर्णय शक्ति और सोचने की शक्ति का विकास नहीं हो सकता।
4. इस विधि द्वारा प्राप्त ज्ञान स्थायी नहीं होता। यह एक नीरस एवं निर्जीव विधि है।

***तालिका 1.4** संश्लेषण और विश्लेषण विधियों की तुलना*

	संश्लेषण विधि	विश्लेषण विधि
1.	इसमें 'ज्ञात से अज्ञात की ओर' आगे बढ़ते हैं।	इसमें 'अज्ञात से ज्ञात की ओर' शिक्षण सूत्र का प्रयोग करते हैं।
2.	प्रक्रिया के छोटे–छोटे भागों को मिलाकर एक संयुक्त इकाई के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।	प्रक्रिया को छोटे–छोटे भागों में विभक्त कर लिया जाता है।
3.	इसमें अध्यापक अधिक क्रियाशील रहता है तथा विद्यार्थी निष्क्रिय रहते हैं।	इसमें अध्यापक और विद्यार्थी दोनों ही चिंतन क्रिया में भाग लेते हैं।
4.	इस विधि के प्रयोग से विद्यार्थियों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास नहीं होता।	यह एक वैज्ञानिक और अनुसंधान की विधि है।
5.	यह एक तार्किक व्याख्या की विधि है।	यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है।
6.	इसमें विद्यार्थी को पहले से तैयार सामग्री उपलब्ध हो जाती है तथा अधिक परिश्रम नहीं करना पड़ता।	इसमें विद्यार्थी ज्ञान की खोज स्वयं करते हैं।
7.	किसी भी समस्या को हल करने में प्रयुक्त विभिन्न क्रियाओं को करने का कोई ठोस कारण नहीं होता।	इसमें समस्या को हल करने में प्रत्येक क्रिया को करने का एक विशेष कारण होता है।
8.	इसमें केवल बालक की स्मृति पर जोर पड़ता है।	इसमे बालक को तर्क एवं निर्णय लेने के अवसर उपलब्ध होते हैं।
9.	यह एक सूक्ष्म और सुंदर विधि है।	यह एक लंबी एवं अटपटी विधि है।
10.	इसमें विद्यार्थियों को विषय का उथला ज्ञान ही प्राप्त होता है।	विद्यार्थियों को विषय का बारीकी के साथ अध्ययन करने का अवसर मिलता है।
11.	यह एक अनियमित विधि है।	यह एक नियमित विधि है।
12.	किसी नियम, सिद्धांत या क्रिया को भूल जाने पर विद्यार्थी उसे पुनः स्मरण करने में असमर्थ होते हैं।	नियम, सिद्धांत या क्रिया के भूल जाने पर विद्यार्थी उसकी फिर खोज कर लेते हैं।
13.	यह एक नीरस और निर्जीव विधि है।	यह एक सजीव और रोचक विधि है।

विश्लेषण विधि के प्रयोग के बिना संश्लेषण विधि का प्रयोग केवल सैद्धांतिक रह जाता है। विश्लेषण विधि के बाद संश्लेषण विधि का प्रयोग करने पर यह बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। वास्तव में यह दोनों विधियां, एक–दूसरे की पूरक हैं, इसीलिए ज्यामिति शिक्षण में पहले विश्लेषण विधि का प्रयोग करना चाहिए बाद में संश्लेषण विधि का।

टिप्पणी

ए. सुलजे के अनुसार, "विश्लेषण एक अनुसंधान की विधि है; जबकि संश्लेषण सुंदर रूप प्रस्तुतीकरण की विधि है।"

प्रो. यंग के अनुसार, "संश्लेषण विधि में सूखी घास के ढेर में से एक सुई या तिनका निकाला या ढूंढ़ा जाता है, जबकि विश्लेषण विधि में स्वयं सुई या तिनका घास के ढेर से बाहर निकलना चाहता है।"

आगमन तथा निगमन विधि

आगमन विधि में हम तर्क करते हुए 'विशिष्ट से सामान्य की ओर' तथा 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' की ओर बढ़ते हैं, जबकि निगमन विधि में 'सामान्य से विशिष्ट की ओर' या 'नियम से उदाहरण की ओर' की ओर चलते हैं। इस प्रकार ये दोनों विधियां एक–दूसरे के विपरीत हैं। सर्वप्रथम अध्यापक को आगमन विधि का ही प्रयोग करना चाहिए, इसके पश्चात निगमन विधि के प्रयोग से वह विद्यार्थियों को काफी लाभ पहुंचा सकते हैं। आगमन विधि द्वारा खोज किए गए नियमों तथा सिद्धांतों को प्रयोग करने की क्षमता, निगमन विधि द्वारा ही मिलती है। जब तक विद्यार्थी स्वयं के परिश्रम से प्राप्त किए गए ज्ञान को भिन्न–भिन्न समस्याओं को हल करने में प्रयोग में नहीं लाते तब तक वह ज्ञान उनके ज्ञान का स्थायी अंग नहीं बन सकता। इस प्रकार का ज्ञान न तो स्थायी ही होता है और न उपयोगी ही। यह ज्ञान केवल परीक्षा में उत्तीर्ण होने में ही सहायक हो सकता है।

आगमन विधि में विद्यार्थियों को स्वयं नियम अथवा सिद्धांतों की खोज करने का अवसर मिलता है। उनके सम्मुख अध्यापक एक ही प्रकार की कुछ समस्याएं प्रस्तुत करता है। विद्यार्थी उनको हल करके उनमें समानता देखते हैं और फिर एक नियम की खोज कर लेते हैं। प्रो. होब्सन के अनुसार, "अर्थात अध्यापक को चाहिए कि वह अपने शिष्यों को ज्ञान का फल तोड़ने के लिए स्वयं पंजों पर उचकने दें।" यह विधि निम्न उदाहरणों द्वारा भली प्रकार समझ में आ जाएगी–

1. एक बच्चा हरे रंग का सेब खाता है, उसे वह खट्टा लगता है। दूसरे दिन वह फिर हरे रंग का सेब चखता है, यह भी खट्टा निकलता है। फिर कभी वह हरे रंग का सेब खाता है, तो वह भी खट्टा ही है। तब विद्यार्थी आगमन विधि द्वारा उदाहरणों से सीख जाता है कि हरे रंग के सेब खट्टे होते हैं। फिर जब वह हरे रंग का सेब देखता है तो बिना खाए ही कह देता है कि हरे रंग का सेब खट्टा होगा। जो ज्ञान इस विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है, वह आगमन विधि द्वारा प्राप्त होता है।
2. परसों सूर्य उदय हुआ था, कल भी हुआ, आज भी हुआ है। इससे यह नियम निकलता है कि कल भी सूर्य उदय होगा। सूर्य अनेक शताब्दियों से उदय होता आया है, अतः आने वाले समय में भी इसी प्रकार उदय होता रहेगा। इस प्रकार के नियम मनुष्य अपने अनुभव तथा उदाहरणों द्वारा बनाता है।

3. कागज का एक टुकड़ा ऊपर आकाश की ओर फेंका तो वह भूमि पर गिरा। ईंट अथवा पत्थर का टुकड़ा भी ऊपर की ओर फेंकने से पुनः पृथ्वी पर ही गिर पड़ता है। इन उदाहरणों से यह परिणाम निकलता है कि सारी वस्तुएं पृथ्वी की ओर आकर्षित होती हैं।
4. इसके विपरीत निगमन विधि में बालकों को नियम पहले ही बता दिए जाते हैं। वह उन्हें रट कर प्रश्नों को हल करते हैं और देखते हैं कि उनका उत्तर ठीक है या नहीं। इस प्रकार से वह बताए गए नियमों को उदाहरणों में प्रयोग करके उनकी पुष्टि कर लेते हैं।

आगमन और निगमन विधियों को निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से और अधिक स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।

उदाहरण 1.3

500 रुपये का ब्याज 3 वर्ष के लिए 5 प्रतिशत वार्षिक दर से निकालो।

हल– आगमन विधि के द्वारा,

$\because$ 100 रु. का 1 वर्ष का ब्याज $= 5$ रु.

$\therefore$ 1 रु. का 1 वर्ष का ब्याज $= \dfrac{5}{100}$ रु.

$\therefore$ 1 रु. का 3 वर्ष का ब्याज $= \dfrac{5\times 3}{100}$ रु.

$\therefore$ 500 रु. का 3 वर्ष का ब्याज $= \dfrac{500\times 5\times 3}{100}$ रु.

$= 75$ रु.

निगमन विधि के द्वारा,

हम जानते हैं कि ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$ (सूत्र)

सूत्र में मान रखने पर $= \dfrac{500\times 5\times 3}{100}$ रु.

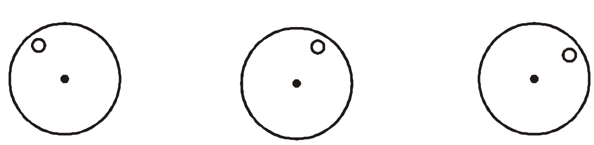
$= 75$ रु.

उदाहरण 1.4

वृत्त की परिधि और व्यास में संबंध ज्ञात करो।

हलः आगमन विधि द्वारा,

उपरोक्त संबंध को ज्ञात करने के लिए विद्यार्थी भिन्न–भिन्न अर्द्ध व्यासों के वृत्त खींचेंगे।



विद्यार्थी अब एकधागे का टुकड़ा लेकर छोटे–बड़े प्रत्येक वृत्त की परिधि पर उसे सावधानीपूर्वक फैलाएंगे ताकिधागा आरंभ के छोर पर मिल जाए।

टिप्पणी

अब विद्यार्थी पैमाने की सहायता से धागे के इस टुकड़े को फैलाकर लंबाई नापेंगे। यही उस वृत्त की परिधि होगी। इस प्रकार सब वृत्तों की परिधि नापकर निम्न सारणी में लिखेंगे–

क्रमांक	परिधि	व्यास	परिधि ÷ व्यास = 3.14
1.			
2.			
3.			

निगमन विधि द्वारा,

निगमन विधि में विद्यार्थियों को यह नियम पहले ही बता दिया जाएगा कि वृत्त की परिधि और व्यास में संबंध का मान 22/7 या 3.14 होता है। इस विधि में उन्हें प्रयोग करने तथा नियम को स्वयं खोजने के अवसर नहीं मिलते। अब विद्यार्थी इस संबंध की पुष्टि केवल कुछ चित्र खींचकर तथा उनकी परिधि एवं व्यास नापकर उपरोक्त नियम की पुष्टि करता है।

आगमन विधि की विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि द्वारा ज्ञान स्थायी एवं उपयोगी होता है।
2. इस विधि में छात्र थकावट महसूस नहीं करते तथा निष्कर्ष तक पहुंचने मेंधैर्य और प्रसन्नता का अनुभव करते हैं।
3. यह विधि बालकों को स्वयं कार्य करने के लिए प्रेरित करती है, जिससे उनमें आत्मविश्वास की भावना में वृद्धि होती है।
4. इस विधि से गणित के नवीन नियम, संबंध, सिद्धांत, निष्कर्ष आदि ज्ञात किए जा सकते हैं।
5. यह विधि छोटी कक्षाओं के लिए विशेष उपयोगी है, क्योंकि 'विशिष्ट से सामान्य की ओर' तथा 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' जैसे मनोवैज्ञानिक एवं व्यावहारिक सिद्धांतों का समावेश किया जाता है।
6. इस विधि में बालकों में गणित के प्रति रुचि एवं उत्सुकता बनी रहती है।
7. विद्यार्थी नियमों, सूत्रों एवं संबंधों को ज्ञात करने के आधारभूत सिद्धांतों से परिचित रहते हैं।

सीमाएं– इस विधि की मुख्य सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि से प्राप्त नियम कुछ सीमा तक ही शुद्ध होते हैं।
2. यह विधि उच्च कक्षाओं में काम में नहीं लायी जा सकती, क्योंकि अनेक ऐसे प्रकरण होते हैं, जिनका आरंभ प्रत्यक्ष उदाहरणों से संभव नहीं है।

3. इस विधि के प्रयोग में अध्यापक को पर्याप्त परिश्रम और समय लगाना पड़ता है।
4. इस विधि का सफल प्रयोग केवल अनुभवी अध्यापक ही कर सकते हैं।
5. इस विधि द्वारा केवल नियम का ही पता लगता है। समस्या को हल करने की क्षमता का विकास इस विधि द्वारा संभव नहीं है।

निगमन विधि की विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि से ज्ञात सूत्र की उपयोगिता का क्षेत्र बहुत व्यापक है।
2. इस विधि में विद्यार्थी को प्रत्येक सूत्र, विधि, नियम या निष्कर्ष को खोजना नहीं पड़ता।
3. इस विधि में छात्रों एवं अध्यापकों को कम परिश्रम करना पड़ता है।
4. नवीन समस्याओं को हल करने के लिए यह विधि अत्यंत उत्तम है।
5. सूत्र या नियम पहले ही ज्ञात होने के कारण प्रश्नों को हल करने में एक विशेष सुविधा होती है।

सीमाएं– इस विधि की मुख्य सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि से अर्जित ज्ञान स्थायी नहीं होता।
2. यह विधि छोटी कक्षाओं के लिए उपयोगी नहीं है।
3. इस विधि में रटने को अधिक बल मिलता है तथा विद्यार्थियों को तर्क एवं अन्वेषण करने के अवसर प्राप्त नहीं होते।
4. यह विधि मनोवैज्ञानिक नहीं है।
5. इस विधि की सफलता आगमन विधि के साथ प्रयोग करने पर निर्भर करती है।

तालिका 1.5 *आगमन और निगमन विधियों की तुलना*

	आगमन विधि	निगमन विधि
1.	इसमें 'विशिष्ट से सामान्य की ओर' तथा 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' दो प्रमुख शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।	इसमें 'सामान्य से विशिष्ट की ओर' शिक्षण सूत्र का प्रयोग किया जाता है।
2.	इसमें एक सामान्य नियम निकाला जाता है।	इसमें सामान्य नियम पहले बता दिया जाता है तथा बाद में उदाहरण से पुष्टि की जाती है।
3.	नियम का अनुसंधान बालक स्वयं करता है जिससे उसमें आत्मविश्वास की भावना का विकास होता है।	नियम के लिए बालक दूसरों पर आश्रित रहता है।
4.	यह छोटे बालकों के लिए अधिक उपयोगी तथा रोचक है।	यह बड़े विद्यार्थियों के लिए उत्तम है।
5.	इस विधि में छात्र सक्रिय रहते हैं।	इस विधि में अध्यापक अधिक क्रियाशील रहते हैं।
6.	यह अध्यापन की श्रेष्ठ विधि है।	यह अध्यापन की उत्तम विधि है।
7.	इस विधि द्वारा किसी तथ्य को सीखने में अधिक समय लगता है।	इस विधि द्वारा सीखने में समय कम लगता है।

टिप्पणी

8.	इस विधि में बालक को स्वतंत्र रूप से सोचने एवं तर्क करने के अवसर मिलते हैं।	इस विधि में चिंतन एवं तर्क करने के अवसर प्राप्त नहीं होते।
9.	यह अनुसंधान का मार्ग है।	यह अनुकरण का मार्ग है।
10.	इसमें नियम के भूल जाने पर विद्यार्थी उसकी पुनः खोज कर सकते हैं।	नियम के भूल जाने पर विद्यार्थी उसे प्रायः फिर से याद नहीं कर पाते।
11.	यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है।	यह एक अमनोवैज्ञानिक किंतु व्यावहारिक विधि है।

आगमन और निगमन विधियां, एक–दूसरे पर आधारित हैं। वास्तव में यह दोनों विधियां एक दूसरे की पूरक हैं। आगमन विधि के प्रयोग से खोज किए गए नियमों एवं सिद्धांतों का पुष्टिकरण, निगमन विधि के प्रयोग से अवश्य करना चाहिए। आगमन विधि द्वारा जो ज्ञान प्राप्त होता है, वह विद्यार्थियों के ज्ञान का अंग तब ही बन सकेगा, जबकि वे उसके द्वारा वास्तविक समस्याओं को हल करेंगे।

ह्यूरिस्टिक प्रणाली (Heuristic Mathod)

इस विधि को अनुसंधान विधि या 'स्वयं ज्ञान विधि' के नाम से भी पुकारते हैं। इस विधि का विकास प्रो. एच.ई. आर्मस्ट्रांग ने किया था। सर्वप्रथम इसका प्रयोग विज्ञान शिक्षण में किया गया परंतु बाद में इसकी उपयोगिता को देखकर इसका प्रयोग अन्य विषयों में भी सफलतापूर्वक किया जाने लगा। जैसा कि इस विधि के नाम से स्पष्ट है, इसमें बालक को अन्वेषक की स्थिति में रख दिया जाता है। ह्यूरिस्टिक शब्द ग्रीक भाषा के 'ह्यूरिस्को' शब्द से निकला है, जिसका अर्थ है, "मैं मालूम करता हूं।" इस शब्द के पीछे एक अंतर्कथा निहित है। 'आर्कमिडीज' ने जब अपने विशिष्ट भार के प्रसिद्ध सिद्धांत को ज्ञात कर लिया तब वह सड़क पर चिल्लाता भागा था 'यूरेका–यूरेका' अर्थात 'मैंने मालूम कर लिया है'। इस कथा के आधार पर 'अपने आप सीखने की विधि को ह्यूरिस्टिक विधि की संज्ञा दी गयी है।'

इस विधि का तात्पर्य बालकों को कम से कम बताने और उन्हें स्वयं अधिक से अधिक खोजकर सत्य को पहचानने के लिए प्रेरित करने से है। इस तथ्य पर हरबर्ट स्पैंसर भी बल देते हैं। उनका कथन है कि "बालकों को जितना कम से कम संभव हो बताया जाए और उनको जितना अधिक से अधिक संभव हो खोजने के लिए प्रोत्साहित किया जाए।"

इस विधि में बालक को अध्यापक बहुत कम बताता है। अध्यापक केवल बालकों के समक्ष समस्याएं रख देता है, जिनको वह पुस्तकों और यंत्रों की सहायता से स्वयं के प्रयत्नों के द्वारा हल करते हैं। आवश्यकता पड़ने पर वह शिक्षकों से परामर्श ले सकते हैं। इस प्रणाली की मुख्य बात यह है कि विद्यार्थी का दृष्टिकोण एक खोज करने वाले की तरह होना चाहिए न कि उस मनुष्य की भांति, जो ज्ञान प्राप्त करने में निष्क्रिय रहता है। यहां एक प्रकार से विद्यार्थी से यह आशा की जाती है कि वह विषय की पुनः खोज करे।

इसका अर्थ यह नहीं है कि जो बातें पहले मालूम हो चुकी हैं, उनसे वह लाभ न उठाएं। "अध्यापक और पाठ्य पुस्तक का यह कार्य है कि जो काम करना है तथा

जो समस्याएं हल करनी हैं, उन्हें इस प्रकार से रखें कि विद्यार्थी को वास्तव में खोज करनी पड़े, साथ ही साथ इस बात का भी ध्यान रखा जाए कि समस्या उसकी शक्ति से बाहर न हो तथा अंत में वह विषय का एक अच्छा ज्ञान प्राप्त कर सके।"

टिप्पणी

– प्रो. यंग (Professor Henry Young)।

गणित के अध्ययन का मूल्य तभी प्राप्त होता है जब विद्यार्थी मुख्य रूप से ह्यूरिस्टिक दृष्टिकोण अपनाता है। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि हम इस विधि की आत्मा को खोकर उसके शरीर पर ही जोर न दें। इस विधि में 'अभ्यास द्वारा सीखना' तथा 'स्वयं करके सीखना' दो प्रमुख शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है। यह विधि निर्माणात्मक है, सूचनात्मक नहीं।

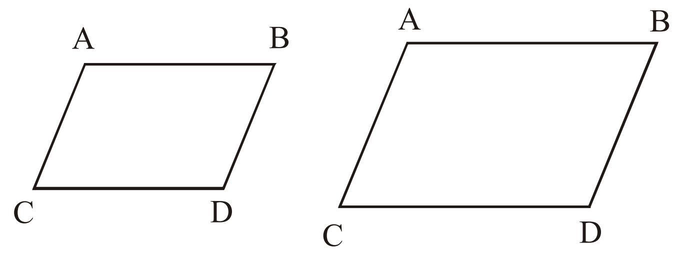
बैस्टावे के अनुसार, "वस्तुतः अन्वेषण विधि का प्रयोजन किसी विधि में उचित प्रशिक्षण दिलाने से है। ज्ञान यहां दूसरा पहलू है।"

प्रो. ऑर्मस्ट्रांग (Professor Armstrong) के अनुसार, "अन्वेषण विधि वह विधि है, जिसमें हम छात्र को अन्वेषक की स्थिति में रखते हैं।"

उदाहरण– समानांतर चतुर्भुज की विशेषताओं की खोज करना।

उपरोक्त समस्या को ह्यूरिस्टिक प्रणाली से हल करने के लिए सर्वप्रथम अध्यापक छात्रों के सम्मुख कागज पर बनी विभिन्न आकार की समानांतर चतुर्भुज की आकृतियां प्रस्तुत करेगा। अब छात्रों से पूछा जाएगा कि वे अपने प्रयासों के आधार पर इन समानांतर चतुर्भुज की आकृतियों की विशेषताओं की खोज करने की प्रक्रिया के विषय में विचार करें। स्पष्ट है कि छात्र इन विभिन्न आकृतियों के अंगों एवं दूसरे तथ्यों का निरीक्षण एवं मापन करना आरंभ कर देंगे। प्रयास करने पर अगर वे यह निष्कर्ष निकाल सकें कि प्रत्येक आकृति की आमने–सामने की भुजाएं समान हैं, साथ ही साथ प्रत्येक आकृति के आमने सामने के कोणों का योग भी बराबर है तब विद्यार्थी आत्मविश्वास के साथ यह सामान्यीकरण कर सकता है कि प्रत्येक समानांतर चतुर्भुज के आमने–सामने की भुजाएं बराबर होती हैं और उनके आमने–सामने के कोणों का योग बराबर होता है।

इस प्रकार, वे स्वयं के प्रयासों के आधार पर समानांतर चतुर्भुज की विशेषताओं की खोज करने में सफलता प्राप्त कर लेते हैं, जिससे उनके अंदर आत्मसंतोष, प्रसन्नता एवं आत्मविश्वास की भावना का विकास होता है।



तालिका 1.6 *असत्य तथा सत्य ह्यूरिस्टिक प्रणाली*

	असत्य ह्यूरिस्टिक प्रणाली	सत्य ह्यूरिस्टिक प्रणाली
1.	क्या यह सत्य है कि वर्ग की चारों भुजाएं समान होती हैं।	वर्ग की भुजाओं के बारे में आप क्या जानते हैं?
2.	क्या तुम्हें याद है कि वृत्त का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र πr^2 होता है?	वृत्त का क्षेत्रफल निकालने का क्या सूत्र है?
3.	क्या A,B,C,D एक समानांतर चतुर्भुज है?	A,B,C,D किस प्रकार की आकृति है?
4.	क्या यह सही है कि समानांतर चतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को काटते हैं?	ऐसे चित्रों के कर्णों के बारे में तुम क्या जानते हो?

टिप्पणी

विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. बालकों में सत्य को जानने की उत्सुकता बनी रहती है तथा वे तथ्यों कोध्यानपूर्वक समझने की आदत डाल लेते हैं।
2. इस विधि में छात्र ज्ञान को एक निष्क्रिय रूप से ही ग्रहण नहीं करता है बल्कि सीखने में वह सक्रिय भाग लेता है। सीखने की क्रिया के बारे में ड्यूवी का कहना है, "मस्तिष्क एक ब्लॉटिंग पेपर के टुकड़े के समान नहीं है, जो किसी द्रव को स्वतः सोखता है औरधारण करता है। यह तो एक जीवधारी है, जिसे अपने भोजन की खोज करनी पड़ती है तथा जो अपनी वर्तमान अवस्था एवं आवश्यकता के अनुसार चुनता है और छोड़ देता है तथा जितना पचा सकता है उतना हीधारण करता है और उसे अपनी शक्ति के रूप में बदल लेता है।
3. विद्यार्थी, तथ्यों एवं प्रमाणों को तर्क–वितर्क की कसौटी पर जांचने के बाद ही स्वीकार करते हैं।
4. विद्यार्थियों में सही प्रकार से आलोचना करने की क्षमता का विकास होता है।
5. इस विधि द्वारा विद्यार्थियों में आत्मविश्वास, आत्मनिर्भरता एवं वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास होता है।
6. विद्यार्थी नवीन ज्ञान की खोज स्वयं करते हैं, अतः ज्ञान स्थायी एवं व्यावहारिक होता है।
7. इस विधि में बालकों को गृह कार्य देने की आवश्यकता नहीं पड़ती है।
8. अध्यापक को बालकों के गुणों तथा अवगुणों को जानने के अवसर मिलते हैं तथा वह उनसे व्यक्तिगत संपर्क स्थापित कर सकता है।
9. इस विधि से बालकों में परिश्रम करने की आदत पड़ती है तथा उत्तरदायित्व की भावना का विकास होता है।
10. विद्यार्थी सीखने की प्रक्रिया में ऐसी अनेक बातों की सही जानकारी प्राप्त कर लेते हैं, जो केवल इसी विधि द्वारा संभव है।

सीमाएं

इस विधि की मुख्य सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. इस विधि द्वारा बालकों से मौलिक खोज की आशा की जाती है परंतु उनका मानसिक विकास अपेक्षित स्तर का नहीं होता कि वे वास्तव में अनुसंधान कर सकें। अतः यह विधि बहुधा असफल रहती है।
2. संपूर्ण पाठ्यक्रम को इस विधि से नहीं पढ़ाया जा सकता।
3. कक्षा में सभी विद्यार्थी समान क्षमता के नहीं होते। अतः इस विधि का प्रयोग वर्तमान कक्षाओं के विद्यार्थियों के लिए संभव नहीं है।
4. इस विधि में खोज कम तथा समय की बर्बादी अधिक होती है।
5. अध्यापक के सम्मुख इस विधि द्वारा अनेक कठिनाइयां प्रस्तुत होती हैं। सभी विद्यार्थियों के लिए सामग्री जुटाना कठिन ही नहीं बल्कि असंभव है।
6. यह विधि केवल ऐसी कक्षाओं के लिए ही उपयोगी है, जिनमें छात्रों की संख्या कम हो।
7. बालक का मस्तिष्क अपरिपक्व होता है, अतः प्रायः वह समस्या का हल ज्ञात नहीं कर पाता।

ह्यूरिस्टिक प्रणाली के प्रयोग करने के संबंध में प्रो. यंग अध्यापकों को निम्नलिखित राय देते हैं– "किसी भी सामग्री को पहले पढ़ाने के ढंग से नहीं बल्कि समस्यात्मक ढंग से समझो। जो बात तुम ढूंढ़ना चाहते हो, यह कोशिश करो कि विद्यार्थी उसका अधिक से अधिक भाग ढूंढ़ कर तुम्हें बताएं। जो कुछ तुम्हें इस प्रकार विद्यार्थी न बता पाए, उसे अपने आप बता दो। कक्षा की समाप्ति पर पुस्तक संदर्भ या पुनरावृत्ति (कक्षा में जो कुछ रूपरेखा दी गई थी), उसे पूरा करने के लिए की जा सकती है। कक्षा के कालांश का अधिकतर समय पहले ऐसे कार्य को देना चाहिए। कालांश के प्रारंभिक भाग में पिछले दिन के कार्य को दोहरना चाहिए, जिसके लिए बीच के समय में पुस्तक से सहायता ली जा चुकी है। अभ्यासार्थ प्रश्न कक्षा में तथा कक्षा से बाहर के लिए देने चाहिए।"

प्रयोगशाला विधि

गणित एक ऐसा विषय है, जो पढ़कर नहीं वरन करके सीखा जाता है। इसी उद्देश्य से इस बात की आवश्यकता का अनुभव होता है कि इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए एक उचित विधि अपनायी जाए। प्रयोगशाला विधि इसके प्रमाण स्वरूप माने जा सकते हैं। यह मुख्यतः 'करके सीखना', 'निरीक्षण द्वारा सीखना', 'मूर्त से अमूर्त की ओर' तथा 'ज्ञात से अज्ञात की ओर' आदि शिक्षण सूत्रों पर आधारित है। एक प्रकार से यह आगमन विधि का ही एक विस्तृत प्रयोगात्मक रूप है। छात्र मात्र किसी बात को सुनते ही नहीं हैं वरन् उसे प्रयोग में लेकर आत्मसात करने का प्रयास करते हैं।

कुछ लोगों के अुनसार प्रयोगशाला विधि व ह्यूरिस्टिक विधि दोनों एक ही हैं। अंतर केवल इतना है कि ह्यूरिस्टिक विधि में हम किसी तथ्य का विश्लेषण करने में

टिप्पणी

अध्यापक द्वारा पूछे गए प्रश्नों की सहायता लेते हैं, जबकि प्रयोगशाला विधि में हम उन प्रयोग की सहायता लेते हैं, जिन्हें छात्र स्वयं प्रयोग में ला रहे होते हैं। इस विधि में सभी बातें विद्यार्थी स्वयं प्रयोग करके सीखता है। प्रयोग में हमारी समस्त इंद्रियां क्रियाशील रहती हैं। यदि एक इंद्रिय की अपेक्षा ज्ञान अनेक इंद्रियों के माध्यम से प्राप्त होगा तो वह अधिक सरलता से हम तक पहुंचेगा और पहुंचने के बाद चिरकाल तक स्थायी भी रहेगा। अतः प्रयोगशाला विधि शिक्षण की एक उत्तम विधि है।

इस विधि में एक प्रयोगशाला की आवश्यकता होती है। जिस प्रकार विद्यार्थी विज्ञान की प्रयोगशाला में प्रयोग करते हैं, उसी प्रकार वह गणित की प्रयोगशाला में भी प्रयोग करते हैं। गणित की प्रयोगशाला में कुछ उपकरणों की आवश्यकता पड़ती है, जैसे– ज्यामिति के यंत्र, सर्वे के यंत्र, ज्यामिति की भिन्न–भिन्न प्रकार की आकृतियों के मॉडल, गोला, बेलन, प्रिज़्म, चार्ट, चित्र, गत्ता, शीशा, ड्राइंग बोर्ड, श्यामपट्ट, स्टेंसिल, गणना की मशीन, ग्राफ पेपर इत्यादि। इस विधि में विद्यार्थी गणित के सिद्धांतों और नियमों की खोज कुछ प्रयोगों द्वारा करते हैं। इस प्रकार प्रयोग के दौरान पूरे समय छात्र क्रियाशील बना रहता है। ज्यामिति में पूरी तरह प्रयोगशाला कार्य ही रहता है, जैसे– रेखा खींचना, कोण बनाना, त्रिभुज या समानांतर चतुर्भुज की रचना करना आदि। इन सभी में हमें ज्यामितीय यंत्रों की आवश्यकता पड़ती है। यह आवश्यक नहीं है कि सारा कार्य प्रयोगशाला में ही हो। आवश्यकतानुसार विद्यार्थियों को किसी भी संबंधित स्थल पर ले जाकर उनसे प्रयोग कराए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ– किसी पहाड़ की चोटी की ऊंचाई ज्ञात करना, छात्रों द्वारा छोड़े गए रॉकेटों की गति ज्ञात करना, नदी को बिना पार किए उसकी चौड़ाई व गहराई ज्ञात करना, खेल के मैदान में दौड़ के ट्रैक बनाना आदि।

प्रयोगशाला विधि का सार यह है कि यहां अध्यापक पृष्ठभूमि (पार्श्व) में ओझल रहता है और समस्याएं स्थूल रूप में सामने प्रस्तुत रहती हैं। कक्षा में पढ़ाते समय वह विद्यार्थियों के सम्मुख रहता है। अलंकारिक भाषा में वह कक्षा का कर्णधार है। प्रयोगशाला कार्य में वह छात्र की कठिनाई को दूर करने में सहायता करता है। इस विधि में बालक के मस्तिष्क को पूर्णतः समझना चाहिए तथा तार्किक पहलू की अपेक्षा मनोवैज्ञानिक पहलू को प्रधानता देनी चाहिए। शिक्षण का केंद्र विषयवस्तु या परीक्षा की तैयारी न होकर बालक की आवश्यकता एवं बालक की ग्रहण शक्ति होनी चाहिए। बालक की रुचि प्रमुख है। हमें अपनी रुचि उन पर लादनी नहीं चाहिए। उपयोगिता में ही बालक की रुचि नहीं होती, वह काम को सफलतापूर्वक करना भी चाहते हैं, जैसे–पहेलियां हल करना। प्रारंभ में बालक यह नहीं समझ पाता कि परिभाषाओं, नियमों, सूत्रों आदि से क्या सूचित होता है तथा उन्हें कैसे प्रयोग में लाया जा सकता है। वह रटने के लिए बाध्य होता है। प्रयोगशाला में उसका कार्य के अनुभव तथा अपनी क्रियाओं से सीधा संबंध होता है। वस्तुओं को अपने हाथ से प्रयोग करने तथा समस्याओं को हल करने में उसे अपनी सफलताओं पर आनंद प्राप्त लेता है तथा उसकी रुचि जागृत होती है। प्रयोगशाला विधि यद्यपि गणित में प्रयोगात्मक, स्कूल एवं कार्यशाला संबंधी पहलुओं पर अधिक जोर देती है, फिर भी इसका सूक्ष्म गणित से कोई विरोध नहीं है। यहां विद्यार्थी स्वयं सामान्यीकरण

करता है। प्रो. यंग के अनुसार, "विचारों का पृथक्करण एवं सामान्यीकरण नींव नहीं है, बल्कि अंतिम उपज है।"

उदाहरण– π का मान ज्ञात करना।

टिप्पणी

सर्वप्रथम शिक्षक, विद्यार्थियों को 7 इंच व्यास का गत्ते का वृत्त काटने को कहेगा। इसके पश्चात यह आदेश दिया जाएगा कि वह उसके किनारे पर एक चिह्न लगाकर उसे सीधी लाइन में घुमाएं, जिससे वह एक पूरा चक्कर घूम जाए और उस लंबाई को नापकर वृत्त की परिधि ज्ञात करें। फिर वृत्त की परिधि को उसके व्यास से भाग देकर भिन्न को ज्ञात करें। विद्यार्थी यह देखेंगे कि यह भिन्न लगभग 22/7 या 3.14 आती है। इस प्रयोग को विद्यार्थियों से भिन्न–भिन्न व्यास वाले वृत्तों द्वारा दोहराकर नीचे बनी तालिका के रूप में उनके व्यास और परिधि को लिखवाकर उसका अनुपात ज्ञात कराया जाएगा। इस प्रकार विद्यार्थी यह नियम ज्ञात कर लेंगे कि किसी भी वृत्त के व्यास और उसकी परिधि का अनुपात लगभग 22/7 होता है जिसे एक ग्रीक अक्षर π द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

वृत्त संख्या	**व्यास**	**परिधि**	π = **परिधि/व्यास**
1.	7 सें.मी.	22 सें.मी.	$\frac{22}{7}$
2.	14 सें.मी.	44 सें.मी.	$44/14 = \frac{22}{7}$
3.	21 सें.मी.	66 सें.मी.	$66/21 = \frac{22}{7}$
4	28 सें.मी.	88 सें.मी.	$88/28 = \frac{22}{7}$

विशेषताएं

इस विधि की मुख्य विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. यह विधि अल्प आयु के बालकों के लिए बहुत उपयोगी है।
2. इस विधि के प्रयोग से बालक अपनी तीनों ज्ञानेंद्रियों आंख, कान, हाथ का प्रयोग कर स्थायी ज्ञान प्राप्त करता है।
3. इसमें 'स्थूल से सूक्ष्म' की ओर 'ज्ञात से अज्ञात' की ओर तथा 'स्वयं करके सीखो' शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।
4. इसमें गुरु–शिष्य संबंध मधुर रहते हैं।
5. यह अन्वेषण करने की प्राकृतिक विधि है।
6. इस विधि द्वारा शिक्षण के मुख्य उद्देश्य 'कौशल' को प्राप्त करने में पर्याप्त सहायता मिलती है।
7. इसमें गणित के नियमों, सिद्धांतों तथा परिभाषाओं का स्पष्ट ज्ञान प्राप्त करना संभव है।

8. विद्यार्थियों में निरीक्षण एवं तर्क करने की क्षमता का विकास होता है।
9. प्रयोगशाला एवं कक्षा के बाहर भी गणित के प्रयोग एवं अध्ययन के अवसर विद्यार्थियों को मिलते हैं।

टिप्पणी

10. मनोवैज्ञानिक दृष्टि से यह विधि अत्यंत उपयोगी है।

सीमाएं

इस विधि की प्रमुख सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. यह विधि सभी विद्यार्थियों के लिए समान उपयोगी नहीं है, क्योंकि प्रत्येक विद्यार्थी की कार्य क्षमता समान नहीं होती।
2. प्रयोग द्वारा गणित के सिद्धांतों की खोज आसान कार्य नहीं है।
3. यह एक बहुत हीधीमी विधि है। निर्धारित पाठ्यक्रम को इसकी सहायता से समय पर पूरा नहीं किया जा सकता।
4. प्रत्येक शिक्षक इस विधि का सफलतापूर्वक उपयोग नहीं कर सकता।
5. इस विधि में उपकरण आदि पर अधिक व्यय करना पड़ता है, जो कि भारतीय विद्यालयों के लिए संभव नहीं है।
6. गणित के अनेक ऐसे उप–विषय हैं, जिनको इस विधि से नहीं पढ़ाया जा सकता।
7. यह विधि छोटी कक्षाओं के लिए उपयोगी नहीं है क्योंकि इस स्तर के विद्यार्थी उपकरणों से सीखने की बजाय खेलना शुरू कर देते हैं।

सुझाव– यह विधि लंबी तथा मुश्किल है लेकिन अगर इसे ठीक से प्रयोग में लाया जाए तो पर्याप्त सफलता मिल सकती है। इस विधि को कम खर्चीला बनाया जा सकता है बशर्ते अधिकांश यंत्र छात्रों द्वारा स्कूल में ही बनवाए जाएं। जो स्कूल आर्थिक दृष्टि से संपन्न हैं, उन्हें इस विधि को अनिवार्यतः प्रयोग में लाना चाहिए।

परियोजना विधि

परियोजना विधि ही एक ऐसी विधि है, जिसका प्रयोग करके लगभग सभी विषयों की शिक्षा दी जा सकती है। विज्ञान की सभी शाखाओं के शिक्षण में तो यह विधि विशेषकर लाभदायक है, जिनमें प्रयोगात्मक एवं व्यावहारिक कार्य शामिल होते हैं। इस विधि के जन्मदाता हैं– अमेरिका के प्रसिद्ध शिक्षाशास्त्री जॉन डीवी के योग्य शिष्य सर विलियम किलपैट्रिक है। उन्होंने डीवी के प्रयोजनवाद से प्रभावित होकर ही इस विधि द्वारा शिक्षा के सभी अंगों को एकता के सूत्र में पिरोकर शिक्षण को रुचिकर एवं जीवनोपयोगी बनाने का प्रयत्न किया है। प्रोजेक्ट या 'परियोजना' शब्द के विभिन्न पक्षों को समझने से पहले यह आवश्यक है कि इसका अर्थ समझा जाए।

परियोजना शब्द का अर्थ

किलपैट्रिक के अनुसार, "प्रोजेक्ट वह उद्देश्यपूर्ण कार्य है, जिसे लगन के साथ सामाजिक वातावरण में किया जाता है।"

पारकर के अनुसार, "यह क्रिया की एक इकाई है, जिसमें विद्यार्थियों को योजना और उद्देश्य निर्धारित करने के लिए उत्तरदायी बनाया जाता है।"

प्रो. स्टीवेन्स के अनुसार, "प्रोजेक्ट एक समस्यामूलक कार्य है, जिसे स्वाभाविक परिस्थितियों में पूर्ण किया जाता है।"

बेलर्ड के अनुसार, "प्रोजेक्ट यथार्थ जीवन का ही एक भाग है जो विद्यालय में प्रदान किया जाता है।"

उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर यदि प्रोजेक्ट शब्द का अर्थ समझने का प्रयास किया जाए तो विश्लेषण के पश्चात इस परिणाम पर पहुंचा जा सकता है कि प्रोजेक्ट या परियोजना विद्यार्थियों के वास्तविक जीवन से संबंधित किसी समस्या का हल खोज निकालने के लिए अच्छी तरह से चुना हुआ तथा प्रसन्नतापूर्वक हाथ में लिया जाने वाला वह कार्य है, जिसे पूर्ण स्वाभाविक परिस्थितियों में सामाजिक वातावरण में ही पूर्ण किया जाता है।

परियोजना विधि का स्वरूप या प्रकृति

इस प्रकार की विधि में शिक्षा का मुख्य केंद्र प्रोजेक्ट ही होता है। विद्यार्थी किसी समस्या के समाधान के लिए किसी उचित प्रोजेक्ट को अपने हाथ में लेते हैं तथा योजनाबद्ध कार्य करके उसे पूरा करने का प्रयत्न करते हैं। परियोजना पर काम करते समय उन्हें जिस प्रकार के ज्ञान की आवश्यकता होती है, वह उसी समय अर्जित कर लिया जाता है, चाहे वह किसी भी विषय से संबंधित क्यों न हो। इस प्रकार इस विधि में प्रासंगिक ढंग से पढ़ाई की जाती है।

परियोजना कार्य, जॉन डीवी के प्रयोजनवाद पर आधारित है। जॉन डीवी ने शिक्षा को जीवन के लिए और जीवन द्वारा बनाने पर बल दिया। उसके अनुसार, स्कूल और घर के जीवन में खाई को कम करना चाहिए।

परियोजना का संक्षेप में अभिप्राय हुआ किसी कार्य को समूह में करना जिसमें सभी विद्यार्थी सहकारिता की भावना से कार्य करते हैं। इस परियोजना के मुख्याधार या मुख्य सिद्धांत निम्नलिखित हैं–

1. करके सीखना,
2. जीवन से सीखना, एवं
3. विद्यार्थी के सहयोग और साहचर्य द्वारा सीखना।

परियोजना के पद

किसी भी परियोजना के संचालन के लिए या उसे चालू करने के लिए एक निश्चित क्रम के अनुसार निम्नलिखित पदों का अनुकरण करना आवश्यक होता है–

- **परिस्थिति प्रदान करना**– सर्वप्रथम शिक्षक विद्यार्थियों को वैसी ही स्थिति प्रदान करें, जिसमें कुछ समस्याएं हों। ये परिस्थितियां विद्यार्थियों के साथ वार्ताओं के द्वारा प्रदान की जा सकती हैं। ये वार्ताएं विद्यार्थियों और शिक्षकों की रुचियों के

अनुसार होनी चाहिए। इस प्रकार, ऐसी परिस्थितियों का सामना करने के लिए ही विद्यार्थियों में अनुकूल प्रोजेक्ट को हाथ में लेने की इच्छा जाग्रत होती है।

टिप्पणी

- **चयन और उद्देश्य**– इस पद के अंतर्गत अध्यापक विद्यार्थियों को परिस्थिति के चयन में सहायता देता है। परियोजना का चयन विद्यार्थियों पर लादना नहीं चाहिए। अध्यापक विद्यार्थियों के सम्मुख विभिन्न परियोजनाएं प्रस्तुत कर सकता है। लेकिन चयन के बारे में निर्णय विद्यार्थी स्वयं ही लें। अध्यापक यह देखे कि परियोजना का उद्देश्य स्पष्ट रूप से परिभाषित हो। यदि विद्यार्थी किसी गलत परियोजना का चयन कर लेते हैं तो अध्यापक युक्ति से उनका मार्गदर्शन कर सकते हैं ताकि वेधन और समय की बर्बादी न करें।
- **योजना**– चयन की प्रक्रिया के पश्चात विद्यार्थियों को परियोजना की विस्तृत योजना तैयार करनी चाहिए। अध्यापक इस कार्य में भी मार्गदर्शन कर सकता है, लेकिन अपने सुझावों को उन पर थोप नहीं सकता। अध्यापक अपने मन ही मन दो–तीन योजनाएं तैयार कर ले और विद्यार्थियों को मार्गदर्शन दे। प्रत्येक विद्यार्थी को बहस में भाग लेने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए। प्रत्येक विद्यार्थी योजना को ठीक ढंग से कापी में नोट कर ले। योजना में सभी विद्यार्थियों में कार्य को विभाजित किया जाना चाहिए ताकि सभी विद्यार्थी परियोजना के कार्यों में अपना–अपना योगदान दे सकें। इससे विद्यार्थियों में सहकारिता का विकास होता है।
- **लागू करना या कार्यान्वित करना**– योजना बना लेने के पश्चात इसे लागू करना बहुत ही जिम्मेदारी का काम होता है। अध्यापक को विद्यार्थियों को उनकी रुचियों और योग्यताओं के अनुसार कार्य बांट देना चाहिए। परियोजना को कार्यान्वित करने के लिए उसे अपना सक्रिय योगदान देना चाहिए। विद्यार्थी की योग्यता तथा रुचि के अनुसार कार्य न बांटने से परियोजना का कोई लाभ नहीं, जैसे– पेंटिंग या ड्राइंग का कार्य उस विद्यार्थी को दे दिया जाए जो एक सीधी लाईन भी न खींच सके तो कोई लाभ नहीं होगा। इस पद में अध्यापक और विद्यार्थी केधैर्य का होना अति आवश्यक है। अध्यापक को समयानुसार निर्देश देते रहना चाहिए।
- **मूल्यांकन**– परियोजना की समाप्ति पर संपूर्ण कार्य का मूल्यांकन किया जाना चाहिए तथा त्रुटियों को नोट किया जाना चाहिए। विद्यार्थियों को स्वयं अपनी आलोचना करनी चाहिए। विद्यार्थियों को यह देखना चाहिए कि परियोजना का उद्देश्य किस सीमा तक प्राप्त कर लिए गए हैं और उनमें क्या कमी रह गई है।
- **रिकॉर्डिंग करना**– परियोजना कार्य का सारा रिकॉर्ड विद्यार्थियों को रखना चाहिए। रिकॉर्ड, परियोजना के सभी पदों से संबंधित रखा जाना चाहिए। परियोजना की योजना, उसे लागू करने संबंधी नियम, उद्देश्य तथा मूल्यांकन से संबंधित रिकॉर्ड रखा जाना चाहिए। इस रिकॉर्ड में विद्यार्थियों को दिए गए कार्य आदि भी शामिल हैं। इसी रिकॉर्ड में परियोजना के लिए प्रयोग की गईधनराशि, चार्ट, पुस्तक, मॉडल आदि सम्मिलित किए जाने चाहिए।

अच्छी परियोजना के गुण

टिप्पणी

एक अच्छी परियोजना में निम्नलिखित गुण होते हैं–

1. एक अच्छी परियोजना का सबसे पहला और आवश्यक गुण यह है कि वह परियोजना उद्देश्यपूर्ण एवं लाभदायक होनी चाहिए।
2. विद्यार्थियों को परियोजना कार्य की स्पष्टता होनी चाहिए।
3. परियोजना से प्राप्त किए गए अनुभव लाभकारी होने चाहिए। परियोजना कार्य अवश्य पूरा किया जाना चाहिए और आगामी ज्ञान प्राप्त करने के लिए परियोजना बच्चों को प्रोत्साहन दे।
4. परियोजना वही अच्छी मानी जाती है, जो विद्यार्थी की हर क्रिया को प्रोत्साहित करती है और उन्हें अधिक उत्तरदायी बनाती है। विद्यार्थियों में स्वतंत्र चिंतन ओर योजना को प्रोत्साहन देना चाहिए।
5. परियोजना विद्यार्थी को मानसिक और शारीरिक रूप से व्यस्त रखे।
6. विद्यार्थी और अध्यापक दोनों को ही जो सक्रिय रखे, वह उत्तम परियोजना कहलाती है, लेकिन विद्यार्थियों की सक्रियता अधिक आवश्यक है।
7. परियोजना सस्ती होनी चाहिए और उसमें समय भी कम लगना चाहिए।
8. परियोजना समुदाय की आवश्यकता के अनुसार होनी चाहिए।
9. परियोजना कार्य चुनौतीपूर्ण होना चाहिए और विद्यार्थियों को प्रयास करने के अवसर दिए जाने चाहिए। यह अधिक कठिन भी नहीं होना चाहिए और अधिक आसान भी नहीं होना चाहिए।
10. परियोजना कार्य उपलब्धि योग्य होना चाहिए।

परियोजना विधि की विशेषताएं

इस विधि की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. परियोजना विधि सीखने के निम्नलिखित नियमों पर आधारित है–
   (क) **अभ्यास का नियम**– परियोजना विधि में विद्यार्थी सृजनात्मक कार्य सीखने के लिए तैयार रहते हैं।

   (ख) **अभ्यास का नियम**– विद्यार्थी अभ्यास द्वारा बहुत कुछ सीखते हैं। शिक्षण के समय जब वे वास्तविक परिस्थितियों में कार्य करेंगे तो उनका अधिगम अधिक होगा।

   (ग) **प्रभाव का नियम**– अधिगम प्रक्रिया सफलता और असफलता से बहुत प्रभावित होती है। किसी भी परिस्थिति में प्रसन्नता का प्रभाव कार्य को करने और सीखने के लिए विद्यार्थी को प्रोत्साहित करता है।
2. परियोजना विधि से सामूहिक अंतःक्रिया और सहयोग को बढ़ावा मिलता है और समुदाय के हितों के बारे में चिंतन का विकास होता है।

टिप्पणी

3. इस विधि में लोकतांत्रिक ढंग से सीखने की प्रक्रिया का विकास होता है।
4. इस विधि से परिश्रम की मर्यादा का विकास होता है।
5. इससे विषय के साथ सह–संबंध ढूंढा जा सकता है।
6. खोज के परिणामस्वरूप प्रसन्नता का अनुभव देता है।
7. इस विधि द्वारा समस्या के समाधान को चुनौती का अवसर मिलता है। इससे रचनात्मक और सृजनात्मक क्रियाओं को बढ़ावा मिलता है।
8. मानसिक परिधि का विस्तार भी इसी विधि से संभव है।
9. इसमें विषयों को विभिन्न शाखाओं में बांटना नहीं पड़ता। विषय का सह–संबंध इस विधि द्वारा अधिकतम हो सकता है।

परियोजना विधि के दोष

इस विधि के प्रमुख दोष इस प्रकार हैं–

1. परियोजना विधि में परियोजना को पूरा करने में समय बहुत अधिक खर्च होता है।
2. अध्यापक पर काम का अधिक बोझ बढ़ता है। अधिकतर समय वह योजना बनाने, तैयारी करने तथा मूल्यांकन करने में ही व्यस्त रहता है।
3. उच्च कक्षाओं का पाठ्यक्रम प्रोजैक्ट के द्वारा पूरा नहीं किया जा सकता।
4. परियोजना के लिए संदर्भ सामग्री का अभाव रहता है।
5. परियोजना के लिए सुसज्जित प्रयोगशालाएं चाहिए। अतः यह विधि बहुत खर्चीली है।
6. परियोजना कार्यों में कौशलों के अभ्यास के लिए अवसर प्रदान नहीं किए जाते। गणित जैसे विषयों के लिए ये अभ्यास अति आवश्यक हैं।
7. गणित विषय में परियोजना कार्यों के लिए अध्यापक को ज्ञाता समझा जाता है और उससे यह आशा की जाती है कि वह सभी प्रकरणों में सह–संबंध स्थापित करके पढ़ाएं। यह बहुत ही कठिन कार्य है।
8. विषय का विकास, क्रम से नहीं हो सकता। शिक्षण कार्य संगठित और निरंतर नहीं होता।
9. इस विधि में संपूर्ण समय–सारणी को व्यवस्थित करना पड़ता है।
10. इस विधि में किसी भी प्रकरण का विस्तृत ज्ञान नहीं दिया जा सकता। केवल प्रारंभिक ज्ञान ही दिया जा सकता है।
11. परियोजन के पदों के अनुसार लिखी गई पुस्तकें उपलब्ध नहीं हैं।
12. कई बार कोई परियोजना कार्य समय पर समाप्त नहीं हो पाता, जिससे कक्षा में उच्च कक्षाओं के पाठ्यक्रम पूर्ण नहीं हो पाते।

टिप्पणी

विद्यार्थियों को प्रेरित करना या परियोजना विधि में अध्यापक की भूमिका

परियोजना विधि में विद्यार्थी को सक्रिय करना अति आवश्यक है क्योंकि यह विधि विद्यार्थी केंद्रित है। उसकी सक्रियता के बिना परियोजना कार्य सफल नहीं हो सकता। विद्यार्थियों को प्रेरित करने में अध्यापक की विशेष भूमिका होती है। अतः परियोजना विधि में विद्यार्थी ओर अध्यापक दोनों की भूमिकाओं का अपना–अपना महत्व होता है। विद्यार्थियों को प्रेरित करने में अध्यापक की भूमिका इस प्रकार हो सकती है–

1. किसी भी परियोजना में अध्यापक एक मार्गदर्शक, सहयोगी तथा मित्र की भूमिका निभाता है, न कि किसी तानाशाह की।
2. अध्यापक स्वयं भी विद्यार्थियों के साथ अध्ययन करता है।
3. अध्यापक को चाहिए कि वह कक्षा में विद्यार्थियों की स्वतंत्रता बनाए रखे तथा उनके भय को दूर करे।
4. अध्यापक को परियोजना के प्रारंभ से ही सावधान रहना चाहिए ताकि परियोजना कार्य सही दिशा में चलता रहे।
5. अध्यापक को सभी विद्यार्थियों के बारे में ज्ञान होना चाहिए और उन्हें कार्य सौंपे जाने चाहिए।
6. अध्यापक को पर्याप्त अनुभव होना चाहिए तथा उसमें पहल करने की योग्यता का होना आवश्यक है।
7. अध्यापक, विद्यार्थियों में गणित शिक्षण संबंधी उचित दृष्टिकोण का विकास करें।
8. संकोच करने वाले तथा कार्य से जी चुराने वाले विद्यार्थियों को भी परियोजना के काम में व्यस्त करना अध्यापक का कर्तव्य है।
9. अध्यापक, विद्यार्थियों के चरित्र और व्यक्तित्व के विकास में सहायक हो ताकि वे अपने ऊपर कुछ उत्तरदायित्व ले सकें।

गणित में समस्या समाधान

किन्ही विशेष परिस्थितियों में शिक्षार्थी को किसी विशेष कठिनाई का अनुभव होता है अथवा उसे किसी समस्या का सामना करना पड़ता है। उसने अब तक जो सीखा और पढ़ा है, उसके आधार पर इसका हल ढूंढने में उसे कठिनाई होती है। अतः आवश्यक हो जाता है कि कुछ नवीन अनुभवों (ज्ञान और कठिनाई आदि) की प्राप्ति की जाए ताकि समस्या का हल ढूंढने में सहायता मिल सके। फलस्वरूप वह समस्या किस प्रकार की है, उसका समाधान कैसे हो सकता है। इस तरह सर्जनात्मक और गंभीर चिंतन में लग जाता है तथा अनुकूल अर्जित अनुभवों को अर्जित करने का प्रयास करता है। समस्या समाधान के लिए सामने कई विकल्प हो सकते हैं। वह अर्जित अनुभवों (ज्ञान और कौशल आदि) के आधार पर ही सही समाधान तक पहुंचने का प्रयास करता है और समाधान सही है या नहीं, इसकी पुष्टि करने का प्रयत्न भी करता है। इस तरह, अंततः वह किसी विशेष समस्या के समाधान का मार्ग

खोजकर नवीन ज्ञान और कौशलों को अर्जित करने में सफल हो जाता है। इस प्रकार, समस्या समाधान करने का प्रशिक्षण किसी शिक्षार्थी को विषय–विशेष का ज्ञान प्रदान कराने में अत्यंत सहायक सिद्ध हो सकता है।

टिप्पणी

1.4.3 गणित के लेनदेन के लिए तकनीकों का महत्व

1. मौखिक और लिखित

मौखिक कार्य लिखित कार्य का एक हिस्सा है। मौखिक प्रश्न किसी भी लेखन सामग्री के उपयोग के बिना मानसिक या मौखिक रूप से हल किया जा सकता है। मौखिक कार्य करने में विद्यार्थियों को कागज और पेंसिल के उपयोग के बिना मानसिक समस्याओं का समाधान करना होता है।

मौखिक कार्य का महत्व

1. अधिकांश गणित काम हम अपने व्यावहारिक जीवन में उपयोग मौखिक है। वस्तुओं की दिन–प्रतिदिन की खरीद, धन का छोटा–सा लेन–देन आदि सभी मौखिक कार्य के माध्यम से किए जाते हैं।
2. यह समस्या की स्वतंत्र सोच और विश्लेषण के लिए पर्याप्त अभ्यास देता है। मौखिक कार्य के प्रयोग से अच्छा मानसिक व्यायाम होता है। यह गति को बढ़ाता है और विद्यार्थियों की बुद्धि को तेज करता है।
3. मौखिक काम शिक्षण की प्रक्रिया में निम्न मदद करता है।
   (क) विद्यार्थियों के पिछले ज्ञान के परीक्षण में।
   (ख) प्रश्न और विचार के रूप में मौखिक कार्य विषय वस्तु की प्रस्तुति में मदद करता है।
   (ग) यह सबसे अच्छा ध्यान पकड़ने उपकरणों में से एक के रूप में साबित होता है।
   (घ) यह शिक्षक की मदद करता है, आसानी से व्यक्तिगत ध्यान दे सकता है।
   (ङ) संशोधन कार्य करने में बहुत कुछ।
4. समस्याओं को हल करने में शिक्षक और छात्र दोनों के समय और ऊर्जा के बहुत से बचाया जा सकता है अगर मौखिक काम का उपयोग किया जाता है।
5. यह रुचि पैदा करने के साथ–साथ पढ़ाई में छात्र की रुचि बनाए रखने में मदद करता है।
6. मौखिक कार्य विद्यार्थियों के बीच स्वस्थ प्रतियोगिताओं को विकसित करता है।

लिखित कार्य

यह मौखिक रूप से किए गए कार्य को सुविधाजनक और आगे बढ़ाता है। लिखित कार्य में लेखन सामग्री की मदद अनिवार्य रूप से ध्यान रखा जाता है। मौखिक कार्य प्रारंभ देता है और लिखित कार्य इसका अनुसरण करता है।

गणित में लिखित कार्य का उद्देश्य

1. शिक्षक विद्यार्थियों द्वारा किए गए कार्य की मात्रा को जान सकता है।
2. कुछ नियमों और प्रक्रियाओं के अनुसार समस्याओं को हल करने में विद्यार्थियों को बनाना भी संभव हो सकता है।

टिप्पणी

लिखित कार्य के गुण

1. लिखित कार्य के माध्यम से विचार और उचित तर्क की स्पष्टता संभव है।
2. लंबी समस्याएं होना संभव है।
3. लिखित कार्य प्रकृति में अधिक स्थायी है और इसलिए विद्यार्थियों की उपलब्धि का न्याय करना संभव है।

2. प्रशिक्षण और अभ्यास

गणित प्रशिक्षण में सीखने के सबसे आवश्यक तरीकों (या तरीकों) में से एक है। सभी शिक्षण गतिविधि का नियंत्रण उद्देश्य अभ्यास के लिए आवश्यक सीखने को कम करना है। ज्ञान प्राप्त करने के लिए अभ्यास के अधिग्रहण की आवश्यकता होती है, इसलिए प्रशिक्षण/अभ्यास ज्ञान प्राप्त करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। कुल मिलाकर अभ्यास पाठ तीन प्रकार के होते हैं। ज्ञान प्राप्ति के लिए पाठ की पहली श्रेणी बुनियादी विषय की है, उदाहरण के लिए, गुणा तालिकाओं, इसके अलावा संयोजन, दशमलव और प्रतिशत के आंशिक समकक्ष, भिन्नात्मक, ज्यामिति में निर्माण, आदि। इनमें विषय वस्तु शामिल है जिसे पूरी तरह से महारत हासिल की जानी चाहिए ताकि गति और सटीकता सुनिश्चित की जा सके जिस पर भविष्य की सीख आधारित हो सके है।

हालांकि, औपचारिक प्रशिक्षण की एक निश्चित राशि अपरिहार्य है, कार्यात्मक या सार्थक प्रशिक्षण को वरीयता दी जानी चाहिए। सार्थक प्रशिक्षण पाठ्यक्रम और उसके उचित अनुप्रयोग छात्राओं की पूर्व समझ का तात्पर्य है। यह प्रशिक्षण उद्देश्यपूर्ण है और उपयोग के रूप में इच्छानुसार आवश्यकता से निर्धारित होती है। निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखते हुए एक प्रभावी प्रशिक्षण पाठ का आयोजन किया जाना चाहिए—

1. प्रशिक्षण सीखने और मूल बातें की समझ का पालन करना चाहिए। यह विषय को समझने के बिना रटने याद को प्रोत्साहित नहीं करना चाहिए।
2. प्रशिक्षण विविध होना चाहिए। कुछ नियमित प्रक्रियाएं सीखने को नीरस और अरुचिकर बनाती हैं।
3. प्रशिक्षण व्यक्तिगत और प्रत्येक शिक्षार्थी के लिए पुरस्कृत किया जाना चाहिए। प्रत्येक शिक्षार्थी को अपना उद्देश्य और उपयोगिता देखनी चाहिए।
4. प्रशिक्षण अवधि कम होना चाहिए और शिक्षार्थी की उपलब्धि का अक्सर परीक्षण किया जाना चाहिए।

क्रियात्मक शिक्षण तरीका

क्रियात्मक शिक्षण वे तकनीक में शिक्षण की अनौपचारिक विधि केंद्रित है जो बच्चे के हित के अनुकूल है और सहजता से अपनी अकेदमिक प्रवीणता में सुधार करता है। यह

टिप्पणी

विधि गणित में रुचि विकसित करने में मदद करती है, शिक्षार्थियों को अधिक जानने के लिए प्रेरित करती है, और कुछ हद तक इस विषय की अमूर्त प्रकृति को कम करती है। क्रियात्मक शिक्षण सीखने के लिए गणित पढ़ाने का एक प्रभावी तरीका हो सकता है। यद्यपि केवल कुछ अवधारणाओं को क्रियाओं के माध्यम से पढ़ाया जा सकता है, गणितीय प्रश्नोत्तरी, पहेली, योजना, पहेलियों, अनुमान लगाने वाली क्रिया आदि जैसे खेलों का सबसे महत्वपूर्ण लाभ विभिन्न गणितीय अवधारणाओं का मौखिक अभ्यास है।

निर्दिष्टीकरण कार्य

एक निर्दिष्टीकरण एक कार्य या कार्य आवंटन है। इस तकनीक में शिक्षार्थियों को अपनी सीख के लिए जिम्मेदारी प्रदान की जाती है। शिक्षक किसी भी कठिनाई का सामना करने की स्थिति में सलाहकार और मार्गदर्शक के रूप में कार्य करता है। इस विधि के कई फायदे हैं। यह पहल और स्वतंत्रता को प्रोत्साहित करती है, और व्यक्तिगत अभ्यास की अधिकतम राशि के साथ शिक्षार्थियों प्रदान करता है। शिक्षक को ध्यान रखना चाहिए कि निर्दिष्टीकरण हमेशा एक ऐसा कार्य होना चाहिए जो शिक्षार्थी की क्षमता के भीतर हो और उसके लिए कुछ रुचि हो। यह हर शिक्षार्थी जीवन का प्रमुख हिस्सा है। शिक्षार्थियों को भविष्य के संदर्भों के लिए अपने पूरे कार्य रखने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है।

अच्छे निर्दिष्टीकरण की विशेषताएं

- सौंपे गए कार्य को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए।
- सौंपे गए काम का पिछले ज्ञान और अनुभवों से संबंध होना चाहिए।
- सौंपे किया गया काम सीखने के अनुभवों और गतिविधियों को क्रियांवित और निर्देशित करना चाहिए।
- यह सटीक होना चाहिए और साथ ही शिक्षार्थियों को कार्य पूरा करने में सक्षम बनाने के लिए पर्याप्त जानकारी होनी चाहिए।
- निर्दिष्टीकरण के लिए नए विषयों को पहले सीखने के अनुभवों के साथ प्रस्तावित किया जाना चाहिए।
- शिक्षक को पता होना चाहिए कि अनुभव से हासिल करने के लिए वे शिक्षार्थियों से क्या चाहते हैं।

'अपनी प्रगति जांचिए'

10. पाठ योजना को परिभाषित करें।
11. मूल्यांकन क्या है?
12. आगमन एवं निगमन विधि से क्या अभिप्राय है?
13. गणित में समस्या समाधान का क्या अर्थ है?
14. मौखिक एवं लिखित तकनीक को बताएं।

1.5 गणित के प्रभावी शिक्षण सीखने की योजना

टिप्पणी

शिक्षा की प्रभावी योजना के माध्यम से गणित पढ़ाने के उद्देश्यों को सही ढंग से प्राप्त किया जा सकता है। एक शिक्षक को छात्रों को वांछित अनुभवों के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं की समझ विकसित करने में मदद करनी चाहिए। छात्रों को गणित से डरना या नापसंद नहीं करना चाहिए, बल्कि उन्हें गणित का आनंद लेने में सक्षम होना चाहिए। शिक्षक की सफलता गणित सीखने के प्रति छात्रों के दृष्टिकोण में बदलाव से संकेत देती है। इसलिए, शिक्षक के लिए गणित के ज्ञान के रूपांतरण में छात्रों की प्रभावी भागीदारी के लिए सीखने और पहचानने (या डिजाइन) विभिन्न सीखने के अनुभवों के सिद्धांतों को समझना आवश्यक है।

1.5.1 गणित में एक अच्छे अनुदेशात्मक कार्यक्रम की आकर्षक विशेषताएं

हमारे वर्तमान छात्रों में से कई की गणितीय क्षमता निश्चित रूप से उतनी अधिक नहीं है जितनी इष्टतम परिस्थितियों में उम्मीद की जा सकती है। बड़ी कक्षाओं के कारण होने वाली समस्याएं, अपर्याप्त शैक्षिक ज्ञान, अच्छी पाठ्यपुस्तकों और अन्य भौतिक ज्ञान की अनुपलब्धता, बाहरी परीक्षाओं पर बहुत अधिक निर्भरता और असंतोषजनक और पुराने पाठ्यक्रम की विषय अभी भी हमारे सामने है। गणित के किसी भी शिक्षक को अनुदेश का आयोजन करते समय अपनी मर्जी से करना चाहिए। ऐसे कुछ विचार यहां सूचीबद्ध हैं।

हाल ही में पुराने पाए गए कई विषयों को हटा दिया गया है। अब कई नए विषय शुरू किए जा रहे हैं। कुछ उल्लेखनीय एक बार समुच्चय, प्रायिकता और आंकड़े, असमानता और कंप्यूटर विज्ञान, इत्यादि, शामिल है। इन्हें इसलिए शामिल किया गया है क्योंकि हाल के दिनों में गणित का उपयोग सामाजिक विज्ञानों, जैविक विज्ञानों, व्यापार और उद्योग में व्यापक रूप से किया गया है। आज कई विषयों के श्रेणी–व्यवस्था या क्रम स्थान में बदलाव किया गया है। प्राथमिक चरण में अनौपचारिक ज्यामिति और बीजगणित के उदाहरण हैं। कई विषयों के प्रबंधो में बदलाव किया गया है। कुछ मामलों में, जैसे यूक्लिडियन ज्यामिति, विषय को मूल विषय या आधार विषय किया गया है। जो कम समय में ज्यादा गणित पढ़ाने का प्रयास है।

यह स्थापित किया गया है कि जो बच्चे अभ्यास करने से पहले एक प्रक्रिया को समझते हैं, वे इसे अधिक कुशलता से सीखते हैं और इसे प्रभावी ढंग से अभ्यस्त का उपयोग कर सकते हैं। लिखित अध्ययन को कार्यात्मक अध्ययन ने बदल दिया है। यह भी माना जाता है कि बुनियादी या प्रमुख विचारों और उनकी संक्रियाओं का ज्ञान बच्चों को समझने में मदद करता है और अलग तथ्यों को जानने से बेहतर गणित की सराहना करते हैं। शिक्षण के लिए एक एकीकृत दृष्टिकोण एक दूसरे से अलग के रूप में विभिन्न शाखाओं शिक्षण के लिए पसंद किया जाता है।

शायद एक प्रभावी शिक्षण योजना का सबसे महत्वपूर्ण पहलू बच्चे को उस तरीके से सिखाना है जिसमें वह सबसे अच्छा सीखता है। इसमें बच्चों को सीखना सिखाना और

टिप्पणी

रचनात्मक होने को शामिल किया जाता है। विकास और सीखने के तरीके को ध्यान में रखते हुए शिक्षण की योजना बनाई जाए तो ज्ञान हासिल किया जा सकता है। बच्चे के विकास और तर्क विकास अध्ययन इस कार्य में उपयोगी हैं। शिक्षण जो शिक्षार्थी क्या करता है, सोचता है, महसूस करता है और कार्य करता है। सार्थक गतिविधियों के माध्यम से सीखना रुचि पैदा करता है और जरूरतों को संतुष्ट करता है। गणित का उपयोग करने में कौशल सहित आकर्षक व्यवहार, उन्हें समस्या को सुलझाने की स्थितियों में अभ्यास करके विकसित किए जाते हैं। इस प्रकार, सफल शिक्षण में (i) कार्यात्मक परिस्थिति शामिल है। समस्या की स्थिति (ii) सीखने की गतिविधियों का चयन करना जो जीवन में उपयोगी और आवश्यकताओं से संबंधित हैं, और (iii) विषय वस्तु का उचित उन्नयन जो गणित का उपयोग करने में मदद करेगा।

एक समूह के भीतर विद्यार्थियों के हितों, अनुभवों, क्षमताओं और सीखने की दरों में व्यापक रूप से अलग है। प्रभावी और सार्थक अनुदेश के लिए योजना बनाने के लिए, शिक्षक को क्या समझाना है इस सीमा की खोज करनी चाहिए, और उसकी कक्षा में विभिन्न विद्यार्थियों के कौशल से अवगत होना चाहिए। रचनात्मक काम, सामुदायिक परियोजनाओं, निर्माण गतिविधियों और प्रयोगों कि कौशल और गणितीय क्षमताओं का उपयोग, विद्यार्थियों की सोच को चुनौती और उन्हें अपनी तर्कशक्ति से खोजने के अवसर देने के लिए शुरू किया जाना चाहिए।

1.5.2 विषय वस्तु विश्लेषण

यह एक शोध उपकरण या तकनीक है जो वास्तविक विषयों का विश्लेषण करने में मदद करती है और इसका उपयोग ग्रंथों या ग्रंथों के संग्रहों के भीतर कुछ शब्दों, अवधारणाओं, विषय, वाक्यांशों, पात्रों या वाक्यों की उपस्थिति निर्धारित करने और इस उपस्थिति को वस्तुनिष्ठ तरीके से निर्धारित करने के लिए किया जाता है। व्यवस्थित रूप से ग्रंथों का मूल्यांकन करके गुणात्मक आंकड़ों को मात्रात्मक आंकड़ों में परिवर्तित किया जा सकता है।

विषय वस्तु विश्लेषण तथा शिक्षाशास्त्रीय विश्लेषण

किसी भी विषय के प्रभावी शिक्षण के लिए उस विषय से संबंधित अध्यापक को विषय–विशेष के सामान्य, विशिष्ट एवं व्यावहारिक उद्देश्यों को ध्यान में रखने के लिए पाठ्यक्रम की आवश्यकता पड़ती है। किसी भी विषय को पढ़ने का एकमात्र उद्देश्य विषय की प्रकृति के अनुकूल छात्रों के व्यवहार में अपेक्षित व्यावहारिक परिवर्तन लाना होता है। उद्देश्यों के अनुसार ही पाठ्यक्रम या पाठ्यवस्तु की व्यवस्था की जाती है, अर्थात प्रत्येक पाठ्यवस्तु के उद्देश्य अलग–अलग होते हैं।

"पाठ्यवस्तु में से शिक्षक को किन महत्वपूर्ण बातों पर अधिक बल देना चाहिए, इन्हीं को शिक्षण बिंदु या परीक्षण बिंदु कहते हैं।''

उद्देश्यों के आधार पर बालक के व्यवहार में अभीष्ट व्यावहारिक परिवर्तन लाने के लिए शिक्षक क्रिया आयोजित की जाती है। लेकिन, व्यावहारिक परिवर्तन का प्रारूप निश्चित करने के लिए शिक्षक को चाहिए कि वह अपने विषय से संबंधित पाठ्य–सामग्री

का विश्लेषण भली–भांति कर ले, क्योंकि विषय–वस्तु ही एक ऐसा साधन है, जिसके माध्यम से विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति संभव होती है। इसके लिए यह आवश्यक है कि अध्यापक अपने अनुभवों एवं अंतर्दृष्टि के आधार प्रमुख शिक्षण बिंदुओं का निर्धारण कर ले। इससे अध्यापक को अपनी शिक्षण प्रक्रिया हेतु एक ठोस आधार प्राप्त हो जाता है जिसके आधार पर वह अपने लक्ष्य को प्राप्त करने में सक्षम हो सकता है उसे अपने शिक्षण से संबंधित कार्यक्रम की योजना बनाने में सहायता मिलती है और वह विद्यार्थी को व्यावहारिक परिवर्तन की ओर अपनी समस्त क्रियाओं को केंद्रित करने का प्रयास करता है। शिक्षण प्रक्रिया के दौरान किन स्थलों पर, किन बातों पर विशेष बल देना चाहिए, जिससे शिक्षण के उद्देश्य की प्राप्ति हो सके, यह भी इसी के द्वारा संभव है। छात्रों के व्यवहार परिवर्तन का मूल्यांकन करने के लिए भी जिन पक्षों पर विशेषध्यान देना चाहिए, यह भी शिक्षण बिंदुओं से संबंधित होता है। परीक्षाएं लेते समय भी इसकी आवश्यकता पड़ती है इसलिए इन्हें परीक्षण बिंदुओं के नाम से भी जाना जाता है। कहने का अभिप्राय यह है कि शिक्षण तथा परीक्षण की प्रभावशीलता और वैधता को बढ़ाने के लिए शिक्षण तथा परीक्षण बिंदुओं का पूर्व निर्धारण कर लेना चाहिए।

शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण की आवश्यकता

शिक्षण तथा परीक्षण दोनों में परस्पर सामंजस्य बनाए रखना मूल्यांकन प्रक्रिया की विशेषता है। अध्यापक को चाहिए कि वह शिक्षण उद्देश्यों को स्पष्ट तथा सरल ढंग से प्रतिपादित कर ले तथा उससे संबंधित पाठ्यक्रम का विश्लेषण बालकों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाने की दृष्टि से करे तभी वह शिक्षण–बिंदुओं को यथार्थ रूप में निश्चित कर सकेगा। शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण की आवश्यकता निम्न दृष्टियों से महत्वपूर्ण है–

1. शिक्षण के उद्देश्यों को सुगमतापूर्वक प्राप्त करने की दृष्टि से।
2. शिक्षण प्रक्रिया में महत्वपूर्ण स्थलों का चुनाव करने की दृष्टि से।
3. शिक्षण की योजनाबद्धता को महत्व प्रदान करने की दृष्टि से।
4. परीक्षा में अंकों का वितरण करने तथा वेटेज देने के लिए।
5. शिक्षण प्रक्रिया को स्पष्ट एवं निश्चित रूप देने के लिए।
6. परीक्षा की विषय–वस्तु संबंधी वैधता को बनाए रखने की दृष्टि से।

शिक्षण बिंदुओं को निर्धारण करने की विधि

शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण का आधार उद्देश्य होते हैं। इसलिए, उद्देश्यों के अनुरुप ही पाठ्य–वस्तु का विश्लेषण करना चाहिए। इसके लिए सर्वप्रथम संपूर्ण पाठ्य–वस्तु को उद्देश्यों के अनुरुप विभक्त कर लेना चाहिए। यह इस बात पर निर्भर करता है कि अध्यापक के पास उन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए कितना समय है। किंतु, दैनिक शिक्षण में इस प्रकार समस्त पाठ्यक्रम को एक साथ एकत्र करके विश्लेषित करना संभव नहीं होता है। प्रायः सभी पाठ्य–पुस्तकों के पाठ्य–वस्तु कुछ प्रकरणों के आधार पर

विभाजित होती है। अध्यापक के लिए यह अधिक सुविधाजनक होगा कि वह उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक प्रकरण को विश्लेषित कर ले। उसके पश्चात प्रत्येक उद्देश्य की प्राप्ति हेतु आवश्यक कालांशों की संख्या निर्धारित कर ले। वैसे तो विचार–विमर्श अथवा व्यक्तिगत समितियों के आधार पर भी शिक्षण–बिंदुओं को निर्धारित किया जा सकता है, किंतु शिक्षण प्रक्रिया के वैज्ञानिक एवं मनोवैज्ञानिक पहलुओं को ध्यान में रखते हुए यह आवश्यक है कि विषय के शिक्षण–बिंदुओं का निश्चय अध्यापक स्वयं अपने अनुभव एवं अंतर्दृष्टि के आधार पर करे, तब वह इन्हें अपनी सुविधानुसार संशोधित या परिवर्तित कर सकता है।

विषय–वस्तु विश्लेषण

शिक्षण बिंदुओं के निर्धारण के लिए एक द्विभुजी चार्ट का प्रयोग किया जाता है। इस चार्ट में संपूर्ण सत्र में पढ़ाए जाने वाले पाठ्यक्रम को मासिक, पाक्षिक, साप्ताहिक तथा दैनिक कालांशों की आवश्यकता के अनुरुप विश्लेषित किया जाता है। द्विभुजी चार्ट में एक और विषय–वस्तु तथा दूसरी ओर कि अमुक प्रकरण को पढ़ाने के लिए किन शिक्षण उद्देश्यों की आवश्यकता है तथा उनके लिए कितने कालांशों की आवश्यकता पड़ेगी।

द्विभुजी चार्ट का एक प्रारूप गणित के पाठ्यक्रम के एक अंश को लेकर उदाहरणार्थ आगे प्रस्तुत किया है।

इस चार्ट के अनुसार गणित के पाठ्यक्रम के निर्धारित भाग को पढ़ाने के लिए कुल 100 कालांशों की आवश्यकता होगी। इसमें जिन शिक्षण उद्देश्यों को प्राप्त करने का प्रयास किया जाएगा उनके भीतर अपेक्षित कालांशों की संख्या लिख दी गई है। यह प्रारूप अपनी सुविधानुसार संशोधित एवं परिवर्तित किया जा सकता है। अग्रलिखित प्रारूप मात्र एक उदाहरण के रूप में प्रस्तुत किया गया है। प्रत्येक अध्यापक अपनी सूझ–बूझ तथा शिक्षण अनुभव के आधार पर अनुमानित कालांशों की संख्या को घटा या बढ़ा सकता है। द्विभुजी चार्ट द्वारा प्रस्तुत विशेष विश्लेषण की व्याख्या अनुमानित कालांशों के आधार पर की गई है।

अध्यापक इस चार्ट की सहायता से यह निश्चित कर सकता है कि शिक्षण तथा परीक्षण की दृष्टि से किस शिक्षण उद्देश्य पर अधिक बल देना होगा। अर्थात, किन बिंदुओं को कम कर देना है। किन बिंदुओं पर अधिक समय देना है अथवा किस बिंदु को प्रारंभ में पढ़ाना है, किसको मध्य में, किसको सबसे अंत में या कितनी गहराई के साथ पढ़ाना है, आदि। प्रारंभ में यह विधि कठिन तथा अधिक समय नष्ट करने वाली लगती है, लेकिन बाद में अभ्यास एवं आदत बन जाने पर पर्याप्त लाभदायक, कम समय लेने वाली तथा सरल लगने लगती है।

अग्रांकित चार्ट से यह भी भली–भांति स्पष्ट है कि अध्यापक गणित शिक्षण के निर्धारित 100 कालांशों में से 29 ज्ञान उद्देश्य की दृष्टि से, 33 अवबोध उद्देश्य की दृष्टि से, 31 कौशल उद्देश्य की दृष्टि से तथा 7 रुचि उद्देश्य की दृष्टि से पढ़ाएगा। परीक्षा लेते समय भी इन उद्देश्यों की जांच पर इसी रूप में बल दिया जाना आवश्यक है।

शिक्षण उद्देश्य विषय वस्तु	ज्ञान (K)	अवबोध (U)	कौशल (S)	रुचि (I)	अपेक्षित कालांश
1. प्रतिशत	5	3	6	1	15
2. लाभ और हानि	5	8	5	2	20
3. अनुपात और समानुपात	4	8	7	1	20
4. साझा	4	2	3	1	10
5. चक्रवृद्धि ब्याज	6	4	5	X	15
6. वृक्ष का क्षेत्रफल	5	8	5	2	20
योग प्रतिशत में	29	33	31	7	100
	29%	33%	31%	7%	100%

शिक्षण बिंदुओं का और अधिक स्पष्ट रूप निम्न प्रकार है–

प्राप्त उद्देश्य	शिक्षण बिंदु	प्रकरण ब्याज, लाभ–हानि
पद	ब्याज, मूलधन, मिश्रधन	क्रयमूल्य, विक्रय मूल्य
	दर, समय	लाभ–हानि, नकद उधार
प्रत्यय	धन का किराया, ब्याज	व्यापार में व्यक्ति एक–दूसरे का सहयोग लेते हैं

सावधानियां– द्विभुजी चार्ट का निर्माण करते समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना आवश्यक है–

1. शिक्षण उद्देश्य को अपेक्षित व्यावहारिक परिवर्तनों के रूप में परिभाषित किया जाए।
2. विषय–वस्तु को सूक्ष्म प्रकरणों एवं उप–शीर्षकों में विभक्त करके पढ़ाना चाहिए।
3. चार्ट बालक की विकास अवस्था, रुचि एवं मानसिक योग्यता के आधार पर निर्मित किया जाना चाहिए।
4. कालांशों का अनुमान लगाते समय सतर्कता बरतनी चाहिए।
5. चार्ट इतना स्पष्ट होना चाहिए कि उसे देखते ही यह सहज अनुभव हो जाए कि हमें अपने शिक्षण में किन बिंदुओं पर बल देना चाहिए।
6. शिक्षण उद्देश्यों का चयन कक्षा के स्तर के अनुरुप करना चाहिए। प्रत्येक अध्यापक को इस प्रकार के चार्ट निर्मित करने में दक्ष होना चाहिए जिससे कि वह अपने शिक्षण कार्य को और अधिक प्रभावशाली ढंग से अपने छात्रों के सम्मुख प्रस्तुत कर सके। इसके लिए उचित मानसिक प्रशिक्षण प्राप्त करना आवश्यक समझा जाता है।

टिप्पणी

त्रुटियों की रोकथाम के उपाय

यदि हम यह चाहते हैं कि छात्र विषय को सीखने में भविष्य में बिल्कुल ही गलती न करें तो हमें उसके स्कूली तथा घरेलू तथा घरेलू वातावरण में ऐसे परिवर्तन करने हैं ताकि उसकी समायोजन की समस्या का स्थायी हल निकल सके। इसके लिए हमें अतिरिक्त बहुमुखी योजना भी तैयार करनी पड़ती है, जिससे बालक को अपेक्षित अच्छा वातावरण मिल सके जैसे– विद्यालय परिस्थितियों में सुधार, पाठ्यक्रम संशोधन, परीक्षा पद्धति में सुधार, अभियोग्यता परीक्षाओं का उचित निर्माण, व्यवहार परिवेश में सुधार आदि। Prognostic Tests प्रशासित करके यह देखना होता है कि बालक अधिक सूक्ष्म विषयों को सीखने के लिए तैयार है अथवा नहीं। जब कोई बालक अंकगणित में कमजोर होने के साथ–साथ बुद्धि में भी क्षीण हो तो क्यों उसे अधिक सामान्यीकृत गणित का अध्ययन कराना उचित रहेगा? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए Prognostic Tests का निर्माण किया जाता है। ये परीक्षाएं बालक को सीखने में Standing की भविष्यवाणी करती है।

बीजगणित में Lee तथा Orlears के "Prognostic Test of Algebric Ability" उपलब्ध हैं।

उदाहरण– बीजगणित में निदानात्मक परीक्षा का निर्माण

विद्यार्थी का नाम – उमा सिंह

विद्यालय का नाम – राजकीय इंटर कालिज, रायबरेली

दिनांक : 5 अक्टूबर, 1973

निर्देश–

1. नीचे कुछ सरल समीकरण पर आधारित प्रश्न दिए गए हैं। इनमें अज्ञात राशि 'य' का मान ज्ञात कीजिए।
2. प्रश्न का उत्तर प्रश्न–पत्र में दिए गए निर्धारित स्थान पर ही लिखिए।
3. स्वच्छता का विशेषध्यान रखें। यदि गणना करने के लिए निर्धारित स्थान कम लगे तो रफ कार्य के लिए अलग से पत्र लें।
4. प्रश्न पत्र की कोई समय–सीमा नहीं है, फिर भी समस्त प्रश्नों को शीघ्रता से हल कीजिए।

प्रश्न	उत्तर	गणना के लिए स्थान
1. $x + 4 = 27$ $x =$	(1)	
2. $6x + 7 = 25$ $x =$	(2)	
3. $3x + 23/5 = 74/9$ $x =$	(3)	

टिप्पणी

4. $0.05x + .6 = 5.8$ (4)
   $x =$

5. $0.5x + 7 = 4.3$ (5)
   $x =$

6. $7x - 12 = 9$ (6)
   $x =$

7. $7x - 0.13x = 42$ (7)
   $x =$

8. $.023x - 7x = 9x - 3$ (8)
   $x =$

9. $14x + 6 = 4 - 5x$ (9)
   $x =$

10. $5x + 2 = 0.9x + 1$ (10)
    $x =$

11. $x/4 - 3x/5 = 6$ (11)
    $x =$

12. $2x + 3/9x = 8$ (12)
    $x =$

13. $x + 2x/3 = 15$ (13)
    $x =$

14. $x + 7 = 12$ (14)
    $x =$

15. $5x = 20$ (15)
    $x =$

16. $4x = 1/9$ (16)
    $x =$

17. 2x − 7 = य + 7 (17)
    $x =$

18. $5x + 6x = 33$ (18)
    $x =$

19. $x/2 + 1/2 = 5/2$ (19)
    $x =$

20. $4(x + 3) = 16$ (20)
    $x =$

टिप्पणी

उपरोक्त प्रश्नों में सरल समीकरण पर आधारित प्रश्नों के विभिन्न रूपों को सम्मिलित किया गया है। सभी प्रश्न 'सरल से कठिन की ओर' सूत्र के अनुसार क्रम में लिखे गए हैं। इस परीक्षा का एकमात्र उद्देश्य यह ज्ञात करने से है कि कक्षा सात के विद्यार्थी सरल समीकरण संबंधी किसी कठिनाई स्तर तक के प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं और अगर वे हल नहीं कर सकते तो उनकी कठिनाइयां कहां और किस प्रकार की हैं। परीक्षा का उपरोक्त प्रारूप केवल सरल समीकरण में बालकों को जो कठिनाइयां हो सकती हैं, उनकी खोज में सहायक सिद्ध हो सकता है। निम्न तालिका में केवल सात विद्यार्थियों की त्रुटियों का ब्यौरा दिया गया है, जिसके आधार पर हम उनकी कठिनाइयां एवं कमजोरियों का पता लगा सकते हैं।

इस तालिका में बांयी ओर उन विद्यार्थियों के नाम लिखे जाते हैं, जिन्हें हम नैदानिक परीक्षा दे रहे होते हैं। दांयी ओर विभिन्न स्तंभों में प्रश्नों के विभिन्न प्रकार लिख लिए जाते हैं। अब प्रत्येक बालक की कठिनाइयां उसके सामने भिन्न–भिन्न स्तंभों में अंकित कर दी जाती हैं साथ ही यह भी विवरण दे दिया जाता है कि विद्यार्थी ने किस प्रकार की गलतियां कितनी बार की हैं। कुल प्रश्नों की संख्या 20 है तथा प्रश्नों की विभिन्न प्रकार के प्रश्न सम्मिलित किए गए हैं इसका संकेत कोष्ठकों में दिया गया है।

तालिका 1.7 *नैदानिक चार्ट*

क्रम सं.	विद्यार्थी का नाम	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		समीकरण में घटाना (2)	गुणक (1)	समीकरण और साधारण भिन्न की बाकी	समीकरण और दशमलव भिन्न	समीकरण और साधारण जोड़	पक्षांतर	प्राप्तांक	कक्षा में अनुपस्थिति	विशेष विवरण
1.	अनुराग माथुर	–	–	–	–	–	–	20	1	I
2.	विपिन कुमार	–	–	–	2	1	–	17	5	III
3.	चारू मोदी	–	–	–	–	–	1	19	3	II
4.	बबीता सिन्हा	1	–	4	2	–	1	12	7	V
5.	अनुपा रायजादा	1	–	–	1	2	6	10	12	VI
6.	वैभव प्रकाश	–	2	–	–	1	–	17	4	III
7.	राजीव राय	3	–	–	–	–	1	16	6	IV
8.	संपूर्ण कक्षा के छात्रों की कुल त्रुटियां	9	–	–	12	14	17			
9.	कक्षा के 40 विद्यार्थियों द्वारा किए गए सही प्रश्नों की संख्या	46	32	58	43	86	74			
10.	प्रश्नों का कुल योग	60	35	60	700	100	90			
11.	सही प्रश्नों का प्रतिशत	76	91	96	62	86	82			

व्याख्या– उपरोक्त चार्ट में सात विद्यार्थियों की कमजोरियों का विश्लेषण किया गया है तालिका से स्पष्ट है कि अनुभा रायजादा कक्षा की सबसे कमजोर छात्रा है। उसे कुल 20 अंकों में से 10 अंक प्राप्त है। दूसरे, उसकी कक्षा में अनुपस्थिति भी सबसे अधिक रही

है। उसकी कमजोरी का एक कारण यह भी हो सकता है। उसने पक्षांतर संबंधी छः प्रश्नों में सभी छः प्रश्न गलत किए हैं। ऐसा मालूम पड़ता है कि विषय में अरुचि, लापरवाही, समझ में न आना अथवा कक्षा से अनुपस्थित रहने के कारण ही उसकी कक्षा में यह स्थिति है। अनुराग माथुर, कला का सबसे होनहार छात्र है। उसे 20 में से 20 अंक प्राप्त हुए है, जो इस बात का प्रतीक है कि उसे विषय भली–भांति समझ में आ गया है। हो सकता है कि उसकी ये त्रुटि संयोग से अथवा दुर्भाग्यवश हो गई हो। चारू मोदी भी कक्षा की प्रतिभाशाली छात्रा है उसने केवल एक ही प्रश्न गलत किया है। इस प्रकार अन्य छात्रों के संबंध में भी इस चार्ट की सहायता से जानकारी प्राप्त की जा सकती है। प्रश्नों की कठिनाई स्तर की दृष्टि से दशमलव भिन्न संबंधी प्रश्नों को हल करने वालों की प्रतिशत संख्या बहुत कम है जो 62 प्रतिशत है। इस दृष्टि से अध्यापक को ऐसे प्रश्नों का अधिक अभ्यास कराना चाहिए तथा सावधानीपूर्वक समझना चाहिए। उपचारात्मक शिक्षण की दृष्टि से अनुभा रायजादा को सबसे अधिक उपचार की आवश्यकता है, नहीं तो वह कक्षा में पिछड़ जाएगी। इस प्रकार उपरोक्त नैदानिक चार्ट भी किसी छात्र की कठिनाइयों एवं कमजोरियों का ब्लू प्रिंट है। इसने इस बात का सहज अनुमान हो जाता है कि छात्र विशेष ने कहां और किस प्रकार की गलतियां कितनी बार की हैं तथा उनके उपचार के लिए क्या व्यवस्था की जा सकती है।

टिप्पणी

उपचारात्मक उपाय– निदानात्मक परीक्षणों की सहायता से जो भी कमजोरियां, कठिनाइयां तथा समस्याएं उभरकर सामने आती हैं, उन्हीं को दूर करने की बात उपचारात्मक उपायों द्वारा सोची जाती है। लक्ष्य यही रहता है कि विद्यार्थियों को अधिगम मार्ग में आने वाली कठिनाइयों और समस्याओं को जितनी जल्दी हो दूर कर दिया जाए और उन्हें विषय संबंधी शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति में स्वामित्व स्तर तक पहुंचाने में पूरी–पूरी मदद की जाए। उपचारात्मक उपायों का कार्यक्षेत्र विद्यार्थियों की विषयगत कमजोरियों तथा कठिनाइयों को दूर करने तक ही सीमित नहीं रहता बल्कि इनके माध्यम से इस प्रकार की वांछित शिक्षण अधिगम परिस्थितियों, अधिगम संसाधनों एवं सुविधाओं तथा अवसरों को भी उपलब्ध कराने की बात सोची जाती है, जिनसे विद्यार्थियों को अपनी योजनाओं और क्षमताओं के अधिक से अधिक विकास में पूरी–पूरी सहायता मिले।

उपचारात्मक उपाय कैसे किए जाएं– किसी भी तरह के उपचारात्मक कदम, निदानात्मक कार्य के द्वारा प्राप्त परिणामों को ऊपर भी निर्भर करते हैं इसलिए विद्यार्थियों की विषयगत कमजोरियों, कठिनाइयों तथा समस्याओं के समाधान एवं उपचार हेतु उपयुक्त कदम उठाने के लिए अग्रलिखित प्रश्नों के उत्तर ढूंढ़कर ही आगे चलना ठीक रहता है–

1. विद्यार्थियों/विद्यार्थी विशेष की विषय संबंधी कठिनाइयों, कमजोरी या समस्या किस प्रकार की है, उसका क्या स्तर है, कितना दायरा है आदि।
2. विषय–वस्तु, अधिगम अनुभव तथा कार्यकलापों के किस क्षेत्र, प्रकरण या अवधारणा विशेष से यह अपना संबंध रखता है?
3. इस कमजोरी या कठिनाई के पीछे किस प्रकार के संभावित कारण या कारक काम कर रहे हैं?

टिप्पणी

स्पष्ट है कि ऐसे सभी प्रश्नों के उत्तर उचित निदानात्मक कार्यों (जिनमें निदानात्मक परीक्षण भी शामिल होते हैं) के आधार पर ही प्रदान किए जा सकते है। अतः उपचार या समाधान ढूंढ़ने से पहले निदान के ऊपर सदैव ही पूरा–पूराध्यान दिया जाना चाहिए। जैसा कि हमें विदित हो सकता है कि विद्यार्थियों द्वारा अनुभव की जानी वाली कठिनाइयां, कमजोरियां या समस्याएं प्रायः वैयक्तिक ही होती हैं, सामूहिक नहीं। अतः इनके उपचार हेतु कदम भी वैयक्तिक ही होने चाहिए, सामूहिक नहीं। हमें विभिन्न निदानात्मक साधनों द्वारा विद्यार्थी विशेष को ही निदानात्मक का केंद्र बनाकर यह जानने का प्रयत्न करना चाहिए कि उसकी विषय विशेष से संबंधित अधिगम कठिनाइयां, कमजोरियां या समस्याएं किस प्रकार की हैं और उनके पीछे किस प्रकार के कारण कार्य कर रहे हैं, यह जानकारी लेकर ही हमें उसके उपचार हेतु विभिन्न उपायों का नियोजन और संगठन करना चाहिए। जहां तक हो सके, कमजोरी और कठिनाई के पीछे वास्तविक कारणों की तलाश करके उसको दूर करके सभी संभावित प्रयत्न किए जाने चाहिए और इस कार्य में अध्यापकों, माता–पिता, विद्यालय अधिकारियों तथा स्वयं विद्यार्थियों– सभी को मिल–जुलकर ऐसे संगठित प्रयत्न करने चाहिए कि निदान की गई कठिनाइयों, कमजोरियों या समस्याओं का निवारण हो सके तथा विद्यार्थी विशेष की अपनी योग्यता और क्षमताओं के उचित विकास हेतु वांछित शिक्षण–अधिगम वातावरण सुविधाओं, परिस्थितियों तथा अवसरों की प्राप्ति हो सके। इस प्रकार के संभावित उठाए जा सकने वाले कुछ उपचारात्मक कदम निम्न प्रकार के हो सकते हैं–

1. शारीरिक और मानसिक स्वास्थ्य की खराबी या कमजोरी की वजह से अगर अधिगम में कठिनाइयां या कमजोरियां आई हैं तो शारीरिक और मानसिक स्वास्थ्य को ठीक बनाए रखने के लिए उपयुक्त उपचारात्मक कदम उठाना।
2. माता–पिता का अपेक्षित सहयोग प्राप्त करना, उन्हें बालक की विषयगत कठिनाई कमजोरी तथा समस्याओं से अवगत कराने की चेष्टा करना तथा उन्हें इस मामले में क्या करना है, इस तरह के सुझाव एवं शिक्षा देने की व्यवस्था करना।
3. बालक को जिस प्रकार की जरूरत है वैसी शैक्षिक, व्यावसायिक तथा व्यक्तिगत सर्वेक्षण एवं परामर्श की व्यवस्था करना।
4. घर, परिवार, विद्यालय, पास–पड़ोस तथा समुदाय में जिस प्रकार का वातावरण बालक को मिल रहा है और उससे जैसी व्यवहारगत या शैक्षिक समस्याएं उसको आ रही है उन्हेंध्यान में रखते हुए उपलब्ध वातावरण तथा परिस्थितियों में अपेक्षित सुधार लाना या विद्यार्थी को अलग से पूरी तरह एक अलग सकारात्मक वातावरण प्रदान करने की व्यवस्था करना।

2. मानवीय तथा जैविक संस्थानों को समृद्ध करके विद्यार्थी को उचित शैक्षिक सुविधाएं जुटाना तथा अच्छी शिक्षा प्रदान करने की व्यवस्था प्रदान करना।

टिप्पणी

उपरोक्त उपचारात्मक उपायों को अपनाने के साथ–साथ विशेष प्रकार से आयोजित उपचारात्मक शिक्षण प्रदान करने के भी प्रयत्न किए जाने चाहिए। यह शिक्षण क्या होता है और कैसे प्रदान किया जाता है, इसी बात पर अब आगे हम विचार करना चाहेंगे।

उपचारात्मक शिक्षण क्या होता है?

उपचारात्मक शिक्षण, जैसा कि इसके नाम में विदित होता है, इस प्रकार का शिक्षण या अनुदेशात्मक कार्य होता है जिसे किसी एक विद्यार्थी या विद्यार्थियों के समूह विशेष की किसी विषय विशेष के अधिगम से संबंधित कार्य एक विशेष कठिनाई कमजोरी या समस्या (विशिष्ट या सामूहिक) जिसकी किसी निदानात्मक परीक्षण या इसी प्रकार की कुछ निदानात्मक उपायों के माध्यम से पता चलता हो, का निवारण के लिए काम में लाया जाता है।

इसी तरह, किसी भी प्रकार के उपचारात्मक शिक्षण का मुख्य आधार, वे निदानात्मक प्रयत्न होते हैं, जिन्हें इस विशेष उद्देश्य के लिए किया जाता है कि अधिगम कार्य में जिस तरह की परेशानियों, कठिनाइयों तथा कमजोरियों का सामना, अधिगमकर्ताओं को करना पड़ रहा है, उनके बारे में ठीक–ठीक निदान किया जा सके। जितनी अच्छी तरह से ये निदानात्मक प्रयत्न किए जाएंगे और उनका फलस्वरूप जितनी अच्छी तरह से निदानात्मक परिणाम प्राप्त होंगे, विद्यार्थी को अधिगम कठिनाई, कमजोरी तथा परेशानियों से उसे मुक्ति दिलाने हेतु उतने ही अच्छे ढंग से उपचारात्मक शिक्षण का आयोजन एवं क्रियान्वयन किया जा सकेगा।

अतः यह कथन कि जैसा रोग होता है, उपचार भी वैसे ही किया जाता है, सभी अर्थों में खरा उतरता है। इस मूल मान्यता का अनुसरण करते हुए जैविक विज्ञान में संभावित उपचारात्मक शिक्षण के बारे में कुछ निम्नधारणाएं बना सकते हैं–

1. अगर कक्ष के सभी या अधिकांश विद्यार्थी किसी एक प्रकार की अधिगम कठिनाई या कमजोरी का अनुभव कर रहे हैं तो उनके निवारण हेतु एक साझा उपचारात्मक कार्यक्रम अपनाया जा सकता है। इस कार्य हेतु कठिनाई तथा कमजोरी जिस क्षेत्र या प्रकरण विशेष से संबंधित है उस प्रकरण या अधिगम विशेष के पुनः शिक्षण–अधिगम हेतु विशेष अतिरिक्त कक्षाएं लगाई जा सकती हैं तथा उसके शिक्षण हेतु अन्य अधिगम शिक्षण विधियों, दृश्य–श्रव्य साधनों तथा शिक्षण व्यूह, रचनाओं, अभ्यास कार्य, प्रयोगात्मक कार्य आदि का सहारा लिया जा सकता है।
2. अगर उपचारित कमजोरी ऐसी है जिसे विद्यार्थी विशेष द्वारा ही अनुभव किया जा रहा है तब उपचारात्मक उपाय भी वैयक्तिक और विशिष्ट ही होंगे। इस तरह अगर कोई विद्यार्थी किसी प्रकरण विशेष में इसलिए किसी अधिगम का अनुभव कर रहा है, क्योंकि इसे पढ़ने के लिए जो पूर्व ज्ञान तथा अधिगम क्षमताएं उसे चाहिए, वे उसके पास नहीं हैं तो इसका एकमात्र बेहतर उपाय यही है कि उसे यह बुनियादी आधार प्रदान कर दिया जाए।

उसकी पुरानी कमजोरी, जो विषय विशेष के अर्जन में रह गई है, उसे दूर कर दिया जाए। इस कार्य हेतु इस कमजोरी के निवारण हेतु व्यक्तिगत रूप से उसे जो भी शिक्षण चाहिए, वह उपयुक्त विधियों तथा तकनीकों से प्रदान करना ही यहां उसके लिए उपचारात्मक शिक्षण का प्रयोजन माना जाएगा।

3. अगर उपचारित की जा रही कमजोरी ऐसी नहीं है, जो उसके पूर्व ज्ञान तथा पिछली पढ़ाई हुई बातों को अच्छी तरह ग्रहण करने से संबंधित हो, तब उसके कारण अवश्य ही परिणाम में किए जाने वाले शिक्षण अधिगम कार्यक्रम में हुए होंगे। निदानात्मक परीक्षण के परिणाम तथा विद्यार्थी विशेष द्वारा की जाने वाली अधिगम त्रुटियों के विश्लेषण से ही अब यह मालूम पड़ेगा कि उसके द्वारा विषय या प्रकरण विशेष के अधिगम के संदर्भ में किस प्रकार की कठिनाई या कमजोरी का अनुभव किया जा रहा है तथा उसके पीछे कौन–से संभावित कारण हो सकते हैं। इस प्रकार के निदान के आधार पर ही उसके लिए विशिष्ट उपचारात्मक शिक्षण के आयोजन का नियोजन किया जा सकता है।

इस प्रकार से विभिन्न प्रकार के निदानात्मक कार्य और उनके परिणामों का उचित विश्लेषण करने के आधार पर ही विद्यालयों में उपचारात्मक शिक्षण के संगठन की व्यवस्था की जा सकती है।

1.5.3 सीखने के उद्देश्यों और परिमाणों का निर्माण

किसी भी कार्य को करने से पहले यह सोचा जाता है कि कार्य क्यों किया जाना चाहिए? इसके करने से क्या–क्या लाभ होंगे? उसी के अनुसार करने की योजना बनाई जाती है तथा यह ध्यान रखा जाता है कि काम को करने से जितने अधिक से अधिक लाभ हो सकते हैं, उन सभी की अच्छी तरह प्राप्ति हो सके। यही बात किसी भी विषय को पढ़ने अथवा पढ़ाने पर लागू होती है। विज्ञान को पढ़ने अथवा पढ़ाने से पहले यही सोचा जाता है कि इसे क्यों पढ़ाया जाए? इसके पढ़ने से क्या–क्या लाभ हो सकते हैं? इन्हीं लाभों की आशा लगाकर विभिन्न स्तरों पर भिन्न–भिन्न स्तरों के बच्चों की आवश्यकताओं, योग्यताओं तथा रुचियों के आधार पर विज्ञान शिक्षण के लक्ष्य या प्रयोजन निर्धारित किए जाते हैं तथा उन्हें अनुकूल योजना बनाकर प्राप्त करना ही पढ़ने और पढ़ाने का लक्ष्य मान लिया जाता है।

अब आगे प्रश्न उठता है कि शिक्षण के उद्देश्य क्या होते हैं तथा उनका शिक्षण के लक्ष्य और प्रयोजनों से क्या संबंध होता है। यह बात ध्यान देने की है कि अधिकतर लक्ष्य एवं उद्देश्यों, दोनों को समान अर्थ में ले लिया जाता है, अतः इनके बारे में स्पष्ट ज्ञान होना आवश्यक है। सामान्य रूप से विद्यालय के पाठ्यक्रम में जिन विषयों को समाविष्ट किया जाता है, उन्हें पाठ्यक्रम में रखने का कुछ न कुछ प्रयोजन अवश्य होता है और इसी ध्येय की प्राप्ति के लिए प्रत्येक विषय को पढ़ाने के अपने–अपने लक्ष्य निर्धारित किए जाते हैं। अधिकतर इन लक्ष्यों का निर्धारण इस बात पर निर्भर करता है कि उनके पढ़ाने के द्वारा किस प्रकार के लाभों या मूल्यों की प्राप्ति संभव है। आगे हम इनमें से किसी विशेष लक्ष्य की प्राप्ति के लिए प्रयत्न करते हैं तो उसके लिए जिन

छोटी–छोटी बातों को ध्यान में रखा जाता है, उन्हें इस लक्ष्य के उद्देश्य कहा जाता है। इस तरह से किसी एक विशेष लक्ष्य के अंतर्गत कई उद्देश्यों का समावेश हो सकता है। जैविक विज्ञान के शिक्षण के उद्देश्य, जैविक विज्ञान के शिक्षण के व्यापक लक्ष्यों पर ही आधारित होते हैं तथा जैविक विज्ञानों के शिक्षण के व्यापक लक्ष्यों पर ही आधारित होते हैं तथा जैविक विज्ञानों के पठन–पाठन को अधिक उपयोगी बनाकर विद्यार्थियों के व्यवहार में उपर्युक्त परिवर्तन लाने की भूमिका निभाते हैं। इनमें निहित अंतर को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

1. उद्देश्यों का क्षेत्र, लक्ष्यों के मुकाबले बहुत सीमित होता है।
2. उद्देश्य लक्ष्यों की तुलना में अधिक व्यावहारिक, स्पष्ट और इस प्रकार निर्धारित किए जाते हैं कि इनकी प्राप्ति एक अध्यापक द्वारा कक्षा में उपलब्ध साधनों एवं समय पर अच्छी तरह की जा सकें।
3. जहां लक्ष्य संपूर्ण तथा अंतिम होते हैं, वहीं उद्देश्य लक्ष्य के ही वे भाग होते हैं जो कि लक्ष्य विशेष प्राप्ति में भरसक योगदान देने का प्रयत्न करते हैं।
4. लक्ष्य जहां एक तरह के एक आदर्श के रूप में विद्यार्थियों तथा अध्यापक के सामने उपस्थित रहते हैं, वहीं उद्देश्य अच्छी तरह से निश्चित और प्राप्य होते हैं।

अपनी निश्चितता और प्राप्यता के फलस्वरूप ही जब किसी विशेष विषय का अध्यापक अपने विषय में संबंधित उपविषय के प्रकरण को पढ़ा रहा होता है तो उसके सामने प्राप्त करने के लिए व्यापक उद्देश्य या लक्ष्य नहीं होते बल्कि प्राप्त हो सकने योग्य, कुछ ऐसे सीमित उद्देश्य ही होते हैं, जो उसके प्रयोगों को निश्चित और स्पष्ट दिशा प्रदान कर सके।

विद्यालय स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्य

अन्य विषयों के समान जैविक विज्ञानों का शिक्षण विद्यालयों में इसी प्रयोजन के हेतु संपन्न किया जाता है कि बालकों की उचित विकास और प्रगति को ध्यान में रखते हुए उनके व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाए जाएं। ये परिवर्तन व्यवहार के तीनों पक्षों– ज्ञानात्मक, भावनात्मक तथा क्रियात्मक (मनो–शारीरिक) में ही लाये जाते हैं इसलिए जब सामान्य रूप से हमें जैविक विज्ञान शिक्षण के उद्देश्यों का निर्धारण करना होता है तो हमें व्यवहार के तीनों पक्षों से संबंधित उन सभी अपेक्षित परिवर्तन की व्याख्या करनी होती है, जिनके होने की पूरी–पूरी संभावना जैविक विज्ञान में शिक्षण के माध्यम में हमें होती है। शैक्षिक उद्देश्यों को व्यवहारगत परिवर्तनों के संदर्भ में व्याख्या करने हेतु हम उन्हें कुछ निश्चित वर्गों, जैसे– ज्ञानात्मक, बोधात्मक, प्रयोगात्मक, कौशलात्मक, रुचि, दृष्टिकोण तथा प्रशंसाात्मक उद्देश्यों में भी बांटने का प्रयत्न करते हैं। इस परिप्रेक्ष्य में विद्यालय स्तर पर जैविक विज्ञान शिक्षण के उद्देश्यों को सामान्य रूप से निम्न प्रकार निर्धारित किए जाने का प्रयत्न किए जा सकते हैं–

1. **ज्ञानात्मक उद्देश्य**– विद्यार्थी जैविक विज्ञान से संबंधित पदों, तथ्यों, अवधारणाओं, परिभाषाओं, प्रनियमों, विद्वानों तथा प्रक्रियाओं का ज्ञान प्रदान करते हैं।

2. **बोधात्मक उद्देश्य**— विद्यार्थियों में जैविक से संबंधित पदों, तथ्यों, अवधारणाओं, परिभाषाओं, प्रनियमों, सिद्धांतों तथा प्रक्रियाओं से संबंधित ज्ञान के बारे में समुचित समझ विकसित होती है।

टिप्पणी

3. **प्रयोगात्मक उद्देश्य**— जैविक विज्ञानों का शिक्षण विद्यार्थियों द्वारा अर्जित जैविक विज्ञानों से संबंधित तथ्यों, प्रनियमों, सिद्धांतों तथा प्रक्रियाओं के ज्ञान तथा अवबोध को निम्न बातों में प्रयोग/उद्देश्य करने में सहायक होता है—
   (क) दिन प्रतिदिनि की जिंदगी के क्रियाकलाप।
   (ख) नयी और अपरिचित परिस्थितियों/समस्याओं का सामना करना।
   (ग) जैविक विज्ञान संबंधित उच्चतर ज्ञान एवं अवबोध को ग्रहण करने में सहायक होना।
   (घ) विद्यालय पाठ्यक्रम के अन्य विषयों तथा कार्य अनुभव क्षेत्रों से जुड़े हुए अनुभवों को समवायी रूप से अर्जित करने में सहायक सिद्ध होना।
4. **कौशलात्मक उद्देश्य**— जैविक विज्ञानों का अध्ययन विद्यार्थियों में निम्न प्रकार के कौशलों/वशताओं के अर्जन में सहायक होता है—
   (क) मैनीपुलेटिव यानी हस्तबाधक कौशलों (जिनमें विद्यार्थियों में विभिन्न—विभिन्न प्रकार के प्रयोगात्मक, क्रियान्वयन तथा प्रोजेक्ट संबंधी कार्य में प्रयुक्त उपकरणों एवं यंत्रों के उपयोग संबंधी सामर्थ्य एवं योग्यता आती है) का अर्जन।
   (ख) रेखाकृति, आरेख, चित्र, आकृतियां, अनुकृतियां, ग्राफ आदि के निर्माण संबंधी कौशलों का अर्जन।
   (ग) विभिन्न प्रकार के प्रयोग एवं परीक्षणों को संपादित करने तथा उनसे उचित कौशलों का सामान्यीकरण करने की दक्षता का अर्जन।
   (घ) चीड़—फाड़ तथा सूक्ष्म परीक्षण हेतु उचित नमूने का चयन—
      - निश्चित उद्देश्य हेतु नमूने को सही तरह से फिक्स करना। उसमें चीर—फाड़ या सूक्ष्म निरीक्षण हेतु प्रयुक्त उपकरणों का सही चयन और ठीक प्रकार से काम में लाना।
      - बिना किसी प्रकार की क्षति पहुंचाए सावधानी से नमूने के अध्ययन किए जाने वाले अंगों को चीड़—फाड़ कर अलग करना।
      - नमूने के जिन अंगों को प्रदर्शित करना है, उन्हें स्वच्छता एवं शुद्धतापूर्वक प्रदर्शित करना।
      - चीर—फाड़ तथा सूक्ष्म परीक्षण द्वारा उपलब्ध तथ्यों को ठीक प्रकार से रिकॉर्ड करना तथा उनसे सही—सही निष्कर्ष एवं परिणाम निकालना।

   (ङ) विभिन्न प्रकार के जैविक पदार्थों के संग्रहित एवं सुरक्षित रखने संबंधी कौशल, जैसे— अस्थाई तथा स्थायी रूप से माउंटिंग करना, विभिन्न प्रकार की स्लाइडें बनाना आदि।

(च) जैविक विज्ञानों से संबंधित विभिन्न प्रकार की न्यूमेरिकल समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय कौशलों का अर्जन।

5. **रुचि संबंधी उद्देश्य**– जैविक विज्ञानों का अध्ययन विद्यार्थियों में जैव विज्ञान संसार के प्रति पर्याप्त आकर्षण और रुचियों को विकसित करने में काफी सहायक सिद्ध होता है। उनकी इस रुचि वृद्धि संबंधी व्यवहार का पता उनके निम्न प्रकार के व्यवहार कार्यों में अच्छी तरह चल सकता है–

टिप्पणी

(क) जैव विज्ञानों के शिक्षण, उनसे संबंधित चर्चा आदि के दौरान अधिक जानकारी हेतु प्रश्नों का पूछना।

(ख) जैव विज्ञानों में संबंधित पुस्तकें तथा साहित्य के अध्ययन में रुचि दिखाना।

(ग) जैव वैज्ञानिकों की जीवनी और योगदान के बारे में जानने का प्रयत्न करना तथा इससे संबंधित साहित्य का अध्ययन करना।

(घ) जैविक विज्ञान संबंधी स्थानों की सैर तथा पर्यटन में रुचि दिखाना।

(ङ) जैविक विज्ञानों में अध्ययन से संबंधित सामग्री के संग्रह, संरक्षण तथा रख–रखाव में रुचि दिखाना।

(च) वाइबेरियम, एक्वीरियम तथा टेटेरियम के संगठन में सहयोग प्रदान करना।

(छ) जीव विज्ञान उद्यान या वाहिका के संगठन में योगदान देना।

(ज) जीव विज्ञान संबंधी रुचिकर क्रियाओं के संपादन में रुचि दिखाना।

6. **दृष्टिकोण या अभिवृति संबंधी उद्देश्य**– जैविक विज्ञानों का अध्ययन विद्यार्थियों में निम्न प्रकार के प्रशंसात्मक अथवा सराहात्मक भाव पैदा करना एवं विद्यार्थियों में निम्न प्रकार की अभिवृत्तियों का विकास करने में सहायक सिद्ध होता है–

(क) जैविक विज्ञान के अध्ययन तथा उपयोग के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण।

(ख) जीवन की वास्तविकता का सामना करने तथा ज्ञान एवं कुशलताओं का अर्जन करते हुए वैज्ञानिक दृष्टिकोण एवं अभिवृत्ति का समुचित विकास।

7. **प्रशंसात्मक उद्देश्य**– जैविक विज्ञानों का अध्ययन विद्यार्थियों में निम्न प्रकार के प्रशंसात्मक अथवा सराहात्मक भाव पैदा करने में सहायक होता है। इसके प्रमाण उनके निम्न प्रकार के व्यवहार प्रदर्शन के माध्यम से मिल सकते हैं–

(क) व्यक्ति एवं समाज की प्रगति और विकास में जैविक विज्ञान के योगदान की सराहना करना।

(ख) हमारे जीवन को स्वस्थ एवं सुखी बनाने में जैविक विज्ञान की भूमिका की सराहना करना।

(ग) वनस्पति जगत और प्राणी जगत के बीच अंतः निर्भरता, प्रकृति की लीला, प्रकृति के सभी घटकों के बीच उपस्थित संतुलन, सूक्ष्म जीव और उनकी

हमारे जीवन में महत्ता आदि विभिन्न प्रकार की जैविक विकास संबंधि जानकारी की प्रशंसा करना।

(घ) विभिन्न जैविक वैज्ञानिकों के महान आविष्कारों ओर खोजों में जुड़े हुए योगदान की सराहना करना।

टिप्पणी

अनुदेशात्मक उद्देश्यों का अर्थ

जैविक विज्ञापनों में अनुवेशन अर्थात किसी विशेष पाठ या प्रकरण के शिक्षण अधिगम हेतु अध्यापक को नियम कक्षा अवधि में अपने संचित साधनों के अंतर्गत पूरे होने वाले कुछ निश्चित अतिविशिष्ट उद्देश्यों को ही अपने सामने रखकर आगे बढ़ना होता है। इन अतिविशिष्ट और निश्चित कक्षा शिक्षण अधिगम उद्देश्य, जिन्हें प्रायः अनुदेशात्मक उद्देश्यों की संज्ञा दी जाती है, के माध्यम से ही वह विद्यार्थियों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाने की चेष्टा करता है। इस प्रकार जैविक विज्ञान शिक्षण के संदर्भ में अनुदेशात्मक उद्देश्यों से तात्पर्य शिक्षक द्वारा निर्मित उन विशिष्ट तथा निश्चित कथन समूहों से होता है, जिनकी सहायता से अध्यापक को यह स्पष्ट ज्ञान होता है कि किसी पाठ या प्रकरण विशेष के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थियों, उद्देश्यों का प्रयोजन शिक्षण के फलस्वरूप विद्यार्थियों का जो अंतिम व्यवहार होता है, उसकी स्पष्ट, सटीक एवं निश्चित शब्दों में व्याख्या करना होता है।

गणित शिक्षण के अनुदेशात्मक उद्देश्यों का सामान्य लक्ष्यों तथा उद्देश्यों से संबंध

जैविक विज्ञान शिक्षण के सामान्य लक्ष्यों तथा उद्देश्यों, जिनकी चर्चा हमने ऊपर इस पाठ के अंतर्गत पहले की है की तुलना में जैविक विज्ञानों के किसी पाठ या प्रकरण के लिए निर्धारित अनुदेशात्मक उद्देश्य बहुत संकुचित तथा अतिविशिष्ट होते हैं। वे निश्चित, स्पष्ट, व्यावहारिक व प्राप्त करने के योग्य होते हैं। ये पूर्व निर्धारित होते हैं और इनका निर्माण इस प्रकार किया जाता है कि निश्चित अवधि वाले एक निर्धारित कालांश में संपन्न किए गए सामान्य कक्षा शिक्षण द्वारा आसानी से उनकी प्राप्ति हो सकती है। ये शिक्षण व अधिगम के वांछित परिणाम होते हैं। अतः इन्हें शिक्षण एवं वांछित व्यवहार परिवर्तन तथा अधिगम उद्देश्यों का नाम भी दे दिया जाता है और इनका मापन भी आसानी से किया जा सकता है। कक्षा में संपन्न अनुदेशात्मक कार्य के पश्चात विद्यार्थी जिस प्रकार के अपेक्षित व्यवहार का प्रदर्शन कर सकेंगे, उस व्यवहार को मापने योग्य उचित शब्दावली में व्यक्त करना भी अनुदेशात्मक उद्देश्यों का प्रयोजन है।

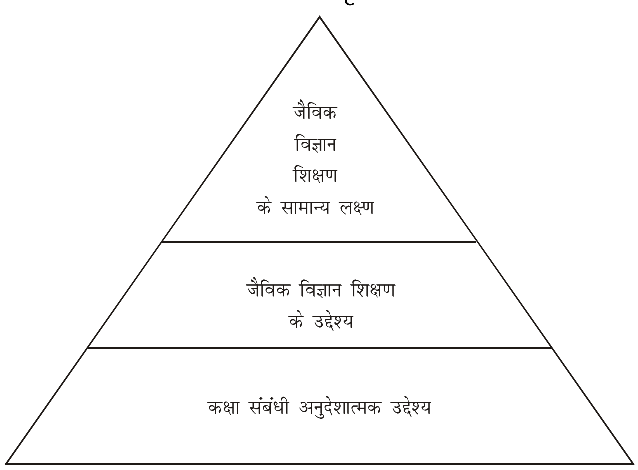
इसके विपरीत जैविक विज्ञान शिक्षण के सामान्य लक्ष्यों से तात्पर्य शैक्षिक लक्ष्यों या आदर्शों से होता है, जिन्हें हम जैविक विज्ञान शिक्षण के द्वारा प्राप्त करना चाहते हैं। बहुधा वे इतने व्यापक होते हैं या पूर्णता की उस स्थिति का बोध कराते हैं जिस तक पहुंचना संभव भी हो सकता है और असंभव भी। जैसे—जैविक विज्ञान शिक्षण के द्वारा बालकों की मानसिक शक्तियों का समुचित विकास करना, नैतिकता संबंधी गुणों से बालकों को युक्त करना, उनमें अंतर्राष्ट्रीय शांति, सद्भाव व भाईचारे के गुणों को

विकसित करना आदि–आदि। इस तरह ये इतने अस्पष्ट और अनिश्चित होते हैं कि उपलब्ध शैक्षिक ढांचे और कक्षा परिस्थितियों में इनकी प्राप्ति कठिन ही नहीं असंभव भी हो सकती है।

टिप्पणी

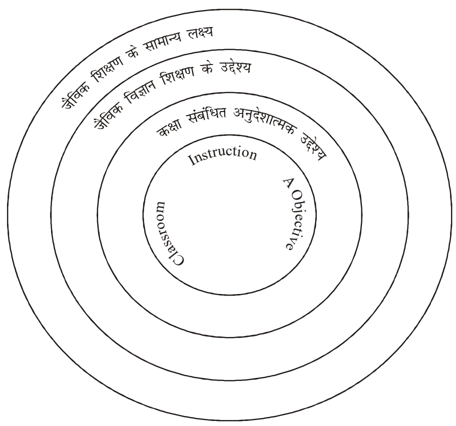
जैविक विज्ञान के उद्देश्य, सामान्य लक्ष्यों तथा अनुदेशात्मक उद्देश्यों के बीच स्थिति को प्रकट करते हैं। ये सामान्य उद्देश्यों से अधिक विशिष्ट, सीमित एवं सुनिश्चित होते हैं, परंतु अनुदेशात्मक उद्देश्यों से कम विशिष्ट और अधिक विस्तृत होते हैं। इनका उद्देश्य जैविक विज्ञानों की शिक्षा द्वारा बालकों के व्यक्तित्व के ज्ञानात्मक, भावात्मक और मनो–शारीरिक पक्षों को उचित रूप से विकसित करने में सहायता प्रदान करना होता है।

इस प्रकार जैविक विज्ञान शिक्षण के कक्षा संबंधी अनुदेशात्मक उद्देश्यों तथा सामान्य लक्ष्यों के आपसी संबंधों को चित्र 1.4 द्वारा अच्छी तरह से प्रदर्शित किया जा सकता है। इससे स्पष्ट होता है कि जैविक विज्ञान शिक्षण के अनुदेशात्मक उद्देश्यों के प्राप्ति प्रयोगात्मक रूप से जमीनी सतह पर संभव है, जबकि सामान्य लक्ष्य अधिक ऊंचाई पर स्थित होने के कारण प्राप्ति की दृष्टि से असंभव होते हैं।



चित्र 1.4 *जैविक विज्ञान शिक्षण के लक्ष्यों एवं उद्देश्यों की चित्रात्मक प्रस्तुति*

उद्देश्यों के इन व्यापक और सीमित दृष्टिकोण और उनके प्रभाव क्षेत्र को अग्र चित्र (1.5) द्वारा भी प्रदर्शित किया जा सकता है–



चित्र 1.5 *जैविक विज्ञान शिक्षण के उद्देश्यों की व्यापकता का चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण*

इस दृष्टिकोण के अनुसार, जैविक विज्ञान शिक्षण के सामान्य लक्ष्य तथा प्रयोजन वह विशाल समुद्र है, जिसके गर्भ में उद्देश्य समाए हुए हैं और आगे चलकर अनुदेशात्मक या शिक्षण अधिगम उद्देश्य इन उद्देश्यों के अंतर्गत ही समाविष्ट हो जाते हैं।

सारांश रूप में यहां कहा जा सकता है कि जैविक विज्ञान शिक्षण हेतु एक अध्यापक के सामने पहले तो वह एक सामान्य लक्ष्य या प्रयोजन होते हैं, जिनकी प्राप्ति जैविक विज्ञान शिक्षण के मूल्यों से संबंधित रहती है। इसके बाद विद्यालय स्तर पर विशेष के लिए निर्धारित उद्देश्य होते हैं जिनके द्वारा विद्यार्थी के ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाए जाते हैं और जिन्हें ज्ञानात्मक, प्रयोगात्मक, दक्षता, दृष्टिकोण, अनुभूति एवं सराहनात्मक प्राप्य उद्देश्यों के रूप में वर्गीकृत किया जाता है और इसके पश्चात बारी आती है अनुदेशात्मक उद्देश्यों की। किसी पाठ या प्रकरण विशेष के अनुदेशन हेतु अध्यापक द्वारा इस प्रकार के अनुदेश उद्देश्यों का निर्माण किया जाता है। इस प्रकार के उद्देश्य व्यवहार के तीनों पक्षों— ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक से संबंधित होते हैं। इनके विषय पर हम नीचे विस्तार से चर्चा करना चाहेंगे।

अनुदेशात्मक उद्देश्यों की वर्गीकरण प्रणाली

टेक्सोनोमी का अर्थ वर्गीकरण करने की एक प्रणाली है, जिस प्रकार डीवी ने पुस्तकालय एवं ग्रंथों के अलग—अलग वर्गीकरण के लिए अपनी दशमलव प्रणाली प्रस्तुत की थी। उसी प्रकार अनुदेशात्मक उद्देश्यों को वर्गीकृत करने की दिशा में अनेक विद्वानों द्वारा विभिन्न प्रयास किए गए हैं, परंतु बी.एस. ब्लूम और उसके सहयोगियों द्वारा किया गया प्रयास काफी सराहनीय है। ब्लूम द्वारा अनुदेशात्मक उद्देश्यों का वर्गीकरण इस आधार पर किया गया है कि शिक्षण अधिगम प्रक्रिया किसी पाठ्य पुस्तक या अधिगम द्वारा विद्यार्थियों के व्यवहार में परिवर्तन लाने का एक प्रयास है। व्यवहार के तीन पक्ष—ज्ञानात्मक, भावात्मक और क्रियात्मक। ब्लूम ने इन तीनों पक्षों के आधार पर अनुदेशात्मक या शिक्षण अधिगम उद्देश्यों का वर्गीकरण निम्न प्रकार किया है—

(क) ज्ञानात्मक उद्देश्य,

(ख) भावात्मक उद्देश्य, एवं

(ग) क्रियात्मक उद्देश्य।

प्रथम ज्ञानात्मक पक्ष का वर्गीकरण ब्लूम एवं अन्यों ने दूसरे भावात्मक पक्ष का वर्गीकरण ब्लूम व उसके सहयोगी क्रथवाल व मरिया ने तीसरे क्रियात्मक पक्ष का वर्गीकरण सिम्पसन तथा हेरो ने प्रस्तुत किया है। यहां सभी पक्षों का वर्गीकरण संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जा रहा है।

ज्ञानात्मक पक्ष के अनुदेशात्मक उद्देश्यों का वर्गीकरण

ब्लूम ने ज्ञानात्मक पक्ष के उद्देश्यों को सरल से कठिन और शिक्षण अधिगम के निम्न स्तर से शुरू करके ऊंचे से ऊंचे स्तर तक ले जाने के दृष्टिकोण को ध्यान में रखते हुए छह वर्गों में विभाजित किया जाता है। ये वर्ग हैं— ज्ञान, बोध, प्रयोग, विश्लेषण, संश्लेषण और

मूल्यांकन। साथ ही उन्होंने हर वर्ग के अधिगम परिणामों को भी स्पष्ट करने का प्रयास किया है, जैसा कि निम्नलिखित तालिका (1.8) में प्रस्तुत किया गया है–

टिप्पणी

***तालिका 1.8** ज्ञानात्मक पक्ष के उद्देश्यों का वर्गीकरण*

1. ज्ञान	(अ) विशिष्टताओं का ज्ञान	(क) पदों का ज्ञान (ख) विशिष्ट तथ्यों का ज्ञान
	(ब) विशिष्ट ज्ञान से संबंध स्थापित करने के उपायों एवं परंपराओं का ज्ञान	(क) परंपराओं का ज्ञान (ख) प्रचलन एवं तारतम्य का ज्ञान (ग) वर्गीकरण एवं वर्गों का ज्ञान (घ) कसौटियों का ज्ञान (ङ) विधियों का ज्ञान
	(स) ज्ञान के किसी क्षेत्र के सार्वभौमिक और अमूर्त प्रत्यायों का	(क) प्रनियमों और सामान्यीकरण का ज्ञान
2. बोध	(अ) अनुवाद (ब) अर्थापन (स) बहिर्वेशन	
3. प्रयोग (तीसरे क्रम का निम्न स्तर)		
4. विश्लेषण (उच्च स्तर)	(अ) तत्वों का विश्लेषण (ब) संबंधों का विश्लेषण (स) संगठनात्मक प्रनियमों का विश्लेषण	
5. संश्लेषण (उच्च स्तर)	(अ) एक नवीन संप्रेषण का उत्पादन (ब) किसी प्रस्तावित कार्यविधि के लिए योजना बनाना (स) अमूर्त संबंधों के समुच्चय का निर्माण	
6. मूल्यांकन (उच्च स्तर)	(अ) आंतरिक साक्ष्यों के आधार पर मूल्य निर्धारण (ब) बाह्य कसौटियों के आधार पर मूल्य निर्धारण	

ब्लूम द्वारा प्रस्तुत किए गए ज्ञानात्मक पक्ष के उपरोक्त वर्गीकरण को इस प्रकार से स्पष्ट कर सकते हैं–

1. **ज्ञान**– इस वर्ग में विद्यार्थियों को पाठ्यवस्तु के विशिष्ट तथ्यों, पदों, परंपराओं, प्रचलनों, वर्गों, कसौटियों, विधियों, प्रनियमों, सामान्यीकरण सिद्धांतों एवं संरचनाओं का प्रत्यभिज्ञान और प्रत्यास्मरण कराने का, करने का प्रयास किया जाता है तथा कक्षा में इसके लिए समुचित परिस्थितियां उत्पन्न की जाती हैं।
2. **बोध**– ज्ञान वर्ग में जिन तथ्यों, पदों, परंपराओं, वर्गों और प्रनियमों आदि का, जिससे विद्यार्थी उस ज्ञान को अपने शब्दों में अनुवाद करके व्यक्त कर सकें, बाह्य गणना और उल्लेख कर सकें। ज्ञान के बिना बोध नहीं हो सकता है। अतः ज्ञान वर्ग इस वर्ग के लिए आवश्यक आधार है।
3. **प्रयोग**– किसी भी तथ्य, नियम के सिद्धांत का सामान्यीकरण करने, उनकी कमजोरियों का निदान करने तथा पाठ्य वस्तु का प्रयोग करने के लिए यह आवश्यक है कि पहले उस वस्तु का ज्ञान व बोध होना चाहिए तब ही विद्यार्थी उचित ढंग से, अपनी योग्यतानुसार व्यक्तिगत परिस्थितियों में उस ज्ञान का प्रयोग कर सकेंगे। अतः ज्ञान व बोध वर्ग इस वर्ग के आधार हैं।
4. **विश्लेषण**– इस वर्ग में विद्यार्थियों को तथ्यों, नियमों या सिद्धांतों आदि का विश्लेषण, उनके संबंधों का विश्लेषण तथा उनका व्यवस्थित सिद्धांतों के रूप में

विश्लेषण करना होता है। सीखी गई वस्तु के तथ्यों को इस प्रकार अलग–अलग करने और उनका संबंध स्थापित करने के लिए ज्ञान, बोध व प्रयोग के उद्देश्यों की प्राप्ति आवश्यक है।

5. **संश्लेषण**– विद्यार्थी पहले चार वर्गों के उद्देश्यों की प्राप्ति के पश्चात ही सीखी गई पाठ्य वस्तु के तथ्यों, नियमों, सिद्धांतों आदि के एक नवीन रूप में व्यवस्थित करके एक नया अनोखा संप्रेषण योजना या प्रारूप तैयार करते हैं।
6. **मूल्यांकन**– किसी भी शिक्षण कार्य की सफलता इस बात में निहित है कि विद्यार्थी यह निर्णय ले सकें कि उन्होंने जो भी अधिगम किया है वह मूल्य की दृष्टि से उपयोगी है या अनुपयोगी। अतः इस स्तर पर साक्ष्यों व बाह्य कसौटियों के आधार पर बच्चों में पाठ्य वस्तु के तथ्यों, सिद्धांतों और नियमों आदि के बारे में निर्णय लेने की योग्यता विकसित की जाती है।

इसी प्रकार विभिन्न शिक्षण विषयों में निहित तथ्यों, सिद्धांतों आदि की सहायता से ज्ञान से लेकर मूल्यांकन तक के उद्देश्यों की प्राप्ति करके ज्ञानात्मक पक्ष को विकसित करने का प्रयास किया जाता है।

भावात्मक पक्ष के अनुदेशात्मक उद्देश्यों का वर्गीकरण

ब्लूम और उसके सहयोगियों क्रथवाल और मरिया ने भावात्मक पक्ष के उद्देश्यों का जो वर्गीकरण निम्न स्तर से उच्च स्तर पर जाते हुए जिस रूप में प्रस्तुत किया है वह निम्न है–

तालिका 1.9 *भावात्मक पक्ष के उद्देश्यों का वर्गीकरण*

1. आग्रहण या ध्यान देना	(क) अभिज्ञता या चेतना (ख) ग्रहण करने की तत्परता (ग) नियंत्रित या चयनात्मक अवधान
2. अनुक्रिया	(ब) अनुक्रिया करने की सम्मति देना (ख) अनुक्रिया करने की तत्परता (ग) अनुक्रिया करने में संतुष्टि
3. आकलन	(क) किसी मूल्य की स्वीकृति (ख) किसी मूल्य की अधिक लगाव व अभिरुचि (ग) प्रतिबद्धता
4. संगठन	(क) एक मूल्य प्रणाली को धारण करना (ख) एक मूल्य प्रणाली का संगठन करना
5. मूल्य प्रणाली का चरित्रीकरण अथवा विशेषीकरण– उच्च स्तर का उद्देश्य	(क) सामान्यीकृत समुच्चय (ख) चरित्रीकरण

इस प्रकार हम देखते हैं कि ब्लूम और उसके सहयोगियों ने भावात्मक पक्ष के शैक्षिक उद्देश्यों को पांच वर्गों में विभाजित किया है जिनको इस ढंग से स्पष्ट किया जा सकता है–

1. **आग्रहण या ध्यान देना**– भावात्मक विकास की दृष्टि से सबसे पहले मानव मूल्यों की अनुभूति करानी होती है। अनुभूति के लिए किसी–न–किसी प्रकार के

उद्दीपन का होना अत्यंत आवश्यक है। इस उद्दीपन के प्रति विद्यार्थियों को आवश्यक रूप से आकृष्ट होना चाहिए और उसके प्रति अनुक्रिया करने की इच्छा उत्पन्न होनी चाहिए। इसलिए इस वर्ग में अध्यापक का कार्य, विद्यार्थियों का प्रस्तुत विषय वस्तु के प्रति पर्याप्त रूप से आकर्षित कराना तथा इस प्रकार से अभिप्रेरित करना है कि विद्यार्थियों में मानवीय मूल्यों को भली–भांति ग्रहण करने के लिए पर्याप्त इच्छा जाग्रत हो जाए। इच्छा जाग्रत होने ओर ध्यानाकर्षित होने की यह स्थिति विद्यार्थियों में उचित समय तक बनी रहे, इस कार्य हेतु पर्याप्त चेष्टा करना ही अध्यापक का कर्तव्य होता है।

2. **अनुक्रिया**– भावात्मक विकास का दूसरा स्तर विद्यार्थियों की उचित अनुक्रिया से संबंधित है। इस वर्ग के लिए आग्रहण वर्ग एक आधार का काम करता है। विद्यार्थियों में मूल्यों को उचित रूप से ग्रहण करने की इच्छा जब जाग्रत हो जाती है और जब वह शैक्षिक गतिविधियों में सुरुचिपूर्वक भाग लेना प्रारंभ कर देता है तभी उसके द्वारा की हुई अनुक्रियाओं की पहचान हो जाती है। विद्यार्थी अनुक्रिया करने में समर्थ हो, इसके लिए उन्हें अनुक्रिया करने के लिए तैयार किया जाना चाहिए, उनमें अनुक्रिया करने की इच्छा जाग्रत करनी चाहिए और वे अनुक्रिया करने में पर्याप्त संतुष्टि का अनुभव करें, इसके लिए आवश्यक करने का प्रयत्न करना चाहिए। इस प्रकार से यह वर्ग विद्यार्थियों से आत्माभिव्यक्ति, आत्म–विकास और प्राप्त संतुष्टि को विकसित रूप से सहायता करता है।

3. **आकलन**– इस वर्ग की क्रियाएं अपने दोनों वर्गों की क्रियाओं व उनके परिणामों पर आधारित हैं। जब कोई विद्यार्थी किसी वस्तु या विचार के प्रति पर्याप्त रूप से आकर्षित होकर ही मूल्यवान होते हैं जितना कि वह उन्हें अपने प्रयोजन पूर्ति का साधन समझता है। यहां उस वस्तु या विचार का सामाजिक मूल्य भी आंका जाता है। इस तरह व्यक्तिगत और सामाजिक दोनों प्रकार के मूल्यों की प्राप्ति की दृष्टि से उसका संबंधित व्यवहार प्रभावित होता है। इस प्रकार इस स्तर या अभिरुचि प्रकट करते हुए उसके पालन के लिए वचनबद्ध होने की योजना को विकसित करने का प्रयोग किया जाता है।

4. **संगठन**– जैसे–जैसे विद्यार्थी किसी वस्तु या विचार के मूल्य को ध्यान में रखते हुए उसके प्रति अपनी व्यवहार संबंधी अनुक्रियाएं करना सीखता जाता है, वैसे–वैसे इस दिशा में आगे बढ़ते हुए जब वह कई प्रकार के व्यक्तिगत व सामाजिक मूल्यों को ग्रहण करता है तो कई परिस्थितियों में उसे ऐसा आभास होता है कि ये मूल्य अंतर्विरोधी हैं। उनके इस टकराव को रोकने के लिए तथा इन मूल्यों को भली–भांति अर्पित करने के लिए मूल्यों के स्वरूप और संप्रत्यय का ज्ञान करना जरूरी हो जाता है। इस ज्ञान के बाद ही इनका व्यवस्थापन और संगठन करना होता है। इसके लिए एक अध्यापक विभिन्न मूल्यों के

टिप्पणी

व्यक्तिगत एवं सामाजिक हितचिंतन को अच्छी तरह ध्यान में रखकर इस प्रकार उचित समन्वय करना चाहिए कि व्यक्तिगत हितचिंतन होते हुए भी सामाजिक मूल्यों की प्राप्ति हो सके। इन मूल्यों के आपसी संबंधों को अच्छी प्रकार समझकर उनको एक ऐसी प्रणाली के अंदर गठित करना चाहिए, जिससे विद्यार्थियों में एक सशक्त चरित्र उभर कर सामने आ सके। इस प्रकार के स्तर की प्राप्ति इस वर्ग के पहले तीनों वर्गों के उद्देश्यों के प्राप्त होने के बाद ही हो सकती है।

5. **मूल्यों का चरित्रीकरण या विशेषीकरण**– भावात्मक पक्ष के विकास के इस स्तर तक पहुंचने के लिए इसके पहले चारों वर्गों के उद्देश्यों की प्राप्ति आवश्यक है। यहां आकर विद्यार्थी के व्यक्तिगत और सामाजिक मूल्यों के समन्वय से उत्पन्न जिस मूल्य प्रणाली अथवा चरित्र की भूमिका बन चुकी होती है, उसे विशेष रूप प्रदान करने का प्रयत्न किया जाता है, जिसके आधार पर उसके व्यक्तित्व की पहचान होती है। इस प्रकार अपने अंदर विभिन्न मूल्यों को आत्मसात करके वह भावनात्मक विकास से उच्च स्तर को प्राप्त करता है। इसलिए चरित्रीकरण या विशेषीकरण भावात्मक क्षेत्र के उद्देश्यों में सर्वोपरि है।

मनोशारीरिक या क्रियात्मक पक्ष के अनुदेशात्मक उद्देश्यों का वर्गीकरण

अपने चारों ओर फैले जैविक और सामाजिक वातावरण के साथ सही ढंग से समायोजन करने के लिए बालक का क्रियात्मक या मनोशारीरिक पक्ष से संबंधित उद्देश्यों को वर्गीकृत करने का सबसे पहला प्रयत्न सिम्पसन द्वारा किया गया। बाद में हैरो ने इससे आगे कुछ विकास किया। हैरो ने इन उद्देश्यों को छह वर्गों में विभाजित किया है। इस वर्गीकरण को इसी अध्याय की तालिका सं 1.11 में देखा जा सकता है। यहां वर्गीकृत अंगों का आवश्यक वर्णन किया जा रहा है–

1. **सहज क्रियात्मक अंग संचालन**– व्यवहार के क्रियात्मक पक्ष का यह वर्ग सबसे निम्न स्तर का है। ये क्रियाएं किसी वस्तु के संपर्क में आते ही बिना किसी इच्छा के अपने आप ही होने लगती हैं। ये स्वचालित स्नायुतंत्र व मस्तिष्क के द्वारा संचालित व नियंत्रित होती हैं। इसलिए ये क्रियाएं जन्म से मृत्यु तक विकसित होती रहती हैं। इनके बिना जीवन असंभव है। जब बच्चा अपने चारों ओर फैले किसी उद्दीपन के संपर्क में आता है तो वह कोई न कोई प्रतिक्रिया उत्तेजना में ही व्यक्त करता है, जैसे हाथी पर चींटी गिरते ही झटक देता है। इस प्रकार से मानव के सभी प्रकार के व्यवहार इन सहज क्रियाओं पर आधारित है। अतः इस वर्ग में विद्यार्थी की इन्हीं सहज क्रियाओं को और भी सजग बनाने का प्रयास किया जाता है।
2. **आधारभूत संचालन**– प्रथम वर्ग की सहज क्रियाओं के आधार पर ही बालक में स्वाभाविक आधारभूत अंग संचालन संबंधी क्रियाएं विकसित होती हैं। किसी प्रकार का आदेश मिलते ही बच्चा इस प्रकार का अंग संचालन करने लगता है परंतु वह इन क्रियाओं पर अधिक देर तक नियंत्रण नहीं कर सकता है,

जैसे—उछलना, कूदना। मनुष्य के भावी जीवन में सुदृढ़ एवं सशक्त अंग संचालन की क्षमता विकसित करने के लिए इस प्रकार की क्रियाओं का प्रशिक्षण आवश्यक है।

टिप्पणी

3. **शारीरिक योग्यताएं**— शारीरिक अंगों के उचित संचालन से ही शारीरिक योग्यता विकसित होती है तथा शारीरिक योग्यता से ही अंग संचालन में सहायता मिलती है। अतः अंग संचालन संबंधी क्रियाओं में और भी परिपक्वता लाने के लिए बालक की शक्ति व सामर्थ्य को विकसित करने का प्रयास करना ही इस वर्ग का उद्देश्य है। शक्ति व सामर्थ्य की सहायता से ही बालक जीवन की कठिनाइयों का सामना करता है और वातावरण के साथ सामंजस्य स्थापित करता है। अतः इस वर्ग में बच्चे को शक्ति का प्रयोग करने, किसी भी स्थिति को सहन करने और उसके अनुसार गति करने की क्रिया में प्रशिक्षित किया जाना चाहिए। इन योग्यताओं की सहायता से ही बालक बाद में कौशलों को अर्जित करता है।
4. **प्रत्यक्षीकरण योग्यताएं**— इन योग्यताओं को अर्जित करने के लिए पेशीय क्रियाएं व शारीरिक योग्यताएं आधार का काम करती हैं। बच्चा जानबूझकर अपनी इच्छानुसार इन योग्यताओं को अर्जित करने का प्रयास करता है। इन कौशलों की सहायता से बच्चा वातावरण में फैले उद्दीपनों को समझते व पहचानते हुए उनके साथ समायोजन में विभेद करने की योग्यता भी अर्जित करता है, जैसे— छूकर, देखकर, सुनकर, सूंघकर पहचानना और अंतर बताना। इन्हीं योग्यताओं की सहायता से बाद में उच्च कोटि की पेशीय क्रियाएं विकसित होती हैं।
5. **कौशलयुक्त अंग संचालन**— पहले चारों वर्गों में अर्जित योग्यताओं व क्रियाओं के आधार पर ये कौशल युक्त अंग संचालन संबंधी क्रियाएं विकसित होती हैं। इनके लिए बच्चे को पूर्ण प्रशिक्षण लेना होता है। तभी वह इसी प्रकार के कौशलयुक्त जटिल अंग संचालन की क्रियाएं कर सकता है। पहले इन क्रियाओं को जान—बूझकर सीखना पड़ता है, फिर उनका अभ्यास करना पड़ता है और तब अच्छी तरह से सीख लेने के पश्चात छात्र बिना किसी विशेष प्रयास के इन क्रियाओं को पूर्ण कौशल के साथ प्रदर्शित करने में समर्थ हो जाता है। जैसे— तैरने का कौशल, जैविक नमूनों की चीर फाड़ करने तथा सूक्ष्म निरीक्षण करने का कौशल आदि।
6. **सुसंबद्ध या सांकेतिक संप्रेषण**— सांकेतिक संप्रेषण या सुसंबद्ध संप्रेषण वह व्यवहार है, जिनके द्वारा विद्यार्थी बिना कहे ही अपने भावों को पूर्ण कौशल के साथ अभिव्यक्त कर सके। मनोवेशीय क्रियाएं इस कार्य हेतु आवश्यक आधार का काम करती हैं, अतः पहले पूर्ण कौशल अर्जित कर लेने के पश्चात विद्यार्थी में इतनी योग्यता आ जाती है कि वह सामान्य मुखाकृति या भावभंगिमा से लेकर पूर्ण रूप से कौशल युक्त व्यवहार एवं अभिनय के द्वारा अपने भावों का संप्रेषण कर सकता है।

उद्देश्यों को व्यवहारपरक शब्दावली में लिखना

ब्लूम द्वारा किए गए उद्देश्यों के वर्गीकरण की मुख्य कमी यह है कि इसमें शिक्षण अधिगम के उद्देश्यों को विद्यार्थियों के अल्प व्यवहार के रूप में स्पष्ट नहीं किया गया है। जैसे स्पष्ट यही नहीं होता कि शिक्षण कार्य की समाप्ति पर छात्र किस कार्य को करने की योग्यता प्राप्त कर लेगा। यदि इन उद्देश्यों को व्यावहारिक भाषा में स्पष्ट कर दिया जाए तो उद्देश्यों का यह विशिष्टीकरण, शिक्षण अधिगम कार्य में अधिक प्रभावशाली और उद्देश्यपूर्ण सिद्ध होगा।

अगर रचना की दृष्टि से देखा जाए तो शैक्षिक और अनुदेशात्मक उद्देश्य के मुख्यतया दो भाग हैं–

1. अपेक्षित व्यवहार में परिवर्तन।
2. व्यवहार में परिवर्तन लाने वाली विषय–वस्तु।

पहला भाग इन व्यवहार परिवर्तनों की ओर संकेत करता है जो संबंधित अनुदेशन या अधिगम अनुभवों के द्वारा अधिगमकर्ता के व्यवहार में लाए जाते हैं। दूसरा, विषय वस्तु भाग संबंधित अनुदेशन के द्वारा प्राप्त किए गए सामान्य पाठ्यक्रम और पाठ्यचर्चा के विशिष्ट भाग की ओर संकेत होता है। इसके माध्यम से ही व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाना संभव होता है।

उद्देश्य को व्यवहारपरक शब्दावली में लिखने के लिए निम्नलिखित तीनों बातों का ध्यान में रखना होता है–

- उद्देश्य की प्रकृति, जैसे–ज्ञान, बोध, प्रयोग आदि।
- व्यवहार का पक्ष या क्षेत्र, जैसे–ज्ञानात्मक, भावात्मक आदि।
- विषय वस्तु का वह विशिष्ट भाग, जिसके माध्यम से व्यवहार में परिवर्तन लाने का कार्य किया जाता है, जैसे– प्रकाश, संश्लेषण, कोशिका संरचना आदि।

इन उद्देश्यों को व्यावहारिक भाषा में लिखने के लिए कई विधियां या उपागम लाने का कार्य प्रयोग में लाए जाते हैं। यहां इस कार्य के लिए निम्न तीनों उपगामों का वर्णन किया जा रहा है–

1. रॉबर्ट मेगर उपागम,
2. रॉबर्ट मिलर उपागम, एवं
3. आर.सी.ई.एम. उपागम।

1. रॉबर्ट एफ मेगर उपागम (Robert F. Mager Taxonomy)

रॉबर्ट मेगर (1962) के अनुसार, छात्रों के अपेक्षित अंत्य व्यवहार के रूप में अनुदेशात्मक उद्देश्यों को भलीभांति लिखा जा सकता है। इन उद्देश्यों को लिखने के लिए निम्न बातों को ध्यान में रखन चाहिए–

(क) अंत्य व्यवहार की पहचान और उसका नामकरण।

(ख) उन सभी महत्वपूर्ण परिस्थितियों का वर्णन, जिनके अंतर्गत छात्रों में उपेक्षित व्यवहार करने की आशा की जाती है।

टिप्पणी

(ग) विद्यार्थियों की उपलब्धि की परीक्षा के लिए मापदंड निर्धारित करना जिससे यह पता लगाया जा सके कि व्यवहार के स्वीकृत स्तर पर आने के लिए विद्यार्थियों को अपने व्यवहार में कितना परिवर्तन लाना है।

मेगर उपागम में उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के लिए ब्लूम द्वारा प्रस्तुत किए गए उद्देश्यों के वर्गीकरण को अपना आधार बनाया है। विभिन्न उद्देश्यों को लिखने के लिए मेगर ने कार्यपरक क्रियाओं का उपयोग किया है कि इन क्रियाओं के माध्यम से विद्यार्थियों को अंत्य व्यवहार अथवा अधिगम परिणामों को ऐसी व्यावहारिक शब्दावली में लिखा जा सकता है, जिनको आसानी से मापा जा सके और निरीक्षण किया जा सके। व्यवहार के ज्ञानात्मक और भावात्मक पक्षों से संबंधित ऐसी कार्यपरक क्रियाओं की सूची तालिका सं. 1.10 और 1.11 में दी जा रही है।

तालिका 1.10 *ज्ञानात्मक पक्ष से संबंधित कार्यपरक क्रियाओं की सूची*

उद्देश्य (ब्लूम के वर्गीकरण पर आधारित)		संबंधित कार्यपरक क्रियाएं
1.	ज्ञान	परिभाषा देना, सूची देना, लेबल लगाना, मापन करना, नाम देना, प्रत्यास्मरण करना, पहचानना, पुनः उत्पादन करना, चुनना, कथन देना, लिखना, रेखांकित करना आदि।
2.	बोध	बदलना, वर्गीकरण करना, भेद करना, व्याख्या, प्रतिपादन करना, पहचानना, उदाहरण देना, संकेत करना, अर्थापन करना, न्याय करना, निर्णय करना, नाम देना, प्रतिनिधित्व करना, चयन करना, सारांश देना, रूपांतर करना, अनुवाद करना इत्यादि।
3.	प्रयोग	जांच करना, बदलना, चुनना, संचालित करना, निर्माण करना, गणना करना, प्रदर्शित करना, खोज करना, व्याख्या करना, स्थापित करना, पाना, उत्पन्न करना, उदाहरण देना, संशोधित करना, पूर्व कथन देना, परिपालन करना, चयन करना, समाधान करना, उपयोग करना आदि।
4.	विश्लेषण	विश्लेषण करना, संबंधित करना, तुलना करना, निष्कर्ष निकालना, अंतर बताना, आलोचना करना, विभेद करना, पहचानना, पुष्टि करना, इंगित करना, निर्णय लेना, चयन करना, अलग करना आदि।
5.	संश्लेषण	तर्क करना, निष्कर्ष देना, मिलाना, निकालना, वाद–विवाद करना, सामान्यीकरण करना, समन्वित करना, संगठित करना, संक्षिप्त करना, सिद्ध करना, संबंधित करना, पुनः कथन देना, चयन करना, सारांश देना, संश्लिष्ट करना आदि।
6.	मूल्यांकन	संबंधित करना, चुनना, तुलना करना, आलोचना करना, निष्कर्ष देना, बचाव करना, निश्चित करना, मूल्यांकन करना, निर्णय लेना, पहचानना, अभिज्ञान करना, संबंध स्थापित करना, चयन करना, सारांश देना, समर्थन करना, जांच करना आदि।

तालिका 1.11 *भावात्मक पक्ष से संबंधित कार्यपरक क्रियाओं की सूची*

टिप्पणी

उद्देश्य (ब्लूम तथा उसके सहयोगियों द्वारा प्रस्तुत वर्गीकरण पर आधारित)		कार्यपरक क्रियाएं
1.	आग्रहण	पूछना, स्वीकार करना, ध्यान देना, सावधान होना, पकड़ना, खोजना, प्रयोग करना, पहचानना, पक्ष लेना, अनुसरण करना, निरीक्षण करना, पसंद करना, प्रत्यक्षीकरण करना, आग्रह करना, चयन करना, नाम देना आदि।
2.	अनुक्रिया	उत्तर देना, मदद करना, पूरा करना, निकालना, वाद–विवाद करना, विकसित करना, सहायता करना, सूची देना, लेबल देना, नाम लेना, अभ्यास करना, आलेखन बनाना, चयन करना, कथन करना, लिखना आदि।
3.	आकलन	स्वीकार करना, ध्यान देना, पूरा करना, चुनना, निश्चय करना, प्रदर्शित करना, विभेद करना, विकास करना, वृद्धि करना, संकेत करना, भाग लेना, अभिरुचि का क्रम देना, पहचानना आदि।
4.	संगठन	जोड़ना, संबंधित करना, परिवर्तित करना, तुलना करना, पूरा करना, समन्वय करना, सह–संबंध स्थापित करना, निश्चित करना, पाना, बनाना, सामान्यीकरण करना, समन्वित करना, निर्णय करना, योजना बनाना, तैयार करना, संबंध स्थापित करना, व्यवस्थित करना आदि।
5.	मूल्यों का चरित्रीकरण या विशेषीकरण	स्वीकार करना, बदलना, चरित्रीकरण, निश्चय करना, विभेद करना, विकसित करना, प्रयोग करना, सामना करना, पहचानना, पुष्टि करना, सिद्ध करना, दोहराना, सेवा करना, हल करना, जांच करना आदि।

अगर व्यवहारपरक भाषा में उद्देश्यों को व्यक्त करने के लिए मेगर उपगाम की पूरी तरह अनुपालना की जाए तो हमें उदाहरण के लिए किसी भी एक अनुदेशात्मक उद्देश्य के लेखन हेतु निम्न प्रक्रिया से गुजरना होगा–

1. उन परिस्थितियों का उल्लेख करना, जिसमें व्यवहार घटित हो रहा है, जैसे–जीव–विज्ञान वाटिका में ले जाने पर विद्यार्थी अपनी इस योग्यता का परिचय देते हैं।
2. इसके पश्चात उस कार्यपरक क्रिया का प्रयोग किया जाना चाहिए जिससे यह पता चले कि वे क्या करने में समर्थ हो जाएंगे। जैसे– मापन/पढ़ना/पता लगाना/पहचानना/ वर्गीकरण करना आदि।
3. इसके पश्चात सफलता या उपलब्धि यानी अंतिम संस्कार कैसा होना चाहिए। इस प्रकार के स्तर या मानक का उल्लेख करना होता है। जैसे– जीव विज्ञान वाटिका में ले जाए जाने पर विद्यार्थी कम से कम चार ऐसे पौधों के नाम लिखते हैं– उनकी पहचान करते हैं, जिनमें क्रमिक प्रजनन होता है।

इसी प्रकार की प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए अन्य प्रकार के अनुदेशात्मक उद्देश्यों को लिखने का कार्य किया जा सकता है। उदाहरण के लिए कोशिका संरचना तथा फूलों में प्रजनन नामक प्रकरणों में अनुदेशात्मक उद्देश्य इस प्रकार लिखे जा सकते हैं–

(क) पौधों तथा जंतुओं की दो स्लाइडों को दिए जाने पर वे पादप एवं जन्तु कोशिकाओं की कम से कम दो समानताओं तथा असमानताओं का उल्लेख करते हैं।

(ख) 20 फूलों की एक सूची दिए जाने वाले विद्यार्थी कम से कम ऐसे 5 फूलों के अलग–अलग नाम बताते हैं या पहचानते हैं, जिनका परागण वायु से तथा कीटों से होता है।

टिप्पणी

2. रॉबर्ट मिलर उपागम (Robert Miller Taxonomy)

मेगर ने अपने उपगाम में व्यवहार के क्रियात्मक पक्ष को उपेक्षित रखा है। रॉबर्ट मिलर ने कौशल विश्लेषण का प्रयोग करते हुए मनोशारीरिक या क्रियात्मक उद्देश्यों को व्यवहारपरक शब्दावली में लिखने के लिए जिस प्रक्रिया का वर्णन किया है, संक्षेप में उसका निम्न रूप है–

1. उस संकेतक का वर्णन जो किसी सार्थक क्रिया की ओर संकेत करता है।
2. उस संकेतक अथवा उद्दीपक का वर्णन करना, जिसके प्रति अनुक्रिया करनी होती है।
3. उस वस्तु या व्यक्ति को नियाश्रित करना जिसे कार्य करने की दिशा में प्रेरित किया जाता है।
4. उस क्रिया का वर्णन करना, जिसे संपन्न किया जाना है।
5. अनुक्रियाओं अथवा प्रतिपुष्टि की उपयुक्तता का संकेत है।

मेगर की तरह मिलर ने भी क्रियात्मक उद्देश्यों को लिखने के लिए संबंधित कार्यपरक क्रियाओं की सूची प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। मनोशारीरिक उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के लिए हम इस कार्यपरक क्रियाओं की सहायता ले सकते हैं। मनोशारीरिक या क्रियात्मक पक्ष के हेरी द्वारा प्रस्तुत किए गए उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के लिए संबंधित 'कार्यपरक क्रियाओं' की सूची (जिनका उल्लेख मिलर द्वारा किया गया है) निम्न रूप से प्रस्तुत की जा सकती है–

तालिका 1.12 *मनोशारीरिक पक्ष से संबंधित कार्यपरक क्रियाएं*

उद्देश्य (हेरी के वर्गीकरण पर आधारित)		**संबंधित कार्यसूचक क्रियापद**
1.	सहज क्रियात्मक अंग संचालन	काटना, कड़ा करना, झटका देना, लंबा करना, ढीला करना, छोटा करना, शिथिल होना, रोकना, सीधा करना, फैलाना आदि।
2.	आधारभूत अंग संचालन	आ पड़ना, पकड़ना, रेंगना, पीना, पकड़ना, कूदना, घुटनों के बल चलना, चलाना, पहुंचना, दौड़ना, चलना आदि।
3.	शारीरिक योग्यताएं	शुरू करना, सहज करना, झुकाना, व्यवहार करना, बढ़ाना, सुधारना, चालू करना, रोकना, टुकड़े–टुकड़े करना, सहारा देना या टेक लगाना आदि।
4.	प्रत्यक्षीकरण योग्यताएं	संतुलन करना, झुकाना, पकड़ना, खोजना, खाना, अन्वेषण करना, खिलाना, छूकर, देखकर, सूंघकर या सुनकर पहचान करना, स्मृति चित्रण करना, फेंकना, लिखना आदि।
5.	कौशलयुक्त अंग संचालन	नृत्य करना, खोदना, गोता लगाना, चलाना, बुनाई करना, संगीत के वाद्य यंत्रों को बजाना, नाव खेना, स्केटिंग करना, निशाना लगाना आदि।
6.	सुसंबंध या सांकेतिक संप्रेषण	तैरना आदि। नकल करना, भाव–भंगिमा बनाना, बैठना, चित्रांकन करना, मुस्कुराना, खड़ा होना, चिढ़ाना आदि।

शारीरिक प्रशिक्षण और अभ्यास के क्षेत्र के एक उदाहरण की सहायता से मिलर के उपागम के अनुसार उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने का एक उदाहरण प्रस्तुत किया जा रहा है–

***तालिका 1.13** मिलर के उपागम के अनुसार उद्देश्यों का व्यावहारिक रूप*

मनोशारीरिक पक्ष के अनुदेशात्मक उद्देश्य		व्यावहारिक रूप में लिखना
1.	सहज क्रियात्मक अंग संचालन	छात्र ड्रिल के संकेत के साथ अपनी भुजाओं को फैला सकते हैं।
2.	आधारभूत अंग संचालन	छात्र दी गई कम से कम ऊंचाई तक कूद सकते हैं।
3.	शारीरिक योग्यताएं	छात्र समांतर छड़ों पर अपने शरीर को ठीक प्रकार से संतुलित कर सकते हैं।
4.	कौशलयुक्त अंगों का संचालन	विद्यार्थी निम्न स्तर तक सावधानीपूर्वक गोता लगा सकते हैं या स्कॅटिंग कर सकते हैं या तैर सकते हैं।

3. आर.सी.ई.एम. उपागम (R.C.E.M Taxonomy)

व्यवहार के तीनों पक्षों से संबंधित सभी अनुदेशात्मक उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के कार्यों में मेगर व मिलर दोनों की विधियां असफल रही हैं। यदि मेगर उपगाम ज्ञानात्मक व भावात्मक पक्ष के उद्देश्यों से संबंधित है तो मिलर उपागम मनोशारीरिक उद्देश्यों से संबंध रखता है। इस प्रकार, इन दोनों उपागमों में से कोई भी एक विधि मानव व्यवहार सभी पक्षों के उद्देश्यों को व्यवहारपरक शब्दावली में लिखने के प्रयोजन को सिद्ध नहीं करती है। दूसरी बात यह है कि इन दोनों उपागमों ने उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के लिए व्यवहार से संबंधित 'कार्यपरक क्रिया पदों' को (जिनमें से बहुत क्रिया पदों की पुनरावृत्ति केवल एक ही पक्ष के विभिन्न वर्गों में ही नहीं, बल्कि दूसरे पक्ष के वर्गों में भी हुई है) महत्व दिया है और अधिगम प्रक्रिया में महत्वपूर्ण कार्य करने वाली मानसिक प्रक्रियाओं या मानसिक योग्यताओं की पूर्णतया उपेक्षा की है। इन कमियों के कारण इन दोनों उपागामें की कड़ी आलोचना का शिकार होना पड़ा है। इन कमियों को दूर करने के लिए यथासंभव अनुसंधान कार्य किए गए। हमारे देश में भी इस दिशा में कार्य हुए, परिणामस्वरूप एक नई विधि का विकास हुआ और उसे आर.सी.ई.एम. उपागम नाम दिया गया, क्योंकि इसका विकास क्षेत्रीय शिक्षा महाविद्यालय मैसूर में किया गया है।

आर.सी.ई.एम. उपागम ने अनुदेशात्मक उद्देश्यों को व्यवहार परक शब्दावली में लिखने के लिए 'कार्यपरक क्रिया पदों के स्थान पर मानसिक प्रक्रियाओं या मानसिक योग्यताओं का प्रयोग किया है।' इस विधि में थोड़े से परिर्तन के साथ ब्लूम द्वारा किए गए ज्ञानात्मक पक्ष के छह वर्गों के स्थान पर चार वर्ग किए गए हैं। अंतिम तीन वर्ग विश्लेषण और मूल्यांकन को समन्वित करके सृजनात्मक नाम दिया है। दूसरा अंतर यह है कि ब्लूम द्वारा दिए गए बोध वर्ग के समक्ष नाम दिया गया है। आर.सी.ई.एम. उपागम द्वारा किए गए उद्देश्यों के इन वर्गों और उनमें संबंधित मानसिक प्रक्रियाओं या योग्यताओं को निम्न तालिका में प्रदर्शित किया गया है।

तालिका 1.14 *आर.सी.ई.एम. उपागम के उद्देश्य व मानसिक क्रियाएं*

टिप्पणी

उद्देश्य		मानसिक प्रक्रियाएं एवं मानसिक योग्यताएं
1.	ज्ञान	1. पहचान करना 2. प्रत्यास्मरण करना
2.	समझ	1. संबंध देखना 2. उदाहरण देना 3. भेद करना 4. वर्गीकरण करना 5. अर्थापन करना 6. पुष्टि करना 7. सामान्यीकरण करना
3.	प्रयोग	1. कारण बताना 2. परिकल्पना का निर्माण करना 3. परिकल्पना स्थापित करना 4. निष्कर्ष निकालना 5. पूर्वकथन करना
4.	सृजनात्मक	1. विश्लेषण करना 2. संश्लेषण करना 3. मूल्यांकन करना

नोट : ब्लूम व आर.सी.ई.एम. उपागम के उद्देश्यों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए कृपया तालिका 1.1 देखें।

जैसे कि उपरोक्त तालिका से ज्ञात होता है कि ज्ञानात्मक पक्ष के उद्देश्यों के चारों वर्गों को सत्रह (17) मानसिक क्रियाओं व योग्यताओं में विभाजित किया गया है। इन प्रक्रियाओं या योग्यताओं का प्रयोग करके उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखा जा सकता है। इस कार्य हेतु आर.सी.ई.एम. उपागम के 17 कथनों का उल्लेख किया है, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया जा रहा है–

(क) ज्ञान उद्देश्य

1. छात्र .... पहचानने की योग्यता रखते हैं।
2. छात्र .... प्रत्यास्मरण करने की योग्यता रखते हैं।

(ख) समझ उद्देश्य

3. छात्र .... तथा .... में संबंध की योग्यता रखते हैं।
4. छात्र .... उदाहरण देने की योग्यता रखते हैं।
5. छात्र .... तथा .... में भेद करने की योग्यता रखते हैं।
6. छात्र .... का वर्गीकरण की योग्यता रखते हैं।
7. छात्र .... का अर्थापन करने की योग्यता रखते हैं।
8. छात्र .... की पुष्टि करने की योग्यता रखते हैं।
9. छात्र .... कस सामान्यीकरण करने की योग्यता रखते हैं।

टिप्पणी

(ग) प्रयोग उद्देश्य

10. छात्र .... का कारण बताने की योग्यता रखते हैं।
11. छात्र .... के बारे में परिकल्पना का निर्माण करने की योग्यता रखते हैं।
12. छात्र .... के बारे में परिकल्पना को स्थापित करने की योग्यता रखते हैं।
13. छात्र .... का निष्कर्ष निकालने की योग्यता रखते हैं।
14. छात्र .... का पूर्वकथन करने की योग्यता रखते हैं।

(घ) सृजनात्मक उद्देश्य

15. छात्र .... का विश्लेषण करने की योग्यता रखते हैं।
16. छात्र .... का संश्लेषण करने की योग्यता रखते हैं।
17. छात्र .... का मूल्यांकन करने की योग्यता रखते हैं।

आर.सी.ई.एम. उपागम में उद्देश्यों को कैसे लिखा जाए?

उद्देश्यों को लिखने की प्रक्रिया को ध्यान में रखना चाहिए—

1. सर्वप्रथम छात्र के प्रविष्टि व्यवहार को ध्यान में रखना चाहिए।
2. फिर छात्र को प्रदान किए जाने वाले अधिगम अनुभवों, पाठ्यवस्तु या उपविषय आदि के बारे में विचार करना चाहिए।
3. शिक्षण अथवा अधिगम उद्देश्यों पर विचार किया जाना चाहिए।
4. इसके पश्चात छात्र के प्रविष्टि व्यवहार, विषयवस्तु, तत्व और किसी विशिष्ट शिक्षण उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए मानसिक प्रक्रिया या योग्यताओं का चुनाव किया जाना चाहिए।
5. अंत में ऊपर लिखित 17 कथनों को प्रयोग किया जाना चाहिए। इसके लिए छात्र के अर्जित अधिगम अनुभव को इन कथनों के रिक्त स्थानों में भर देना चाहिए।

इस प्रकार उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लेखन कार्य को हम एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट कर रहे हैं।

विषय— जैविक विज्ञान

उपविषय— फूलदार पौधे के भाग

- विद्यार्थी फूलदार पौधे के विभिन्न भागों को पहचानने की योग्यता रखते हैं। (ज्ञान)
- विद्यार्थी फूलदार पौधे के भागों हरी पत्तियों के घेरे तथा रंगदार पत्तियों के कार्यों में उत्तर स्थापित करने की योग्यता रखते हैं। (बोध)
- विद्यार्थी नए पौधों की उत्पत्ति के बारे में निष्कर्ष निकालने की योग्यता रखते हैं। (प्रयोग)
- विद्यार्थी फूलदार पौधों के भागों का विश्लेषण करने की योग्यता रखते हैं। (सृजनात्मक)

अनुदेशात्मक उद्देश्यों के लेखन के बारे में निष्कर्ष

टिप्पणी

इस अध्याय में जो कुछ भी अभी तक कहा गया है, उससे छात्र एवं अध्यापकों को अपने विषय से संबंधित दैनिक पाठों के लिए अनुदेशात्मक उद्देश्यों के निर्माण में उचित सहायता मिल सकती है। उन्हें अपने अनुदेशन के माध्यम से विद्यार्थियों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाने होते हैं। ये परिवर्तन व्यवहार में तीनों पक्षों– ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक में ही होते हैं। इन तीनों व्यवहार पक्ष से संबंधित उद्देश्यों की वर्गीकरण प्रणालियों तथा उनको व्यावहारात्मक शब्दावली में व्यक्त करने में सहायक विभिन्न उपागम इस तरह अनुदेशात्मक उद्देश्यों के निर्माण तथा उनके भली–भांति लेखन में समुचित मदद कर सकते हैं। प्रश्न उठता है कि जिस प्रकार परिस्थितियां शिक्षण अभ्यास हेतु हमारे छात्र अध्यापकों को उपलब्ध हैं, उनको ध्यान में रखते हुए व्यहारात्मक रूप से किसी प्रकार के अनुदेशात्मक उद्देश्यों के निर्माण एवं लेखन के प्रयत्न जैविक विज्ञानों के पाठों को पढ़ने के लिए उनके द्वारा किए जाने चाहिए। इस बात का उत्तर इस पर निर्भर करता है कि पढ़ाने द्वारा किस प्रकार के व्यवहार परिवर्तन की अपेक्षा विद्यालय छात्रों से की जा सकती है। संक्षेप में इस प्रकार के अपेक्षित व्यवहार परिवर्तनों (जो तीनों व्यवहार पक्षों में होते हैं) निम्न प्रकार लिपिबद्ध किया जा सकता है–

1. वे जैविक विज्ञानों की विभिन्न इकाइयों तथा प्रकरणों से संबंधित तथ्यों, सिद्धांतों, प्रक्रियाओं तथा विचारों का ज्ञान एवं उनके बारे में वांछित समझ ग्रहण कर सकते हैं।
2. वे जैविक विज्ञानों में निहित प्रक्रियाओं तथा उनके प्रतिफलों से संबंधित विभिन्न प्रकार की कुशलताओं या कौशलों, जैसे– प्रयोगात्मक कौशल, वैज्ञानिक साज–समान तथा उपकरणों को काम में लाने का कौशल, आरेखन संबंधी कौशल चीर–फाड़ संबंधी कौशल, समस्या समाधान कौशल तथा अन्वेषण कौशल, नमूना संग्रह कौशल आदि का अर्जन कर सकते हैं।
3. वे जैविक विज्ञान विषयों में अर्जित ज्ञान, अवबोध (समझ) तथा कौशलों को अपने दिन–प्रतिदिन की जिंदगी तथा अन्य विषयों के अध्ययन हेतु उपयोग में ला सकते हैं।
4. उनमें जैविक विज्ञानों का अध्ययन करने तथा इनमें निहित ज्ञान एवं कौशलों का अर्जन करने के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण या अभिवृत्ति का समुचित विकास किया जा सकता है।
5. उनमें जैविक विज्ञानों में निहित प्रक्रियाओं एवं उनके परिणामों के प्रति उचित रुचि एवं प्रशंसात्मक भाव उत्पन्न किए जा सकते हैं।

विद्यार्थियों के व्यवहार में किए जाने वाले उपरोक्त अपेक्षित परिवर्तनों को ध्यान में रखते हुए जैविक विज्ञान विषय में दैनिक पाठ योजनाओं का निर्माण करने हेतु निम्न प्रकार के अनुदेशात्मक उद्देश्यों का निर्माण करने के प्रयत्न भली–भांति किए जा सकते हैं–

1. ज्ञान एवं अवबोध उद्देश्य,
2. कौशलात्मक उद्देश्य,

3. प्रयोगात्मक उद्देश्य,
4. दृष्टिकोण या अभिवृत्ति उद्देश्य, एवं
5. रुचि एवं प्रशंसात्मक उद्देश्य।

टिप्पणी

उपरोक्त पांच प्रकार में विभक्त अनुदेशात्मक उद्देश्यों को ध्यान में रखकर एक छात्र अध्यापक द्वारा, जैविक विज्ञान के किसी एक पाठ के अनुदेशन हेतु अनुदेशात्मक उद्देश्यों का निर्माण कैसे किया जाएगा, इस बात को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट कर रहे हैं–

अनुदेशात्मक उद्देश्यों को लिखने संबंधी एक उदाहरण

प्रकरण–कोशिका संरचना

1. विद्यार्थी कोशिका शब्द के अर्थ की व्याख्या करते हैं, उसे परिभाषित करते हैं।
2. कोशिकाओं के खोज संबंधी इतिहास का वर्णन करते हैं।
3. कोशिका विज्ञान संबंधी जैव शास्त्री का नाम बताते हैं।
4. पौधों और पशुओं की कोशिकाओं की संरचनाओं में निहित समानताओं का वर्णन उल्लेख करते हैं।
5. केवल पौधों या केवल पशुओं की कोशिकाओं की संरचना में पायी जाने वाली विशेषताओं का उल्लेख या वर्णन करते हैं।
6. पौधों और पशुओं की कोशिकाओं की संरचनाओं में निहित अंतर का उल्लेख करते हैं।
7. पौधों और पशुओं की कोशिकाओं की संरचना में निहित समानताओं और असमानताओं को पहचानते हैं, उनमें भेद करते हैं।

कौशलात्मक उद्देश्य

1. पौधों और पशुओं की कोशिकाओं की संरचना को स्वच्छ एवं उपयुक्त आरेखों द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
2. पौधों और पशुओं की कोशिका संरचनाओं की उपलब्ध स्लाइडों का सूक्ष्मदर्शी उपकरण से निरीक्षण करते हैं। क्या प्राप्त परिणामों को ठीक तरह से रिकॉर्ड करते हैं।

प्रयोगात्मक उद्देश्य

1. शिक्षक बताते हैं कि पपीता पीले रंग का, पालक हरे रंग का तथा तरबूज भीतर से लाल रंग का क्यों होता है?
2. विद्यार्थी बताते हैं कि पीपल के वृक्ष की नवजात पत्तियों का पहले तो ललिमा लिए हुए भूरा रंग होता है। पर समय गुजरने के साथ–साथ यह हरे रंग में क्यों परिवर्तित हो जाता है।
3. कोई भी कोशिका बिना केंद्रक के जीवित क्यों नहीं रह सकती, विद्यार्थी यह स्पष्ट करते हैं।

4. विद्यार्थी पौधों की कोशिकाओं में क्लोरोप्लास्ट की उपस्थिति की औचित्यता के बारे में बताते हैं।

टिप्पणी

अभिवृद्धि संबंधी उद्देश्य

1. विद्यार्थी कोशिकाओं की संरचनाओं के संदर्भ में की गई या पढ़ी हुई किसी बात को तब तक अंगीकृत नहीं करते जब तक कि वे स्वयं कोशिकाओं की स्लाइडों का सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन करके इनकी पुष्टि नहीं कर लें।
2. विद्यार्थी इस बात को स्वीकार करते हैं कि पौधों और पशुओं में कोशिका संरचना की दृष्टि से बहुत सी बातों को लेकर समानताएं/असमानताएं पाई जाती हैं।

रुचि एवं प्रशंसात्मक उद्देश्य

1. विद्यार्थी पौधों और पशुओं की कोशिकाओं की स्लाइडों के निरीक्षण में रुचि का प्रदर्शन करते हैं।
2. वे पौधे व पशुओं की कोशिका संरचनाओं के बारे में विद्यालय पत्रिका में लेख छपवाते हैं।
3. विद्यार्थी कोशिका, कोशिका संरचना तथा कोशिका सिद्धांत की खोज से संबंधित इतिहास का अध्ययन करते हैं।
4. विद्यार्थी कोशिका, कोशिका सिद्धांत की खोज करने वाले जीव शास्त्रियों की जीवनी और उनके योगदान की जानकारी हेतु वैज्ञानिक साहित्य का अध्ययन करते हैं।
5. विद्यार्थी पशु और पौधों की कोशिकाओं में निहित समानताओं व असमानताओं के बारे में अधिक से अधिक जानने में रुचि तथा प्रसन्नता का प्रदर्शन करते हैं।
6. विद्यार्थी पशुओं तथा पौधों की कोशिका संरचनाओं से संबंधित विभिन्न रहस्यों का पता लगाने के लिए जीव शास्त्रीय द्वारा किए गए प्रयासों एवं योगदान की सराहना करते हैं।

नोट : इन सभी उपरोक्त कथनों में विद्यार्थी वे शब्दों की पुनरावृत्ति करने की अपेक्षा हम एक बार शुरू में ही इस तरह लिख सकते हैं– "कोशिका संरचना नामक प्रकरण के अध्ययन के उपरांत विद्यार्थियों से निम्न प्रकार के व्यवहार प्रदर्शन की अपेक्षा की जाती है।"

विशिष्ट व्यवहार जन्य परिणामों की प्राप्ति हेतु अधिगम अनुभवों का संगठन

उद्देश्यों को विशिष्ट व्यवहार जन्य परिणामों के रूप में अभिव्यक्त करने के बाद इन विशिष्ट व्यवहार जन्य परिणामों या प्रतिफलों की उपलब्धि का प्रश्न उठता है। किसी विशेष प्रकरण या अनुदेशात्मक इकाई के लिए वांछित अनुदेशात्मक उद्देश्यों को निश्चित करने के दौरान जिस प्रकार के व्यवहार जन्य प्रतिफलों या परिणामों की आशा की गई थी उनकी भली–भांति प्राप्ति कैसे की जा सकती है। इसी संदर्भ में उचित

अधिगम अनुभवों को प्रदान करने के बारे में सोचा जाता है। यह कार्य निम्न दो मुख्य सोपानों के अनुसरण से पूरा किया जाता है–

टिप्पणी

1. अधिगम अनुभवों का चयन, एवं
2. अधिगम अनुभवों का संगठन।

पहले सोपानों के अंतर्गत विशिष्ट व्यवहारजन्य परिणामों का प्रतिफलों की उपलब्धि हेतु उचित अधिगम अनुभवों का चयन किया जाता है, जबकि दूसरे सोपान में इन चयन किए अधिगम अनुभवों को क्रमबद्ध एवं सुनियोजित संगठन के बारे में इस तरह ध्यान दिया जाता है कि ऐसा करने से अधिगमकर्ताओं को अधिगम अनुभवों का अर्जन भली–भांति हो सके। अधिगम अनुभवों के चयन के मुख्यतया निम्न बातों को ध्यान में रखकर चलना होता है।

1. विद्यार्थियों का मानसिक स्तर।
2. ज्ञान और अवबोध की प्रकृति, जिसे विद्यार्थियों द्वारा अर्जित किया जाता है।
3. कौशलों की प्रकृति, जिनका विद्यार्थियों द्वारा किस प्रकार प्रयोग किया जाएगा, इस बात का निर्णय।
4. अर्जित ज्ञान और कौशलों का विद्यार्थियों द्वारा किस प्रकार प्रयोग किया जाएगा, इस बात का निर्णय।
5. प्रस्तुत पाठ एवं इकाई की सहायता से विकसित होने वाली दृष्टिकोण/अभिवृत्तियों, रुचियों तथा सराहनात्मक भावनाओं की प्रकृति की जानकारी।

उपरोक्त सभी बातों पर ध्यान देकर अधिगम अनुभवों का चयन करने के पश्चात इनमें संगठन हेतु निम्न बातों पर ध्यान देना रहता है–

1. अधिगम अनुभवों के संगठन में महत्वपूर्ण शिक्षण सूत्रों, जैसे– स्थूल से कठिन, स्थूल से सूक्ष्म, ज्ञान से अज्ञान आदि का अनुसरण किया जाना चाहिए।
2. अधिगम अनुभवों के संगठन के समन्वय और समवाय इन दोनों सिद्धांतों का पूरा–पूरा पालन किया जाना चाहिए।
3. अधिगम अनुभव आंतरिक रूप से पूरी तरह सह–संबंधित और एकत्रित होने चाहिए और बाह्य रूप से इनका संबंध विद्यार्थियों के पूर्वतन और अवबोध, उनकी वर्तमान आवश्यकताओं और परिवेश संबंधी जरूरतों और विषय विशेष के अध्ययन संबंधी आगे की आवश्यकताओं आदि से होना चाहिए।
4. अधिगम अनुभवों का यह संगठन अपने आप में पूरी तरह क्रमबद्ध और सुव्यवस्थित होना चाहिए तथा इसके द्वारा तार्किक एवं मनोवैज्ञानिक दोनों ही क्रमों का अनुसरण किया जाना चाहिए।
5. सभी प्रकार से इन अधिगम अनुभवों का संगठन इस प्रकार का होना चाहिए कि उससे निर्धारित अनुदेशात्मक उद्देश्यों की उपलब्धि को ध्यान में रखते हुए अधिगम अनुभवों को अच्छे से अच्छे ढंग से विद्यार्थियों द्वारा अर्जित किया जा सके।

उपरोक्त पंक्तियों में हमने अधिगम अनुभवों के चयन और संगठन के बारे में संक्षेप में संकेत दिया है परंतु इनका विस्तृत वर्णन किसी विषय के पाठ्यक्रम से संबंधित अनुदेशात्मक सामग्री के विकास संबंधी क्षेत्र में ही आता है।

टिप्पणी

संख्या, संचालन और गणना

अवधारणा के पूरा होने के बाद, छात्रः

1. मानक और ध्रुवीय रूप में जटिल संख्या व्यक्त करें और एक से दूसरे में परिवर्तित करें।
2. r $(\cos\theta + i\sin\theta)$ और इसके विपरीत करने के लिए $a + ib$ के रूप में अभिव्यक्तियों को परिवर्तित करें।
3. त्रिकोणमितीय पहचान का उपयोग कर त्रिकोणमितीय अभिव्यक्ति को सरल बनाएं।

1.5.4 शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में शिक्षार्थी को शामिल करना

शिक्षकों को छात्रों को सीखने की प्रक्रिया में शामिल करने की जरूरत है। शिक्षक अपने छात्रों की अकेदमिक सफलता में योगदान देते हैं जब वे उन्हें यह समझने में मदद करते हैं कि लोग विभिन्न तरीकों से सीखते हैं और उन्हें अपनी सीखने की शैलियों की पहचान करने के लिए मार्गदर्शन करते हैं। इसके अतिरिक्त, हम उनकी प्रेरणा को बढ़ाने के लिए जब हम छात्रों को आमंत्रित करने की योजना बना में भाग लेने के लिए वे कैसे सीखना होगा और कैसे वे अपने सीखने का प्रदर्शन करेंगे।

छात्र अपने मूल विचारों के साथ कक्षा में आते हैं। उनके अनूठे अनुभव और ज्ञान उन्हें शिक्षार्थियों के रूप में प्रभावित करते हैं और उन्हें ध्यान में रखा जाना चाहिए। इसलिए, हर अभ्यास के दौरान, शिक्षकों को कार्य को न्यायोचित ठहराते हुए, सुझावों को सुनने, विचारों की याचना और छात्रों को अपने विचारों को साझा करने के लिए पर्याप्त समय प्रदान करके रचनात्मक छात्र निवेश पर यथासंभव विचार करना चाहिए। इसके अलावा, शिक्षकों को परीक्षा परिणामों, लिखित जानकारी और शैक्षिक योजनाओं की समीक्षा करके अपनी प्रगति का आकलन करने में छात्रों को शामिल करना चाहिए। सीखने की प्रक्रिया में छात्रों को शामिल करने के अवसर बनाना और सुधार करने से छात्रों को इस बात की जानकारी हो जाती है कि वे कैसे सीखते हैं और कुछ कौशल उन्हें क्यों लाभ पहुंचाते हैं। नतीजतन, छात्रों को प्रेरित किया जाता है और स्वतंत्र रूप से काम करते समय उन संक्रियाओं का प्रयोग करे जिसकी अधिक संभावना अधिक होती है।

एक परीक्षा लेने के बाद, छात्रों को अपने काम के माध्यम से छात्रों को अवगत करना चाहिए और त्रुटियों के प्रकार की पहचान से परिचित भी। फिर उन्हें भविष्य में परीक्षण के अवसर लेने के लिए लक्ष्य निर्धारित करें।

चरण 1: क्या छात्र सक्रिय रूप से अपने परीक्षण की समीक्षा करें।

- छात्रों से कहें कि वे अपने परीक्षण के माध्यम से जाएं और यह जांचें कि प्रत्येक प्रश्न सही था या गलत।

- हर एक के लिए जो सही था, क्या उन्हें एक रणनीति निर्धारित करें जिसने उन्हें इसे सही ढंग से हल करने में मदद की।
- हर एक के लिए है कि गलत था, छात्र निर्धारित क्या त्रुटि थी?

टिप्पणी

भविष्य के लिए लक्ष्य निर्धारित करें

- छात्रों से कहें कि वे प्रत्येक अनुभाग के लिए अपनी त्रुटियों और सफल रणनीतियों के आधार पर अपने अगले परीक्षण के लिए संकेतों की एक सूची बनाएं।
- इन लक्ष्यों को बनाए जाने के बाद, उनकी गलतियों को पकड़ें और उन्हें अगली परीक्षा के लिए बाहर निकालें, इसलिए छात्र के पास व्यक्तिगत अनुस्मारक का एक संग्रह है।

तालिका 1.15 *कक्षा प्रक्रिया*

क्या करें	ऐसा क्यों करें	कैसे–कैसे सुझाव
संलग्न करें और निरीक्षण करें: कक्षा की गतिविधियों में योजना बनाएं जो छात्रों को पाठ्यक्रम के साथ संलग्न करें और उन्हें भाषा के साथ वर्णन करने के लिए प्रेरित करें।	आपको सीखने के उद्देश्यों के सापेक्ष व्यक्तिगत छात्रों की सामर्थ्य और जरूरतों की अपनी टिप्पणियों को दस्तावेज़ करने की अनुमति देता है।	बहस, सिमुलेशन, समूह परियोजनाओं, सहयोगी नोट – लेने, छात्र के नेतृत्व में चर्चा, और खेल का उपयोग करने का प्रयास करें।
प्रतिपुष्टि दें और लें: छात्रों को दैनिक विशिष्ट प्रतिक्रिया प्रदान करें कि वे क्या अच्छा कर रहे हैं और उन्हें आगे क्या करने की आवश्यकता है ताकि वे सीखने के उद्देश्यों को प्राप्त कर सकें।	आपको विशिष्ट प्रश्नों का उत्तर देने और अधिक सफल होने के लिए उन्हें क्या चाहिए, इसके बारे में छात्रों से प्रतिक्रिया प्राप्त करने का अवसर प्रदान करता है।आपको विशिष्ट प्रश्नों का उत्तर देने और अधिक सफल होने के लिए उन्हें क्या चाहिए, इसके बारे में छात्रों से प्रतिक्रिया प्राप्त करने का अवसर प्रदान करता है।	इसे पूरा करें क्योंकि आप कक्षा की गतिविधियों में संलग्न होते समय या औपचारिक रूप से छात्रों को उनके कक्षा अनुभव के बारे में सर्वेक्षण करके प्रत्येक छात्र के साथ निरीक्षण और वार्तालाप करते हैं।
अक्सर प्रदान करें: सीखने के उद्देश्यों में अपने ज्ञान का प्रदर्शन करने की दिशा में उनकी प्रगति पर चर्चा करने के लिए पूरे इकाई में प्रत्येक छात्र के साथ संक्षेप में मिलें, और आवश्यक कदम सुझाएं।	लेखन में छात्र प्रगति दस्तावेज़ के लिए एक अवसर प्रदान करता है, और सुनिश्चित करें कि प्रत्येक छात्र अपने या अपने प्रयासों के लिए एक स्पष्ट विषय पर ध्यान दें।	यदि आप तैयार हैं और आप घड़ी पर अपनी नजर रखते हैं, तो प्रति छात्र 2 मिनट पर्याप्त होना चाहिए। यदि संभव हो तो प्रति सप्ताह एक घंटा प्रदान करें, विशेष रूप से लंबी इकाइयों के लिए।
इकाई के रूपरेखण मूल्यांकन: सुनिश्चित करें कि योगात्मक आकलन वास्तव में सीखने के उद्देश्यों में आपके द्वारा लक्षित ज्ञान और कौशल को मापते हैं।	आपको इकाई पढ़ाने से पहले अपने आकलन को रूपरेखण करने के लिए प्रोत्साहित करता है ताकि आप अपने शिक्षण में आवश्यक पर ध्यान केंद्रित कर सकें, और आपने जो सिखाया है उस पर परीक्षण करें।	आपके द्वारा कक्षा में शामिल किए गए प्रमुख ज्ञान क्षेत्रों और प्रमुख कौशल क्षेत्रों के अनुसार मूल्यांकन व्यवस्थित करें। आप छात्रों से यह भी पूछ सकते हैं कि आप संभावित परीक्षण प्रश्नों, परियोजनाओं, लेखन संकेतों आदि के लिए अपने विचारों को साझा करके इन मूल्यांकनों को विकसित करने में आपकी मदद करें।
स्व–मूल्यांकन सिखाएं: छात्रों को सिखाएं कि योगात्मक मूल्यांकन पर उनके प्रदर्शन का विश्लेषण कैसे करें और भविष्य में सीखने की गतिविधियों के लिए लक्ष्य निर्धारित करें।	छात्रों को एक शिक्षक की तरह आंख के साथ अपने प्रदर्शन का आकलन करने के लिए सशक्त बनाता है। स्व–मूल्यांकन, और लक्ष्य–विन्यास महत्वपूर्ण कार्यकारी कौशल हैं जिन्हें सिखाया जा सकता है।	प्रतिबिंब, समीक्षा पत्रों का उपयोग करने का प्रयास करें,; विश्लेषण पत्र, और शीर्षक का परीक्षण करें जो शीर्षक के अनुरूप हैं और मूल्यांकन के बाद प्रतिबिंब प्रक्रिया में सहायता करते हैं।

1.5.5 रूपरेखित किए गए अध्ययन का अनुभव

टिप्पणी

सीखने के अनुभवों की योजना, रूपरेखण और संगठन प्रभावी शिक्षण के लिए रूपरेखा प्रदान करते हैं। कक्षा शिक्षण–अधिगम में, उन गतिविधियों की योजना बनाना आवश्यक है जो शिक्षकों और शिक्षार्थियों दोनों को दिशा प्रदान करेंगी। सबसे पहले, प्रभावी और उचित योजना किसी दिए गए पाठ्यक्रम के लिए अपेक्षाओं के बारे में अनंतिम निर्णय लेने और यह तय करना शामिल है कि यह सबसे अच्छा कैसे पूरा किया जा सकता है, शिक्षण सीखने के अनुभवों को को किस प्रकार समृद्ध किया जा सकें। दूसरे, इन अनुभवों के आयोजन में शिक्षार्थियों के विविध हितों के अनुसार उद्देश्यों, रणनीतियों और विभिन्न गतिविधियों का निर्माण करना शामिल है। यह शिक्षार्थियों के बीच ध्वनि शैक्षणिक नींव विकसित करने का आधार बन सकता है, दिन–प्रतिदिन के जीवन में ज्ञान के सफल अनुप्रयोग को बढ़ावा दे सकता है।

सीखने के अनुभवों की विशेषताएं

अच्छे सीखने के अनुभवों के मापदंड हैं:

1. **उद्देश्य–आधारित** : उद्देश्यों को बदलने से अपेक्षित व्यवहारिक परिवर्तनों के संबंध में सीखना अनुभव उचित होना चाहिए। उद्देश्य शिक्षार्थी द्वारा प्राप्त किए जाने वाले अंतिम बिंदु हैं और सीखने के अनुभवों को रूपरेखा करने के लिए आधार प्रदान करते हैं। उद्देश्य विषय के संबंध में तैयार किए जाते हैं। शिक्षक पढ़ाए जाने वाले विषय के उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए रूपरेखित किए गए अध्ययन का अनुभव कर सकते हैं।
2. **शिक्षार्थी अभिविन्यास** : सीखने का अनुभव गतिविधियों के माध्यम से शिक्षार्थी में आकर्षक व्यवहार परिवर्तन प्रदान करने के लिए है। व्यक्तिगत मतभेदों की आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए, सीखने के अनुभवों कल्पनाशील और आसानी से शिक्षार्थियों के हितों और क्षमताओं के लिए अनुकूलनीय होना चाहिए।
3. **अनुभव की समृद्धि** : शिक्षार्थियों परिपक्वता, रुचियों और क्षमताओं में भिन्न होते हैं। विविध हितों, अनुभवों, क्षमताओं और सीखने की दरों के साथ शिक्षार्थियों के लिए प्रभावी और सार्थक अनुदेश की योजना बनाने के लिए; शिक्षक को अपनी कक्षा में विभिन्न शिक्षार्थियों के कौशल को पकड़ने के लिए सीखने के अनुभवों की सीमा की कल्पना करनी चाहिए। रचनात्मक काम, सामुदायिक परियोजनाओं, निर्माण गतिविधियों और कौशल और गणितीय क्षमताओं का उपयोग प्रयोगों शुरू किया जाना चाहिए ताकि शिक्षार्थियों की सोच को चुनौती दे सके।
4. **मानसिक स्तर के लिए उपयुक्तता** : सीखने के अनुभव शिक्षक को विविध शिक्षार्थियों के लिए उपयुक्त सीखने का माहौल बनाकर विभिन्न उद्देश्यों को प्राप्त करने की सुविधा प्रदान करते हैं। सीखने का अनुभव शिक्षार्थियों के एक विशेष समूह के मानसिक स्तर के अनुसार नियोजित है।

टिप्पणी

5. **व्यावहारिकता :** शिक्षक सीखने के अनुभवों को इस तरह से योजना बनाता है कि इसका उद्देश्य अधिकतम सिखाने से होता है। सीखने के अनुभवों के माध्यम से प्रदान किए गए वर्तालाप शिक्षार्थियों को उनकी सोच को बढ़ावा देकर सीखने में मदद करती है। व्यावहारिक सीखने के अनुभवों को रूपरेखा करने से कक्षा कक्ष में शिक्षकों और शिक्षार्थियों के बीच सामाजिक संज्ञानात्मक वार्तालाप को बढ़ावा देना चाहिए।

6. **मूल्यांकन :** अनुदेश के उद्देश्यों की प्राप्ति की जांच करने के लिए, शिक्षक शिक्षार्थियों का मूल्यांकन करने के लिए उपयुक्त मोड़ का चयन करता है। सीखने के अनुभव शिक्षार्थियों को आकर्षक उद्देश्यों को प्राप्त करने में मदद करने का साधन हैं। इसलिए, शिक्षकों द्वारा आवधिक मूल्यांकन के लिए हर सीखने का अनुभव व्यवहार्य है।

एक वास्तविक शिक्षण योजना में सीखने के अनुभवों का अनुक्रमण

सीखने के अनुभव प्रभावी होते हैं जब वे एक संबंधित पूरे के रूप में आयोजित कर रहे हैं। आम तौर पर किसी विशेष पाठ या इकाई में, चयन और सीखने की गतिविधियों के अनुक्रमण तीन स्तरों पर किया जाता है। आयोजन गतिविधियों का अनुक्रम शिक्षार्थियों को एक अनुक्रम में सोच प्रक्रिया का उपयोग करने का अवसर प्रदान करता है जो अवलोकन, तुलना, सामान्यीकरण और अनुमानित के साथ शुरू होता है, और विश्लेषण और उद्देश्य स्थापित बनाने को शामिल करने के लिए सोच का विस्तार करता है।

स्तर 1: तैयारी या तत्परता चरण

प्रत्येक मुख्य विचार के लिए उद्घाटन गतिविधियां या सीखने के अनुभव रुचि को सुरक्षित करने, ध्यान केंद्रित करने और विषय के प्रति शिक्षार्थी की तत्परता का निर्माण करने के लिए प्रेरक हैं। शिक्षार्थी ठोस वस्तुओं या वास्तविक जीवन स्थितियों के साथ पहले हाथ अनुभव दिया जाना चाहिए जिससे वह कुछ ज्ञात गणितीय स्थिति में शामिल विचारों के ज्ञान से अवगत है।

स्तर 2: अन्वेषणात्मक या विकास चरण

ये सीखने के अनुभव विश्लेषणात्मक रूप से प्रयोग, करने और सोचने के लिए अवसर प्रदान करते हैं। ये सह–संबंध क्या है और क्या निष्कर्ष है। इसके बीच संबंध प्रदर्शित करने में मदद करते हैं।

स्तर 3: सामान्यीकरण चरण

वह शिक्षार्थी गणितीय विचारों के बारे में अधिक सीखता है क्योंकि वह संक्रियाओं का निरीक्षण, विश्लेषण और निष्कर्ष को खोजता है और कई समस्याओं या स्थितियों से सामान्यीकरण का वर्णन करता है। ये समापन गतिविधियां हैं जो शिक्षार्थी को विभिन्न मुख्य विचारों को एक साथ लाने और समझ को सामान्य बनाने के लिए प्रोत्साहित करती हैं। इस स्तर पर, शिक्षार्थी का मानसिक स्थिति परिपक्व हो गया है और वह गणितीय विचारों को अधिक सार्थक रूप से व्यक्त कर सकता है। प्रदर्श, प्रतिवेदन, चर्चा

टिप्पणी

आदि, इस श्रेणी की गतिविधियों में आते हैं। समापन गतिविधियों आमतौर पर शैक्षिक परिणाम पर जोर देने के साथ एक प्रस्तुति में परिणाम है।

सीखने के अनुभवों को विभिन्न उद्देश्यों के लिए नियोजित किया जा सकता है जैसे–

(क) शिक्षार्थियों को भागों में सोचने के द्वारा एक जटिल गणितीय विचार की व्याख्या करने के लिए करते हैं;

(ख) सामान्यीकरण का विश्लेषण करने और समीकरण स्तर बनाने का अवसर प्रदान करना;

(ग) नई शब्दावली विकसित करने और ज्ञात शब्दावली का उपयोग करने के लिए;

(घ) गणित के विचार और कुछ अन्य विचारों जैसे, सामाजिक या ज्ञान की अन्य शाखाओं से संबंधित समन्वय करने के लिए;

(ङ) समस्या को सुलझाने की प्रक्रिया में अनुभव प्रदान करना, यानी स्थिति की योजना बनाना, जानकारी एकत्र करना, समस्या का समाधान करना और परिणाम की पुष्टि करना;

(च) गणित विचारों के अनुप्रयोगों के लिए गुंजाइश प्रदान करने के लिए;

(छ) गणित में सबूत के विभिन्न तरीकों में एक अंतर्दृष्टि प्रदान करने के लिए

1.5.6 विषयगत दृष्टिकोण के आधार पर इकाई और पाठ योजना तैयार करना

गणित का पाठ्यक्रम या तो अवधारणाओं या दक्षताओं के संदर्भ में आपके लिए उपलब्ध हो सकता है। इसलिए, आपका लक्ष्य गणितीय पाठ्यक्रम और प्रक्रियाओं से से निष्कर्ष के संबंध में बच्चों के बीच कुछ समझ और कौशल का अधिग्रहण सुनिश्चित करना होगा। दूसरे शब्दों में आप अपने प्रकरण के तहत बच्चों के बीच गणितीय दक्षताओं को विकसित करने का उद्देश्य कर सकते हैं।

गणित की एक इकाई में परस्पर दक्षताओं/अवधारणाओं/विषय–वस्तुओं का एक हिस्सा होता है जिसका कुछ सामान्य आधार या विशेषताएं होती हैं। इसलिए, गणितीय सीखने के किसी भी क्षेत्र के भीतर कई इकाइयों का गठन किया जा सकता है। यह दक्षताओं की मात्रा की प्रकृति और गणित पढ़ाने के बारे में शिक्षक के अनुभव और बच्चों की सीखने की शैलियों के बारे में उनकी धारणा है जो उसे इकाइयों को तैयार करने के बारे में निर्णय लेने में सक्षम बनाएगा।

निम्नलिखित बिंदु इकाई योजना के फायदों को उजागर करते हैं और इस प्रकार स्पष्ट करते हैं कि कैसे इकाई योजना शिक्षकों को आसान और प्रभावी बात करती है:

1. यह शिक्षकों को शिक्षण–अधिगम का पाठ्यक्रम दृष्टिकोण रखने में मदद करता है, जिससे उसके निवारण में उपलब्ध समय और संसाधनों के आयोजन में मदद मिल सकती है।

2. यह पाठ्यक्रम सामग्री की एक व्यवस्थित, अनुक्रमिक और वर्गीकृत व्यवस्था तैयार करने में मदद करता है जो शिक्षण गतिविधियों को सर्वोत्तम संभव तरीके से विकसित करने के लिए अंतर्दृष्टि दे सकता है।

3. यह संदर्भ के तहत पाठ्यक्रम या योग्यता के विभिन्न पहलुओं पर संतुलित जोर देने में मदद करता है।
4. यह कक्षा में निष्कर्षित जाने वाली दक्षताओं के साथ पाठ्य सामग्री को सहसंबंधित करने का अवसर प्रदान करता है।
5. यह शिक्षण–शिक्षा के लिए वैकल्पिक दृष्टिकोणों के बारे में सोचने और व्यक्तिगत मतभेदों के अनुकूल होने में मदद कर सकता है। यह बच्चों के इकाई मूल्यांकन और प्रतिपादित शिक्षण के आयोजन और आवश्यकताओं के अनुसार संवर्धन उपायों को शुरू करने में मदद कर सकता है।

इकाई परियोजना में शामिल स्तर

इकाई परियोजना में दो प्रमुख प्रक्रियाएं शामिल हैं, जो अनुक्रमण और चयन है। इकाई परियोजना का मुख्य केन्द्र बच्चों की ओर से प्रभावी शिक्षा सुनिश्चित करना होता है। दक्षताओं के दिए गए संग्रह को एक शिक्षण सीखने के अनुक्रम में व्यवस्थित करने के बाद, सार्थक खंडों की पहचान के आधार पर एक इकाई का गठन किया जा सकता है।

नीचे कुछ चरणों का पालन करने का सुझाव दिया गया है:

(क) वर्ष के दौरान कक्षा के लिए दक्षताओं के पूरे पाठ्यक्रम संग्रह का अनुमान लगाएं।

(ख) शिक्षकों को उपलब्ध शिक्षण समय का अनुमान लगाएं।

(ग) शिक्षण–अधिगम अनुक्रम में दी गई पाठ्यक्रम दक्षताओं के संग्रहों की व्यवस्था करें।

(घ) पाठ्यक्रम दक्षताओं के अंतर–संधि पहलुओं की पहचान करें।

(ङ) पूरे पाठ्यक्रम दक्षताओं को इकाइयों में वितरित करें।

इसलिए आप निम्नलिखित पर विचार करना पसंद कर सकते हैं:

(i) एक इकाई बहुत छोटी या बहुत लंबी नहीं होनी चाहिए।

(ii) इसके घटकों के भीतर समानता का कुछ तत्व होना चाहिए।

(iii) यह ऐसा होना चाहिए कि कक्षा में पूरा करने के लिए किसी भी मामले में एक महीने से अधिक की आवश्यकता नहीं होनी चाहिए।

(iv) यह ऐसा होना चाहिए कि इसके पूरा होने से शिक्षक और छात्रों दोनों के लिए उपलब्धि की भावना विकसित हो।

(च) प्रत्येक सूचीबद्ध इकाई के लिए, आगे शिक्षण उस विषय में समुचित ज्ञान होने की आवश्यकता होगी।

(छ) इकाई के भीतर प्रत्येक पाठ के लिए, उचित शिक्षण विधियों, शिक्षण व्यवस्थाओं, छात्रों की गतिविधियों और मूल्यांकन प्रक्रिया के बारे में तय करें।

(ज) इन निर्णयों और अव्यवस्था को एक सारणीय रूप में प्रस्तुत करें जिसे इकाई योजना माना जा सकता है।

विषयगत इकाई योजना

विषयगत इकाइयों (शायद प्राथमिक स्कूल से सबसे परिचित) भी लक्ष्यों तक पहुंचने के तथ्यों से संबंधित है, लेकिन ऐसा करने के लिए कई विषय क्षेत्रों से मानकों को एकीकृत करें, एक आम विषय या विषय पर ध्यान केंद्रित करें।

उदाहरण के लिए, प्राथमिक शिक्षक विज्ञान, गणित और सिखाने के लिए उससे संबंधित मूल आधार के बारे में एक विषयगत इकाई विकसित कर सकते हैं।

पाठ्य योजना

पाठ की उचित योजना प्रभावी शिक्षण की कुंजी है। शिक्षक को कक्षा में विषय वस्तु और उसके वितरण के तरीकों के बारे में अवगत होना चाहिए। इससे शिक्षक को यह पता चलता है कि मुख्य अवधारणाओं को कैसे विकसित किया जा सके और उन्हें वास्तविकता से कैसे सहसंबद्ध किया जा सके। पाठ्य योजना इसलिए भी आवश्यक है क्योंकि प्रभावी अधिगम तभी होता है जब विषय वस्तु को एकीकृत और सहसंबद्ध तरीके से प्रस्तुत किया जा सके। हालांकि पाठ्य योजना के लिए कड़ी मेहनत की आवश्यकता होती है। यह कक्षा में शिक्षक द्वारा कार्यान्वित (कार्य योजना) के रूप में एक पाठ की कल्पना करता है।

पाठ्य योजना का महत्व और आवश्यकता

जब आप कक्षा में किसी पाठ को पढ़ाने के लिए जाते हैं, तो आमतौर पर अनौपचारिक रूप से इनके लिए तभी तैयार होकर जाते हैं। यदि आप किसी पाठ को पढ़ाने के उद्देश्य से अवगत नहीं थे। या उस पाठ के बारे में आपके पास ज्ञान का अभाव है तब आप छात्रों को उस पाठ के मूल आधार से समुचित ढंग से परिचित नहीं करवा सकते इसलिए किसी पाठ को पढ़ाने के लिए शिक्षक को उस पाठ को पढ़ाने के लिए शिक्षक को उस पाठ से परिचित होना अत्यावश्यक है। पाठ्य योजना विकसित करने की प्रक्रिया इस प्रकार है कि इन समस्याओं का समाधान स्वतः हो जाता है। पाठ्य योजना शिक्षक को निम्नलिखित तरीकों से मदद करती है।

- यह शिक्षण को व्यवस्थित और सुव्यवस्थित बनाता है।
- यह शिक्षकों को पाठ पढ़ाने के लिए पर्याप्त संसाधन और उनके उचित क्रम की पहचान में मदद करता है।
- यह शिक्षकों को उपलब्ध समय का सही उपयोग करने में समक्ष बनाता है।
- यह अध्ययन के दौरान शिक्षकों को आत्मविश्वास देता है।

टिप्पणी

पाठ योजना के लिए निम्नलिखित चरणों का पालन करने की जरूरत है

1 **उद्देश्य** : बच्चों के बीच विकसित की जाने वाली योग्यता के अनुसार एक विशेष पाठ पढ़ाने के उद्देश्यों को बताया जाना चाहिए। आम तौर पर शिक्षकों को पाठ के केवल सामांय और विशिष्ट उद्देश्यों से अवगत कराना चाहिए।

2. **संसाधन** : जिस विषय को आच्छादित करने का उद्देश्य है, वह निर्धारित समय तक सीमित होना चाहिए। उद्देश्य की भाषा सरल होना चाहिए और यह विद्यार्थियों के पिछले ज्ञान से संबंधित होना चाहिए। इसका संबंध दैनिक जीवन की स्थितियों से भी होना चाहिए।

3. **विधियां** : सबसे उपयुक्त विधि शिक्षक द्वारा चुना जा सकता है। चयनित विधि, विषय के लिए उपयुक्त होना चाहिए। उपयुक्त शिक्षण सहायता भी शिक्षक द्वारा पहचाना जाना चाहिए। शिक्षक अपने पाठ को और अधिक प्रभावी बनाने के लिए अनुपूरक सहायता का भी उपयोग कर सकता है।

4. **मूल्यांकन** : एक शिक्षक को अपने पाठ का मूल्यांकन करना चाहिए ताकि वह अपने पाठ के उद्देश्यों को किस हद तक प्राप्त कर सके। मूल्यांकन उपयुक्त प्रश्नों के माध्यम से विषय वस्तु के पुनर्मूल्यांकन से भी किया जा सकता है।

एक अच्छा पाठ योजना की विशेषताएं

1. पाठ योजना के माध्यम से शिक्षक खुद उससे संबंधित ज्ञान से अवगत होना चाहिएए क्योंकि वह विशेष रूप से पाठ सिखाने के उद्देश्यों को इंगित करने में सक्षम हो जाएगा। उद्देश्य ऐसे होने चाहिए कि वे हैंः कि वे विद्यार्थियों को समझ आए।
2. शिक्षक को पता चलेगा कि विषय इस अवधि के दौरान पाठ्य का ज्ञान कराने के लिए पर्याप्त है या नहीं है।
3. वह शिक्षार्थियों द्वारा की जाने वाली गतिविधियों की पहचान पहले से करेंगे।
4. वह शिक्षार्थियों के अपेक्षित उत्तरों का पूर्वानुमान लगा सकेंगे।
5. एक अच्छा पाठ योजना उद्देश्यों, शिक्षक और छात्र गतिविधियों के बीच अच्छा संबंध पेश करना चाहिए।
6. योजना न तो बहुत छोटी होना चाहिए और न ही बहुत लंबी होना चाहिए।
7. इसमें रटाने के बजाय बच्चों के बीच स्पष्ट समझ के विकास पर ध्यान देना चाहिए।

1.5.7 दिव्यांग बच्चों के लिए सीखने के अनुभवों की योजना बनाना

आजकल कक्षाएं बहुत विविध होती जा रही हैं। एक वर्ग में विभिन्न रुचियों और क्षमताओं के साथ बहुत शिक्षार्थियों होते हैं और दृश्य हानि, श्रवण हानि, में की अक्षम कुछ बच्चे होते हैं। आदि मौजूद रहने की संभावना है। इसलिए, पारंपरिक अनुदेशात्मक रणनीति, निश्चित पाठ्यक्रम और शिक्षार्थी प्रदर्शन के मूल्यांकन का निश्चित तरीका

काम नहीं करेगा। विशेष जरूरतों वाले बच्चों को अतिरिक्त सहायता, पाठ्यक्रम में अनुकूलन, शिक्षण रणनीतियों और मूल्यांकन गतिविधियों की आवश्यकता होती है। इसलिए, गणित के लिए सीखने के अनुभवों को रूपरेखित करने के समय, आपको ऐसे बच्चों की सीखने की जरूरतों और गणित सीखने में क्या कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है, इसके बारे में पता होना चाहिए।

दृष्टिबाधितों के लिए सिखाने का अनुभव

1. श्यामपट्ट पर लिखते समय मौखिक रूप से वर्णन करें।
2. विषय वस्तु और जानकारी मौखिक रूप से प्रस्तुत करें।
3. जोर से पढ़ाएं।
4. समूहों में शिक्षार्थियों को वर्णित किए गए तथ्यों में संबंधित कार्य सौंपे करें।
5. पाठ्य संबंधी सहयोगात्मक योजनाएं बनाएं।
6. यदि संभव हो, तो आपने शिक्षार्थी को श्यामपट्ट पर जो लिखा है उसकी एक प्रति प्रदान करें।
7. हस्त विधि के तहत हाथ दो और तीन आयामी आंकड़ों की पहचान के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।

नेत्रहीन छात्रों के लिए पाठ्यक्रम से अवगत कराने वाले साधन

- गणितीय ब्रेल लिपि
- गिनतारा
- जियो बोर्ड
- विशेष ज्यामिति किट
- गोला पहिया और रबर चटाई
- टेलर फ्रेम
- श्रवण विज्ञापन
- स्पर्श
- संवेदान्वेषिकी यंत्र
- बड़ी प्रिंट सामग्री
- आवर्धन उपकरण
- स्क्रीन रीडर

दृष्टिबाधितों के लिए मूल्यांकन तकनीक

समावेशी शिक्षा का अर्थ विशेष रूप से रूपरेखित किया गया है। जो एक असाधारण बच्चे की समावेशी शिक्षा और संबंधित जरूरतों को पूरा करता है।

टिप्पणी

उदाहरण के लिए–

1. दृष्टिबाधित बच्चों को बड़े प्रिंट या ब्रेल में पठन सामग्री की आवश्यकता हो सकती है।
2. श्रवण बाधित बच्चों को श्रवण प्रशिक्षण, लिप रीडिंग आदि की आवश्यकता हो सकती है।
3. मानसिक रूप से मंद बच्चों के लिए कौशल प्रशिक्षण की आवश्यकता हो सकती है।

श्रवण बाधित छात्रों के लिए सिखाने का अनुभव

श्रवण बाधित छात्रों के लिए हस्त विधि एवं लिप रीडिंग द्वारा ज्ञान से अवगत करना चाहिए। आजकल नई तकनीकों का विकास किया गया है जसमें से प्रमुख मूक चलचित्र है। जिससे मनोरंजन द्वारा छात्र पाठ्यक्रम के ज्ञान से अवगत होते हैं।

श्रवण बाधित के लिए संसाधन

श्रवण बाधित छात्रों के लिए संसाध निम्न प्रकार के हैं–

1. होंठ पढ़ना (लिप रीडिंग)
2. पेंसिल कागज पर लिखकर विचारों में व्यक्त करना
3. डैक्टिलोलॉजी
4. सांकेतिक भाषा
5. बिमोडल प्रणाली

श्रवण बाधित के लिए मूल्यांकन तकनीक

- परीक्षण या परीक्षण वस्तुओं की मात्रा कम करें।
- वैकल्पिक परीक्षणों का उपयोग करें।
- परीक्षणों के साथ पढ़ने की सहायता प्रदान करें।
- अतिरिक्त समय की अनुमति दें।

बुद्धिहीन छात्रों के लिए सिखाने का प्रशिक्षण

- बहु संवेदी दृष्टिकोण का उपयोग करके
- हमेशा दृश्य विज्ञापन का उपयोग करें और हाथों पर ध्यान केंद्रित रखें और स्पर्श करें
- वास्तविक जीवन संदर्भों का उपयोग करें
- बहु–कदम समस्याओं और एल्गोरिदम के लिए चरण/प्रक्रियाओं की सूची बनाए
- जब शिक्षार्थी वर्ग का काम कर रहे हैं तो सटीकता के लिए लगातार जांच प्रदान करें।

बुद्धिहीन शिक्षण विकलांगों के लिए संसाधन सीखना

टिप्पणी

- बहुमाध्यम सॉफ्टवेयर
- टेप रिकॉर्डर
- चलचित्र
- स्पर्श
- श्रवण टेप
- गिनतारा
- जियो बोर्ड
- प्रदर्शन पाठ्य पुस्तक

बुद्धिहीन शिक्षण विकलांगों के लिए मूल्यांकन

जब एक शिक्षक बहु–संवेदी दृष्टिकोण को शामिल करके और भावात्मक पहलू का ध्यान रखकर विभिन्न तरीकों से विषय सामग्री प्रस्तुत करता है; तो यह कक्षा में विकलांग बच्चों सहित शिक्षार्थियों के सभी प्रकार में मदद करता है जिसके परिणामस्वरूप सबसे प्रभावी शिक्षण होता है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

15. गणित में एक प्रभावी शैक्षणिक योजना से क्या अभिप्राय है?
16. विषय वस्तु विश्लेषण क्या है?
17. विद्यालय स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्य को व्यक्त करें।
18. रूपरेखित किए गए अध्ययन का अनुभव के बारे में बताएं।

1.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. गणित का शब्दकोश अर्थ यह है, कि 'यह या तो संख्या और स्थान का विज्ञान है या मात्रा, माप और स्थानिक संबंधों का विज्ञान है। यह विज्ञान की एक व्यवस्थित, संख्याओं और सटीक शाखा है। यह मात्रात्मक तथ्यों, रिश्तों के साथ–साथ समष्टि रूप से जुड़ी समस्याओं से संबंधित है। यह आकार, व्यवस्था और मात्रा का तार्किक अध्ययन है। गणित को विभिन्न लेखकों द्वारा विभिन्न तरीकों से परिभाषित किया गया है। हमें उनमें से कुछ की जांच करनी चाहिए।
2. आइन्सटीन के अनुसार 'गणित एक मानव चिन्तन का प्रतिफल है जो अनुभवों से स्वतंत्र है तथा सत्य के अनुरूप है'।
3. कला और गणित में छात्रों को विभिन्न कला रूपों और गणितीय विचारों में इन अमूर्त अवधारणाओं के अनुभव के माध्यम से समय और स्थान, लय और रेखा के बीच संबंधों की समझ शामिल है। गणितीय रूप से संबंधित सौंदर्य विचार,

टिप्पणी

जैसे कि गोल्ड अनुपात, परिकल्पना, प्रदर्शन और बहुप्रतिरूपक कला रूपों में उपयोग किया जाता है।

4. भूगोल अपने ब्रह्मांड में हमारी पृथ्वी का वैज्ञानिक और गणितीय वर्णन के अलावा कुछ नहीं है। पृथ्वी का ब्रह्मांड में आयाम और परिमाण की स्थिति और स्थिति दिन और रातों का गठन, चंद्र और सौर ग्रहण, अक्षांश और देशांतर, अधिकतम और न्यूनतम वर्षा, आदि भूगोल के कई सीखने के क्षेत्रों में से कुछ हैं जिन्हें गणित के अनुप्रयोग की आवश्यकता है। भूगोल में सर्वेक्षण करने वाले यंत्रों को गणितीय रूप से सटीक रखना होगा।

5. इतिहास के अध्ययन में जनसंख्या लेखा–चित्र और आरेख और अन्य सांख्यिकीय जानकारी सहित ऐतिहासिक जानकारी की एक श्रृंखला का विश्लेषण और व्याख्या शामिल है। गणित में विकसित अवधारणाओं और कौशल छात्र समझ और इतिहास स्रोतों की एक श्रृंखला की व्याख्या और प्रदर्शन ऐतिहासिक समझ में सबूत के रूप में उनकी प्रस्तुति का समर्थन करते हैं।

6. आर्यभट्ट द्वारा रचित तीन ग्रंथों की जानकारी आज भी उपलब्ध है। जिनके नाम दशगीतिका, आर्यभट्टीयम् तथा तंत्र है। इन्होंने आर्यभट्टीयम् नामक महत्वपूर्ण ज्योतिष ग्रंथ लिखा, जिसके अंतर्गत वर्गमूल, घनमूल, समान्तर श्रेणी तथा विभिन्न प्रकार के समीकरणों का वर्णन है। उन्होंने अपने आर्यभट्टीयम् नामक ग्रंथ में तीन पृष्ठों में समा सकने वाले 33 श्लोकों में गणित विषयक सिद्धांत तथा 5 पृष्ठों में 75 श्लोंकों में खगोल–विषयक सिद्धान्त का भी उल्लेख किया है।

7. तार्किक व्यवस्था से विषय–वस्तु का कठोर व्यवहार होता है जो तार्किक तर्क पर आधारित होता है जबकि मनोवैज्ञानिक व्यवस्था छात्रों की दृष्टि से होती है। ऐसा लगता है कि दोनों दृष्टिकोण अलग हैं लेकिन इन्हें आसानी से मिलाया जा सकता है। संगठन मनोवैज्ञानिक और तार्किक दोनों हो सकता है। सभी तर्क मनोवैज्ञानिक है। मनोविज्ञान एक विशेष चरण में छात्रों की समझ की शक्ति पर प्रकाश डालता है। हम विभिन्न तरीकों से तार्किकता का प्रयोग कर सकते हैं। मनोविज्ञान को यह तय करना चाहिए कि किसी विशेष विषय के लिए कौन सा तार्किक दृष्टिकोण उपयुक्त होगा।

8. गणित का विशेषज्ञ होने के लिए अपनी क्षमताओं का विकास गणित शिक्षा का व्यापक उद्देश्य है जिसमें समस्या समाधान, हेरिस्टिक्स का उपयोग, अनुमान प्रतिरूपों सन्निकटन, अनुकूलन, पैटर्न का उपयोग, दृश्य, प्रतिनिधित्व, तर्क और प्रमाण, सह–संबंध का प्रयोग, गणितीय संचार जैसी क्षमताएं शामिल हैं। स्कूल गणित का संकीर्ण उद्देश्य तथाकथित 'उपयोगी' क्षमताओं को विकसित करना है, विशेष रूप से संख्यात्मक संख्या, संख्या संचालन, माप, दशमलव और प्रतिशत से संबंधित ज्ञान की प्राप्ति करना है।

9. किसी घटना के होने की संभावना को प्रायिकता कहते हैं। इसका प्रयोग सांख्यिकी, गणित विज्ञान, दर्शनशास्त्र आदि क्षेत्रों में इसका बहुतायत से प्रयोग किया जाता है। इसे संभाव्यता भी कहा जाता है।

टिप्पणी

10. पाठ योजना का विकास, गेस्टाल्ट मनोविज्ञान के फलस्वरूप हुआ। गेस्टाल्ट मनोविज्ञान के अनुसार, हमारा ध्यान किसी आकृति के अंगों की अपेक्षा उसके पूर्ण स्वरूप की ओर आकर्षित होता है। जब हम किसी इकाई का प्रत्यक्षीकरण करते हैं तो हमारा ध्यान पहले उसके पूर्ण स्वरूप पर जाता है, उसके बाद ही उसके भिन्न अंगों पर जाता है। अतः पूर्ण को समझने के लिए विद्यार्थी इकाई की सहायता लेते हैं और पूर्ण का संप्रेषण, इकाई से किया जाता है।
11. मूल्यांकन– पाठ योजना के इस पद में शिक्षण–प्रक्रिया के मूल्यांकन की उन सभी प्रविधियों तथा विधियों का चयन करके लिखा जाता है। इन प्रविधियों का शिक्षण के पश्चात उपयोग किया जाता है। इस विधियों एवं प्रविधियों से यह जांचा जाता है कि शिक्षण तथा अधिगम उद्देश्य किस सीमा तक प्राप्त हुए हैं।
12. आगमन विधि में हम तर्क करते हुए 'विशिष्ट से सामान्य की ओर' तथा 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' की ओर बढ़ते हैं, जबकि निगमन विधि में 'सामान्य से विशिष्ट की ओर' या 'नियम से उदाहरण की ओर' की ओर चलते हैं। इस प्रकार ये दोनों विधियां एक–दूसरे के विपरीत हैं।
13. किन्ही विशेष परिस्थितियों में शिक्षार्थी को किसी विशेष कठिनाई का अनुभव होता है अथवा उसे किसी समस्या का सामना करना पड़ता है। उसने अब तक जो सीखा और पढ़ा है, उसके आधार पर इसका हल ढूंढने में उसे कठिनाई होती है। अतः आवश्यक हो जाता है कि कुछ नवीन अनुभवों (ज्ञान और कठिनाई आदि) की प्राप्ति की जाए ताकि समस्या का हल ढूंढने में सहायता मिल सके। फलस्वरूप वह समस्या किस प्रकार की है, उसका समाधान कैसे हो सकता है। इस तरह सर्जनात्मक और गंभीर चिंतन में लग जाता है तथा अनुकूल अर्जित अनुभवों को अर्जित करने का प्रयास करता है।
14. मौखिक कार्य लिखित कार्य का एक हिस्सा है। मौखिक प्रश्न किसी भी लेखन सामग्री के उपयोग के बिना मानसिक या मौखिक रूप से हल किया जा सकता है। मौखिक कार्य करने में विद्यार्थियों को कागज और पेंसिल के उपयोग के बिना मानसिक समस्याओं का समाधान करना होता है।
15. शिक्षा की प्रभावी योजना के माध्यम से गणित पढ़ाने के उद्देश्यों को सही ढंग से प्राप्त किया जा सकता है। एक शिक्षक को छात्रों को वांछित अनुभवों के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं की समझ विकसित करने में मदद करनी चाहिए। छात्रों को गणित से डरना या नापसंद नहीं करना चाहिए, बल्कि उन्हें गणित का आनंद लेने में सक्षम होना चाहिए। शिक्षक की सफलता गणित सीखने के प्रति छात्रों के दृष्टिकोण में बदलाव से संकेत देती है। इसलिए, शिक्षक के लिए गणित के ज्ञान के रूपांतरण में छात्रों की प्रभावी भागीदारी के लिए सीखने और पहचानने (या डिजाइन) विभिन्न सीखने के अनुभवों के सिद्धांतों को समझना आवश्यक है।

टिप्पणी

16. यह एक शोध उपकरण या तकनीक है जो वास्तविक विषयों का विश्लेषण करने में मदद करती है और इसका उपयोग ग्रंथों या ग्रंथों के संग्रहों के भीतर कुछ शब्दों, अवधारणाओं, विषय, वाक्यांशों, पात्रों या वाक्यों की उपस्थिति निर्धारित करने और इस उपस्थिति को वस्तुनिष्ठ तरीके से निर्धारित करने के लिए किया जाता है। व्यवस्थित रूप से ग्रंथों का मूल्यांकन करके गुणात्मक आंकड़ों को मात्रात्मक आंकड़ों में परिवर्तित किया जा सकता है।

17. किसी भी विषय को पढ़ने अथवा पढ़ाने पर लागू होती है। विज्ञान को पढ़ने अथवा पढ़ाने से पहले यही सोचा जाता है कि इसे क्यों पढ़ाया जाए? इसके पढ़ने से क्या–क्या लाभ हो सकते हैं? इन्हीं लाभों की आशा लगाकर विभिन्न स्तरों पर भिन्न–भिन्न स्तरों के बच्चों की आवश्यकताओं, योग्यताओं तथा रुचियों के आधार पर विज्ञान शिक्षण के लक्ष्य या प्रयोजन निर्धारित किए जाते हैं तथा उन्हें अनुकूल योजना बनाकर प्राप्त करना ही पढ़ने और पढ़ाने का लक्ष्य मान लिया जाता है।

18. सीखने के अनुभवों की योजना, रूपरेखण और संगठन प्रभावी शिक्षण के लिए रूपरेखा प्रदान करते हैं। कक्षा शिक्षण–अधिगम में, उन गतिविधियों की योजना बनाना आवश्यक है जो शिक्षकों और शिक्षार्थियों दोनों को दिशा प्रदान करेंगी। सबसे पहले, प्रभावी और उचित योजना किसी दिए गए पाठ्यक्रम के लिए अपेक्षाओं के बारे में अनंतिम निर्णय लेने और यह तय करना शामिल है कि यह सबसे अच्छा कैसे पूरा किया जा सकता है, शिक्षण सीखने के अनुभवों को को किस प्रकार समृद्ध किया जा सकें। दूसरे, इन अनुभवों के आयोजन में शिक्षार्थियों के विविध हितों के अनुसार उद्देश्यों, रणनीतियों और विभिन्न गतिविधियों का निर्माण करना शामिल है।

1.7 सारांश

- आज की दुनिया, जो विज्ञान और प्रौद्योगिकी पर अधिक निर्भर करता है, विश्लेषण करने के आधार पर वैज्ञानिकों की ओर से अधिक गणितीय ज्ञान की मांग करता है।
- गणित एक ऐसी विधाओं का समूह है जो संख्याओं, मात्राओं, परिमापों, रूपों के गुणों का अध्ययन करती है। यह एक अमूर्त प्रणाली है। गणित की कई शाखाएंः अंकगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिती, सांख्यिकी, बीजगणित कलन इत्यादि। गणित में अभ्यस्त व्यक्ति या खोज करने वाले को वैज्ञानिक कहा जाता है
- गॉस ने कहा 'गणित विज्ञान की रानी है और अंकगणित सभी गणित की रानी है' गणित विज्ञान और प्रोद्योगिकी का महत्वपूर्ण उपकरण है। भौतिक, रसायन विज्ञान, खगोल विज्ञान का अध्ययन गणित के बिना अधूरा है।

टिप्पणी

- ''गणित मानव मन की अभिव्यक्ति है जो सक्रिय इच्छा, चिंतनशील कारण और सौंदर्य पूर्णता की इच्छा को दर्शाता है। इसके मूल तत्व तर्क और अंतर्ज्ञान, विश्लेषण और निर्माण, सामान्यता और व्यक्तित्व हैं''।
- यह एक सरल व सहज विधि है। इसे विद्यार्थियों को समझने भर की जरूरत है। गणित के समीकरणों को याद किया जा सकता है, लेकिन अन्य विषयों की तरह इसके सवालों के जबाव को रटे नहीं जा सकते हैं। गैलीलियो के अनुसार 'गणित वह भाषा है, जिसमें भगवान ने ब्रह्मांड को लिखा है। ब्रह्माण्ड को तब तक नहीं पढ़ा जा सकता है जब तक हमने गणितीय भाषा नहीं सीखी और उन पत्रो से परिचित नहीं हो गए जिनमें यह गणितीय भाषा में वर्णित 'अक्षर' त्रिकोण, वृत्त और अन्य ज्यामितीय के आंकड़े वर्णित किए गए हैं,
- ज्ञान और कौशल छात्रों को गणित के विभिन्न आयामों के भीतर संलग्न विज्ञान के सभी पहलुओं के अपने अध्ययन में छात्रों का समर्थन करते हैं। विज्ञान में छात्र विशेष रूप से त्रुटि विश्लेषण और सूचना के तरीकों के आंकड़ों का संग्रह अनुमान में माप और संख्या अवधारणाओं का उपयोग करते हैं।
- गणित के क्षेत्र में आर्यभट्ट का बहुत योगदान रहा। उदाहरण के लिए, वह विभिन्न त्रिकोणमितीय संरचनाओं की खोज की थी जो आधुनिक युग में भी हमारे लिए उपयोगी हैं।
- हेनरी जे ऑटो के अनुसार, "पाठ्यक्रम वह साधन है, जिसके द्वारा हम बालकों को शिक्षा के उद्देश्यों को प्राप्त करने के योग्य बनाने की आशा करते हैं।"
- उपागम सिद्धांत के अनुसार, पाठ्यक्रम के गठन में इस बात पर जोर दिया जाता है कि पाठ्य वस्तु तथा अधिगम अनुभवों को प्रकरण अनुसार संगठित किया जाए। किसी स्तर विशेष प्राथमिक, माध्यमिक तथा अधिगम अनुभवों को प्रकरणों में बांट लिया जाए और फिर यह निश्चित कर दिया जाए कि कौन–कौन से प्रकरणों का शिक्षण, कौन–कौन सी श्रेणियों में किया जाता है। जिन प्रकरणों को जिन श्रेणियों में प्रारंभ किया जाए, उनकी शिक्षा उसी श्रेणी में पूरी तरह से दे दी जाए।
- गणित विषय की अपनी एक अलग प्रकृति है। जिसके आधार पर हम इस विषय की तुलना अन्य किसी विषय से नहीं कर सकते हैं किन्हीं दो या दो से अधिक विषयों की तुलना का आधार उन विषयों की प्रकृति से है जिसके आधार पर हम विषय के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं।
- शिक्षक द्वारा अपनाए गए शिक्षाशास्त्र छात्रों की सफलता से सकारात्मक रूप से संबंधित है। गणित विषय को छात्रों के लिए आसान या कठिन बनाने में शिक्षक द्वारा उपयोग किए जाने वाले शैक्षणिक दृष्टिकोण की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। शिक्षाशास्त्र और अभ्यास के क्षेत्र में गणित के शिक्षकों को उचित अभिविन्यास और प्रशिक्षण प्रदान किए जाने की आवश्यकता है।

टिप्पणी

- बीजगणित गणित की एक संक्षिप्त भाषा है जिसका विकास अंक गणित की उपलब्धता के भाव में किया जा सकता है। बीजगणित की भाषा, संकेतों, अक्षरों, संक्रियाओं आदि को समझने के लिए मस्तिष्क स्थियित्व रूप होना परमावश्यक है। यह एक सामान्यीकृत भाषा है जिसके द्वारा गूढ़ विचारों को संक्षिप्त भाषा के द्वारा प्रकट किया करते हैं।
- गणित उन कुछ विषयों में से एक है जिनका व्यावहारिक, सांस्कृतिक और अनुशासनात्मक मूल्य है। गणित में तीनों मूल्यों की क्षमता है, लेकिन अनुचित शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया के कारण इसकी क्षमता का उपयोग इसके इष्टतम स्तर तक नहीं किया जा रहा है। गणित शिक्षा का वर्तमान ध्यान ज्यादातर विशिष्ट समस्याओं को हल करने और उन्हें परीक्षा के सवालों के लिए प्रयोग करने तथा समीकरणों को हल करने के लिए किया जाता है।
- विषय–वस्तु का ज्ञान विषय की तैयारी पाठ योजना से पूर्व अत्यंत आवश्यक है। शिक्षक को अपने विषय पर जितना अधिकार होगा, उतना ही वह अध्यापन में सफल होगा।
- पाठ योजना बनाते समय शिक्षक यह निश्चित कर लेता है कि कौन–कौन से तथ्यों को कौन–कौन सी विधियों, युक्तियों, प्रविधियों तथा साधनों की सहायता से स्पष्ट करने के लिए किस–किस सहायक सामग्री का कब और कैसे प्रयोग करेगा। इसमें आवश्यक एवं प्रभावोत्पादक सहायक सामग्री शिक्षण आरंभ होने से पहले ही तैयार हो जाती है।
- विश्लेषण एवं संश्लेषण, गणित शिक्षण की दो प्रमुख विधियां हैं। इनका प्रयोग अधिकतर रेखागणित के शिक्षण में किया जाता है। यह तर्कशास्त्र की विधि है। विश्लेषण विधि में अज्ञात से अपना तर्क प्रारंभ करके हम ज्ञात पर पहुंचते हैं; जबकि संश्लेषण विधि में हम ज्ञात से अपना तर्क प्रारंभ करके अज्ञात पर पहुंचते हैं। इस प्रकार, विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि में हम क्रमशः 'अज्ञात से ज्ञात की ओर' तथा 'ज्ञात से अज्ञात की ओर' शिक्षण सूत्रों का प्रयोग करते हैं।
- ह्यूरिस्टिक शब्द ग्रीक भाषा के 'ह्यूरिस्को' शब्द से निकला है, जिसका अर्थ है, "मैं मालूम करता हूं।" इस शब्द के पीछे एक अंतर्कथा निहित है। 'आर्कमिडीज' ने जब अपने विशिष्ट भार के प्रसिद्ध सिद्धांत को ज्ञात कर लिया तब वह सड़क पर चिल्लाता भागा था 'यूरेका–यूरेका' अर्थात 'मैंने मालूम कर लिया है'। इस कथा के आधार पर 'अपने आप सीखने की विधि को ह्यूरिस्टिक विधि की संज्ञा दी गयी है।'
- परियोजना विधि ही एक ऐसी विधि है, जिसका प्रयोग करके लगभग सभी विषयों की शिक्षा दी जा सकती है। विज्ञान की सभी शाखाओं के शिक्षण में तो यह विधि विशेषकर लाभदायक है, जिनमें प्रयोगात्मक एवं व्यावहारिक कार्य शामिल होते हैं। इस विधि के जन्मदाता हैं– अमेरिका के प्रसिद्ध शिक्षाशास्त्री जॉन डीवी के योग्य शिष्य सर विलियम किलपैट्रिक है।

टिप्पणी

- जो बच्चे अभ्यास करने से पहले एक प्रक्रिया को समझते हैं, वे इसे अधिक कुशलता से सीखते हैं और इसे प्रभावी ढंग से अभ्यस्त का उपयोग कर सकते हैं। लिखित अध्ययन को कार्यात्मक अध्ययन ने बदल दिया है। यह भी माना जाता है कि बुनियादी या प्रमुख विचारों और उनकी संक्रियाओं का ज्ञान बच्चों को समझने में मदद करता है और अलग तथ्यों को जानने से बेहतर गणित की सराहना करते हैं।
- किसी भी विषय के प्रभावी शिक्षण के लिए उस विषय से संबंधित अध्यापक को विषय–विशेष के सामान्य, विशिष्ट एवं व्यावहारिक उद्देश्यों को ध्यान में रखने के लिए पाठ्यक्रम की आवश्यकता पड़ती है। किसी भी विषय को पढ़ने का एकमात्र उद्देश्य विषय की प्रकृति के अनुकूल छात्रों के व्यवहार में अपेक्षित व्यावहारिक परिवर्तन लाना होता है। उद्देश्यों के अनुसार ही पाठ्यक्रम या पाठ्यवस्तु की व्यवस्था की जाती है, अर्थात प्रत्येक पाठ्यवस्तु के उद्देश्य अलग–अलग होते हैं।
- विद्यार्थियों में जैविक से संबंधित पदों, तथ्यों, अवधारणाओं, परिभाषाओं, प्रनियमों, सिद्धांतों तथा प्रक्रियाओं से संबंधित ज्ञान के बारे में समुचित समझ विकसित होती है।
- जैविक विज्ञान शिक्षण के सामान्य लक्ष्यों तथा उद्देश्यों, जिनकी चर्चा हमने ऊपर इस पाठ के अंतर्गत पहले की है की तुलना में जैविक विज्ञानों के किसी पाठ या प्रकरण के लिए निर्धारित अनुदेशात्मक उद्देश्य बहुत संकुचित तथा अतिविशिष्ट होते हैं। वे निश्चित, स्पष्ट, व्यावहारिक व प्राप्त करने के योग्य होते हैं। ये पूर्व निर्धारित होते हैं और इनका निर्माण इस प्रकार किया जाता है कि निश्चित अवधि वाले एक निर्धारित कालांश में संपन्न किए गए सामान्य कक्षा शिक्षण द्वारा आसानी से उनकी प्राप्ति हो सकती है।
- मेगर की तरह मिलर ने भी क्रियात्मक उद्देश्यों को लिखने के लिए संबंधित कार्यपरक क्रियाओं की सूची प्रस्तुत करने का प्रयास किया है। मनोशारीरिक उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखने के लिए हम इस कार्यपरक क्रियाओं की सहायता ले सकते हैं।

1.8 मुख्य शब्दावली

- **गणित** : गणित एक ऐसी विद्याओं का समूह है, जो संख्याओं, मात्राओं, परिमापों तथा ज्यामिति रूपों का अध्ययन करता है। यह अमूर्त प्रणाली है।
- **शिक्षाशास्त्र** : शिक्षण कार्य की प्रक्रिया का विधिवत् अध्ययन शिक्षाशास्त्र या शिक्षणशास्त्र कहलाता है।
- **सह–संबंध दृष्टिकोण** : गणित में समीकरणों का हल करते समय सह–संबंध के सिद्धांत को हमेशा उचित महत्व देना चाहिए।

टिप्पणी

- **आगमन तथा निगम विधि** : आगमन विधि में हम तर्क करते हुए 'विशिष्ट से सामान्य की ओर' तथा 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर' बढ़ते हैं, जबकि निगमन विधि में 'सामान्य से विशिष्ट की ओर या सूक्ष्म से स्थूल की ओर आगे बढ़ते है।
- **ह्यूरिस्टिक प्रणाली** : इस विधि का तात्पर्य बालकों को कम से कम बताने और उन्हें स्वयं अधिक से अधिक खोजकर सत्य को पहचानने के लिए प्रेरित करने से है।

1.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. गणित शब्द को परिभाषित करे।
2. गणित का विज्ञान एवं प्रोद्योगिकी में योगदान का संक्षिप्त रूप से वर्णन करें।
3. गैलिलीयों के अनुसार गणित क्या है?
4. गणित की प्रकृति पर प्रकाश डालें।
5. गणित के इतिहास का वर्णन करें।
6. स्वास्थ्य एवं शारीरिक शिक्षा के साथ गणित का महत्व बताएं।
7. रसायन विज्ञान के साथ गणित किस प्रकार संबंधित है?
8. पाठशाला में गणित के महत्व पर वर्णन करें।
9. प्रतिपरीक्षा से क्या तात्पर्य है?
10. गणित में रचनात्मक सोच पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।
11. आर्यभट्ट पर संक्षिप्त रूप से वर्णन करें।
12. गणित में पाठ्यक्रम के उद्देश्य क्या है?
13. शैक्षणिक बदलाव पर एक संक्षिप्त रूप से टिप्पणी लिखें।
14. समस्या समाधान प्रणाली क्या है?
15. आगमन एवं निगमन विधि से क्या तात्पर्य है?
16. विषय वस्तु विश्लेषण पर प्रकाश डालें।
17. दिव्यांग छात्रों के किस प्रकार शिक्षित किया जा सकता है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. पाठशाला में गणित की प्रकृति, आवश्यकता एवं इसके महत्व को विस्तारित रूप से वर्णन करें।
2. गणित के इतिहास एवं अन्य विषयों से सह–संबंध के बारे में सोउदाहरण रूप से चर्चा करें।

3. गणितीय विवरणों की सत्यापन प्रक्रिया तथा सौंदर्यबोध की परिचर्चा उपयुक्त उदाहरण सहित करें।
4. आर्यभट्ट, श्रीनिवास रामानुजन, भास्कराचार्य, यूक्लिड एवं पाइथागोरस गणितज्ञों का गणित में दिए गए योगदान पर विस्तारित रूप से चर्चा करें।
5. पाठ्यक्रम में गणित का मूल उद्देश्य, सिद्धांत दृष्टिकोण के रूप रेखण का विवरण प्रस्तुत करें।
6. शिक्षणशास्त्र विश्लेषण में निम्नलिखित तथ्यों को विस्तारित रूप से समझाएंः
   - प्रायिकता
   - बीजगणित
   - त्रिकोणमिति
   - सांख्यिकी
   - संख्या सिद्धांत
7. गणित शिक्षण की प्रमुख विधियों का विस्तार से वर्णन करें।
8. ह्यूरिस्टिक प्रणाली का विस्तार से वर्णन करें। यह भी स्पष्ट यह विधि गणित में किस प्रकार उपयोगी है?
9. विषय–वस्तु विश्लेषण गतिणत के प्रभावी शिक्षण सीखने की योजना का विवरण समुचित उदाहरणों के साथ करें।
10. दिव्यांग बच्चों को किस प्रकार शिक्षित किया जा सकता है? दिव्यांग बच्चों की शैक्षणिक व्यवस्था पर गहरा प्रकाश डालें।

टिप्पणी

1.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Anderson, Lorin W. and David R. Krathwohl. 2001. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing*: *A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: David McKay Company.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition.

Charles, H. and F. Lynwood Wren Butler. 1941. *The Teaching of Secondary Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Krathwohl, David R., Benjamin S. Bloom and Bertram B. Masia. 1964. *Taxonomy of Educational Objectives*, Handbook II. New York: David McKay Company.

टिप्पणी

Howson, Geoffrey, Christine Keitel and Jeremy Kilpatrick. 1981. *Curriculum Development in Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Dhand, Harry. 1990. *Techniques of Teaching*. New Delhi: Ashish Publishing House.

Mangal, Dr. S. K. 1997. *Teaching of Science*. New Delhi: Arya Book Depot.

Sidhu, Kulbir Singh. 1995. *Teaching of Mathematics*. New Delhi: Sterling Publishers.

Servais, W. and T. Varga. 1971. *Teaching School Mathematics*. United Kingdom: Penguin Random House Company.

इकाई 2 गणित शिक्षण को प्रोत्साहन प्रदान करने के उपाय

टिप्पणी

संरचना

टिप्पणी

2.0 परिचय

एक गणितीय प्रयोगशाला, गणितीय जानकारी, प्रवीणता धनात्मक मनोवृत्ति और गणित के विभिन्न प्रकरण जैसे कि बीजगणित, ज्यामिति, त्रिकोणमिति, कलन, निर्देशांक ज्यामिति इत्यादि प्रयोग के आधार पर छात्रों के शैक्षणिक व्यवस्था में प्रोत्साहित करती है। यह वह स्थान है, जहां विद्यार्थी निश्चित संकल्पना को निश्चित ध्येय के साथ सीख सकता है तथा प्रतिरूपों, मापनों और दूसरे क्रियाकलापों से कई गणितीय अवधारणाओं के गुणों को सत्यापित कर सकता है। इसके अतिरिक्त गणित एक मनोरंजन विषय के रूप में उपयोगी सामित है, जिसमें खेल, पहेलियां, प्रश्नोत्तरी, तरकीब इत्यादि शामिल है, जिसमें गणितीय सिद्धान्तों की आवश्यकता नहीं होती वरन् यह छात्रों में गणितीय शिक्षा की आकर्षित करता है।

आईसीटी (ICT) का मतलब सूचना और संचार प्रौद्योगिकी से है। आईसीटी तकनीक माध्यम की सहायता से सूचनाओं को संग्रहीत संसाधित, प्रसारित, पुर्नप्राप्त और संचारित करने में मदद करता है। शैक्षिक प्रक्रिया में मुख्य चार रूपों से नियोजित होता है, जो शिक्षण अधिगम, मूल्यांकन प्रशासन और व्यवसायिक विकास है। आमतौर पर शिक्षण मुख्य रूप से व्याख्यान पद्धति के माध्यम से विषय सामग्री के लेन–देन पर केन्द्रित होता है लेकिन प्रौद्योगिकी के उदय के साथ, नई तकनीकी संसाधन उसी के लिए नियोजित होते है। उदाहरण के लिए आभासी प्रयोग, पावर पांइट का प्रस्तुतीकरण, चलचित्र वार्तालाप, अंतराल, इत्यादि, का प्रयोग शैक्षणिक प्रक्रिया के दौरान किया जाता है। इस प्रकार शैक्षणिक संसाधनों और आईसीटी को शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के लिए व्यापक रूप से अपनाया जाता है। इसके अतिरिक्त लेखाचित्र आंकड़ों का आलेखीय प्रस्तुतीकरण है जिसमें आंकड़ों को प्रतीक द्वारा दर्शाया जाता है।

गणिम में मूल्यांकन, शिक्षार्थियों के गणितीय तर्क के बारे में जानकारी की पहचान करने, इकट्ठा करने और व्याख्या करने की प्रक्रिया को संदर्भित करता है यह शिक्षकों, शिक्षार्थियों, माता–पिता और नीति–निर्माताओं के संदर्भ में यह बताया है कि शिक्षार्थी ने क्या सीख है और गणित में प्रदर्शन को बेहतर बनाने के लिए क्या करना चाहिए। मूल्यांकन विधि से छात्र के अधिगम मूल्यांकन का बोध होता है। अधिगम में हुई कठिनाइयों को मूल्यांकन द्वारा ही पता लगाया जाता है। यह प्रक्रिया शिक्षकों के लिए भी प्रयोग होती है। इस प्रक्रिया के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है कि एक शिक्षक छात्र को किस स्तर तक अधिगम कराने में सफल रहा है। शिक्षक छात्रों को किस स्तर तक ज्ञान देने में सफल हुए है इस बात की जानकारी मूल्यांकन प्रक्रिया देती है। सहकर्मी मूल्यांकन या स्व मूल्यांकन एक ऐसी प्रक्रिया है जिसमें छात्र या उनके सहकर्मी श्रेणी कार्यभार करते है या किसी शिक्षक के मानदंड या निर्देश चिन्ह के आधार पर परीक्षण करते हैं। समावेशी शिक्षा से आशय उस शिक्षा प्रणाली से है जिसमें

एक सामान्य छात्र एक दिव्यांग छात्र के साथ विद्यालय में अधिकतर समय बिताता है यह एक ऐसी शिक्षा से तात्पर्य है जो असाधारण छात्रों की समावेशी जरूरतों को पूरा करने के लिए उपकरण और तकनीकों की सेवाएं प्रदान करता है। यह व्यक्तिगत रूप से योजनाबद्ध के रूप में प्रयुक्त किए जाने वाली प्रणाली है जो कि दिव्यांग छात्रों की समस्याओं और उनकी साक्षरता के लिए सामुदायिक सहयोग और जागरूकता के लिए सहायक रूप से साबित है।

एक शिक्षक को अपने व्यवसाय के प्रति ईमानदार एवं उत्तरदायी होना चाहिए। उसे शारीरिक और मानसिक रूप से प्रबल होना चाहिए। शिक्षक को अपने विषय में प्रवीणता होनी चाहिए। शिक्षक के पास प्रभावी संप्रेषण कौशल होना चाहिए। प्राप्त शैक्षिक और तकनीकी ज्ञान एवं कौशलों का सामान्य समक्ष एक व्यवसायिक या अनुभवी व्यक्ति के रूप में उसकी छवि उभरती है जो न केवल जनहित की आवश्यकता की पूर्ति हेतु उपयोग करके अपने अनुभव की दृष्टि से अजीविका के निर्वाहन के लिए आवश्यक ज्ञान तथा कौशल रखता है। प्रगति और कार्य प्रदर्शन का आकलन करना अवलोकन करना और प्रतिक्रिया देना कथावचन, अभिनय निभाना और नाटक स्थानीय संसाधनों का उपयोग करना, सामूहिक कार्य का उपयोग करना पाठो का नियोजन करना चिंतन को बढ़ावा देने के लिए प्रश्न पूछने का उपयोग करना सीखने के लिए वार्तालाप को शामिल करना इत्यादि शिक्षकों के अनुभव तथा व्यवसायिक विकास के लिए संगोष्ठी तथा सम्मेलन में सम्मिलित किए गए है।,

इस इकाई में आप शिक्षार्थियों में गणितीय शैक्षणिकता को प्रोत्साहित करना, रचनात्मक कक्षा निर्माण की प्रक्रिया, शैक्षणिक संसाधनों के स्रोत, सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी), साक्षरता के लिए गणित प्रतिरूप, लेखाचित्र तथा अन्य माध्यमों का प्रयोग, गणितीय मूल्यांकन के उपकरण एवं तकनीकें तथा दिव्यांग छात्रों की साक्षरता के लिए मूल्यांकन विधि, गणितीय शिक्षकों का अनुभवी या व्यवसायिक विकास, अनुभवी या व्यवसायिक विकास के लिए संगोष्ठी, सम्मेलन, कार्यक्रम ऑनलाइन साझादारी तथा शोधकर्ता के रूप में शिक्षकों की भूमिका के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- गणित की शैक्षणिक व्यवस्था को प्रोत्साहित कर पाएंगे;
- शिक्षार्थियों की सामर्थ्यता और निर्बलता की पहचान तथा उन्हें प्रोत्साहित कर पाएंगे;
- रचनात्मक कक्षा प्रक्रिया तथा उनके निर्माण के बारे में जान पाएंगे;
- विभिन्न प्रतियोगिताओं के लिए छात्रों के ज्ञान के आधार की तैयारी को समझ पाएंगे;
- गणितीय शैक्षणिक संसाधनों के स्रोत और सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी) को वर्णित कर सकेंगे;

टिप्पणी

- शैक्षणिक संसाधनों का महत्व, उपयोग एवं तात्कालिक वातावरणीय संसाधनों की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- गणितीय शैक्षणिक व्यस्था में आईसीटी, प्रतिरूप तथा लेखाचित्र का प्रयोग कर पाएंगे;
- गणितीय प्रयोगशाला, संघ एवं प्रदर्शन तथा कम लागत में अधिगम सहायक पाठ्यक्रम की तैयारी को प्रतिपादित कर पाएंगे;
- गणितीय मूल्यांकन की भूमिका तथा सतत एवं व्यापकता का वर्णन कर पाएंगे;
- स्व एवं सहकर्मी मूल्यांकन और परीक्षण की तैयारी की जांच कर पाएंगे;
- गणित शिक्षण के मूल्यांकन के लिए उपकरण व संसाधन की जानकारी प्राप्त कर पाएंगे;
- दिव्यांग छात्रों के शैक्षणिक व्यवस्था को मूल्यांकित कर पाएंगे;
- गणित शिक्षकों का अनुभवी विकास तथा उनके संबंधित कार्यक्रम एवं सेवा कार्यक्रम की जानकारी प्राप्त कर पाएंगे;
- व्यवसायिक तथा अनुभवी विकास के लिए शिक्षकों द्वारा संपन्न संगोष्ठी, कार्यशाला, सम्मेलन तथा ऑनलाइन साझाकरण में भागीदारी जान पाएंगे;
- गणितीय शिक्षकों के व्यवसायिक या अनुभवी विकास में ई–पत्रिकाओं, ई–पुस्तकालयों तथा विचारात्मक कार्यप्रणाली की भूमिका के गुणों को वर्णित कर पाएंगे;
- शोध के रूप में शैक्षणिक कार्यप्रणाली तथा क्रियाशीलता पर शोध और नई पद्धति को विस्तारित रूप से समझ पाएंगे।

2.2 गणित के शिक्षण को प्रोत्साहित करना

शिक्षा के क्षेत्रा में समस्त विषयों के अध्ययन एवं अध्यापन में जितनी तर्क शक्ति एवं चिंतन करने की आवश्यकता जितनी गणित विषय में होती है; उतनी अन्य विषयों में नहीं होती है। यह एक ऐसा विषय है, जिसमें अध्यापक द्वारा कुशलतापूर्वक पढ़ाया जाए तो छात्र में चिंतन एवं तर्क करने की क्षमता को विकास हो जाता है एवं छात्र अपने चिंतन एवं तर्क करने की क्षमता के माध्यम से विभिनन क्षेत्रों में विकास में गति पकड़ कर, ज्ञान के क्षेत्र में विकास करते हैं।

भाषा की तरह ही गणित में हम चिंतन का सामना कते हैं। बगैर चिंतन के कारण गणित को हल करना या गणित के क्षेत्र में आगे बढ़ना असंभव है। गणित विषय के प्रभावशाली शिक्षण के लिए उसके उद्देश्यों के ज्ञान से परिचित होना अनिवार्य है। गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य बालक का बौद्धिक, भावनात्मक, रचनात्मक एवं कौशलात्मक विकास करना है। गणितीय प्रमाण को अक्सर गणित का एक महत्वपूर्ण आधार माना जाता है। प्रमाण और औचित्य परिशुद्ध होने चाहिए और गणितीय तथ्यों और गुणों पर आधारित होने चाहिए। प्रमाणित करने की प्रक्रिया गणित को समझ और ज्ञान की जाँच

के बीच की जाती है, और गणितीय विचारों और अवधारणाओं के बीच संबंध स्थापित किए जाते हैं। गणित की समझ विकसित करने के लिए कक्षाओं में प्रमाणित करने की प्रक्रिया भी एक अच्छी गतिविधि हो सकती है। इससे विद्यार्थी गतिविधियों में व्यस्त रहते हैं। और यह वास्तविक गणितज्ञों द्वारा की गयी गतिविधि है। परंतु विद्यालयों में अक्सर विद्यार्थी यह समझते हैं कि गणित में प्रमाणित करने की प्रक्रिया को रटकर याद किया जाता है और सीखा जाता है। यह विधि केवल इस बात पर जोर देती है कि गणित तथ्यों और प्रक्रियाओं को कंठस्थ करके स्मरित किया जा सकता है, जबकि प्रमाण की अवधारणा का उद्देश्य अक्सर स्पस्ट नहीं किया जा सकता है।

गणित अक्सर शिक्षार्थियों के लिए एक जटिल विषय माना जाता है। गणित के इस डर से शिक्षकों के लिए सीखने वाले गणित को सरल बनाना मुश्किल हो जाता है। शिक्षकों को समय और संसाधनों की कमी के बावजूद सीखने के गणित को शिक्षार्थियों के लिए एक आकर्षक कार्य बनाना होगा। शिक्षार्थियों में गणित विषय में उलझनों को दूर करना भी शिक्षकों के लिए एक चुनौतीपूर्ण कार्य है। किसी के ज्ञान और कौशल की योजना बनाने और बढ़ाने के अलावा, इसके लिए शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में सुधार करने के लिए एक इच्छाशक्ति की आवश्यकता होती है। गणित शिक्षा को राष्ट्रीय विकास के लिए बच्चों की क्षमताओं के विकास के लिए एक साधन के रूप में बदलाव आ रहा है। इसे राष्ट्रीय पाठ्यक्रम बनावट 2005 में आगे बढ़ाया गया है जिसमें गणित सीखने में बच्चे की सक्रिय भागीदारी की परिकल्पना की गई है जिसमें "जांच, अन्वेषण, प्रश्न, वाद–विवाद, अनुप्रयोग और प्रतिबिंब शामिल हैं, जिससे सिद्धांत निर्माण और गणित में विचारों/पदों का निर्माण" किया गया है।

2.2.1 शिक्षार्थियों की सामर्थ्यता और निर्बलता की पहचान

हर छात्र अद्वितीय है, और उनमें अपनी–अपनी सामर्थ्य और निर्बलता है। साधारण तथ्य यह है कि छात्र प्रदर्शन बेहतर नहीं हो सकता जब तक शिक्षार्थियों समझ में नहीं आता कि वे क्या गलत कर रहे है और कहां पर उन्हें अपनी तैयारी ध्यान केंद्रित करने की जरूरत है। यह एक शिक्षक के लिए महत्वपूर्ण है ताकि सबसे प्रभावी शिक्षण योजना विकसित करने में सक्षम हो पाए। यह छात्रों के व्यक्तिगत लक्षणों, विशेषज्ञता के उनके क्षेत्रों के साथ–साथ कमियों की पहचान करने के माध्यम से है। सामर्थ्य और निर्बलता की यह अभिव्यक्ति शिक्षको शैक्षणिक व्यवस्था के लिए एक व्यावहारिक दृष्टिकोण देता है जो सभी तेजी से शिक्षार्थियों, औसत विद्वानों के साथ–साथ धीमी गति से शिक्षार्थियों के मस्तिष्क में समाहित होता है।

सक्रिय संचार (Active Communication)

गणित कक्षा में यह आवयक है कई छात्र सक्रिय रूप से सवाल पूछ रहे हैं एवं अपनी सामर्थ्य और निर्बलताओं को व्यक्त करते हैं। सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उन कार्यों के लिए प्रयोग किया जाता है, जो कि इलेक्ट्रॉन माध्यम से प्रेषण, संग्रहण, निर्माण, प्रदर्शन या आदान–प्रदान में प्रयोग हो। सूचना युग के शैक्षिक उद्देश्यों को साकार करने के लिए शिक्षा में सूचना और संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी) [Information and

Communications Technology (ICT)] के आधुनिक रूपों को शामिल करने की आवश्यकता है। इसके प्रभावी तौर पर करने के लिए शिक्षा योजनाकारों, प्रधानाध्यापकों, शिक्षकों और प्रौद्योगिकी विशेषज्ञों को प्रौद्योगिकी प्रशिक्षण, वित्तीय, शैक्षणिक और बुनियाद ढांचागत आवश्यकताओं के क्षेत्र में बहुत से निर्णय लेने की आवश्यकता होगी।

मौखिक और गैर–मौखिक संकेत (Oral and Non-Oral Signs)

सामर्थ्यता और निर्बलता का निर्धारण करने के लिए शिक्षक उन्हें समूह कार्य दे सकते हैं और चुपचाप निरीक्षण कर सकते हैं कि छात्र आपके प्रभाव के बिना एक दूसरे के साथ कैसे बातचीत करते हैं। छात्रों को वे पहले से ही एक संकुल समूह बनाने दें, जिसमें उन्हें अधिक शांति महसूस होगी जिससे वह अपना ध्यान केवल लक्ष्य पर केन्द्रित करते हैं। इस कुशल छात्रों को बिंदु के साथ ही अपने छात्रों की व्यक्तिगत विचार प्रक्रियाओं पर नज़र रखने में सक्षम हो सकता है।

छात्र के पिछले काम का विश्लेषण (Analysis of Student's Past Work)

उनके पिछले प्रदर्शन के प्रमाण या विवरण से कोई यह बताने में सक्षम हो सकता है कि कोई भी छात्र अपने अकेदमिक स्तर के साथ–साथ अपनी कठिनाई वाले क्षेत्रों में कहां अच्छा है। अन्य शिक्षक जो पहले से ही छात्रों के साथ अपने संबंधों को स्थापित कर चुके हैं, वे छात्रों को एक अंतदृष्टि देने में सक्षम हो सकते हैं, वह उनकी विशेष आवश्यकताओं के साथ–साथ यह भी बता सकते हैं कि उनकी रुचियां वह विशेषताएं क्या है ताकि नए शिक्षक उसी के अनुसार शिक्षण के रूपरेखा बना सकें।

2.2.2 जांच, प्रशंसा और संवाद के लिए शिक्षार्थी को प्रोत्साहित करना

प्रश्नों की सटीकता पर आधारित गणित शिक्षण में सुधार हेतु यह आवश्यक है गणित के छात्रों को अपनी समस्याओं को बताने के लिए प्रेरित किया जाए। गणित शिक्षण के दौरान गणितीय भाषा का उपयोग करने के लिए छात्रों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। गणितीय भाषा का कार्य यह है कि छात्र गणित में उपयोग होने वाली तकनीकी भाषा जैसे गुणा, भाग, अनुपात, इत्यादि का उपयोग कक्षा में करें। ट्रूक्साव, गोर्गिवस्की और डिफ्रैंको (DiFranco), 2008, ने गणितीय संक्रियाओं को ''गणितीय विषय पर उद्देश्यपूर्ण बात'' के रूप में परिभाषित किया हैं। गणितीय संक्रिया शिक्षकों के साथ–साथ छात्रों की ओर से गणित के गहरे विश्लेषणों में योगदान देता है, उच्च गुणवत्ता वाले गणित संक्रियाओं के लिए कई घटक हैं।

कक्षा में संक्रियाओं का स्तर और प्रभावशीलता शिक्षक के सुविधा कौशल पर काफी निर्भर करती है। जिसके आधार पर निम्नलिखित बिंदुओं पर विचार किया जा सकता है–

1. कक्षा मानदंडों की स्थापना की जानी चाहिए ताकि हर कोई अपनी भूमिका जान सके।
2. शिक्षकों को एक सुरक्षित और उचित शैक्षणिक व्यवस्था प्रदान करने की जरूरत है जो छात्रों को दूसरों की प्रतिक्रिया पर भाग लेने के लिए प्रोत्साहित करता है,

टिप्पणी

3. गणित कक्षा में शिक्षक वार्तालाप के दौरान छात्रों का समर्थन करें, और छात्रों को दिखाएं कि वे वैचारिक समझ को महत्व देते हैं, बजाय केवल सही उत्तर पर पहुंचने पर ध्यान केंद्रित करने के लिए भी प्रेरित करें।
4. गणित संक्रियाओं या संगणनाओं का वर्णन करते समय के दौरान शिक्षकों को ऐसे सवाल खड़े करने की जरूरत होती है, जो छात्रों की सोच को चुनौती देते हों।
5. पूछताछ छात्रों को जिज्ञासु होने के लिए चुनौती और उन्हें अपने मौजूदा गणित ज्ञान का विस्तार करने में मदद करनी चाहिए।
6. गणित की कक्षा में यह जरूरी है शिक्षकों को बहुत ध्यान से सुने और छात्रों की समझ की निगरानी रखे।
7. छात्र की भूमिका में शिक्षक और अन्य छात्रों को सुनना और जवाब देना शामिल है।
8. छात्रों को विशेष अवधारणाओं और प्रक्रियाओं के तर्क बनाने के लिए तैयार होना चाहिए और स्पष्ट रूप से उनके तर्क संवाद करने में सक्षम होना चाहिए।

गणितीय संगणनाओं (Mathematical Computation) के अपरिहार्य घटक में एक और औपचारिक गणितीय भाषा है। कक्षा में गणितीय संक्रियाओं की गुणवत्ता छात्रों की भाषा को संसाधित करने की क्षमता पर निर्भर करती है ताकि दूसरों के विचारों पर निर्माण किया जा सके। भाषा को संसाधित करने की क्षमता गणितीय सोच को बढ़ावा देती है।

1. छात्रों को गणित शब्दावली में शब्दों का अर्थ जानने की जरूरत है, चाहे लिखित हो या मौखिक , ताकि गणितीय विचारों को बेहतर ढंग से समझा जा सके और संवादित किया जा सके।
2. शिक्षकों को सीखने के अवसर प्रदान करने की जरूरत है जो छात्रों को गणितीय भाषा का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करते हैं, ताकि छात्र माध्यमिक कक्षाओं में संचार और संगणनाओं के अंतर्निहित गणितीय अर्थ को बेहतर ढंग से समझ सकें।
3. शिक्षकों को गणितीय भाषा के अपने स्वयं के उपयोग के प्रति सचेत रहना चाहिए क्योंकि एक शिक्षक के शब्दों का अनुवाद सीधे एक छात्र की समझ या अवधारणाओं में योगदान देता है

शिक्षक छात्रों को अनौपचारिकता से अधिक औपचारिक गणितीय भाषा में स्थानांतरित करके संचार के लिए पर्याप्त गणित भाषा का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित किया। उदाहरण के लिए–

शिक्षकः यदि f का मतलब f है तब समीकरण

$4x^2 + 5x + 3 = 0$ में f का मान $-\dfrac{1}{4}$ है या -3

छात्र : f का मान -3 है।

शिक्षक : यह -3 क्या है?

छात्र : यह पक्षांतर का हिस्सा है।

टिप्पणी

शिक्षक : $-\frac{1}{4}$ और -3 दो अलग–अलग संख्याएं हैं। क्षमा करें, लेकिन शून्य नहीं है।

छात्र : यह अभी -3 है,

शिक्षक : हां। यह अभी भी -3 है। क्या यह अभी भी -3 है?

छात्र : आप जानते हैं। मैं अभी यह नहीं कह सकता।

शिक्षक : जब आप इसे एक तथ्य के रूप में नहीं कह सकते हैं, यह एक सवाल के रूप में पूछो। हम आपको अपने विचारों को इकट्ठा करने के लिए एक मिनट दे देंगे। आप क्या नहीं कह सकते?

छात्रः आप जानते हैं। आप कैसे कहते हैं कि f का मान -3 है।

शिक्षकः अच्छा लगता है। अधिकार के साथ बताया कि f का मान -3 है।

2.2.3 मनोरंजक गणित– खेल, पहेलियां, प्रश्नोत्तरी तथा तरकीब

मनोरंजक गणित एक ऐसा शब्द है, जिसमें गणितीय पहेली खेल, प्रश्नोत्तरी, तरकीब आदि शामिल है। इस क्षेत्र में सभी समस्याओं को उन्नत करने के लिए गणित के सिद्धांतों की आवश्यकता नहीं होती है, और इस प्रकार, मनोरंजक गणित अक्सर जिज्ञासा को आकर्षित करता है, यह गैर–गणितज्ञ, लोगों को गणित के आगे के अध्ययन को प्रेरित करते हैं।

गणित की इस शैली में तर्क पहेली और अन्य पहेली शामिल हैं जिनके लिए कटौतीत्मक तर्क, कलात्मक गणित और गणित और गणितज्ञों के बारे में मनोरंजक कहानियां और संयोग की आवश्यकता होती है।

गणितीय खेल (Mathematical Games): गणितीय खेल एक बहुलक खेल हैं जिनके अंतर्गत नियमों, रणनीतियों और परिणामों का अध्ययन किया जा सकता है और गणित द्वारा समझाया जा सकता है। गणितीय खेल खेलने के लिए खेल के खिलाड़ियों को गणित का उपयोग करने की आवश्यकता नहीं हो सकती है।

गणितीय पहेली (Mathematical Riddle): गणितीय पहेली उन्हें हल करने के लिए गणित की आवश्यकता होती है। जिसके लिए एक विशिष्ट नियम बनाए हैं, जैसा कि बहुखिलाड़ियों के खेल का आयोजन करते हैं, लेकिन गणितीय पहेली में आमतौर पर दो या दो से अधिक खिलाड़ियों के बीच प्रतिस्पर्धा शामिल नहीं होती है। इसके बजाय, इस तरह की पहेली को हल करने के लिए, परीक्षार्थी को एक समाधान ढूंढना होगा जो दी गई शर्तों को संतुष्ट करता है।

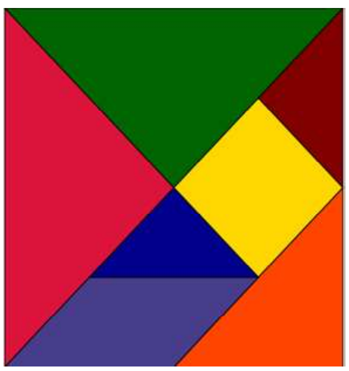
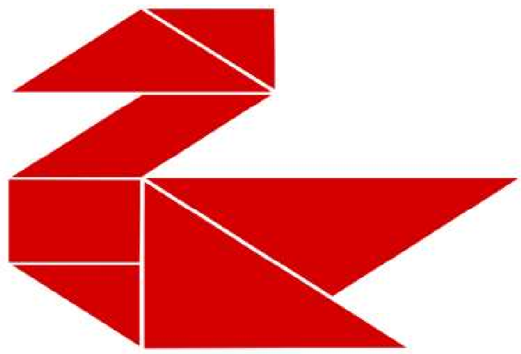
तर्क पहेली गणितीय पहेली का एक आम प्रकार हैं। कॉनवे के गेम ऑफ लाइफ और फ्रैक्टल्स (Comways's Game of Life and Fractals) को गणितीय पहेली भी माना

जाता है, भले ही परीक्षार्थी केवल प्रारंभिक परिस्थितियों का एक वर्ग प्रदान करके उनके साथ वार्तालाप करता है।

टिप्पणी

तंगराम (Tangram)

तंगराम एक विच्छेदन पहेली है जिसमें सात सपाट आकृतियों को शामिल किया गया है, जो कि एक विच्छेदन पहेली सात समतल बहुभुजों (Plane Polygon) में स्थित है। जिसे तान या तंगराम कहा जाता है, जिसे आकार बनाने के लिए एक साथ रखा जाता है। पहेली का उद्देश्य सभी सात टुकड़ों का उपयोग करके एक विशिष्ट आकार (केवल रूपरेखा या सिल्हूट में दिया गया) बनाना है, जो अतिछादित (Overlap) नहीं हो सकता है।

विलोमपद (Palindrome)

एक विलोमपदीय संख्या या संख्यातमक विलोमपद 16461 की तरह एक 'सममित' संख्या, है, अर्थात् जिसे बाएं से दाएं के साथ–साथ दाएं से भी पढ़ा जा सकता है (अर्थात् यह (Symmetric Number) औपचारिक तरीके से या आसपास के दूसरे तरीके से पढ़ने पर एक ही चीज को व्यक्त करता है) यह संख्याओं के संबंध में समरूपता के रूप में जाना जाता है। जो तब तक बनी रहती है जब इसके अंक उलट जाते हैं। पहले विलोमपदीय संख्या (दशमलव में) के रूप में वर्णन निम्न रूप में किया करते हैं–

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, ...

विलोमपदीय संख्या मनोरंजक गणित के दायरे में सबसे अधिक ध्यान दर्शाती है। उदाहरण के लिए

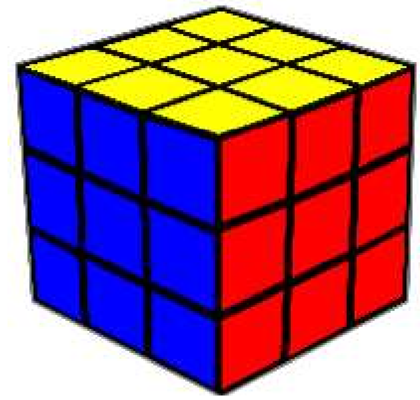
विलोमपदीय अभाज्य 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151 ...

विलोमपदीय वर्ग संख्या 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676,10201, ...

रूबिक घन (Rubik's Cube)

हाल ही में की गई पहेलियों में सबसे प्रसिद्ध है रूबिक घन जिसे एर्नो रूबिक (Erno Rubik) द्वारा आविष्कार किए गए क्यूब में 3 × 3 × 3 छोटे क्यूब होते हैं, जो शुरुआती विन्यास में रंग जाते हैं ताकि बड़े क्यूब के 6 फलकों को 6 अलग–अलग रंगों में रंग दिया जा सके। एक फलकों को बनाने वाले 9 घनों को 45 अंश के माध्यम से घुमाया

जा सकता है। छोटे घनों की 43, 252, 003, 274, 489, 856,000 विभिन्न व्यवस्थाएं हैं, इनमें से केवल एक व्यवस्था प्रारंभिक स्थिति है।



जादुई वर्ग (Magic Square)

मनोरंजक गणित में, एक जादू वर्ग एक वर्ग है जिसे छोटे वर्गों में विभाजित किया जाता है, और प्रत्येक छोटे वर्ग में आमतौर पर अलग–अलग पूर्णांक होते हैं।

एक जादुई वर्ग में, हर क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर और विकर्ण रेखा में सभी पूर्णांकों का योग एक ही है।

	2	7	6	→15
	9	5	1	→15
	4	3	8	→15
15	15	15	15	15

2.2.4 रचनात्मक कक्षा प्रक्रिया

रचनात्मक शिक्षण जो ज्ञान को सीखने की प्रक्रिया में की गई रचना के रूप में प्रदर्शित होता है। यह एक ऐसी रणनीति है जिसमें विद्यार्थी के पूर्व ज्ञान, आस्थाओं और कौशल का इस्तेमाल किया जाता है। रचनात्मक शैक्षणिक रणनीति के माध्यम से विद्यार्थी अपने पूर्व ज्ञान एवं सूचना के आधार पर नए किस्म की समझ विकसित करता है। इस शैली पर काम करने वाला शिक्षक प्रशन उठाता है और विद्यार्थियों के जवाब तलाशने की प्रक्रिया का निरीक्षण करता है। उन्हें निर्देशित करता है तथा सोचने समझने के लए तरीकों का सूत्रपात करता है।

शिक्षक अपने सबक इतनी सावधानी से योजनाबद्ध करें ताकि बच्चों को अपने विचारों और अनुभवों को साझा करने की प्रमाणिकता मिल सके। यदि शिक्षक ने वास्तव में तय किया है कि वह कक्षा प्रक्रिया के प्रत्येक चरण में क्या करेगा, और विभिन्न बच्चों की प्रतिक्रियाओं के लिए कक्षा में कितना समय होगा? उसमें संरचित पाठ योजना में बच्चों की अपेक्षित प्रतिक्रियाओं का विवरण भी शामिल है, और आगे उन पर आधारित पाठ की निरंतरता है तो गणित शिक्षण सुचारू रूप से हो पाएगा। यदि बच्चों की

प्रतिक्रियाएं के कारण वश विचलित होती हैं, तो शिक्षक या तो उन्हें अनदेखा कर देता है या उन्हें उन प्रतिक्रियाओं वो सही रूप से ढालने की कोशिश कर सकता है। यहाँ आवश्यक है कि छात्रों की भिन्नता उसके अनुरूप योजना बनाई गई हो।

टिप्पणी

रचनात्मक कक्षा में, ध्यान शिक्षक से छात्रों को स्थानांतरित किया जाता है। रचनात्मक प्रतिरूप में, छात्रों से आग्रह किया जाता है कि वे सीखने की अपनी प्रक्रिया में सक्रिय रूप से शामिल हों। रचनात्मक कक्षा में शिक्षक एवं छात्र की भूमिका बहुत महत्वपूर्ण होती है। छात्रों के दृष्टिकोण एवं उनकी क्षमताओं के अनुरूप शिक्षक उनका मार्गदर्शन करता है।

इस परिप्रेक्ष्य की प्रमुख मान्यताओं में शामिल हैं–

1. छात्र का वर्तमान ज्ञान
2. छात्रों के व्यक्तिगत अनुभव एवं विशेषताएं
3. अर्थ को समझने के अनुभव एवं प्रक्रिया
4. सीखना एक सक्रिय प्रकृिया है, निष्क्रिय, प्रक्रिया नहीं है

एक रचनात्मक कक्षा में छात्र प्रश्न पूछने, किसी विषय की जांच करने और समाधान और उत्तर खोजने के लिए विभिन्न संसाधनों का उपयोग करने के लिए जांच विधियों का उपयोग करते हैं। छात्र विषय का पता लगाते हैं, वे निष्कर्ष निकालते हैं, अन्वेषण करते हैं , वे उन निष्कर्षों पर फिर से विचार करते हैं। प्रश्नों के उत्तर की खोज उन्हें अधिक प्रश्नों की ओर ले जाती है।

2.2.5 एक रचनात्मक कक्षा का निर्माण

रचनात्मक शिक्षक बच्चों के साथ सहयोग करने और स्वयं बच्चों के बीच सहयोग को बढ़ावा देने का प्रयास करता है। जब लोग वयस्कों और बच्चों के बीच सहयोग के बारे में बात करते हैं, वे अक्सर वयस्क मांगों के साथ बच्चों के अनुपालन करता है। रचनात्मक कक्षा में छात्रों की व्यक्तिगत विशेषताओं का सम्मान किया जाता है। सहयोग सामाजिक वातावरण के लिए महत्वपूर्ण है क्योंकि यह वर्ग के सदस्यों की समानता के लिए अंत सम्मान को दर्शाता है और समाज में अधिकारों और जिम्मेदारियों में गुणवत्ता निर्धारित करता है।

हम उन तरीकों की संकल्पना करते हैं जो रचनात्मक शिक्षक बच्चों के साथ सहयोग करते हैं कि शिक्षक क्या करने की कोशिश करते हैं। वे (1) बच्चों के तर्क को समझने की कोशिश करते हैं, और (2) बच्चों की तर्क शक्ति के निर्माण और ज्ञान की सुविधा के लिए सहयोग करते हैं।

एक रचनात्मक कक्षा की विशेषताएं–

1. व्यक्तिगत घटकों के विस्तार के बाद व्यापक अवधारणा का परिचय किया जाता है।
2. ज्ञान छात्रों और शिक्षक के बीच सक्रिय संवाद के माध्यम से संकलित किया जाता है।

टिप्पणी

3. सामूहिक वार्तालाप छात्रों के बीच बातचीत को बढ़ावा देने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है।
4. मूल्य अनुभव और बातचीत के माध्यम से सीखने की प्रक्रिया पर जोर दिया जाता है।
5. छात्र विभिन्न प्रकार के व्यक्तिगत दृष्टिकोणों के संपर्क में आने पर ज्ञान प्राप्त करते हैं।
6. सीखने के व्यापक दृष्टिकोण के आधार पर ज्ञान के आधार का निर्माण करते हैं।
7. छात्र केंद्रित सीखने का सार है।

निम्नलिखित पहलुओं को अक्सर कक्षा समायोजन में प्रोत्साहित और एकीकृत किया जाता है–

1. कक्षा का वातावरण अनुशासित हो।
2. ज्ञान का निर्माण पारस्परिक छात्र–से–छात्र या छात्र–से–शिक्षक संपर्क के माध्यम से किया जाता है।
3. सक्रिय रूप से गतिविधियों में संलग्न करके सीखने की प्रक्रिया पर जोर दिया जाता है।
4. रचनात्मकता में प्रत्येक प्रयास के लिए एक अवसर निम्न है–
   - प्रायोगिक
   - सैदांतिक
   - चुनौती

एक रचनात्मक गणित कक्षा इस विचार को दर्शाती है कि शिक्षक विचारों का एकमात्र स्रोत नहीं है। वास्तव में बच्चों को एक–दूसरे से समस्याओं पर चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। इसका कारण यह है कि, उनकी चर्चाओं के माध्यम से, वे ऐसे विचार और नियम उत्पन्न करेंगे जो शिक्षक के लिए भी हो सकते हैं।

रचनात्मक दृष्टिकोण में जो कार्य बनाए जाते हैं या जो समस्याएं तैयार की जाती हैं, वे भी बहुत अलग हैं। शिक्षक, इन कक्षाओं में कार्यों की ध्यान से योजना बनाते हैं, और फिर बच्चों को उन पर काम करने के लिए विचारों और समय की स्वतंत्रता की अनुमति देते हैं। इसके लिए छात्रों को प्रोत्साहित करने की जरूरत है, ताकि वह नए विचारों पर चर्चा और तार्किक तर्क जहां भी संभव हो तैयार कर सकें। शिक्षकों के लिए आवश्यक है गई वह कक्षा में प्रत्येक बच्चे के लिए कुछ ना कुछ कार्य निर्धारित करें। यह निश्चित रूप से एक आसान काम नहीं हैय लेकिन यह असंभव भी नहीं है।

2.2.6 विभिन्न प्रतियोगिताओं के लिए छात्रों को ज्ञान के आधार पर तैयार करना

गणित प्रतियोगिताएं, उनके साथ संलग्न छात्रों और संगठनों के साथ मिलकर आज एक विशाल और जीवंत वैश्विक प्रसार बनाता हैं। इस प्रसार में कई भूमिकाएं हैं। प्रतियोगिताएं

गणित में उच्च क्षमता वाले छात्रों की पहचान करने में मदद करती हैं। वे इन छात्रों को अपनी प्रतिभा विकसित करने और विज्ञान में रूचि प्राप्त करने के लिए प्रेरित करते हैं। प्रतियोगिताओं का शिक्षा और शिक्षण संस्थानों पर सकारात्मक प्रभाव पड़ता है। अंत में यह कहना आवश्यक है कि चिरसम्मत् गणितीय प्राथमिक गणित के रूप में जाना जाता है एवं हमारी विरासत को संरक्षित करने का एक महत्वपूर्ण भाग, है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

1. शिक्षार्थियों की सामर्थ्यता और निर्बलता की क्या पहचान है?
2. गणित शिक्षण के मुख्य उद्देश्य को व्याख्यित करें।
3. सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी के प्रयोगों को बताएं।
4. गणितीय भाषा के कार्य क्या है?
5. 'गणित एक मनोरंजक शब्द है' इस तथ्य की व्याख्यान करें।
6. रचनात्मक गणित कक्षा के विचारों को प्रदर्शित करें।

2.3 गणितीय शैक्षणिक संसाधनों के स्रोत और सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी)

वर्तमान छात्र केंद्रित कक्षाओं में विभिन्न आधुनिक संसाधनों के उपयोग की आवश्यकता होती है। सीखने के संसाधन सीखने की प्रक्रियाओं में शिक्षार्थियों का ध्यान आकर्षित करते हैं और साथ ही यह शिक्षक को सिखाने में शिक्षार्थियों की भागीदारी को बनाए रखने में मदद करता है। इसके अलावा, अध्ययन की प्रक्रिया एक सुखद गतिविधि में बदल जाता है और शिक्षार्थियों के सर्वांगीण विकास दोनों संज्ञानात्मक और संबंधक पहलुओं में आश्वासन होता है। सीखने के संसाधनों की प्रासंगिकता को ध्यान में रखते हुए स्कूलों में सभी स्तरों पर सीखने के संसाधनों के व्यापक उपयोग का सुझाव दिया जाता है। इस इकाई में हम स्कूल स्तर पर सीखने के संसाधनों के उपयोग पर विचार–विमर्श करेंगे। साथ ही विभिन्न प्रकार के संसाधनों पर भी चर्चा की जाएगी, जिनका उपयोग गणित की कक्षाओं में किया जा सकता है।

आईसीटी (ICT) का वास्तविक अर्थ सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (Information and Communication Technology) से संबंधित है। इसके माध्यम द्वारा तकनीकी माध्यम की सहायता से सूचनाओं को संग्रहित, संसाधित, प्रसारित पुर्नप्राप्त और संचारित करने में मदद करता है।

2.3.1 शैक्षणिक संसाधन– महत्व और उपयोग

सीखने के संसाधन वह सामग्री है जो पाठयक्रम सामग्री के प्रभावी अध्ययन करने में आपकी मदद करते हैं। प्रमुख अधिगम संसाधन पाठ्य पुस्तक है जबकि कई अन्य सीखने के संसाधन भी उपलब्ध हैं। ये मानव निर्मित, तात्कालिक या प्रकृति में उपलब्ध सामग्री हो सकते है। आप तत्काल वातावरण में सीखने के संसाधन भी प्राप्त कर सकते हैं। यहां यह भी ध्यान देने वाली बात है कि, प्रौद्योगिकी की उन्नति के साथ, डिजिटल संसाधनों से सीखने के कई संसाधन भी विकसित किए जाते हैं।

टिप्पणी

सीखने के संसाधन कई उद्देश्यों को पूरा करते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, व्याख्यान विधि सबसे आसान/आम विधि है। कई बार, व्याख्यान शैली के माध्यम से शिक्षार्थियों को विषय सामग्री उचित रूप से नहीं बताई जाती है। लेकिन, शिक्षकों का रचनात्मक हस्तक्षेप व्याख्यान विधि में अधिगम संसाधनों को नियोजित करके कक्षाओं के अध्यापन में गतिशीलता ला सकता है। यही बात शिक्षण के अन्य तरीकों के लिए भी सही है। निम्नलिखित विशेषताओं के कारण शिक्षण–अधिगम स्थितियों में सीखने के संसाधन अनिवार्य हैं। ये संसाधन निम्न हैं–

- सीखने की प्रक्रिया में पूरी तरह से शामिल होने में शिक्षार्थियों की मदद करें क्योंकि सीखने के संसाधन प्रेरणा हासिल करने और बनाए रखने के लिए शक्तिशाली उपकरण हैं।
- शिक्षार्थियों को विषय अवधारणाओं को प्रभावी ढंग से समझने की सुविधा प्रदान करें क्योंकि वे वास्तविक अनुभव के साथ मौखिक निर्देश को सहसंबंधित कर सकते हैं।
- शिक्षार्थियों को प्रभावी ढंग से सीखने और लंबे समय तक अवधारणाओं को याद रखने में सहायता करें।
- शिक्षार्थियों को स्पष्टता के साथ अवधारणा को समझने और सीखने में जीवंतता लाने में मदद करें।
- शिक्षार्थियों को अमूर्त अवधारणाओं को मूर्त रूप देने में मदद करें, और क्योंकि यह प्रक्रिया मस्तिष्क को बढ़ाता है।
- शिक्षार्थियों की सीखने के शैली में बदलाव शिक्षण में आईसीटी की प्रासंगिकता साबित करता है।
- शिक्षार्थियों को सीखने में जिज्ञासुता, जिज्ञासा और रुचि विकसित करने में मदद करें।

2.3.2 तात्कालिक वातावरण द्वारा शैक्षणिक संसाधनों से अध्ययनपूर्वक होना

हमने पूर्व कथित तथ्यों में पर चर्चा की है, लेकिन, एक शिक्षक के रूप में आपके लिए, कई कारणों से इन संसाधनों की खरीद करना हमेशा संभव नहीं हो सकता है। ऐसे मामलों में, आप प्राकृतिक (तत्काल पर्यावरण) सीखने के संसाधनों का विकल्प चुन सकते हैं। ऐसे संसाधन कक्षा, अपने घर या प्रकृति में उपलब्ध हैं। प्रकृति सीखने के संसाधनों का सबसे बड़ा भंडार है। इन संसाधनों को तात्कालिक शिक्षण संसाधनों के लिए भी जाना जाता है। तात्कालिक अधिगम संसाधन वे संसाधन हैं जो तत्काल वातावरण में उपलब्ध अपशिष्ट सामग्री या सामग्री से तैयार किए जाते हैं। उदाहरण के लिए, यदि आप त्रिविमीय आकार सिखाना चाहते हैं, तो आप खाली माचिस का डिब्बा, बिना उपयोग किए गए बर्तन आदि ला सकते हैं। यहां तक कि अनुपयोगी गत्ते, या मोटी कागज कलमों, आदि के साथ बक्से तैयार कर सकते हैं। इस प्रकार शिक्षण अधिगम संसाधन के उपकरण है जिनका प्रयोग शिक्षक के द्वारा छात्रों को किसी

अवधारणा को आसानी से तथा कुशलता से सीखने में सहायता करने के लिए किया जाता है। हमारे आस–पास बहुत सी ऐसी सामग्री है जो गणित पढ़ाने या सीखने के काम में आती है। जैसे रस्सी एवं कील का प्रयोग कर हम जमीन में श्यामपट्ट पर वृत्त या कोण बना सकते है। यह परकाल का काम करती है। माचिस की डिब्बी चॉक का डिब्बा धनाश को समझाने के काम आता है। घर में प्रयोग किए जाने वाले गोल डिब्बों से बेलन की आकृति को समझाया जा सकता है, चूड़ी से वृत्त को समझा सकते हैं। धनाकृति को सांप सीढ़ी के डायस से समझा सकते हैं। कागज पर ज्यामिति की विभिन्न आकृतियां बनाई जा सकती है। आइसक्रीम के कोन की तुलना शंकु तथा बीजगणित के समीकरणों को तराजू की सहायता से समझाया जा सकता है।

2.3.3 गणितीय प्रयोगशाला, संघ एवं प्रदर्शन

गणित प्रयोगशाला एक ऐसी जगह है जहां शिक्षार्थियों को गणितीय वस्तुओं के साथ संलग्न होने, गणितीय सिद्धांतों का प्रयोग करने, गणितीय पहेली और समस्याओं को हल करने, गणितीय खेल खेलने, प्रशिक्षण पर हाथ का अनुभव करने आदि का अवसर मिलता है। यह वह सामग्री या उपकरण है जो कि गणित प्रयोगशाला में पाया जा सकता है, इसका निर्माण लकड़ी/धातु/प्लास्टिक बनाया, इत्यादि, से गणितीय सेट, चार्ट और चित्र, कंप्यूटर (एस), कंप्यूटर सॉफ्टवेयर, श्रव्य–दृश्य अनुदेशात्मक सामग्री जैसे प्रक्षेपक, इलेक्ट्रॉनिक स्टारबोर्ड, रेडियो, टेलीविजन सेट, टेप रिकॉर्डर, वीडियो टेप, आदि, ठोस आकार (असली या मॉडल), बुलेटिन बोर्ड, त्रि–आयामी फिल्मस्ट्रिप्स, टेप फोटोग्राफ, पोर्टेबल बोर्ड या व्हाइटबोर्ड, अबेकस, कार्डबोर्ड, टेप माप, आलेखों, वर्कबुक, आलेख, फ्लैनेल बोर्ड, फ्लैश कार्ड, आदि।

गणित प्रयोगशाला सामग्री और वस्तुओं की एक संख्या के होती हैं। गणितीय कोण गणित प्रयोगशाला का एक लघु रूप है। गणित प्रयोगशाला अत्यधिक संगठित है, कई वस्तुओं/सामग्री/उपकरणों के होते है और उन्हें विकसित करने में विशेष कौशल की आवश्यकता है।

कुछ गणितीय वस्तुओं और विषय शामिल हैं जो कि गणित की जटिलता को दूर करते हैं। आप किसी भी अन्य प्रयोगशाला के सीमा पर या कक्षाओं के सीमा पर एक गणित कोणों व्यवस्थित कर सकते हैं। आमतौर पर, गणित सीमा एक ऐसी जगह है जहां शिक्षार्थियों को साधारण/सामान्य प्रकार की गणितीय वस्तुएं मिलती हैं और आप कक्षा बातचीत के दौरान इन वस्तुओं का उपयोग कर सकते हैं। एक तरह से, गणित के कोनों गणित से संबंधित शिक्षण–शिक्षण विज्ञान शामिल हैं। यह ध्यान देने की बात है कि, गणित प्रयोगशालाओं में पाए जाने वाले उद्देश्य गणित के सीमा में भी पाए जा सकते हैं।

आइए, गणितीय प्रयोगशाला और परिसीमा या सीमा के महत्व पर चर्चा करें। गणित प्रयोगशालाओं/परिसीमा निम्नलिखित कारणों के कारण महत्वपूर्ण हैं–

- यह शिक्षार्थियों को ठोस वस्तुओं का उपयोग करके और वास्तविक स्थितियों का अनुभव करके गणितीय अवधारणाओं को प्रभावी ढंग से समझने में मदद करता है।

टिप्पणी

- शिक्षार्थी सैद्धांतिक ज्ञान का परीक्षण और अनुभव कर सकते हैं और विभिन्न गणितीय गुणों की खोज कर सकते हैं।
- यह गणित सीखने के लिए शिक्षार्थियों की रुचि और प्रेरणा को बढ़ाता है। गणित प्रयोगशालाओं में शोध में प्रयोग किए जाने वाली वस्तुएं और सामग्री है, जो शिक्षार्थियों को अपने दैनिक जीवन गतिविधियों और प्रकृति के साथ अवधारणाओं से संबंधित करने में मदद प्रदान करते हैं।
- गणित प्रयोगशालाओं में शोध करते समय गणितीय प्रायोगिक शिक्षण को बढ़ावा दिया जाता है क्योंकि शिक्षार्थी अपने तरीके से गणितीय क्रियाकलापों द्वारा उद्देश्यों की खोज में संलग्न होते हैं।
- प्रयोगशाला में गणितीय क्रियाकलापों द्वारा छात्रों में रचनात्मक एवं अनुसंधानात्मक दृष्टिकोण विकसित होगा।
- शिक्षक गणित प्रयोगशालाओं में मौजूद कई सीखने के संसाधनों के साथ संयोजित करके सीखने की अवधारणाओं को प्रदर्शित कर सकते हैं।
- यह जांच और आलोचनात्मक सोच के कौशल के विकास में मदद करता है।
- शिक्षार्थियों द्वारा 'गणितीय शैक्षणिक' के सिद्धांत का अभ्यास किया जा सकता है।

गणितीय प्रयोगशाला विकसित करते समय इसमें निम्नलिखित वस्तुओं/सामग्री/उपकरणों को शामिल किया जा सकता है।

- गणितीय प्रयोगशाला में गणना केन्द्र होना चाहिए जिसमें विद्युत गणना यंत्र के साथ–साथ ही मापन यंत्र होने चाहिए।
- गणितीय प्रयोगशाला में विभिन्न मापन यंत्र फीता, मीटर, भार मशीन इत्यादि होना आवश्यक है।
- गणित में प्रयोगशाला के कार्यकलापों को प्रदर्शन और प्रयोग दो वर्गों में रख सकते हैं। प्रदर्शन में अनुदेशन क्रियाएं शामिल है जिनमें शिक्षक सिद्धांतों, संबंधों, फलनों, संक्रियाओं, उपकरणों और युक्ति का प्रयोग करता है।

गणितीय संघ या मंच

गणित संघ/मंचों को दो कोणों से देखा जाना है; एक सीखने के संसाधन और दूसरा पाठ्येतर गतिविधियों में शिक्षार्थियों को शामिल करने के लिए एक जगह के रूप में दर्शाता जाता है। गणितीय संघ/मंच एक ऐसा प्रारूप है जिसमें गणितीय विचारों का आदान–प्रदान हो सकता है। इसमें गणितीय विचारों की स्पष्ट समालोचन के लिए अवसर मिलते हैं। गणितीय संघ एक ऐसा अनौपचारिक सामाजिक वातावरण उपलब्ध कराता है जैसा कि नियमित कक्षा में संभव नहीं हो सकता है। गणितीय संघ या मंच में एक ओर शिक्षार्थी गणितीय सिद्धांतों, बहस और गणित के विभिन्न विचारों पर चर्चा कर सकते है। दूसरी

टिप्पणी

ओर, गणित संघ/मंच द्वारा विभिन्न सह–पाठयक्रम गतिविधियों जैसे प्रश्नोत्तरी, अध्ययन पर्यटन आदि का आयोजन किया जा सकता है। गणितीय संघ/मंच गणित से संबंधित विभिन्न विषयों पर कार्यक्रमों, चर्चा, बहस के आयोजन के लिए एक साथ हो रही व्यक्तियों का एक समूह है। जिसमें विभिन्न आयोजनों जैसे गणितज्ञों की जीवनी, गणित के सिद्धांतों आदि की की जाती है। साथ ही संघ और मंच पर चर्चा, वाद–विवाद, संगोष्ठी अध्ययन रूपी परिक्रम आदि के आयोजन में भी लगे हुए हैं। अंततः, गणित संघ/मंचों गणित सीखने में रुचि और प्रेरणा के विकास में शिक्षार्थियों की मदद करता है। गणित सीखने में शिक्षार्थियों को शामिल करने के विभिन्न तरीके हैं; गणितीय संघ/मंच एक प्रमुख भूमिका निभाते हैं। तो एक गणित शिक्षक के रूप में यह गणित संघ/मंचों को विकसित करने के लिए प्रक्रियाओं को शुरू करने के लिए अपने कर्तव्य निभाते है। गणित संघ/मंच गणित शिक्षक के मार्गदर्शन में काम करते हैं।

इसके अलावा, गणित संघ/मंच निम्नलिखित कारणों से महत्वपूर्ण हैं–

- गणित संघ/मंच शिक्षार्थियों को गणित सीखने से संबंधित विभिन्न गतिविधियों में शामिल होने में मदद करते हैं।
- गणित सीखने के लिए शिक्षार्थियों में रुचि और प्रेरणा की सुविधा और जगाना इस मंच का प्रमुख उद्देश्य है।
- गणित संघों/मंचों द्वारा आयोजित कार्यक्रमों में शामिल करके ख़ाली समय का उचित उपयोग किया जा सकता है।
- शिक्षार्थियों को गणित संघों/मंचों की विभिन्न गतिविधियों से अवगत कराया जाता है जिससे उन्हें अपने गणित कक्षाओं में सीखे गए सिद्धांतों का परीक्षण करने में मदद मिलती है।
- शिक्षार्थियों को विभिन्न कार्यक्रम शुरू करने का अवसर प्रदान करने का अवसर मिलता है।
- शिक्षार्थियों को नेतृत्व, समस्या समाधान, संयुक्त उत्तरदायित्व, कड़ी मेहनत आदि के कौशल को बढ़ाने में मदद मिलती है।
- गणित संघ/मंच शिक्षार्थियों को उन गतिविधियों में शामिल होने में मदद करते हैं जहां वे गणित के विभिन्न विषयों पर चर्चा, प्रतियोगिता और विचार कर सकते हैं।

इसके द्वारा गणित के अध्ययन को बल एवं उद्दीपन प्रदान किए जाते है। इसकी सहायता स्वैच्छिक होती है इसलिए इसमें वहीं विद्यार्थी शामिल होते हैं जो कि वास्तव में गणित में रुचि रखते है तथा उस विषय का स्वरूप जानना चाहते है जो कि कक्षा कार्य से भिन्न होता है। गणितीय संघ में होने वाले आयोजन किसी औपचारिक क्रमिक व्यवस्था का अनुसरण नहीं करते हैं। इनमें उन आयोजनों को अवसर दिए जाते हैं जो सदस्यों की चाह के अनुरूप हो। यह एक ऐसा आदर्श मंच है जिसमें गणितीय विचारों का स्वतंत्रतापूर्वक आदान–प्रदान हो सके। इसमें गणितीय विचारों की स्पष्ट समालोचना के लिए अवसर मिलते है। गणितीय संघ एक ऐसा अनौपचारिक सामाजिक वातावरण

उपलब्ध कराता है जैसा कि नियमित कक्षा में उपलब्ध कराना संभव नहीं होता है। इसमें स्वतंत्र सामाजिक अन्तक्रिया के लिए पर्याप्यत अवसर मिलते हैं।

टिप्पणी

निम्नलिखित गतिविधियों गणित संघों या मंचों द्वारा शुरू किया जा सकता है;

- शैक्षिक वार्तालाप, संक्रियाओं व्याख्यान, प्रसिद्ध गणितज्ञों, गणित विशेषज्ञों, आदि द्वारा विभिन्न स्तरों पर ज्ञान प्राप्त किया जा सकता है।
- गणितज्ञों के जन्म दिवसों का उत्सव और अन्य महत्वपूर्ण गणितीय घटनाओं, गणित के समीकरणों आदि का विचार–विमर्श गणितीय संघ में किया जा सकता है।
- विभिन्न विषयों और गणित से संबंधित मुद्दों पर चर्चा और बहस की जाती है।
- प्रश्नोत्तरी कार्यक्रम का आयोजन किया जा सकता है।
- गणित प्रतियोगिताओं, गणित ओलम्पियाड, प्रदर्शनियों, आदि, का संचालन भी किया जा सकता है।
- गणितीय प्रतिरूप, सहायक सामग्री (Aid), लेखाचित्र, आदि, की प्रदर्शनी लगाई जा सकती है।
- संगोष्ठी और कार्यशालाएं का प्रायोजन कर सकते हैं।
- साप्ताहिक / मासिक / वार्षिक आधार पर पत्रिकाओं और पत्रिकाओं का प्रकाशन के बारे में चर्चा की जाती है।

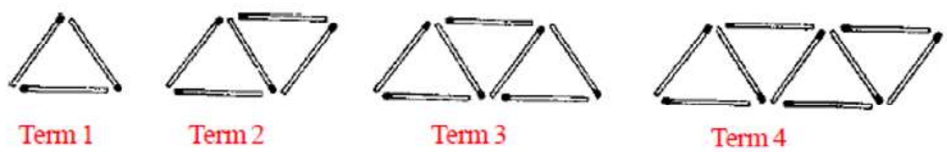
2.3.4 कम लागत में शिक्षण अधिगम सहायक पाठ्यक्रम की तैयारी

यदि अपनी कक्षा को सिखाने के लिए शिक्षण अधिगम सामग्री (टीएलएमएस) का उपयोग करना चाहते हैं। आप क्या करेंगे? आप जाकर इसे खरीदेंगे। आह! आप जो प्रतिरूप और लेखाचित्र चाहते हैं, वह बहुत महंगा है। स्कूल में महंगे टीएलएमएस के लिए पर्याप्त बजटीय प्रावधान नहीं है। फिर आपको क्या करना चाहिए? आपको यह भी पता है कि आप आसानी से कम लागत के साथ सारणी का रूपरेखण और तैयार कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में स्थानीय स्तर पर उपलब्ध सामग्री की मदद ली जा सकती है। टीएलएमएस तैयार करने के लिए इस्तेमाल किए गए लपेटने वाले कागज, गत्ते आदि जैसे अपशिष्ट पदार्थों का इस्तेमाल किया जा सकता है। आप अपशिष्ट सामग्री का उपयोग करके कम लागत पर टीएलएमएस को रूपरेखण और विकसित करने में सक्षम होंगे। इसके अलावा स्थानीय रूप से उपलब्ध सामग्रियों का उपयोग किया जा सकता है जो महंगा नहीं हो और आप वित्तीय समस्या के बिना अपनी कक्षा शिक्षण में टीएलएम का उपयोग करने में सक्षम होंगे।

शिक्षार्थियों के लिए गणित की संकल्पनाओं के बोधगमय तथा शिक्षण–अधिगम को रुचिपूर्ण बनाने के लिए कुछ सामग्री की आवश्यकता पड़ती है। सभी प्रकार के शैक्षणिक संसाधनों के लिए विभागों पर निर्भर नहीं रहा जा सकता है। शिक्षक स्वयं अपनी आवश्यकताओं के अनुसार कुछ शिक्षण–अधिगम सामग्री विकसित करता है।

इसमें शिक्षकगण अपने ही प्रशिक्षण, अनुभव, दूरदृष्टि और सृजनशीलता के आधार पर अपनी कक्षाओं में प्रयोगों के लिए नई प्रकार की सामग्रियों का निर्माण, पुर्नरचना और विकास कर सकते है।

ज्यामिति के अध्ययन के लिए बढ़ते प्रतिरूप की अवधारणा को पढ़ाने के लिए हम माचिस की तीलियों का उपयोग कर सकते हैं। जिनक कुछ प्रतिरूप की आकृतियां निम्न है–



2.3.5 गणितीय प्रतिरूप, लेखाचित्र, आदि, का उपयोग

किसी भौतिक तंत्र या प्रक्रम या अमूर्त तंत्र के विभिन्न अवयवों के अंर्तसंबंधों का गणित की भाषा में वर्णन उस तंत्र का गणितीय प्रतिरूप या गणितीय मॉडल कहलाता है। गणितीय प्रतिरूप प्रायः संगत तंत्र के सरलीकृत रूप होते है। गणितीय प्रतिरूपों का प्राकृतिक विज्ञानों एवं प्रौद्योगिकी में बहुतायत से उपयोग होता है। इसके अतिरिक्त यह सामाजिक विज्ञानों जैसे अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र एवं राजनीति शास्त्र में भी उपयोगी साबित है।

गणितीय प्रतिरूप इन के रूप में उपयोगी हैं–

- कठिन अवधारणाओं को सरल बनाने में;
- बड़ी वस्तुओं को आसानी से प्रतिरूप आकार को कम करने में;
- किसी वस्तु या प्रणाली की आंतरिक संरचना का प्रदर्शन करने में;
- शिक्षार्थियों को वस्तु या प्रणाली के कठिन हिस्से को समझने में मदद करने में। यह केवल आवश्यक सुविधाओं पर ध्यान केंद्रित करके और जटिल विवरणों को नष्ट करके कठिन अवधारणाओं, प्रक्रियाओं या जटिल स्थितियों को सरल बनाता है, जो अवधारणा को समझने में बाधा डाल सकता है।

प्रतिरूप उपयोगी शिक्षण अधिगम सामग्री हैं। जबकि प्रतिरूपक अंक का उपयोग करने के लिए ध्यान रखा जाना चाहिए कि–

- प्रतिरूप काफी बड़ा होना चाहिए कक्षा में हर किसी के द्वारा आसानी से देखा जा सकता है;
- प्रतिरूप को अन्य टीएलएम जैसे लेखाचित्र के साथ पूरक किया जा सकता है ताकि संबंधों को समझने में मदद मिल सके;
- यदि किसी प्रतिरूप पर काम करना है – तो अपनी कक्षा में उपयोग करने वाले प्रतिरूप को पहले जांचें;

टिप्पणी

- अध्ययन प्रयोगी प्रतिरूप को स्पर्श करने और प्रभावी सीखने के लिए यह महसूस करने की अनुमति दी जानी चाहिए;
- वास्तविक अध्ययन के लिए प्रतिरूपों में अच्छे रंग का उपयोग किया जाना चाहिए। यह प्रतिरूप को और अधिक आकर्षण वाला प्रतिरूप भी बनाता है।

गणितीय लेखाचित्र

एक आरेखीय एक प्रणाली, प्रक्रिया, और घटना के ऐतिहासिक अनुक्रम का एक आरेखीय प्रतिनिधित्व है। यह दृश्य प्रतिनिधित्व का उपयोग विषय को प्रभावी और संक्षिप्त तरीके से प्रस्तुत करने, समझाने, तुलना करने या इसके विपरीत करने के लिए किया जाता है। लेखाचित्र अवधारणा गठन और शिक्षार्थियों के बीच विकास के लिए सभी विषयों में उपयोग किया जाता है। किसी सूचना का किसी दृश्य तकनीक के अनुसार द्विविमीय ज्यामिति में सांकेतक अभिव्यक्ति संरेखी या आरेखी अथवा लेखाचित्र कहलाता है। कभी–कभी इसे आरेख नाम से भी जानते हैं। किसी आरेख का अभिप्राय उन मुख्य संबंधों को नेत्रों के समक्ष स्पष्ट रूप से प्रदर्शित करना है, जिन पर ध्यान आकर्षित करना हो तो कभी–कभी आरेख से अभिव्यक्त वस्तु से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण राशियों के यथार्थ संख्यात्मक मान को, चित्र पर माप द्वारा दर्शाने से संबंधित है।

2.3.6 गणित के शिक्षण में आईसीटी का उपयोग

आईसीटी शिक्षण –सीखने की प्रक्रिया का एक अविभाज्य घटक बन गया है। आईसीटी (ICT) से आपका क्या मतलब है? आईसीटी तकनीक सूचना और संचार प्रौद्योगिकी (Information and Communications Technology) के लिए उत्तरदायी है। आईसीटी तकनीकी माध्यम की सहायता से जानकारी को संग्रहित करने, संसाधित करने, प्रसारित करने और संचारित करने में मदद करता है। यूनेस्को आईसीटी को "प्रौद्योगिकी के रूपों" के रूप में परिभाषित करता है जिसका उपयोग इलेक्ट्रॉनिक साधनों द्वारा सूचनाओं को संचारित, प्रक्रिया, संचय, निर्माण, प्रदर्शन, साझा करने या आदान–प्रदान करने के लिए किया जाता है। इसमें न केवल रेडियो और टेलीविजन जैसी पारंपरिक प्रौद्योगिकियां, बल्कि सेलुलर फोन, कंप्यूटर नेटवर्क, हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर, उपग्रह प्रणालियों आदि जैसे आधुनिक तकनीकों के साथ–साथ चलचित्र वार्तालाप जैसी विभिन्न सेवाएं और अनुप्रयोग भी शामिल हैं। इस प्रकार आईसीटी में सभी तकनीकी यंत्र शामिल हैं जो जानकारी को संग्रहीत करने, प्रसारित करने और संवाद करने में मदद करते हैं।

आईसीटी गणित कक्षा में माध्यमिक छात्रों के लिए शैक्षिक अवसरों का विस्तार करने के लिए संभावित रूप से प्रमुख उपकरण हैं। यह शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का एक नया प्रतिमान है। विभिन्न आईसीटी उपकरण उपलब्ध हैं जिनका उपयोग आधुनिक विश्व में ज्ञान सृजन के लिए किया जा सकता है। उपकरणों में रेडियो, टीवी, इंटरनेट, मोबाइल फोन, कैलकुलेटर, कंप्यूटर, लैपटॉप, टैबलेट, आंकड़े प्रक्षेपक, प्रिंटर, स्कैनर, ई–मेल और कई अन्य हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर अनुप्रयोग शामिल हैं। इन उपकरणों का उपयोग शिक्षकों और छात्रों के लिए शिक्षा और प्रशिक्षण प्रदान करने में किया जा

सकता है। शैक्षणिक व्यवस्थाओं के लिए रेडियो का उपयोग अतीत में बहुत लोकप्रिय रहा है, लेकिन अब कक्षा के समय के दौरान सीखने के लिए माध्यमिक स्तर के गणनायंत्र, कंप्यूटर, लैपटॉप और आंकड़े प्रक्षेपक के छात्रों के प्रयोगों में शामिल थे। ऑनलाइन कक्षाओं के लिए वे किसी भी स्थान पर लैपटॉप और सेल फोन का उपयोग होता है। प्रौद्योगिकी के ये उपकरण आम तौर पर गणित करने और सीखने का काम करते हैं। ज्यामिति तकती एक और गणितीय उपकरण है जो छात्र को ज्यामिति सीखने में मदद करता है। यह उपकरण ज्यामितीय निर्माण एवं रूपरेखण की प्रस्तुति में माप ले रहे छात्रों की मदद करता है, और विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को आसान तरीके से आकर्षित करता है।

शिक्षा की प्रभावशीलता में सुधार के लिए माध्यमिक छात्रों की वर्तमान पीढ़ियों को तैयार करने के लिए गणित कक्षा में विभिन्न प्रौद्योगिकियों को पेश किया जा सकता है। उनमें से कुछ का उल्लेख निम्नलिखित में है–

प्रत्योक्षकरण पिछले 30 वर्षों के लिए, गणित सक्रिय रूप से अधिक प्रयोगात्मक और अधिक दृश्य बन गया है। कंप्यूटर एक अनूठा उपकरण है जिसमें दृश्य और प्रयोगात्मक दोनों विशेषताओं को बढ़ाने की क्षमता है। दृश्य माध्यम व्यापक रूप से वाद्य संसाधन के रूप में प्रयोग किया जाता है।

- संवादात्मक श्वेतपट्ट की तकनीक, जिसमें इंटरनेट से तुरंत जुड़ने की क्षमता होती है ताकि छात्र और शिक्षक तुरंत जानकारी प्राप्त कर सकें। श्वेतपट्टों को लैपटॉप, कंप्यूटर और प्रक्षेपक से जोड़कर, शिक्षक श्वेत पट्ट पर मुक्तहस्त से लेखन को ग्रंथों में परिवर्तित कर सकते हैं और फिर इसे छात्रों के लिए इसकी छायाप्रति दे सकते हैं।
- व्यावसायिक प्रशिक्षण उपकरण जैसे कंप्यूटर आधारित प्रशिक्षण (सीबीटी), कंप्यूटर एडेड रूपरेखण (सीएडी), पावर प्वाइंट प्रेजेंटेशन (पीपीटी) आदि। हाल के वर्षों में, गणित कक्षा में पावर पॉइंट का उपयोग विश्व स्तर पर काफी बढ़ गया है (कॉर्नर एंड वोंग, 2004; बाट्र्सच एंड कोबर्स, 2003)। पावर प्वाइंट प्रस्तुति की मदद से माध्यमिक छात्रों के चित्रालेख के साथ पदानुक्रमित आचरण में गणित के किसी भी विषय को प्रस्तुत करने के लिए खुद को और अधिक सक्षम बनाता है। माध्यमिक छात्रों ने पारदर्शिता पर पावर पॉइंट पसंद किया और बड़े फ़ॉन्ट आकार और रंग विरोधाभासों को देखने में आसान के साथ स्लाइड पसंद करते हैं।
- कंप्यूटर, संचार, इलेक्ट्रॉनिक और अन्य बहुमाध्यम उपकरण में बहुमाध्यमः D स्परूपण विभिन्न प्रकार की जानकारी प्रदान करता है। विभिन्न विषयों, भाषण, संगीत, बहुमाध्यम नेटवर्क, छवि संवर्द्धन, आदि सिखाने के लिए जीवंतात संपुष्टि पैकेज, आभासी वास्तविकताओं और अनुभव और शिक्षार्थियों के मानसिक तर्क का निर्माण करते हैं, जो सीखने में अधिक उपयोगी और मनोरंजकारी अनुभव बनाने में सहायक होता है।

- अप्रत्यक्ष शैक्षणिक परिवेश शिक्षण और सीखने की प्रक्रिया में कंप्यूटर और इंटरनेट को शामिल करके छात्रों के सीखने के अनुभव को बढ़ाने के लिए रूपरेखित किए गए शिक्षण और सीखने के उपकरणों का एक वर्ग है। कक्षा में जाने के बजाय, शिक्षक और छात्र इलेक्ट्रॉनिक माध्यम जैसे ई–मेल, वेब कॉन्फ्रेंसिंग या चलचित्र वार्तालाप के माध्यम से एक समय में संवाद करते हैं।
- डिजिटल उपकरण जानकारी के लिए कैमरे, स्कैनर जैसे डिजिटल उपकरणों का उपयोग किया जा सकता है। डिजिटल फोटोग्राफ और रिकॉर्डिंग का उपयोग इलेक्ट्रॉनिक और आभासी क्षेत्र यात्राओं, विज्ञान प्रयोगों और प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है।

गणित कक्षा में उपयोग किए जाने वाले सॉफ्टवेयर

- जियोजेब्रा एक गतिशील गणितीय सॉफ्टवेयर है जो विशेष रूप से गणित के छात्रों के लिए रूपरेखित किया गया है। यह उपकरण बीजगणित, रेखांकन, ज्यामिति, स्प्रेडशीट, सांख्यिकी और विश्लेषण के साथ विलय कर देता है इसमें उपयुक्त संपुष्टि का उपयोग करना एक आसान है।
- माइक्रोसॉफ्ट गणितीय प्रणाली माइक्रोसॉफ्ट द्वारा विकसित विवृत स्रोत वाला एक सॉफ्टवेयर है। यह माध्यमिक छात्रों द्वारा उपयोग किया जाने वाला एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो गणित की समस्या से परेशान हैं। यह सबसे जटिल समस्या को आसान तरीके से जल्दी हल कर देता है।
- माध्यमिक छात्र के कभी–कभी अपने पाठ्यक्रमों के भीतर विभिन्न परियोजनाओं के लिए कंप्यूटर बीजगणित प्रणाली (जैसे, मेपलसॉफ्ट, 2005) का उपयोग करते हैं। गणित कक्षा में प्रश्नों की उत्तरों की सटीकता को एकीकृत करके छात्र अपने पाठ में अधिक सफल होते हैं। यह सॉफ्टवेयर आसानी से छात्रों को प्रेरित करता है और वे कक्षा की तैयारी में अधिक समय बिताते हैं।
- गत्यात्मक ज्यामिति सॉफ्टवेयर (डीजीएस) एक निश्चित प्रकार का सॉफ्टवेयर है जिसका उपयोग मुख्य रूप से गणितीय कार्यों और समस्याओं के निर्माण और विश्लेषण के लिए किया जाता है।

2.3.7 गणित शिक्षण के लिए उपयुक्त माध्यम का उपयोग करना और चयन करना

क्या कोई विशेष शिक्षण संसाधन है जो सभी वर्गों/शिक्षार्थियों पर लागू होता है? क्या सभी शिक्षण सत्रों के साथ माध्यमों को नियोजित करना आवश्यक है? ये कुछ ऐसे सवाल हैं, जिन्हें आपको माध्यमिक एकीकृत शिक्षण सत्र के लिए योजना बनाते समय सतर्क रहना चाहिए। इसलिए आपको निश्चित रूप से पहले से योजना बनानी चाहिए और माध्यमिक एकीकृत शिक्षण सत्र को संभालने की तैयारी करनी चाहिए। इस खंड में, हम कुछ कारकों पर चर्चा करेंगे, जिन्हें आपको पता होना चाहिए, माध्यम को एकीकृत करने के लिए निम्नलिखित कारक माध्यम के चयन को प्रभावित करते हैं–

1. **कर्तव्य कारकः** यह हाथ में नौकरी की प्रकृति को संदर्भित करता है अर्थात् सीखने के उद्देश्य क्या हैं? शिक्षक शिक्षार्थियों में विकसित करने के लिए क्या व्यवहार परिवर्तन करना चाहता है? पाठयक्रम सामग्री के अध्ययन के लिए शैक्षणिक दृष्टिकोण क्या अपनाए जा रहे हैं? क्या समय प्रक्रिया के लिए समर्पित किया जाना चाहिए? आदि)
2. **शिक्षार्थी कारकः** शिक्षार्थी कारकों में शिक्षार्थियों की आयु का स्तर, प्रेरक विशेषताएं, व्यक्तित्व और व्यक्तिगत मतभेद, सीखने की इच्छा आदि शामिल हैं। आज कक्षाओं में समावेश पर जोर दिया जाता है। ऐसी कक्षाओं में सामान्य शिक्षार्थियों के साथ–साथ विशेष आवश्यकता वाले शिक्षार्थियों को पढ़ाया जाता है। इस प्रकार, शिक्षण के लिए माध्यम/अधिगम संसाधन का चयन करते समय, विशेष आवश्यकताओं वाले सामान्य और शिक्षार्थियों दोनों की अधिगम मांगों को पूरा करने के लिए सावधानी बरती जानी चाहिए।
3. **आर्थिक/उपलब्धता कारकः** इसमें सीखने के संसाधनों/माध्यम की लागत, माध्यम की उपलब्धता, मीडिया के कार्य को दर्शाता आदि शामिल हैं। जैसा कि हम जानते हैं, एक कैलकुलेटर कंप्यूटर की तुलना में कम महंगा है। इसलिए, यदि कोई गणित शिक्षक अंकगणितीय गणनाओं से संबंधित अवधारणाओं को सिखाना चाहता है, तो वह कंप्यूटर के स्थान पर सरल कैलकुलेटर पसंद कर सकता है। इससे ऊर्जा, समय, जटिलताओं आदि की बचत होती है। इसी तरह, स्थितियों है कि एक कैमरे की आवश्यकता है, मोबाइल कैमरों जो काम कर रहे है और ज्यादातर शिक्षकों के साथ उपलब्ध का उपयोग कर सकते हैं।

'अपनी प्रगति जांचिए'

7. आईसीटी का वास्तविक अर्थ बताएं।
8. तात्कलिक वातावरण से शैक्षणिक संसाधनों से किस प्रकार अध्ययन किया जा सकता है?
9. प्रयोगशाला में गणितीय क्रियाकलपा छात्रों के जीवन में किस प्रकार उपयोगी साबित है?
10. गणितीय प्रतिरूप से क्या अभिप्राय है?

2.4 गणित में मूल्यांकन

मूल्यांकन शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का एक अभिन्न हिस्सा है क्योंकि यह प्रगति की निगरानी और शिक्षण प्रक्रिया को एक आकार देने के लिए एक प्रमुख संसाधन है। इस बात को ध्यान में रखते हुए, गणित के व्यापक दृष्टिकोण और समाज में इसकी भूमिका के बारे में, मूल्यांकन का लक्ष्य सिर्फ पाठ्यक्रम के अंत में दी गई परीक्षा से कहीं अधिक होना चाहिए। इस इकाई में एक अच्छी उपलब्धि परीक्षा के निर्माण की प्रक्रिया और गणित सीखने में मूल्यांकन के लिए विभिन्न उपकरणों और तकनीकों पर भी चर्चा की गई है। गणित में मूल्यांकन शिक्षार्थियों के गणितीय शिक्षण प्रक्रिया के बारे में जानकारी

टिप्पणी

की पहचान करके, इकट्ठा करने और व्याख्यित करने की प्रक्रिया को संदर्भित करता है। यह जीवन को समृद्ध करता है तथा सोच को नए आयाम भी प्रदान करता है। अमूर्त सिद्धांतों के विकास के संघर्ष के दौरान यह विद्यार्थियों को तर्क–वितर्क करने और उन्हें समझने की सामर्थ्यता प्रदान करता है।

2.4.1 गणित में मूल्यांकन की भूमिका

हम, गणित के शिक्षकों के रूप में, यह सुनिश्चित करने का लक्ष्य संपन्न करते हैं कि विद्यार्थियों को किस प्रकार व्यवस्थित रूप से अध्ययन कराया जाए जिससे उनके मस्तिष्क में भ्रम न उत्पन्न हो सके। मूल्यांकन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा हमें ज्ञात होता है कि कोई छात्र अधिगम को किस स्तर तक सीखा है या किस स्तर तक अधिगम को ग्रहण करने में समर्थ रहा है। यह एक ऐसी प्रक्रिया है जिसके द्वारा छात्र की प्रगति के स्तर का पता लगाया जाता है। मूल्यांकन अधिगम को सरल एवं सुगम बनाने का कार्य करता है।

जब हम गणित कक्षा में मूल्यांकन की बात करते हैं, तब हम संक्रियाओं और छात्र समझ और गणित में उपलब्धि की गुणवत्ता स्पष्ट रूप से परिभाषित उद्देश्यों के आधार पर निर्धारित करने की कोशिश करते हैं। इसका मतलब यह है कि उद्देश्यों की एक व्यापक शृंखला के बजाय सिर्फ विषय के बारे मूल्यांकन कर रहे हैं।

इस प्रकार, एक बुद्धिमान शिक्षक को अपने विद्यार्थियों द्वारा नियोजित सीखने के तरीकों का मूल्यांकन करना चाहिए। सीखने के तरीके सामग्री के रूप में के रूप में महत्वपूर्ण हैं। विद्यार्थियों के विकास का मूल्यांकन करने में रटने यादीकरण के माध्यम से प्राप्त उच्च प्रदर्शन को प्राथमिकता नहीं दी जाती है। हम कुछ प्रक्रियाओं और तकनीकों का उपयोग करने के लिए छात्र प्रगति और विकास के बारे में आंकड़े एकत्र करने के लिए निर्धारित करने के लिए किस हद तक इन विविध गणितीय संक्रियाओं के उद्देश्यों को प्राप्त किया गया है।

"हमें मूल्यांकन करने की आवश्यकता क्यों है?"

मूल्यांकन करने की आवश्यकता निम्नलिखित उद्देश्यों या कारणों के बारे में वर्णित है–

- यह पता लगाने के लिए कि हमारे छात्र ने कितना गणित सीखा है,
- गणित में कौन से छात्र कमजोर हैं, इसकी पहचान करने के लिए,
- प्रिंसिपल और माता–पिता को रिपोर्ट करने के लिए उनकी प्रगति का रिकॉर्ड रखने के लिए,
- अगले वर्ग या एक ही वर्ग में नजरबंदी को बढ़ावा देने की सिफारिश करने के लिए।

मूल्यांकन न केवल छात्र प्रदर्शन के बारे में कुछ कहता है, यह शिक्षण पर भी दर्शाता है। मूल्यांकन शिक्षक और छात्र दोनों के लिए महत्वपूर्ण है।

शिक्षकों के लिए यह अनुदेश देने, बेहतर शिक्षण सीखने की रणनीतियों के लिए योजना बनाने और शिक्षार्थियों को प्रभावी सीखने के अनुभव प्रदान करने में सुधार करने में मदद करता है।

2.4.2 गणित में सतत और व्यापक मूल्यांकन (सीसीई)

गणित में मूल्यांकन की पूरी प्रक्रिया शिक्षा के लक्ष्यों के साथ निरंतरता सुनिश्चित करने के लिए एक पूर्ण रूपांतरण से पारित की गई है। वहां व्यवहारवादी दृष्टिकोण से रचनात्मक दृष्टिकोण के लिए एक प्रतिमान बदलाव किया गया है। गणित सीखने के वर्तमान सिद्धांतों का सुझाव है कि पाठशाला में छात्र की उपस्थिति के दौरान छात्रों के हर पहलू का आकलन करना। गणित के इन बदलते विचारों और शिक्षक और शिक्षार्थियों की बदली हुई भूमिका ने गणित के तरीकों को व्यापक बनाया है।

सतत और व्यापक मूल्यांकन (सीसीई) [Continuous and Comprehensive Evaluation (CCE)] का उद्देश्य शिक्षार्थियों पर पाठयक्रम कार्यभार को कम करना और दोनों प्रकार की गतिविधियों में शिक्षार्थियों के प्रदर्शन के मूल्यांकन के माध्यम से शिक्षार्थियों की समग्र क्षमताओं और कौशल में सुधार करना है।

शिक्षार्थियों के काम का निरंतर मूल्यांकन न केवल गणित के उनके सीखने की सुविधा प्रदान करता है, बल्कि गणित में सीखने के अनुप्रयोग में उनके आत्मविश्वास को भी बढ़ाता है। यह दृश्य संक्षेप मूल्यांकन से मूल्यांकन का ध्यान बदलता है, जहां शिक्षार्थियों को इकाई के अंत में मूल्यांकन किया जाता है और श्रेणी प्रदान की जाती है, प्रारंभिक मूल्यांकन के लिए जहां शिक्षार्थियों का मूल्यांकन सीखने की खोज में किया जाता है। इसलिए, केवल श्रेणी और स्थान के प्रयोजनों के लिए मूल्यांकन के दृष्टिकोण को सीखने की गतिविधियों के साथ मूल्यांकन को एकीकृत करने के दृष्टिकोण में बदल दिया गया है जो शिक्षार्थियों के ज्ञान के निर्माण का समर्थन करते हैं। मूल्यांकन इन तथ्यों के लिए एक रुकावट के बजाय शैक्षणिक की प्रक्रिया का एक अभिन्न हिस्सा होना चाहिए।

2.4.3 स्व और सहकर्मी मूल्यांकन

स्व मूल्यांकन (Self Evaluation)

स्व–मूल्यांकन तब होता है जब शिक्षार्थी प्रदान किए गए मानदंडों के आधार पर अपने स्वयं के प्रदर्शन का आकलन करते हैं। अभ्यास के साथ, छात्रों को निष्पक्ष रूप से प्रतिबिंबित और गंभीर रूप से अपनी प्रगति और कौशल विकास का मूल्यांकन करने के लिए सीख सकते हैं, यह एक एसी प्रक्रिया है जिसके द्वारा कोई भी छात्र स्वयं का मूल्यांकन करता है। अर्थात् किसी कार्य या गतिविधि की पूर्ति में या किसी स्थिति को संभालने के तरीके से अपने प्रदर्शन को पहचानता और तौलता है। जिनमें कुछ तथ्य सम्मिलित है। जो निम्नलिखित उदाहरणों में शामिल हो सकते हैः

1. **संरचित प्रारंभिक शिक्षा** – ऑनलाइन प्रश्नोत्तरी का उपयोग करना जो छात्रों को उनके प्रदर्शन पर तत्काल प्रतिक्रिया देता है।
2. **संक्षेप मूल्यांकन** – अपने स्वयं के प्रदर्शन की श्रेणीकरण छात्र को समग्र अंक का एक हिस्सा प्रदान करता है।

सहकर्मी मूल्यांकन (Peer Evaluation)

सहकर्मी मूल्यांकन समान दर्जे के अन्य छात्रों द्वारा छात्रों के किए गए क्रिया कलापों का मूल्यांकन है। छात्र अक्सर औपचारिक स्व–मूल्यांकन के साथ मिलकर सहकर्मी मूल्यांकन करते हैं। वे अपने स्वयं के प्रयासों पर प्रतिबिंबित, और विस्तार और अपने और अपने साथियों के काम पर प्रतिक्रिया का आदान–प्रदान करके इस प्रतिबिंब को समृद्ध करते हैं। अभ्यास के साथ, छात्र सीखने की प्रक्रिया में भी शामिल हो सकते हैं और अपने स्वयं के सीखने और कौशल विकास पर प्रतिबिंबित और गंभीर रूप से मूल्यांकन करने की अपनी क्षमता विकसित कर सकते हैं। जिनके तथ्य निम्नांकित उदाहरणों में शामिल हो सकते हैं:

1. **अज्ञात प्रारंभिक प्रतिक्रिया** – छात्रों से छात्र अध्ययन कार्य के कई अन्य भागों पर प्रारंभिक प्रतिक्रिया देने के लिए प्रभावी साबित हैं। यह अभ्यास शिक्षकों के समय को बचाने और छात्रों के पाठ्यक्रम सामग्री की समझ में सुधार करने के साथ–साथ ही उनके सुधार के लिए नियोजित है।
2. **दर या समीक्षा छात्र प्रस्तुतियों** – दर और एक विषय पर छात्र प्रस्तुतियों की समीक्षा करने के लिए दर्शकों का उपयोग करें, यह या तो एक कक्षा की स्थापना या एक प्रस्तुति पर दी गई पंक्ति में उपस्थित है।

2.4.4 उपलब्धि परीक्षण की तैयारी

उपलब्धि परीक्षण एक उपकरण है जो शिक्षार्थियों की उपलब्धि को मापने के लिए बनाया गया है, जो सीखने के एक निर्दिष्ट क्षेत्र में, अनुदेश की अवधि के बाद अध्ययन के लिए समर्पित है। इसलिए, शिक्षार्थियों की उपलब्धि का परीक्षण करने के उद्देश्य से विकसित यह परीक्षण इकाई, अवधि, छमाही, वर्ष आदि के अंत में दिया जा सकता है। इन परीक्षणों का उपयोग मुख्य रूप से निम्नलिखित उद्देश्यों के लिए शिक्षकों द्वारा किया जाता है:

1. यह मापने के लिए कि क्या शिक्षार्थियों ने नियोजित निर्देश के उद्देश्यों को प्राप्त किया है।
2. शिक्षार्थियों के सीखने की निगरानी करने के लिए और शिक्षण सीखने की प्रक्रिया के दौरान शिक्षार्थियों और शिक्षकों दोनों को चल रही प्रतिक्रिया प्रदान करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है।
3. शिक्षार्थियों की शैक्षणिक अध्ययन से संबंधित कठिनाइयों की पहचान करने के लिए– चाहे वह लगातार हो या आवर्ती हो।
4. ग्रेड आवंटित करने के लिए यह तैयारी उपयुक्त है।

शिक्षक शिक्षार्थियों की मदद करते हैं ताकि वे कुछ क्षमताओं, कौशल और दृष्टिकोणों को विकसित कर सकें। शिक्षण के बाद, शिक्षार्थियों के प्रदर्शन का समय–समय पर मूल्यांकन करने की आवश्यकता होती है। शिक्षार्थियों की उपलब्धि का आकलन करने के लिए शिक्षक परीक्षणों का निर्माण करते हैं।

टिप्पणी

एक उपलब्धि परीक्षण की तैयारी–

एक उपलब्धि परीक्षण तैयार करने में आवश्यक तथ्यों पर विचार करें।

1. परीक्षण की योजना

उपलब्धि परीक्षण की योजना बनाने के लिए पहले तथ्य का अर्थ एक रूपरेखा विकसित करना है। इसके लिए, हमें इसकी आवश्यकता है कि हम पाठ्यक्रम सामग्री को विभिन्न सामग्री इकाइयों में विश्लेषण करें और परीक्षण में प्रत्येक को दिए जाने वाले पाठ्यक्रम के प्रश्नों का निर्णय लें। जो निम्न प्रकारों से संबंधित किए गए हैं–

- परीक्षण किए जा रहे विभिन्न उद्देश्यों को दिए जाने वाले पाठ्यक्रम के प्रश्नों का निर्णय लें;
- प्रश्न पत्र तैयार करने में उपयोग किए जाने वाले प्रश्नों के विभिन्न रूपों को दिए जाने वाले प्रश्नों का स्वरूप का निर्णय लें;
- प्रश्नों के विभिन्न रूपों के लिए समय और अंकों को दिए जाने वाले अनुक्रमाणिकता का निर्णय लें;
- परीक्षण में कठिनाई स्तर पर दिए जाने वाले अनुक्रमाणिकता को तय करें।

2. रूपरेखा की तैयारी

रूपरेखा एक त्रि–आयामी लेखाचित्र है जिसमें प्रत्येक विषय/ईकाई और प्रत्येक उद्देश्यों के लिए अंकों के साथ विभिन्न प्रकार की वस्तुएं दिखाई जाती हैं। यह विभिन्न उद्देश्यों के लिए अंकों के संबंधित अनुक्रमाणिकता को दर्शाता है, और विषयों और विभिन्न प्रकार की वस्तुओं के रूप में पाठशाला द्वारा निर्धारित या पाठ्यक्रम में या कागजात द्वारा तय किया गया है।

उद्देश्यों	ज्ञान			समझ			अनुप्रयोग			विश्लेषण			संश्लेषण			मूल्यांकन			महायोग
	VSA	SA	L	VSA	SA	L	VSA	SA	L	VSA	SA	L	VSA	SA	L	VSA	SA	L	
																			कुल M
कुल अंक	कुल M																		
महायोग																			

VSA- अतिलघु उत्तर

SA- लघु उत्तर

L- दीर्घ उत्तर

3. परीक्षण की तैयारी

परीक्षण समाग्री या पाठ्यक्रम परीक्षण का आधार बनाते हैं। एक परीक्षण निर्माता को संबंधित विषय का अच्छा ज्ञान होना चाहिए। परीक्षण सामग्री या पाठ्यक्रम स्पष्ट, उद्देश्यों के अनुसार होना चाहिए। विभिन्न प्रकार की वस्तुएं – निबंध, लघु उत्तर और वस्तुनिष्ठ प्रकार – पर्याप्त संख्या में तैयार किया जाना चाहिए। अलग–अलग कठिनाई के पाठ्यांक भी तैयार किए जाने चाहिए। अनुभवी शिक्षक अपने निर्णय से कठिनाई के स्तर का अनुमान लगाने में सक्षम हैं।

4. कुंजी प्रबंध लेखन और परीक्षण के मूल्यांकन की तैयारी

परीक्षण मदों की तैयारी के बाद, वस्तुओं की गुणवत्ता का आकलन करने के लिए मूल योजनाओं की आवश्यकताओं के आधार पर एक समीक्षा की जाती है। यह समय परीक्षण की वैधता, विश्वसनीयता और उपयोगिता की पुष्टि करने का है।

2.4.5 गणित शिक्षण के मूल्यांकन के लिए संसाधन और तकनीक

मूल्यांकन के उपकरण और तकनीक सतत और व्यापक मूल्यांकन (सीसीई) की प्रक्रिया के महत्वपूर्ण घटक हैं। आइए गणित में सीखा प्रदर्शन का आकलन या मूल्यांकन करने के लिए उपयोग किए जाने वाले उपकरणों और तकनीकों पर चर्चा करते हैं। यहां कुछ उपकरण और शैक्षिक प्रदर्शन के प्रारंभिक और योगात्मक मूल्यांकन में तकनीकों का इस्तेमाल रहे हैं।

उपकरण मुख्य रूप से आंकड़े और जानकारी एकत्र करने के उपकरण हैं। उदाहरण के लिए प्रश्न, अवलोकन, परीक्षण, वस्तुसूची, अभिलेख या दस्तावेज़ विश्लेषण, आदि उपकरण हैं। सीसीई के संदर्भ में उपकरण, अनुप्रयोगों के लिए स्थितियों की आवश्यकता होती है। एक शिक्षक एक छात्र का निरीक्षण कर सकता है, जबकि वह लिखित परीक्षा में किसी परियोजना, कार्यभार या प्रश्नों पर बहस या काम कर रहा है।

उपकरण और तकनीकों में कुछ तथ्य निम्नलिखित हैं–

1. **प्रश्नः** प्रश्न बच्चों को क्या पता है, कल्पना और महसूस करने के लिए सबसे अधिक लागू मूल्यांकन उपकरण प्रश्न हैं। एक शिक्षक पढ़ाने के दौरान सवाल पूछकर बच्चों में सीखने में दिक्कतों के बारे में जान जाता है। एक उपकरण के रूप में प्रश्न मुख्य रूप से परीक्षाओं में उपयोग किए जाते हैं। प्रश्नों में कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं होनी चाहिए।
2. **अवलोकन** : किसी बच्चे के बारे में अवलोकन जानकारी (उनका व्यवहार) अवलोकन के माध्यम से कक्षाओं में और बाहर प्राकृतिक समायोजन में एकत्र की जा सकती है। अन्य जानकारी गतिविधियों और कार्यों के दौरान छात्रों के नियोजित और उद्देश्यपूर्ण अवलोकन के माध्यम से एकत्र की जा सकती है।
3. **परीक्षण प्रक्रिया** : परीक्षण (मौखिक) का उपयोग सामग्री या कौशल के लिए नहीं किया जाना चाहिए जिसे लिखित परीक्षा के माध्यम से परीक्षण किया जा सकता है। मौखिक परीक्षण व्यक्तिगत परीक्षण होने के नाते समूह लिखित परीक्षणों की तुलना में अधिक समय की आवश्यकता होती है। मौखिक परीक्षण सीखने की गहराई का आकलन करने के लिए सबसे उपयुक्त हैं जहां एक छात्र को लिखित अभिव्यक्ति में कठिनाई होती है।
4. **परीक्षण सूची** : परीक्षण सूची सवालों के तहत पहले परीक्षण सूची का सिद्धांत उपलब्ध कराया जाता है। हालांकि, परीक्षण सूची का उपयोग मूल्यांकन के कई अन्य क्षेत्रों में किया जा सकता है। जैसे एक छात्र आत्मविश्वास से स्कूल प्रार्थना के दौरान छात्रों को संबोधित कर सकते हैं।

परीक्षण सूची का उपयोग किया जाता है जहां उत्तर या तो 'हां' या 'नहीं' में होता है। जहां भ्रांति की संभावना बन सकती है। परीक्षण सूची देख या पूछताछ करके या दस्तावेज विश्लेषण द्वारा जानकारी एकत्र करके ही भरी जा सकती है। इसलिए, परीक्षण सूची मुख्य रूप से आंकड़ों अभिलेख और प्रलेखन का एक साधन है।

5. **क्रम निर्धारण** : क्रम निर्धारण मान रेटिंग स्केल का उपयोग उन विभिन्न परिस्थितियों या विशेषताओं का मूल्यांकन करने के लिए किया जाता है, जो विभिन्न माह में प्रस्तुत की जाती है। इसके द्वारा हम छात्रों की विशेष क्षेत्रा की कुशलतों की जाँच उस क्षेत्र में उसके व्यवहार की प्रकृति की देखकर भी कर सकते हैं।
6. **वास्तविक अभिलेख** : वास्तविक अभिलेख की उत्पत्ति और अर्थ 'उपाख्यानों', संक्षिप्त घटनाओं और प्रकरण से प्राप्त होते हैं। एक वास्तविक अभिलेख एक छात्र द्वारा बनाया लेख है। यह छात्र के जीवन में कुछ महत्वपूर्ण प्रकरण का एक अभिलेख में लिखे जाते हैं कि आचरण, सोच, कौशल और क्षमताओं पर प्रकाश डालता है।
7. **दस्तावेज विश्लेषण अभिलेखः** दस्तावेज़ विश्लेषण अभिलेख या दस्तावेज़ विश्लेषण बड़े पैमाने पर अनुसंधान में प्रयोग किया जाता है। इस तकनीक का महत्व दस्तावेजों जैसे कार्यभार परियोजनाओं, विज्ञान, भूगोल आदि में पत्रिकाओं के आधार पर छात्रों के मूल्यांकन के संबंध में है। एक तरह से इस तकनीक का इस्तेमाल निबंधात्मक के सवालों के जवाब का मूल्यांकन करने के लिए भी किया जाता है। जिसमें इनका मुख्य उद्देश्य, यहां अवधारणा और उसके स्पष्टीकरण आदि को न्यायोचित ठहराने के लिए मुख्य बिंदुओं, तर्कों, चित्रों और उदाहरणों, व्युत्पन्नों और अंकों की खोज और पहचान करता है।
8. **संविभाग** : संविभाग यह समय की अवधि में छात्रों के काम के सबूतों का संग्रह है। यह दिन के लिए दिन काम या काम का शिक्षार्थी का सबसे अच्छे भाग का चयन हो सकता है। चित्रकार और वाणिज्यिक कलाकार अक्सर चयन समितियों के समक्ष अपने कौशल और गुणवत्ता के काम को प्रदर्शित करने के लिए संविभाग का उपयोग करते हैं।
9. **अन्य विषय** : प्रतियोगिताएं क्विज़ और प्रतियोगिताएं आज इलेक्ट्रॉनिक माध्यम, विशेष रूप से टीवी में काफी आम जगह गतिविधियां हैं। इस तरह का आकलन आमतौर पर प्रभावी हो जाता है। प्रतिभागियों के ज्ञान का परीक्षण करने के अलावा, यह समूह स्पर्धाओं में सहयोग और टोली के निर्माण में मदद करता है।
10. **कार्यभार** : कार्यभार प्रसंग थीम आधारित कार्यों को कक्षा के कार्य या गृहकार्य के रूप में पूरा किया जाना है और इसे विवृत अंत या संरचित किया जा सकता है। कुछ पाठ्यपुस्तकों के बाहर संदर्भों पर आधारित हो सकता है।

2.4.6 दिव्यांग छात्रों की शैक्षणिक व्यवस्था का मूल्यांकन करना

सभी मूल्यांकन उपकरण विशेष जरूरतों वाले छात्रों के लिए उपयुक्त नहीं हो सकते हैं क्योंकि उनकी आवश्यकताएं कक्षा के बाकी छात्रों से भिन्न हो सकती हैं। छात्रों की जरूरतों के अनुसार अनुकूलन और आवास की आवश्यकता होती है और विशेष आवश्यकताओं वाले शिक्षार्थियों का मूल्यांकन करते हुए विशेषज्ञों, माता–पिता और शिक्षार्थियों की चर्चा और सहमति के बाद मूल्यांकन मानदंड एक सामूहिक कार्य के रूप में तैयार किए जाने चाहिए। इन शिक्षार्थियों को अपनी वर्तमान स्थिति का पता लगाने या प्रारंभिक और योगात्मक मूल्यांकन करने के लिए मूल्यांकन प्रक्रिया में अनुकूलन की आवश्यकता हो सकती है।

कम दृष्टि वाले शिक्षार्थियों के लिएः कम दृष्टि शिक्षार्थियों को गृहकार्य या परीक्षा पूरी करने में अधिक समय मिलता है। ये शिक्षार्थी दिन के अंत में थकान का अनुभव करते हैं जो काम की गुणवत्ता को प्रभावित कर सकता है। इसलिए, निम्नलिखित बातों को याद किया जाना चाहिए–

- मौखिक परीक्षा या किसी मुंशी को परीक्षा के उत्तर लिखने की अनुमति दें।
- अगर किसी परीक्षा में उदाहरण मांगना है, तो दिए जाने वाले उदाहरणों की संख्या को कम कर दें।
- परीक्षा पूरी करने के लिए अतिरिक्त समय प्रदान करें।
- एक से अधिक बैठकों में परीक्षा की व्यवस्था करें।
- उत्तर दिए जाने वाले प्रश्नों की संख्या कम करें।
- प्रश्नपत्र है कि बड़ा प्रिंट के होते है कम दृष्टि शिक्षार्थियों की मदद कर सकते हैं। कुछ तरीके जो प्रिंट को बढ़ा सकते हैं– मैग्नीफायर प्रदान करना; सरल, बोल्ड और बड़े पाठ, हाइलाइटिंग, प्रिंट और पेपर पृष्ठभूमि के बीच विपरीत (उदाहरणः काला पाठ, श्वेत पत्र)
- कार्यभार/परियोजना आदि की समय सीमा को वृद्धि प्रदान करें।

दृश्य हानि (अंधापन) के साथ शिक्षार्थियों के लिएः बहुत कम दृष्टि के साथ शिक्षार्थियों के साथ की तरह, पूरी तरह से नेत्रहीन शिक्षार्थियों को भी थकान का सामना करना पड़ता है, और इसलिए, परीक्षा, परियोजनाओं या कार्य को पूरा करने के लिए अतिरिक्त समय लेते हैं। इसलिए, कुछ समान विचार लागू होते हैं।

– मूल्यांकन का एक वैकल्पिक तरीका प्रदान करें (मौखिक मूल्यांकन, गैर–लिखित परीक्षा)

– एक मुंशी प्रदान करें। – मौखिक रूप से परीक्षा दें और इसे मुद्रित अभिलेख या अभिलेखों किए गए श्रृव्य के साथ अंकित करें।

– कार्य को पूरा करने के लिए अतिरिक्त समय प्रदान करें।

टिप्पणी

श्रवण हानि के साथ शिक्षार्थियों के लिए: कुछ विचार इस प्रकार हैं–

- मौखिक चिरायु की प्रश्नावली आधारित कार्यभार के लिए विकल्प प्रदान करें।
- शिक्षार्थियों को मौखिक रूप से और लिखित रूप में स्पष्ट और सरल प्रतिक्रिया प्रदान करें।
- शिक्षार्थियों को परीक्षा के दौरान एक शब्दकोश के उपयोग की आवश्यकता प्रदान करें।
- परीक्षा के निर्देश स्पष्ट और कम रखें।
- सरल भाषा का प्रयोग करें।
- शब्दजाल से बचें जब तक कि यह परीक्षा की अंतर्निहित आवश्यकताओं के लिए महत्वपूर्ण न हो।
- परीक्षा में अतिरिक्त समय प्रदान करें, विशेष रूप से प्रश्नों को पढ़ने के लिए अतिरिक्त समय। कुछ शिक्षार्थियों को उन्हें प्रश्न और निर्देश 'हस्ताक्षरित' करने की सुविधा प्रदान करें।
- एक वैकल्पिक परीक्षा प्रारूप की व्यवस्था (उदाहरण के लिए कई विकल्प सवालों के साथ लघु उत्तरीय प्रश्नों की जगह) प्रदान करें।

सीखने की विकलांगता के साथ शिक्षार्थियों के लिए: कुछ विचार इस प्रकार हैं–

- कार्यभार की समय सीमा को वृद्धि प्रदान करे।
- शिक्षार्थियों को एक प्रारंभिक प्रक्रिया के रूप में शिक्षार्थी को प्रतिक्रिया के अवसर की अनुमति देने के लिए कार्यभार का एक प्रारंभिक मसौदा प्रस्तुत करने की अनुमति दें।
- प्रश्नों को पढ़ने और विश्लेषण करने के लिए परीक्षा में अतिरिक्त समय सुनिश्चित करें, और उनके उत्तरों की योजना बनाने के लिए उपयुक्त समय प्रदान करें।
- परीक्षा प्रश्नों के भीतर कम लिखित परीक्षा निर्देश और वाक्य रखें। बुलेट बिंदु, सूचियों या विशिष्ट भागों का उपयोग करने वाले प्रश्नों की सही व्याख्या किए जाने की अधिक संभावनाओं को प्रदान करें।

'अपनी प्रगति जांचिए'

11. गणित में मूल्यांकन की भूमिका बताएं।
12. मूल्यांकन शब्द को परिभाषित करें।
13. गणित में सतत और व्यापक मूल्यांकन से क्या अभिप्राय है?
14. उपलब्धि परीक्षण कया है?
15. शिक्षाशास्त्र के अंतर्गत 'प्रश्न' शब्द को परिभाषित करें।

2.5 गणित शिक्षकों का अनुभवी या व्यवसायिक विकास

टिप्पणी

अनुभवी विकास शब्द शिक्षार्थियों की उपलब्धि बढ़ाने में शिक्षकों की प्रभावशीलता में सुधार के लिए एक व्यापक, निरंतर और गहन दृष्टिकोण को संदर्भित करता है। इस तरह के क्रियाकलापों से शिक्षकों को अपने शिक्षार्थियों की जरूरतों के साथ अपनी शिक्षण तकनीकों को संरेखित करने में मदद मिलती है और इस तरह बेहतर शिक्षार्थी प्रदर्शन सुनिश्चित होता है। हम गणित शिक्षकों के बीच व्यवसायिक या अनुभवी विकास को बढ़ावा देने के विभिन्न तरीकों जैसे संगोष्ठी, सम्मेलनों, ऑनलाइन साझाकरण में भागीदारी व्यवसायिक संगठनों की सदस्यता आदि पर चर्चा करेंगे। शिक्षार्थी सक्रिय रूप से और जानबूझकर ज्ञान के निर्माण में एक साथ शामिल है और यह उनके सामूहिक समूह के बीच वार्तालाप प्रक्रिया प्रारंभ की जाती है। गणित के शिक्षक अपनी कक्षाओं में हर समय शोधकर्ता के रूप में कार्य करते हैं। एक शिक्षक को अपने अनुभव के प्रति ईमानदार एवं उत्तरदायी होना परमावश्यक है। उसे शारीरिक एवं मानसिक रूप से प्रबल होना चाहिए। शिक्षक को अपने विषय में प्रवीणता होनी चाहिए। शिक्षक के पास प्रभावी संप्रेषण कौशल होना चाहिए। देश के विकास के लिए सुविज्ञ और कौशल कर्मिकों को अत्यधिक महत्वपूर्ण मानव पूंजी के रूप में देखा जाता है। अनुभवी शिक्षा और कौशल विकास दोनों व्यक्तियों की ज्ञान उत्पादकता में वृद्धि, नियोजक्ताओं वेफ लिए लाभप्रद और राष्ट्रीय विकास वेफ लिए जाना जाता है। अनुभवी शिक्षा का उद्देश्य विविध पाठ्यक्रमों वेफ जारिए कुशल कर्मिक तैयार करना है। ताकि मुख्य रूप से, असंगठित क्षेत्र की आवश्यकताओं को पूरा किया जा सकें और एक बड़ी संख्या में विविध पाठ्यक्रमों के जारिए छात्रों के मस्तिष्क में रोजगार हेतु भवष्यि की योजना बनाई जा सके।

2.5.1 गणित शिक्षकों के लिए व्यवसायिक या अनुभवी विकास कार्यक्रम, सेवा कार्यक्रम

व्यवसायिक या अनुभवी विकास शब्द प्रशिक्षुओं के ज्ञान के आधार और कौशल को उन्नत करने के लिए एक सेवा प्रशिक्षण को संदर्भित करता है। शिक्षकों के संदर्भ में, व्यावसायिक या अनुभवी विकास एक सेवा में प्रशिक्षण की सुविधा प्रदान करता है जिसमें शिक्षकों को अपने विषय–वस्तु ज्ञान और शैक्षणिक कौशल को उन्नत करने का अवसर मिलता है। आमतौर पर, यह एक औपचारिक परिस्थिति में है, हालांकि कई बार यह अनौपचारिक रूप से प्रदान किया जा सकता है। यह अनिवार्य रूप से शिक्षकों की क्षमता को बढ़ाने के द्वारा शिक्षण सीखने की प्रक्रिया की समग्र प्रभावकारिता में सुधार लाने के उद्देश्य से समाहित है, और अंततः, शिक्षार्थियों के प्रदर्शन के लिए भी उल्लेखित है। व्यावसायिक या अनुभवी विकास अनिवार्य रूप से शिक्षकों को उनकी सेवा अवधि के दौरान प्रदान किया जाने वाला प्रशिक्षण है ताकि पाठ्यक्रम और शिक्षाशास्त्र के विभिन्न पहलुओं में उनकी क्षमताओं को बढ़ावा दिया जा सके। शिक्षार्थियों के उज्ज्वल भविष्य को सुनिश्चित करने के लिए शिक्षकों के लिए निरंतर व्यावसायिक अनुभवी विकास के चक्र का समर्थन करना महत्वपूर्ण है।

टिप्पणी

इस तरह के व्यावसायिक या अनुभवी विकास कार्यक्रमों में आयोजन और भाग लेने से शिक्षकों को निम्नलिखित तरीकों से मदद मिलती है–

- गणित के क्षेत्र में नवीनतम घटनाओं के लिए और अधिक अभ्यस्त होते हैं।
- शिक्षकों को शिक्षार्थियों के प्रति अधिक प्रतिबद्धता विकसित करनी चाहिए।
- व्यवसायिक अनुभवों को साझा करने के लिए एक मंच बनाने में मदद मिलती है।
- शिक्षकों शिक्षण कौशल में निरंतर सुधार की दिशा में काम करते हैं।
- कभी बदलते शिक्षार्थियों के पाठ्यक्रम के लिए अनुकूल करने के लिए आवश्यक कौशल के बराबर रखने के लिए प्रेरणा मिलती है।
- शिक्षक के शिक्षार्थियों की जरूरतों के अनुसार उनकी शिक्षण पाठ्यक्रम में रूचि उत्पन्न करता है।
- रोजमर्रा के शिक्षण प्रथाओं में प्रौद्योगिकी को एकीकृत करने के लिए ज्ञान और कौशल प्राप्त होते हैं।
- ज्ञान और कौशल शिक्षार्थियों सीखने की चुनौतियों को और अधिक प्रभावी ढंग से संबोधित करने की जरूरत विकसित करने के लिए तर्क स्थापना की जानकारी मिलती है।
- बेहतर सीखने के परिणामों को प्राप्त करने के लिए नवीनतम अनुसंधान निष्कर्षों और शिक्षण प्रतिरूपों को एकीकृत करने में मदद मिलती है।
- विविध कक्षाओं में कार्रवाई अनुसंधान निष्कर्षों को लागू करने के अवसर प्राप्त होते हैं।

2.5.2 व्यवसायिक या अनुभवी विकास के लिए संगोष्ठी, कार्यशाला, सम्मेलन, ऑनलाइन साझाकरण में भागीदारी

व्यवसायिक या अनुभवी विकास में यह सुनिश्चित करने के लिए विभिन्न रणनीतियों को अपनाना शामिल है कि शिक्षक अपनी पूरी प्रगति में अपने शैक्षणिक कौशल को मजबूत करना जारी रखें। औपचारिक परिस्थिति में, व्यावसायिक या अनुभवी विकास कार्यक्रमों को अक्सर संगोष्ठी, सम्मेलनों, कार्यशालाओं आदि के माध्यम से प्रसारित किया जाता है। कभी–कभी, ऑनलाइन प्लेटफार्मों, सहकर्मी समूह चर्चाओं आदि में बातचीत के माध्यम से अनौपचारिक परिस्थितियों में व्यावसायिक या अनुभवी विकास भी होता है।

संगोष्ठी (Seminar)

संगोष्ठी एक या एक से अधिक विशेषज्ञों द्वारा औपचारिक प्रस्तुतियां हैं जिसमें प्रतिभागियों को रुचि के एक विशेष क्षेत्र पर चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। व्यवसायिक या अनुभवों का विकास के संदर्भ में, इसे एक अवसर के रूप में वर्णित किया जा सकता है जब एक शिक्षक या विशेषज्ञ और शिक्षकों का एक समूह किसी

टिप्पणी

चुने हुए विषय या विषय की जटिलताओं पर बातचीत करने और चर्चा करने के लिए मिलते हैं। एक विषय के रूप में गणित बहुत दिलचस्प होने के साथ–साथ चुनौतीपूर्ण भी है। अन्य शिक्षकों के साथ अनुभवों को साझा करना और संबंधित विषयों पर विशेषज्ञों को सुनना शिक्षकों को शिक्षण कौशल के बेहतर चिकित्सकों में विकसित होने और शिक्षार्थियों की उपलब्धि में सुधार करने में मदद करता है।

सम्मेलन (Conference)

सम्मेलनों को औपचारिक बैठकों के रूप में वर्णित किया जा सकता है जिसमें कई लोग अपने विचारों या किसी विशेष विषय से संबंधित समस्याओं के बारे में बात करने के लिए इकट्ठा होते हैं, आमतौर पर कुछ दिनों के लिए उपलब्ध कराया जाता है। यह साझा हित के मामलों पर चर्चा करने के लिए व्यक्तियों या एक से अधिक संगठनों के सदस्यों की एक बड़ी सभा होती है। शिक्षण समुदाय के सदस्यों को शामिल सम्मेलनों का आयोजन शिक्षकों को व्यावसायिक या अनुभव विकास प्रदान करने का एक प्रभावी तरीका है। यहां, सहकर्मी समूह चर्चा, कक्षा व्यवहार और कार्रवाई अनुसंधान के परिणामों के बारे में साझा अनुभव, चिंतनशील प्रथाओं को अपनाने के कुछ उपयोगी तकनीकों प्रयुक्त की जाती है जो कि अंततः भाग लेने के लिए नेतृत्व बेहतर शिक्षक बनने के लिए प्रेरित होते हैं।

ऑनलाइन साझाकरण (Online Shaing)

प्रौद्योगिकी की उन्नति के साथ, ऑनलाइन प्लेटफार्मों के माध्यम से समान विचारधारा वाले लोगों के बीच संसाधनों और अनुभवों को साझा करना एक आदर्श बन गया है। एक समुदाय के रूप में शिक्षकों के साझा हितों का एक बहुत कुछ है–शिक्षार्थियों से संबंधित मुद्दों, पाठ्यक्रम सामग्री और इसके कार्यान्वयन, शिक्षकों के लिए उपलब्ध नई प्रौद्योगिकियों, आदि। ऑनलाइन प्लेटफॉर्म जैसे ब्लॉग, फेसबुक समुदाय आदि शिक्षकों को एक सहकर्मी समूह के बीच अपने अनुभवों को साझा करने, प्रासंगिक विषयों पर विचार–विमर्श करने, ऑनलाइन संगोष्ठी में भाग लेने (साझेदारी के रूप में जाना जाता है), यहां तक कि अपने ज्ञान और कौशल आधार को समृद्ध करने के उद्देश्य से ऑनलाइन प्रशिक्षण पाठ्यक्रमों का लाभ उठाने का एक अच्छा अवसर प्रदान करते हैं। आजकल, ऑनलाइन साझेदारी ने अपने उपयोग में आसानी, बहुमुखी प्रतिभा, वैश्विक पहुंच और लागत प्रभावशीलता के कारण शिक्षण समुदाय के सदस्यों के बीच लोकप्रियता प्राप्त की है। शिक्षक अब व्यावसायिक विकास के साधन के रूप में ऑनलाइन माध्यम में प्रयोग कर रहे हैं। अधिक से अधिक छात्र अपने शिक्षण मुद्दों और/या प्रशिक्षण की जरूरत के समाधान के लिए इन ऑनलाइन संसाधनों का प्रयोग रहे हैं।

2.5.3 व्यवसायिक या अनुभवी संगठनों/संघों की सदस्यता

एक व्यवसायिक या अनुभवी संगठन (जिसे एक व्यवसायिक या अनुभवी निकाय के रूप में भी जाना जाता है), आमतौर पर एक गैर–लाभकारी संगठन है जो एक विशेष विषय तथा विषय में लगे व्यक्तियों के हितों और सार्वजनिक हित को आगे बढ़ाना चाहता है।

शिक्षा के क्षेत्र में, कई व्यवसायिक या अनुभवी संगठन हैं जो बेहतर शिक्षण–सीखने की स्थिति और शिक्षार्थियों की उपलब्धि को सुविधाजनक बनाने में सक्रिय रूप से शामिल हैं। ये व्यवसायिक या अनुभवी संगठन बहुत सारे लाभ प्रदान करते हैं जैसे– अन्य ऑनलाइन संसाधन, नेटवर्किंग के अवसर, मुफ्त या रियायती प्रकाशन, व्यापार और व्यापार मूल बातें के अपने ज्ञान को अपडेट करने या संगोष्ठी, कार्यशालाओं, सम्मेलनों और ऑनलाइन पाठ्यक्रमों के माध्यम से नए कौशल प्राप्त करने का मौका, अधिक अनुभवी शिक्षकों के साथ सलाह संबंध विकसित करना आदि। एनसीटीएम– नेशनल काउंसिल फॉर टीचर्स ऑफ मैथमेटिक्स ऐसा ही एक ऑनलाइन प्लेटफॉर्म भी है।

2.5.4 गणित शिक्षक के व्यवसायिक या अनुभवी विकास में ई–पत्रिकाओं, ई–पुस्तकालयों, ई–पुस्तकों की भूमिका

किसी भी समाज के विकास के लिए शिक्षा मुख्य स्तंभ है। शिक्षा की गुणवत्ता अद्यतन शिक्षकों पर निर्भर करती है। शिक्षकों की गुणवत्ता उनकी शिक्षा, प्रशिक्षण और ज्ञान पर निर्भर करती है। यह सही कहा जाता है कि आज की कली कल का फूल है और अगर हम इन बढ़ती कलियों का ख्याल रखना स्वाभाविक रूप से हम भविष्य में अच्छा सार के साथ सुंदर फूल होगा। सूचना प्रौद्योगिकी का आविष्कार ई–लर्निंग प्रक्रिया का समर्थन करता है। इस प्रकार ई–लर्निंग तकनीक ज्ञान के लिए एक अद्भुत उपहार है या शैक्षिक विकास के विपरीत है। यह हमें अपने क्षेत्र में नई पाठ्यक्रम प्रणालीयां प्रदान करता है और शिक्षकों को अपने व्यवसायिक कौशल को अद्यतन करने में मदद करता है। डिजिटल पुस्तकालयों, ई–पाठ्यक्रम और अंतराजाल इन सभी को पूर्व–सेवा के साथ–साथ सेवा में शिक्षक प्रशिक्षण कार्यक्रमों में अत्यधिक सहायक पाया जाता है।

सूचना प्रौद्योगिकी के आविष्कार ने शैक्षिक क्षेत्र में नई क्रांति लाई है। शिक्षार्थीयों की सीखने की शैली में बदलाव शिक्षण में आईसीटी की प्रासंगिकता साबित करता है। आज के शिक्षार्थी तकनीक के जानकार है और सीखने के लिए कई डिजीटल उपकरणों का प्रयोग करना पसंद करते हैं। आज के सीखने के रचनात्मक दृष्टिकोण का अभ्यास किया जाता है। जो शिक्षार्थियों को उनके पिछले अनुभवों के आधर पर विषयों की अपनी समझ विकसित करने में मदद करता हैं ऐसे परिदृश्य में शिक्षार्थियों को अपने स्वयं के ज्ञान और सीखने के अनुभवों के निर्माण में पूरक के कई रूप में कई स्रोतों (अधिमानतः डिजीटल) में अपूर्ति की जानी चाहिए। शिक्षार्थी विभिन्न ऑनलाइन पत्रिकाओं और पुस्कालयों तथा ऑनलाइन किताबों का प्रयोग कर सकता है।

सूचना प्रौद्योगिकी के आविष्कार ने सीखने की प्रक्रिया को आकार देने के लिए एक नया परिदृश्य और क्षमता पैदा की है, इसलिए हमें अग्रिम सूचना और संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी) से सुसज्जित अच्छी तरह से प्रशिक्षित शिक्षकों और शिक्षकों को विकसित करने की बहुत आवश्यक है। क्योंकि शिक्षकों का अस्तित्व हमारे सीखने पर निर्भर करता है कि डिजिटल पुस्तकालय (डीएल) और अप्रत्यक्ष लाइब्रेरी (वीएल), ई–विषय–वस्तु, ई–लर्निंग आदि जैसे ज्ञान उपकरणों का लाभ बताने में मदद करता है।

टिप्पणी

ई–अध्ययन

ई–अध्ययन की सबसे सरल परिभाषा सीखने की सुविधा के लिए अंतराजाल तकनीक का इस्तेमाल है। इसे पीसी, डिजिटल टीवी, डीटीएच या मोबाइल फोन के माध्यम से कई तरीकों से उपागम किया जा सकता है। जहां भी इसकी आवश्यकता होती है वहां पर प्रयोग किया जाता है। अधिक व्यवस्थित समर्थन के साथ नई पीढ़ी के शिक्षार्थियों को असीमित जानकारी प्राप्त करने का लाभ मिलता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न क्षेत्रों में ज्ञान के अध्ययन हेतु इनक तकनीकों का प्रयोग किया जाता है।

ई–सामग्री

डिजिटाइज्ड मुद्रित पाठ, लेखाचित्र आदि को डिजिटल पाठ्यक्रम के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसे ई–विषय वस्तु के रूप में भी जाना जाता है जिसे कंप्यूटर नेटवर्क जैसे अंतराजाल पर प्रेषित किया जा सकता है। इसे सीडी रोम, डीवीडी और पेन–ड्राइव आदि में प्रयोग किया जा सकता है।

शिक्षक प्रशिक्षण में डिजिटल/अप्रत्यक्ष पुस्तकाल लाइब्रेरी की भूमिकाः

डिजिटल पुस्तकालय (डीएल) बड़ी मात्रा में डिजिटल पाठ्यक्रम (ई–सामग्री) जैसे पूर्ण पाठ, पाठ्यक्रम सामग्री, ग्रंथसूची आंकड़ा आधार, पुस्तकालय सूचीपत्र, छवि और श्रृव्य–चलचित्र प्रमाण आदि को संरक्षित और प्रबंधित कर सकती हैं। इस प्रकार, यह आंकड़े, सूचना और ज्ञान के निर्माण, संग्रह, प्रसार और संरक्षण के पूर्ण जीवन चक्र के समर्थन में संग्रह, सेवाओं और लोगों को एक साथ लाने के लिए एक वातावरण प्रदान करता है। डिजिटल पुस्तकालयों का एक और महत्वपूर्ण उपयोग यह है कि विभिन्न इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों का उपयोग करके, शिक्षार्थी पाठ्य सामग्री और छवियों को आसानी से और जल्दी से खोज सकते हैं, जिन्हें सभी प्रकार के संस्थानों को मोटे तौर पर लागू किया जा सकता है। डिजिटल पुस्तकालय में शिक्षार्थी कहीं से भी इलेक्ट्रॉनिक संसाधनों का उपयोग करने की अनुमति देते हैं। दस्तावेजों की एक प्रति किसी भी संख्या में उपयोगकर्ताओं द्वारा एक साथ देखी जा सकती है। इसका उपयोग एक विशेष समय पर बड़ी संख्या में ग्राहकों के लिए पाठ्यक्रम प्रतिपादन बढ़ाने के लिए किया जा सकता है।

सूचना प्रौद्योगिकी के आविष्कार के लिए एक नया परिदृश्य और क्षमता पैदा किया है। सीखने की प्रक्रिया के लिए आकार, विशेष रूप से कैसे अपने दम पर जानने के लिए? इस प्रकार शिक्षकों, शिक्षक या छात्र अपनी शैक्षिक जरूरतों को पूरा कर सकते हैं।

सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी)। क्योंकि हमारा अस्तित्व इस पर निर्भर करता है। हमारे सीखने कैसे इस तरह के डिजिटल पुस्तकालयों (डीएल) के रूप में ज्ञान उपकरण का लाभ उठाने के लिए और अप्रत्यक्ष पुस्तकालय (वीएल), ई–विषय वस्तु, ई–लर्निंग आदि।

टिप्पणी

2.5.5 विश्वविद्यालयों के साथ पाठशालाओं की सहकार्यता

प्राथमिक/माध्यमिक पाठशालाओं और विश्वविद्यालयों के बीच संबंध दोनों समूहों के लिए फायदेमंद हो सकते हैं, लेकिन केवल तभी जब इसमें शामिल सभी के कौशल, योगदान और जरूरतों के लिए सम्मान योग्य ही।

पाठ्शाला–विश्वविद्यालयों सहयोग से विश्वविद्यालयों के लिए बेहतर तरीके से तैयार छात्रों को आगे ले जा सकते हैं।

भारतीय शिक्षा का इतिहास भारतीय सभ्यता का भी इतिहास है। भारतीय समाज के विकास और उसमें होने वाले परिवर्तनों की रूप रेखा में शिक्षा की जगह और उसकी भूमिका को निरंतर विकासशील पाते हैं। पाठ्शाला में शिक्षार्थियों का शिक्षकों द्वारा ज्ञान का एक आधर तैयार किया जाता है। तथा समाज और ज्ञान के निर्माण में पाठशाल और विश्वविद्यालय की महत्वपूर्ण भूमिका है। बुनियादी शिक्षा को समाज के लिए लाभप्रद बनाने के लिए परिषदीय पाठशाला के शिक्षकों को विश्वविद्यालयों के सहयोग से प्रशिक्षित किया जाएगा।

2.5.6 गणित शिक्षकों के व्यवसायिक या अनुभवी विकास में विचारात्मक कार्यप्रणाली की भूमिका

विचारात्मकता का कार्य स्वप्रवण का एक प्रभावी तरीका है। यह मूल रूप से व्यक्तिगत विकास को सुविधाजनक बनाने और सीखने को बढ़ाने के लिए, अपने विचारों और कार्यों का आकलन करने की एक विधि है। विचारात्मक अभ्यास में उन घटनाओं और अनुभवों को समझने, मूल्यांकन करने और व्याख्या करने के लिए आत्म–विश्लेषण का उपयोग शामिल है जिनमें हम शामिल हैं ताकि हम भविष्य में अपने कार्यों को विकसित और बेहतर बना सकें। यह एक क्रियाशीलता पर आधारित योग्यता है जिसे समय और पर्याप्त कार्य प्रणाली के साथ सीखा और बेहतर किया जा सकता है। यह लगभग अपनी चक्रीय और गतिशील प्रकृति के संदर्भ में किए गए क्रियाकलाप अनुसंधान के समान है।

विचारात्मक अभ्यास तब होता है जब शिक्षक जानबूझकर वैचारिक अनुभवों की भूमिका निभाते हैं, जो महत्वपूर्ण विश्लेषण के लिए अपने स्वयं के शिक्षण कौशल के विषय में, कक्षा में उनके कार्यों पर विचार करते हैं, और अपने शिक्षण कार्य प्रणाली में सुधार करने के लिए काम करते हैं। विचारात्मक अभ्यास शिक्षण के इन–संगठनों स्तरों पर अनुभवों का विकास का एक अत्यधिक लाभकारी रूप हो सकता है। विचारात्मक कार्यप्रणाली को अपनाकर, शिक्षक अपनी व्यक्तिगत शिक्षण शैलियों की गहरी समझ प्राप्त कर सकते हैं और इस प्रकार कक्षा में अपनी प्रभावशीलता में सुधार कर सकते हैं। शिक्षण में प्रतिबिंब को दो अलग–अलग तरीकों से काम करने पर विचार किया जा सकता है जो प्रतिबिंब में क्रियाशीलता और विचारकता में क्रियाशीलता में समाहित है। विचारकता में क्रियाशीलता में तत्काल प्रतिक्रिया शामिल है। यह त्वरित सोच और प्रतिक्रियाओं को संदर्भित करता है जो कक्षा में सिखाते हैं। उदाहरण के लिए कक्षा में

अध्यापन करते समय शिक्षक यह देख सकते हैं कि छात्र विषय को स्पष्ट रूप से समझने में विफल रहते हैं। प्रतिबिंब में क्रियाशीलता पहलू शिक्षक यह एहसास करने के लिए अनुमति देता है। इसमें किसी के स्पष्टीकरण को फिर से शब्दों में बयां करना या विषय को पढ़ाने के लिए एक अलग दृष्टिकोण अपनाना शामिल हो सकता है।

दूसरी ओर, प्रतिबिंब पर क्रियाशीलता में एक प्रतिक्रिया शामिल है। यह एक बार शिक्षक कक्षा से बाहर निकलता है और स्थिति पर फिर से विचार होता है। शिक्षक इस बात पर गहरा विचार देता है कि विद्यार्थियों को समझ में क्यों नहीं आया, स्थिति क्या थी, अन्य विकल्प क्या उपलब्ध थे, एक अलग और बेहतर परिणाम के लिए और क्या अलग किया जा सकता था?

2.5.7 एक शोधकर्ता के रूप में शिक्षक– कैसे बच्चों को गणित पढ़ना और समझाना है

हर दिन शिक्षक सक्रिय रूप से अपनी कक्षाओं में अनुसंधान में खुद को शामिल करते हैं। लगातार शिक्षार्थियों की क्षमता और माता पिता की अपेक्षाओं के बीच संतुलन प्राप्त करने के लिए प्रयास, उच्च शिक्षार्थियों उपलब्धि के लिए उपलब्ध संसाधनों का अनुकूलन, सबक वितरण सामग्री और पाठ्यक्रम की योजना, शिक्षार्थियों के प्रदर्शन का मूल्यांकन, और प्रशासकों के साथ एकजुट काम कर रहे शोधकर्ताओं के रूप में शिक्षकों की भूमिका का महत्वपूर्ण हिस्सा हैं। शोधकर्ताओं के रूप में शिक्षकों के अध्ययन के किसी भी अंय क्षेत्र में एक शोधकर्ता के बाद के रूप में अनुसंधान के एक ही कदम का पालन करते हैं। चाहे वह जानकारी एकत्र करना, योजना बनाना, आंकड़ों का विश्लेषण करना, परिणामों को प्रतिबिंबित करना, लागू करना या अपनी कक्षाओं से परे सामान्यीकरण करना, ये सभी वास्तव में व्यवस्थित लक्ष्य उन्मुख जांच यानी अनुसंधान में शामिल परिस्थिति हैं। शिक्षण समुदाय के अधिकांश सदस्यों को कक्षा आधारित अनुसंधान में खुद को शामिल, उनकी कक्षा कार्यप्रणाली और परिणामों में सुधार लाने के उद्देश्य से परिपूर्ण है। दूसरे शब्दों में, लगभग सभी शिक्षकों के अध्ययन के अपने क्षेत्र के रूप में कक्षाओं के साथ क्रियाकलापों के अनुसंधान में भाग लेते हैं।

2.5.8 क्रियाशीलता पर शोध और नई पद्धति

क्रियाशीलता शोध अनुप्रयुक्त अनुसंधान का एक रूप है जिसमें शोधकर्ता तत्काल समस्या को हल करने की दृष्टि से स्थानीयकृत समायोजन में काम करता है। नतीजतन, यह चिकित्सकों द्वारा अपने स्वयं के अभ्यास पर किया जाता है, न कि (अनुसंधान के अन्य रूपों के रूप में), किसी और के अभ्यास पर किसी के द्वारा किया जाता है। शिक्षा के क्षेत्र में शिक्षकों द्वारा कक्षा के व्यवहार में सुधार लाने के लिए नियमित रूप से कार्य अनुसंधान कार्य किया जाता है। क्रियाशीलता अनुसंधान का उद्देश्य वैज्ञानिक विधि के अनुप्रयोग के माध्यम से कक्षा की समस्याओं को हल करना है। क्रियाशीलता शोध एक चक्रीय प्रक्रिया है। यह एक सतत प्रक्रिया है, जो निरंतर प्रतिक्रिया और सुधार पर आधारित है।

यह एक चार चरण की प्रक्रिया है जिसमें शामिल निम्नलिखित तथ्य है–

- योजना
- अभिनय
- अवलोकन
- प्रतिबिंबित

क्रियाशीलता अनुसंधान में शिक्षकों की मदद निम्न रूपों में करता हैः

- उनके शिक्षण प्रदर्शन में सुधार करता है।
- शिक्षार्थियों की उपलब्धि में वृद्धि और उस स्थिति में सुधार जिसमें अभ्यास कराता है।
- कक्षा की समस्याओं की बेहतर समझ और समाधान प्राप्त कराता है।
- शिक्षार्थियों के साथ–साथ शिक्षकों के लिए फायदेमंद नई और बेहतर कक्षा कार्यप्रणाली का विकास कराता है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

16. गणित शिक्षकों के लिए व्यावसायिक या अनुभवी विकास को परिभाषित करें।
17. अनुभवी विकास के लिए संगोष्ठी की भागदरिता समझाएं।
18. विचारात्मक कार्यप्रणाली की भूमिका को संक्षेप में वर्णित करें।

2.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. हर छात्र अद्वितीय है, और वे अपनी सामर्थ्य और निर्बलता मौजूद है। हालांकि, हर साल सैकड़ों छात्रों की आम दुर्दशा अद्वितीय नहीं है। साधारण तथ्य यह है कि छात्र प्रदर्शन बेहतर नहीं हो सकता जब तक शिक्षार्थियों समझ में नहीं आता कि वे क्या गलत कर रहे है और कहां पर उन्हें अपनी तैयारी ध्यान केंद्रित करने की जरूरत है। यह एक शिक्षक के लिए प्रशंसनीय है ताकि सबसे प्रभावी शिक्षण योजना विकसित करने मैं सक्षम हो पाए।
2. गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य बालक को बौद्धिक, भावनात्मक, रचनात्मक एवं कौशलात्मक विकास करना है। गणितीय प्रमाण को अक्सर गणित का एक महत्वपूर्ण आधार माना जाता है। प्रमाण और औचित्य परिशुद्ध होने चाहिए और गणितीय तथ्यों और गुणों पर आधारित होने चाहिए।
3. सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उन कार्यों के लिए प्रयोग किया जाता है, जो कि इलेक्ट्रॉन माध्यम से प्रेषण, संगहण, निर्माण, प्रदर्शन या आदान–प्रदान में प्रयोग हो। सूचना युग के शैक्षिक उद्देश्यों को साकार करने के लिए शिक्षा में सूचना

टिप्पणी

और संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी) के आधुनिक रूपों को शामिल करने की आवश्यकता है।

4. गणितीय भाषा का कार्य यह है कि छात्र गणित में उपयोग होने वाली तकनीकी भाषा जैसे गुणा, भाग, अनुपात, इत्यादि का उपयोग कक्षा में करें।

5. मनोरंजक गणित एक ऐसा शब्द है, जिसमें गणितीय पहेली खेल, प्रश्नोत्तरी, तरकीब आदि शामिल है। इस क्षेत्र में सभी समस्याओं को उन्नत करने के लिए गणित के सिद्धांतों की आवश्यकता नहीं होती है, और इस प्रकार, मनोरंजक गणित अक्सर जिज्ञासा को आकर्षित करता है, यह गैर–गणितज्ञ, लोगों को गणित के आगे के अध्ययन को प्रेरित करते हैं।

6. रचनात्मक शिक्षण जो ज्ञान को सीखने की प्रक्रिया में की गई रचना के रूप में प्रदर्शित होता है। यह एक ऐसी रणनीति है जिसमें विद्यार्थी के पूर्व ज्ञान, आस्थाओं और कौशल का इस्तेमाल किया जाता है। रचनात्मक शैक्षणिक रणनीति के माध्यम से विद्यार्थी अपने पूर्व ज्ञान एवं सूचना के आधार पर नए किस्म की समझ विकसित करता है।

7. आईसीटी का वास्तविक अर्थ सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी से संबंधित है। इसके माध्यम द्वारा तकनीकी माध्यम की सहायता से सूचनाओं को संग्रहीत, संसाधित, प्रसारित पुर्नप्राप्त और संचारित करने में मदद करता है।

8. हमारे आस–पास बहुत सी ऐसी सामग्री है जो गणित पढ़ाने या सीखने के काम में आती है। जैसे रस्सी एवं कील का प्रयोग कर हम जमीन में श्यामपट्ट पर वृत्त या कोण बना सकते है। यह परकाल का काम करती है। माचिस की डिब्बी चॉक का डिब्बा धनाश को समझाने के काम आता है। घर में प्रयोग किए जाने वाले गोल डिब्बों से बेलन की आकृति को समझाया जा सकता है, चूड़ी से वृत्त को समझा सकते हैं।

9. प्रयोगशाला में गणितीय क्रियाकलापों द्वारा छात्रों में रचनात्मक एवं अनुसंधानात्मक दृष्टिकोण विकसित होगा।

10. किसी भौतिक तंत्र या प्रक्रम या अमूर्त तंत्र के विभिन्न अवयवों के अंर्तसंबंधों का गणित की भाषा में वर्णन उस तंत्र का गणितीय प्रतिरूप या गणितीय मॉडल कहलाता है। गणितीय प्रतिरूप प्रायः संगत तंत्र के सरलीकृत रूप होते है।

11. गणित में मूल्यांकन शिक्षार्थियों के गणितीय शिक्षण प्रक्रिया के बारे में जानकारी की पहचान करके, इकट्ठा करने और व्याख्यित करने की प्रक्रिया को संदर्भित करता है। यह जीवन को समृद्ध करता है तथा सोच को नए आयाम भी प्रदान करता है। अमूर्त सिद्धांतों के विकास के संघर्ष के दौरान यह विद्यार्थियों को तर्क–वितर्क करने और उन्हें समझने की सामर्थ्यता प्रदान करता है।

12. मूल्यांकन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा हमें ज्ञात होता है कि कोई छात्र अधिगम को किस स्तर तक सीखा है या किस स्तर तक अधिगम को ग्रहण करने में

समर्थ रहा है। यह एक ऐसी प्रक्रिया है जिसके द्वारा छात्र की प्रगति के स्तर का पता लगाया जाता है। मूल्यांकन अधिगम को सरल एवं सुगम बनाने का कार्य करता है।

13. गणित में मूल्यांकन की पूरी प्रक्रिया शिक्षा के लक्ष्यों के साथ निरंतरता सुनिश्चित करने के लिए एक पूर्ण रूपांतरण से पारित की गई है। वहां व्यवहारवादी दृष्टिकोण से रचनात्मक दृष्टिकोण के लिए एक प्रतिमान बदलाव किया गया है। गणित सीखने के वर्तमान सिद्धांतों का सुझाव है कि पाठशाला में छात्र की उपस्थिति के दौरान छात्रों के हर पहलू का आकलन करना। गणित के इन बदलते विचारों और शिक्षक और शिक्षार्थियों की बदली हुई भूमिका ने गणित के तरीकों को व्यापक बनाया है।

14. उपलब्धि परीक्षण एक उपकरण है जो शिक्षार्थियों की उपलब्धि को मापने के लिए बनाया गया है, जो सीखने के एक निर्दिष्ट क्षेत्र में, अनुदेश की अवधि के बाद अध्ययन के लिए समर्पित है। इसलिए, शिक्षार्थियों की उपलब्धि का परीक्षण करने के उद्देश्य से विकसित यह परीक्षण इकाई, अवधि, छमाही, वर्ष आदि के अंत में दिया जा सकता है।

15. प्रश्न बच्चों को क्या पता है, कल्पना और महसूस करने के लिए सबसे अधिक लागू मूल्यांकन उपकरण प्रश्न हैं। एक शिक्षक पढ़ाने के दौरान सवाल पूछकर बच्चों में सीखने में दिक्कतों के बारे में जान जाता है। एक उपकरण के रूप में प्रश्न मुख्य रूप से परीक्षाओं में उपयोग किए जाते हैं। प्रश्नों में कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं होनी चाहिए।

16. व्यावसायिक विकास शब्द प्रशिक्षुओं के ज्ञान के आधार और कौशल को उन्नत करने के लिए एक सेवा प्रशिक्षण को संदर्भित करता है। शिक्षकों के संदर्भ में, व्यावसायिक या अनुभवी विकास एक सेवा में प्रशिक्षण की सुविधा प्रदान करता है जिसमें शिक्षकों को अपने विषय–वस्तु ज्ञान और शैक्षणिक कौशल को उन्नत करने का अवसर मिलता है।

17. संगोष्ठी एक या एक से अधिक विशेषज्ञों द्वारा औपचारिक प्रस्तुतियां हैं जिसमें प्रतिभागियों को रुचि के एक विशेष क्षेत्र पर चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। व्यावसायिक या अनुभवों का विकास के संदर्भ में, इसे एक अवसर के रूप में वर्णित किया जा सकता है जब एक शिक्षक या विशेषज्ञ और शिक्षकों का एक समूह किसी चुने हुए विषय या विषय की जटिलताओं पर बातचीत करने और चर्चा करने के लिए मिलते हैं।

18. विचारात्मकता का कार्य स्वप्रवण का एक प्रभावी तरीका है। यह मूल रूप से व्यक्तिगत विकास को सुविधाजनक बनाने और सीखने को बढ़ाने के लिए, अपने विचारों और कार्यों का आकलन करने की एक विधि है। विचारात्मक अभ्यास में उन घटनाओं और अनुभवों को समझने, मूल्यांकन करने और व्याख्या करने के लिए आत्म–विश्लेषण का उपयोग शामिल है जिनमें हम शामिल हैं ताकि हम भविष्य में अपने कार्यों को विकसित और बेहतर बना सकें।

टिप्पणी

2.7 सारांश

- गणित अक्सर शिक्षार्थियों के लिए एक जटिल विषय माना जाता है। गणित के इस डर से शिक्षकों के लिए सीखने वाले गणित को सरल बनाना मुश्किल हो जाता है। शिक्षकों को समय और संसाधनों की कमी के बावजूद सीखने के गणित को शिक्षार्थियों के लिए एक आकर्षक कार्य बनाना होगा। शिक्षार्थियों में गणित विषय में उलझनों को दूर करना भी शिक्षकों के लिए एक चुनौतीपूर्ण कार्य है।
- गणित कक्षा में यह आवयक है कई छात्र सक्रिय रूप से सवाल पूछ रहे हैं एवं अपनी सामर्थ्य और निर्बलताओं को व्यक्त करते हैं। सूचना व संचार प्रौद्योगिकी उन कार्यों के लिए प्रयोग किया जाता है, जो कि इलेक्ट्रॉन माध्यम से प्रेषण, संग्रहण, निर्माण, प्रदर्शन या आदान–प्रदान में प्रयोग हो। सूचना युग के शैक्षिक उद्देश्यों को साकार करने के लिए शिक्षा में सूचना और संचार प्रौद्योगिकी (आईसीटी) के आधुनिक रूपों को शामिल करने की आवश्यकता है।
- सामर्थ्यता और निर्बलता का निर्धारण करने के लिए शिक्षक उन्हें समूह कार्य दे सकते हैं और चुपचाप निरीक्षण कर सकते हैं कि छात्र आपके प्रभाव के बिना एक दूसरे के साथ कैसे बातचीत करते हैं। छात्रों को वे पहले से ही एक संकुल समूह बनाने दें, जिसमें उन्हें अधिक शांति महसूस होगी जिससे वह अपना ध्यान केवल लक्ष्य पर केन्द्रित करते हैं।
- प्रश्नों की सटीकता पर आधारित गणित शिक्षण में सुधार हेतु यह आवश्यक है गणित के छात्रों को अपनी समस्याओं को बताने के लिए प्रेरित किया जाए। गणित शिक्षण के दौरान गणितीय भाषा का उपयोग करने के लिए छात्रों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। गणितीय भाषा का कार्य यह है कि छात्र गणित में उपयोग होने वाली तकनीकी भाषा जैसे गुणा, भाग, अनुपात, इत्यादि का उपयोग कक्षा में करें।
- मनोरंजक गणित एक ऐसा शब्द है, जिसमें गणितीय पहेली खेल, प्रश्नोत्तरी, तरकीब आदि शामिल है। इस क्षेत्र में सभी समस्याओं को उन्नत करने के लिए गणित के सिद्धांतों की आवश्यकता नहीं होती है, और इस प्रकार, मनोरंजक गणित अक्सर जिज्ञासा को आकर्षित करता है, यह गैर–गणितज्ञ, लोगों को गणित के आगे के अध्ययन को प्रेरित करते हैं।
- तंगराम एक विच्छेदन पहेली है जिसमें सात सपाट आकृतियों को शामिल किया गया है, जो कि एक विच्छेदन पहेली सात समतल बहुभुजों में स्थित है। जिसे तान या तंगराम कहा जाता है, जिसे आकार बनाने के लिए एक साथ रखा जाता है। पहेली का उद्देश्य सभी सात टुकड़ों का उपयोग करके एक विशिष्ट आकार (केवल रूपरेखा या सिल्हूट में दिया गया) बनाना है, जो अतिछादित नहीं हो सकता है।

टिप्पणी

- गणित प्रतियोगिताएं, उनके साथ संलग्न छात्रों और संगठनों के साथ मिलकर आज एक विशाल और जीवंत वैश्विक प्रसार बनाता हैं। इस प्रसार में कई भूमिकाएं हैं। प्रतियोगिताएं गणित में उच्च क्षमता वाले छात्रों की पहचान करने में मदद करती हैं।
- आईसीटी का वास्तविक अर्थ सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी से संबंधित है। इसके माध्यम द्वारा तकनीकी माध्यम की सहायता से सूचनाओं को संग्रहित, संसाधित, प्रसारित पुर्नप्राप्त और संचारित करने में मदद करता है।
- सीखने के संसाधन वह सामग्री है जो पाठयक्रम सामग्री के प्रभावी अध्ययन करने में आपकी मदद करते हैं। प्रमुख अधिगम संसाधन पाठ्य पुस्तक है जबकि कई अन्य सीखने के संसाधन भी उपलब्ध हैं। ये मानव निर्मित, तात्कालिक या प्रकृति में उपलब्ध सामग्री हो सकते है।
- गणित प्रयोगशाला एक ऐसी जगह है जहां शिक्षार्थियों को गणितीय वस्तुओं के साथ संलग्न होने, गणितीय सिद्धांतों का प्रयोग करने, गणितीय पहेली और समस्याओं को हल करने, गणितीय खेल खेलने, प्रशिक्षण पर हाथ का अनुभव करने आदि का अवसर मिलता है।
- प्रयोगशाला में गणितीय क्रियाकलापों द्वारा छात्रों में रचनात्मक एवं अनुसंधानात्मक दृष्टिकोण विकसित होगा।
- गणित में प्रयोगशाला के कार्यकलापों को प्रदर्शन और प्रयोग दो वर्गों में रख सकते हैं। प्रदर्शन में अनुदेशन क्रियाएं शामिल है जिनमें शिक्षक सिद्धांतों, संबंधों, फलनों, संक्रियाओं, उपकरणों और युक्ति का प्रयोग करता है।
- शिक्षार्थियों के लिए गणित की संकल्पनाओं के बोधगमय तथा शिक्षण–अधिगम को रुचिपूर्ण बनाने के लिए कुछ सामग्री की आवश्यकता पड़ती है। सभी प्रकार के शैक्षणिक संसाधनों के लिए विभागों पर निर्भर नहीं रहा जा सकता है। शिक्षक स्वयं अपनी आवश्यकताओं के अनुसार कुछ शिक्षण–अधिगम सामग्री विकसित करता है।
- किसी भौतिक तंत्र या प्रक्रम या अमूर्त तंत्र के विभिन्न अवयवों के अंर्तसंबंधों का गणित की भाषा में वर्णन उस तंत्र का गणितीय प्रतिरूप या गणितीय मॉडल कहलाता है। गणितीय प्रतिरूप प्रायः संगत तंत्र के सरलीकृत रूप होते है। गणितीय प्रतिरूपों का प्राकृतिक विज्ञानों एवं प्रौद्योगिकी में बहुतायत से उपयोग होता है।
- एक आरेखीय एक प्रणाली, प्रक्रिया, और घटना के ऐतिहासिक अनुक्रम का एक आरेखीय प्रतिनिधित्व है। यह दृश्य प्रतिनिधित्व का उपयोग विषय को प्रभावी और संक्षिप्त तरीके से प्रस्तुत करने, समझाने, तुलना करने या इसके विपरीत करने के लिए किया जाता है। लेखाचित्र अवधारणा गठन और शिक्षार्थियों के बीच विकास के लिए सभी विषयों में उपयोग किया जाता है।

टिप्पणी

- मूल्यांकन शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का एक अभिन्न हिस्सा है क्योंकि यह प्रगति की निगरानी और शिक्षण प्रक्रिया को एक आकार देने के लिए एक प्रमुख संसाधन है। इस बात को ध्यान में रखते हुए, गणित के व्यापक दृष्टिकोण और समाज में इसकी भूमिका के बारे में, मूल्यांकन का लक्ष्य सिर्फ पाठ्यक्रम के अंत में दी गई परीक्षा से कहीं अधिक होना चाहिए।
- गणित में मूल्यांकन की पूरी प्रक्रिया शिक्षा के लक्ष्यों के साथ निरंतरता सुनिश्चित करने के लिए एक पूर्ण रूपांतरण से पारित की गई है। वहां व्यवहारवादी दृष्टिकोण से रचनात्मक दृष्टिकोण के लिए एक प्रतिमान बदलाव किया गया है। गणित सीखने के वर्तमान सिद्धांतों का सुझाव है कि पाठशाला में छात्र की उपस्थिति के दौरान छात्रों के हर पहलू का आकलन करना।
- सतत और व्यापक मूल्यांकन (सीसीई) का उद्देश्य शिक्षार्थियों पर पाठयक्रम कार्यभार को कम करना और दोनों प्रकार की गतिविधियों में शिक्षार्थियों के प्रदर्शन के मूल्यांकन के माध्यम से शिक्षार्थियों की समग्र क्षमताओं और कौशल में सुधार करना है।
- स्व–मूल्यांकन तब होता है जब शिक्षार्थी प्रदान किए गए मानदंडों के आधार पर अपने स्वयं के प्रदर्शन का आकलन करते हैं। अभ्यास के साथ, छात्रों को निष्पक्ष रूप से प्रतिबिंबित और गंभीर रूप से अपनी प्रगति और कौशल विकास का मूल्यांकन करने के लिए सीख सकते हैं, यह एक एसी प्रक्रिया है जिसके द्वारा कोई भी छात्र स्वयं का मूल्यांकन करता है।
- सहकर्मी मूल्यांकन समान दर्जे के अन्य छात्रों द्वारा छात्रों के किए गए क्रिया कलापों का मूल्यांकन है। छात्र अक्सर औपचारिक स्व–मूल्यांकन के साथ मिलकर सहकर्मी मूल्यांकन करते हैं। वे अपने स्वयं के प्रयासों पर प्रतिबिंबित, और विस्तार और अपने और अपने साथियों के काम पर प्रतिक्रिया का आदान–प्रदान करके इस प्रतिबिंब को समृद्ध करते हैं।
- कार्यभार प्रसंग थीम आधारित कार्यों को कक्षा के कार्य या गृहकार्य के रूप में पूरा किया जाना है और इसे विवृत अंत या संरचित किया जा सकता है। कुछ पाठ्यपुस्तकों के बाहर संदर्भों पर आधारित हो सकता है।
- अनुभवी विकास शब्द शिक्षार्थियों की उपलब्धि बढ़ाने में शिक्षकों की प्रभावशीलता में सुधार के लिए एक व्यापक, निरंतर और गहन दृष्टिकोण को संदर्भित करता है। इस तरह के क्रियाकलापों से शिक्षकों को अपने शिक्षार्थियों की जरूरतों के साथ अपनी शिक्षण तकनीकों को संरेखित करने में मदद मिलती है और इस तरह बेहतर शिक्षार्थी प्रदर्शन सुनिश्चित होता है।
- संगोष्ठी एक या एक से अधिक विशेषज्ञों द्वारा औपचारिक प्रस्तुतियां हैं जिसमें प्रतिभागियों को रुचि के एक विशेष क्षेत्र पर चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है। व्यवसायिक या अनुभवों का विकास के संदर्भ में, इसे एक अवसर के रूप में वर्णित किया जा सकता है जब एक शिक्षक या विशेषज्ञ और शिक्षकों का

एक समूह किसी चुने हुए विषय या विषय की जटिलताओं पर बातचीत करने और चर्चा करने के लिए मिलते हैं।

- सम्मेलनों को औपचारिक बैठकों के रूप में वर्णित किया जा सकता है जिसमें कई लोग अपने विचारों या किसी विशेष विषय से संबंधित समस्याओं के बारे में बात करने के लिए इकट्ठा होते हैं, आमतौर पर कुछ दिनों के लिए उपलब्ध कराया जाता है।
- प्रौद्योगिकी की उन्नति के साथ, ऑनलाइन प्लेटफार्मों के माध्यम से समान विचारधारा वाले लोगों के बीच संसाधनों और अनुभवों को साझा करना एक आदर्श बन गया है। एक समुदाय के रूप में शिक्षकों के साझा हितों का एक बहुत कुछ है—शिक्षार्थियों से संबंधित मुद्दों, पाठ्यक्रम सामग्री और इसके कार्यान्वयन, शिक्षकों के लिए उपलब्ध नई प्रौद्योगिकियों, आदि।

2.8 मुख्य शब्दावली

- **सक्रिय संचारः** सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी उन कार्यों के लिए प्रयोग किया जाता है, जो कि इलेक्ट्रॉन माध्यम से प्रेषण, संग्रहण, निर्माण, प्रदर्शन या आदान प्रदान में प्रयोग होते हैं।
- **तंगरामः** तंगराम एक विच्छेदन है, जिसमें सात सपाट आकृतियों को शामिल किया गया है, जो कि एक विच्छेदन पहेली के सात समतल बहुभुजों में स्थित है जिसे तान या तंगराम कहा जाता हैं
- **गणितीय क्रियाकलापः** प्रयोगशाला में गणितीय क्रियाकलापों द्वारा छात्रों में रचनात्मक एवं अनुसंधात्मक दृष्टिकोण विकसित होगा।
- **लेखाचित्रः** यह आरेखीय प्रणाली है जो कि घटना के ऐतिहासिक अनुक्रम का एक आरेखीय प्रतिनिधित्व है।
- **सहकर्मी मूल्यांकनः** सहकर्मी मूल्यांकन समान दर्जे के अन्य छात्रों द्वारा छात्रों के किए गए क्रियाकलापों का मूल्यांकन है।
- **मूल्यांकनः** मूल्यांकन वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा हमें ज्ञात होता है कि कोई छात्र अधिगम को किस स्तर तक सीखा है या किस स्तर तक अधिगम को ग्रहण करने में समर्थ रहा हैं

2.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. शिक्षार्थियों की सामर्थ्यता और निर्बलता की पहचान को संक्षेप में बताएं।
2. जांच, प्रशंसा और संवाद के लिए शिक्षाथ्री को किस प्रकार प्रोत्साहित किया जा सकता है?

टिप्पणी

3. एक रचनात्मक कक्षा निर्माण की प्रकृिया का संक्षेप में वर्णन करें।
4. एक रचनात्मक कक्षा की क्या विशेषताएं हैं?
5. गणितीय शैक्षणिक संसाधनों के स्रोतों को समझाएं।
6. आईसीटी शब्द को परिभाषित करें।
7. गणितीय प्रयोगशाला के महत्व को समझाएं।
8. शिक्षणशास्त्र में गणितीय संघ या मंच से क्या तात्पर्य है?
9. गणितीय प्रतिरूप को परिभाषित करें।
10. प्रयोगों के आधार पर गणित में आईसीटी के उपयोगों का वर्णन करें।
11. गणितीय शिक्षण में मूल्यांकन शब्द से क्या तात्पर्य है।
12. सतत और व्यापक मूल्यांकन का संक्षेप में वर्णन करें।
13. स्व तथा सहकर्मी मूल्यांकन को परिभाषित करें।
14. एक उपलब्धि परीक्षा की तैयारी किस प्रकार संभव है?
15. गणितीय शैक्षणिक मूल्यांकन के लिए उकरण व तकनीकों को संक्षेप में बताएं।
16. अनुभवी या व्यवसायिक विकास के लिए शिक्षकों द्वारा सम्मेलन क्यों संपादित किए जाते हैं?
17. शैक्षिक प्रशिक्षण में अप्रत्यक्ष पुस्तकालय की भूमिका निर्वाहन को बताएं।
18. विश्वविद्यालयों के साथ पाठशाला की सहकारिता का वर्णन संक्षेप में करें।
19. एक शोधकर्ता के रूप में शिक्षक की भूमिका बताएं।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. गणितीय शिक्षण को प्रोत्साहन प्रदान करने के उपायों को विस्तार पूर्वक वर्णन करें।
2. रचनात्मक कक्षा प्रक्रिया एवं इसके निर्माण को विस्तारित रूप में समझाएं।
3. गणितीय शैक्षणिक संसाधनों के स्रोत और सूचना एवं संचार प्रौद्योगिकी के महत्व, उपयोग को सोउदाहरण सहित समझाए।
4. गणितीय प्रयोगशाला, संघ एवं प्रदर्शन को विस्तारपूर्वक समझाएं।
5. कम लागत में शैक्षणिक अधिगम सहायक पाठ्यक्रम तथा गणितीय प्रतिरूप, लेखाचित्रा की परिभाषा एवं उपयोग को विस्तार से वर्णित करें।
6. गणितीय शैक्षणिक व्यवस्था में आइसीटी तथा उपयुक्त माध्यमों के प्रयोगों का सोउदाहरण सहित चर्चा करें।
7. गणितीय मूल्यांकन से क्या तात्पर्य है? उदाहरण प्रस्तुत करते हुए विस्तार से व्याख्या करें।
8. दिव्यांग छात्रों की शैक्षणिक व्यवस्था के मूल्यांकन को विस्तारपूर्वक समझाएं।

टिप्पणी

9. अनुभवी या व्यवसायिक गणितीय शिक्षकों के विकास को सोउदाहरण सहित विस्तार से चर्चा करें।
10. एक शोधकर्ता के आधार पर पाठशाला में शिक्षकों की भूमिका निर्वान के बारे में विस्तार से बताएं।

2.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Anderson, Lorin W. and David R. Krathwohl. 2001. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing*: *A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: David McKay Company.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition.

Charles, H. and F. Lynwood Wren Butler. 1941. *The Teaching of Secondary Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Krathwohl, David R., Benjamin S. Bloom and Bertram B. Masia. 1964. *Taxonomy of Educational Objectives*, Handbook II. New York: David McKay Company.

Howson, Geoffrey, Christine Keitel and Jeremy Kilpatrick. 1981. *Curriculum Development in Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Dhand, Harry. 1990. *Techniques of Teaching*. New Delhi: Ashish Publishing House.

Mangal, Dr. S. K. 1997. *Teaching of Science*. New Delhi: Arya Book Depot.

Sidhu, Kulbir Singh. 1995. *Teaching of Mathematics*. New Delhi: Sterling Publishers.

Servais, W. and T. Varga. 1971. *Teaching School Mathematics*. United Kingdom: Penguin Random House Company.

इकाई 3 अध्यापन : अंकगणित और व्यवसायिक गणित सीखना

संरचना

3.0 परिचय

संख्याओं को लिखने एवं उनके नामकरण के सुव्यवस्थित नियमों को संख्या पद्धति कहते हैं इसके लिए निर्धारित प्रतीकों का प्रयोग किया जाता है जिनकी संख्या निश्चित एवं सीमित होती है। इन प्रतीकों को विविध प्रकार से व्यवस्थित करके भिन्न–भिन्न संख्याएं निरूपित की जाती है। किसी संख्या पर घात या घातांक गणितीय संक्रिया है जिसमें किसी संख्या को लगातार अपने से दो या दो से अधिक बार गुणा किया जाता है। जितने बार गुणा किया जाता है वह उस संख्या का घात कहलाता है। लघुगुणक एक ऐसी युक्ति है जिसके प्रयोग से गणनाओं को लघु किया जाता है। गणित में 1, 2, 3,... इत्यादि संख्याओं को प्राकृत संख्याओं कहते हैं। ये संख्याएं वस्तुओं की गणनाओं अथवा क्रम में रखने के लिए प्रयुक्त की जाती है। 'समुच्चय' सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को कहते हैं। वे संख्याएं जो P/q के रूप में हो, या वे संख्या जिसे P/q के रूप व्यक्त किया जा

टिप्पणी

सकता है, जहां P व q पूर्णांक हो तथा $q \neq 0$ हो परिमेय संख्याएं कहलाता है। इसके विपरीत वे संख्याएं जिन्हें P/q किया जा सकता है अपरिमेय संख्याएं कहलाती है। वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय संख्या हो सकती है। इसे संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु के साथ निरूपित किया जाता है। किसी दी गई संख्या के वर्गमूल वह संख्या होती है, जिसे संख्या में वर्ग करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। इसे प्रदर्शित करने के लिए संख्या के ऊपर '$\sqrt{}$' चिन्ह द्वारा दर्शाया जाता है। इसके अतिरिक्त दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्तक उन संख्या से छोटा नहीं होता यदि दूसरी संख्या का गुणज हो, तो उनका लघुत्तम समावर्तक सबसे बड़ी संख्या तथा महत्तम समापवर्तक सबसे छोटी संख्या होती है।

जब दो संख्याओं के बीच के संबंध को 100 से संबंधित कर दिया जाता है तो प्राप्त होने वाली संख्या प्रतिशत कहलाती है। इसके अतिरिक्त भिन्न एक ऐसी संख्या है जो किसी संपूर्ण वस्तु का कोई भाग को निरुपित किया जाता है। इसे अंश व हर के रूप में अनुपात में व्यक्त करते हैं। यदि जब किसी वस्तु का विक्रय मूल्य वस्तु के क्रय–मूल्य से अधिक होता है तो उस वसतु का लाभ होता है। इसके विपरीत वस्तु का क्रय–मूल्य वस्तु के विक्रय मूल्य से अधिक होता है तो उस वसतु पर हानि होती है। सामान्यतः कोई व्यापारी अपने ग्राहक को कोई सामान बेचता है, तो अंकित मूल्य पर छूट देता है, इसी छूट को बट्टा कहते हैं। जमा किए गए, उधार दिए गए या उधार लिए गए किसी धन पर प्रत्येक अवधि में जिस दर से ब्याज लिया या दिया जाता है उसे ब्याज कहते हैं इसके अतिरिक्त जब समय–समय पर अभी तक संचित हुए ब्याज को मूलधन में मिलाकर इस मिश्रधन की गणना की जाती है तो इसे चक्रवृद्धि ब्याज एवं इस तथ्य के विपरीत ही साधारण ब्याज उस ब्याज की गणना है जिसमें मूलधन स्वयं अपरिवर्तित रहता है साधारण ब्याज कहलाता है।

गणित की वह शाखा जिसमें आंकड़ों के संग्रह प्रस्तुतीकरण और विश्लेषण पर आंकड़े से अर्थ पूर्ण निष्कर्ष निकालने के संबंध में अध्ययन किया जाता है उसे सांख्यिकी कहते हैं। इसके अतिरिक्त किसी घटना होने की संभावना को प्रायिकता कहते हैं। सांख्यिकी, गणित, विज्ञान दर्शनशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में इसका बहुतायत से प्रयोग होता है।

ज्यामिति या रेखागणित गणित की तीन विशाल शाखाओं में से एक है इसमें बिन्दुओं, रेखाओं, तलों और ठोस चीजों के गुणस्वभाव, मापन और उनके समिष्ट में सापेक्षिक स्थिति का अध्ययन किया जाता है वह ज्यामिति के अंतर्गत आता है। किसी तल के द्विविमीय आकृति के परिमाण को क्षेत्रफल तथा सभी पदार्थ त्रिविमीय स्थान घेरते हैं इसी त्रिविमीय स्थान की मात्रा के माप को आयतन कहा जाता है।

इस इकाई में आप संख्या पद्धति, संख्या सिद्धांत, घातांक, लघुगुणक वास्तविक तथा प्राकृत संख्याएं, परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएं, वर्गमूल, लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक, प्रतिशत, लाभ और हानि, बट्टा, साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज, सांख्यिकी और प्रायिकता, त्रिकोणमिति के अंतर्गत समान्तर रेखाएं, त्रिभुज, चतुर्भुज तथा वृत्त क्षेत्र एवं आयतन के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- संख्या सिद्धांत और संख्या पद्धति के बारे में जान पाएंगे;
- संख्याओं के समुच्चयों तथा परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं से अवगत हो पाएंगे;
- प्राकृत एवं वास्तविक संख्याओं के गुणों और संक्रियाओं का अध्ययन कर पाएंगे;
- घातांक, वर्गमूल एवं लघुगुणक के बारे में जानकारी प्राप्त कर पाएंगे;
- प्राथमिक संख्या सिद्धांत, लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक की अभिधारणा कर पाएंगे;
- प्रतिशत एवं भिन्न को परिभाषित कर पाएंगे;
- लाभ, हानि और बट्टा को वर्णित कर पाएंगे;
- साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कर पाएंगे;
- सांख्यिकी एवं आंकड़ों का अवलोकन कर पाएंगे;
- प्रायिकता का विश्लेषण कर पाएंगे;
- त्रिकोमिति की गणना पर पाएंगे;
- समानान्तर रेखाओं को समझ पाएंगे;
- त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त के गुणों को जान पाएंगे;
- त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त के क्षेत्रफल की गणना कर पाएंगे;
- घन, घनाभ, शंकु, बेलन तथा गोले की गणितीय आयतन प्राप्त कर पाएंगे।

3.2 संख्या पद्धति, संख्या सिद्धान्त, घातांक और लघुगुणक

संख्या पद्धति (Number Systms): संख्याओं को लिखने एवं उनके नामकरण के सुव्यवस्थित नियमों को संख्या पद्धति कहते हैं। इसके लिए निर्धारित प्रतीकों का प्रयोग किया जाता है। जिनकी संख्या निश्चित एवं सीमित होती है। इन प्रतीकों को विविध प्रकार से व्यवस्थित करके भिन्न–भिन्न संख्याएं निरुपित की जाती है। दशमलव पद्धति द्विआधारी संख्या पद्धति संख्या पद्धति इत्या कुछ प्रमुख संख्या पद्धतियां हैं।

स्थानीय मान पर आधारित संख्या पद्धति

स्थानीय मान पर आधारित संख्या पद्धति में 2 या अधिक प्रतीक उपयोग में लाए जाते हैं। जितने प्रतीक होते हैं वही उस संख्या पद्धति का आधार कहलाता है। इन प्रतीकों का मान शून्य से लेकर b-1 तक होता है जहां b आधार है।

नीचे दो संख्याओं का उदाहरण दिया गया है, जो क्रमशः दशमलव पद्धति या द्विआधारी पद्धति में है।

$$2003_{10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$1100_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 4 = 12_{10}$$

टिप्पणी

परिचय

संख्या पद्धति : इस पद्धति की प्रत्येक भाषा में कुछ न कुछ अंक अवश्यक होते हैं जो अव्यवस्थित संख्यालेखन कदाचित ही किसी भाषा में होगा।

युग्मन पद्धति : इस पद्धति में एक और दो के लिए अंक होते हैं और 3 को 3 + 1 (अर्थात् एक युग्मन और एक), 4 को 2 + 2 इत्यादि के रूप में प्रकट करते हैं। इस पद्धति की उत्पत्ति शरीर के उन अंगों को देखकर हुई जो जोड़ी में मौजूद है।

चतुष्क पद्धति : इस में चार से अधिक संख्याएं संयोजन द्वारा इस प्रकार प्रकट की जाती हैः 5 = 4 + 1, 7 = 4 + 3, 8 = 4 + 4 या 2 × 4 इत्यादि।

षष्टक पद्धति : आगे चलकर यह पद्धति द्वादश में विकसित हुई। इसकी विशेषता यह है कि 12 के निःशेष खंड कितने ही हो जाते हैं। इसी कारण यह ज्योतिष लंबाई मापन और मुद्रा प्रणाली में प्रचलित हुई।

पंचक पद्धति : इसका संयोजन दशमक या विशंति पद्धति के साथ हो गया है। विशति पद्धति में आधार 20 है। इसके पंचक, दशमक और युग्मक पद्धतियों से संयुक्त पाया जाता है। इन पद्धतियों का आरंभ हाथ और पैर की अगंगुलियों से हुआ। इस प्रकार 5 का अर्थ हाथ, दस का अर्थ दोनों हाथ, 15 का अर्थ दोनों हाथ और एक पैर तथा 20 का अर्थ दोनों हाथ और पैर अर्थात् पूर्ण मनुष्य हो जाता है।

पंचक विंशति पद्धति : यह पद्धति, मुंडा भाषाओं, हिमालय के तिब्बती–चीनी वर्गों और काकेशिया की भाषाओं में प्रचलित है।

दशमक पद्धति :इस पद्धति के पंचक– दशमक रूप में द्वितीय पंचक की संख्याएं पांच में जोड़कर बनती है। तथा 6 = 5 + 1 या युग्मों द्वारा 6 = 3 × 2 या व्यवकलन द्वारा भी 9 = 10–1 यह पद्धति कृषि प्रधान सभ्यता में प्रचलित हुई।

संख्या पद्धति का क्रमिक विकास

द्विआधारी संख्या पद्धति : द्विआधारी दो शब्दों से मिलकर बना है द्वि+आधार अर्थात् दो आधार वाला केवल दो अंकों (0 तथा 1) को काम में लेने वाला स्थानीय मान पद्धति है। इसमें संख्या का मान निकालने का आधार 2 लिया जाता है। चूंकि दो स्थिति वाले इलेक्ट्रॉनिक द्वारा इन संख्याओं को बड़ी सरलता से निरुपित कर देते हैं इस कारण कम्प्यूटर के हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर में इस पद्धति का बहुतायत से प्रयोग होता है। सबसे पूर्व इस द्विआधारी पद्धति का वर्णन वेदों में ही प्राप्त होता है।

दशमलव पद्धति : दशमलव या दशाधार संख्या पद्धति वह संख्या पद्धति है जिसमें गिनती या गणना के लिए कुल दस अंकों या दस संकेतों (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) का सहारा किया जाता है। यह मानव द्वारा सर्वाधिक प्रयुक्त संख्या पद्धति है।

टिप्पणी

उदाहरण के लिए 645.7 दशमलव पद्धति में लिखी एक संख्या है।

600 + 40 + 5 + 0.7 =645.7

दशमलव पद्धति की सफलता के तथ्य निम्न है–

- किसी भी संख्या को निरुपित करने के लिए केवल दस संकेतों का प्रयोग तब किया जाता है जब दस अंक इतने अधिक होते हैं कि इन्हें याद न किए जा सकें तब इस पद्धति का प्रयोग किया जाता है।
- दस अंक मानव के लिए अत्यंत परिचित है क्योंकि हाथों में केवल दस अंगुलियां है और पैरों में भी दस अंगुलियां है।

संख्या सिद्धांत (Number Theory)

सामान्यतः सभी प्रकार की संख्याओं के गुणधर्मों का अध्ययन करता है किन्तु विशेषतया यह प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3.... के गुणधर्मों का अध्ययन करती है जब तक यह निश्चित रूप से न कहा जाए तब तक संख्या में कोई प्राकृतिक संख्या, धन, ऋण, पूर्ण संख्या या शून्य समझना महत्वपूर्ण न हो। संख्या सिद्धांत को महान गणितज्ञ कार्ल फ्रेंडरिंक गाऊस ने 'गणित की रानी' कहा था। संख्या सिद्धांत शुद्ध गणित की शाखा है। संख्या सिद्धांत के लिए 'अंकगणित' या 'उच्च गतिणत' शब्दों का भी प्रयोग किया जाता है।

संख्या सिद्धांत की शाखाएं

आरंभिक संख्या सिद्धांत : आरंभिक संख्या सिद्धांत में गणित की दूसरी शाखाओं का सहारा लिए बिना ही पूर्णांकों के गुणों का अध्ययन किया जाता है। इसके अंतर्गत विभाज्यता, महत्तम समपवर्तक निकालने के लिए प्रयुक्त युक्लिड का एल्गोरिद्म, संख्याओं तथा समशेषता आदि का अध्ययन किया जाता है।

वैश्लेषिक संख्या सिद्धांतः वैश्लेषिक संख्या सिद्धांत में पूर्णांकों का अध्ययन करने के लिए कैलकुलस तथा सम्मिश्र विश्लेषण की सहायता ली जाती हैं।

बीजीय संख्या सिद्धांतः बीजीय संख्या सिद्धांत में अध्ययन की जाने वाली संख्याओं का और अधिक सामान्यीकृत किया गया है। और केवल पूर्णांकों के गुणों का अध्ययन करने के स्थान पर बीजीय संख्याओं के गुणों अध्ययन किया जाता है। कोई भी संख्या जो किसी पूर्णांको गुणाकों वाले एकचरीय बहुपदीय समीकरण का मूल होता है उसे 'बीजीय संख्या' कहते हैं।

ज्यामिती संख्या सिद्धांत : इसमें सभी प्रकार की ज्यामिति का प्रयोग किया जाता है फेर्मा का अंतिम प्रमेय इसी विधि से सिद्ध किया गया था।

अभिकलनी संख्या सिद्धांत : इस सिद्धांत के अंतर्गत संख्या सिद्धांत के लिए उपयोगी एल्गोरिद्मों का अध्ययन किया जाता है। उदाहरण के लिए, अभाज्यता सिद्ध करने वाले दक्ष कलन विधियों का विकास तथा संख्याओं के अभाज्य गुणनखंउ निकालने की विधियां इत्यादि।

टिप्पणी

घातांक (Exponents)

किसी संख्या का घात लगाना एक गणितीय संक्रिया है जिसमें किसी संख्या को लगातार अपने से दो अधिक बार गुणा किया जाता है। जितने बार गुणा किया जाता है, वह उस संख्या का घात कहलाता है। घात को संख्या के ऊपर दाहिनी ओर थोड़ा हटाकर लिखा जाता है। घात क्रिया में दो संख्याएं उपयोग की जाती है जैसे आधार a और घातांक n का रूप जब n धन पूर्णांक होता है तो घातांक a का स्वयं से बार–बार गुणन को दर्शाता है।

$$a^n = \underbrace{ax \cdots a}_{n}$$

घात संकेत के अविष्कार के पहले यूनानी लोग द्वितीयघात को चतुष्कोण अथवा घात कहते थे।

घात क्रिया मूल क्रिया का विलोम है। मूल क्रिया में किसी संख्या का मूल (जैसे वर्गमूल) ज्ञात किया जाता है।

घात क्रिया के नियम

- $a^{b+c} = a^b \times a^c$
- $(ab)^c = a^c \times b^c$
- $(a^b)^c = a^{bc}$

इन्हें निम्न रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं–

1. $(ab)^n = a^n \times b^n$
2. $(ab)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
3. $a^n\, a^m = a^{n+m}$
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$

   ध्यान दें कि $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$

   उदाहरण के लिए $(2^2)^2 = 4^3 = 64$ तथा $(2^{2^3}) = 2^8 = 256$

लघुगुणक (Logarithm)

स्टॉटलैंड के निवासी जॉन नेपियर (John Napier) द्वारा प्रतिपादित लघुगुणक एक ऐसी युक्ति है जिसके प्रयोग से गणनाओं को लघु या छोटा किया जा सकता है। इसके प्रयोग द्वारा गुणा भाग जैसे जटिल प्रक्रियाओं को क्रमशः जोड़ और घटाने जैसे अपेक्षाकृत सरल प्रक्रियाओं में बदल दिया जाता है। संगठक और परिकलक के आने के पहले जटिल गणितीय गणनाओं लघुगुणक की मदद से ही की जाती है।

टिप्पणी

परिभाषा

गणित में दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगुणक वह संख्या होती है जिसको उस आधार के ऊपर घात लगाने से उसका मान दी हुई संख्या के बराबर हो जाए। उदाहरण के लिए 10 आधार पर 100.000 (एक लाख) का लघुगुणक 5 होगा क्योंकि आधार 10 पर 5 घात लगाने से उसका मान 100000 हो जाता है।

अर्थात् किसी संख्या गए x, आधार b और घातांक n के लिए

$$\log_b x = n \Leftrightarrow x = b^n$$

यह परिभाषा तभी वैद्य है जब आधार b, 1 के अलावा कोई अन्य धनात्मक वास्तविक संख्या हो, अर्थात् $b > oy, b \neq 1, x$ कोई भी धनात्मक वास्तविक संख्या हो $(x > 0)$ तथा n कोई भी वास्तविक संख्या हो $(n \in R)$ । प्रत्येक लघुगुणक का आधार होना आवश्यक है भिन्न–भिन्न आधारों के लिए एक ही संख्या के भिन्न–भिन्न लघुगुणक होते हैं। साधारणतः आधार के लिए दो संख्याओं का व्यवहार होता है। जिसके अनुसार लघुगुणक की दो प्रणालियां बनाई गई है।

प्राकृतिक प्रणाली में लघुगुणक का आधार एक अपरिमेय संख्या e मानी जाती है। इसके आविष्कारक जॉन नेपियर के नाम पर एक लघुगुणक को नेपिरीय लघुगुणक भी कहते हैं। e मान अनंत श्रेणी द्वारा व्यक्त होता है और लगभग 2.7182818 के बराबर है। उच्च गणित के सैद्धांतिक कार्य के लिए इस प्रणाली का प्रयोग किया जाता है।

दूसरी प्रणाली के अविष्कारक हेनरी ब्रिग है। इस प्रणाली में लघुगुणक का आधार 10 है। इसे 'साधारण लघुगुणक' कहते हैं। यह प्रायोगिक क्रियाकलापों में मूल्यांकन के लिए उपयुक्त है।

प्रतिलघुगुणक (Antilog) : यदि $\log a = b$ है तो b को a का प्रतिलघुगुणक कहते हैं। जैसे, $\log 39.2 = 1.5933$ तो प्रतिलघुगुणक $1.5933 = 39.2$

लघुगुणक के गुण

जब x और b दोनों धनात्मक वास्तविक संख्याएं हो तो, $\log_b(x)$ को मान एक अद्वितीयक वास्तविक संख्या होती है। आधार b का निरपेक्ष मान 0 या 1 को छाकर कुछ भी हो सकता है। आधार के रूप में प्रायः 10, e या 2 को लिया जाता है जिनके अपने–अपने उपयोग क्षेत्र है। वास्तविक और सम्मिश्र संख्याओं के लघुगुणक परिभाषित है।

निम्नलिखित परिमाण लघुगुणक की परिभाषा से सीधे ही आ जाते हैं–

$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

अतः

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

टिप्पणी

तथा

$$\log_a b^c = c.\log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b^c} = \frac{c}{n}\log_a b,$$

अंततः

$$\log_a b = \frac{1}{n}\log_a b$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_{b^a}}$$

इसलिए

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

जिसकी एक विशेष स्थिति निम्नलिखित है–

$$\text{In}10 \cdot \log_e = 1$$

उपरोक्त से निम्नलिखित सर्वसमिका प्राप्त होती है–

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$$

$$\log_b x = \log_b a \log_a x$$

तालिका 3.1 *सूत्र और उदाहरण*

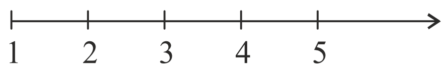
सूत्र		उदाहरण
गुणनफल	$\log_b(x, y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_3 243 = \log_3(9.27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$
भागफल	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_a y$	$\log_2 16 = \log_2 \frac{64}{4} = \log_2 64 - \log_2 4 = 6 - 2 = 4$
घात	$\log_b(x^P) = P\log_b x$	$\log_2 64 = \log_2(2^6) = 6\log_2 2 = 6$
मूल	$\log_b \sqrt[p]{x} = \frac{\log_p x}{P}$	$\log_{10}\sqrt{1000} = \frac{1}{2}\log_{10} 1000 = \frac{3}{2} = 1.5$

3.2.1 संख्याओं का समुच्चय, प्राकृत संख्याएं, परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएं, वास्तविक संख्याओं की संक्रियाएं और उनके गुण

संख्याओं का समुच्चय (Set of Number) : संख्याओं के सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को संख्याओं का समुचचय कहते हैं परिभाषा के रूप में वस्तुओं के उस समूह अथवा समाहार को समुच्चय कहते हैं जिसमें सम्मिलित प्रत्येक वस्तु किसी विशेष गुण को संतुष्ट करती हो जिसके आधार पर स्पष्ट रूप से बताया जा सके कि अमुक वस्तु उस संग्रह में सम्मिलित है अथवा नहीं है। समुच्चय संकेतन को निरुपित करने का एक अपना अलौकिक तरीका होता है। इसे निरुपित करने के लिए अंग्रेजी के बड़े अक्षर $A, B, C \ldots X, Y, Z$ काम में लिए जाते हैं और इसके अवयवों को सामान्यतः अंग्रेजी के छोटे अक्षरों $(a, b, c \ldots . x, y, z)$ अथवा संख्याओं $(1, 2, 3 \ldots .)$ से निरुपित किया जाता है उदाहरणार्थ $A = 10$ से छोटे सभी सम धनपूर्णांकों का समुच्चय अथवा $A = (2, 4, 6, 8)$ है।

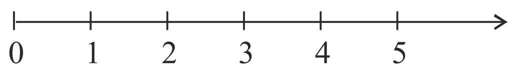
1. **प्राकृत संख्याएं (Natural Number):** वे संख्याएँ, जिससे वस्तुओं की गणना की जाती है उन्हें प्राकृत संख्याएं कहते हैं। प्राकृत संख्याएं धनात्मक होती हैं अतः 1 सबसे छोटी प्राकृत संख्या है।

   जैसेः 1, 2, 3, 4, 5............



2. **पूर्ण संख्याएं (Complement Number):** यदि प्राकृत संख्याओं में (0) शून्य को भी सम्मिलित कर लिया जाये तो उन संख्याओं को पूर्ण संख्याएं कहते हैं।

   जैसेः 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...



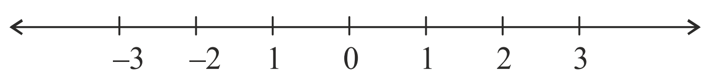
3. **पूर्णांक संख्याएं (Interger Number):** पूर्णांक संख्याओं में ऋणात्मक संख्याओं को भी सम्मिलित करने पर जो संख्याएं प्राप्त होती है उन्हें **पूर्णांक संख्याएं** कहते हैं।

   जैसेः –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5..........

   I^+ = 0, 1, 2, 3, 4, 5...... धनात्मक पूर्णांक कहते हैं।

   I^- = –1, –2, –3, –4, –5 को ऋणात्मक पूर्णाक कहते हैं।

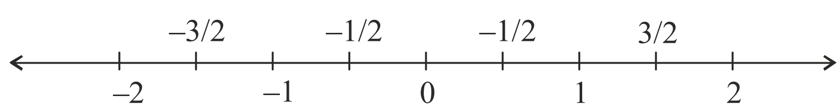
   शून्य (0) न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक होता है।



4. **परिमेय संख्याएं (Rational Number):** वे संख्याये जिन्हें P/q के रूप में दर्शाया जा सकता है **परिमेय संख्या** कहलाती है।

   जैसेः 3/5, 7/9 आदि

   प्रत्येक पूर्णांक संख्या एक परिमेय संख्या है।



   * अंश और हर

     $\frac{p}{q}$ में, पूर्णाक P अंश तथा पूर्णांक हर है। तथा $q \neq 0$ होता है।

   * किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है।

     उदाहरणार्थ, पूर्णांक –5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं।

समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक परिमेय संख्या को अलग–अलग अंशों और हरों का प्रयोग करते हुए लिखा जा सकता है।

टिप्पणी

उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ पर विचार कीजिए।

$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times 2}{3\times 2}=-\frac{4}{6}$ हम देखते हैं कि $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-4}{6}$ है।

साथ ही, $\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{10}{-15}$ है। अतः $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{10}{-15}$ है। ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हो एक दूसरे के समतुल्य (Equivalent) या तुल्य कही जाती है।

मानक रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को देखिए।

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

इन सभी परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक पूर्णांक है तथा अंश और हरों के बीच में केवल 1 सार्व गुणनखंड (Common Factor) है।

साथ ही ऋणात्मक चिह्न (–) केवल अंश में ही स्थित है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को मानक रूप (Standard form) में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएं कहा जाता है।

उदाहरण 3.1: $\frac{-45}{30}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हलः हमें प्राप्त हैः $\frac{-45}{30}=\frac{-45\div 3}{30\div 3}=\frac{-15}{10}=\frac{-15\div 5}{-10\div 5}=\frac{-3}{2}$

उदाहरण 3.2: मानक रूप में बदलिए।

(i) $\frac{36}{24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

हलः (i) 36 और 24 का महत्तम समापवर्तक 12 है।

अतः मानक रूप अंश और हर को –12 भाग देने पद प्राप्त होगा।

इस प्रकार, $\frac{36}{-25}=\frac{36\div(-12)}{-24\div(-12)}=\frac{-3}{2}$

(ii) 3 और 15 का म.स. 3 है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{-15}=\frac{-3\div(-3)}{-15\div(-3)}=\frac{1}{5}$

परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएं

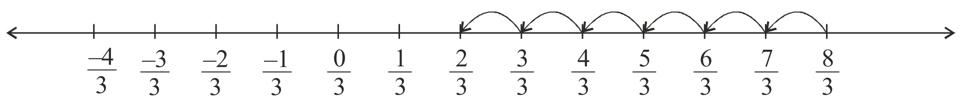
आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नो को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओ का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करें।

योग

यदि समान हर वाली दो परिमेय संख्याएं हैं, तब मान लीजिए कि $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{3}$ हो जोड़े।

हम $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञात करते हैं।

संख्या रेखा पर, हमें प्राप्त होता है।



दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी है $\frac{1}{3}$ है। अतः $\frac{7}{3}$ में $\frac{-5}{3}$ जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{7}{3}$ के बाईं और 5 कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{2}{3}$ पर पहुँचते हैं। अतः $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$ है।

आइए इसको निम्न प्रकार से करने का प्रयत्न करें

$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$

हमें वही उत्तर प्राप्त होता है।

हम अलग–अलग हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ें? भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का ;लघुत्तम समापर्तक ज्ञात करते हैं। फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञान करते हैं, जिनके हर यह ल.स. हो। इसके बाद हम इन दोनों परिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं।

उदाहरणार्थ, आइए $\frac{-7}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ को जोड़ें। 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अतः, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ और $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}+\frac{-2}{3}=\frac{-21}{15}+\frac{-10}{15}=\frac{-31}{15}$ प्राप्त किया है।

उदाहरण 3.3: योग ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{3}{7}$ और $\frac{6}{7}$

(ii) $\frac{3}{10}$ और $\frac{-7}{10}$

(iii) $\frac{-3}{11}, \frac{-2}{11}$

टिप्पणी

(iv) $\frac{7}{-16}, \frac{-3}{4}$

हल

(i) $\frac{3}{7}$ और $\frac{6}{7}$

$$\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

(ii) $\frac{3}{10}$ और $\frac{-7}{10}$

$$\frac{3}{10}+\frac{-7}{10}=\frac{3+(-7)}{10}=\frac{3-7}{10}=\frac{4}{10}=\frac{-2}{5}$$

(iii) $\frac{-3}{11}$ और $\frac{-2}{11}$

$$\frac{-3}{11}+\frac{(-2)}{11}=\frac{(-3)+(-2)}{11}=\frac{-3-2}{11}=\frac{-5}{11}$$

(iv) $\frac{7}{-16}$ और $\frac{-3}{4}$

$$\frac{7}{-16}+\frac{(-3)}{4}=\frac{7}{-16}=\frac{7\times(-1)}{-16\times(-1)}=\frac{-7}{16}$$ (मानक रूप)

म.स. 16 और 4 का 16

$$\frac{-7}{16}+\frac{-3}{4}=\frac{-7}{16}+\frac{-3\times 4}{4\times 4}=\frac{-7}{16}+\frac{(-12)}{16}=\frac{-7-12}{16}=\frac{-19}{16}$$

व्यवकलन (घटाना)

सविता ने दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर इस विधि से प्राप्त किया।

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

सविता जानती थी कि दो पूर्णांकों a और b के लिए $a-b=a+(-b)$ लिखा जा सकता है।

उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिए भी किया और ज्ञात किया कि $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$ है।

दोनों ने एक ही (समान) अंतर प्राप्त किया है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.4: ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{6}{7}-\frac{7}{5}$

3 और 5 का ल.स. 15 है।

$\frac{30-21}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ (मानक रूप)

(ii) $\frac{5}{63}$ और $\frac{-6}{7}$

हल

(i) $\frac{-6}{7}-\frac{5}{63}=\frac{-6\times 9}{7\times 9}=\frac{-54}{63}$

$=\frac{-54}{63}-\frac{5}{63}=\frac{-54-5}{63}=\frac{-59}{63}$

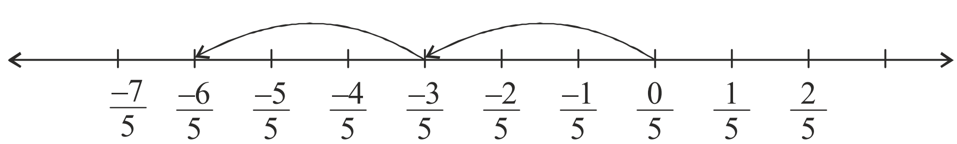
(ii) $\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$

$\frac{7}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{7}{6}-\frac{4}{6}=\frac{7-4}{6}=\frac{3}{6}$

गुणन (Multiplication)

आइए परिमेय संख्या $\frac{-3}{5}$ को 2 से गुणा करें, अर्थात् हम $\frac{-3}{5}\times 2$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा $\frac{3}{5}$ कि बाईं ओर दो कदम चलना।



हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{-6}{5}$ पर पहुँचते हैं। आइए हम इसको भिन्नों वाली विधि से ज्ञात करें।

$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँच जाते हैं।

जैसा कि हमने भिन्नों की स्थिति में किया था, हम दो परिमेय संख्याओं को निम्नलिखित विधि से गुणा करते हैं।

चरण 1 दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणा कीजिए।

चरण 2 दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणा कीजिए।

चरण 3 गुणफल को $\dfrac{\text{चरण 1 में प्राप्त परिणाम}}{\text{चरण 2 में प्राप्त परिणाम}}$ के रूप में लिखिए।

टिप्पणी

उदाहरण 3.5: (i) $\dfrac{-3}{5} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{-3 \times 2}{5 \times 7} = \dfrac{-6}{35}$ है।

(ii) $\dfrac{-5}{8} \times \dfrac{-9}{7} = \dfrac{-5 \times (-9)}{8 \times 7} = \dfrac{45}{56}$

(iii) $\dfrac{-6}{11} \times \dfrac{-7}{9} = \dfrac{(-6) \times (-7)}{11 \times 9} = \dfrac{(-2) \times (-7)}{11 \times 3} = \dfrac{14}{33}$

(iv) $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{-10}{3} = \dfrac{4 \times (-10)}{5 \times 3} = \dfrac{4 \times (-2)}{3} = \dfrac{-8}{3}$

विभाजन (Division)

भिन्नों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के बारे में हम पहले पढ़ चुके हैं। $\dfrac{2}{7}$ का व्युत्क्रम क्या है? यह $\dfrac{2}{7}$ है। हम इस अवधारणा को परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रमों के लिए भी लागू करते हैं।

इस प्रकार, $\dfrac{-2}{7}$ का व्युत्क्रम $\dfrac{7}{-2}$, अर्थात् $\dfrac{7}{-2}$ होगा।

> परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणपफल किसी संख्या का उसका व्युत्क्रम से गुणपफल सदैव 1 होता है।
>
> उदाहरणार्थ $\dfrac{-4}{9} \times \left(\dfrac{-4}{9}\right)$ का व्युत्क्रम
>
> $= = \dfrac{-4}{9} \times \dfrac{-9}{4} = 1$ है।

उदाहरण 3.6: निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\dfrac{7}{3} \div \dfrac{5}{3} = \dfrac{7}{3} \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-1} = \dfrac{7}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{5}$

(ii) $\dfrac{2}{9} \div (-4) = \dfrac{2}{9} \times (-4)^{-1} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{-4} = \dfrac{-1}{18}$ (मानक रूप)

(iii) $\dfrac{-3}{4} \div \dfrac{-3}{4} = \dfrac{-3}{4} \times \dfrac{4}{-3} = 1$

(iv) $\dfrac{-4}{5} \div 1 = \dfrac{-4}{5} \div \dfrac{1}{1} = \dfrac{-4}{5}$

हलः

(i) $\frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}=\frac{7}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

(ii) $\frac{2}{9}\times(-4)^{-1}=\frac{2}{9}\times\frac{1}{-4}=\frac{-1}{18}$ (मानक रूप)

(iii) $\frac{-3}{4}\times\frac{4}{-3}=1$

(iv) $\frac{-4}{5}\div\frac{1}{1}=\frac{-4}{5}$

अपरिमेय संख्या (Irrational Number)

अपरिमेय संख्या वह वास्तविक संख्या है जो परिमेय नहीं है अर्थात् जिसे भिन्नात्मक रूप P/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है, जहां P तथा q पूर्णांक हैं, जिसमें q अशून्य है इसलिए यह परिमेय संख्या नहीं है। औपचारिक रूप से इनका सरलतम अर्थ है कि एक अपरिमेय संख्या को एक सरल भिन्न के रूप में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है उदाहरण के लिए 2 वर्गमूल तथा π अपरिमेय संख्या है।

यह ज्ञात है कि अपरिमेय संख्याएं विशिष्ट रूप से एक ऐसी वास्तविक संख्याएं है जिनहें सतत् दशमलव रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। **कैंटर प्रमाण** के परिणामस्वरूप है कि वास्तविक संख्याएं अगणनीय है अर्थात् लगभग सभी वास्तविक संख्याएं अपरिमेय संख्याएं है।

वास्तविक संख्या (Real Number)

परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के समूह को हम कह सकते हैं कि वैसी संख्या जिसका वर्ग (Square) हमेशा धनात्मक संख्या हो उसे हम वास्तविक संख्या कहते हैं।

उदाहरण 3.7: $\frac{2}{3}$; 4.5; −9; −5.6, $5\sqrt{3}$, $\frac{75}{\sqrt{3}}$ इत्यादि

एक पद्धति जिसमें संख्या को दशमलव भिन्न तथा घातांक के रूप में व्यक्त किया जाता है।

वर्ग (Square): किसी संख्या को यदि उसी संख्या से गुणा किया जाए तो प्राप्त संख्या, उस संख्या की वर्ग संख्या कहलाती है।

उदाहरण 3.8:

1. 2 का वर्ग = 2 × 2 = 4

2. 18 का वर्ग = 18 × 10 = 324

3. 20 का वर्ग = 20 × 20 = 400

4. 32 का वर्ग = 32 × 32 = 1024

घन (Cube): किसी संख्या को यदि उसी संख्या से तीन बार गुणा किया जाए तो वह संख्या घन संख्या कहलाती है।

टिप्पणी

जैसेः 3 का घन = 3 × 3 × 3 = 27

9 का घन = 9 × 9 × 9 = 729

16 का घन = 16 × 16 × 16 = 4096

21 का घन = 21 × 21 × 21 = 9261

- लघुगणक शून्य से दो आठ का वर्गमूल के आधर है।
- आठ का वर्गमूल के लघुगणक द्वारा विभाजित बत्तीस का लघुगणक है।
- तत्व समेकन रखने वाली एक आँकड़ा संरचना जिसमें प्रत्येक का चयन एक या अधिक पूर्णांक क्रम से इस प्रकार होता है कि प्रत्येक तत्वों का पता इसके अनुक्रम संग्रह से एक सामान्य गणितीय सूत्रा द्वारा संगणित हो सकती है।

3.2.2 वर्गमूल

किसी दी गई संख्या का वर्गमूल (Power Roots) वह संख्या है जिस संख्या का वर्ग करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। वर्गमूल प्रदर्शित करने के लिए दी गई संख्या के ऊपर निम्न चिन्ह '$\sqrt{}$' लगाया जाता है। उदाहरणार्थ यदि $r^2 = x$ हो तब r को x का वर्गमूल कहते हैं।

उदाहरण 3.9: 100 का वर्गमूल 10 है क्योंकि $10^2 = 100$ ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल वास्तविक नहीं होता है। यह काल्पनिक होता है। जो संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है वह अपरिमेय वास्तविक संख्या होती है।

हल: वर्ग एवं वर्गमूल से संबंधित महत्वपूर्ण सूत्र निम्नलिखित हैं–

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $(ab)^{1/2} = \sqrt{a} \,.\, b^{1/2} = a^{1/2} . b^{1/2}$
- $\sqrt{a/b} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a\,b)^{1/2} = \sqrt{ab}$

1 को छोड़कर किसी भी संख्या का वर्ग 3 या 4 के गुणज से 1 अधिक होता है। यदि इकाई के अंक रूप में 2, 3, 7 या 8 हो तो वे निश्चित रूप से पूर्ण वर्ग नहीं होगें और उसका वर्गमूल पूर्णांक नहीं होगा।

प्राथमिक संख्या सिद्धांत (Elementary Number Theory)

प्राथमिक संख्या सिद्धांत की संख्या गणितीय पूर्णांक शाखा की विशेष प्रकृति में नियमों का अध्ययन है यह सर्वाधिक प्राचीनतम् शाखाओं में से एक है यह गणितीय मुख्य अनुसंधान पद्धति के रूप में, मुख्य समीकरण सिद्धांत से विभाज्य पूर्णांकों, अनुरूपता सिद्धांत का प्रभाव रखता है और कुछ विशेष अनिश्चित समीकरण सिद्धांत है। दूसरे शब्दों में प्राथमिक संख्या सिद्धांत, संख्या सिद्धांत का अध्ययन करने के लिए प्राथमिक एवं सरल विधि का प्रयोगात्मक सिद्धांत है। प्राथमिक संख्या सिद्धांत की खोज 2000 वर्ष पूर्व मानी जाती है, 300 ई.पू. युक्लिड प्रमुख संख्या सिद्धांत की एक आधारशिला है जिसमें अखीम रूप से कई अभाज्य संख्याएं है। इस सिद्धांत में गणित की दूसरी शाखाओं का सहारा लिए बिना ही पूर्णांकों के गुणों का अध्ययन किया जाता है। इसके अंतर्गत विभाज्यता, महत्तम समापवर्तक निकालने के लिए प्रयुक्त युक्लिड एल्गोरिद्म संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड निकालना, पूर्ण संख्याओं और समाशेषता इतयादि का अध्ययन किया जाता है।

3.2.3 लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक

दो अंको का महत्तम समापवर्त्य वो बड़ी से बड़ी संख्या जिससे दोनों संख्याएँ विभाजित हो जाए उसे उन संख्याओं का **महत्तम समावर्तक** कहते हैं।

उदाहरण 3.10: यहाँ हम 12 और 18 के महत्तम समापवर्तक पर विचार करते हैं।

हल: 12 के गुणनखण्ड हैं– 1, 2, 3, 4, 6 और 12 है।

18 के गुणनखण्ड हैं– 1, 2, 3, 6, 9 और 18 है।

12 और 18 का बड़े से बड़ा सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड = 6 है।

दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है जिससे दी गई संख्याएँ पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है।

महत्तम समावर्तक को संक्षेप में म.स.प या म.स. लिखते है।

भाग (छोटी विधि) विभाजन के गुणों का प्रयोग करते हुए हम सर्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नीचे दी गई विधि द्वारा भी निकाल सकते हैं–

उदाहरण 3.11: 72; 108 का म.स.

हल:

2	72, 108
2	36, 54
3	18, 27
3	6, 9
	2, 3

अतः म.स.प. = 2 × 2 × 3 × 3 = 36, जहाँ उत्तर 36 है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.12: 3 8 और 12 का म.स.

हल:

2	8, 12
2	4, 6
	2, 3

अतः म.स.प. = 2 × 2 = 4, है।

लघुतम समापवर्तक

अंकगणित में दो पूर्णाकों a तथा b का लघुतम समापवर्तक उससे छोटी धनात्मक पूर्णाक संख्या को कहते हैं जो a तथा b दोनों से विभातिज हो सके।

उदाहरण 3.13: यहाँ हम 4 और 6 के लघुतम समापर्तक पर विचार करते हैं।

हल: 4 के गुणज हैं: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40...... इत्यादि।

6 के गुणज हैं: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54...... इत्यादि।

4 और 6 के उभयनिष्ठ गुणज जो दोनों में हैं– 12, 24, 36.... इत्यादि होंगे।

अतः 4 और 6 का लघुतम समापवर्तक सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज 12 होगा।

दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्तक वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो दी गई प्रत्येक संख्या से पूरी–पूरी विभाजित हो जाती है।

लघुतम समापवर्तक को संक्षेप में ल.स.प या ल.स. कहते हैं।

उदाहरण 3.14: (i) 21, 36, और 63 का लघुतमक समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
(ii) 30, 45, और 60 का लघुतम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
(iii) 3 और 4 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल:

(i)

3	21
7	7
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

3	63
3	21
7	7
	1

21 = 3 × 7

36 = 2 × 2 × 3 × 3

63 = 3 × 3 × 7

अतः दी गई संख्याओं का म.स. = 2 × 2 × 3 × 3 × 7 = 252,

उत्तर = 252 है।

टिप्पणी

(ii)

3	30, 45, 60
5	10, 15, 20
2	2, 3, 4
	1, 3, 2

अतः 30, 45, 60 का ल.स. $= 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$ उत्तर = 180 है।

(iii) 3 और 4 का ल.स. ज्ञात कीजिए

3 और 4 का ल.स. = 12 क्योंकि 12, 3 व 4 दोनों से विभाजित हो जाता है। तथा 12 से छोटी कोई भी घनात्मक पूर्णांक संख्या नहीं है जो 3 और 4 दोनों से विभाजित हो सके।

'अपनी प्रगति जांचिए'

1. संख्या पद्धति क्या है?
2. युग्मन पद्धति से क्या अभिप्राय है?
3. संख्या सिद्धांत पर एक टिप्पणी दें।
4. 'घातांक' शब्द को परिभाषित करें।
5. लघुगुणक क्या है?
6. संख्याओं के समुच्चय के बारे में बताएं।

3.3 प्रतिशत

प्रतिशत शब्द लैटिन भाषा के (Percentum परसेन्ट्म) से लिया गया है। जिसका अर्थ है कि सौ या प्रत्येक सौ में से अर्थात् 100 में से 60 या $\frac{60}{100}$ है। प्रतिशत का मतलब सौवां हिस्सा है लेकिन 100% से कम हो तब 1 से कम के बराबर माना जाता है इसी तरह अगर 100% से अधिक हे तब इसे 1 से अधिक के बराबर माना जा सकता है।

3.3.1 प्रतिशत सामान्य भिन्न और दशमलव

आप दिए गए प्रतिशत को तुल्य भिन्न और दशमलव में परिवर्तित कर सकते हैं। एक प्रतिशत को सामान्य भिन्न में परिवर्तित करने के लिए इसे एक भिन्न के अंश में रख जिसका हर 100 है। अब प्रतिशत चिन्ह हटा ले और परिणामी भिन्न को हल करने के उपरांत व्यक्त करें। निम्नलिखित उदाहरण इस अवधारणा को स्पष्ट करेंगे।

प्रतिशत एक भिन्न का अंश का होता है जिसका हर 100 होता है दूसरे शब्दों में यह 100 का अंश या दशमलव भाग होता है। 2 प्रतिशत को निम्नलिखित में से किसी एक तरीके से व्यक्त किया जा सकता है।

$$2\%,\ 0.02 \text{ या } \frac{2}{100} \text{ या } \frac{1}{50}$$

प्रतिशम को जोड़, घटाव, गुणा और भाग उचित रूप से किया जाता है। एक प्रतिशत अंक को दशमलव या भिन्न रूप में लिखा जा सकता है। 50% को निम्न रूप में लिख सकते हैं–

टिप्पणी

$$0.50 \text{ या } \frac{50}{100} \text{ या } \frac{1}{2}$$

दशमलव को भिन्न को प्रतिशत रूप में लिखा जा सकता है।

$$0.25 \text{ का मतलब } 25\%, \ \frac{10}{100} \text{ या } 10\%$$

सामान्य भिन्न के उदाहरण

$$7\% = \frac{7}{100}$$

$$82\% = \frac{82}{100}$$

दशमलव पद्धति के सामान्य उदाहरण–

$$15\% = {}^{15}\!/_{100} = 0.15$$

$$100\% = {}^{100}\!/_{100} = 1.00$$

उदाहरण 3.15: एक कार शोरूम में 200 सफेद कारें, 180 लाल कारें, 120 पीली कारें और 100 भूरी कारें है शोरूम में सफेद, लाल, पीली और भूरे रंग के कारों के प्रतिशत की गणना करें।

हल : शोरूम में उपस्थित सभी कारों की संख्या $= \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times 100\% \quad = 33.4\%$

लाल कारों का अनुपात $= \frac{180}{600} = \frac{3}{10}$

$= \frac{3}{10} \times 100\%$

$= 30\%$

पीली कारों का अनुपात $= \frac{120}{600} = \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{5} \times 100\%$

$= 20\%$

भूरी कारों का अनुपात $= \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{6} \times 100\%$

$= 16.6\%$

टिप्पणी

शोरूम में उपस्थित प्रत्येक कारों का प्रतिशत क्रमश–

सफेद कार $= 33.4\%$

लाल कार $= 30.0\%$

पीली कार $= 20.0\%$

भूरी कार $= 16.6\%$

कुल योग $= 100\%$ है।

अतः हम कह सकते है कि प्रतिशत एक ऐसी भिन्न होती है। जिसका हर 100 होता है। प्रतिशत का चिह्न % है।

4% का अर्थ है 4 प्रतिशत

5% का अर्थ है 5 प्रतिशत

उदाहरण 3.16: (i) भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए: (क) $2\frac{2}{5}$

(ii) प्रतिशत को दशमलव भिन्न से बदलिए: (क) 64%

(iii) नीचे दी गई संख्याओं का प्रतिशत निकालिए–

(क) 75 रु. का 40% (ख) 45 कि.ग्रा. का 25%

(ग) 150 अंक का 75% (घ) 85 सन्तरों का 20%

हल: (i) $\frac{12}{5} \times 100 = \frac{12 \times 100}{5} = 240\%$

(ii) $64\% = \frac{64}{100} = 0.64$

(iii) (क) 40% 75 रु. का $= 75 \times \frac{40}{100} = \frac{40 \times 75}{100} = 2 \times 15 = 30$ रु.

अतः 75 रु. का 40% = 30 रु.

(ख) 45 कि.ग्रा. $25\% = 45 \times \frac{25}{100} = \frac{45 \times 25}{100} = \frac{45}{4}$

अतः 45 कि.ग्रा. का 25% $11\frac{1}{5}$ कि.ग्रा. है।

(ग) 150 अंक का 75% $= 150 \times \frac{75}{100} = 75 \times \frac{3}{2} = \frac{225}{2} = 112\frac{1}{2}$

अतः 150 अंक का 75% = $112\frac{1}{2}$ है।

(घ) 85 संतरों का $20\% = 85 \times \frac{20}{100} = 17$ संतरे है।

अतः 85 संतरों का 20% में 17 संतरें हैं।

टिप्पणी

उदाहरण 3.17: रोहन के जन्मदिन की पार्टी में उनके 90% दोस्त आए और 3 दोस्त नहीं आए। रोहन के कुल कितने दोस्त हैं।

हल: हम मान लेते हैं कि कुल दोस्त $= x$ थे

90 प्रतिशत उसके दोस्त आए थे।

रोहन के कितने प्रतिशत दोस्त नहीं आए = 100% – 90% = 10%

$$10\% \times x = 3$$

$$\frac{10}{100} \times x = 3 \qquad = \quad \frac{x}{10} = \frac{3}{1}$$

$$1 \times x = 30 \qquad x = 30 \text{ दोस्त}$$

3.3.2 लाभ और हानि

- वह मूल्य जिस पर दुकानदार सामान खरीदता है उसे **क्रय मूल्य** कहते हैं।
- वह मूल्य जिस पर वह राशि बेचता है उसे **विक्रय मूल्य** कहते हैं।

  लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य
- जब वस्तु का विक्रय मूल्य (वि.मू.) उसके क्रय मूल्य से अधिक होता है तो उसे लाभ कहते हैं अर्थात् वि.मू. > क्र.मू.
- यदि वस्तु का क्रय मूल्य (क्र.मू.) उसके वि.मू. से अधिक होता है तो हानि होती है। अर्थात् क्र.मू. > वि.मू.

  हानि = क्र.मू. – वि.मू.

  लाभ या हानि की गणना सदैव वस्तु के क्रय मूल्य पर की जाती है।
- अगर वि.मू. = क्र.मू. हो तो न हानि होती है न लाभ।,
- लाभ $\% = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$
- हानि $\% = \frac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$

उदाहरण 3.18: 400 आम रु. 125 प्रति सैंकड़ा पर खरीदे और उसे रु. 100 के हानि के साथ बेचा। 12 आमों का वि.मू. ज्ञात कीजिए।

हल क्र.मू. 100 आमों का = 125

क्र.मू. 1 आम का = $\frac{125}{100}$

क्र.मू. 400 आमों का = $\frac{125}{100} \times 400 = 500$

हानि = रुपये 100

टिप्पणी

वि.मू. 400 आमों का = क्र.मू. − हानि = 500 − 100 = 400

वि.मू. 1 आम का $=\frac{400}{400}=1$

वि.मू. 12 आमों का $=\frac{400}{400}\times 12$ = रु. 12 उत्तर

उदाहरण 3.19: एक दुकानदार ने एक साईकिल 795 रु. में खरीदी। उसे उसने 85 रु. के लाभ पर बेच दिया। उस साईकिल का वि.मू. बताइए।

हल: साइकिल का क्रय मूल्य = 795 रु.

लाभ = 85 रु.

हम जानते हैं कि वि.मू. = क्र.मू. + लाभ

साइकिल का वि.मू. = 795 + 85 रु.

= 795 + 85 = 880 रु.

उदाहरण 3.20: एक दुकानदार ने एक घड़ी खरीदी रु. 300 की और उसको 20÷ लाभ के साथ बेचा। घड़ी का वि.मू. ज्ञात कीजिए।

हल: क्र.मू. घड़ी का = रु. 300

लाभ % = 20%

लाभ $=\frac{20}{2}\%$ × 300 = $\frac{20}{100}\times 300$ = रु. 60

वि.मू. घड़ी का = क्र.मू. + लाभ

= 300 + 60 = रु. 360

उदाहरण 3.21: सोहन ने एक किताब खरीदी रु. 475 में और उसे 5% हानि हुई। किताब का क्र.मू. बताइए।

हल: हम मान लेते हैं कि किताब का क्र.मू 100 रु. है।

हानि = 5% × रु. 100 = रु. 5

वि.मू. = रु. ;100 − 5द्ध = रु. 95

वि.मू. किताब का रु. 95, तो क्र.मू. त्र रु. 100

वि.मू. किताब का रु. 1, तो क्र.मू. = रु. $\frac{100}{95}$

∴ वि.मू. किताब का रु. 475, तो क्र.मू. = रु. $\frac{100}{95}\times 475$ = रु. 500

कमीशन (Commission)

कमीशन एक प्रकार का परिश्रमिक है जो एक व्यक्ति द्वारा दूसरे व्यक्ति को दी गई सेवाओं से संबंधित है कमीशन से पूर्व या पश्चात् में प्रतिशत दर का मूल्यांकन कुल

टिप्पणी

कमीशन पर किया जाता है। जिसका भुगतान निम्नलिखित श्रेणियों के व्यक्तियों को किया जाता है।

1. एजेंट (Agent): एक एजेंट को उसके द्वारा की गई बिक्री के एक निश्चित प्रतिशत के रूप में कमीशन का भुगतान किया जाता है यह अत्यंत सरल विधि के रूप में वाणिज्य गणित (Commercial Math) में प्रयुक्त है।

- साधारण कमीशन की गणना प्रेषक द्वारा निर्धारित शर्तों के अनुसार की जाती है। आमतौर पर यह कुल बिक्री पर एक निश्चित प्रतिशत है।
- यदि माल वाहक किसी भी नुकसान को पूरा करने के लिए सहमत है तो अतिरिक्त कमीशन डेल–क्रेडियर कमीशन रूप में जाना जाता है।

उदाहरण 3.22: गोपी साइकल प्राइवेट लिमिटेड, हैदराबाद ने विजयवाड़ा के रामू को डाइनेमो के आधार पर बिक्री के लिए 30 रुपए की लागत वाले 2,000 इाइनेमो निम्नलिखित शर्तों के अधीन भेंजे जो निम्न है–

1. सामान्य मूल्य बिक्री डाइनेमो प्रति 60 रुपए
2. कसाइनी के कमीशन की गणना निम्नानुसार की जाएगी।

   (अ) सामान्य बिक्री मूल्य पर 5%

   (ब) 1 प्रतिशत अतिरिक्त कमीशन यदि बिक्री मूल्य सामान्य मूल्य से अधिक है।

   (स) बिक्री के संग्रह की गारंटी के लिए कुल बिक्री 1/2 प्रतिशत दर पर डेल–क्रेडियर कमीशन।

हल: रामू की बिक्री की सूचना इस प्रकार है–

नकद बिक्री		रुपए
500 डाइनेमो 60 रुपए पर	=	30,000
200 डाइनेमो 75 रुपए पर	=	15,000
उधार बिक्री		
400 डाइनेमो 75 रुपए पर	=	30,000
400 डाइनेमो 80 रुपए पर	=	33,000
कुल योग	=	1,07,000

कर्मचारी: एक नियोक्ता अपने कर्मचारियों को कमीशन के रूप में बिक्री पर शुद्ध लाभ का एक निश्चित प्रतिशत प्रोत्साहन के रूप में दे सकता है। यह कर्मचारी के प्रदर्शन के आधार पर एक निश्चित प्रतिशत या श्रेणी बद्ध पैमाने के रूप में हो सकता है।

बट्टा (Discount): बट्टा को छूट, कटौती या अपहार भी कहते हैं जब निर्माता अपने ग्राहक को अंकित मूल्य अथवा विक्रय मूल्य पर एक निश्चित दर से कटौती देता है तो उस छूट या कटौती को व्यापारिक बट्टा कहा जाता है।

टिप्पणी

बट्टा का समीकरण–

$$\text{बट्टा राशि} = \text{अंकित मूल्य} \times \frac{\text{बट्टा दर}}{100}$$

$$\text{जहां अंकित मूल्य} = \text{बट्टा राशि} \times \frac{100}{\text{बट्टा दर}}$$

$$\text{प्रतिशत बट्टा} = \text{बट्टा राशि} \times \frac{100}{\text{अंकित मूल्य}}$$

बट्टा के दो प्रकार होते हैं–

1. **व्यापारिक बट्टा :** माल के विक्रय पर माल के अंकित मूल्य में जो छूट दी जाती है उस छूट को व्यापारिक बट्टा कहते हैं।
2. **नगद बट्टा :** ग्राहकों अथवा विक्रेता से तुरंत अथवा एक निश्चित अवधि के अंदर नगद भुगतान प्रापत करने के उद्देश्य से जो छूट दी जाती है उसे नकद बट्टा कहते हैं।

3.3.3 साधारण ब्याज

हम जानते हैं कि हम सब अपना धन बैंक में जमा करते हैं। बैंक इस जमा राशि पर प्रति वर्ष कुछ ब्याज देती है। बैंक द्वारा दी गई राशि को **ब्याज** (Interest) कहते हैं।

जो धन किसी से उधर लिया जाता है या किसी को उधार दिया जाता है या बैंक में जमा किया जाता है, उसे **मूलधन** (Principal Amount) कहते हैं।

मूलधन में जब ब्याज भी जुड़ जाता है तो उसे **मिश्रधन** (Compound Money) कहते हैं।

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

मूलधन = मिश्रधन – ब्याज

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

उदाहरण 3.23: (क) साधारण ब्याज $= \dfrac{400 \times 3 \times 5}{100} = 60$

(ख) साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए–

समय = 146 दिन $= \dfrac{146}{365}$ दिन

हल: मूलधन = रु. 500 दर $= 15\frac{1}{2}\% = \frac{31}{2}\%$

साधारण ब्याज $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$

टिप्पणी

$$= \frac{500 \times 31 \times 146}{100 \times 2 \times 365} = 31$$

उदाहरण 3.24: रकम = साधारण ब्याज + मूलधन

मूलधन = रु. 1500

रकम = रु. 2400

समय = 4 साल

अब इसमें दर ज्ञात कीजिए।

हलः साधारण ब्याज = रकम – मूलधन

= 2400 – 1500 = 900

$$\text{दर} = \frac{100 \times \text{साधारण ब्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$= \frac{100 \times 900}{1500 \times 4} = 15 \quad = \quad 15\%$$

उदाहरण 3.25: गीता ने बैंक से रु. 50,000 उधर लिया। 1 मार्च 2014 को और गीता ने रु. 53,150 6 अक्टूबर 2014 को वापस किया। बैंक ने कितना दर लगाया?

हलः मूलधन = रु. 50,000

रकम = रु. 53,150

साधारण ब्याज = 53,150 – 50,000 = रु. 3,150

$$\text{समय} = \frac{219}{365} = \frac{3}{5} \text{ साल}$$

दर = ?

$$\text{दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$= \frac{3{,}150 \times 100 \times 5}{50{,}000 \times 3} = \frac{105}{10}\%$$

दर = 10.5%

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

जब किसी मूलधन के साथ ब्याज जुड़कर उस प्राप्त मिश्रधन पर भी बयाज लगाया जाता है, तो वही ब्याज ही चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]$ समय – मूलधन

टिप्पणी

उदाहरण 3.26: मूलधन = 6250 रु. का 8% ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए?

हल: चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]^{T}$ – मूलधन

$$= 6250\left[1+\frac{8}{100}\right]^{2} - 6250$$

$$= 6250\left[\frac{100+8}{100}\right]^{2} - 6250$$

= 8410 – 6250 = रु. 2150 उत्तर 2150 है।

उदाहरण 3.27: कोई धन 5 साल में 6 गुना तो स्वयं अपने से 36 गुना होने में कितना साल लगेगा?

हल: 5 साल = 6 गुना

1 साल = 36 गुना – 6^2 गुना

अर्थात् 5 × 2 साल = 36 गुना

इसलिए उत्तर 10 साल आएगा।

उदाहरण 3.28: कोई मूलधन 5 साल में 3 गुना हो जाता है तो 12500 रु. उसी चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 साल में कितने गुना हो जाएगा।

हल: 5 साल = 3 गुना

15 साल = 5 × 3 साल = 3^3 गुना अर्थात् 9 गुना हो जाएगा।

और वह धन बढ़कर 12500 × 9 = 112500 रु. हो जाएगा।

उदाहरण 3.29: चक्रवृद्धि दर से कोई धन 2 वर्ष में 8820 रु तथा 3 वर्ष में 9261 हो जाता है चक्रवृद्धि ब्याज की दर तय कीजिए?

हल: 2 वर्ष में मिश्रधन = $P\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]^{2} = 8820\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]^{2}$ ... (1)

3 वर्ष में मिश्रधन = $P\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]^{2} = 9261\left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right]^{2}$ ... (2)

समीकरण (2) में समीकरण (1) का भाग देने पर

$$\Rightarrow \quad \left[1+\left(\frac{\text{दर}}{100}\right)\right] = \frac{9261}{8820}$$

$\Rightarrow$ दर = 105 – 100 = 5% उत्तर

टिप्पणी

'अपनी प्रगति जांचिए'

7. प्रतिशत शब्द को परिभाषित करें।
8. क्रयम मूल्य को परिभाषित करें।
9. कमीशन क्या है?
10. बट्टा से क्या अभिप्राय है?
11. चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में बताएं।

3.4 सांख्यिकी

- सांख्यिकी के (Statistics) अन्तर्गत हम आँकड़ों को इकट्ठा करना प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण करना तथा निर्वचन करने का कार्य करते हैं।
- एक निश्चित उद्देश्यों से एकत्रित किये गये तथ्यों या अंकों को आंकड़े (Data) कहते हैं।
- दिये गये आंकड़ों में कोई प्रेक्षण कितनी बार आता है, यह उस प्रेक्षण की बारम्बारता कहलाती है।
- वर्ग अंतराल वह वर्ग (Group) होते हैं, जिसमें सभी प्रेक्षण बंटे होते हैं।
- वर्ग अंतराल 20-30 में 30 को वर्ग अंतराल की उच्चसीमा तथा 20 को निम्न सांग कहते हैं।
- वर्ग अंतराल का मध्य मान वर्ग चिन्ह कहलाता है। उदाहरण के लिए वर्ग 20-30 का वर्ग चिन्ह $\frac{20+30}{02} = 25$ है।
- वर्ग चिन्ह $P(E) = \frac{\text{प्रामिकता अनुकूल परिणामें की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$

सांख्यिकीय सिद्धांतों के अनुप्रयोग : प्रतिचयन एवं आंकड़ों का विश्लेषण

सांख्यिकी का प्रयोग साधारणतया दो अर्थों में किया जाता है। पहले अर्थ में यह किसी क्षेत्र से इकट्ठा किए गए संख्यात्मक आंकड़ों (Numerical Data) के विवरण को स्पष्ट करता है। इस अर्थ में जनसंख्यात्मक आंकड़ों, राष्ट्रीय आय से संबंधित विशेषताओं, अपराध अथवा किसी अन्य विशेषता से संबंधित आंकड़ों आदि को सांख्यिकी से संबंधित माना जाता है।

दूसरे अर्थ में सांख्यिकी को गणितीय प्रविधि के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसके अनुसार सांख्यिकी का तात्पर्य अनेक विधियों की सहायता से आंकड़ों का संकलन, विश्लेषण सारणीयन आदि करना है, ताकि आंकड़ों को सरल, सुव्यवस्थित एवं बोधगम्य बनाया जा सके। परंतु इन सभी पद्धतियों के द्वारा समंकों या आंकड़ों के सभी गुण ज्ञात नहीं होते हैं क्योंकि ये पद्धतियां सांख्यिकीय विश्लेषण की आरंभिक स्थिति में ही उपयोगी होती हैं। अतः इस कार्य हेतु सांख्यिकीय विधियां उपयोग में लाई जाती हैं।

सांख्यिकीय विधियों में माध्य, माध्यिका व बहुलक विधियों को सामान्यतया प्रयोग में लाया जाता है। ये सभी विधियां सांख्यिकी माध्य कहलाती हैं।

टिप्पणी

सांख्यिकीय सिद्धांत (प्रविधियां) एवं अनुप्रयोग

सुप्रसिद्ध अंक शास्त्री डा. बाउले (A L Bowley) ने लिखा है कि ''सांख्यिकी को वास्तव में माध्यों का विज्ञान कहा जाता है।'' यहां हम अनुसंधानकर्ताओं द्वारा प्रयुक्त की जाने वाली आधारभूत सांख्यिकीय प्रविधियों का वर्णन करेंगे। ये प्रविधियां हैं–

(क) माध्य

(ख) माध्यिका

(ग) बहुलक।

(क) माध्य (Mean)

सांख्यिकीय प्रविधियों में समांतर माध्य या मध्यमान सबसे अधिक प्रचलित तथा लोकप्रिय है। इसका साधारण भाषा में आशय 'औसत' होता है।

अर्थ–किसी श्रेणी या शृंखला के समस्त पदों के योग को पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त संख्या को माध्य कहते हैं।

उदाहरणार्थ– यदि पांच व्यक्तियों की आय क्रमशः 100, 150, 200, 250, 300 रुपए प्रतिदिन है तथा इस शृंखला के समस्त पदों का योग (100 + 150 + 200 + 250 + 300) = 1000 रुपये को कुल पदों की संख्या 5 से भाग देने पर (1000 / 5 = 200) प्राप्त संख्या 200 रुपये इस श्रेणी का माध्य होगा।

- **माध्य के गुण एवं विशेषताएं**

1. माध्य निकालना व समझना अन्य विधियों की तुलना में अत्यंत सरल होता है।
2. यह श्रेणी के प्रत्येक पद के प्राप्तांक से प्रभावित होता है।
3. मध्यमान से सभी प्राप्तांकों के विचलन का योग शून्य होता है।
4. माध्य किसी श्रेणी की एक ऐसी संख्या है जो पूरे समूह की विशेषताओं को व्यक्त करती है एवं पूरे समूह का प्रतिनिधित्व करती है।
5. मध्यमान पर अंकगणित एवं बीजगणित के नियम लागू होते हैं। अतः आनुमानिक सांख्यिकी की गणना करने के लिए यह सर्वाधिक उपयोगी है।
6. मध्यमान आवृत्ति वितरण का संतुलन बिंदु है क्योंकि इससे गुणात्मक एवं ऋणात्मक दोनों ओर से विचलन का योगमूल्य शून्य होता है।
7. इसकी शुद्ध रूप से गणना सभी स्थितियों में सुगम होती है।
8. इसका अत्यंत व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है।

- **माध्य की गणना विधि**

1. **जब आंकड़े अव्यवस्थित हों**–

   जब आंकड़े अव्यवस्थित या असमूहीकृत हों तो मध्यमान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है।

टिप्पणी

सूत्र M या $\bar{X} = \Sigma X/N$

यहां $\bar{X}$ मध्यमान (M)

ΣX (सिग्मा एक्स) = प्राप्तांकों का योग

X = किसी प्राप्तांक को प्रतीक रूप में लिखना

N = प्राप्तांकों की संख्या

उदाहरण 3.30: नीचे 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिए हैं। इनका माध्य ज्ञात करो।

प्राप्तांक – 15, 20, 35, 25, 20,15, 40, 45, 30, 25

हल: प्राप्तांकों का योग –

$\Sigma(X) = 15+20+35+25+20+15+40+45+30+25 = 270$

प्राप्तांकों की संख्या–15,20,35,25,20,15,40,45,30,25 = 10

$M = \Sigma X/N = 270/10 = 27$

माध्य – 27 अंक

2. **जब आंकड़े व्यवस्थित हों**–व्यवस्थित आंकड़ों का मध्यमान ज्ञात करने के लिए दो प्रकार की विधि का प्रयोग किया जाता है–

(i) दीर्घ विधि का प्रयोग एवं

(ii) लघु विधि का प्रयोग।

(i) **दीर्घ विधि का प्रयोग**

सूत्र–$M = \Sigma fnN$ या $M = \Sigma fn/\Sigma f$

यहां X = वर्गांतरों का मध्य बिंदु

f = वर्गांतर की आवृत्ति

Σfn = मध्य बिंदुओं का उनकी आवृत्ति से गुणा करने के बाद प्राप्त योग

$\Sigma f = N$ = आवृत्तियों का योग

इस विधि से माध्य ज्ञात करने के निम्नलिखित चरण हैं–

1. सर्वप्रथम वर्गांतर ज्ञात करना जिससे कि प्रत्येक वर्ग का मध्य बिंदु ज्ञात किया जा सके।
2. प्रत्येक वर्गांतर का मध्य बिंदु ज्ञात कर उसी वर्गांतर के सामने अलग स्तंभ में लिखना।
3. Σfx ज्ञात करना अर्थात प्रत्येक वर्गांतर के मध्यबिंदु (X) का उसी वर्गांतर की आवृत्ति f की संख्या से गुणा करना ताकि इस गुणनफल को fX स्तंभ में लिखकर अंत में योग ज्ञात करना।
4. Σfx को N या Σf से भाग देना, इस प्रकार प्राप्त हुआ भागफल माध्य होता है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.31: निम्न सारणी का माध्य ज्ञात करें –

वर्गांतर	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
आवृत्ति	5	7	8	10	6	9

हल–दीर्घ विधि द्वारा माध्य निकालने के लिए निम्न सारणी का प्रयोग किया जाता है–

वर्गांतर	**आवृत्ति**	**मध्यबिंदु X**	**fx**
0–10	5	5	25
10–20	7	15	105
20–30	8	25	200
30–40	10	35	350
40–50	6	45	270
50–60	9	55	495
	N = 45		$(\Sigma fx) =$ 1445

सूत्र $M = \Sigma fx/N = 1445/45 = 32.11$ (लगभग)

अतः माध्य = 32.11

(ii) **लघु विधि**–दीर्घ विधि से माध्य ज्ञात करने में यह कठिनाई होती है कि प्राप्तांकों से बने वर्गांतरों के मध्य बिंदुओं को उसकी आवृत्ति से गुणा करना पड़ता है। अतः इस कठिनाई के निवारण हेतु ही लघु विधि का प्रयोग करना होता है। इसके द्वारा मध्यमान ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं–

सूत्र– M या $\bar{X} = A + \Sigma f D/N$

यहां $\bar{X}$ = माध्य (M)

A = कल्पित माध्य से अन्य वर्गांतरों के मध्य बिंदु के विचलन को D के प्रतीक के रूप में व्यक्त करते हैं।

$\Sigma f D$= विचलन एवं आवृत्ति के गुणनफलों का योग

N = आवृत्ति का योग

इस विधि से माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न चरण हैं–

1. सर्वप्रथम, समस्त वर्गों में से किसी एक को (लगभग बीच में पड़ने वाले वर्गांतर में मध्य बिंदु को) कल्पित माध्य A मान लिया जाता है।
2. इसके बाद प्रत्येक मध्य बिंदु में से कल्पित माध्य को घटाकर उसका विचलन अगले स्तंभ में उसी मध्य बिंदु के सामने लिख दिया जाता है।
3. $\Sigma f D$ ज्ञात करना, अर्थात प्रत्येक विचलन को उसके सम्मुख आवृत्ति से गुणा करके इसका योग ज्ञात किया जाता है।
4. $\Sigma f D$ को N से भाग देकर भागफल प्राप्त किया जाता है।

टिप्पणी

5. भागफल धनात्मक होने पर कल्पित माध्य में जोड़कर तथा ऋणात्मक होने पर कल्पित माध्य में से घटाकर माध्य ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण 3.32: निम्न सारणी का माध्य ज्ञात करें –

वर्गांतर	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
आवृत्ति	3	5	6	12	7	2

हल–लघु विधि द्वारा माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न सारणी का प्रयोग किया जाता है–

वर्गांतर	**आवृत्ति (f)**	**मध्यमान X**	**कल्पित माध्य A**	**D= A-X**	**FD**
0–10	3	5		– 20	–60
10–20	5	15		–10	–50
20–30	6	25	25	0	0
30–40	12	35		10	120
40–50	7	45		20	140
50–60	2	55		30	60
योग	N=35				210

सूत्र – $M = A + \Sigma fD/N$

$= 25 + 210 / 35$

$= 25 + 6 = 31$

अतः माध्य = 31

- **माध्य की सीमाएं**

1. जब किसी श्रेणी अथवा समंक माला में अधिकतम प्राप्तांक हो तो मध्यमान का प्रयोग उपयुक्त नहीं है।
2. यह आवृत्ति ग्राफ पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।
3. समंक माला को देखकर साधारण रूप से इसका अनुमान नहीं लगाया जा सकता है।
4. यदि कोई प्राप्तांक छूट रहा है तो इसकी गणना करना असंभव है।
5. गुणात्मक तथ्यों के विवेचन में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता है।
6. गणना किया हुआ मध्यमान प्राप्तांकों का वास्तविक प्रतिनिधित्व नहीं करता क्योंकि यह श्रृंखला के अंकों में पाया जा सकता है तथा नहीं भी।
7. कभी–कभी यह अशुद्ध एवं दशमलव या भिन्नात्मक निष्कर्ष जैसे 5½ व्यक्ति भी प्रदान करता है।
8. माध्य की गणना करने के लिए सभी पदों के वास्तविक मूल्य ज्ञात होना आवश्यक होता है। खुली सीमाओं वाली समंक मालाओं जिनका कोई एक सिरा बंद न हो जैसे (1,2,3,4, ...) में इसकी गणना संभव नहीं है।

(ख) माध्यिका (Median)

माध्यिका दी हुई श्रृंखला का एक ऐसा अंक होती है जो उस श्रृंखला को दो बराबर भागों में विभाजित करती है। माध्यिका को ही मध्यांक भी कहा जाता है। इस प्रकार माध्यिका के एक भाग में सभी पद माध्यिका से छोटे एवं दूसरे भाग में सभी पद माध्यिका से बड़े होते हैं।

परिभाषा—कोनोर के अनुसार—माध्यिका दी हुई श्रृंखला का वह मध्य मान है जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि एक भाग में समस्त मूल्य माध्यिका से अधिक एवं दूसरे भाग में समस्त मूल्य माध्यिका से कम होते हैं।

उदाहरण 3.33: यदि 9 विद्यार्थियों के प्राप्तांक 1,2,3,3,4,6,7,7,9 हो तो सूत्र के अनुसार $(N+1)/2)_{th}$ पद अर्थात (9+1)/2 पांचवा अंक अर्थात् 4 माध्यिका होगा। माध्यिका के रूप में 4 का यह अंक सभी दूसरे अंकों के लगभग मध्य में स्थित है तथा सभी अंकों को अपने से कम और अधिक संख्याओं वाले दो भागों में विभाजित करता है।

- **माध्यिका के गुण एवं विशेषताएं**

1. माध्यिका ज्ञात करने के लिए समस्त पदों को एक बढ़ते हुए अथवा घटते हुए क्रम में व्यवस्थित करना आवश्यक होता है।
2. माध्यिका का प्रमुख कार्य संपूर्ण श्रृंखला को दो बराबर भागों में विभाजित करना होता है।
3. चूंकि माध्यिका दी हुई श्रेणी का मध्य बिंदु है अतः श्रेणी के आधे अंक इसके ऊपर तथा आधे नीचे होते हैं।
4. यह अंतिम छोरों वालें समंकों की श्रेणी में उपयुक्त होता है। इसके अंतिम समंक परिणाम को प्रभावित नहीं करते हैं तथा बड़े या छोटे समंक की उपस्थिति से भी इसके मान में कोई परिवर्तन नहीं आता है।
5. माध्यिका एक स्थिति माध्य हैं।
6. आवृत्तियों को संचय करने के पश्चात अवलोकन मात्र से ही मध्य को ज्ञात किया जा सकता है।
7. अनियमित वर्गांतर अथवा खुली सीमा वाले वर्गांतर वाली श्रेणियों में भी माध्यिका की गणना की जा सकती है।
8. माध्यिका श्रेणी के विस्तार अथवा उससे अधिक व कम मूल्यों के विस्तार से स्वतंत्र होती है।
9. माध्यिका मूल्य अधिकतर श्रेणी में दिए गए किसी मूल्य के समान ही होता है।
10. ऐसी गुणात्मक विशेषताओं जिन्हें अनुक्रमित किया जा सकता है। जैसे—योग्यता, सुंदरता, रंग आदि की सांख्यिकीय माप के लिए माध्यिका उपयुक्त रहता है।
11. माध्यिका का निर्धारण आलेख से भी किया जा सकता है, परंतु माध्य का नहीं।

टिप्पणी

• माध्यिका की गणना विधि

विभिन्न प्रकार की श्रेणियों/शृंखलाओं से माध्यिका निकालने की विधियां भी भिन्न–भिन्न हैं।

1. **जब आंकड़े अव्यवस्थित हों–**

चूंकि माध्यिका व्यवस्थित श्रेणी का मध्य बिंदु होता है, यहां हमारे समक्ष दो स्थितियां उत्पन्न हो सकती हैं।

(i) जब पदों की संख्या सम हो अथवा

(ii) जब पदों की संख्या विषम हो।

सूत्र $Md = \dfrac{(N/2) \text{ वां पद} + ((N/2)+1) \text{ वां पद}}{2}$

यहां N = पदों की सख्या

Md = माध्यिका

माध्यिका प्राप्त करने के चरण

- अव्यवस्थित श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में प्रदर्शित करना।
- पदों की संख्या ज्ञात कर, उसमें एक जोड़ देते हैं।
- प्राप्त संख्या को 2 से भाग देते हैं, भागफल को प्राप्त होने पर उतने ही अंक क्रमिक संख्याओं (श्रेणी) में दाएं या बाएं से गिनते हैं और यही संख्या माध्यिका होगी।

उदाहरण 3.34: निम्न प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात करें –

15, 14, 12, 7, 11, 14, 15, 18, 20, 19

हल–अंकों का आरोही क्रम 7,11,12,14,14,15,15,18,19,20

सूत्र– $Md = \dfrac{(N/2) \text{ वां पद} + ((N/2)+1) \text{ वां पद}}{2}$

$= \dfrac{(10/2) \text{ वां पद} + ((10/2)+1) \text{ वां पद}}{2}$

$= \dfrac{5 \text{ वां पद} + 6 \text{ वां पद}}{2}$

$= \dfrac{14 + 15}{2} = 14.5$

अतः माध्यिका = 14.5

जब पदों की संख्या विषम हो

सूत्र $Md = \dfrac{(N+1) \text{ वां पद}}{2}$

टिप्पणी

उदाहरण 3.35: निम्न प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात करो –

11,17,15,21,18,20,19,14,13

हल– अंकों का क्रम – 11,13,14,15,17,18,19,20,21

माध्यिका $Md = \frac{(N+1) \text{ वां पद}}{2}$

आरोही क्रम में 5 वीं संख्या 17 है। यही माध्यिका है।

अतः माध्यिका = 17

2. **जब आंकड़े व्यवस्थित हों**–समूहीकृत एवं व्यवस्थित श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम क्रमानुसार पदों की आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में बदल लेते हैं तथा इसके बाद N/2 के सूत्र द्वारा माध्यिका वर्ग ज्ञात कर लेते हैं। वर्गांतर के जिस वर्ग में माध्यिका स्थित होती है उसमें निम्न सूत्र द्वारा वास्तविक माध्यिका ज्ञात की जाती है–

सूत्र – $\frac{Md = L1 + (L2 - L1)\times .C.I.}{f}$

यहां L1 = उस वर्गांतर की निम्न सीमा जिसमें माध्यिका पड़ती है।

N/2 = कुल आवृत्तियों की आधी संख्या

L/2 = माध्यिका वर्ग की उच्च सीमा

C.I. = वर्गांतर का आकार

उदाहरण 3.36: निम्न व्यवस्थित आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात करो–

वर्गांतर	आवृत्ति
0–10	4
10–20	9
20–30	15
30–40	20
40–50	25
50–60	40
60–70	21
70–80	16

हल– सर्वप्रथम सारणी में आवृत्तियों की संचयी आवृत्ति ज्ञात करते हैं।

वर्गांतर	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0–10	4	4 = 4
10–20	9	4 + 9 = 13
20–30	15	13 + 15 = 28
30–40	20	28 + 20 = 48
40–50	25	48 + 25 = 73
50–60	40	73 + 40 = 113
60–70	21	113 + 21 = 134
70–80	16	134 + 16 = 150

टिप्पणी

माध्यिका वर्ग ज्ञात करना – $N/2 = 150/2 = 75$

यह वर्गांतर 70–80 के मध्य होगा। अतः इसका वर्गांतर 70–80 है।

अब माध्यिका निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं–

सूत्र – $Md = \frac{L1+(L2-L1)\times CI}{f}$

यहां $L1$ = 70 वर्गांतर की निम्न सीमा

$L2$ = 80 वर्गांतर की उच्च सीमा

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

$C.I.$ = वर्गांतर का आकार = 10

अतः $Md = \frac{70+(80-70)\times 10}{16}$

$= \frac{70+10\times 10}{16}$

$= 70 + 6.25$

माध्यिका = 76.25

- **माध्यिका के दोष**

1. माध्यिका की गणना करने में कभी–कभी श्रेणी को आरोही (बढ़ते क्रम में) अथवा अवरोही (घटते क्रम में) अनुविन्यासित करना होता है, यह एक कठिन कार्य होता है।
2. यदि आंकड़ों का फैलाव वितरण के माध्य में नहीं होता है तो माध्यिका अविश्वसनीय माप होती है।
3. श्रेणी में थोड़ा–सा परिवर्तन माध्यिका में पर्याप्त परिवर्तन ला सकता है।
4. सतत् श्रेणी में भी माध्यिका का मान केवल अनुमानित ही होता है।
5. यदि दो समूहों की माध्यिका ज्ञात हो, तो दोनों समूहों की सामूहिक माध्यिका ज्ञात नहीं की जा सकती है।
6. माध्यिका बीजगणित क्रियाओं के अयोग्य होती है।
7. पदों की संख्या कम होने पर प्रतिनिधित्व ठीक नहीं रहता है।

(ग) बहुलक (Polymer)

किसी समंक श्रेणी में जिस अंक की आवृत्ति सबसे अधिक होती है, उसी को बहुलक या बहुलांक कहते हैं। बहुलांक समंक श्रेणी का ऐसा मूल्य या परिणाम है जो दिए हुए आंकड़ों में सबसे अधिक बार आता है। बहुलक को अंग्रेजी में मोड (Mode) कहते हैं। जिसकी उत्पत्ति फ्रेंच वैज्ञानिक ली मोड (La Mode) से मानी जाती है। जिसका अर्थ है 'सर्वाधिक फैशन' अथवा 'प्रचलन'।

परिभाषा—बहुलक को अनेक विद्धानों एवं सांख्यिकी शास्त्रियों ने परिभाषित किया है।

जिजेक के अनुसार–बहुलक वह मूल्य है जो पदों की श्रेणी अथवा समूह में सबसे अधिक बार आता है तथा जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व में पदों का वितरण रहता है।

टिप्पणी

क्रांक्सटन तथा कोडेन ने बहुलक को परिभाषित करते हुए कहा है कि 'बहुलक विभिन्न अंकों का वह मूल्य है जिसके आसपास श्रेणी के अधिक से अधिक पद–मूल्य केंद्रित होते हैं। इस प्रकार उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि बहुलक श्रेणी में वह पद या मूल्य है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक होती है। उदाहरण के लिए 10 विद्यार्थियों के मनोविज्ञान की परीक्षा में 10 में से क्रमशः 6,6,5,6,5,4,6,7,6,4, अंक प्राप्त किए हों तो 6 अंक की पुनरावृति (आवृत्ति) सबसे अधिक (4 बार) होने के कारण इसे अंकों का बहुलक कहा जाएगा।

- **बहुलक के गुण एवं विशेषताएं**

बहुलक के गुण एवं विशेषताएं निम्न हैं–

1. बहुलक की गणना एक समंक के सभी पदों को ध्यान में रखते हुए की जाती है, इसके फलस्वरूप ये सभी पद मूल्यों का प्रतिनिधित्व करते हैं।
2. यह अंतिम प्राप्तांकों से प्रभावित नहीं होता।
3. दैनिक जीवन में इसका प्रयोग प्रचलित है।
4. बहुलक का मान प्रायः अधिकतम आवृत्तियों से निर्धारित होता है, इकाइयों से नहीं।
5. बहुलक का मान सबसे अधिक संभावित मूल्य होता है।
6. बहुलक का मान वर्गीकरण की प्रक्रियाओं से प्रभावित होता है तथा बनता है।
7. किसी भी एक समंक माला में दो या दो से अधिक बहुलक हो सकते हैं।
8. बहुलक का मूल्य बहुलकता की मात्रा को प्रदर्शित करता है।
9. बहुलक का मूल्य निकालने के लिए तथ्यों को उनके आकारानुसार क्रमबद्ध करना पड़ता है।
10. बहुलक का मूल्य ही केवल ऐसा मूल्य है जो गुणात्मक तथ्यों के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है।
11. बहुलक पद को देखकर या निरीक्षण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।
12. बहुलक को संपूर्ण श्रेणी की जानकारी के बिना ही ज्ञात किया जा सकता है। केवल बहुलक आवृत्ति के आगे और पीछे की आवृत्तियों की जानकारी ही आवश्यक होती है।
13. किसी वस्तु की लोकप्रियता का अध्ययन करने के लिए बहुलक ही सर्वोत्तम माध्य माना जा सकता है।

- **बहुलक की गणना विधि**

1. **जब आंकड़े अव्यवस्थित हों**– इससे बहुलक ज्ञात करना बहुत आसान है। सर्वप्रथम दी हुई श्रेणी के पदों को एक क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है।

इसके पश्चात् जिस पद की पुनरावृत्ति सबसे अधिक बार दिखाई देती है, उसी को बहुलक मान लिया जाता है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.37: एक कारखाने में 20 श्रमिकों की मासिक आय क्रमशः 470, 480, 480, 520, 410, 560, 520, 470, 520, 520, 470, 560, 630, 410, 470, 715, 410, 470, 560, 630 रुपये है तो इसका बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्न सारणी का प्रयोग करना होता है–

मासिक आय	आवृति
410	3
470	5
480	2
520	4
560	3
630	2
715	1

पदों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने से यह स्पष्ट हो जाता है कि 470 अंक की आवृत्ति सबसे अधिक (5 बार) हुई है। इस प्रकार बहुलक 470 रुपए मासिक मजदूरी होगी।

2. **जब आंकड़े व्यवस्थित हों**–व्यवस्थित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

सूत्र – $Mo = 3 \times Md - 2 \times M$

यहां Mo = बहुलक

Md = माध्यिका

M = माध्य

उदाहरण 3.38: –निम्न सारणी का बहुलक ज्ञात करें –

मूल्य	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
आवृत्ति	5	3	7	10	8	4

सर्वप्रथम इसका माध्य ज्ञात करेंगे–

वर्गांतर	आवृत्ति (f)	मध्यमान X	कल्पित माध्य A	D	FD	संचयी आवृत्ति
10–20	5	15		–30	–150	5
20–30	3	25		–20	–60	8
30–40	7	35	45	–10	–70	15
40–50	10	45		0	0	25
50–60	8	55		10	80	33
60–70	4	65		20	80	37
70–80	3	75		30	90	40

$M = 40$

- **बहुलक के दोष**

1. बहुलक के मानों को बीजगणित के सिद्धांतों द्वारा हल नहीं किया जा सकता।
2. बहुलक की गणना करने में पूर्ण श्रेणी अथवा पदमाला का उपयोग नहीं होता है, अतः यह पूर्ण श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।
3. जब एक ही श्रेणी में दो या अधिक बहुलक आ जाते हैं, तो इसे ज्ञात करना कठिन हो जाता है।
4. बहुलक वर्गांतरों में परिवर्तन के कारण परिवर्तित हो जाता है।
5. बहुलक ज्ञात करने के लिए पदों को क्रमानुसार रखना अति आवश्यक है।
6. यदि किसी श्रेणी में सभी वर्गांतरों की आवृत्तियां एक समान हों तब उस पदमाला में बहुलक ज्ञात ही नहीं किया जा सकता है।
7. वर्गांतरों का चुनाव बहुलक के मूल्य पर पर्याप्त प्रभाव डालता है।
8. जहां पर पदों को सर्वाधिक महत्व प्रदान करना आवश्यक हो, बहुलक अनुपयुक्त माप है।

उदाहरण 3.39: एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक लीजिए:

10	20	36	92	95	40	50	56	60	40
92	88	80	70	72	70	36	40	10	40
88	40	50	50	56	60	70	60	60	80

एक निश्चित अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की बारंबारता (Frequency) कहते हैं।

उदाहरणार्थ, यहाँ 5 विद्यार्थियों ने 40 अंक प्राप्त किए हैं। अतः 40 अंक की बारंबारता 5 है।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (अर्थात् बारंबारता)
10	2
20	1
36	2
40	5
50	3
56	2
60	4
70	3
72	1
80	1
88	3
92	2
95	1
कुल योग	30

उदाहरण 3.40: वन महोत्सव के दौरान 100 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 100 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्याए इस प्रकार थी:

95	67	28	32	65	58	69	33	98	96
76	42	32	46	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	87	62	37	65	63	42
89	65	73	79	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	72	82	75	82
96	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	27	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	50	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	84	93	42
53	69	90	55	71	49	52	83	34	36

इसके अतिरिक्त आप यह भी जानते हैं कि मिलान चिह्नों का प्रयोग करके उपरोक्त आंकड़ों की सारणी रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जेसा कि नीचे दी गई सरणी में दर्शाया गया है।

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिन्ह	विद्यालयों की संख्या (बारंबारता)
20-29	|||	3
30-39	卌 卌 ||	12
40-49	卌 卌 |||	13
50-59	卌 ||||	9
60-69	卌 卌 卌 |	16
70-79	卌 卌 |||	13
80-89	卌 卌 卌 卌 |	21
90-99	卌 卌 |||	13
कुल योग		100

- औसत या माध्य $P(E) + P(E) = 1$

- माध्य $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n} = (\overline{x}) = \dfrac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}$

- जब बारम्बारता 1 दिया जो तो माध्य $f_{nean} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} i_i \cdot f_i}{\sum_{i=0}^{n} I_i}$

- प्रेक्षणों का वह मान जो सबसे ज्यादा बार प्रतीत होता है, बहुलक कहलाता है।
- माध्यक के लिए प्रेक्षणों को पहले बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित करें।

अब यदि प्रेक्षणों की संख्या 'n' विषम में तो माध्यम $= \dfrac{(n+1)^{th}}{2}$ वां पद होगा तथा यदि प्रेक्षणों की संख्या n सम है तो माध्यम $\left(\dfrac{n}{2}\right)$ वे पद तथा $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ वे पद का औसत होगा।

$$\text{माध्यक} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{वाँ}} \text{पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{वाँ}} \text{पद}}{2}$$

टिप्पणी

3.4.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Internal Tendency) या औसतों की सहायता से हम इन आंकड़ों के केवल कुछ प्रतिनिधि लेकर ही उनके कुछ महत्वपूर्ण अभिलक्षण ज्ञात कर सकते हैं।

केंद्रीय प्रवृत्ति माप की अवधारणा

चूंकि मानव मस्तिष्क जटिल समकों को पूर्णतया समझने और उनकी तुलना करने में सर्वथा समर्थ नहीं है इसलिए यह जरूरी हो जाता कि विविध तथ्यों, जिनकी तुलना की जानी है, उन्हें सारांश रूप में एक ही अंक द्वारा व्यक्त किया जा सके। वास्तव में ऐसे मूल्य या अंक ही केंद्रीय प्रवृत्ति के माप या सांख्यिकीय माध्य (Statistical Mean) कहलाते हैं।

माध्यों द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समकों की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है। इससे उन समकों को समझना व याद रखना बहुत सुगम हो जाता है। उदाहरणार्थ, 100 करोड़ भारतवासियों की अलग–अलग आयु को याद रखना असंभव है, लेकिन औसत आय सुगमता से याद रखी जा सकती है। अतः माध्य, समकों का विहंगम दृश्य (bird's eye view) प्रस्तुत करते हैं। मोरोने ने ठीक ही कहा है, ''माध्य का उद्देश्य, व्यक्तिगत मूल्यों के समूह का सरल और संक्षिप्त रूप से प्रतिनिधित्व करना है, जिससे मस्तिष्क समूह की इकाइयों के सामान्य आकार को शीघ्रता से ग्रहण कर सके।''

केंद्रीय प्रवृत्ति की विशेषताएं

केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) के मापों या माध्यों की कई विशेषताएं होती हैं, जो इस प्रकार हैं–

1. **तुलना में सहायक होना–** माध्य, समकों की समस्त राशि को संक्षिप्त व सरल करके तुलना योग्य बनाते हैं। समकों की तुलना से बहुत महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, विभिन्न देशों की औसत आय की तुलना से ज्ञात किया जा सकता है कि कौन–सा देश सबसे अधिक समृद्धशाली है तथा कौन–सा सबसे कम।
2. **उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में सहायक होना–** माध्य, उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में बहुत अधिक सहायक होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी कॉलेज में बी.कॉम. के प्रथम वर्ष की चार कक्षाओं 'क', 'ख', 'ग' एवं 'घ' के विद्यार्थियों के किसी विषय (subject) में औसत नंबर इस प्रकार हैं– 60,58,40 एवं 55 तो इससे यह निष्कर्ष निकलेगा कि कक्षा 'ग' के विद्यार्थी इस विषय में बहुत कमजोर हैं और उनकी इस कमी को दूर करने के लिए विशेष प्रबंध करना आवश्यक है।

टिप्पणी

3. **सांख्यिकीय विश्लेषण का आधार**– सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक क्रियाएं माध्यों पर आधारित हैं।
4. **न्यादर्शों की विभिन्नता का कम से कम प्रभाव**– यदि एक ही समग्र से उचित रीति द्वारा विभिन्न नमूना लेकर माध्य निकाले जाएं तो उन माध्यों में बहुत अधिक अंतर नहीं आता है।
5. **बीजगणितीय विवेचन संभव**– एक अच्छे माध्य का बीजगणितीय विवेचन संभव है, जैसे–यदि दो कारखानों के मजदूरों की संख्या तथा औसत आय से संबंधित समक दिए गए हों तो दोनों कारखानों के मजदूरों की आय का सामूहिक माध्य निकालना संभव है।

अंकगणितीय माध्य तो केंद्रीय स्थान–निर्धारण का सर्वाधिक प्रयोग किया जाने वाला मापक है, मोड व माध्यिका कुछ प्रकारों के आंकड़ों हेतु एवं कुछ स्थितियों में सबसे उपयुक्त मापक होते हैं। वैसे केंद्रीय प्रवृत्ति के हर मापक में निम्न शर्तें पूर्ण होनी ही चाहिए–

1. यह गणना करने एवं समझने में सरल हो।
2. इसे दृढ़ता से परिभाषित किया गया हो। इसकी एक ही व्याख्या हो ताकि खोजकर्ता के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह अथवा पक्षपात से इसकी उपयोगिता अप्रभावित रहे।
3. यह आंकड़ों का प्रतिनिधि हो। यदि प्रतिदर्श से इसकी गणना की जाए तो प्रतिदर्श इतना यादृच्छिक होना चाहिए कि जिससे वह समष्टि का प्रतिनिधित्व सटीकता से करे।
4. इसमें प्रतिदर्शन स्थिरता हो। यह प्रतिदर्शन के उतार–चढ़ावों से प्रभावित न हो अर्थात यदि हम यादृच्छिक स्तर पर महाविद्यालयी शिक्षार्थियों के 10 भिन्न–भिन्न समूहों को लेते हैं एवं प्रत्येक समूह के औसत की गणना करते हैं तो हमें इनमें से प्रत्येक समूह से लगभग समान मान पाने की अपेक्षा रहेगी।
5. यह चरम मानों से बहुत प्रभावित न हो। यदि आंकड़ों में कुछ बहुत छोटी या बहुत बड़ी बातें/वस्तुएं प्रस्तुत हों तो वे औसत के मान को किसी एक ओर सरका कर अनुचित रूप से प्रभावित कर देंगी। अतः औसत समूची श्रृंखला का वास्तविक प्रारूप नहीं होगा। इसी कारण चुना गया औसत ऐसा होना चाहिए कि जिससे उन चरम मानों द्वारा अनुचित प्रभाव न पड़े।

माध्य, माध्यिका एवं बहुलक

माध्य, माध्यिका एवं बहुलक को निम्न प्रकार समझाया गया है–

(क) माध्य (Mean)

माध्य का सांख्यिकी विज्ञान में बहुत महत्वपूर्ण स्थान है। सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य बहुत–सी रीतियां माध्यों पर आधारित हैं। यही कारण है कि डॉ. बाउले (Dr. Bowley) ने सांख्यिकीय को 'माध्यों का विज्ञान' कहा है। माध्यों की सहायता से समक श्रेणी के सभी मूल्यों का सार प्रकट किया जाता है। सांख्यिकी की व्यक्तिगत इकाइयों का अलग–अलग कोई महत्व नहीं होता। माध्यों द्वारा सभी इकाइयों में सामूहिक रूप से

पाये जाने वाले मुख्य लक्ष्य स्पष्ट हो जाते हैं तथा उनकी तुलना भी सरल हो जाती है।

माध्य, पूरे समूह का प्रतिनिधित्व करता है। ऐसे माध्य में निम्न गुण होने चाहिए ताकि समकों का ठीक रूप से प्रतिनिधित्व हो सके–

(1) **समझने में सरल (Easy to Understand)**– सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग समकों को संक्षिप्त तथा सरल बनाने के लिए किया जाता है। अतः माध्य ऐसा होना चाहिए, जो सुगमता से समझा जा सके, अन्यथा इसका प्रयोग बहुत ही सीमित होगा।

(2) **निर्धारण में सुगमता (Easy to Compute)**– माध्य की गणन–क्रिया सरल होनी चाहिए ताकि इसका प्रयोग व्यापक रूप से हो सके। यद्यपि माध्य का निर्धारण यथासंभव सरल होना चाहिए तथापि विशेष परिस्थितियों में परिणामों की शुद्धता के लिए अधिक कठिन माध्यों का प्रयोग भी किया जा सकता है।

(3) **श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित** (Based on All the Items of the Series)– माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए ताकि एक या अधिक मूल्यों में परिवर्तन होने से माध्य में भी परिवर्तन हो सके। यदि माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है तो वह पूरे समूह का ठीक प्रकार से प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता।

(4) **न्यूनतम तथा अधिकतम मूल्यों पर अनुचित प्रभाव से बचाव (Should not be Unduly Affected by Extreme Items)**– यद्यपि माध्य सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए तथापि किसी विशेष मूल्य का माध्य पर अधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए अन्यथा माध्य, समकों का सही प्रतिरूप व्यक्त नहीं करेगा।

(5) **स्पष्ट व स्थिर (Rigidly Defined)**– माध्य की परिभाषा स्पष्ट शब्दों में व्यक्त होनी चाहिए ताकि जो भी व्यक्ति दिए हुए समकों से माध्य निकाले, वह एक ही निष्कर्ष पर पहुंचे। इसलिए यह आवश्यक है कि माध्य, गणितीय सूत्र के रूप में दिया जाए। यदि माध्य के परिगणन में व्यक्तिगत प्रवृत्तियों का प्रभाव पड़ा तो फल भ्रामक तथा अशुद्ध होंगे।

समांतर माध्य– समांतर माध्य अथवा माध्यक, सबसे अधिक प्रचलित माध्य है। इसका प्रयोग सामान्यतः प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दैनिक जीवन में किया जाता है। समांतर माध्य वह मूल्य है, जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग में, उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। माध्य या माध्यक निकालने की दो रीतियां हैं–प्रत्यक्ष रीति तथा लघु रीति। आगे हम इन दोनों रीतियों का तीनों प्रकार की श्रेणियों में अलग–अलग अध्ययन करेंगे।

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य का परिगणन

प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम श्रेणी के सभी मूल्यों का योग किया जाता है।

(ii) फिर इस योग को पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है। यह स्मरण रहे कि इस विधि का प्रयोग तभी करना चाहिए, जब चर मूल्यों की संख्या कम हो तथा वे दशमलव में न हों।

टिप्पणी

सूत्र : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ...x_n}{N} = \dfrac{\sum X}{N}$

$\overline{x}$ = समांतर माध्य

Σx = पद–मूल्यों का जोड़

N = पदों की संख्या

उदाहरण 3.41: नीचे 12 परिवारों की मासिक आय का विवरण दिया गया है। समांतर माध्य की गणना कीजिए–

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
आय	280	180	96	98	104	75	80	94	100	75	600	200

हल– समांतर माध्य का परिगणन **प्रत्यक्ष रीति** द्वारा

परिवारों की संख्या	परिवारों की आय
1	280
2	180
3	96
4	98
5	104
6	75
7	80
8	94
9	100
10	75
11	600
12	200
N=12	**Σx = 1982**

$\Sigma x = 1982, N = 12$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{N} \text{ or } \frac{1982}{12} = 165.167 \therefore \overline{X} = 165.17$$

लघु विधि

इसकी प्रक्रिया निम्न है–

1. सर्वप्रथम दिए हुए मूल्यों में से किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य मान लिया जाता है। वैसे कल्पित माध्य श्रेणी से बाहर का भी कोई मूल्य माना जा सकता है, किंतु सुविधा की दृष्टि से कल्पित माध्य, सदैव श्रेणी के मूल्यों में से ही कोई एक होना चाहिए तथा वह न सबसे छोटा और न सबसे बड़ा, बल्कि मध्य–मूल्य का होना चाहिए।
2. श्रेणी के प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) में से कल्पित–माध्य (A) को घटाकर, विचलन प्राप्त किए जाते हैं, अर्थात $dx=x–A$ ।
3. विचलनों का योग प्राप्त कर लिया जाता है– Σdx या $\Sigma(X–A)$

टिप्पणी

4. अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\overline{x} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$\overline{x}$ = समांतर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum dx$ = विचलनों का योग

N = पदों की कुल संख्या।

उदाहरण 3.42: निम्न समकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
पद—मूल्य	96	180	98	75	270	80	102	100	94	75	200	610

हल— समांतर माध्य का परिगणन लघु विधि द्वारा

क्रमांक	कल्पित विचलन माध्य 200 से	
1	(96-200)	-104
2	(180-200)	-20
3	(98-200)	-102
4	(75-200)	-125
5	(270-200)	+70
6	(80-200)	-120
7	(102-200)	-98
8	(100-200)	-100
9	(94-200)	-106
10	(75-200)	-125
11	(200-200)	0
12	(610-200)	+410
N=12	$\sum dx = -900 + 480 = -420$	

$$\overline{x} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 200 + \frac{-420}{12}$$

$$= 200 - 35 = 165$$

खंडित श्रेणी में समांतर माध्य की गणना

1. प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक मूल्य (x) का आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है अर्थात ($x \times f$)

(ii) फिर इन गुणज के योग (Σfx) को कुल इकाइयों की संख्या से भाग दे दिया जाता है (आवृत्ति श्रेणी में आवृत्तियों का जोड़ ही कुल इकाइयों की संख्या होती है, चूंकि $N = \Sigma f$)

(iii) प्रत्यक्ष रीति के अनुसार, सूत्र इस प्रकार है—

$$\overline{x} = \frac{\sum fx}{N} \text{ or } \overline{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} (\therefore N = \sum f)$$

टिप्पणी

2. लघु विधि

(i) सर्वप्रथम दिए हुए मूल्यों में किसी एक को कल्पित माध्य मान लिया जाता है।

(ii) फिर प्रत्येक पद में से कल्पित माध्य घटाकर विचलन प्राप्त कर लिए जाते हैं अर्थात $dx = (x - A)$

(iii) प्रत्येक विचलन *(dx)* को उसकी आवृत्ति *(f)* से गुणा करके, उन गुणज का जोड़ *(Σfdx)* निकाल लिया जाता है।

(iv) अंत में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} \text{ or } \overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{\sum f}$$

यहां A = कल्पित माध्य, Σ*fdx* = विचलनों व आवृत्तियों का जोड़

N = आवृत्तियों का कुल जोड़

उदाहरण 3.43: निम्नलिखित खंडित श्रेणी में (i) 15 को शून्य (अर्थात कल्पित माध्य) मानकर समांतर माध्य निकालें तथा (ii) प्रत्यक्ष रीति द्वारा परिणाम की जांच कीजिए।

आकार	आवृत्ति	लघु विधि		प्रत्यक्ष विधि
		A = 15 से विचलन	गुणनफल	
(X)	(f)	(dx)	(fdx)	(fx)
20	1	+5	+5	20
19	2	+4	+8	38
18	4	+3	+12	72
17	8	+2	+16	136
16	11	+1	+11	176
15	10	0	0	150
14	7	-1	-7	98
13	4	-2	-8	52
12	2	-3	-6	24
11	1	-4	-4	11

हल

लघु विधि

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

$$= 15 + 0.54 = 15.4$$

प्रत्यक्ष विधि

$$Mean \text{ or } \overline{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{777}{50} = 15.54$$

टिप्पणी

अखंडित श्रेणी में माध्य का परिकलन

अखंडित श्रेणी में समांतर माध्य ठीक उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है, जिस प्रकार खंडित श्रेणी में। सूत्र भी दोनों में एक समान है। परंतु अंतर केवल इतना है कि अखंडित श्रेणी में पहले वर्गों के मध्य मूल्य निकाले जाते हैं जिन्हें *'X'* कहते हैं। इस प्रकार मध्य मूल्य लेने पर अखंडित श्रेणी, खंडित श्रेणी का रूप ले लेती है।

प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम, वर्गों के मध्य–मूल्य ज्ञात किए जाते हैं।

(ii) फिर, मध्य–मूल्यों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (Σfx) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

उदाहरण 3.44: निम्न सारणी से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

वर्ग :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
आवृत्ति :	12	18	27	20	17	6

हल– समांतर माध्य का परिकलन

आकार	मध्यमान	आवृत्ति	आवृत्ति A = 25 से विचलन	लघु विधि गुणनफल	प्रत्यक्ष विधि
(x)	$(M\text{-}V.)$	(f)	(dx)	(fdx)	(fx)
0-10	5	12	-20	-240	60
10-20	15	18	-10	-180	270
20-30	25	27	0	0	675
30-40	35	20	+10	+200	700
40-50	45	17	+20	+340	765
50-60	55	6	+30	+180	330
Total		N=100		$\Sigma fdx = 300$	$\Sigma fx = 2800$

प्रत्यक्ष विधि

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

$$= 25 + \frac{300}{100} = 25 + 3$$

$$\therefore \overline{x} = 25 + 3 = 28$$

लघु विधि

$$\overline{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{2800}{100}$$

$$\therefore \overline{x} = 28$$

यदि वर्ग विस्तार समान है तो लघु विधि श्रेष्ठ है और यदि वर्गों का विस्तार असमान है तो फिर प्रत्यक्ष रीति उपयुक्त होगी।

उदाहरण 3.45: एक फर्म के 30 कर्मचारियों का मासिक वेतन (रु. में) निम्न प्रकार से है–

टिप्पणी

139	123	99	133	132	100	80	148	108
116	77	123	148	114	95	144	134	142
62	106	69	126	104	103	140	118	88
85	63	129						

निम्न वेतन वर्ग के कर्मचारियों को फर्म ने क्रमशः 10, 15, 25, 30 और 35 रु. का अधिलाभांश प्रदान किया। 60 रु. से अधिक किंतु 75 रु. से अधिक नहीं, 75 रु. से अधिक किंतु 90 से अधिक नहीं और इसी प्रकार 136–150 तक प्रति कर्मचारी औसत अधिलाभांश ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्न में दिए हुए वेतन–वर्गों में सर्वप्रथम कर्मचारियों को वर्गीकृत करके आवृत्तियां निकाली जाएंगी। तत्पश्चात प्रत्यक्ष विधि द्वारा कुल तथा औसत बोनस ज्ञात कर लिया जाएगा।

कुल व औसत बोनस का परिकलन

वर्ग	टेलीबार विधि द्वारा आवृत्ति का प्रदर्शन		कर्मचारियों की संख्या	लाभ	कुल लाभ
			f	(x)	(xf)
60–75	|||	3	3	10	30
76–90	||||	4	4	15	60
91–105	~~||||~~	5	5	20	100
106–120	~~||||~~	5	5	25	125
121–135	~~||||~~ ||	7	7	30	210
136–150	~~||||~~ |	6	6	35	210
Total		**N = 30**	**$\Sigma f = 30$**		**$\Sigma fx = 735$**

$$\text{औसत लाभ} = \frac{\text{कुल लाभ}}{\text{कर्मचारियों की संख्या}} = \frac{735}{30} = 24.5$$

माध्य संबंधी कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

(1) **पद विचलन विधि**– लघु रीति को और भी सरल बनाने के लिए पद–विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है। बशर्ते कि श्रेणी में वर्ग–विस्तार समान हो। लघु रीति और इस रीति में अंतर सिर्फ इतना है कि लघु रीति में जो विचलन किए जाते हैं, उन्हें इस रीति में किसी समापवर्त्तक से भाग देकर संक्षिप्त बना लिया जाता है। इन्हें ही पद विचलन ($d'x$) कहते हैं। सामान्यतः वर्ग–विस्तार को ही समापवर्त्तक माना जाता है फिर पद–विचलनों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके ($\Sigma fd'x$) ज्ञात कर लेते हैं। अंत में, समायोजन की दृष्टि $\Sigma fd'x$ में समापवर्त्तक (i) से गुणा कर दी जाती है। इस विधि में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

टिप्पणी

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i$$

$\Sigma fd'x$ = पद–विचलनों तथा आवृत्तियों के गुणज का जोड़

i = समापवर्त्तक वर्ग–विस्तार

(2) **संचयी आवृत्ति वितरण**– कभी–कभी वर्गांतरों के संचयी वितरण को सामान्य वितरण में बदल लेना चाहिए।

उदाहरण 3.46: निम्न सारणी से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

प्राप्तांक :	10	20	30	40	50	60	70	80
संचयी आवृत्ति :	25	40	60	75	95	125	190	240

हल– सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति वितरण को सामान्य आवृत्ति वितरण में बदला जाएगा।

प्राप्तांक x	मध्य बिन्दु M.P.	आवृत्ति f	पद–विचलन $d'x = \frac{x-45}{10}$	गुणनफल $fd'x$
0-10	5	25	-4	-100
10-20	15	15	-3	-45
20-30	25	20	-2	-40
30-40	35	15	-1	-15
40-50	45	20	0	0
50-60	55	30	+1	+30
60-70	65	65	+2	+130
70-80	75	50	+3	+150
		N=240		$\Sigma fdx = 110$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i = 45 + \frac{110}{240} \times 10$$

$$= 45 + 4.58$$

$$= 49.58$$

(3) **खुले सिरे वाले वर्गांतर**– जब वर्गांतर खुले सिरे वाले दिए हुए हों तो सिद्धांत रूप में ऐसे प्रश्नों या वितरणों में समांतर माध्य का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए बल्कि उनके स्थान पर बहुलक या माध्यक का प्रयोग करना चाहिए। परंतु यदि उक्त प्रश्न का समांतर माध्य निकालने के लिए कहा गया है तब ऐसी दशा में निम्न दो स्थितियों को ध्यान में रखना होगा–

(क) **वर्गों का वर्ग–विस्तार समान हो**– ऐसी स्थिति में पहले वर्ग की 'ऊपरी सीमा' में और अंतिम वर्ग की 'निचली सीमा' में, उनके इष्टतम वर्गों के वर्ग–विस्तार को क्रमशः घटाकर तथा जोड़कर अज्ञात सीमाओं का निर्धारण कर लेना चाहिए।

(ख) **जब वर्गों का वर्ग विस्तार असमान हो**–नीचे दिए गए उदाहरण में वर्ग विस्तार असमान है– दूसरे वर्ग का विस्तार 20 है, तीसरे का 30 और चौथे का 40 है अर्थात वर्ग–विस्तार क्रमशः 10 में बढ़ रहा है, अतः ऐसी स्थिति

टिप्पणी

में प्रथम वर्ग की निचली सीमा शून्य (10–10) होगी और अंतिम वर्ग की ऊपरी सीमा 150 (100 + 50) होगी अर्थात प्रथम वर्ग 0–10 तथा अंतिम वर्ग 100–150 होगा।

अंक	10–10	10–30	30–60	60–100	100 से अधिक
विद्यार्थियों की संख्या	5	9	16	7	30

(4) **समावेशी वर्गांतर**– जब वर्गांतर समावेशी आधार पर दिए गए हों तो समांतर माध्य निकालने के लिए उन्हें अपवर्जी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होती क्योंकि मध्य–मूल्य वही रहते हैं, भले ही वर्गों का समायोजन किया जाए या न किया जाए।

(5) **असमान वर्गांतर**– जब वर्गांतर असमान हों तो उन्हें समान बनाने के लिए आवृत्तियों के समायोजन की कोई आवश्यकता नहीं होती है बल्कि ऐसे प्रश्न को उनके मूल रूप में ही हल कर देना चाहिए।

उदाहरण 3.47: निम्न समकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	18–21	22–25	26–35	36–45	46–55
व्यक्तियों की सं.	8	32	54	36	20

हल: समांतर माध्य का परिकलन

आयु	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	$dx = x - 30.5$	fdx
18–21	19.5	8	–11	–88
22–25	23.5	32	–7	–224
26–35	30.5	54	0	0
36–45	40.5	36	+10	+360
46–55	50.5	20	+20	+400
		$f = 150$		$\Sigma fdx = 448$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} = \frac{448}{150}$$
$$= 30.5 + 2.99 = 33.49$$

अतः माध्यक आयु 33.49 वर्ष।

(6) **ग्राम–चार्लियर (Gram-Charlier) विधि द्वारा शुद्धता की जांच**– लघु विधि या पद–विचलन विधि द्वारा समांतर माध्य निकालते समय गणना क्रिया की जांच करने के लिए 'ग्राम–चार्लियर' विधि का प्रयोग किया जाता है।

विधि

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक विचलन या पद विचलन में 1 जोड़कर $(dx + 1)$ अथवा $(d'x + 1)$ ज्ञात कर लिया जाता है।

टिप्पणी

(ii) $(dx+1)$ या $(d'x+1)$ में उनकी आवृत्तियों को गुणा करके गुणनफलों का योग $\Sigma[f(dx+1)]$ या $\Sigma[f(dx'+1)]$ ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) तत्पश्चात निम्न समीकरणों को प्रयोग किया जाता है–

$\Sigma fdx = \Sigma[f(dx+1)] - \Sigma f \rightarrow$ लघु विधि प्रयोग करने पर

$\Sigma fd'x = \Sigma[f(d'x+1)] - \Sigma f \rightarrow$ पद–विचलन विधि प्रयोग करने पर

(iv) यदि उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं तो समझ लेना चाहिए कि गणन–क्रिया शुद्ध है, अन्यथा नहीं।

(7) **अज्ञात मूल्य या आवृत्ति का निर्धारण**– समांतर माध्य की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि यदि किसी श्रेणी के इन तीनों मानों $\overline{x}$ N और $\Sigma\,\overline{x}$ में से कोई दो मान ज्ञात हों तो तीसरा मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है–

$$\overline{x} - \frac{\sum x}{N} \text{ or } \frac{\sum fx}{x}$$

(8) **अशुद्ध मूल्यों को शुद्ध बनाना**– कभी–कभी समांतर माध्य निकालते समय भूल से सही पदों के स्थान पर गलत पद लिख लिए जाते हैं, जिससे समांतर माध्य भी गलत हो जाता है। ऐसी स्थिति में सही समांतर माध्य निकालने के लिए अशुद्ध Σx में से अशुद्ध मूल्य घटाकर उसमें शुद्ध मूल्य जोड़ दिया जाता है फिर, शुद्ध Σx को पदों की संख्या *(N)* से भाग देने पर सही समांतर माध्य प्राप्त हो जाता है।

समांतर माध्य के गुण

1. **स्थिरता**– इस माध्य पर प्रतिचयन के उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है, जैसे–यदि किसी एक ही समग्र में से सदैव आधार पर कई बार प्रतिदर्श लिए जाएं तो प्रतिदर्श–माध्यों में अधिक अंतर नहीं होगा। यह गुण अन्य किसी माध्य में नहीं पाया जाता है।
2. **सरलता**– समांतर माध्य एक सामान्य बुद्धि वाले व्यक्ति के लिए गणना करने व समझने की दृष्टि से अत्यंत सरल है।
3. **निश्चितता**– समांतर माध्य में निश्चितता का गुण होता है और यह बहुलक व माध्यिका की भांति अंतरगणन व अनुमान पर आधारित नहीं होता।
4. **सही प्रतिनिधित्व**– बहुलक तथा माध्यिका के विपरीत समांतर माध्य श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है, जिसके कारण यह श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व करता है।
5. **बीजगणितीय विवेचन**– समांतर माध्य के अपने कुछ बीजगणितीय गुण हैं, जिस कारण इस माध्य का अन्य सांख्यिकीय रीतियों में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है।

समांतर माध्य में एक आदर्श–माध्य के सभी गुण पाए जाते हैं। फलतः यह सर्वाधिक लोकप्रिय माध्य है।

टिप्पणी

समांतर माध्य के दोष– एक आदर्श माध्य होने के बावजूद समांतर माध्य निम्न दोषों से ग्रसित है–

1. **अप्रतिनिधित्व**– समांतर माध्य किसी श्रेणी का एक ऐसा मूल्य हो सकता है, जो उस श्रेणी में न होकर कोई बाहर का मूल्य हो।
2. **चरम मूल्यों का प्रभाव**– इस माध्य का सबसे बड़ा दोष चरम मूल्यों का प्रभाव है। अत्यधिक बड़े या छोटे मूल्यों को यह अधिक महत्व देता है। उदाहरणार्थ, चार कर्मचारियों के वेतन क्रमशः 1000, 250, 210, 180 रु. का समांतर माध्य 410 हुआ। स्पष्ट है कि एक अकेले पद–मूल्य (1000) ने औसत को काफी हद तक बढ़ा दिया है।
3. **अवास्तविक माध्य**– समांतर माध्य, कभी–कभी पूर्णांक में न होकर दशमलव या भिन्न के रूप में आता है जोकि इसे अवास्तविक बना देता है, जैसे–चार माताओं द्वारा क्रमशः 3,2,1 व 4 बच्चों को जन्म दिया गया, जिसका प्रति माता औसत 2.5 आया। निःसंदेह यह एक हास्यप्रद निष्कर्ष है।
4. **अनुपयुक्तता**– समांतर माध्य का एक अन्य दोष यह है कि इसके अनुपात, दर, प्रतिशत आदि की गणना करना संभव नहीं हो पाता है।
5. **भ्रमात्मक निष्कर्ष**– समांतर माध्य कभी–कभी भ्रमात्मक निष्कर्ष भी देता है। उदाहरणार्थ, जूट उद्योग की दो फर्मों का पिछले तीन वर्षों में लाभ इस प्रकार रहा है–

   A : 5000 रु. + 7000 रु. + 9000 रु. = औसत 7000 रु.

   B : 12000 रु. + 6000 रु. + 3000 रु. = औसत 7000 रु.

   इनके समान स्तर का प्रतीक है। परंतु वास्तविक यह है कि A फर्म उन्नति की ओर अग्रसर है, जबकि B फर्म दिवालियेपन की ओर बढ़ रही है।
6. **गणना संबंधी जटिलता**– स्थिति संबंधी माध्यों, जैसे–भूयिष्ठक व माध्यिका की अपेक्षा समांतर माध्य की गणना क्रिया अधिक जटिल है। प्रथम, यह निरीक्षण द्वारा नहीं निकाला जा सकता। दूसरा, यदि श्रेणी का कोई एक मूल्य भी अज्ञात है तो समांतर माध्य नहीं निकल पाएगा क्योंकि यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है, तीसरा गुणात्मक समकों के लिए समांतर माध्य का प्रयोग नहीं किया जा सकता। चौथा, माध्यिका व भूयिष्ठक की भांति इस माध्य का निर्धारण बिंदु–रेखीय रीति द्वारा भी नहीं किया जा सकता।

भारित समांतर माध्य

सरल समांतर माध्य, श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व देता है, जबकि वास्तविकता यह है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अपना अलग–अलग महत्व होता है। कुछ मूल्य अधिक महत्वपूर्ण होते हैं तो कुछ कम। जैसे, एक उपभोक्ता अपना व्यय सभी वस्तुओं पर समान रूप से नहीं करता बल्कि उनके सापेक्षिक महत्व के अनुपात में करता है। इसी प्रकार, एक कारखाने में कर्मचारियों की विभिन्न वेतन वर्गों में संख्या

समान न होकर अलग–अलग होती है। अतः ऐसी श्रेणियों में समांतर माध्य निकालते समय इकाइयों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखना अत्यावश्यक होता है। इस दृष्टि से निकाले गए माध्य को ही 'भारित समांतर माध्य' कहते हैं।

टिप्पणी

वास्तविक तथा अनुमानित भार– वास्तविक भार वे होते हैं, जो स्पष्टतः दिए गए हों, जबकि अनुमानित भार स्वयं के मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को देखते हुए मानने पड़ते हैं। भारित समांतर माध्य की गणना विधि की निम्न दो विधियां हैं–

1. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) - (i) सबसे पहले पद–मूल्यों (X) और भारों (W) को गुणा किया जाता है और इन गुणनफलों का योग (ΣXW) कर लिया जाता है। (ii) फिर, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{X}W - \frac{\sum WX}{\sum W}$$

$\overline{X}W$ = भारित समांतर माध्य

ΣXW = मूल्यों व भारों के गुणज का योग

ΣW = भारों का योग

2. लघु रीति (Short-Cut Method) - (i) पहले दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य *(AW)* मान लिया जाता है और उससे विभिन्न मूल्यों के विचलन *(dx)* लिए जाते हैं। (ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{X}W = AW + \frac{\sum Wdx}{\sum W}$$

AW =कल्पित भारित माध्य

ΣAdx = विचलनों व भारों के गुणज का योग

उदाहरण 3.48: किसी कारखाने के कर्मचारियों की संख्या तथा मासिक वेतन नीचे दिया गया है। प्रत्यक्ष तथा लघु–रीति द्वारा वेतन का भारित समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

	मासिक वेतन (रू0)	**व्यक्तियों की संख्या**
मैनेजर	1000	1
कार्यालय स्टॉफ	200	8
कुशल श्रम	250	20
अकुशल श्रम	140	11

हल–

भारित समांतर माध्य की गणना

कर्मचारी–वर्ग	वेतन (रू.)	कर्मचारियों की संख्या	प्रत्यक्ष रीति	लघु–रीति	
(Group)	**(X)**	**(W)**	**($X \times W$)**	**$dx = x - 250$**	**(Wdx)**
मैनेजर	1000	1	1000	+750	+750
कार्यालय स्टॉफ	200	8	1600	-50	– 400
कुशल श्रम	250	20	5000	0	0
अकुशल श्रम	140	11	1540	-110	–1210
		$\Sigma W = 40$	$\Sigma WX = 9140$		$\Sigma Wdx = -860$

$$\overline{X}W = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{9140}{40}$$

$$\overline{X}W = A + \frac{\sum XW}{\sum W} = 250 + \frac{-860}{40}$$

$\therefore \overline{X}W = 228.5$ $\therefore \overline{X}W = 228.5$

टिप्पणी

सरल व भारित माध्य की तुलना– सरल समांतर माध्य, भारित माध्य के बराबर हो सकता है, उससे अधिक भी हो सकता है और कम भी। (i) बराबर ($\overline{X} = \overline{X}W$) – श्रेणी के प्रत्येक मूल्य को समान भार देने की दशा में सरल व भारित समांतर माध्य बराबर होते हैं। (ii) अधिक ($\overline{X} > \overline{X}W$)– जब श्रेणी के छोटे मूल्यों को अधिक भार और बड़े मूल्यों को कम भार दिया जाता है, जब सरल समांतर माध्य, भारित माध्य से अधिक होता है। (iii) कम ($\overline{X} < \overline{X}W$)– जब श्रेणी के छोटे मूल्यों को कम भार तथा बड़े मूल्यों को अधिक भार दिया जाता है, जब सरल समांतर माध्य, भारित माध्य से कम होता है।

भारित समांतर माध्य का प्रयोग कब किया जाए? निम्न दशाओं में भारित–माध्य अधिक उपयुक्त होता है–(i) जब समक–माला की विभिन्न इकाइयों का अलग–अलग सापेक्षिक महत्व हो, (ii) जब समक–माला अनेक उपवर्गों में बंटी हुई हो और उनकी आवृत्तियों में परस्पर काफी अंतर हो, (iii) जब कई समूहों का सामूहिक माध्य ज्ञात करना हो, तथा (iv) जब अनुपातों, प्रतिशतों तथा दरों का माध्य निकालना हो।

सामान्य तथा प्रमापित दरों का सिद्धांत

स्मरण रहे, दो नगरों की स्वास्थ्य स्थित या मृत्यु दरों, जन्म दरों तथा विवाह दरों, बेरोजगारी दरों, परीक्षाफल प्रतिशतों आदि की तुलना करते समय (भारित समांतर माध्य पर आधारित) ''सामान्य एवं प्रमापित दरों के सिद्धांत'' का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के तौर पर यदि दो नगरों की औसत मृत्यु–दरों की तुलना करनी है तो उसके लिए निम्न दो प्रकार की औसत मृत्यु–दरों का मूल्यांकन किया जाता है–

1. **सामान्य मृत्यु–दर (Crude or General Death Rate)**– सामान्य मृत्यु दर के गणन की दो रीतियां हैं– (अ) प्रत्यक्ष रीति, तथा (ब) लघु रीति।

(अ) प्रत्यक्ष रीति (i) सबसे पहले निम्न सूत्र द्वारा प्रत्येक आयु–वर्ग की विशिष्ट मृत्यु–दर निकाल ली जाती है–

$$\text{आयु विशिष्ट मृत्यु दर \%} = \frac{\text{विशिष्ट आयु–वर्ग में मृत्यु–संख्या}}{\text{विशिष्ट आयु–वर्ग की जनसंख्या}} \times 1000$$

(ii) इसके बाद प्रत्येक आयु–वर्ग की प्रति हजार मृत्यु–दर (X) की, उसकी तत्संबंधी जनसंख्या (W) से गुणा की जाती है और गुणज का जोड़ (ΣWX) ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) प्राप्त गुणज के जोड़ (ΣWX) को नगर विशेष की कुल जनसंख्या (ΣW) से भाग देने पर नगर की 'सामान्य मृत्यु दर' ज्ञात हो जाती है।

(ब) लघु रीति– यह रीति सरल है क्योंकि इस रीति में प्रत्येक आयु–वर्ग की (अलग–अलग) प्रति–हजार मृत्यु–दर निकालने की आवश्यकता नहीं होती। केवल निम्न सूत्र का प्रयोग करके सामान्य मृत्यु दर निकाल ली जाती है–

$$\text{सामान्य मृत्यु दर} = \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

टिप्पणी

(2) प्रमापित मृत्यु–दर (Standardized Death Rate)– जैसा कि हम जानते हैं भारित माध्यों की तुलना का महत्वपूर्ण नियम यह है कि दोनों माध्यों में भार एक समान होने चाहिए। इस दृष्टि से दो नगरों की सामान्य मृत्यु–दर तुलना योग्य नहीं होती क्योंकि दोनों की गणना करते समय अलग–अलग जनसंख्याओं को दोनों माध्यों के लिए भार मान लेना चाहिए। इसकी विधि यह है कि स्थानीय नगर की आयु–वर्गानुसार प्रति हजार मृत्यु–दरों को, प्रमाप नगर की आयु–वर्गानुसार जनसंख्या से गुणा करके गुणज का जोड़ प्राप्त कर लिया जाता है। फिर, इस योग को प्रमाप नगर की कुल जनसंख्या से भाग देने पर जो भारित माध्य–दर प्राप्त होती है, वह ''स्थानीय नगर की प्रमापित या संशोधित मृत्यु–दर'' कहलाती है। अंत में स्थानीय नगर की SDR और प्रमाप नगर की GDR की आपस में तुलना की जाती है। जिस नगर की औसत मृत्यु–दर कम होती है, वही नगर अधिक स्वस्थ माना जाता है।

प्रमाप नगर का निर्धारण

यदि प्रश्न में दिए समकों से यह बात स्पष्ट न हो कि प्रमाप नगर कौन–सा है तो ध्यान रहे, पहले नगर को ही प्रमाप नगर मान लिया जाता है।

उदाहरण 3.49: निम्नलिखित तालिका से अशोधित तथा प्रमापित मृत्यु दरें मालूम कीजिए और बताइए कौन–सा नगर अधिक स्वस्थ है।

आयु वर्ग (वर्ष)	प्रमाप नगर (A)		स्थानीय नगर (B)	
	जनसंख्या	मृतकों की संख्या	जनसंख्या	मृतकों की संख्या
5 से कम	5,000	150	7,500	135
5–25	25,000	500	20,000	500
25–55	15,000	225	20,000	400
55 से अधिक	5,000	300	2,500	125
योग	**50,000**	**1,175**	**50,000**	**1,160**

हलः

औसत मृत्यु–दरों की गणना

आयु वर्ग (वर्ष)	नगर A (प्रमापित)			नगर B स्थानीय		
	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु–दर %	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु–दर %
	W_1		X_1	W_2		X_2
0–5	5,000	150	30	7,500	135	18
5–25	25,000	500	20	20,000	500	25
25–55	15,000	225	15	20,000	400	20
55 से अधिक	5,000	300	60	2,500	125	50
योग	**50,000**	**1175**		**50,000**	**1160**	

A नगर की सामान्य मृत्यु–दर (GDR या CDR)

$$= \frac{(30\times5000)+(20\times25000)+(15\times15000)+(60\times5000)}{50,000}$$

$$= \frac{11,75,000}{50,000} = 23.5\%$$

लघु रीति द्वारा GDR की गणना

टिप्पणी

$$\textbf{A नगर की GDR} = \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$= \frac{1175}{50,000} \times 1000 = 23.5\%$$

B नगर की सामान्य मृत्यु–दर (GDR या CDR)

$$= \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$= \frac{1160}{50,000} \times 1000 = 23.2\%$$

सामान्य मृत्यु–दरों के आधार पर दोनों नगरों की तुलना करना उपयुक्त नहीं है क्योंकि दोनों नगरों में भार (वर्गानुसार जनसंख्या) अलग–अलग हैं। उचित तुलना के लिए भारों का समान होना जरूरी है। अतः B नगर की प्रमापित मृत्यु–दर ज्ञात की जाएगी, जिसमें नगर A की जनसंख्या को भार माना जाएगा।

नगर B की प्रमापित मृत्यु दर (SDR)

$$= \frac{(18\times 5000)+(25\times 25000)+(20\times 15000)+(50\times 5000)}{50,000}$$

$$= \frac{12,65,000}{50,000} = 25.3\%$$

नगर A की GDR=23.5%, नगर B की SDR= 25.3%

अतः दोनों नगरों की तुलना से यह स्पष्ट है कि नगर A अधिक स्वस्थ है क्योंकि उसकी औसत मृत्यु–दर कम है।

(ख) माध्यिका (Median)

किसी समक श्रेणी को आरोही (Ascending – बढ़ते हुए) या अवरोही (Descending–घटते हुए) क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है, उसे माध्यिका कहते हैं। अर्थात माध्यिका स्थिति का माध्य (Average of Position) है। कौनर के शब्दों में ''माध्यिका, समक श्रेणी का वह चर–मूल्य है, जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बांटता है कि एक भाग में सारे मूल्य माध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में उससे कम हों।''

उदाहरण के लिए, यदि पांच व्यक्तियों की आय 5,000, 5,200, 5,500, 5,600, 5,800 है तो माध्यिका 5,500 होगा अर्थात दो व्यक्ति ऐसे हैं, जिनकी आय 5,500 रुपये से कम है और दो व्यक्ति ऐसे हैं, जिनकी आय 5,500 रुपये से अधिक। इस प्रकार माध्यिका, श्रेणी के बिल्कुल बीच में स्थित होता है और यह मूल्य श्रेणी को दो बराबर भागों में बांट देता है। माध्यिका से पहले तथा बाद की आवृत्तियां सदा समान

रहती हैं। यदि श्रेणी के मदों की संख्या सम या युग्म हैं तो उसमें कोई भी मूल्य बीच में नहीं होगा। ऐसी स्थिति में माध्यिका निकालने के लिए बीच के दो मूल्यों का औसत निकाल लेते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 6 व्यक्तियों की आय 5,000, 5,200, 5,500, 5,700, 5,800 तथा 6,500 रुपये है तो माध्यिका 5,500 और 5,700 के बीच अर्थात 5,600 होगा।

माध्यिका का निर्धारण–व्यक्तिगत श्रेणी में

व्यक्ति मूल्यों में माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न क्रियाएं की जाती हैं :

1. सर्वप्रथम, दिए हुए मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित (arrange) किया जाता है। दोनों क्रमों के अनुसार केंद्र बिंदु एक ही होता है। मूल्यों की क्रम संख्याएं (Serial Numbers) भी साथ–साथ लिख देनी चाहिए।
2. मूल्यों में क्रमबद्ध करने के पश्चात निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

   $M = \frac{N}{2}$ वीं वस्तु का परिमाण

   जहां M = माध्यिका (Median) N = मदों के संख्या

उदाहरण 3.50: कर्मचारियों को दिया हुआ वेतन इस प्रकार हैं –

क्रम संख्या	वेतन आरोही क्रम में व्यवस्थित	क्रम संख्या	वेतन आरोही क्रम में व्यवस्थित
1	5,000	5	6,800
2	5,500	6	6,900
3	6,400	7	7,000
4	6,600		

हलः

$M = \frac{N+1}{2}$ वें विषय का परिमाण $= \frac{7+1}{2} = 4$ वें विषय

चौथे मद का मूल्य = 6,600

अर्थात माध्यिका का मूल्य = 6,600 रु.

विच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण

विच्छिन्न आवृत्ति वितरण में माध्यिका ज्ञात करने की विधि निम्नलिखित है–

1. सर्वप्रथम, दिए गए मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।
2. संचयी आवृत्तियां (Cumulative Frequencies) निकालकर श्रेणी को संचयी आवृत्ति माला में बदल लिया जाता है।
3. निम्न सूत्र द्वारा माध्यिका की क्रम संख्या ज्ञात कर ली जाती है।

   $M = \frac{N}{2}$ वीं वस्तु का परिमाण जहां N = आवृत्तियों का योग

4. माध्यिका की क्रम–संख्या का मूल्य, संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम–संख्या प्रथम बार सम्मिलित होती है, उसका मूल्य ही माध्यिका होता है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.51: निम्न समकों से माध्यिका ज्ञात कीजिए–

आयु	20	21	22	23	24	25	26	27	28
कर्मचारियों की संख्या	8	10	11	16	20	25	15	9	6

हल: माध्यिका का परिगणन

आयु	आवृत्ति	संचयी आवृत्तियां
20	8	8
21	10	18
22	11	29
23	16	45
24	20	65
25	25	90
26	15	105
27	9	114
28	6	120

$M =$ मद $\frac{N+1}{2}$ का आकार $= \frac{120+1}{2} = 60.5$ मद

60.5 मद का आकार = 24 अर्थात माध्यिका आयु = 24 वर्ष।

माध्यिका का निर्धारण–अविच्छिन्न श्रेणी में

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करने की प्रणाली निम्नलिखित है–

1. सर्वप्रथम, संचयी आवृत्तियां ज्ञात की जाती हैं।
2. निम्न सूत्र द्वारा केंद्रीय मद ज्ञात किया जाता है।

$M = \frac{N}{2}$ वीं वस्तु का परिमाण

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका $\frac{N}{2}$ वीं वस्तु का ही मूल्य होता है $\frac{N+1}{2}$*th item* का नहीं। यद्यपि कुछ लेखकों ने अविच्छिन्न श्रेणी में $\frac{N+1}{2}$ का प्रयोग किया है लेकिन ऐसा करना ठीक प्रतीत नहीं होता क्योंकि अविच्छिन्न श्रेणी $\frac{N}{2}$ आवृत्ति वक्र के क्षेत्रफल को ठीक दो भागों में विभाजित करता है। $\frac{N+1}{2}$ नहीं।

टिप्पणी

3. जिस संचयी आवृत्ति में माध्यिका की संख्या सबसे पहली बार आती है, उससे संबंधित वर्ग को ले लिया जाता है, जिससे माध्यिका का ठीक मूल्य निकाला जाता है। इसकी निम्न व उच्च सीमाओं के अंतर्गत ही कहीं माध्यिका होगी।
4. माध्यिका वर्ग से माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$M = L + \frac{N/2 - c.f.}{f} \times i$$

जहां,

$L =$ माध्यिका–वर्ग की निम्न सीमा (Lower limit of median class),

$c.f =$ माध्यिका–वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequency of the Class Preceding the Median Class),

$f =$ माध्यिका–वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the median class),

$i =$ माध्यिका–वर्ग का वर्गांतर (Class interval of the median class),

विशेष– अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका–मूल्य ज्ञात करते समय यह कल्पना की जाती है कि प्रत्येक वर्ग की इकाइयों का उसके पूरे वर्गांतर में समान रूप से वितरण हुआ है।

उदाहरण 3.52: निम्न समकों से माध्यिका तथा माध्य ज्ञात कीजिए–

अनुपस्थित दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या
5 से कम	29
10 से कम	224
15 से कम	465
20 से कम	582
25 से कम	634
30 से कम	644
35 से कम	650
40 से कम	653
45 से कम	655

हल– माध्यिका का परिगणन

अनुपस्थित दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f)	(c.f.)
0–5	29	29
5–10	195	224
10–15	241	465
15–20	117	582
20–25	52	634
25–30	10	644
30–35	6	650
35–40	3	653
40–45	2	655

$$M = \frac{N}{2} \text{ वीं विषय का परिमाण} = \frac{655}{2} = 327.5 \text{ वें विषय}$$

अर्थात माध्यिका–वर्ग 10–15 है।

टिप्पणी

$$M = 10 + \frac{327.5 - 224}{241} \times 5 = 10 + 2.15 = 12.15$$

माध्यिका के गुण व दोष

गुण

1. गुणात्मक तथ्यों (Qualitative Facts) जैसे–ईमानदारी, बुद्धिमत्ता, क्षमता आदि का माध्य ज्ञात करने के लिए माध्यिका सर्वोत्तम मानी जाती है।
2. माध्यिका को समझना और ज्ञात करना बहुत सरल है।
3. माध्यिका पर चरम मूल्यों या सीमांत मदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
4. खुले–सिरे वाली सारणी में माध्यिका मूल्य सुगमता से ज्ञात किया जा सकता है। ऐसी सारणी में माध्यिका निकालने के लिए प्रथम वर्ग की निम्नतम सीमा तथा अंतिम वर्ग की उच्चतम सीमा निश्चित करना आवश्यक नहीं, जबकि माध्यिका निकालते समय ये सीमाएं निश्चित करनी पड़ती हैं।
5. रेखा–चित्र खींचकर माध्यिका मूल्य निर्धारित किया जा सकता है, जबकि माध्यिका में ऐसा संभव नहीं है।
6. माध्यिका एक स्पष्ट और निश्चित माध्य है, इसकी की भांति अनिश्चित नहीं है।

दोष

1. माध्यिका में बीजगणित के गुणों का अभाव है, इसलिए उच्चतर गणितीय क्रियाओं में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता। उदाहरणार्थ, माध्यिका मूल्य और मदों की संख्या को गुणा करने से सभी मदों के मूल्यों का जोड़ ज्ञात नहीं किया जा सकता।
2. माध्यिका–मूल्य निर्धारित करने से पूर्व मदों को आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यासित करना पड़ता है, जिसमें काफी समय लगता है।
3. अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करते समय मान्यता की जाती है कि प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियां समान रूप से वितरित हैं लेकिन यह मान्यता सदैव सत्य नहीं होती।
4. माध्यिका–मूल्य निकालते समय श्रेणी के सभी मदों को समान महत्व दिया जाता है।

(ग) बहुलक (Mode)

Mode शब्द की उत्पत्ति लैटिन शब्द *Modust* से हुई है, जिसका अर्थ है–फैशन या रिवाज। सांख्यिकीय में बहुलक उस मान को कहते हैं, जो समक माला में सबसे अधिक बार आता है अर्थात जिसकी आवृत्ति श्रेणी में सबसे अधिक हो। कुछ विद्वानों में बहुलक की परिभाषाएं निम्न प्रकार दी हैं–

टिप्पणी

जिजेक के मतानुसार, ''बहुलक वह मूल्य है, जो समूह में सबसे अधिक बार आता है और जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व वाले पदों का जमाव रहता है।''

क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार, ''एक बंटन का बहुलक वह मूल्य है, जिसके निकट श्रेणी की इकाइयां अधिक–से–अधिक केंद्रित होती हैं। उसे श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिरूपी या विशिष्ट मूल्य माना जा सकता है।''

बहुलक का निर्धारण

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निर्धारण–सिद्धांत रूप में एक व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण तब तक नहीं किया जा सकता, जब तक कि उसे खंडित या अखंडित श्रेणी में न बदल लिया जाए। अतः एक व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने की निम्न तीन रीतियां हैं–

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी (Discrete sceries) में बदल कर, या
2. सतत या अखंडित श्रेणी (Continuous series) में बदल कर, अथवा
3. समांतर माध्य (Arithmetic Mean) तथा माध्यिका (Median) की सहायता से बहुलक का अनुमान लगाकर।

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी में बदलना– जब व्यक्तिगत श्रेणी में अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाए जाते हों तब उसे खंडित श्रेणी में बदल लेना चाहिए। फिर, निरीक्षण द्वारा अधिकतम आवृत्ति वाले मूल्य को बहुलक घोषित कर दिया जाता है।

टिप्पणी– व्यवहार में व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण, निरीक्षण द्वारा भी कर लिया जाता हैं बशर्ते कि पदों की संख्या काफी कम हो और बहुलक पूर्णतया सुस्पष्ट हो। उदाहरण नीचे देखिए–

उदाहरण 3.53: निम्न श्रेणी का बहुलक ज्ञात कीजिए–

20 22 24 25 22 18 19 22 23 21 22

हल– निरीक्षण द्वारा स्पष्ट है कि 22 पद सबसे अधिक (3) बार आया है। अतः 22, बहुलक पद होगा। फिर, इसे खंडित श्रेणी में बदलने पर भी परिणाम यही रहेगा।

Size (x):	18	19	20	21	22	23	24	25	
Frequency (f)	1	1	1	1	4	1	1	1	$\Sigma f = 11$

अतः बहुलक (Mode) या Z =22

2. सतत या अखंडित श्रेणी में बदलना– जब किसी श्रेणी का कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार पाया जाता है, तब व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी में बदलने की प्रक्रिया बेकार सिद्ध होती है क्योंकि सभी मूल्यों की आवृत्ति समान रहने पर बहुलक का निर्धारण करना असंभव होता है। ऐसी स्थिति में व्यक्तिगत मूल्यों को अखंडित श्रेणी में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गांतर (बहुलक वर्गांतर) ज्ञात कर लेना चाहिए। फिर इस बहुलक वर्ग में से सूत्र द्वारा बहुलक–मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। इसकी विधि आगे स्पष्ट की गई है।

टिप्पणी

3. समांतर माध्य तथा माध्यिका की सहायता से बहुलक निर्धारण– यदि किसी व्यक्तिगत श्रेणी में समांतर माध्य ($\overline{X}$), माध्यिका (M) तथा बहुलक (Z) तीनों ही ज्ञात करने हो तो इन तीनों के पारस्परिक संबंध पर आधारित निम्न सूत्र द्वारा ही बहुलक मूल्य का अनुमान लगाया जाना चाहिए–

$$\left(\overline{X}-Z\right)-3\left(\overline{X}-M\right) \text{ या}$$

$$Z = 3M - 2\overline{X}$$

विशेष– इस सूत्र का प्रयोग केवल असाधारण स्थिति में अथवा परीक्षक द्वारा पूछने पर ही किया जाना चाहिए। उदाहरण नीचे देखिए।

उदाहरण 3.54: निम्न समकों से माध्य ($\overline{X}$), माध्यिका (M) तथा बहुलक $(Z) = (3M - 2\overline{X})$ ज्ञात कीजिए।

18.3   20.6   19.3   22.4   20.2   18.8   19.7   20.0

हल– माना इस श्रेणी का माध्य = 19.91 और माध्यिका = 19.85 ज्ञात किया गया है। अतः अब बहुलक का मान अग्रलिखित होगा–

$$Z = 3M - 2\overline{X} = (3\times19.85)-(2\times19.91) = 59.55 - 39.82 = 19.73$$

खंडित श्रेणी में बहुलक का निर्धारण (Mode in Discrete Series)

खंडित श्रेणी में बहुलक निर्धारण की दो रीतियां हैं– अ. निरीक्षण रीति तथा ब. समूहन रीति।

(अ) निरीक्षण रीति– बहुलक निर्धारण की निरीक्षण रीति का प्रयोग केवल तभी करना चाहिए जब आवृत्ति–बंटन निम्न शर्तें पूरी करता हो–

1. श्रेणी की आवृत्तियां नियमित हों अर्थात आवृत्तियां पहले बढ़ें फिर अधिकतम हों और उसके बाद गिरती हुई हों।
   (ii) श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति, केवल एक–ही हो और वह लगभग केंद्र में हो।
   (iii) अधिकतम आवृत्ति से पहले और बाद की आवृत्तियों के योग में अधिक अंतर न हो।

उदाहरण 3.55: निम्नलिखित श्रेणी से बहुलक आय ज्ञात कीजिए–

प्रतिदिन वेतन रुपए (x)	10	15	20	25	30	35	40
व्यक्तियों की संख्या (f)	20	32	40	65	48	28	16

हल: उपरोक्त श्रेणी में आवृत्तियां नियमित हैं। अतः निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात किया जाएगा। अधिकतम आवृत्ति 65 है, जिसका मूल्य 25 रु. है। अतः बहुलक आय या $Z = 25$ रु.

विशेष टिप्पणी– ध्यान रहे, यह आवश्यक नहीं कि सभी स्थितियों में अधिकतम आवृत्ति, संकेंद्रण या घनत्व को दर्शाती हो। इसलिए आवृत्ति–संकेंद्रण के सटीक बिंदु की

जानकारी (खंडित या अखंडित दोनों श्रेणियों में) समूहन रीति द्वारा कर लेनी चाहिए। दूसरी बात, चूंकि बहुलक अपने अड़ोस–पड़ोस की आवृत्तियों से बेहद प्रभावित होता है इसलिए अधिकतम संकेंद्रण के वास्तविक बिंदु की जानकारी प्राप्त करना अत्यावश्यक है।

(ब) समूहन रीति– समूहन रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है, जब समकमाला की आवृत्तियां अनियमित हों, क्योंकि ऐसी स्थिति में अधिकतम आवृत्ति का पता नहीं लग पाता। आवृत्तियां निम्न दशाओं में अनियमित मानी जाती हैं–

(i) जब अधिकतम आवृत्ति या अधिकतम आवृत्ति संकेंद्रण, दो या दो से अधिक स्थानों पर हो।

(ii) जब अधिकतम आवृत्ति केंद्र में न होकर श्रेणी के एकदम शुरू में या फिर अंत में हो।

(iii) जब आवृत्तियां अनियमित रूप से कभी बढ़ती और कभी घटती हुई हों।

(iv) अधिकतम आवृत्ति के अगल–बगल की आवृत्तियां बहुत कम हों परंतु किसी अन्य स्थान पर आवृत्तियों का जमाव अत्यधिक हो। अनियमित आवृत्तियों का एक उदाहरण नीचे दिया गया है–

उदाहरण 3.56: नीचे दिए समकों से कॉलर का बहुलक–माप निर्धारित कीजिए–

कॉलर माप सेमी (x)	30	31	32	33	34	35	36	37
व्यक्तियों की संख्या (F)	2	9	3	4	8	7	8	5

हल: यद्यपि निरीक्षण से यही लगता है कि 31 पद बहुलक होगा क्योंकि इसकी आवृत्ति (9) अधिकतम है। परंतु यह निष्कर्ष गलत है क्योंकि आवृत्तियों का वितरण अनियमित हैं। पहली बात तो यह है कि आवृत्ति के बढ़ने–घटने का क्रम बेतरतीब है। दूसरा, अधिकतम आवृत्ति केंद्र में नहीं है और उसकी अगल–बगल की आवृत्तियां भी बहुत छोटी हैं। तीसरा, आवृत्तियों का जमाव श्रेणी के अंतिम भाग में अधिक है। अतः यहां बहुलक का निर्धारण समूहन रीति द्वारा किया जाएगा।

समूहन रीति द्वारा बहुलक–निर्धारण

Collar	आवृत्ति Frequency						**अधिकतम आवृत्तियों की संख्या** No. of Max Frequency	
Size X	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)		
30	2	11 (30–31)		14 (30–32)				0
31	9		12 (31–32)		16 (31–33)		I	1
32	3	7 (32–33)				15 (32–34)		0
33	4		12 (33–34)	**19** (33–35)			I	1
34	8	15 (34–35)			**23** (34–36)		III	3
35	7		**15** (35–36)			**20** (35–37)	~~IIII~~	5
36	8	**13** (36–37)					III	3
37	5						I	1

समूहन की प्रक्रिया – समूहन क्रिया के लिए एक सारणी बनाई जाती है, जिसमें चर–मूल्यों के अलावा आवृत्तियों के प्रयोग के लिए 6 कॉलम होते हैं। यहां उल्लेखनीय यह है कि समूहन–क्रिया करते समय केवल आवृत्तियों का प्रयोग किया जाता है, पद–मूल्यों का नहीं। क्रिया विधि इस प्रकार है–

टिप्पणी

पहले खाने में, प्रश्न में दी हुई आवृत्तियां लिखी जाती हैं।

दूसरे खाने में, शुरू से दो–दो आवृत्तियों को जोड़कर उनके योग लिखे जाते हैं, जैसे– 2+9=11, 3+4=7 और

चौथे खाने में, बिना कोई आवृत्ति छोड़े अर्थात शुरू से ही, तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–2+9+3=14 तथा 4+8+7=19, आदि............

पांचवे खाने में, पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–9+3+4=16, 8+7+8=23 तथा

छठे खाने में, शुरू की दो आवृत्तियां छोड़कर, तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–3+4+8=15, 7+8+5=20, आदि........।

विशेष 1. इस क्रिया के बाद प्रत्येक कॉलम की अधिकतम आवृत्ति या आवृत्ति समूह को चिह्नित या रेखांकित कर दिया जाता है। ऐसा करने से विश्लेषण सारणी बनाने में काफी सुविधा हो जाती है।

2. समूहन में न आ सकने वाली आवृत्ति को छोड़ दिया जाता है। जैसे ऊपर दिए उदाहरण के कॉलम 3. में आवृत्ति 5 को और कॉलम 4. में आवृत्ति 8 व 5 को छोड़ दिया गया है।

विशेष – सिद्धांत रूप में यदि आवश्यक हो तो आवृत्तियों को 4–4 तथा 5–5 के समूह में भी जोड़ा जा सकता है। परंतु आमतौर पर 3–3 तक के समूहन से ही बहुलक का निर्धारण हो जाता है। अतः और अधिक समूहन करने के बजाए घनत्व–परीक्षण का प्रयोग कर लेना चाहिए।

विश्लेषण सारणी– विश्लेषण सारणी की तुलना हम वोटों की गिनती करने की प्रक्रिया से कर सकते हैं। जिस प्रकार चुनाव में मतदान के बाद वोटों की गिनती की जाती है, ठीक उसी प्रकार आवृत्तियों का समूहन करने के बाद विश्लेषण सारणी बनाकर हम पता लगाते हैं कि वास्तव में कौन–सा पद मूल्य, बहुलक होने का दावेदार है अर्थात अधिक लोकप्रिय है।

विश्लेषण–सारणी

कॉलम संख्या	पद–मूल्य							
	30	31	32	33	34	35	36	37
(i)		✓						
(ii)					✓	✓		
(iii)						✓	✓	
(iv)				✓	✓	✓		
(v)					✓	✓	✓	
(vi)						✓	✓	✓
कुल	0	1	0	1	3	5	3	1

विश्लेषण प्रक्रिया– विश्लेषण सारणी में सबसे पहले, समूहन सारणी के विभिन्न कॉलमों की संख्या क्रमानुसार लिख दी जाती है। इन कॉलम–संख्याओं को आप मतपत्र समझ

टिप्पणी

लीजिए। विश्लेषण सारणी के क्षैतिज भाग में पद–मूल्य लिख दिए जाते हैं। इन्हें आप ''प्रत्याशी'' या ''उम्मीदवार'' समझ लीजिए। अब समूहन तालिका का पहला कॉलम देखिए। इसमें अधिकतम आवृत्ति 9 है। विश्लेषण सारणी में कॉलम (i) के सामने और 31 के नीचे एक टेलीबार या (√) का निशान लगाकर दिखाया गया है। स्पष्ट है कि पहला वोट 31 पद मूल्य (उम्मीदवार) को मिला है। अब दूसरा कॉलम लीजिए। इसमें अधिकतम आवृत्ति–समूह 15 है, जो 8 व 7 का योग है। यह बताता है कि 34 और 35 दोनों बहुलक हैं। अतः इसके कॉलम (ii) के सामने 34 और 35 दोनों के नीचे (√) लगाकर दिखाया गया है। यही क्रिया अन्य कॉलमों के लिए भी की जाएगी।

अंत में जिस पद–मूल्य के सामने अधिकतम चिह्न होते हैं अर्थात जिसको सबसे अधिक वोट मिलते हैं, उस मूल्य को ही बहुलक घोषित कर दिया जाता है। विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि बहुलक मूल्य 31 नहीं, बल्कि 35 है। इसका कारण यह है कि 31 की तुलना में 35 मूल्य के आस–पास आवृत्तियों का जमाव अधिक है।

अतः बहुलक आकार (Modal Size) = 35 सेमी.

अखंडित या सतत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण– अखंडित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए सबसे पहले बहुलक–वर्ग का पता लगाया जाता है। इसकी दो रीतियां हैं। यदि आवृत्तियां नियमित हैं तो निरीक्षण द्वारा और यदि आवृत्तियां अनियमित हैं तो फिर समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण कर लिया जाता है। इसके बाद बहुलक के मूल्य की निम्न सूत्र की सहायता से आंतरिक गणना कर ली जाती है (जो बहुलक वर्ग की सीमाओं के अंदर ही आना चाहिए)–

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

या

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times l_2 - l_1$$

$Z =$ बहुलक मूल्य (Value of the mode)

$l_1 =$ बहुलक–वर्ग की निचली सीमा (Lower limit of the modal class)

$f_1 =$ बहुलक–वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the modal class)

$f_o =$ बहुलक–वर्ग से तुरंत पहले वाले वर्ग अर्थात उससे लघुतर वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the pre-modal class, i.e., the class just lower than the modal class)

$f_2 =$ बहुलक–वर्ग के तुरंत बाद वाले अर्थात उससे उच्चतर वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the post-modal or succeeding class, i.e. the class just higher than the modal class)

$i =$ बहुलक वर्ग का विस्तार (Magnitude of the modal class or l_2-l_1)

टिप्पणी

सूत्र का आधार

यह सूत्र ऊपर बताई जा चुकी इस मान्यता पर आधारित है कि बहुलक अपने निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियों से प्रभावित होता है। अतः यदि पिछले वर्ग की आवृत्ति, अगले वर्ग की आवृत्ति से बड़ी है तो बहुलक का मूल्य (Z) बहुलक–वर्ग की निचली सीमा (l_1) के अधिक निकट होगा। इसके विपरीत, यदि अगले वर्ग की आवृत्ति पिछले वर्ग की आवृत्ति से बड़ी है तो फिर बहुलक ऊपरी सीमा (l_2) के निकट होगा।

सूत्र का दूसरा रूप– आवृत्तियों के अंतर के रूप में यह सूत्र इस प्रकार भी लिखा जाता है–

निचली (अधर) सीमा में जोड़कर ऊपरी (अपर) सीमा में घटाकर

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i \qquad\qquad Z = l_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

यहां $\Delta_1 = f_1 - f_o$ तथा $\Delta_2 = f_1 - f_2$

l_1 तथा l_2 = बहुलक–वर्ग की क्रमशः निचली तथा ऊपरी सीमा

पहला सूत्र सबसे सरल है। सदैव पहले सूत्र का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण 3.57: निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए–

वर्ग अंतराल	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
अवृत्ति	20	24	32	28	20	16	34	10	8

हलः आवृत्तियां अनियमित होने के कारण बहुलक वर्ग का निर्धारण, समूहन रीति द्वारा किया जाएगा–

समूहन रीति द्वारा बहुलक–वर्ग का निर्धारण

वर्ग (Class)	आवृत्ति (Frequency)						अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग (Classes with Highest Frequencies)	
	आवृत्ति	दो–दो जोड़ (2–2)		तीन–तीन जोड़ (3–3)				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	Analysis Table	
0-15	20	44		**76**			|	1
5-10	24		**56**		**84**	**80**	||	3
10-15	32	**60**					~~||||~~	5
15-20	28		48	64			|||	3
20-25	20	36					|	1
25-30	16		50		70	60		0
30-35	34	44		52				1
35-40	10		18					0
40-45	8							0

उपर्युक्त सारणी से पता चलता है कि 10–15 बहुलक–वर्ग है अर्थात बहुलक इन दो सीमाओं के बीच स्थित है। अतः आंतरिक गणना की क्रिया के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

टिप्पणी

$$M_o \; or \; Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \quad [l_1 = 10, f_o = 24, f_1 = 32, f_2 = 28, i = 5]$$

सूत्र में मूल्य निर्धारित करने पर

$$z = 10 + \frac{32 - 24}{2 \times 32 - 24 - 28} \times 5 = 10 + \frac{8 \times 5}{64 - 52} = 10 + 3.33 = 13.33$$

दूसरे सूत्र का प्रयोग करने पर –

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i \qquad\qquad Z = l_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

$$l_1 = 10, \Delta_1 = f_1 - f_o = 32 - 24 = 8, i = 5 \qquad\qquad \Delta_2 = f_1 - f_2 = 32 - 28 = 4, i = 5$$

$$z = 10 + \frac{8}{8+4} \times 5 = 10 + 3.33 \qquad\qquad Z = 15 - \frac{4}{8+4} \times 5 = 15 - 1.67$$

$$\therefore z = 13.33 \qquad\qquad \therefore z = 13.33$$

बहुलक संबंधी कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

1. **वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग**– जब कभी बहुलक–वर्ग की आवृत्ति (f_1) की तुलना में, उससे पहले वाले तथा बाद वाले अर्थात दोनों वर्गों की आवृत्तियां (f_o and f_2) बड़ी हों या दोनों में से कोई एक भी बड़ी हो तो सामान्य सूत्र के स्थान पर नीचे दिए वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करना चाहिए, अन्यथा उत्तर बहुलक वर्ग के बाहर आएगा, जो कि गलत है–
$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$
2. **घनत्व परीक्षण**– कभी–कभी समूहन के बाद भी यह देखने में आता है कि दो या दो से अधिक वर्गों की आवृत्तियां, समान–रूप से अधिकतम बार पायी जाती हैं। ऐसी स्थिति में उनमें से बहुलक वर्ग का निर्णय लेने के लिए उन वर्गों की ओर उनके निकटवर्ती (पिछले व अगले) वर्गों की आवृत्तियां जोड़कर उन जोड़ों की तुलना की जाती है। जिस वर्ग–समूह का जोड़ अधिक होता है, वही बहुलक वर्ग मान लिया जाता है। हां, यदि उनका जोड़ भी बराबर आ जाए तो फिर उसे द्वि–बहुलक श्रेणी घोषित कर देना चाहिए अर्थात उस श्रेणी का बहुलक मूल्य अनिश्चित तथा अनिर्धारित है।
3. **समावेशी वर्गांतर**– यदि वर्गांतर समावेशी आधार पर दिए गए हैं तो सूत्र वही रहता है परंतु बहुलक ज्ञात करने से पहले अर्थात आंतरिक गणना करते समय उन्हें अपवर्जी श्रेणी में बदल लेना चाहिए। ऐसा न करने पर उत्तर गलत माना जाएगा।
4. **संचयी आवृत्ति श्रेणी या बंटन में बहुलक**– यदि श्रेणी संचयी आवृत्ति बंटन के आधार पर दी हुई है तो बहुलक निकालने के लिए पहले उसे सामान्य आवृत्ति बंटन में बदल लेना चाहिए।

टिप्पणी

5. **श्रेणी या वर्गांतरों का अवरोही क्रम**– यदि श्रेणी आरोही के स्थान पर अवरोही क्रम में दी गयी है अर्थात ऊपर से नीचे की ओर घटती हुई है तो ऐसी स्थिति में हमारे पास निम्न दो विकल्प हैं–

   (क) **सामान्य सूत्र का प्रयोग**– सामान्य सूत्र का प्रयोग करने की स्थिति में f_o का मान बहुलक वर्ग से निचले वर्ग की आवृत्ति f_2 बहुल वर्ग से उच्चतर वर्ग की आवृत्ति मानी जाएगी।

   (ख) **संशोधित सूत्र का प्रयोग**– ऐसी स्थिति में सामान्य सूत्र में थोड़ा परिवर्तन करना पड़ता है अर्थात (l_1+) के स्थान पर (l_2-) का प्रयोग किया जाता है। परंतु ध्यान रहे f_0= पिछले–वर्ग की आवृत्ति और f_2= अगले वर्ग की आवृत्ति मानी जाएगी। सूत्र व उदाहरण नीचे देखिए–

आरोही वर्गांतर	**अवरोही वर्गांतर**
$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$	$Z = l_2 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$

6. **जब माध्य–मूल्य दिए हों**– कभी–कभी प्रश्न में वर्गांतरों के स्थान पर उनके माध्य–मूल्य दिए होते हैं। चूंकि अखंडित श्रेणी में बहुलक तथा माध्यिका निकालने के लिए वर्गांतरों के लिए वर्गांतरों की दोनों सीमाओं (l_1 तथा l_2) की जानकारी होना आवश्यक है, अतः ऐसी स्थिति में प्रश्न हल करने से पूर्व सूत्र द्वारा वर्गांतरों की ऊपरी तथा निचली सीमाएं ज्ञात कर लेनी चाहिए।

7. **असमान वर्गांतर वाली श्रेणी**– यदि श्रेणी में वर्ग–विस्तार असमान है तो प्रश्न हल करने से पूर्व उसे समान कर लेना चाहिए क्योंकि बहुलक का सूत्र समान–वर्गांतर की मान्यता पर आधारित है।

   महत्वपूर्ण टिप्पणी– यदि प्रश्न में बहुलक–वर्ग और उसके निकटवर्ती दोनों वर्गों (अर्थात बहुलक हेतु आवश्यक तीन वर्गों) का वर्ग विस्तार समान है तो शेष असमान–वर्गों की चिंता किए बिना बहुलक ज्ञात कर लेना चाहिए।

8. **अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण**– यदि किसी सतत आवृत्ति श्रेणी का बहुलक तथा कुल आवृत्तियों का योग ज्ञात हो तो कुछ अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण सूत्र की सहायता से किया जा सकता है।

बहुलक के गुण

1. **श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी आवश्यक नहीं**– बहुलक के लिए श्रेणी के सभी पद–मूल्यों की जानकारी भी आवश्यक नहीं है। एक नियमित आवृत्ति–श्रेणी में बहुलक वर्ग और उसके निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियों के आधार पर ही बहुलक ज्ञात किया जा सकता है।

2. **सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व**– चूंकि बहुलक श्रेणी का वह मूल्य होता है, जिसकी पुनरावृत्ति सबसे अधिक बार होती है, अतः इस आधार पर बहुलक श्रेणी का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला माध्य माना जाता है। फिर, बहुलक का मूल्य,

श्रेणी में दिए हुए पद–मूल्यों में से ही कोई एक होता है, जबकि अन्य माध्यों पर यह बात लागू नहीं होती।

3. **बिंदुरेखीय रीति द्वारा निर्धारण**– बिंदुरेखीय रीति द्वारा भी बहुलक का निर्धारण आसानी से किया जा सकता है।
4. **चरम मूल्यों से प्रभावित न होना**– बहुलक पर श्रेणी के चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि अधिकतम आवृत्ति संकेंद्रण प्रायः श्रेणी के मध्य में होता है न कि चरम सीमाओं के आस–पास।
5. **लोकप्रियता**– बहुल एक ऐसा माध्य है, जिसका दैनिक जीवन में काफी प्रयोग किया जाता है, जैसे–जूते, सिले–सिलाए कपड़े आदि। औसत आकार से हमारा अभिप्राय बहुलक के आकार से होता है।
6. **आगणन में सरलता तथा बुद्धिगम्य**– बहुलक का सबसे बड़ा गुण इसकी सरलता है। यह माध्य अधिकतर निरीक्षण से ही ज्ञात हो जाता है फिर, इसका निर्धारण करने में गणितीय परिकलन की भी आवश्यकता नहीं होती।

बहुलक के दोष

1. **अवास्तविक तथा अप्रतिनिधिक**– बहुलक का एक अन्य दोष, इसके द्वारा श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व न कर पाना है। उदाहरण के तौर पर यदि 200 व्यक्तियों में से 10 लोगों की आय 100 रुपये है और शेष 190 लोगों की आय 100 रुपये से कम है तो बहुलक आय 100 रुपये होगी। परंतु यह बहुलक आय पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नहीं करती क्योंकि 200 व्यक्तियों में से यह केवल 10 व्यक्तियों की आय है, जबकि उनसे 19 गुणा (190) व्यक्तियों की आय 100 रुपये से कम है। अतः स्पष्ट है कि कुछ परिस्थितियों में बहुलक से भ्रमात्मक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।
2. **अस्पष्ट अनिश्चित तथा अनिर्धारित**– बहुलक का सबसे बड़ा दोष दूसरी अस्पष्टता एवं अनिश्चितता है। जब श्रेणी के सभी पदों की आवृत्तियां समान हों, तब बहुलक का निर्धारण नहीं किया जा सकता। कभी–कभी एक श्रेणी में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं जो कि हास्यप्रद जान पड़ता है।
3. **बीजगणितीय विवेचन का संभव न होना**– चूंकि बहुलक श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होता इसलिए इस माध्य का बीजगणित विवेचन संभव नहीं है। वास्तव में, इस दोष के कारण ही बहुलक का अन्य सांख्यिकीय रीतियों तथा सूत्रों में बहुत कम प्रयोग हो पाता है।
4. **जटिलता**– जब निरीक्षण द्वारा बहुलक का पता नहीं चल पाता तो फिर उसके लिए समूहन व आंतरिक गणना की प्रक्रिया काफी जटिल सिद्ध होती है।
5. **चरम मूल्यों की उपेक्षा**– यह माध्य चरम मूल्यों को कोई महत्व नहीं देता जो कि गणितीय दृष्टि से उचित नहीं है।

बहुलक के एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुणों में से कोई भी गुण नहीं है। ऊपर बताए गए अधिकांश गुण ही इसके प्रमुख अवगुण हैं। सच तो यह है कि बहुलक,

माध्य–परिवार का सबसे बिगड़ा हुआ सदस्य है परंतु इसके बावजूद एक अत्यधिक विषम बंटन या गैर–प्रसामान्य बंटन की स्थिति में यह केंद्रीय प्रवृत्ति का सर्वाधिक अर्थपूर्ण माप है, जो अधिकतम संकेंद्रण के बिंदु को सर्वोत्तम रूप में इंगित करता है।

टिप्पणी

ज्यामितीय / गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य

ज्यामितीय माध्य श्रेणी के समस्त पद मूल्यों के गुणनफल का वह मूल है जितनी कि उस श्रेणी में इकाइयां है। गुणोत्तर माध्य की गणना श्रेणी के समस्त मूल्यों का गुणा करके पदों की संख्या के बराबर उसका मूल्य निकालकर की जाती है।

गुणोत्तर माध्य (G) n मानों के गुणनफल का nवाँ मूल होता है। गुणोत्तर माध्य का सूत्र निम्न है–

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

2, 4, 8 का गुणोत्तर माध्य (G. M.) इनके गुणनफल का घनमूल है।

$$G = \sqrt[3]{2.4.8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

यदि $x_1, x_2.., \ldots\ldots\ldots, x_k$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2 \ldots\ldots\ldots\ldots, f_k$ हैं $(\Sigma f = n)$

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} \ldots . x_k^{f_k}}$$

गुणोत्तर माध्य की गणना में लघुगणक का प्रयोग किया जा सकता है।

$$\log G = \frac{1}{n}[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots . + f_k \log x_k]$$

$$= \frac{\Sigma f \log x}{n}$$

$$G = \text{Antilog } \frac{1}{n} \Sigma f \log x$$

यदि कोई बारम्बारता न हो, तो $G = (x_1\, x_2 \ldots .\, x_n)^{\frac{1}{n}}$ एवं $\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log x$

गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की विधियां

गुणोत्तर माध्य को तीन प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है–

1. व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।
2. खंडित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।
3. सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।

1. व्यक्तिगत श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– व्यक्तिगत श्रेणी से गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न है–

(क) संख्याओं का लघुगणक ज्ञात किया जाता है।

(ख) लघुगणकों का योग किया जाता है।

(ग) लघुगणकों के योग को पदों की संख्या से भाग दिया जाता है तथा भागफल का प्रतिलघुणक ज्ञात किया जाता है। सूत्र रूप में–

$$\text{G.M.} = \text{प्रतिलघुगुणक}\left[\frac{\sum \log X}{N}\right] \text{ यहां N = पदों की संख्या}$$

2. खंडित श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– खंडित श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है–

(क) विभिन्न मूल्यों के लघुगणक ज्ञात किये जाते हैं।

(ख) प्रत्येक लघुगणक का संबंधित आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग निकाला जाता है।

(ग) गुणनफल के योग में आवृत्तियों के योग (N) से भाग देकर, प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक निकाला जाता है।

सूत्र के अनुसार–

$$\text{G.M.} = \text{प्रतिलघुगुणक}\left[\frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 \ldots f_n \log x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_n}\right]$$

$$\text{प्रतिलघुगुणक} = \left[\frac{\sum(f \log x)}{n}\right]$$

3. सतत् श्रणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए वर्गांतरों के मध्य बिंदु (x) निकाल कर उनके लघुगणक ($\log x$) निकाला जाता है। प्रत्येक लघुगणक का संबंधित आवृत्ति से गुणा ($f \times \log x$) करके गुणनफलों का योग $\left[\sum(f \log x)\right]$ किया जाता है। योग में आवृत्तियों के योग (Σf) से भाग देकर प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक निकाला जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$G.M. = Anti \log \frac{\sum(f \log x)}{N}$$

गुणोत्तर माध्य के गुण एवं उपयोग

गुणोत्तर माध्य के अधिकतर गुण एवं विशेषताएँ समांतर माध्य के सदृश हैं–

(i) गुणोत्तर माध्य आँकड़े में सभी मदों का उपयोग कर उन्हें एक उपयोगी मान में संघनित करता है।

(ii) इसका झुकाव नीचे की ओर होता है। यह बड़े मानों की अपेक्षा छोटे मानों को अधिक महत्व (भार) देता है।

(iii) यह ठीक–ठीक निर्धारित होता है। समान आँकड़े के लिए दो गुणोत्तर माध्य हो सकते हैं।

(iv) यह आँकड़े के किसी एक ओर के मानों को संतुलित करता है। यह परिवर्तन की औसत दरों जैसे सूचकांक और अनुपातों के बीच मापों एवं प्रतिशतों के लिए आदर्श रूप से उपयुक्त होता है।

(v) यह समांतर माध्य की तरह बीजगणितीय गणनाओं के लिए सहज प्रयोग करने लायक होता है।

टिप्पणी

गुणोत्तर माध्य के अवगुण

(i) इसका उपयोग करना एवं इसकी गणना करना कठिन होता है।

(ii) यह धनात्मक मानों के लिए निश्चित होता है और शून्य के ऋणात्मक मानों के लिए प्रयुक्त नहीं हो सकता। एक शून्य समूचे गुणनफल को शून्य में परिवर्तित कर देगा।

हरात्मक माध्य

हरात्मक माध्य एक विशिष्ट प्रकार का माध्य है जो ऐसी समस्याओं जिसमें समय, दर जैसे किलोमीटर, प्रतिघंटा, प्रतिदिन निर्मित इकाइयां, प्रति वर्ष पूरे किये गए अनुबंध आदि से संबंधित चरों से व्यवहार निहित होता है, के समाधान में उपयोगी होता है। अतः हरात्मक माध्य एक सीमित क्षेत्र में प्रयोग होने वाला माध्य है। एक समंकमाला का हरात्मक माध्य उसके मूल्यों के व्युत्क्रमों के मध्य व्युत्क्रम होता है।

हरात्मक माध्य की गणना

हरात्मक माध्य की गणना तीन प्रकार से की जाती है– 1. व्यक्तिग श्रेणी, 2. विच्छिन्न श्रेणी, 3.अविच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना।

1. व्यक्तिग श्रेणी– व्यक्तिगत श्रेणी से हरात्मक माध्य निकालने की प्रक्रिया निमन प्रकार से है–

(क) मूल्यों का व्युत्क्रम ज्ञात करें अर्थात $\frac{1}{x}$ निकालें।

(ख) व्युत्क्रमों का योग करके उन्हें n से भाग दें अर्थात $\frac{\sum \frac{1}{x}}{n}$ ज्ञात करें।

(ग) $\frac{\sum \frac{1}{x}}{n}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करें। यही अभीष्ट हरात्मक माध्य होगा।

2. विच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना– विच्छिन्न श्रेणी में मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात करके संबंधित आवृत्ति से गुणा कर दिया जाता है। गुणनफलों के योग को आवृत्तियों के योग से भाग देकर प्राप्त संख्या का व्युत्क्रम ज्ञात किया जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$H.M. = \frac{N}{\sum\left(f \times \frac{1}{x}\right)}$$ जहां $\mathrm{n} = \Sigma f$ = आवृत्तियों का योग है।

3. अविच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना– सतत् श्रेणी के वर्गों के माध्य बिंदु (m) ज्ञात करके उनके व्युत्क्रम निकाले जाते हैं तथा उनका वर्ग आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों के योग में आवृत्तियों के योग से भाग देकर प्राप्त संख्या का व्युत्क्रम निकाला जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$H.M. = \frac{N}{\sum\left(f \times \frac{1}{x}\right)}$$

टिप्पणी

हरात्मक माध्य के गुण एवं दोष

हरात्मक माध्य के गुण एवं दोषों को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

गुण

1. हरात्मक माध्य समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होता है।
2. गति ज्ञात करने में हरात्मक माध्य अधिक उपयोगी होता है।
3. हरात्क माध्य में बड़े मूल्यों के पदों को कम तथा छोटे मूल्यों के पदों को अधिक महत्व दिया जाता है।

दोष

1. हरात्मक माध्य की गणना करना कठिन होता है, अतः सामान्य व्यक्ति इसे कठिनता से ही समझ पाता है।
2. हरात्मक माध्य ऐसी संख्या हो सकती है जो उस श्रेणी में न हो।
3. हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए समंकमाला के समस्त पदों का ज्ञान होना आवश्यक है।

हरात्मक माध्य के विशेष प्रयोग

व्यवहार में हरात्मक माध्य का प्रयोग कुछ विशेष प्रकार की परिस्थितियों में ही किया जाता है। किसी फर्म के लाभ की औसत वृद्धि–दर किसी मात्रा की औसत गति, किसी वस्तु की औसत कीमत जिस पर वह बेची गयी है और चलन वेग की औसत दर आदि ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य विशेष रूप से उपयुक्त है।

माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के मध्य संबंध

समंकमाला के सभी पद यदि समान मूल्य के हो तो उनका माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य समान हो। सूत्र के रूप में–

$$\overline{X} = G.M = H.M.$$

यदि पदों के मूल्य असमान होंगे तो उनका माध्य गुणोत्तर माध्यम से अधिक होगा तथा गुणोत्तर माध्यम हरात्मक माध्यम से अधिक होगा। इसका कारण यह है कि माध्य में बड़े मूल्यों को अधिक तथा छोटे मूल्यों को कम भार दिया जाता है तथा गुणोत्तर माध्यम में बड़े मूल्यों को कम तथा छोटे मूल्यों को अधिक भारत दिया जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$\overline{X} > G.M = H.M.$$

किन्हीं दो मूल्यों का गुणोत्तर माध्य उनके माध्य तथा हरात्मक माध्य के गुणोत्तर माध्य के बराबर होता है। सूत्र के अनुसार–

$$G.M = \sqrt{\overline{X} \times H.M} \qquad \text{or}$$

$$G.M^2 = \overline{X} \times H.M.$$

टिप्पणी

उदाहरण 3.58: 8, 7, 6, 18, 11 और 10 माध्य (या औसत) ज्ञात कीजिए–

हलः $\text{माध्य} = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

$$= \frac{8+7+6+18+11+10}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

उदाहरण 3.59: एक विद्यालय की नवीं कक्षा के 30 विद्याथ्रियों द्वारा प्राप्त किए गए अकों का माध्य ज्ञान कीजिए।

10, 20, 36, 92, 95, 40, 50, 56, 60, 80, 92, 88, 80, 70, 72,
70, 36, 40, 36, 40, 92, 40, 40, 50, 56, 60, 70, 60, 60

हलः $\text{माध्य} = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

= 10 + 20 + 36 + 92 + 35 + 40 + 50 + 56 + 60 + 80 + 92 + 88 + 80 + 70 + 72 + 10 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88

$$= \frac{1779}{30} = 59.3$$

उदाहरण 3.60: एक कक्षा के 9 विद्याथियों की लंबाइयाँ (सेंटीमीटरों में) इस प्रकार है।

155, 197, 145, 149, 153, 147, 152, 149, 142

उपरोक्त आंकड़ों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हलः माध्यक ज्ञात करने के लिए सबसे पहले हम इन आंकड़ों को आरोही क्रम में लिखते हैं,

144, 145, 147, 148, 149, 152, 153, 155, 157 चूंकि विद्यार्थियों की संख्या 9 है, जो विषम है। इसलिए हम $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वें $= \left(\dfrac{9+1}{2}\right)$वें = 5वें विद्यार्थी की लंबाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, प्राप्त करके माध्यक ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण 3.61: कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त गए अंक इस प्रकार हैं**:**

17, 2, 7, 25, 17, 5, 14, 8, 9, 24, 49, 10, 8, 6, 18, 29 माध्यम ज्ञात कीजिए।

हलः सबसे पहले इन्हें आरोही क्रम में लिखते हैं।

2, 5, 6, 7, 8, 8, 9 10, 14, 17, 17, 18, 24, 25, 29, 49 यहाँ 16 पद है तो $\dfrac{16}{2}$ वें अर्थात् 8वें और 9वें पद है मध्य माध्यक $= \dfrac{10+14}{2} = 12$

उदाहरण 3.62: एक कक्षा के 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

9, 2, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 7, 3, 4, 7, 6, 2, 9 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 9, 10

हल: यहाँ 9 सबवे अधिक बार अर्थात् पाँच बार आया है। इसलिए बहुलक 9 है।

टिप्पणी

3.4.2 प्रायिकता

अभिप्रयोग: यह वह क्रिया है जिसमें एक या एक से अधिक परिणाम प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 3.63: 1. एक सिक्के को हर बार उछालता अभिप्रयोग है।

2. पांसे को प्रत्येक बार फेंकना के अभिप्रयोग है।

हल: एक घटना के संयोग या प्रायिकता को लिम्न सूत्र से दर्शाया जाता है:

$$P(E) = \frac{\text{प्रायिकता अनुकूल परिणामें की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

- किसी घटना के होने की प्रायिकता $\boxed{O < P(E) < 1}$
- A को निश्चित घटना कहा जाता है यदि $P(A) = 1$
- A को असंभव घटना कहा जाता है यदि $P(A) = 0$
- किसी प्रयोग में सभी अभिप्रयोगों की प्राथमिकताओं का योग 1 होता है।

  $P(E_1) + P(E_2) + P(E_5) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1$
- किसी घटना वुे होने तथा न होने की प्रायिकताओं का योग सदैव 1 होता है।

  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

उदाहरण 3.64: एक सिक्के को 1000 बार उछालने पर ये बारंबारताएं प्राप्त होती है: चित: 455, पट्ट: 545 प्रत्येक घटना की प्रायिकता कीजिए।

हल: E की प्रायिकता = $\dfrac{\text{चितों की आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$

$$P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

इसी तरह, एक पट के आने की घटना की प्रायिकता

$$= \frac{\text{पट्टों के आने की संख्या}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

या $P(E) = \dfrac{545}{1000} = 0.549$

ध्यान रखिए कि $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$ है, तथा प्रत्येक अभिप्रयोग में E और F ही केवल दो संभावित, परिणाम हैं।

टिप्पणी

उदाहरण 3.65: दों सिक्कों को एक साथ 500 बार उछालने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं-

दो चितः 115 बार

एक चितः 265 बार

कोई भी चित नहीं : 120 बार

इनमें से प्रत्येक परिणाम के प्राप्त होने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

हलः हम दो चितो के आने की घटना को E_1 से, एक चित के आने की घटना को E_2 से और कोई भी चित ने आने की घटना को E_3 दर्शाता है।

इसलिए $P(E_1) = \frac{115}{500} = 0.23$

$$P(E_2) = \frac{265}{500} = 0.53$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.29$$

यहाँ आप देखे कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$ है।

उदाहरण 3.66: एक पांसे को 1000 बार फेंकने पर प्राप्त परिणामों 1, 2, 3, 4, 5, और 6 की बारंबारताएँ इस सरणी में दी गई है:

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बरंबारता	179	160	147	149	175	190

इनमें से प्रत्येक परिणाम के प्राप्त होने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

हलः परिणाम 1 की प्रायिकता $P(E_1) = \frac{\text{1 की बारंबारता}}{\text{पांसा फेंकने की कुल संख्या}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

इसी तरह, $P(E_2) = \frac{160}{1000} = 0.16,$

$$P(E_3) = \frac{147}{1000} = 0.147,$$

$$P(E_4) = \frac{144}{1000} = 0.149$$

$$P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$$

और $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$ है।

ध्यान रखिए कि $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$ है।

टिप्पणी

आंकड़ों का संसाधन

सांख्यिकीय अनुसंधान द्वारा संकलित आंकड़े और तथ्य मौलिक रूप में इतने जटिल एवं अव्यवस्थित होते हैं कि उन्हें सरलता से समझना और उनकी विशेषताओं को ज्ञात करके उचित व तर्कसंगत निष्कर्ष निकालना असंभव होता है। अतः यह आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों को इस प्रकार सरल रूप में प्रस्तुत किया जाए कि शोधकर्ता उनका विश्लेषण करके आसानी से निष्कर्ष निकाल सके। इस प्रकार एक शोधकर्ता जब तथ्यों को प्रक्रियाकरण के द्वारा उन्हें व्यवस्थित क्रम में रखकर उनका विवेचन करता है, केवल तभी सामाजिक अध्ययन में वैज्ञानिकता का गुण आता है। इस कार्य के लिए आंकड़ों को अनेक प्रकार के वर्गों में सारणियों द्वारा क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इसको वर्गीकरण तथा सारणीयन कहते हैं।

प्रो. ए. आर. इलर्जिक के अनुसार– शोधकर्ता का प्रथम कार्य विवरणों को इस प्रकार सरल व संक्षिप्त करना होता है कि आंकड़ों की कुल विशेषताएं स्पष्ट रूप से ज्ञात हो सके तथा साथ ही संकलित सामग्री का निर्वचन भी सुविधाजनक हो जाए। यह प्रक्रिया आंकड़ों का वर्गीकरण तथा सारणीकरण कहलाती है।

शोधकर्ता द्वारा संकलित आंकड़ों के समंकों को सरल, सुबोध, व्यवस्थित और संक्षिप्त रूप प्रदान करने हेतु उनका प्रस्तुतीकरण, वर्गीकरण, सारणीयन, टेबुलेशन और चित्रमय तथा बिंदुरेखीय प्रदर्शन किया जाता है। इस संबंध में जे.आर. हिक्स का कथन महत्वपूर्ण है– "वर्गीकृत एवं क्रमबद्ध तथ्य अपने आप बोलते हैं, अव्यवस्थित रूप में वे मृत समान होते हैं।"

इससे यह स्पष्ट होता है कि आंकड़ों का प्रक्रियाकरण एवं विश्लेषण एक मूलभूत आवश्यकता है जिसके बिना शोधकार्य संपूर्ण नहीं माना जा सकता है।

आंकड़ों के प्रक्रियाकरण एवं विश्लेषण के अनेक महत्वपूर्ण चरण हैं जिनमें से प्रमुख रूप से प्रयोग होने वाले चरण निम्न प्रकार से हैं–

(अ) वर्गीकरण

(ब) संकेतन

(स) सारणीयन।

(अ) वर्गीकरण

आंकड़ों अथवा तथ्यों में पाई जाने वाली समानता या विभिन्नता के आधार पर उनको व्यवस्थित रूप से विभिन्न श्रेणियों में विभाजित करने को वर्गीकरण कहा जाता है। इस प्रकार आंकड़ों को सजातीयता के आधार पर विभाजन करने की प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है।

प्रो. कॉनर (Professor Conner) के अनुसार– "वर्गीकरण, आंकड़ों या तथ्यों को (वास्तविक या कल्पित रूप में) उनकी समानता तथा सजातीयता के अनुसार, समूहों

या वर्गों में क्रमबद्ध करने की प्रक्रिया है और यह इकाइयों की भिन्नता के बीच में, उसके गुणों की एकता को प्रदर्शित करता है।"

टिप्पणी

एल्हांस (Alhanse) के अनुसार– "सादृश्यताओं एवं समानताओं के अनुसार तथ्यों अथवा आंकड़ों को समूह एवं वर्गों में व्यवस्थित करने की तकनीकी प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है।"

आंकड़ों अथवा तथ्यों का वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है–

- संकलित तथ्यों को जटिलता और व्यापकता से उत्पन्न कठिनाइयों को दूर करने के लिए उन्हें सरल और संक्षिप्त बनाना।
- वर्गीकरण से भिन्न–भिन्न इकाइयों को भिन्न–भिन्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता हैं।
- वर्गीकरण पदों की भिन्नता के मध्य एकता को प्रकट करता है।
- वर्गीकरण आंकड़ों के गुणों की समानता पर आधारित होता है।
- वर्गीकरण से आंकड़ों में एकरूपता स्पष्ट होती है।
- वर्गीकरण की सहायता से आंकड़ों को वैज्ञानिक रूप से व्यवस्थित किया जाता है। इससे जटिल आंकड़े भी सरल और समझने योग्य बन जाते हैं।
- यह भावात्मक अथवा यथार्थ रूप से स्पष्टता प्रकट करता है।

इस प्रकार, आंकड़ों में समानता, उन्हें वैज्ञानिक आधार में प्रस्तुत करना, बोधगम्य बनाने तथा यथार्थता लाने के लिए वर्गीकरण बहुत महत्वपूर्ण है।

वर्गीकरण के प्रकार

आंकड़ों का वर्गीकरण उनके गुणों अथवा लक्षणों के आधार पर होता है। सामान्यता सांख्यिकीय आंकड़े या तथ्य दो प्रकार के होते हैं–

1. संख्यात्मक तथ्य
2. वर्णनात्मक तथ्य।

1. संख्यात्मक तथ्य–जिन तथ्यों को संख्या में प्रत्यक्ष रूप से व्यक्त किया जा सकता है उन्हें संख्यात्मक तथ्य कहते हैं; जैसे आयु, भार, ऊंचाई, मात्रा आदि। ऐसे तथ्यों को चर मूल्य भी कहते हैं।

2. वर्णनात्मक तथ्य–जिन तथ्यों का प्रत्यक्ष माप नहीं किया जा सकता। केवल उनकी उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर गणना की जा सकती है या अनुमान लगाया जा सकता है, जैसे ईमानदारी, बौद्धिक स्तर आदि। अतः उक्त तथ्यों के आधार पर वर्गीकरण की निम्न रीतियां हैं–

(i) गुणात्मक वर्गीकरण

(ii) संख्यात्मक वर्गीकरण।

टिप्पणी

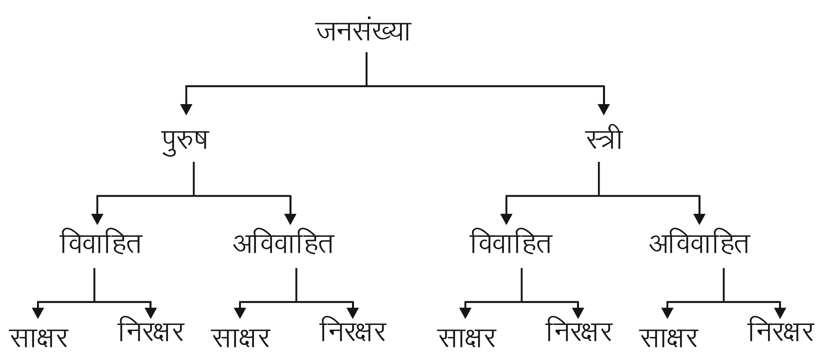
(i) **गुणात्मक वर्गीकरण**—संकलित आंकड़ों का वर्गीकरण जब अनेक गुणों के अनुसार किया जाता है तब उसे गुणात्मक वर्गीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम कुछ विशेष प्रकार की मनोवृतियों, बौद्धिकता, सुंदरता, साक्षरता, स्वास्थ्य, धर्म, लिंग के आधार पर तथ्यों को अनके वर्गों में विभाजित करते हैं तो यह वर्गीकरण इस वर्ग के अंतर्गत आता है। जैसे 50 व्यक्तियों का वर्गीकरण साक्षरता के आधार पर किया जाए तो वह निम्न प्रकार हो सकता हैं।

अनपढ़	3
प्राइमरी	5
हाईस्कूल	18
इंटर	14
स्नातक	8
परास्नातक	2
योग	**50**

गुणात्मक वर्गीकरण भी दो प्रकार का हो सकता है –

(क) **सरल या विभेदात्मक**—इसके अंतर्गत केवल एक गुण की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति के आधार पर तथ्यों को विभाजित किया जाता है। जैसे साक्षरता धर्म, व्यवसाय आदि। उदाहरणार्थ साक्षरता के आधार पर जनसंख्या को दो वर्गों में बांटना– (1) साक्षर तथा (2) निरक्षर सरल या विभेदात्मक वर्गीकरण कहलाता है।

(ख) **बहुगुणी वर्गीकरण**—इसमें तथ्यों को एक से अधिक गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है, जैसे जनसंख्या के आधार पर वर्गीकरण।



गुणात्मक वर्गीकरण सरल होता है परंतु इसमें निम्न सावधानियों का विशेष ध्यान रखना पड़ता है–

1. आधार का स्पष्ट होना।
2. गुणों में होने वाले परिवर्तनों का पर्याप्त रूप से ज्ञान होना।

टिप्पणी

(ii) **संख्यात्मक वर्गीकरण**—ऐसे तथ्य जिनका संख्यात्मक माप किया जा सकता है। उनका वर्गीकरण संख्यात्मक वर्गीकरण कहलाता है। यह वर्गीकरण प्रायः अंकों के आधार पर किया जाता है। उदाहरण के लिए आय, व्यय, लंबाई, चौड़ाई अथवा संख्यात्मक विशेषता के आधार पर किया गया वर्गीकरण इसके अंतर्गत आता है। इस प्रकार का वर्गीकरण सांख्यिकीय श्रेणियों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। सामान्य रूप से सांख्यिकीय श्रेणियां निम्न प्रकार की होती हैं—

1. समयानुसार
2. स्थानानुसार
3. दशानुसार
4. पारवर्गीकरण
5. वर्गांतरानुसार।

1. **समयानुसार वर्गीकरण**—जब आंकड़ों को समय के आधार पर (जैसे घंटे, दिन, सप्ताह, महीने, वर्ष) विभाजित किया जाता है तो उन्हें समयानुसार वर्गीकरण कहते हैं। निम्न श्रेणी समयानुसार श्रेणी का उदाहरण है—

भारत की जनंसख्या

वर्ष	1951	1961	1971	1981	1991	2002
जनसंख्या करोड़ों में	36.1	43.9	54.8	68.4	84.6	98.2

2. **स्थानानुसार वर्गीकरण**—इसमें आंकड़ों को स्थान या क्षेत्र के आधार पर दर्शाया जाता है। स्थानानुसार श्रेणी का एक उदाहरण निम्न प्रकार से दिखाया गया है जिसमें तालिका के द्वारा छह राष्ट्रों के सकल घरेलू पूंजी निर्माण को प्रदर्शित किया गया है—

सकल घरेलू पूंजी निर्माण

राष्ट्र का नाम	पूंजी निर्माण
अमेरिका	18%
जापान	27%
ब्रिटेन	20%
ऑस्ट्रेलिया	23%
कनाडा	20%
भारत	12%

3. **दशानुसार वर्गीकरण**—जब संकलित आंकड़ों का वर्गीकरण परिस्थिति या दशा के अनुसार किया जाता है तो उसे दशा या परिस्थिति अनुरूप वर्गीकरण कहते हैं। दशानुसार, श्रेणियां, लंबाई, प्राप्तांक, आय, वेतन आदि अनेक बातों से संबंधित होती है। शोध कार्य में अधिकतर दशानुसार अथवा परिस्थिति अनुसार श्रेणियों का ही प्रयोग होता है।

उदाहरण 3.67: एम. ए. गृह विज्ञान (अंतिम वर्ष) में विद्यार्थियों के प्राप्तांक अग्रलिखित हैं—

प्राप्त किए गए अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0—20	4
20—40	6
40—60	38
60—80	15
80—100	2
योग	**65**

4. **पार—वर्गीकरण**—दो या अधिक विशेषताओं में संबंध देखने के लिए पार—वर्गीकरण किया जाता है। इसके अंतर्गत एक गुण अथवा विशेषता को दूसरे गुण/गुणों अथवा विशेषता/विशेषताओं के साथ व्यवस्थित किया जाता है।

शैक्षिक स्थिति	लिंग	
	स्त्री	पुरुष
शैक्षिक		
अनपढ़		

5. **वर्गांतरानुसार वर्गीकरण**—वर्गांतरानुसार वर्गीकरण में आंकड़ों अथवा तथ्यों के संख्यात्मक माप संभव होने पर ही वर्गीकरण संभव होता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में आय, भार, किलो, ऊंचाई, उत्पादन, आयात, निर्यात आदि से संबंधित आंकड़ों का अध्ययन संभव है। अंकों के आधार पर इन्हें भिन्न—भिन्न वर्गों में विभक्त कर दिया जाता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में प्रायः निम्न शब्दों का प्रयोग किया जाता है।

   इन शब्दों को भली—भांति समझने के लिए निम्न उदाहरण को ध्यान से देखिए। किसी संस्था के 200 छात्रों के एम.ए. गृह विज्ञान के विषय में अग्रलिखित सारणी द्वारा प्राप्त अंकों को दर्शाया गया है—

टिप्पणी

वर्ग अंतराल (प्राप्तांकों का)	आवृत्ति (छात्रों की संख्या)	संचयी आवृत्ति
0—20	16	16
20—40	39	55
40—60	75	130
60—80	42	172
80—100	28	200
	200	

विस्तार

किसी आवृत्ति वितरण में अंतिम वर्गांतर की ऊपरी सीमा तथा प्रथम वर्गांतर की निचली सीमा के अंतर को उस आवृत्ति वितरण का विस्तार कहा जाता है। उपर्युक्त आवृत्ति वितरण में विस्तार = 100 − 0 = 100 है।

वर्ग सीमाएं

प्रत्येक वर्गांतर की दो सीमाएं होती हैं, निचली सीमा तथा ऊपरी सीमा। उपरोक्त उदाहरण में प्रथम पंक्ति की वर्ग सीमा 0 (निचली सीमा) तथा 20 (ऊपरी सीमा) है। इसी प्रकार दूसरी पंक्ति की वर्ग सीमा 20 (निचली सीमा) तथा 40 (ऊपरी सीमा) है।

वर्ग विस्तार

ऊपरी तथा निचली सीमाओं के अंतर को वर्ग विस्तार कहते हैं। उक्त उदाहरण में वर्ग विस्तार 20 − 0 = 20, (प्रथम पंक्ति का) तथा 40 − 20 = 20 (द्वितीय पंक्ति का) है।

वर्गांतर

आवृत्ति वितरण में प्रत्येक वर्ग के आधार को वर्गांतर कहा जाता है। उक्त आवृत्ति वितरण में 0 − 20, 20 − 40, 40 − 60, 60 − 80, 80 − 100 वर्गांतर है।

वर्ग आवृत्ति या बारंबारता

किसी वर्ग विस्तार या वर्गांतर में जितने पद या इकाइयां सम्मिलित होती हैं। उन्हें वर्ग विस्तार की आवृत्ति या बारंबारता कहते है। उक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की बारंबारता = 16 द्वितीय वर्ग की बारंबारता = 39 है।

वर्गांतर बनाने की विधियां

वर्गांतर दो प्रकार से बनाए जा सकते हैं— 1. अपवर्जी रीति, 2. समावेशी रीति।

1. **अपवर्जी रीति**—अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग की निचली सीमा होती है। उपरोक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा 20 है जो अगले वर्ग की निचली सीमा है और इस प्रकार दूसरे वर्ग की ऊपरी सीमा 40 तीसरे वर्ग की निचली सीमा है। अर्थात् यदि किसी छात्र को 20 अंक मिले

हैं तो वह 20 – 40 के वर्गांतर में आएगा। इसी प्रकार 40 अंक प्राप्त करने वाला छात्र 40 – 60 के वर्गांतर में आएगा। उपरोक्त उदाहरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

टिप्पणी

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
0 से अधिक किंतु 20 से कम	16
20 से अधिक किंतु 40 से कम	39
40 से अधिक किंतु 60 से कम	75
60 से अधिक किंतु 80 से कम	42
80 से अधिक किंतु 100 से कम	28

अतः स्पष्ट है अपवर्जी रीति में वर्ग की ऊपरी सीमा वाले पद को उस वर्ग में शामिल नहीं करते हैं।

2. **समावेशी रीति**–यह वह रीति है जिसमें प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के समान नहीं होती अपितु उसमें 1 या अधिक अंतर कर दिया जाता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में किसी वर्ग की उपरी सीमा के पद या इकाई को भी उसी वर्ग में समावेशित किया जाता है।

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
0–19	16
20–39	39
40–59	75
60–79	42
80–99	28

समावेशी रीति का उपयोग ऐसे आंकड़ों के लिए अधिक उपर्युक्त है जहां मूल्यों का भाव पूर्णांक में हो। परंतु यदि मूल्य दशमलव बिंदु में हो तो उनका वर्ग निश्चित करने में कठिनाई आती है। ऐसी दशा में समावेशी वर्गांतरों को भी अपवर्जी में परिवर्तित कर लिया जाता है। इसके लिए प्रथम वर्ग की उच्च सीमा तथा द्वितीय वर्ग को निम्न सीमा के अंतर को निकालकर उसमें दो का भाग देकर जो संख्या आये, उसे प्रथम वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ देना चाहिए तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा में से घटा देना चाहिए।

उदाहरण 3.68: उपरोक्त सारणी में प्रथम वर्ग की उच्च सीमा 19 है तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा 20 है। इन दोनों का अंतर $20 - 19 = 1$ है। इसमें दो को भाग देने पर $\frac{1}{2} = 0.5$ आता है। इस संख्या को प्रथम वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ देने पर $19 + 0.5 = 19.5$ आता है तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा से घटाने पर $20 - 0.5 = 19.5$ आएगा। इसी प्रकार उपर्युक्त समावेशी वर्गांतरों को निम्न रूप में अपवर्ती बनाया जाता है।

टिप्पणी

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (बारंबारता)
0 – 19.5	16
19.5 – 39.5	39
39.5 – 59.5	75
59.5 – 79.5	42
79.5 – 99.5	28

प्रत्येक वर्ग अंतराल की आवृत्ति या बारंबारता को कैसे ज्ञात करें?

बारंबारता ज्ञात करने के लिए उस वर्ग अंतराल में आने वाले पदों को या तो मिलान चिह्न द्वारा या सीधे गिनकर या यांत्रिक तरीके से ज्ञात करते हैं। मिलान चिह्न द्वारा बारंबारता ज्ञात करने के लिए वर्ग समूह को पहले स्तंभ में लिखकर उसके अंतर्गत आने वाले प्रत्येक पद को एक खड़ी रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हैं। सामान्यतः चार पदों तक खड़ी रेखा द्वारा प्रदर्शित करके तथा पांचवें पद के लिए चारों रेखाओं को तिरछा काट कर दिखाते हैं, जैसे प्रथम चार के लिए (IIII) तथा पांचवे पद के लिए (~~IIII~~) दिखाते हैं। इस तरह पांचवें पद के लिए उससे पहले वाले चार पदों को एक तिरछी रेखा द्वारा काट कर दिखाया जाता है। उक्त विवरण को आगे उदाहरण द्वारा दिखाया गया है।

निम्न सारणी 70 परिवारों के विभिन्न आय समूह को दर्शाती है–

आय समूह (रुपये में)	मिलान चिह्न	आवृत्ति परिणाम संख्या
400 से कम	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
401 – 800	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	20
801 – 1200	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
1201 – 1600	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
1600 से ऊपर	~~IIII~~ II	7
योग		70

जब सर्वेक्षण बहुत बड़े स्तर पर किया गया हो तो प्राप्त आंकड़ों का वर्ग समूह तथा आवृत्ति उपरोक्त विधि से ज्ञात नहीं की जा सकती, इसके लिए यांत्रिक विधियों की सहायता ली जाती है। जैसे–छंटाई मशीन (ये मशीनें कम समय में ही हजारों लाखो पदों को अलग कर सकती हैं, परंतु ये बहुत खर्चीली होती हैं। इसलिए सर्वे के लिए एक विशेष वर्ग समूह को ही लिया जाता है और उससे प्राप्त आंकड़ों को उक्त विधि से वर्गीकृत करके प्राप्त परिणामों का विश्लेषण किया जाता है)।

टिप्पणी

तालिका 3.2 *अपवर्जी एवं समावेशी रीतियों में अंतर*

क्र. सं.	अपवर्जी रीति	समावेशी रीति
1	अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा तथा उसके अगले वर्ग की निम्न सीमा एक समान होती है।	समावेशी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा एवं उसके अगले वर्ग की निम्न सीमा का मूल्य समान नहीं होता बल्कि उनमें प्राय 1 का अंतर होता है
2	इस रीति में वर्गांतरों में किसी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य की माप या इकाई उस वर्ग में शामिल नहीं की जाती है।	इस रीति में उपरी सीमा के बराबर मूल्य भी ऊपरी वर्ग में सम्मिलित होता है।
3	गणन क्रिया के लिए अपवर्जी रीति को समावेशी में बदलने की आवश्यकता नहीं होती है।	कुछ गणन क्रियाओं की शुद्धता के लिए इस रीति को पहले अपवर्जी में बदलना आवश्यक होता है।
4	यह विधि हमेशा उपयुक्त होती है चाहे पद मूल्य पूर्ण संख्या में हो या दशमलव में।	यह विधि तभी उपयुक्त मानी जाती है जब पद मूल्य पूर्ण संख्या में हो।
5	अपवर्जी रीति में वास्तविक वर्ग सीमाएं तथा मध्य बिंदु ज्ञात करने में समस्या नहीं आती है।	समावेशी रीति में वास्तविक वर्ग सीमाएं तथा मध्य बिंदु ज्ञात करने में समस्या आती है। अतः इन्हें ज्ञात करने के लिए समावेशी वर्गांतरों को अपवर्जी वर्गांतरों में बदल लेना चाहिए।

(ब) संकेतन

आंकड़ों के विश्लेषण का दूसरा महत्वपूर्ण चरण तथ्यों का संकेतन करना है। इसके अंतर्गत व्याख्यात्मक उत्तरों का अनेक संकेतों, प्रतीकों अथवा अंकों की सहायता से संक्षिप्त और व्यवस्थित बनाने का प्रयत्न किया जाता है। इस प्रकार संकेतीकरण वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा आंकड़ों के प्रत्येक अंक को एक सांकेतिक नाम देकर उसकी प्रकृति के अनुकूल एक कोटि में रखा जाता है। सांकेतिक नाम एक प्रतीक है जो एक या अधिक अक्षर के रूप में हो सकता है अथवा एक या अधिक अंकों के रूप में हो सकता है। इसके फलस्वरूप संकलित तथ्यों की गोपनीयता का गुण बना रहता है। उचित संकेतीकरण के लिए निम्नलिखित नियम ध्यान में रखने चाहिए–

1. वर्गों को सूचित करने वाले चिह्नों की सूचियां तैयार कर लेनी चाहिए।
2. उत्तरदाताओं के उत्तरों का प्रश्न के उद्देश्य के संदर्भ में मूल्यांकन करना चाहिए।

संकेतन के प्रकार

संकेतन दो प्रकार के होते हैं–

1. **संक्षिप्त अक्षरों के रूप में**–इसके अंतर्गत दिए जाने वाले संकेत जैसे–Yes के लिए Y अथवा No के लिए N का प्रयोग किया जाता है।
2. **अनेक संख्या के रूप में**–इसके अंतर्गत उत्तरों को अनेक संख्याओं के रूप में कुछ प्रतीकों का प्रयोग करना है। विभिन्न प्रकार के उत्तरों के सम्मुख 1, 2, 3, 4... आदि संख्याओं को अंकित करना संख्यात्मक संकेतन कहलाता है। संकेतकों के संकेतीकरण पर आंकड़ों का विश्लेषण और उसका उचित अर्थ

निर्भर करता है। अतः संकेतकों का चयन करने में सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। संकेतों के द्वारा एक ओर अधिक श्रेणियों वाले लंबे उत्तरों को संक्षिप्त करके विश्लेषण कार्य को सरल बनाया जा सकता है, वहीं दूसरी ओर यांत्रिक सारणीयन के दृष्टिकोण से भी संकेतन एक उपयोगी प्रणाली है।

संकेतन कई प्रकार से किया जा सकता है। परंतु मुख्य रूप से निम्न प्रविधियों का प्रयोग सामान्यतः किया जाता है–

1. **निदर्शन प्रकृति**–शोधकर्ता इस विधि में सर्वप्रथम तथ्यों की पहचान करता है और इसके बाद तथ्यों का विश्लेषण करने के लिए उन्हें इकाइयों में बांटता है। इकाइयों में बांटना स्वैच्छिक या उद्देश्यपरक हो सकता है परंतु यह इकाइयां तथ्यों की विशेषताओं को अवश्य दर्शाती हैं। सामान्यतः इकाइयों को बनाना इस उद्देश्य की पूर्ति करता है कि आंकड़ों का विश्लेषण करने में एक तथ्य दूसरे तथ्य से बिल्कुल अलग हो। दोनों के तुलनात्मक अध्ययन में किसी प्रकार का संदेह न हो।
2. **सांकेतिक किताब का निर्माण**–सांकेतिक किताब सामान्यतः संकेतों की सूची होती है। इस सांकेतिक किताब को बनाने के लिए यह आवश्यक है कि इसमें प्रत्येक संकेत का व्याख्यात्मक वर्णन दिया हो और जिसको उदाहरणों द्वारा समझाया गया हो तथा इसके अंतर्गत कौन से तथ्य आ सकते हैं और कौन से तथ्य नहीं आ सकते स्पष्ट दिए गए हों। ये संकेत या तो शब्द हो सकते हैं या संख्याएं हो सकती हैं। ये शोधकर्ता द्वारा तथ्यों का विश्लेषण करने के तरीकों पर निर्भर करता है। शोधकर्ता को तथ्यों के गुणात्मक विश्लेषण करने के लिए एक समूह का निर्माण कर उनसे इस सांकेतिक किताब का निर्माण करने के लिए विचार विमर्श करना चाहिए।
3. **तथ्यों को चिह्नित करना**–तथ्यों को इकाई में बांटना और उन्हें चिह्न देना तथ्यों को चिह्नित करना कहलाता है। संकेतन गुणात्मक विश्लेषण में दो उद्देश्यों को पूरा करता है। पहला संकेतन अध्ययन सामग्री के संग्रह के मापन या सारणीयन को चिह्नित करने का कार्य करते हैं। दूसरा संकेतन निर्धारित अध्ययन सामग्री में इकाइयों का मान देने का कार्य करता है।

संकेतन कब और क्यों?

संकेतन कब करना चाहिए इसके लिए निम्न सुझाव दिए गए हैं–

- जब आंकड़ों को इकट्ठा करने से पहले आंकड़ों की जांच करने में या उन्हें क्रमबद्ध करना हो और संकेत में बदलना हो।
- जब संकलित आंकड़ों के द्वारा आंकड़ों का विश्लेषण करना हो।

संकेतन क्यों करना चाहिए–इसके लिए निम्न तर्क दिए जा सकते हैं–

- संकेतन शोधकर्ता के द्वारा प्राप्त आंकड़ों का विश्लेषण आसानी से तथा सरल तरीके से कर सकता है।

टिप्पणी

- गुणात्मक अध्ययन के लिए एक सामान्य व्याख्या भी इसके द्वारा संभव है।
- सांख्यिकीय विश्लेषण करने में भी संकेतन जरूरी है। इससे आंकड़े कैसे हैं? आंकड़ों का प्रकार तथा किस प्रकार संकेतन किए गए हैं? सांख्यिकीय विश्लेषण उसी प्रकार किया जा सकता है।
- संकेतन से आंकड़ों का क्रमबद्ध अध्ययन, उनका शोध में विश्लेषण एवं उनकी व्याख्या करना आसान हो जाता है तथा इसके निष्कर्षों का आधार बनता है।

संकेतकों का चयन

संकेतकों के संकेतीकरण पर आंकड़ों का विशुद्ध विश्लेषण और उसका उचित अर्थापन निर्भर करता है। अतः संकेतकों का चयन करने में विशेष सावधानियां बरतनी आवश्यक हैं। बड़े पैमाने पर किए जाने वाले शोध संवेदनशील व्यक्ति द्वारा होने चाहिए, जो शब्दों के अर्थों के गूढ़ अंतरों को पहचान सकें। संकेतक को शोध विषयों के मूल संप्रत्यय स्पष्ट होने आवश्यक हैं, क्योंकि तभी वह उद्देश्य के अनुकूल संकेतीकरण कर सकता है। संकेतीकरण एक यांत्रिक कार्य है, जिसे बार–बार दोहराना पड़ता है। यह उबाने वाला कार्य है। अतः संकेतक को धैर्यवान तथा बुद्धिमान होना जरूरी है।

संकेतकों का प्रशिक्षण– संकेतकों का प्रशिक्षण निम्नलिखित सोपानों में होना चाहिए–

1. संकेतक को शोध अध्ययन के उद्देश्य अच्छी प्रकार समझा देने चाहिए। उन्हें अच्छी प्रकार प्रेरित करने के लिए शोधकार्य के पीछे शोधकर्ताओं की प्रेरणाओं से अवगत करा देना चाहिए।
2. संकेतक को आंकड़ों एवं सामग्री की सभी कोटियों तथा सांकेतिक नामों को अच्छी प्रकार सोदाहरण समझा देना चाहिए। संकेतक की प्रत्येक कोटि और सांकेतिक नाम के पीछे तार्किकता समझ में आ जानी चाहिए।
3. संकेतकों को संकेतीकरण का अभ्यास कराना चाहिए। इस अभ्यास से उनकी त्रुटियों का पता लगेगा और सांकेतिक नामों को समझने की कमियां दूर हो जाएंगी। यह भी पता लगेगा कि भिन्न–भिन्न संकेतक संकेतीकरण एक ही प्रकार की मनोरचना से कर रहे हैं अथवा नहीं? आवश्यकता पड़ने पर सामूहिक चर्चा की जानी चाहिए।
4. जब यह निर्णय हो जाए कि वे सांकेतिक नाम एक ही मनोरचना के आधार पर हो रहे हैं तो अंत में संकेतकों की विश्वसनीयता का मापन कर लेना चाहिए। विश्वसनीयता की जांच हो जाने पर मुख्य आंकड़ों सामग्री का इन संकेतकों द्वारा संकेतीकरण आरंभ किया जा सकता है।

(स) सारणीयन

शोधकार्य में संकलित सामग्री का वर्गीकरण तथा संकेतन करने के उपरांत आंकड़ों का व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण सांख्यिकीय रीतियों का एक महत्वपूर्ण अंग है और इस रीति से सांख्यकीय सारणियों की संरचना की जाती है। सारणीयन की सहायता से ही प्राप्त

आंकड़ों को सरल, संक्षिप्त एवं बोधगम्य बनाया जाता है। अतः आंकड़ों का सारणीयन आवश्यक होता है।

टिप्पणी

सारणीयन की अनिवार्यता के संबंध में क्राक्सटन एवं काउडेन का विचार है– "या तो समय अपने प्रयोग के लिए या अन्य व्यक्तियों के प्रयोग के लिए आंकड़े किसी उपर्युक्त रूप में ही प्रस्तुत किए जाने चाहिए।" अत्यंत सरल तथा साधारण शब्दों में सारणीयन का अर्थ प्राप्त आंकड़ों को विविध स्तंभों एवं पंक्तियों में व्यवस्थित करके उन्हें क्रमिक रूप में प्रस्तुत करना है। अर्थात सारणीयन का अभिप्राय तालिका या सारणी बनाने से है।

इस प्रकार सारणीयन एक ऐसी क्रिया है जिसके अंतर्गत वर्गीकृत तथ्यों को सरल, संक्षिप्त, क्रमबद्ध और सुव्यवस्थित करने के लिए उन्हें विभिन्न सारणियों में प्रस्तुत किया जाता है।

अनेक विद्वानों ने सारणीयन को अपने–अपने शब्दों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है–

डॉ. ए.एल. बाउले के अनुसार– "सारणीयन वह सांख्यिकीय प्रक्रिया है जो उपलब्ध संकलित आंकड़ों से आखिरी तर्क संगत निष्कर्ष निकालने के लिए की जाती है।"

एल.आर. कॉनर के अनुसार– "सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट करने के उद्देश्य से संख्यात्मक तथ्यों को क्रमबद्ध और सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने की विधि है।"

श्री एम.एम. ब्लेयर के अनुसार– "सबसे विस्तृत अर्थ में आंकड़ों के खानों और पंक्तियों में क्रमबद्ध व्यवस्था को सारणीयन कहते हैं।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि सारणीयन एक ऐसी प्रक्रिया है जिससे वर्गीकृत आंकड़ों को इस प्रकार प्रदर्शित किया जाता है कि उनकी विशेषताएं तथा लक्षण स्पष्ट हो जाएं।

सामाजिक सर्वेक्षण तथा अनुसंधान में सारणीयन के उद्देश्य अथवा कार्य निम्नलिखित हैं–

1. **सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण**–सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य वर्गीकृत आंकड़ों को सुव्यवस्थित एवं क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करना है।
2. **आंकड़ों को सरल संक्षिप्त एवं स्पष्ट रूप**–इसमें सारणीयन का उद्देश्य संकलित आंकड़ों की विशेषताओं को बहुत सरल और संक्षिप्त रूप में स्पष्ट करना है।
3. **तथ्यों को तुलनीय बनाना**–सारणीयन की सहायता से आंकड़ों को इस प्रकार खानों या पंक्तियों में व्यवस्थित किया जाता है जिससे तथ्यों की सरलता से तुलना की जा सके।
4. **न्यूनतम स्थान में तथ्यों का प्रस्तुतीकरण**–सारणीयन का उद्देश्य आंकड़ों को न्यूनतम स्थान में क्रमबद्ध तथा सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना होता है।

5. **आंकड़ों को अधिकाधिक उपयोगी बनाना**—सारणीयन द्वारा आंकड़ों को इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि उनको अधिकाधिक उपयोगी बनाया जा सके।
6. **आंकड़ों में एकता प्रकट करना**—सारणीयन समूह की इकाइयों को विभिन्नता में सम्मिलित एकता को प्रकट करता है।

टिप्पणी

सारणीयन के लाभ

सारणीयन के निम्नलिखित लाभ हैं—

1. सारणीयन के द्वारा जटिल आंकड़े समूह को स्पष्ट रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
2. सारणीयन के द्वारा तथ्यों का मूल्यांकन सरलता से किया जा सकता है।
3. सांख्यिकीय आंकड़ों को सारणीबद्ध करने से अशुद्धियों की जांच सरल हो जाती है।
4. आंकड़ों की पुनरावृति को रोका जा सकता है। यह समय, स्थान और धन की बचत करता है।
5. इसकी सहायता से दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना आसान हो जाती है। सांख्यिकीय गणनाओं व विश्लेषण में भी सहायक हो जाता है।
6. आंकड़ों को सारणीबद्ध करने के पश्चात वे आवश्यकता पड़ने पर संदर्भ के रूप में सहायक होते हैं।
7. सारणीयन वर्गीकरण में भी सहायक होता है।
8. यह आंकड़ों को पहचान देता है।

सारणीयन की सीमाएं

सारणीयन की निम्न सीमाएं हैं—

- सारणियों के द्वारा तथ्यों को केवल संख्यात्मक रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।
- सारणियों को समझने के लिए अंकों का उचित ज्ञान होना आवश्यक है।
- सारणी द्वारा प्रदर्शित जटिल तथ्यों को साधारण व्यक्तियों द्वारा समझना कठिन कार्य होता है। अतः यह साधारण व्यक्तियों के लिए अधिक उपयोगी नहीं है।
- सारणीयन में सभी इकाइयों को समान रूप में माना जाता है। इसके द्वारा स्थिति को स्पष्ट नहीं किया जा सकता।
- सारणी किसी विशेष महत्व के खंड को कोई विशेष महत्व नहीं दे पाती।
- गुणात्मक तथ्य सारणी में प्रस्तुत नहीं किए जा सकते।

टिप्पणी

उपरोक्त सीमाओं के रहते हुए भी सारणी का सामाजिक अनुसंधान में महत्व है। सारणीयन में तथ्यों के भंडारों का सुव्यवस्थित एवं सुस्पष्टता से क्रमबद्ध तरीके से वर्गीकरण करना संभव हो पाता है। निष्कर्षतः वैज्ञानिक जांच अथवा शोध में सारणीयन अत्यंत महत्वपूर्ण है।

सारणीयन के प्रमुख भाग

एक सारणी के प्रमुख भाग निम्न होते हैं। अगले पृष्ठ पर दी गई सारणी को देखें—इसमें सारणी बनाने में प्रयुक्त लगभग सभी भाग दिए गए हैं।

भारत की जनसंख्या (करोड़ों में) 1951 से 2011 तक

सन्	जनसंख्या (करोड़ों में)
1951	35.9
1961	43.9
1971	54.8
1981	68.3
1991	84.6
2001	98.2
2011	122.2

1. **सारणी नंबर या संख्या**—सारणी को बनाते समय सर्वप्रथम सबसे ऊपर या मध्य में उसका नंबर दिया जाता है। सारणी संख्या या नंबर एक संदर्भ का कार्य करती है। इससे सारणी को ढूंढने में सुविधा रहती है।
2. **सारणी का शीर्षक**—सारणी संख्या अंकित करने के पश्चात उसके नीचे ही सारणी का शीर्षक देना आवश्यक होता है। शीर्षक छोटा, सरल, प्रभावपूर्ण एवं स्पष्ट होना चाहिए। शीर्षक से निम्न बातें स्पष्ट होनी चाहिए—
   - आंकड़े या समंक किस समय के हैं?
   - आंकड़े किससे संबंधित हैं?
   - आंकड़े कहां के हैं?
3. **उपशीर्षक**—सारणी अनेक छोटे बड़े स्तंभों या खानों में विभक्त होती है। इन स्तंभों को दिये गए शीर्षक या नाम उपशीर्षक कहलाते हैं। यह छोटे से छोटा एवं प्रभावपूर्ण होना चाहिए।
4. **सारणी का आकार**—सारणी का महत्व उसके उपर्युक्त आकार से है। इसका आकार न तो बहुत विशाल हो और न ही बहुत छोटा हो। सारणी का आकार संतुलित होना चाहिए।
5. **पदों की व्यवस्था**—सारणी का आकार बना लेने के बाद विभिन्न पंक्तियों एवं खानों में आंकड़ों को लिखा जाता है। आंकड़ों से संबंधित सभी पदों को वर्णनात्मक, भौगोलिक, सामयिक अथवा आकार के आधार पर व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत किया जाता है।

टिप्पणी

6. **टिप्पणियां**—सारणी के अंत में उन आंकड़ों अथवा उपशीर्षक का स्पष्टीकरण दिया जा सकता है जो विशेष प्रकृति के हों।
7. **स्रोत**—सारणी में दिए गए आंकड़े प्राथमिक अथवा द्वितीय स्रोतों से प्राप्त किए गए हो सकते हैं। अतः सारणी के नीचे उस स्रोत अथवा संदर्भ का उल्लेख करना आवश्यक हो जाता है जहां से इस सूचना को प्राप्त किया गया है।

सांख्यिकीय सारणियों के प्रकार

सामान्यतः तीन प्रकार की सारणी प्रयोग में लाई जाती हैं—

1. **साधारण या एक गुणी सारणी**— इसमें आंकड़े अथवा तथ्यों के एक गुण को दिखाया जाता है। उदाहरण—

आयु	श्रमिकों की संख्या

इस तालिका में केवल एक चर (आयु) के आधार पर वर्गीकरण किया गया है।

2. **द्विपक्षीय अथवा द्विगुणीय सारणी**— ये वे सारणियां होती हैं जिनमें तथ्यों का वर्गीकरण दो चरों, गुणों अथवा लक्षणों के आधार पर होता है। शोधकर्ता इस स्थिति में दो चरों के वर्गीकरण द्वारा यह देखने का प्रयास करता है कि इन चरों में कोई संबंध है या नहीं। उदाहरण के लिए शिक्षा और व्यवसाय, आयु और श्रमिकों की संख्या के बीच सहसंबंध द्विपक्षीय सारणी में देखा जा सकता है।

उदाहरण—

आयु	**श्रमिकों की संख्या पुरुष/स्त्री**	**कुल**

द्विपक्षीय तालिकाएं सामाजिक अनुसंधान का महत्वपूर्ण अंग होती हैं, क्योंकि वह विषय का गहन से अध्ययन करने, वह विषय को समझने में मदद करती हैं।

3. **बहुपक्षीय अथवा बहुगुणीय**—जब सामाजिक शोधकर्ता जटिल संबंधों एवं परिस्थितियों का अध्ययन करना चाहता है और अध्ययन समस्या को अधिक गहराई से समझना चाहता है तब बहुपक्षीय या बहुगुणीय सारणी का निर्माण किया जाता है। जैसे—आयु व श्रमिकों की संख्या के साथ लिंग जोड़कर तथा विभाग या संस्थान में विभिन्न पदों या स्तरों पर श्रमिक (स्त्री/पुरुष) को

जोड़कर यह देखा जाए कि विभिन्न आयु वर्गों के पुरुष और महिला की स्थिति संस्थान में विभिन्न पदों या स्तरों पर कितनी है। तब उसे बहुगुणीय या बहुपक्षीय सारणी कहा जाएगा।

टिप्पणी

उदाहरण 3.69:

आयु	पद						कुल
	अधिकारी		क्लर्क		कुल		
	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	

सारणियों के इन सभी प्रकारों से स्पष्ट होता है कि शोधकर्ता को जितने सरल अथवा विधिपूर्वक तथ्यों को प्रदर्शित करना होता है उन्हीं के अनुसार सारणी की संरचना का निर्माण किया जाता है। एक उत्तम सारणी के अंदर वैज्ञानिकता, आकर्षकता, समुचित आकार, तुलना की सुविधा, स्पष्टता तथा सरलता आदि गुणों का समावेश होना आवश्यक है। तथा सारणी का निर्माण लक्ष्य के अनुकूल होना चाहिए जिससे अध्ययन के उस उद्देश्य की पूर्ति हो सके। जिसके लिए सारणी को निर्मित करना जरूरी समझा गया है।

वर्गीकरण तथा सारणीयन में अंतर

वर्गीकरण तथा सारणीयन सांख्यिकीय अध्ययन में महत्वपूर्ण प्रक्रियाएं हैं। इन दोनों ही प्रविधि से आंकड़ों को क्रमबद्ध व व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार दोनों प्रक्रियाओं में समानता होते हुए भी कुछ भिन्नताएं हैं। जो इस प्रकार हैं–

तालिका 3.3 *वर्गीकरण तथा सारणीयन में अंतर*

वर्गीकरण	सारणीयन
आंकड़ों के विश्लेषण में वर्गीकरण सारणीयन से पहले आता है। अतः वर्गीकरण सारणीयन का आधार है।	सारणीयन वर्गीकरण के पश्चात की क्रिया है।
वर्गीकरण में संकलित आंकड़ों को उनके समान–असमान गुणों के आधार पर वर्गों या श्रेणियों में बांटा जाता है।	सारणीयन में वर्गीकृत तथ्यों को खाना और पंक्तियों में विभाजित करके प्रस्तुत किया जाता है।
वर्गीकरण का आधार आंकड़ों की विशेषताएं होती हैं।	सारणीयन वर्गीकृत आंकड़ों के आधार पर किया जाता है।
वर्गीकरण सांख्यिकीय विश्लेषण की एक प्रक्रिया है।	सारणीयन आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की प्रक्रिया है।
वर्गीकरण में भौतिक समंकों का ही प्रयोग किया जाता है।	सारणीयन में व्युत्पन्न आंकड़ों जैसे–प्रतिशत, अनुपात आदि का भी प्रयोग किया जाता है।
वर्गीकरण साधारण व्यक्तियों द्वारा भी समझा जा सकता है।	सारणीयन को साधारण व्यक्ति आसानी से नहीं समझ सकता।
वर्गीकरण आसानी से हो सकता है।	जबकि सारणीयन में संभवतः दक्षता होना जरूरी है।

टिप्पणी

सारणी निर्माण के सिद्धांत

सारणीयन के सिद्धांत वे होते हैं जो कि सांख्यिकीय सारणी के निर्माण में साधारणतः प्रयुक्त होते हैं। प्रमुख सिद्धांत हैं–

1. प्रत्येक सारणी साफ, संक्षिप्त और उचित शीर्षक के साथ होनी चाहिए ताकि सारणी को तर्कपूर्ण बनाया जा सके। इसका शीर्षक संदर्भ सहित सारणी के ऊपर होना चाहिए।
2. प्रत्येक सारणी को एक अलग संख्या द्वारा सुलभ संदर्भ देना चाहिए।
3. सारणी की पंक्ति तथा स्तंभ का शीर्षक उचित होना चाहिए।
4. माप की इकाई शीर्षक या उपशीर्षक के साथ सारणी में दर्शायी जानी चाहिए।
5. वर्णनात्मक टिप्पणियां यदि कोई हो (सारणी से संबंधित) तो वह सारणी के नीचे संदर्भ चिह्न के साथ दिए जाने चाहिए तथा यही संदर्भ चिह्न सारणी में उस माप, इकाई या तथ्य के लिए भी होनी चाहिए।
6. सारणी के नीचे आंकड़ों के स्रोत को लिखा जाना चाहिए।
7. सामान्यतः स्तंभों को एक–दूसरे से रेखा द्वारा अलग किया जाना चाहिए। इसी प्रकार पंक्ति भी रेखाओं द्वारा अलग होनी चाहिए।
8. स्तंभों के संदर्भ के लिए कोई अंक देना (क्रमबद्ध या सतत) जैसे–1, 2, 3 .... देने चाहिए।
9. वे स्तंभ जिनके आंकड़े तुलनात्मक हों उन्हें एक के बाद एक रखना चाहिए। इसी प्रकार प्रतिशत और औसत आंकड़ों के साथ ही रखने चाहिए।
10. सारणीयन बनाने से पहले लगभग योग या औसत लिखा होना चाहिए क्योंकि ये सारणी का अनावश्यक वर्णन करने को कम करता है।
11. यह महत्वपूर्ण है कि सभी स्तंभों की संख्या या आंकड़े उसी स्थान पर होने चाहिए तथा उनके सम्मुख दशमलव बिंदु तथा (+) और (–) चिह्न लगे होने चाहिए।
12. संक्षिप्तीकरण सारणी में नहीं करना चाहिए। जैसे–मिश्रित तथा अलग तथ्य या पद यदि कोई हो तो उन्हें सारणी में आखिरी पंक्ति में लिखना चाहिए।
13. सारणी तर्कपूर्ण स्वच्छ सही तथा सामान्य होनी चाहिए। यदि आंकड़े या तथ्य बहुत ज्यादा हैं तो उन्हें एक ही सारणी में नहीं दिखाना चाहिए इससे समझने में असुविधा होती है।
14. पंक्तियों का योग सामान्यतः सबसे बाद के स्तंभ में लिखा जाना चाहिए। और स्तंभों का योग पंक्तियों के सबसे नीचे लिखा जाना चाहिए।
15. वर्गों की व्यवस्था सारणी में संख्या के आधार पर, शब्दों के आधार पर, स्थान के आधार पर तथा क्रम के आधार पर व तुलनात्मक आधार पर की जा सकती है।

टिप्पणी

अंत में कह सकते हैं कि सारणी का निर्माण शोधकर्ताओं को विषय की आवश्यकतानुसार करना चाहिए।

आंकड़ों का विश्लेषण

शोध में तथ्यों एवं आंकड़ों के संकलन करने के लिए हम अनेक विधियों का प्रयोग करते हैं। जैसे–प्रश्नावली, साक्षात्कार, अनुसूची, प्रश्नोत्तरी, अवलोकन, सर्वेक्षण इत्यादि। उक्त विधियों का प्रयोग करके प्राप्त या संकलित तथ्य इतने असंबद्ध तथा बिखरे हुए और जटिल रूप में होते हैं कि इनसे सरल, सुबोध, व्यवस्थित और तर्कपूर्ण निष्कर्षों को प्राप्त कर सकना प्रायः कठिन होता है। अतः आवश्यक है कि इन अव्यवस्थित तथ्यों को उनके विभिन्न गुणों के आधार पर सुव्यवस्थित करके एवं उन्हें विभिन्न श्रेणियों तथा सारणियों में विभाजित करके इनका विश्लेषण और विवेचन किया जाए।

पी.वी. यंग के अनुसार–''तथ्यों के वैज्ञानिक विश्लेषण में संकलित आंकड़े व्यवस्थित रूप में संबद्ध किए होने चाहिए। अर्थात् संकलित आंकड़े तब तक अर्थहीन होते हैं जब तक व्यवस्थित तरीके से उनका विश्लेषण एवं उनकी व्याख्या न की जाए।

संकलित तथ्यों से सही परिणामों को निकालने के लिए तथ्यों को व्यवस्थित करके सरल, सुव्यवस्थित एवं जनसाधारण के समझने योग्य बनाने की प्रक्रिया को आंकड़ों का विश्लेषण करना कहा जाता है।

आंकड़ा विश्लेषण के प्रमुख चरण

आंकड़ों के विश्लेषण की कुछ निश्चित प्रक्रिया है। जिनके उपयोग से तथ्यों को व्यवस्थित करने में सहायता मिलती है, ये चरण निम्नलिखित हैं–

1. **आंकड़ों के विषय में संपूर्ण ज्ञान**–शोधकर्ता को संकलित आंकड़ों का विश्लेषण करने के लिए आंकड़ों का पूर्ण ज्ञान होना आवश्यक है। आंकड़ों को विभिन्न वर्गों, सारणियों में रखने के लिए शोधकर्ता को उन आंकड़ों के विभिन्न गुणों के प्रति जागरूक होना जरूरी है।
2. **घटनाओं के प्रति अंतर्दृष्टि**–शोधकर्ता की संबंधित विषय या घटनाओं के संबंध में अंतर्दृष्टि जितनी अधिक स्पष्ट और गहरी होगी वह उसकी सहायता से आंकड़ों या तथ्यों का विश्लेषण उतने ही वैज्ञानिक रूप से करने में सफल होगा।
3. **सामान्य अनुभव तथा बौद्धिक ईमानदारी**–आंकड़ों का विश्लेषण करने में एक वैज्ञानिक कार्यविधि तथा निर्धारित नियमों का पालन करना जरूरी है इसका आधार बौद्धिक ईमानदारी है जो व्यक्तिगत अभिनति की संभावना को कम कर देती है।
4. **आलोचनात्मक कल्पनाशक्ति**–आंकड़ों के विश्लेषण हेतु संकलित आंकड़ों का वर्गीकरण, सारणीकरण उनकी विवेचना व विभिन्न तथ्यों के बीच पाये जाने वाले सह संबंधों को स्पष्ट करने के लिए एक आलोचनात्मक कल्पनाशक्ति की आवश्यकता होती है।

5. **अभिनति तथा पक्षपात से स्वतंत्र**—शोधकर्ता को आंकड़ों के विश्लेषण के लिए संकलित आंकड़ों के अनुरूप ही विषय को वस्तुनिष्ठ करना होता है। इसके लिए अत्यधिक सावधानियां और सतर्कता रखने की आवश्यकता होती है जिससे व्यक्तिगत अभिनति या पक्षपात की संभावना नहीं रहती।
6. **सिद्धांतों का प्रतिपादन**—तथ्यों की पक्षपातरहित व्याख्या के पश्चात सिद्धांतों का निरूपण या प्रतिपादन किया जाता है, इसके अंतर्गत व्याख्या के आधार पर निकाले गए निष्कर्षों का विश्लेषण भिन्न—भिन्न सिद्धांतों के आधार पर निरूपण करना है। सिद्धांतों को लिखते समय ऐसे शब्दों का चुनाव किया जाना चाहिए जिनका एक ही अर्थ हर व्यक्ति समान रूप में समझ सके। इसका अभिप्राय है कि सिद्धांत इस प्रकार का हो कि उसकी व्याख्या से संपूर्ण अध्ययन का क्षेत्र और मुख्य निष्कर्ष स्पष्ट हो तथा इन सिद्धांतों की वास्तविक उपयोगिता भी हो।
7. **तथ्यों का व्यवस्थित वर्गीकरण**—समग्र संचित तथ्यों अथवा आंकड़ों का विस्तृत अथवा ठोस वर्गीकरण ही आंकड़ों के विश्लेषण का प्रभावशील आधार है।

सामाजिक विज्ञानों में वर्गीकरण विशिष्ट रूप से महत्वपूर्ण है, क्योंकि सामाजिक घटनाओं में एक परिस्थिति के अनेक कारण प्रभावित करते हैं तथा उन कारणों में अत्यधिक विविधताएं पायी जाती हैं।

अतः इन कारकों को जानने के लिए विभाजन या वर्गीकरण आवश्यक होता है। इस प्रकार तथ्यों का वर्गीकरण हो जाने के पश्चात उनकी तुलना में उनमें पाए जाने वाली असमानताओं एवं समानताओं आदि की जानकारी संकलित की जा सकती है।

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है कि आंकड़ों के विश्लेषण में आवश्यक प्रक्रिया को करने में शोधकर्ता को संबंधित विषय या समस्याओं से संकलित आंकड़ों की पूर्ण जानकारी होने के साथ—साथ घटनाओं के प्रति स्पष्ट अंतर्दृष्टि तथ्यों का व्यवस्थित वर्गीकरण तथा बौद्धिक ईमानदारी से आलोचनात्मक विवेचना करने की अभिमति आदि गुणों का भी समावेश करना जरूरी है। शोधकर्ता को सदैव इस तथ्य को स्मरण रखना चाहिए कि संबंधित विषय से जुड़ा विश्लेषण आसान और सुस्पष्ट हो ताकि उसका लाभ सामान्य व्यक्ति भी उठा सके।

द्वितीयक आंकड़ों का विश्लेषण उन आंकड़ों, सूचनाओं का विश्लेषण है जिन्हें किसी शोधकर्ता, संस्था या गैर—सरकारी संगठन ने अपने निश्चित उद्देश्यों की पूर्ति के लिए पहले उपयोग किया हो। यदि द्वितीयक शोध तथा आंकड़ा विश्लेषण अधिक सावधानी से एवं परिश्रम से किया जाए तो यह मितव्ययी रूप से बड़ी से बड़ी शोध समस्याओं को हल कर सकता है। ये आंकड़े प्राथमिक शोध की प्रारूप रचना में सहायक होने के साथ—साथ प्राथमिक आंकड़ों के संग्रह से प्राप्त परिणामों की तुलना में भी सहायक होते हैं। अतः किसी भी शोध कार्य की शुरूआत करने से पूर्व द्वितीयक आंकड़ों का विश्लेषण करना हितकर होता है।

टिप्पणी

द्वितीयक आंकड़ों के विश्लेषण के लिए विशेष रूप से जिन तथ्यों अथवा सूचनाओं की आवश्यकता होती है वे शोध विषय पर ही आधारित होते हैं। द्वितीयक आंकड़ों के पुनरावलोकन और विश्लेषण में वही सूचनाएं सांख्यिकीय तथा दूसरे प्रासंगिक आंकड़े सम्मलित होते हैं जो विभिन्न स्तरों पर पारिस्थितिकीय विश्लेषण में भी सहायक होते हैं। आंकड़ों के विश्लेषण से जो तथ्य प्राप्त होते हैं उनकी आवश्यकता निष्कर्ष देने में, किसी प्रस्तावित विषय से संबंधित अध्ययन हस्तक्षेप करने में या किसी शोध विषय का प्रारूप तैयार करने में किया जाता है। इन आंकड़ों का पुनः विश्लेषण न केवल यह समझने में सहायक है कि किसी विशेष क्षेत्र में क्या हो रहा है बल्कि यह भी कि ये क्यों हो रहा है?

विश्लेषण का कार्य विचार पूर्ण आधारशिला की स्थापना करना है। जिसकी सहायता से संकलित तथ्यों को उचित संस्थिति एवं संबंधों के रूप में व्यवस्थित किया जा सके। विश्लेषण के दौरान आंकड़ों को उपकल्पनाओं एवं सिद्धांतों के संदर्भ में देखने का प्रयास किया जाता है एवं ऐसे निष्कर्ष निकाले जाते हैं जिनके आधार पर सिद्धांतों का निमार्ण किया जा सके। राजनीतिक शोधक संकलित तथ्यों के प्रकाश में चलता है। उसके लिए तथ्य ही मार्ग दर्शक होते हैं। विश्लेषण व्याख्या की पूर्व–क्रिया या गतिविधि है इसमें तथ्यों के उचित स्थान, स्वरूप और संबंधों का विचार किया जाता है।

विश्लेषण एवं व्याख्या एक दूसरे से जुड़ी हुई प्रक्रियाएं हैं जिसमें एक घटना से तथ्यों की ओर जाती है तो दूसरी, तथ्यों से घटना तथा घटना से बाहर की ओर जाती है। आंकड़ों का विश्लेषण करने के लिए यह जानना आवश्यक है कि प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों मे अंतर क्या है?

प्राथमिक और द्वितीयक आंकड़ों के बीच निम्नलिखित मौलिक भिन्नताएं पाई जाती हैं–

तालिका 3.4 *प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों में अंतर*

प्राथमिक आंकड़े	द्वितीयक आंकड़े
1. प्राथमिक आंकड़ों के संकलन में अधिक धन, समय, और श्रम की जरूरत होती है।	द्वितीयक आंकड़ों का संकलन तुलनात्मक रूप से कम खर्चीला होता है।
2. इन आंकड़ों का संकलन शोधकर्ता के द्वारा प्रथम बार किया जाता है।	इन आंकड़ों अथवा तथ्यों का संकलन एवं प्रकाशन पूर्व में कर लिया जाता है तथा शोधकर्ता इन्हें द्वितीय बार प्रयोग करता है।
3. प्राथमिक आंकड़े मौलिक होते हैं।	द्वितीयक समंक मौलिक नहीं होते।
4. ये अप्रकाशित होते हैं।	ये प्रकाशित होते हैं।
5. ये आंकड़े विश्वसनीय होते हैं।	ये पूर्ण विश्वसनीय नहीं होते।
6. प्राथमिक आंकड़ों में सत्यापन का गुण अधिक होता है अर्थात यदि एक बार संकलित किए गए प्राथमिक आंकड़े अध्ययन के दौरान असत्य या दोषपूर्ण दिखाई देते हैं तो क्षेत्र मे जाकर उसका पुनः संकलन किया जा सकता है।	द्वितीयक आंकड़े जिस रूप में हैं उनका उसी रूप में प्रयोग करना होता है।

7. प्राथमिक आंकड़े एक कच्चे माल की तरह हैं, जिनके आधार पर अध्ययन को एक स्वरूप दिया जा सकता है।	द्वितीयक आंकड़े एक तैयार माल की तरह हैं, जिनका उपयोग तो किया जा सकता है लेकिन आवश्यकतानुसार उनमें परिवर्तन नहीं किया जा सकता है।
8. प्राथमिक आंकड़ों का संकलन करने के लिए अनेक अध्ययन प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है।	द्वितीयक आंकड़ों का प्राथमिक आंकड़ों का अध्ययन प्रविधियों द्वारा संकलन नहीं किया जा सकता है।
9. प्राथमिक आंकड़ों और द्वितीयक आंकड़ों में एक अन्य अंतर समय कारक से संबंधित होता है अर्थात कोई विशेष तथ्य एक वक्त में एक व्यक्ति के लिए प्राथमिक हो सकता है।	कुछ समय पश्चात वही तथ्य दूसरे अध्ययनकर्ता के लिए प्राथमिक आकड़े द्वितीयक आंकड़े बन सकते हैं।
10. प्राथमिक आंकड़ों का संकलन साक्षात्कार अनुसूची एवं प्रश्नावली द्वारा किया जाता है।	द्वितीयक आंकड़ों का संकलन लिखित प्रलेखों के अंतर्गत विश्लेषण करके किया जाता है।
11. प्राथमिक सामग्री का संकलन शोधकर्ता द्वारा समस्या आश्रित पहलुओं को सम्मुख रखकर किया जाता है।	द्वितीयक सामग्री के लिए हमें प्रलेखों पर आश्रित रहना पड़ता है।

आकंड़ों के संकलन की प्रविधि एवं तकनीक

समंकों या आंकड़ों को एकत्रित अथवा संगृहीत करना समंक संकलन कहलाता है। शोधकर्ता को अपना शोध पूरा करने के लिए तथ्यों का संकलन वैज्ञानिक पद्धति से करना होता है क्योंकि शोधकर्ता द्वारा संकलित किए गए समंक जितने अधिक शुद्ध एवं विश्वसनीय होंगे, शोध उतना ही अधिक वैज्ञानिक और उपयोगी निष्कर्ष देता है। इस दृष्टिकोण से प्रत्येक शोधकर्ता न केवल अनेक प्रविधियों और उपकरणों की सहायता से विभिन्न प्रकार के तथ्यों को एकत्रित करता है, बल्कि उन स्रोतों और प्रविधियों को भी जानने का प्रयत्न करता है जिनके द्वारा उपयोगी तथ्यों को एकत्रित किया जा सके। गुडे एवं हाट के मतानुसार सामग्री संकलन की प्रविधियों के अंतर्गत उन विशिष्ट प्रविधियों या तकनीकों को सम्मिलित किया जा सकता है जिनके द्वारा शोधकर्ता अपने तथ्यों को तार्किक एवं सांख्यिकीय विश्लेषण से पूर्व एकत्रित एवं व्यवस्थित करता है। सामाजिक शोध में कई प्रविधियां प्रचलित हैं तथा प्रत्येक प्रविधि का तथ्यों के एकत्रीकरण का एक स्वीकृत एवं मान्य तरीका है।

आंकड़ों के संकलन की प्रमुख प्रविधियां/तकनीकें निम्नवत हैं–

1. साक्षात्कार प्रविधि
2. अनुसूची विधि
3. प्रश्नावली प्रविधि
4. अवलोकन (सहभागी और असहभागी) प्रविधि।

साक्षात्कार प्रविधि

सामाजिक अनुसंधान में प्राथमिक तथ्यों का संकलन करने के लिए जिस पद्धति का प्रयोग सर्वाधिक रूप में किया जाता है वह साक्षात्कार ही है। साक्षात्कार शब्द अंग्रेज़ी भाषा के 'Interview' का हिंदी रूपांतरण है। इंटरव्यू शब्द दो शब्दों से मिलकर बना है– Inter अथवा भीतर तथा View अर्थात देखना, जिसका शाब्दिक अर्थ होता है–

अंतःदर्शन या आंतरिक रूप से देखना। साक्षात्कार सामाजिक अनुसंधान में तथ्यों के संग्रहण की एक मौखिक पद्धति है, अर्थात साक्षात्कार वह पद्धति है जिसमें बातचीत के माध्यम से सामग्री का संग्रहण किया जाता है। हमारे दैनिक जीवन में साक्षात्कार शब्द का प्रचलन इतना अधिक बढ़ चुका है कि किसी भी पद के लिए नौकरी प्राप्त करने, संस्थाओं में प्रवेश पाने अथवा किसी विशेष अधिकारी अथवा नेता से मिलने के लिए हमें साक्षात्कार की प्रक्रिया से गुजरना पड़ता है। सामाजिक अनुसंधान के संदर्भ में साक्षात्कार का अभिप्राय शोधकर्ता द्वारा सूचनादाता से नियोजित ढंग से कुछ तथ्यों अथवा घटनाओं की आंतरिक विशेषताओं को ज्ञात करना है। विभिन्न विद्वानों ने साक्षात्कार को भिन्न–भिन्न रूप से परिभाषित किया है।

- **परिभाषाएं**

गुडे और हाट (Goode and Hatt) के अनुसार, ''साक्षात्कार मौलिक रूप से सामाजिक अंतःक्रिया की एक प्रक्रिया है।'' अर्थात साक्षात्कार की अभिक्रिया केवल शोधकर्ता एवं उत्तरदाता के एक दूसरे के संबंध से नहीं हैं बल्कि इन दोनों पक्षों के बीच एक अर्थपूर्ण, उद्देश्यपूर्ण अंतःक्रिया से है।''

पी.वी. यंग (P.V. Young) के अनुसार, ''साक्षात्कार एक ऐसी व्यवस्थित विधि है जिसके द्वारा एक व्यक्ति (शोधकर्ता) दूसरे व्यक्ति के आंतरिक जीवन में अधिक या कम कल्पनात्मक रूप से प्रवेश करता है जो उसके लिए सामान्यतया तुलनात्मक रूप से अपिरिचत होता है।"

एम.एन. बसु (M.N. Vashu) के अनुसार, "एक साक्षात्कार को कुछ विषयों को लेकर व्यक्तियों के आमने–सामने का मिलन कहा जा सकता है।"

सी.ए. मोजर ने साक्षात्कार की परिभाषा इस प्रकार दी है–"एक सर्वेक्षण साक्षात्कार, शोधकर्ता तथा उत्तरदाता के मध्य एक वार्तालाप है, जिसका उद्देश्य उत्तरदाता से निश्चित सूचना प्राप्त करना होता है।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि साक्षात्कार का उद्देश्य किसी विशेष समस्या या जानकारी के संदर्भ में ज्ञान प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि साक्षात्कार सामाजिक अनुसंधान की वह पद्धति है जिसके द्वारा शोधकर्ता वार्तालाप के द्वारा सूचनादाता के विचारों और भावनाओं में प्रवेश करके तथ्यों का संकलन करता है। साक्षात्कार के अर्थ को अधिक स्पष्टता से परिभाषित करते हुए लुथर फ्राई ने लिखा है– "साक्षात्कार आंकड़ों अथवा तथ्यों के संकलन की एक विधा है यह किसी निश्चित उद्देश्य हेतु वार्तालाप के अतिरिक्त कुछ भी नहीं है। इसमें दो या अधिक व्यक्ति परस्पर एक दूसरे में प्रोत्साहन पाते हुए उत्तर–प्रत्युत्तर करते हैं।" उक्त से स्पष्ट है कि साक्षात्कार व्यक्तिगत संपर्क के द्वारा सूचना एकत्रित करने एवं उन्हें लिखने की एक ऐसी क्रमबद्ध प्रविधि है जिसमें दो या दो से अधिक व्यक्ति किसी महत्वपूर्ण लक्ष्य की समझ रखकर परस्पर संवाद, बातचीत या उत्तर प्रत्युत्तर देते हैं।

साक्षात्कार की विशेषताएं

साक्षात्कार की उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर प्रमुखतया निम्न विशेषताएं निर्धारित की जा सकती हैं–

1. साक्षात्कार सामाजिक सर्वेक्षण एवं अनुसंधान की एक पद्धति है।
2. यह प्राथमिक तथ्यों के संकलन की एक महत्वपूर्ण प्रविधि है।
3. साक्षात्कार का उद्देश्य सामाजिक जीवन और सामाजिक घटनाओं के बारे में जानकारी प्राप्त करना है।
4. साक्षात्कार दो या दो से अधिक व्यक्तियों का किसी सुनिश्चित उद्देश्य के लिए आपस में मिलना है।
5. इसमें शोधकर्ता और सूचनादाता के बीच आमने सामने के संबंध प्रत्यक्ष रूप से स्थापित होते हैं।
6. साक्षात्कार एक मनोवैज्ञानिक प्रक्रिया है जिसके अंतर्गत अनेक मनोवैज्ञानिक विधियों के द्वारा उत्तरदाता जीवन की आंतरिक जटिलताओं की जांच करने का प्रयत्न किया जाता है।
7. साक्षात्कार का एक विशेष उद्देश्य होता है।

साक्षात्कार के उद्देश्य

सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार की प्रविधि शोधकर्ता को यह अवसर प्रदान करती है कि वह शोध से संबंधित व्यक्ति के संपर्क में आकर अतीत की घटनाओं, उसकी निजी भावनाओं अथवा प्रतिक्रियाओं को समझकर सामाजिक घटनाओं में पायी जाने वाली नियमितता की खोज कर सके। सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार निम्न उद्देश्यों से किए जाते हैं–

1. **प्राथमिक सामग्री का संकलन**– साक्षात्कार का एक प्रमुख उद्देश्य किसी अध्ययन से संबंधित प्राथमिक सामग्री का संकलन करना होता है। इस प्रविधि के द्वारा कुछ व्यक्तियों से प्रत्यक्ष संपर्क स्थापित करके शोध के विभिन्न पक्षों से संबंधित आंतरिक और व्यक्तिगत सूचनाएं एकत्रित की जा सकें। जिनमें से अनेक प्राथमिक तथ्यों का संबंध व्यक्ति के निजी जीवन अथवा गोपनीय पक्षों से होता है उसके बारे में केवल साक्षात्कार द्वारा ही ज्ञान प्राप्त किया जा सकता है।
2. **व्यक्तिगत सूचनाएं**– साक्षात्कार पद्धति में सूचनादाता और शोधकर्ता के बीच आमने–सामने के प्रत्यक्ष और व्यक्तिगत संबंध स्थापित किए जाते हैं, जिससे एक दूसरे के विचारों और भावनाओं में प्रवेश करने का प्रयास किया जाता है। इस प्रकार इससे सरलता और सुगमता के साथ व्यक्तिगत सूचनाएं संकलित की जा सकती हैं।

टिप्पणी

3. **नई परिकल्पनाओं का निर्माण**– साक्षात्कार के द्वारा सामाजिक जीवन, सामाजिक घटनाओं और सामाजिक समस्याओं के बारे में विविध प्रकार की जानकारी प्राप्त होती है, जिनके आधार पर नई परिकल्पनाओं का निर्माण किया जा सकता है।
4. **घटनाओं का अवलोकन**– साक्षात्कार पद्धति में शोधकर्ता संपर्क स्थापित करने के लिए क्षेत्र में जाता है तथा उत्तरदाता से अनेक प्रश्न करने के साथ ही उसके वातावरण, जीवन स्तर, क्रिया–कलापों, सदस्यों के पारस्परिक संबंधों तथा अभिरुचियों का स्वयं भी अवलोकन करने का अवसर प्राप्त कर लेता है। इस दृष्टिकोण से साक्षात्कार एक दोहरी प्रविधि है, जिसके अंतर्गत विषय से संबंधित ज्ञान प्राप्त करने के साथ ही शोधकर्ता घटनाओं का अवलोकन भी करता है।
5. **गुणात्मक तथ्यों की जानकारी**– पद्धति का उद्देश्य अध्ययन किए जाने वाले के सामाजिक मूल्यों, आदर्श, नियमों, व्यवहार, प्रतिमानों, रुचियों तथा विश्वासों, भावनाओं मनोवृत्तियों, उद्वेगों, विचारों, अच्छाइयों, अमूर्त तथा अदृश्य गुणों आदि से संबंधित गुणात्मक तथ्यों की जानकारी प्राप्त करना है।
6. **समस्याओं के विभिन्न पहलुओं की जानकारी**– साक्षात्कार प्रविधि में शोधकर्ता विषय से संबंधित अनेक व्यक्तियों से संपर्क स्थापित करता है और विषय पर खुलकर चर्चा परिचर्चा करता है। इससे उस सामाजिक समस्या के विभिन्न पहलुओं की जानकारी प्राप्त होती है।
7. **तथ्यों का सत्यापन**– साक्षात्कार का उद्देश्य केवल प्राथमिक आंकड़ों या नये तथ्यों का ज्ञान प्राप्त करना ही नहीं है बल्कि अतीत में प्राप्त किए गए या दिए गए निष्कर्षों या विचारों का सत्यापन करना भी है। इसके लिए विषय विशेषज्ञों से साक्षात्कार द्वारा प्राप्त सूचनाओं से निष्कर्षों का सत्यापन करने का प्रयास किया जाता है।

साक्षात्कार के प्रकार

सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार प्रविधि ज्ञान प्राप्त करने की एक महत्वपूर्ण तकनीक है। इसके प्रमुख प्रकारों को निम्न भागों में विभाजित किया जा सकता है–

1. **व्यक्तिगत साक्षात्कार**– जब शोधकर्ता का एक समय में एक ही व्यक्ति से साक्षात्कार होता है तो इसे व्यक्तिगत साक्षात्कार कहा जाता है। इस साक्षात्कार में शोधकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछता है और सूचनादाता (शोधकर्ता) इन प्रश्नों का उत्तर देता है। ऐसे साक्षात्कार के अनेक गुण हैं–
   - इसके द्वारा अधिक यथार्थ और आंतरिक सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।
   - इसके द्वारा अधिक संवेदनशील प्रश्नों के उत्तर प्राप्त किए जा सकते हैं।
   - समस्त प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करना संभव होता है।

   इस संबंध में बोगार्डस (Bogardus) ने लिखा है कि ''व्यक्तिगत साक्षात्कार द्वारा लोगों की मनोवृत्तियों तथा उनमें होने वाली परिवर्तन को सर्वोत्तम रूप में समझा जा सकता है।''

2. **सामूहिक साक्षात्कार**– यह वह प्रविधि है जिसमें शोधकर्ता एक समय में एक से अधिक व्यक्तियों के साथ संपर्क या साक्षात्कार कर सकता है। इस प्रविधि में चूंकि उत्तरदाता समूह में होते हैं इसलिए इसे सामूहिक साक्षात्कार कहा जाता है। इसमें शोधकर्ता प्रत्येक उत्तरदाता से व्यक्तिगत रूप में उत्तर प्राप्त नहीं कर सकता है। अधिक उत्तरदाताओं के एक समूह का एक ही साथ अध्ययन कर सकता है। इस तरह के साक्षात्कार को सामूहिक परिचर्चा भी कहते हैं। वर्तमान समय में इस प्रकार के साक्षात्कार अत्यधिक लोकप्रिय होते जा रहे हैं। सामूहिक साक्षात्कार के निम्न लाभ हैं–
   - इसके माध्यम से विश्वसनीय सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।
   - तुलनात्मक दृष्टि से समय और व्यय की बचत होती है।
   - यह अधिक वैयक्तिक अध्ययन का साधन है।
   - इसके माध्यम से व्यापक क्षेत्र में एवं बड़ी संख्या में उत्तरदाताओं से सूचनाएं संकलित की जा सकती है।
3. **औपचारिक साक्षात्कार**– औपचारिकता के आधार पर साक्षात्कार को औपचारिक साक्षात्कार कहते हैं। इसे नियंत्रित या संकलित साक्षात्कार भी कहा जाता है। इस प्रकार के साक्षात्कार में शोधकर्ता केवल वे ही प्रश्न पूछता है जो पहले से तैयार विषय सूची में उल्लेखित रहता है। इसमें शोधकर्ता अनूसूची से नियंत्रित रहता है। उसको अनूसूची के प्रश्नों, भाषा आदि के परिवर्तन में किसी प्रकार की स्वतंत्रता नहीं रहती है। इस साक्षात्कार का प्रमुख उद्देश्य अध्ययन में एकरूपता बनाए रखना होता है। इस प्रकार के साक्षात्कार में सभी उत्तरदाताओं से एक ही प्रकार से प्रश्न किए जाते हैं।
4. **अनौपचारिक साक्षात्कार**– इस साक्षात्कार को अनियंत्रित अथवा असंरचित साक्षात्कार भी कहा जाता है इसमें बिना किसी अनुसूची की सहायता से शोधकर्ता कुछ मुख्य प्रश्नों को पूछता है एवं उत्तरदाता स्वतंत्रतापूर्वक उन सवालों का जवाब देता है। शोधकर्ता अपनी इच्छा के अनुसार प्रश्नों को बढ़ाने घटाने अथवा आवश्यकतानुसार परिवर्तन करने के लिए स्वतंत्र रहता है। इससे लाभ यह होता है कि शोधकर्ता के समक्ष अनेक ऐसे महत्वपूर्ण तथ्य स्पष्ट हो जाते हैं जिनकी पहले से कोई कल्पना नहीं की गई होती है। इस तरह के साक्षात्कार का प्रयोग विशेषकर मनोवैज्ञानिक अध्ययनों के लिए किया जाता है।
5. **अनुसंधान साक्षात्कार**– इस प्रकार के साक्षात्कार घटनाओं में व्याप्त कार्य कारण संबंधों की खोज के उद्देश्य से आयोजित किए जाते हैं। इस प्रकार के साक्षात्कार का उद्देश्य नवीन ज्ञान की खोज करना होता है। इसमें कुछ प्रमुख व्यक्तियों अथवा समूहों की मनोवृत्तियों, सामाजिक मूल्यों तथा परिवर्तनशील विचारों का अध्ययन किया जाता है।
6. **पुनरावृत्ति साक्षात्कार**–जैसा कि नाम से स्पष्ट है कि यह साक्षात्कार बार–बार किया जाता है। एक ही उत्तरदाता से बार–बार साक्षात्कार करके सूचनाएं इकट्ठा करना पुनरावृत्ति साक्षात्कार कहलाता है। सामाजिक परिवर्तन

से संबंधित घटनाओं के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए बार–बार साक्षात्कार किया जाता है एवं निष्कर्ष निकाला जाता है। इससे पूर्व में प्राप्त सूचनाओं का पुनः परीक्षण एवं सत्यापन हो सकता है।

टिप्पणी

7. **केंद्रित साक्षात्कार**– केंद्रित साक्षात्कार उसे कहते हैं जिसके अंत में शोधकर्ता को किसी पूर्व निर्धारित विषय पर केंद्रित रहकर ही विभिन्न प्रकार के प्रश्न करने होते हैं। ऐसे साक्षात्कार में उत्तरदाता को अपने विचारों को एक विशेष ढंग से व्यक्त करने की पूर्ण स्वतंत्रता रहती है। इस तरह का साक्षात्कार वही शोधकर्ता कर सकता है जो विषय से पूर्व में परिचित है। इसमें किसी घटना विशेष अथवा पक्ष विशेष पर ध्यान केंद्रित किया जाता है। इस प्रकार के साक्षात्कार का उपयोग करने वालों में मर्टन एवं उनके सहयोगी तथा पेट्रीशिया कैंडाल आदि का नाम महत्वपूर्ण है। इन्होंने इसका प्रयोग जन–समुदाय तथा व्यक्तियों पर फिल्मों, पत्रिकाओं अथवा रेडियो का सामाजिक मनोवैज्ञानिक प्रभाव मापने हेतु 1946 में किया था। इस साक्षात्कार की प्रमुख विशेषताएं हैं–
   - साक्षात्कार के लिए उस विषय का चुनाव किया जाता है, जिस पर पहले से ही कुछ कार्य हो गया हो।
   - इसका प्रयोग इन लोगों पर होता है जो एक विशेष निर्धारित विषय से संबंध रखते हैं।
   - इस प्रकार का साक्षात्कार विषयगत अनुभवों पर आधारित होता है।
   - यह साक्षात्कार पर प्रदर्शिका के आधार पर संचालित किया जाता है।
   - इसे निर्देशित साक्षात्कार भी कहते हैं।
8. **अनिर्देशित साक्षात्कार**– इस तरह के साक्षात्कार में शोधकर्ता उत्तरदाता के समक्ष कोई कठिन समस्या अथवा प्रश्न रखता है। इसमें शोधकर्ता का कार्य उत्तरदाता को दिए गए विषय पर बोलने के लिए प्रोत्साहित करना होता है। उत्तरदाता दिए गए विषय पर अपने लंबे कथनों में जिन विचारों को व्यक्त करता है, शोधकर्ता उन्हीं में से उपयोगी और उपयुक्त सूचनाओं और तथ्यों को संकलित करता है, इस प्रकार के साक्षात्कार की प्रमुख विशेषताएं निम्न हैं–
   - यह अनियंत्रित साक्षात्कार से मिलता जुलता है।
   - इसमें उत्तरदाता पर किसी प्रकार का नियंत्रण नहीं रहता है और वह पूर्ण स्वतंत्र रहता है।
   - इसमें उन समस्याओं का अध्ययन किया जाता है जो तुलनात्मक रूप से नई और उलझी हुई होती हैं।
9. **आकस्मिक साक्षात्कार**– इस प्रकार के साक्षात्कार में शोधकर्ता को ऐसे व्यक्तियों के विषय में कोई पूर्व जानकारी नहीं होती जिनका साक्षात्कार किया जाना है। शोधकर्ता किसी भी समय किसी भी जगह पर एकएक साक्षात्कार कर तथ्यों का संकलन कर लेता है। किसी विशेष जनमत की जानकारी के लिए इस प्रकार के साक्षात्कार का प्रयोग किया जा सकता है।

10. **उपचारात्मक और निदान संबंधी साक्षात्कार**–उपचारात्मक साक्षात्कार में संबंधित व्यक्तियों से ऐसे सुझाव प्राप्त करने का प्रयत्न किया जाता है जिनकी सहायता से समाज में व्याप्त जीवंत समस्याओं का उपचार व निदान किया जा सके। साधारणतया व्यक्तिगत तथा सामाजिक समस्याओं के बारे में व्यक्तियों के विचार जानना तथा किन्हीं मनोवैज्ञानिक व्याधियों का उपचार व निदान इस प्रकार के साक्षात्कार का मुख्य उद्देश्य होता है।

साक्षात्कार पद्धति के विविध चरण

सुव्यवस्थित प्रकार से साक्षात्कार का संचालन स्वयं एक कला है। साक्षात्कार की सफलता के लिए यह आवश्यक है कि शोधकर्ता ने अपने आपको भली भांति तैयार किया हो तथा उसने अपने प्रमुख उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए तथ्यों का कुशलतापूर्वक संकलन किया हो क्योंकि इस प्रविधि में शोधकर्ता को प्रत्यक्ष संबंध स्थापित करके चुनाव किए गए उत्तरदाताओं से अध्ययन के विषय के संबंध में तथ्यों का संकलन करना होता है। साक्षात्कार प्रविधि किस तरह संचालित की जाए एवं इसका उपयोग किस तरह किया जाए इस पर विभिन्न विद्धानों एवं समाजशास्त्रियों ने अपने विचार व्यक्त किए हैं।

गुडे और हाट ने लिखा है कि "मौलिक रूप में साक्षात्कार सामाजिक अंतःक्रिया की एक प्रक्रिया है इसे भली प्रकार संपन्न करना एक कला है, जिसमें अत्यधिक सावधानी तथा पूर्ण परीक्षण भी आवश्यकता पड़ती है। अतएव उसे विधिवत योजना बनाकर संगठित किया जाना चाहिए।" गुडे और हाट के इस कथन से स्पष्ट होता है कि साक्षात्कार की सफलता तभी संभव है जबकि इसे विभिन्न चरणों के माध्यम से इस प्रकार व्यवस्थित किया जाए जिससे शोधकर्ता अपने उद्देश्य को प्राप्त कर सके। साक्षात्कार के विभिन्न चरणों का अर्थ है– साक्षात्कार की तैयारी से लेकर उसकी समाप्ति तक जो कार्य संपादित किया जाता है, उसके प्रमुख चरण कौन से हैं? सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार के कौन–कौन–से चरण होने चाहिए, इस विषय में जॉन मैज का विचार है कि साक्षात्कार की प्रक्रिया साधारणतया तीन चरणों अथवा स्तरों में से होकर गुजरती है, जिनमें से प्रत्येक चरण एक स्पष्ट उद्देश्य की ओर संकेत करता है। पी.वी. यंग ने अपनी पुस्तक साइन्टिफिक सोसियल सर्वे एण्ड रिसर्च 'Scientific Social Survey and Research' में साक्षात्कार की प्रणाली के निम्न 6 चरण बताए हैं–

1. साक्षात्कार में जटिल बिंदु
2. सम्मानित श्रोता की खोज
3. सहानुभूतिपूर्ण वातावरण
4. साक्षात्कार की प्रक्रिया की तरफ प्रयास
5. आरंभिक विचार
6. साक्षात्कार की समाप्ति।

साधारणतया साक्षात्कार के चरणों का निर्धारण अध्ययन विषय की प्रकृति के अनुसार होना चाहिए। मुख्य रूप से साक्षात्कार की प्रक्रिया के निम्नलिखित चरण होते हैं–

टिप्पणी

1. साक्षात्कार की तैयारी— साक्षात्कार की सफलता के लिए सर्वप्रथम आवश्यक है कि शोधकर्ता साक्षात्कार से पूर्व योजना का स्पष्ट रूप से निर्धारण कर लें। साक्षात्कार से पूर्व शोधकर्ता को अध्ययन विषय का पूर्णरूप से ज्ञान होना आवश्यक है; जैसे अध्ययन का उद्देश्य क्या है। उसे किन–किन पहलुओं से गुजरना पड़ सकता है एवं उत्तरदाताओं से किस तरह के तथ्य संकलित करने हैं। साथ ही उत्तरदाताओं का चुनाव, साक्षात्कार की जगह एवं समय भी पहले से ही तय कर लेना चाहिए।

साक्षात्कार की तैयारी में निम्न बातें अति आवश्यक हैं–

1. **विषय का ज्ञान**– शोधकर्ता को साक्षात्कार करने से पहले विषयवस्तु के विभिन्न पहलुओं के संबंध में पूर्ण जानकारी एकत्रित कर लेनी चाहिए।
2. **निर्देशिका का निर्माण**– साक्षात्कार की तैयारी में दूसरा चरण साक्षात्कार निर्देशिका का निर्माण करना है। यह एक लिखित प्रलेख होता है। इसमें साक्षात्कार करने की संक्षिप्त रूप में प्रणाली, समस्या के कई पहलू एवं अन्य जरूरी निर्देश दिए रहते हैं। साक्षात्कार निर्देशिका का निर्माण निम्न उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है–
   - (क) इसके निर्माण से शोधकर्ता समस्या के सभी पहलुओं का अध्ययन करने में समर्थ रहता है।
   - (ख) इसके द्वारा उत्तरदाताओं को साक्षात्कार से संबंधित तथ्यों को सरलता से समझाया जा सकता है।
   - (ग) इससे शोधकर्ता को अपनी स्मरण शक्ति पर दबाव नहीं डालना पड़ता है।
   - (घ) साक्षात्कार निर्देशिका की सहायता से हम जो भी सामग्री संगृहीत करते हैं वह यथार्थ और ठोस रहती है।
   - (ङ) साक्षात्कार निर्देशिका अध्ययन समस्या में योजनाबद्ध तरीके से तथ्यों का संकलन करने में सहायता करती है।
3. **व्यक्तियों (उत्तरदाताओं) का चुनाव**–साक्षात्कार की तैयारी में तीसरा महत्वपूर्ण कदम उत्तरदाताओं का चयन करना है। उत्तरदाताओं का चुनाव निर्देशन की सहायता से किया जा सकता है। उत्तरदाताओं का चयन किन आधारों पर करना उचित होता है। इस संबंध में एम.एच. गोपाल ने उत्तरदाताओं की तीन विशेषताएं बताई हैं–
   - **प्रभावशाली**– व्यक्तित्व का स्वामी हो।
   - **विशेषज्ञ**– संबंधित विषयों की जानकारी रखता हो।
   - **सामान्य जनसमूह**– अपने समूह में पर्याप्त अंतःक्रिया करता हो।

   साक्षात्कार की सफलता व उचित अध्ययन सामग्री का संकलन सही उत्तरदाताओं के चुनाव पर निर्भर करता है।

4. **उत्तरदाताओं के संबंध में जानकारी**— साक्षात्कार की तैयारी में अगला चरण उत्तरदाताओं के संबंध में जानकारी अर्जित करना होता है। उत्तरदाताओं के सामने दो बातें स्पष्ट होनी चाहिए— साक्षात्कार की योजना क्या है और साक्षात्कार क्यों किया जा रहा है। इसके अलावा उत्तरदाताओं की प्रवृत्ति, उनके नियम आदि बातों का पता लगाना भी जरूरी होता है तथा शोधकर्ता को उत्तरदाताओं से पूर्व परिचय कर लेना भी आवश्यक होता है। इससे उत्तरदाता अध्ययन के औचित्य को समझकर प्रभावकारी व सत्य जानकारी देते हैं।
5. **समय और स्थान निश्चित करना**— साक्षात्कार में समय और स्थान का चयन करना अत्यंत महत्वपूर्ण है उत्तरदाताओं की राय से ही समय और स्थान का निर्धारण किया जाना चाहिए। इसके लिए उत्तरदाताओं से पत्र, टेलीफोन अथवा व्यक्तिगत रूप से संबंध स्थापित किया जा सकता है।

साक्षात्कार प्रक्रिया (संचालन)

साक्षात्कार की पूर्व तैयारी के पश्चात साक्षात्कार का संचालन किया जाता है। वास्तव में, साक्षात्कार की सफलता उसकी संचालन प्रक्रिया पर ही सबसे अधिक निर्भर करती है। वास्तव में, साक्षात्कार में शोधकर्ता और उत्तरदाता सामाजिक अंतःक्रियात्मक संबंध स्थापित होता है। इस दृष्टिकोण में शोधकर्ता को साक्षात्कार संबंधित सभी दशाओं को जानना आवश्यक होता है जिनकी सहायता से साक्षात्कार का संचालन सफलतापूर्वक किया जा सके।

1. **उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित करना**— साक्षात्कार की प्रक्रिया का पहला चरण— शोधकर्ता का उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित करना है। परिचय पत्र, संबंधित व्यक्ति या उत्तरदाताओं के मित्रों के माध्यम से संपर्क स्थापित किया जा सकता है। यंग के अनुसार, "प्रथम संपर्क में उत्तरदाताओं के सांस्कृतिक प्रतिमानों के अनुरूप उसके प्रति मैत्रीपूर्ण अभिवादन करने के पश्चात शोधकर्ता को अपनी इस भेंट का उद्देश्य स्पष्ट करना चाहिए।"
2. **उद्देश्य को स्पष्ट करना**— उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित हो जाने के पश्चात शोधकर्ता को साक्षात्कारदाताओं (उत्तरदाताओं) के सामने अपने शोध के उद्देश्य को स्पष्ट रूप से परिभाषित करना चाहिए। साक्षात्कार के लक्ष्य को बहुत सरल स्पष्ट एवं मधुर भाषा में साक्षात्कार के सामने स्पष्ट कर देना चाहिए। इस प्रकार के प्रयोजनों का स्पष्टीकरण करके अगले चरण की तैयारी की जाती है।
3. **सहयोग की अपील**— साक्षात्कार के उद्देश्य को स्पष्ट करने के पश्चात शोधकर्ता द्वारा संबंधित व्यक्ति से साक्षात्कार में सहयोग और सहायता देने की एक नम्र अपील करनी चाहिए। उत्तरदाता को यह विश्वास दिलाना भी आवश्यक है कि उसके सहयोग के बिना अध्ययन कार्य सफल नहीं हो सकता।
4. **साक्षात्कार का प्रारंभ**— साक्षात्कार के संचालन में साक्षात्कार को प्रारंभ करते समय अपना उद्देश्य स्पष्ट करना चाहिए और सहयोग की अपील करने के

टिप्पणी

पश्चात ही साक्षात्कार प्रारंभ करना चाहिए। साक्षात्कार के आरंभिक स्तर पर उत्तरदाता का नाम, आयु, व्यवसाय, शिक्षा, परिवार के लोगों की संख्या आदि से संबंधित परिचयात्मक प्रश्न किए जाने चाहिए। इसके पश्चात अध्ययन विषय से संबंधित सामान्य और सरल प्रकृति के प्रश्न करने चाहिए। इस समय शोधकर्ता को बहुत निष्पक्ष, सतर्क, गंभीर एवं बुद्धिमानीपूर्वक व्यवहार करना चाहिए। उत्तरदाता को पूरा–पूरा बोलने की अनुमति दी जानी चाहिए। प्रश्न पूछते समय शोधकर्ता को निम्न बातों पर विशेष ध्यान देना चाहिए–

(क) सिर्फ ऐसे ही प्रश्न पूछे जाएं जिनका शोध (अनुसंधान) से सीधा संबंध हो।

(ख) आदेशात्मक प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए।

(ग) दोहरी प्रकृति के प्रश्न न पूछे जाएं।

(घ) उपदेश देने वाले प्रश्नों से भी बचा जाए।

(ङ) शोधकर्ता को प्रश्न पूछते समय किसी भी परिस्थिति में क्रोधित नहीं होना चाहिए।

(च) प्रश्नों की प्रकृति समय के अनुकूल हो।

(छ) किसी प्रश्न के उत्तर के लिए दबाव न डाला जाए।

5. **उत्तर के लिए प्रोत्साहन**– सफल साक्षात्कार के लिए यह भी आवश्यक है कि बीच–बीच में उत्तरदाता को इस प्रकार प्रोत्साहन मिलता रहे कि वह उत्तर देने में थकान अनुभव न करें। इसके लिए शोधकर्ता को उत्तरदाता की प्रशंसा तथा सावधानीपूर्वक प्रोत्साहित करना चाहिए।

6. **पुनः स्मरण या नियंत्रण**– साक्षात्कार की प्रणाली में कभी–कभी उत्तरदाता वर्णनात्मक सवालों का जवाब देते हुए भावनाओं में खो जाता है तथा मूल विषय से हट जाता है। ऐसी दशा में शोधकर्ता को सावधानीपूर्वक विशेष रूप से परिस्थिति पर नियंत्रण करके उत्तरदाता की बात सुनते हुए बीच में स्वयं इस प्रकार की बात करनी चाहिए जो उत्तरदाता को मूल प्रश्न की याद दिला दें। साक्षात्कार में स्वयं पर नियंत्रण रखकर तथा उत्तरदाता को साक्षात्कार के मूल उद्देश्य से संबंधित विषय वस्तु पर लाना चाहिए।

7. **सूचनाओं का आलेखन**– साक्षात्कार की प्रक्रिया के मध्य सूचनाएं अति संक्षिप्त रूप में लिखी जाती है जिससे इसमें कम समय लगे। इसके लिए जरूरी है कि शोधकर्ता को संकेत लिपि पर संक्षिप्त यंत्रों को इकट्ठा करना चाहिए।

8. **साक्षात्कार की समाप्ति**– सभी आवश्यक सूचनाएं प्राप्त होने के बाद साक्षात्कार समाप्त करना चाहिए। इस स्तर पर शोधकर्ता को अनेक सावधानियां रखना आवश्यक होता है–

   - यदि अध्ययन विषय से जुड़े सवालों का जवाब देने के बाद भी उत्तरदाता कुछ और करना चाहता है तो उसे भी ध्यानपूर्वक सुना जाना चाहिए।
   - यदि उत्तरदाता विभिन्न उत्तर देते हुए थकान का अनुभव कर रहा हो तो साक्षात्कार बीच में रोक देना चाहिए।

टिप्पणी

- साक्षात्कार तब बंद करना चाहिए जब उत्तरदाता आनंद या थकान का अनुभव कर रहा हो, ऐसी स्थितियों में वह साक्षात्कार के दौरान बताए गए गुप्त बातों के प्रति भयभीत नहीं होगा।
- अंत में उत्तरदाता को उसके सहयोग के लिए धन्यवाद देते हुए तथा सामान्य शिष्टाचार और मैत्रीपूर्ण संबंधों के साथ साक्षात्कार समाप्त कर देना चाहिए।

9. **प्रतिवेदन**— साक्षात्कार की समाप्ति के बाद प्राप्त तथ्यों का प्रतिलेखन किया जाता है। प्रतिवेदन करते समय अपनी समय शक्ति का पूर्व उपयोग करना चाहिए। इसके लिए शोधकर्ता को अपने संक्षिप्त नोटों की सहायता लेनी चाहिए। प्रतिवेदन की भाषा स्पष्ट एवं सरल हो जिससे निष्कर्ष भी पक्षपातरहित एवं क्रमबद्ध अर्जित होंगे।

उपर्युक्त वर्णनों से स्पष्ट होता है कि साक्षात्कार की प्रणाली में कई चरण होते हैं। हर चरण में अत्यधिक सतर्कता बरतनी होती है ताकि विश्वसनीय एवं प्रामाणिक सूचनाएं प्राप्त की जा सकें और शोध भी पूरा किया जा सके।

साक्षात्कार के लाभ

सामाजिक सर्वेक्षण एवं अनुसंधान के लिए प्राथमिक सामग्री के संकलन हेतु साक्षात्कार किसी भी दूसरी प्रविधि की तुलना में अधिक महत्वपूर्ण है। सामाजिक शोध के क्षेत्र में इस प्रणाली के महत्व की विवेचना करते हुए गुडे एवं हाट ने बताया है कि गुणात्मक साक्षात्कार की आवश्यकता के पुनर्मूल्यांकन के कारण समकालीन परीक्षण में साक्षात्कार की विशिष्टता पहले से भी ज्यादा हो गई है।

अतः गुणात्मक व्याख्या के लिए साक्षात्कार पद्धति एक महत्वपूर्ण पद्धति है। इसके द्वारा अनेक गुणात्मक तथ्यों तथा व्यक्तियों के विचारों, भावों एवं मनोवृत्तियों को भली भांति जाना जा सकता है।

1. **मनोवैज्ञानिक दृष्टि से उपयोगी**— अध्ययन विषय से संबंधित व्यक्ति के अपने विचार, भावनाएं एवं धारणाएं होती हैं, इनका अध्ययन सिर्फ साक्षात्कार पद्धति के आधार पर ही किया जा सकता है। अतः यह साक्षात्कार पद्धति ही मनोवैज्ञानिक उपदेशिका है।
2. **अमूर्त घटनाओं का अध्ययन**—साक्षात्कार पद्धति से सामाजिक घटनाएं जो मूर्त नहीं होतीं अर्थात जिन्हें देखा नहीं जा सकता, का अध्ययन आसानी से किया जा सकता है।
3. **मध्यकालीन घटनाओं का अध्ययन**—सामाजिक परिवर्तनशीलता के कारण सभी सामाजिक घटनाएं जो कि समाज की पुनर्रचना में महत्वपूर्ण होती हैं इतिहास बन जाती हैं, उन घटनाओं का अध्ययन साक्षात्कार पद्धति से कर सकते हैं।
4. **सभी स्तरों के व्यक्तियों का अध्ययन**—साक्षात्कार में शिक्षित, अशिक्षित ग्रामीण, नागरिक, सभी स्तरों के लोगों से विचार—विमर्श किया जा सकता है एवं उनसे सूचनाएं संगृहीत की जा सकती हैं। यह भी इस प्रणाली का एक विशेष गुण है कि इसे अशिक्षित व्यक्तियों पर भी लागू किया जा सकता है।

टिप्पणी

5. **संपूर्ण प्रतिमान के लिए उपयोगी**—साक्षात्कार विधि की सहायता से जहां एक ओर अध्ययन के लिए उपयुक्त निदर्शन अथवा प्रतिमान प्राप्त किया जा सकता है तो दूसरी ओर इसके द्वारा प्रतिचयन के अंतर्गत आने वाले सभी व्यक्तियों से सूचनाएं प्राप्त करना संभव होता है।
6. **पारस्परिक प्रेरणा**—इस प्रविधि के माध्यम से तथ्य संगृहीत करने के लिए उत्तरदाता एवं शोधकर्ता आमने सामने विषय से संबंधित विचारों का आदान प्रदान करते हैं एवं दोनों ही परस्पर प्रेरित एवं उत्साहित होते हैं। इस प्रेरणा के कारण उत्तरदाता सही सूचनाएं देता है एवं नये—नये तथ्यों के संबंध में जानकारी मिलती है।
7. **विश्वसनीयता**—इस पद्धति के माध्यम से विश्वसनीय आंकड़े अथवा सूचनाएं अर्जित होने की संभावना बन जाती है। इसका कारण यह है कि शोधकर्ता साक्षात्कार की प्रक्रिया के दौरान गलत प्रतीत होने वाले उत्तरों से अपने प्रश्न का स्पष्टीकरण करके न केवल ठीक करने का प्रयास करता है बल्कि उत्तरदाता पर भी इस प्रकार नियंत्रण रखता है जिससे वह अधिक से अधिक सही उत्तर दे सके।
8. **सत्यापन की क्षमता**—साक्षात्कार तुलनात्मक रूप से एक लोचपूर्ण प्रविधि है जिसके द्वारा प्राप्त सूचनाओं में वैयक्तिक पक्षपात की संभावना को कम किया जा सकता है। साक्षात्कार में घटनाओं का वृहद स्तर पर स्पष्टीकरण होता है। पारस्परिक विचारों के आदान—प्रदान के द्वारा समस्याओं और घटनाओं के स्पष्टीकरण में मदद मिलती है।
9. **अध्ययन में समन्वय**—साक्षात्कार में शोधकर्ता, उत्तरदाताओं और परिस्थितियों को देखते हुए अध्ययन की योजना में समन्वय स्थापित कर सकता है। उत्तरदाताओं द्वारा दी गई सूचनाओं के आधार पर अध्ययन विषय में किसी पक्ष में परिवर्तन करना अथवा किसी नये पक्ष का समावेश करना भी साक्षात्कार द्वारा ही संभव हो पाता है।
10. **अवलोकन का समावेश**—साक्षात्कार प्रविधि में शोधकर्ता को अवलोकन का अवसर भी प्राप्त होता है, जिससे वह साक्षात्कार के साथ—साथ कई घटनाओं का अवलोकन करते हुए बीच में ही नये पदों को सम्मिलित भी कर सकता है। साक्षात्कार के अंतर्गत जिन विषयों से संबंधित प्रश्न पूछना उचित अथवा संभव नहीं होता, सामान्य अवलोकन के द्वारा उससे संबंधित जानकारी भी प्राप्त की जा सकती है।
11. **विविध सूचनाओं की प्राप्ति**— साक्षात्कार प्रविधि के द्वारा एक उत्तरदाता अथवा विभिन्न प्रकार के उत्तरदाताओं से अध्ययन विषय के विभिन्न क्षेत्रों की सूचनाएं प्राप्त की जा सकती है।

साक्षात्कार के उपर्युक्त गुणों के अतिरिक्त इस प्रविधि का एक लाभ यह भी है कि इसके द्वारा शोधकर्ता को स्वयं अपनी अवधारणाओं को संशोधित करने का भी अवसर मिल जाता है। साक्षात्कार से प्राप्त सूचनाएं अधिक आत्मिक और स्वाभाविक होती हैं।

टिप्पणी

साक्षात्कार प्रणाली की सीमाएं

साक्षात्कार प्रविधि में उपरोक्त गुणों अथवा महत्वों के साथ–साथ इसकी कुछ सीमाएं भी हैं, जिनके कारण कभी–कभी इसके द्वारा विश्वसनीय और यथार्थ तथ्यों को संकलित करना बहुत कठिन प्रतीत होता है। इन दोषों अथवा सीमाओं का ध्यान रखे बिना साक्षात्कार प्रविधि का कुशलतापूर्वक उपयोग नहीं किया जा सकता है। साक्षात्कार की प्रविधि की निम्नलिखित सीमाएं हैं–

1. **दोषपूर्ण स्मरण शक्ति**–यह इस प्रविधि की बहुत बड़ी सीमा है क्योंकि यह शोधकर्ता की स्मरण शक्ति पर निर्भर करता है। वास्तव में स्मृति स्वयं में एक दोषपूर्ण आधार है तथा इस पर आधारित तथ्यों से संपूर्ण अध्ययन के दोषपूर्ण हो जाने की संभावना रहती है।
2. **अपूर्ण तथ्यों का संकलन**–साक्षात्कार प्रविधि में शोधकर्ता को उत्तरदाताओं की इच्छा पर निर्भर रहना होता है। उत्तरदाता कभी–कभी एक ही पक्ष को विस्तार से स्पष्ट कर पाता है। अतः अधिकांश साक्षात्कारों से प्राप्त सूचनाएं अकसर एक पक्षीय अथवा अपूर्ण होती हैं।
3. **बड़े अध्ययन में अनुपयुक्त**–साक्षात्कार प्रविधि का उपयोग अध्ययन विषय के एक छोटे क्षेत्र के लिए किया जा सकता है। अध्ययन का क्षेत्र यदि बड़ा है तो साक्षात्कार के लिए चुने गए सभी व्यक्तियों से व्यक्तिगत रूप से मिलकर सूचनाएं एकत्रित कर सकना बहुत कठिन हो जाता है।
4. **उपलब्ध समय की कमी**– साक्षात्कार पद्धति में सभी सूचनादाताओं से शोधकर्ता को व्यक्तिगत संपर्क स्थापित करना पड़ता है। ऐसा करने में अधिक समय लगता है। साधारणतया उत्तरदाता भी अपने खाली समय का उपयोग किसी अन्य कार्य अथवा मनोरंजन के लिए करना चाहते हैं। इसके फलस्वरूप शोधकर्ता को साक्षात्कार के लिए समय देना उनके लिए कठिन होता है।
5. **कुशल साक्षात्कार की समस्या**–साक्षात्कार की सफलता इसके कुशल संचालन पर निर्भर करती है। अतः शोधकर्ता को साक्षात्कार करने के लिए बहुत व्यवहार कुशल, योग्य और अनुभवी होना आवश्यक है। साधारणतया यह एक कठिन कार्य है इस पर ध्यान दिए बिना साक्षात्कार की संपूर्ण प्रक्रिया दोषपूर्ण हो जाती है।
6. **उत्तरदाताओं का असहयोगपूर्ण व्यवहार**–साधारणतया शोधकर्ता के प्रति उत्तरदाताओं का व्यवहार अधिक सहयोगपूर्ण नहीं होता। इससे विभिन्न सूचनाएं प्राप्त करने के लिए शोधकर्ताओं को उत्तरदाताओं की प्रशंसा अथवा चापलूसी तक करनी पड़ती है, जिससे साक्षात्कार प्रक्रिया उत्साह के साथ पूर्ण नहीं हो पाती। उत्तरदाताओं के दोषों को स्पष्ट करते हुए पी.वी. यंग ने लिखा है कि ''समझदार होने के बाद भी उत्तरदाताओं में अकसर घटनाओं के दोषपूर्ण बोध, दोषपूर्ण स्मृति, अंर्तदृष्टि का अभाव तथा अपनी–बात को स्पष्ट रूप से कह सकने की अयोग्यता होती है।'' जिसके कारण साक्षात्कार दोषपूर्ण हो जाता है।

7. **अशुद्ध प्रतिवेदन**– अनेक स्थितियों में उत्तरदाता साक्षात्कार के दौरान गलत सूचना भी देता है। जिससे शोधकर्ता द्वारा तैयार प्रतिवेदन अशुद्ध हो जाता है तथा अध्ययन अपने निश्चित उद्देश्य तक नहीं पहुंच पाता है।

टिप्पणी

साक्षात्कार एक उपयोगी प्रविधि है लेकिन इसे व्यवहार में लाना अत्यधिक कठिन और सूझबूझ का कार्य है। इस संबंध में पी.वी. यंग ने लिखा है कि ''साक्षात्कार के अंतर्गत साक्षात्कारकर्ता (शोधकर्ता) की भूमिका सबसे अधिक महत्वपूर्ण होती है तथा उसकी कुशलता, अनुभव, बौद्धिक, स्तर एवं परिस्थितियों से अनुकूलन कर सकने की क्षमता के द्वारा साक्षात्कार प्रविधि के दोषों का निवारण किया जा सकता है। सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार प्रविधि में कई दोषों अथवा सीमाओं के बावजूद इनका उपयोग बराबर बढ़ता जा रहा है। यह एक उपयोगी प्रविधि के रूप में प्रचलित हो रही है तथा इसके भविष्य में उत्तरोत्तर विकास की पूर्ण संभावनाएं हैं।

'अपनी प्रगति जांचिए'

12. 'सांख्यिकी' शब्द को परिभाषित करें।
13. माध्यिका को परिभाषित करें।
14. माध्य क्या है?

3.5 ज्यामिति और क्षेत्रमिति

क्षेत्रमिति (Mensuration) गणित की वह शाखा है जो मापन से संबंधित है मापन में भी विशेष रूप से यह ज्यामिति आकृतियों के क्षेत्रफल एवं आयतन के सूत्रों की निष्पत्ति और उनके प्रयोगों सं संबंधित है। इसके अतिरिक्त ज्यामिति (Geometry) गणित की तीन विशाल शाखाओं में से एक है। इसके अंतर्गत बिन्दुओं, रेखाओं, तलों और ठोस वस्तुओं के गुण तथा इनके स्वभाव, मापन और उनके समष्टि में सापेक्षिक स्थिति के बारे में अध्ययन किया जाता है। ज्यामिति गणित की प्राचीनतम् शाखाओं में से एक है। ज्यामिति अर्थानुसार 'गणित की एक ऐसी शाखा है, जिसके अंतर्गत बिन्दुओं, रेखाओं वक्रों, समतलों तथा अन्य वस्तुओं का अध्ययन किया जाता है। ज्यामिति गणित की वह शाखा है जिसके अंतर्गत हम दो या दो से अधिक रेखाखंडों का अध्ययन करते हैं।

3.5.1 परिमाप और क्षेत्रफल

- परिमाप (Perimeter) एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल (Area) एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र दर्शाता है।
- समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या × एक भुजा की लंबाई
- वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा
- आयत का परिमाप = $2 \times (l + b)$
- आयत का क्षेत्रफल = $l + b$
- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

उदाहरण 3.70: एक आयताकार शीट पर क्षेत्रफल 500 cm^2 है। यदि शीट की लंबाई 25cm हो तो इसकी चौड़ाई क्या होगी? आयताकार शीट का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार शीट का क्षेत्रफल = 500 cm^2

लंबाई (l) = 25cm

आयत का क्षेत्र $= l \times b$ (जहाँ $b =$ शीट की चौड़ाई)

इसलिए, चौड़ाई $b = \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{l} = \dfrac{2500}{25} = 20\text{ cm}$

शीट का परिमाप $= 2 \times (l + b) = 2 \times (25 + 20)\text{ cm} = 90$

इस प्रकार, आयताकार शीट की चौड़ाई 20cm तथा इसका परिमाप 90 cm है।

उदाहरण 3.71: एक वर्ग और एक आयत का क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा 40cm हो और आयत की चौड़ाई 25cm हो तो आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए। आयत का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल: वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

= 40 cm × 40 cm = 1600 cm^2

यह दिया है कि

आयत का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = 1600 cm^2

आयत की चौड़ाई = 25 cm

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

1600 = $l \times 25$

आयत का परिमाप = $\dfrac{1600}{25} = 64\text{ cm}$

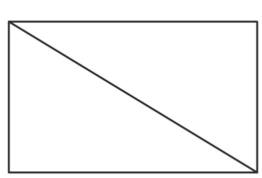
$= 2\,(l + b) = 2\,(64 + 25)\text{ cm}$

= 2 × 89 cm = 178 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल

आयत के भाग के रूप में त्रिभुज त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्र = $\dfrac{1}{2}$ (आयत का क्षेत्रफल)



$$= \frac{1}{2} \times (l \times b) = \frac{1}{2} \times (8 \times 5) = \frac{40}{2} = 20\text{cm}^2$$

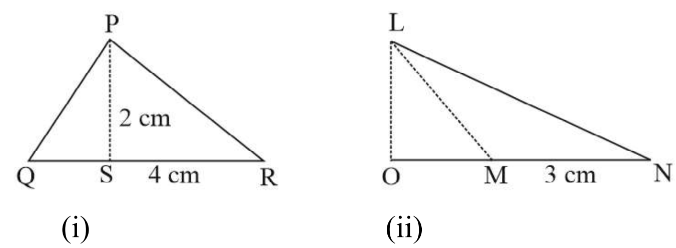
एक त्रिभुज के आधार तथा ऊँचाई की तुलना समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कीजिए।

टिप्पणी

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) (क्योंकि, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई $=\frac{1}{2}(b \times h)$

सभी सर्वागसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वागसम है।

उदाहरण 3.72: निम्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए: (आकृति 3.1)



आकृति (3.1)

हल:

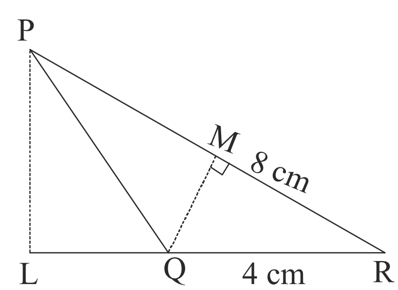
(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2} bh=\frac{1}{2} \times \mathrm{QR} \times \mathrm{PS} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2=4 \mathrm{~cm}^2$

(ii) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} bh=\frac{1}{2} \times \mathrm{MN} \times \mathrm{LO} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2=3 \mathrm{~cm}^2$

उदाहरण 3.73: ΔPQR में PR = 8 cm QR = 4cm और PL = 5 cm ज्ञात कीजिए।

(i) DPQR का क्षेत्रफल

आधार = 4 cm   ऊँचाई = 5 cm



त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2} bh = =\frac{1}{2} \times 4 \mathrm{~cm} \times 5 \mathrm{~cm}=10 \mathrm{~cm}^2$

(ii) आधार 18 cm, ऊँचाई = ?

त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2} \times b \times h$ अर्थात् $10=\frac{1}{2} \times 8 \times h$

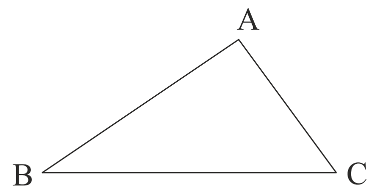
$h=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5 \mathrm{~m}=\mathrm{OM}$

3.5.2 त्रिभुज

आप देख चुके है कि त्रिभुज (Triangle), तीन रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आकृति है। इसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोष होते हैं। यहाँ एक DABC है। जो इस प्रकार है-

भुजाएं: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण: $\angle$BAC, $\angle$ABC, $\angle$BCA, A, B, C



शीर्ष A की सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है। क्या आप भुजा $\overline{AB}$ के सम्मुख कोण का नाम बता सकते हैं?

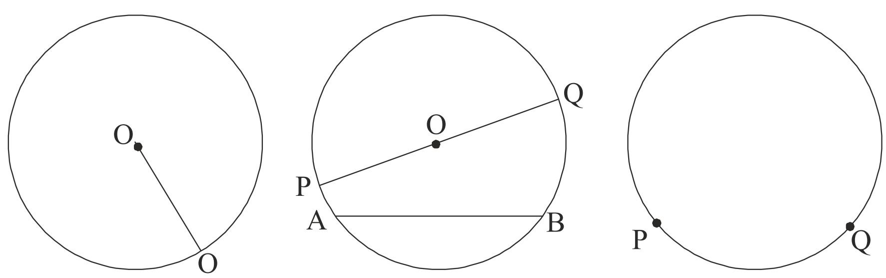
आप जानते हैं कि त्रिभुओं का वर्गीकरण (i) भुजाओं (ii) कोणों के आधार पर प्रकार किया जाता है।

(i) भुजाओं के आधार पर: विषमबाहु, समद्विबाहु तथा समबाहु त्रिभुज

(ii) कोणों के आधार पर: न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण त्रिभुज।

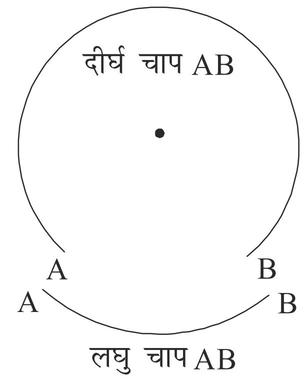
वृत्त

स्थिर बिन्दु वृत्त का केन्द्र (Centre) कहलाता है तथा निश्चिंत दूरी को वृत्त की त्रिज्या (Radius) कहते हैं। दी गई आकृति में एक O वृत का केन्द्र तथा लम्बाई OA वृत्त की त्रिज्या है।

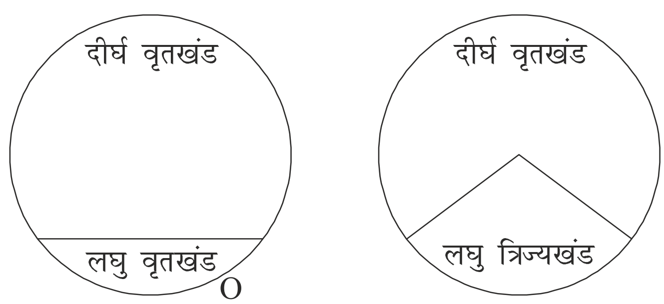


- एक वृत्त अपने तत्व को तीन भागों में विभाजित करना है। जो निम्नलिखित हैं-
  - (a) वृत्त का भीतरी भाग, जिसे अभ्यंतर (Interior) भी कहते हैं
  - (b) वृत्त एवं (c) वृत्त के बाहर का भाग, जिसे बहिभाग (Exterior) भी कहते हैं। वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर वृत्तीय क्षेत्र (Circular Region) बनाते हैं।
- यदि एक वृत्त पर दो बिन्दु A और B लें तो रेखाखंड AB को वृत्त की एक जीवा कहते हैं। उस जीवा को जो वृत्त के केन्द्र से गुजरती है, वृत्त का व्यास (Diameter) कहते हैं।
- वृत्त के दो बिन्दुओं के बीच के भाग को एक चाप (Arc) कहते हैं।

टिप्पणी



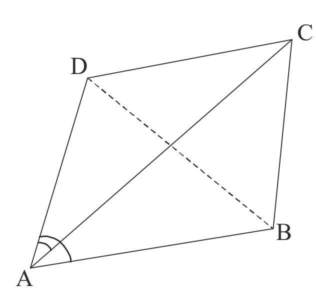
- बड़ा भाग दीर्घ चाप (Major Arc) AB कहलता है तथा छोटो भो को लघु चाप (Minor Arc) कहते हैं।
- जब A और B एक व्यास के सिरे हो, तो दोनों चाप बराबर हो जाते हैं और प्रत्येक चाप को अर्धवृत्त (Semicircle) कहते हैं।
- संपूर्ण वृत्त की लम्बाई वृत की परिधि (Circumference) कहलाती है। केन्द्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को त्रिज्यखंड (Sector) कहते हैं।



- दी गई आकृति में क्षेत्र AOB लघु त्रिज्यखंड (Minor Sector) तथा शेष वृत्तीय क्षेत्र दीर्घ त्रिज्यखंड (Major Sector) है। जब दोनों चाप बराबर हो जाते हैं तो दोनों वृत्तखंड तथा दोनों त्रिज्याखंड एक समान हो जाते हैं और प्रत्येक को अर्धवृत्तीय क्षेत्र (Semi Circular Region) कहते हैं।

चतुर्भुज (Quadrilateral)

- चारों बिन्दुओं की एक क्रम में जोड़ने से प्राप्त आकृति को चतुर्भज (Quadrilateral) कहते हैं।



- एक चतुर्भुज चारों भुजाओं, चार कोण और चार शीर्षो से बनता है।
- AC और BD चतुर्भुज ABCD के वे विकर्ण (Diagonals) कहते हैं।
- चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है। इसकी जाँच, चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।

टिप्पणी

- मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है और AC उसका एक विकर्ण। हम जानते हैं कि ΔADC में

  $\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA = 180°$ ... (1)

- इसी प्रकार, $\angle ABC$ में,

  $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$ ... (2)

  (1) और (2) को जोड़ने पर, हम पाते हैं कि

  $\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA + \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = 180° + 180° = 360°$

  इसी प्रकार $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ और $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

  $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360°$ है।

- त्रिभुओं की सर्वांगसमता (Congruence) के लिए कसौटियाँ

त्रिभुजों की सर्वागसमता के लिए चारा कसौटियां (Criteria) या नियम (Rules) होते हैं।

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। भुजा कोण भुजा (Side Angle Side) सर्वांगसमता नियम।

1. **कोण-भुजा-कोण (Angle Sum Propefty) सर्वांगसमता नियमः** यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वागसम होते हैं।
2. **भुजा-भुजा-भुजा (Side-Side-Side)** सर्वांगसम नियम, यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
3. **समकोष-कर्ण-भुजा (Right Angle-Hypotenuse- Side) सर्वागसमता नियमः** यदि जो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
   - त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
   - त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।
   - किसी त्रिभुज में लंबी (बड़ी) भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
   - किसी त्रिभुज के बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी (बड़ी) होती है।
   - किसी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
   - किसी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से कम होता है।

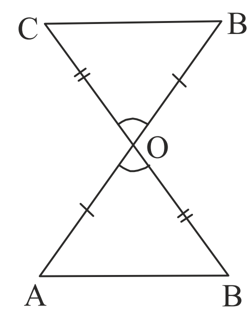
महत्वपूर्ण बिंदु

- दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती है, यदि उनका एक ही आकार और एक ही माप हो।
- दो समतल आकृतियाँ सर्वांगसम होती है, यदि प्रत्येक को दूसरी आकृति पर रखने पर वह उसको पूरी तरह आच्छादित कर लेती है।

टिप्पणी

- दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लम्बाई समान हो।
- समान माप वाले दो कोण सर्वांगसम होते हैं।
- समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
- समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
- दो आयत सर्वागसम होते हैं। यदि उनकी लंबाई और चौड़ाई की माप समान हो।
- यदि त्रिभुज ABC और DEF संगतता $A \leftrightarrow 0, B \leftrightarrow E$ और $C \leftrightarrow F$, के अंतर्गत सर्वांगसम हो, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ लिखते हैं

उदाहरण 3.74: दी गई आकृति में $OA = OB$ और $OD = OC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta AOD \cong \Delta BOC$



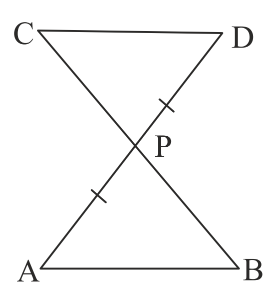
हलः ΔAOD और ΔBOC है।

OA और $OD = OC$ (दिया है)

साथ ही, $\angle AOD = \angle BOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः, $\Delta AO\Delta \cong \angle BOX$ (SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा)

उदाहरण 3.75: रेखाखंड AB एक अन्य रेखाखंड CD के संमांतर है और P रेखाखंड AD का मध्य-बिंदु है। सिद्ध कीजिए



(i) $\Delta APB \cong \angle DPC$

(ii) P रेखाखंड BC का भी मध्य बिंदु है।

हलः ΔAPB और $\angle DPC$ हैं,

$\angle ABP = \angle DCP$ (एकांतर कोण और तिर्यक रेखा BC के साथ $AB \parallel CD$)

$\angle ABP = \angle DCP$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$PA = PD$ (दिया है)

टिप्पणी

इसलिए $\Delta APB \cong \Delta DPC$ (कोण भुजा कोण नियम द्वारा)

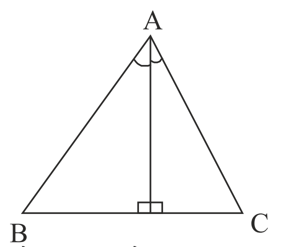
(ii) $PB = PC$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

अत: P रेखाखंड BC का भी मध्य बिंदु है।

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हो, उसे समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) कहते हैं।

उदाहरण 3.76: ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AO भुजा पर लम्ब है।

सिद्ध कीजिए कि $AB = AC$ है।



(कोण भुजा कोण नियम द्वारा)

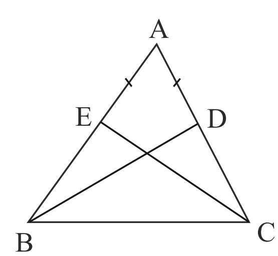
और ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल: ΔABO और ΔACO में

$\angle BAO = \angle CAO$ (दिया है।)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)

$\angle AB = \angle BOC = 90^o$ (दिया है।)



इसलिए, $\Delta ABO \cong \angle ACO$ (दिया है।) (ASA नियम)

अत: $AB = AC$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

इसी कारण ΔABC समद्विबाहु है।

उदाहरण 3.77: D और E क्रमश: त्रिभुज ΔABC की बराबर भुजाओं AC और AB के मध्य-बिंदु है।

सिद्ध कीजिए कि $BD = CE$ है।

हल: ΔABD और ΔACE में

$AB = AC$ (दिया है।)

$\angle A = \angle A$ (उभर्यानिष्ठ)

$AD = AE$ (बराबर भुजाओं के आधे भाग)

इसलिए $\Delta ABD \cong \angle ACE$ (भुजा कोण भुजा नियम द्वारा)

अतः $BD = CE$ (सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग)

टिप्पणी

उदाहरण 3.78: RHS समकोण (Right Angle) – कर्ण (Hypotenuse)– भुजा (Side) को व्यक्त करता है। बिंदु a पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं l औ m से समदूरस्थ एक बिंदु O है। दर्शाइए कि रेखा OA दोनों रेखाओं के बीच के कोणों को समद्विभाजित करती है।

हलः यहाँ रेखाएँ l और m एक दूसरे को A पर काटती हैं।

मान लीजिए $OB \perp m$ और $OC \perp m$ है। यह दिया है कि $OB = OC$ है।

सिद्ध करना है कि $\angle OAB = \angle OAC$ है। अब, ΔOAB और $\angle OAC$ है।

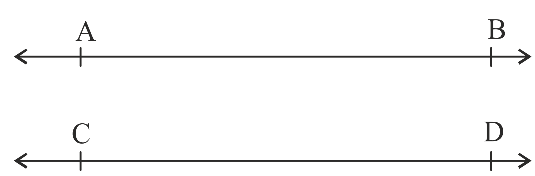
$OB = OC$ (दिया है)

$\angle OBA = \angle OCA = 90°$ (दिया है।)

इसलिए, $\Delta OAB \cong \angle OAC$ (समकोण कर्ण भुजा नियम द्वारा)

अतः, $\angle OAB = \angle OAC = 90°$ (सर्वांसम त्रिभुज के संगत भाग)

3.5.3 समांतर रेखाएँ



ये समांतर रेखाएँ हैं। रेखाएँ AB और AD। ध्यान दीजिए इन दो समांतर रेखाओं के विभिन्न बिंदुओं पर उनके उभनिष्ठ लम्बों की लंबाइयाँ हमेशा समान रहेगी। यह दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कहलाती है।

युक्लिड की ज्यामिति परिचय

- 'यूक्लिड' (Euclid) की ज्यामिति' जो हम पढ़ते हैं वह यूक्लिड की देन है। ये ज्यामिति के पिता के नाम से जाने जाते हैं। यूक्लिड का गणित के विभिन्न क्षेत्रों जैसे संख्या पद्धति और खगोल शास्त्र में बड़ा योगदान है।
- **अभिग्रहीत या अभिधारणाएँ**– अभिग्रहीत या अभिधारणाएँ एक प्रकार की कल्पनाएँ होती है। ये कल्पनाएँ वास्तव में स्पष्टतः सर्वव्यापी सत्य थी। इसकी सिद्धता नहीं होती।

प्रमेय (Theorem): प्रमेय ऐसे कथन होते हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिग्रहीतों और तार्किकताओं के आधार पर सिद्ध किया जाता है।

युक्लिड के कुछ अभिग्रहीत

1. वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के समान हो एक दूसरे के समान होती हैं।
2. अगर बराबर को बराबर में जोड़े तो पूर्ण भी बराबर होते हैं।
3. अगर बराबर को बराबर में से हटाया जाए तो शेषफल भी बराबर होते हैं।
4. वे वस्तुएँ तो आपस में संपाती है, एक दूसरे के समान होती है।

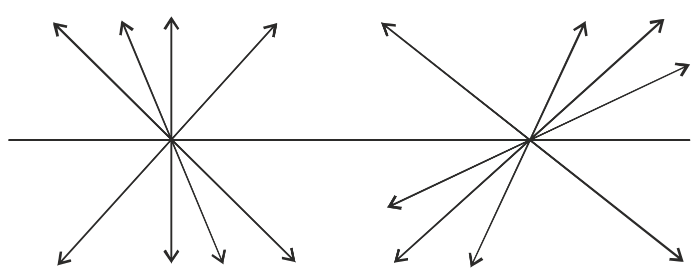
5. पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
6. एक ही वस्तुओं के दुगुने आपस में समान होते हैं।
7. एक ही वस्तुओं के आधे आपस में समान होते हैं।

परिभाषाँ

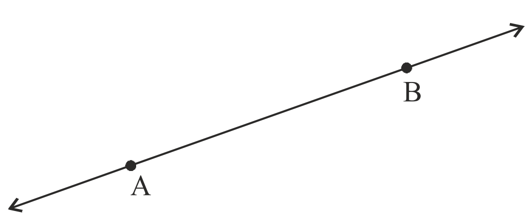
1. एक बिंदु (Point) वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
2. एक रेखा (Line) चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
3. एक रेखा के सिरे बिंदु होते है।
4. एक सीधी रेखा ऐसी रेख है जो स्वयं पर बिंदुओं के साथ सपाट रूप में स्थित होती है।
5. एक पृष्ठ (Surface) वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
6. पृष्ठ के किनारे (Edges) रेखाएँ होती है।
7. एक समतल पृष्ठ (Plane Surface) ऐसा पृष्ठ है जो स्वयं पर सीधी रेखाओं के साथ सपाट रूप से स्थित होता है।

यूक्लिड की अभिधरणाएँ

1. **अभिधारण-1:** एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक सीधी रेखा खींची जा सकती है।



अभिधारण-2: एक सात रेखा को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

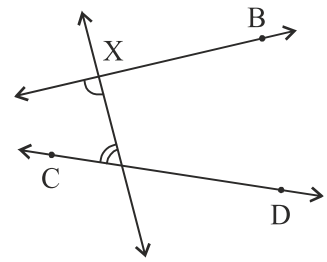


अभिधारणा-3: किसी बिंदु को केन्द्र मानकर तथा किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

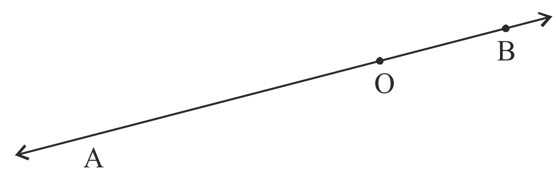
अभिधारणा-4: सभी समकोण एक दूसरे के समान होते हैं।

अभिधारणा-5: यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर प्रतिच्छेद होकर एक ओर अन्त: कोण इस तरह बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

टिप्पणी



उदहारण 3.79: यदि A, O और B एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु है और O बिंदुओं A और B के बीच में स्थित है तो सिद्ध कीजिए कि AO + OB = AB है।



हलः इस आकृति में AO + OB के साथ AB संपाती है। साथ ही, युक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर संपाती दों एक दूसरे के बराबर होती है। अत,

AO + OB = AB

नोटः इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

3.5.4 वृत्त की परिधि

- एक वृत्ताकर क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।
- यह अनुपात स्थिर है और इसे 'π' (pi) पाई से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 है।

  अतः हम कह सकते हैं $\frac{c}{d} = \pi$, जहाँ 'c' वृत्त की परिधि और 'd' इसका व्यास दर्शाता है।

- हम जानते हैं कि πd एक वृत्त का व्यास (d), त्रिज्या (r) का दुगुना होता है, अर्थात् $d = 2r$

  अतः $C = \pi d = \pi \times 2r$ या $C = 2\pi r$

  वृत्त का क्षेत्रफल

  वृत्त का क्षेत्रफल बनाए गए आयत का क्षेत्रफल $= l \times b =$ (परिधि का आधा) $\times$ त्रिज्या $= \left(\frac{1}{2} \times 2 \times r\right) \times r = \pi r^2$

  अतः, वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

टिप्पणी

उदाहरण 3.80: 10 cm व्यास वाल एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल: ($\pi = 3.14$ लीजिए)

वृत्त का व्यास (d) = 10 cm

वृत्त की परिधि = πd = 3.14 × 10 cm = 31.4 cm

उदाहरण 3.81: सुधांशु 7 cm त्रिज्या वाल एक वृत्ताकार तश्तरी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए।

(प्रयोग करें $\pi = \frac{22}{7}$)

हल: (i) अर्धवृत्ताकार आकार की परिधि

दी गई त्रिज्या $(r) = 7\,\text{cm}$

हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि = $2\pi r$

अतः अर्धवृत्त की परिधि $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r \quad = \frac{22}{7} \times 7\text{ cm} = 22\text{ cm}$

इसलिए, वृत्त का व्यास $= 2r = 2 \times 7\text{ cm} = 14\text{ cm}$

अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकर तश्तरी का परिमाप $= 22\text{cm} + 14\text{cm} = 36\text{ cm}$

उदाहरण 3.82: 30 cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल: त्रिज्या 30 cm

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826\,\text{cm}^2$

उदाहरण 3.83: एक वृत्ताकर बगीचे का व्यास 9.8 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: व्यास, $d = 90\,\text{m}$ अतः त्रिज्या $r = 9.8 \div 2 = 4.9\text{ m}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (49)^2\ \text{m}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9\ \text{m}^2 = 75.46\text{m}^2$

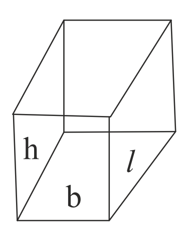
आयतन (Volume)

घनाभ 1. घनाभ (Cuboid) का आयतन $= lph$

2. घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\,(lb + bh + hl)$

3. घनाभ का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2h\,(l + b)$

4. घनाभ का विकर्ण $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

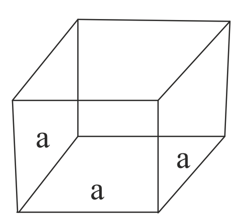


घन 1. घन का आयतन $= a^3$

2. घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रपुल $= 6a^2$

3. घन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रपुल $= 4a^2$

4. घन का विकर्ण $= \sqrt{3} \times$ भुजा

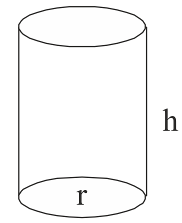


टिप्पणी

बेलन 1. बेलन का आयतन $\pi r^2 h$

2. बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\ (\pi + h)$

3. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

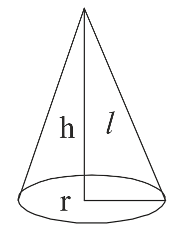


शंकु 1. शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

2. शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\ (l + r)$

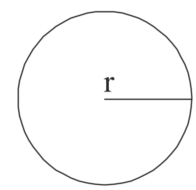
3. शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

4. शंकु की तरकि ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + r^2} = l$



गोला 1. गोला का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

2. गोले का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

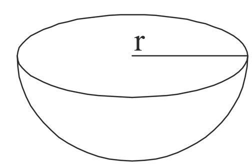


अर्धगोला1. गोलार्द्ध का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

2. गोलार्द्ध का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

3. गोलार्द्ध का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

- $1\text{m}^3 = 1000\ l$
- $1l = 1000\ \text{cm}^3$



उदाहरण 3.84: यदि हमारे पास एक घनाभ जिसकी लंबाई 20 cm चौड़ाई 15 cm तथा ऊँचाई 10 cm हो, तो इसका पृष्ठीय क्षेत्रपुल ज्ञात कीजिए।

हल: हमें पता है घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\ (lb + bh + hl)$

$$= 2\ [(20 \times 15) + (15 \times 10) + (10 \times 20)]\ \text{cm}^2$$

$$= 2\ [300 + 150 + 200]\ \text{m}^2$$

$$= 2 \times 650 = 1300\ \text{cm}^2$$

उदाहरण 3.85: राकेश के घर में घनाकर पानी की टंकी है, जिसके प्रत्येक बाहरी सिरे की लंबाई 1.5 m है। वह 2.5 m भुजा वाली वर्गाकार टाइले लगवाना चाहता है। यदि टाइली की लागत 360 रुपये प्रति दर्जन है, तो उसे टाइलें लगवाने में कितना व्यय करना पड़ेगा?

हल: घनाकर टंकी की भुजा = 1.5 m = 150 cm

टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 5 × 150 × 150 = 112500 cm^2

एक वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = 25 × 25 = 625 cm^2

टाइलों की वांछित संख्या = टंकी का पृष्ठीय क्षेत्रफल एक टाइल का क्षेत्रफल

$$= \frac{11{,}2500}{625} = 180$$

अब 1 दर्जन, अर्थात 12 टाइलों का मूल्य = 360 रुपये

इस प्रकार 1 टाइल का मूल्य $= \frac{360}{12} = 30$ रुपए

अत:, 180 टाइलों का मूल्य = 180 × 30 = 5400 रुपये

उदाहरण 3.86: प्रत्येक घन का किनारा 4 cm है। आयतन ज्ञात कीजिए

हल: प्रत्येक घन का आयतन = भुजा^{3}

$$= 4 \times 4 \times 4 \text{ cm}^3 = 64 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 3.87: एक मंदिर के खंभे बेलनाकार है। यदि प्रत्येक खंभे का आधार 21cm त्रिज्या का एक वृत्तीय क्षेत्र है और ऊँचाई 10 cm है। तो ऐसे 16 खंभे बनाने के लिए कितने कंकरीट मिश्रण की आवश्यकता होगी?

हल: बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 100 = 1386000 \text{ cm}^3$$

$$= (1000000 \text{ cm}^3 = 1\text{m}^3) = 1.386 \text{ m}^3$$

अब 16 खंभों का आयतन $= 1.386 \times 16 = 22.176 \text{ m}^3$

अत: 16 खंभों के लिए 22.2m^3 कंक्रीट मिश्रण की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 3.88: एक शंकु का आयतन ज्ञान कीजिए जिसकी ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमश: 21cm और 28cm है।

शंकु की ऊँचाई = 21cm

शंकु की तिर्यक ऊँचाई = 28cm

अत: $l^2 = x^2 + h^2$ से हमें यहा प्राप्त होता है।

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \quad = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

इसलिए,

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times \sqrt{7} \times 21 = 7546 \text{ cm}^3$

उदाहरण 3.89: एक गोले का आयतन ज्ञान कीजिए किसी त्रिज्या 11.2cm है।

हल: वाँछत आयतन $= \frac{4}{3}\pi x^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \; 11.2 \times 11.2 \times 11.2 = 5887.32\text{cm}^3$$

प्रश्नावली

1. मानक रूप में बदलिए–

(i) $\frac{33}{77}$ (ii) $\frac{-27}{-15}$

(iii) $\frac{64}{-20}$ (iv) $\frac{-105}{98}$

टिप्पणी

2. ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$

(iii) $\frac{-2}{3}+0$ (iv) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

3. ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(ii) $\frac{6}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$

4. गुणनपफल ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$

(iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

5. मान ज्ञात कीजिए–

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$

(iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$ (iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$

6. वर्ग ज्ञात कीजिए–

7. घन ज्ञात कीजिए–

(i) 12 (ii) 17

(iii) 25 (iv) 28

8. निम्नलिखित संख्याओं के महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

(i) 10, 15 (ii) 16, 24

(iii) 15, 30, 45 (iv) 30, 45, 75

9. निम्नलिखित संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए–

(i) 6, 18 (ii) 10, 25

(iii) 14, 28, 35 (iv) 30, 45, 75

10. आठवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं।

A, B, O, O, A, O, AB, O, B, A, O, B, A, O, O, A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O

इन आंकड़ों को एक बारंबारता बंटन सारणी के रूप में इर्शाइए।

11. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछालने पर प्रत्येक पट्ट चित आने की संख्या निम्न है:

0	1	2	2	3	2	3	1	3	0
1	2	1	1	2	1	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

इन आंकड़ों के लिए एक बारंबारता बंटन सारणी बनाइए।

12. एक टीम ने 10 फुटबाल मैचों में निम्नलिखित गोल किए:

2, 3, 4, 3, 0, 1, 5, 3, 4, 3

इन गोलों का माध्य, माध्यक, और बहुलक ज्ञान कीजिए।

13. 15 विद्यार्थियों ने गणित की परीक्षा में (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए:

41, 39, 48, 42, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 52, 52, 60

इन आंकड़ों से माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

14. एक क्रिकेट मैच में, एक बल्लेबाज के द्वारा खेली गई 30 गेदों में 6 बार चौका लगाया जाता है। चौका न मारे जाने की प्रायिकता ज्ञान कीजिए।

15. 2 बच्चों वाले 1500 परिवारों का यद्धच्छया (Randomly) चयन किया गया और निम्नलिखित आंकड़े प्राप्त हुए

परिवार में लडकियों की संख्या	2	1	0
परिवार की संख्या	475	814	211

इस परिवार की प्रायिकता ज्ञान कीजिए। जिसमें (a) दो लड़कियाँ हो (b) एक लड़की हो (c) कोई लड़की न हो। यह भी जाँच कीजिए कि इन प्रायिकताओं का योगफल 1 है या नहीं।

16. तीन सिक्कों को एक साथ 200 बार उछाला गया है। प्राप्त विशिष्ट परिणामों की बारंबारताएँ निम्नलिखित हैं

परिणाम	3 चित	2 चित	1 चित	कोई भी नहीं
बारंबारता	23	72	77	28

यदि तीनों सिक्कों को दोबारा एक साथ उछाला जाए, तो दो बार चित के आने की प्रायिकता क्या होगी?

टिप्पणी

17. सांख्यिकी के बारे में विद्यार्थियों का मत जानने के लिए 200 विद्यार्थियों का सर्वेक्षण किया गया। प्राप्त आंकड़े इस प्रकार हैं-

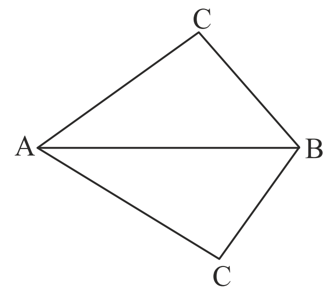
मत	विद्यार्थियों की संख्या
पसंद करते हैं	135
पसंद नहीं करते हैं	65

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यदृच्छया चुना गया विद्यार्थी

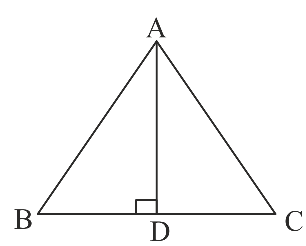
(a) सांख्यिकी पंसद करता है।

(b) सांख्यिकी पंसद नहीं करता है।

18. यदि चतुर्भुज ABCD में, AC = AD है और AB कोण A को समद्विभाजित करता है, तो दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।



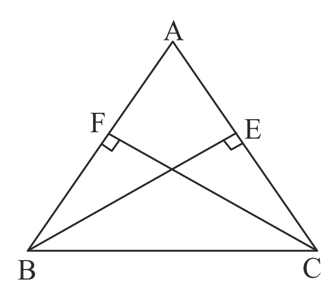
19. ΔABC में AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है, तो दर्शाए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें AB = AC है।



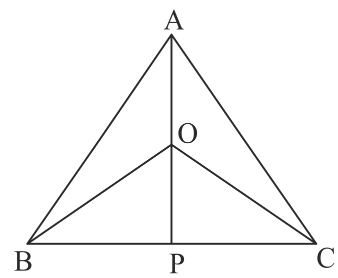
20. एक त्रिभुज ABC में AC और AB पर खीचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABE \cong \angle ACF$ ह

(b) $AB = AX$ अर्थात $\angle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



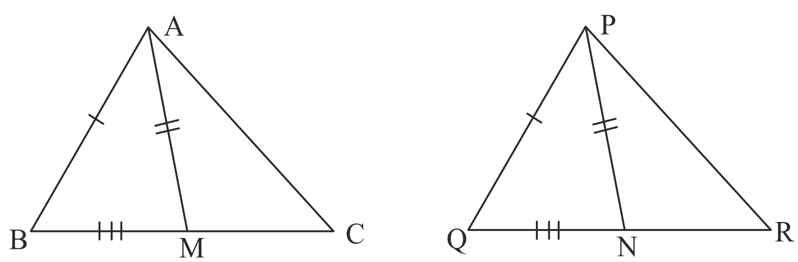
21. दी गई आकृति में ΔABC और ΔDBC एक ही आधार पर BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AD बढ़ाने पर BCV को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



(i) $\Delta ABD \cong \angle ACD$

(इ) $\Delta ABP \cong \angle ACP$

22.



त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर है। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ABM \cong \angle PQN$

(इ) $\Delta ABC \cong \angle PQR$

23. निम्नलिखित कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य है और कौन से असत्य ज्ञात कीजिए-

(a) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

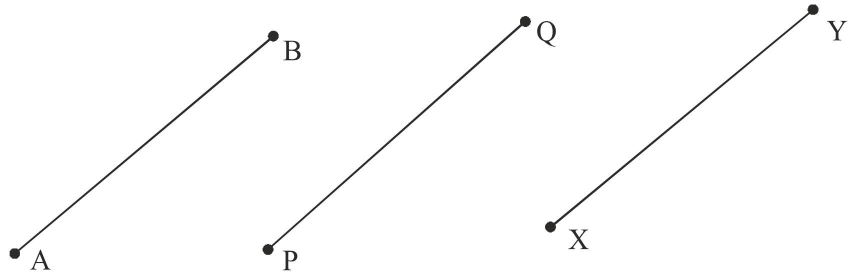
(b) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ है।

(c) एक सात रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

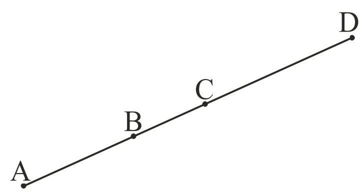
(d) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती है।

(e) यदि $AB = PQ$ और $PQ = CY$ है, तो $AB = XY$ होगा।

टिप्पणी



24. दी गई आकृति में यदि AC = BD है, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।



25. 300 लंबे ट्रेन की चाल 10 m/s है। इसे 50 मीटर लंबे प्लेटफार्म को पार करने में कितना समय लगेगा।

26. एक बस लुधियाना से 5 बजे सुबह निकलती है और दिल्ली दोपहर 12 बजे पहुँचती है। एक दूसरी बस दिल्ली से 8 बजे सुबह निकलती है और लुधियाना शाम को 3 बजे पहुँती है। किस समय दोनों बसें एक दूसरे से मिलेंगी?

27. एक लड़का अपने सामान्य चाल के 3/5 चाल से 14 मिनट देर से स्कूल पहुँचता हैं इसके स्वकूल पहुँचने का सामान्य समय ज्ञात करें।

28. निम्न बिंदुओं के मध्य बिन्दु ज्ञात करें–

(1, 4), (2, 1)

मध्य बिंदु $= \left(\frac{1+2}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

29. अन्तः विभाजन बिन्दु को ज्ञात करे

(–4, 6) (3, –5); 3 : 2

'अपनी प्रगति जांचिए'

15. क्षेत्रामिति को परिभाषित कीजिए।
16. ज्यामिति से क्या तात्पर्य है?
17. त्रिभुज क्या है?

3.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

टिप्पणी

1. संख्याओं को लिखने एवं उनके नामकरण के सुव्यवस्थित नियमों को संख्या पद्धति कहते हैं। इसके लिए निर्धारित प्रतीकों का प्रयोग किया जाता है। जिनकी संख्या निश्चित एवं सीमित होती है।
2. युग्मन पद्धति में एक और दो के लिए अंक होते हैं और 3 को 3 + 1 (अर्थात् एक युग्मन और एक), 4 को 2 + 2 इत्यादि के रूप में प्रकट करते हैं। इस पद्धति की उत्पत्ति शरीर के उन अंगों को देखकर हुई जो जोड़ी में मौजूद है।
3. सामान्यतः सभी प्रकार की संख्याओं के गुणधर्मो का अध्ययन करता है किन्तु विशेषतया यह प्राकृतिक संख्याओं 1, 2, 3.... के गुणधर्मो का अध्ययन करती है जब तक यह निश्चित रूप से न कहा जाए तब तक संख्या में कोई प्राकृतिक संख्या, धन, ऋण, पूर्ण संख्या या शून्य समझना महत्वपूर्ण न हो। संख्या सिद्धांत को महान गणितज्ञ कार्ल फ्रेंडरिंक गाऊस ने 'गणित की रानी' कहा था। संख्या सिद्धांत शुद्ध गणित की शाखा है। संख्या सिद्धांत के लिए 'अंकगणित' या 'उच्च गतिणत' शब्दों का भी प्रयोग किया जाता है।
4. किसी संख्या का घात लगाना एक गणितीय संक्रिया है जिसमें किसी संख्या को लगातार अपने से दो अधिक बार गुणा किया जाता है। जितने बार गुणा किया जाता है, वह उस संख्या का घात कहलाता है। घात को संख्या के ऊपर दाहिनी ओर थोड़ा हटाकर लिखा जाता है।
5. गणित में दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगुणक वह संख्या होती है जिसको उस आधार के ऊपर घात लगाने से उसका मान दी हुई संख्या के बराबर हो जाए।
6. संख्याओं के सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को संख्याओं का समुचचय कहते हैं परिभाषा के रूप में वस्तुओं के उस समूह अथवा समाहार को समुच्चय कहते हैं जिसमें सम्मिलित प्रत्येक वस्तु किसी विशेष गुण को संतुष्ट करती हो जिसके आधार पर स्पष्ट रूप से बताया जा सके कि अमुक वस्तु उस संग्रह में सम्मिलित है अथवा नहीं है।
7. प्रतिशत शब्द लैटिन भाषा के (परसेन्ट्म) से लिया गया है। जिसका अर्थ है कि सौ या प्रत्येक सौ में से अर्थात् 100 में से 60 या $\frac{60}{100}$ है। प्रतिशत का मतलब सौवां हिस्सा है लेकिन 100% से कम हो तब 1 से कम के बराबर माना जाता है इसी तरह अगर 100% से अधिक हे तब इसे 1 से अधिक के बराबर माना जा सकता है।
8. वह मूल्य जिस पर दुकानदार सामान खरीदता है उसे क्रय मूल्य कहते हैं।

टिप्पणी

9. कमीशन एक प्रकार का परिश्रमिक है जो एक व्यक्ति द्वारा दूसरे व्यक्ति को दी गई सेवाओं से संबंधित है कमीशन से पूर्व या पश्चात् में प्रतिशत दर का मूल्यांकन कुल कमीशन पर किया जाता है।

10. बट्टा को छूट, कटौती या अपहार भी कहते हैं जब निर्माता अपने ग्राहक को अंकित मूल्य अथवा विक्रय मूल्य पर एक निश्चित दर से कटौती देता है तो उस छूट या कटौती को व्यापारिक बट्टा कहा जाता है।

11. जब किसी मूलधन के साथ ब्याज जुड़कर उस प्राप्त मिश्रधन पर भी बयाज लगाया जाता है, तो वही ब्याज ही चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

12. सांख्यिकी वेफ ̂;जंजपेजपबेद्ध अन्तर्गत हम आँकड़ों को इकट्ठा करना प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण करना तथा निर्वचन करने का कार्य करते हैं।

13. माध्यिका दी हुई शृंखला का वह मध्य मान है जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि एक भाग में समस्त मूल्य माध्यिका से अधिक एवं दूसरे भाग में समस्त मूल्य माध्यिका से कम होते हैं।

14. माध्य का सांख्यिकी विज्ञान में बहुत महत्वपूर्ण स्थान है। सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य बहुत–सी रीतियां माध्यों पर आधारित हैं। यही कारण है कि डॉ. बाउले ने सांख्यिकीय को 'माध्यों का विज्ञान' कहा है।

15. क्षेत्रमिति गणित की वह शाखा है जो मापन से संबंधित है मापन में भी विशेष रूप से यह ज्यामिति आकृतियों के क्षेत्रफल एवं आयतन के सूत्रों की निष्पत्ति और उनके प्रयोगों सं संबंधित है। इसके अतिरिक्त ज्यामिति गणित की तीन विशाल शाखाओं में से एक है।

16. ज्यामिति गणित की तीन विशाल शाखाओं में से एक है। इसके अंतर्गत बिन्दुओं, रेखाओं, तलों और ठोस वस्तुओं के गुण तथा इनके स्वभाव, मापन और उनके समष्टि में सापेक्षिक स्थिति के बारे में अध्ययन किया जाता है। ज्यामिति गणित की प्राचीनतम् शाखाओं में से एक है।

17. त्रिभुज, तीन रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आवृफति है। इसवेफ तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोष होते हैं।

3.7 सारांश

- स्थानीय मान पर आधारित संख्या पद्धति में 2 या अधिक प्रतीक उपयोग में लाए जाते हैं। जितने प्रतीक होते हैं वही उस संख्या पद्धति का आधार कहलाता है। इन प्रतीकों का मान शून्य से लेकर b-1 तक होता है जहां b आधार है।
- पंचक– दशमक रूप में द्वितीय पंचक की संख्याएं पांच में जोड़कर बनती है। तथा 6 = 5 + 1 या युग्मों द्वारा 6 = 3 × 2 या व्यवकलन द्वारा भी 9 = 10–1 यह पद्धति कृषि प्रधान सभ्यता में प्रचलित हुई।

टिप्पणी

- द्विआधारी दो शब्दों से मिलकर बना है द्वि+आधार अर्थात् दो आधार वाला केवल दो अंकों (0 तथा 1) को काम में लेने वाला स्थानीय मान पद्धति है। इसमें संख्या का मान निकालने का आधार 2 लिया जाता है।
- किसी भी संख्या को निरुपित करने के लिए केवल दस संकेतों का प्रयोग तब किया जाता है जब दस अंक इतने अधिक होते हैं कि इन्हें याद न किए जा सकें तब इस पद्धति का प्रयोग किया जाता है।
- आरंभिक संख्या सिद्धांत में गणित की दूसरी शाखाओं का सहारा लिए बिना ही पूर्णांकों के गुणों का अध्ययन किया जाता है। इसके अंतर्गत विभाज्यता, महत्तम समपवर्तक निकालने के लिए प्रयुक्त युक्लिड का एल्गोरिद्म, संख्याओं तथा समशेषता आदि का अध्ययन किया जाता है।
- स्टॉटलैंड के निवासी जॉन नेपियर द्वारा प्रतिपादित लघुगुणक एक ऐसी युक्ति है जिसके प्रयोग से गणनाओं को लघु या छोटा किया जा सकता है। इसके प्रयोग द्वारा गुणा भाग जैसे जटिल प्रक्रियाओं को क्रमशः जोड़ और घटाने जैसे अपेक्षाकृत सरल प्रक्रियाओं में बदल दिया जाता है।
- प्राकृतिक प्रणाली में लघुगुणक का आधार एक अपरिमेय संख्या e मानी जाती है। इसके आविष्कारक जॉन नेपियर के नाम पर एक लघुगुणक को नेपिरीय लघुगुणक भी कहते हैं। e मान अनंत श्रेणी द्वारा व्यक्त होता है और लगभग 2.7182818 के बराबर है।
- अपरिमेय संख्या वह वास्तविक संख्या है जो परिमेय नहीं है अर्थात् जिसे भिन्नात्मक रूप P/q के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है, जहां P तथा q पूर्णांक हैं, जिसमें q अशून्य है इसलिए यह परिमेय संख्या नहीं है।
- किसी दी गई संख्या का वर्गमूल वह संख्या है जिस संख्या का वर्ग करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। वर्गमूल प्रदर्शित करने के लिए दी गई संख्या के ऊपर निम्न चिन्ह '$\sqrt{\ }$' लगाया जाता है।
- वह मूल्य जिस पर वह राशि बेचता है उसे विक्रय मूल्य कहते हैं।
- एक एजेंट को उसके द्वारा की गई बिक्री के एक निश्चित प्रतिशत के रूप में कमीशन का भुगतान किया जाता है यह अत्यंत सरल विधि के रूप में वाणिज्य गणित (Commercial Math) में प्रयुक्त है।
- जो धन किसी से उधर लिया जाता है या किसी को उधार दिया जाता है या बैंक में जमा किया जाता है, उसे **मूलधन** कहते हैं।
- सांख्यिकी का प्रयोग साधारणतया दो अर्थों में किया जाता है। पहले अर्थ में यह किसी क्षेत्र से इकट्ठा किए गए संख्यात्मक आंकड़ों के विवरण को स्पष्ट करता है। इस अर्थ में जनसंख्यात्मक आंकड़ों, राष्ट्रीय आय से संबंधित विशेषताओं, अपराध अथवा किसी अन्य विशेषता से संबंधित आंकड़ों आदि को सांख्यिकी से संबंधित माना जाता है।

टिप्पणी

- माध्यिका ज्ञात करने के लिए समस्त पदों को एक बढ़ते हुए अथवा घटते हुए क्रम में व्यवस्थित करना आवश्यक होता है।
- माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए ताकि एक या अधिक मूल्यों में परिवर्तन होने से माध्य में भी परिवर्तन हो सके। यदि माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है तो वह पूरे समूह का ठीक प्रकार से प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता।
- जब वर्गांतर समावेशी आधार पर दिए गए हों तो समांतर माध्य निकालने के लिए उन्हें अपवर्जी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होती क्योंकि मध्य–मूल्य वही रहते हैं, भले ही वर्गों का समायोजन किया जाए या न किया जाए।
- उस जीवा को जो वृत्त वेफ वेफन्द्र से गुजरती है, वृत्त का व्यास कहते हैं।
- वृत्त वेफ दो बिन्दुओं वेफ बीच वेफ भाग को एक चाप कहते हैं।
- चारों बिन्दुओं की एक क्रम में जोड़ने से प्राप्त आकृति को चतुर्भज कहते हैं।
- दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
- यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वागसम होते हैं।
- यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर प्रतिच्छेद होकर एक ओर अन्तः कोण इस तरह बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बढ़ाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।
- एक वृत्ताकर क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

3.8 मुख्य शब्दावली

- **संख्या पद्धति** : संख्याओं को लिखने एवं उनके नामकरण के सुव्यवस्थित नियमों को संख्या पद्धति कहते हैं।
- **संख्या सिद्धांत** : सामान्यतः सभी प्रकार की संख्याओं के गुणधर्मों का अध्ययन करता है किंतु विशेषताया यह प्राकृतिक संख्याओं जैसे 1, 2, 3.... n के गुणधर्मों का अध्ययन करती है जब तक निश्चित रूप से न कहा जाए तब तक संख्या में कोई प्राकृतिक संख्या, धन, ऋण, पूर्ण संख्या या शून्य का समझना महत्वपूर्ण न हो।
- **प्राकृत संख्याएं** : वे संख्याएं जिनसे वस्तुओं की गणना की जाती है उन्हें प्राकृत संख्याएं कहते हैं।
- **परिमेय संख्याएं** : वे संख्याएं जिन्हें P/q के रूप में दर्शाया जाता है परिमेय संख्याएं कहलाती है।

- **सांख्यिकी** : गणित की वह शाखा जिसमें आंकड़ों के संग्रह का प्रस्तुतीकरण और विश्लेषण करने के आधार पर आंकड़ों से अर्थ पूर्ण निष्कर्ष निकालने के संबंध में अध्ययन किया जाता है उसे सांख्यिकी कहते हैं।
- **त्रिकोणमिति** : त्रिकोणमिति गणिम की वह शाखा है जिसमें त्रिभुज और त्रिभुजाओं से बनने वाले बहुभुजों का अध्ययन होता है।

3.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. संख्या पद्धति को परिभाषित करें।
2. संख्याओं के समुच्चय के बारे में बताएं।
3. प्राकृत संख्याओं से क्या अभिप्राय है?
4. परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं में अंतर स्थापित करें।
5. वर्गमूल क्या है?
6. लघुगुणक पर संक्षेप में टिप्पणी दीजिए।
7. लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक के बारे में बताएं।
8. प्रतिशत को परिभाषित कीजिए।
9. लाभ एवं हानि के बारे में बताएं।
10. साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए।
11. सांख्यिकीय के बारे में संक्षेप में बताएं।
12. प्रायिकता से क्या अभिप्राय है?
13. त्रिकोमिति को परिभाषित करें।
14. वृत्त एवं त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना किस प्रकार की जाती है?
15. बेलन और धनाभ के आयतनों की गणना करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. संख्या पद्धति पर आधारित विभिन्न पद्धतियों का सोउदाहरण सहित चर्चा करें।
2. संख्या सिद्धांत, घातांक तथा लघुगुणक को विस्तार से समझाएं।
3. प्राथमिक संख्या सिद्धांत पर विस्तारित रूप से निबंधात्मक लेख लिखे।
4. लघुत्तम एवं महत्तम समापवर्तक को सोदाहरण सहित विस्तार से चर्चा करें।
5. प्रतिशत की गणना किस प्रकार की जाती है? इसके अनुप्रयोगों की गणना करें।
6. ब्याज शब्द को परिभाषित करें तथा साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज को विस्तारित रूप से समझाएं।

टिप्पणी

7. सांख्यिकीय तथा प्रायिकता पर उदाहरण देकर विस्तार से समझाएं।
8. त्रिकोमिति से क्या अभिप्राय है? समानान्तर रेखाएं, त्रिभुज, बहुभुज तथा वृत्त के निर्माण विधि एवं उनके क्षेत्रफल की गणना करें।
9. घन, घनाभ, शंकु, बेलन तथा गोले को परिभाषित एवं इनके आयतनों की गणना करें।

3.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Anderson, Lorin W. and David R. Krathwohl. 2001. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing*: *A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: David McKay Company.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition.

Charles, H. and F. Lynwood Wren Butler. 1941. *The Teaching of Secondary Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Krathwohl, David R., Benjamin S. Bloom and Bertram B. Masia. 1964. *Taxonomy of Educational Objectives*, Handbook II. New York: David McKay Company.

Howson, Geoffrey, Christine Keitel and Jeremy Kilpatrick. 1981. *Curriculum Development in Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Dhand, Harry. 1990. *Techniques of Teaching*. New Delhi: Ashish Publishing House.

Mangal, Dr. S. K. 1997. *Teaching of Science*. New Delhi: Arya Book Depot.

Sidhu, Kulbir Singh. 1995. *Teaching of Mathematics*. New Delhi: Sterling Publishers.

Servais, W. and T. Varga. 1971. *Teaching School Mathematics*. United Kingdom: Penguin Random House Company.

इकाई 4 शिक्षणशास्त्र में बीजगणित का महत्व

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय

बीजगणित गणित के व्यापक विभागों में एक है। संख्या सिद्धांत (Number Theory), ज्यामिति (Geometry) और विश्लेषण (Analyse) आदि गणित के बड़े विभाग है। अपने सामान्य रूप में बीजगणित (Algebra) गणितीय प्रतीकों के नियमों का अध्ययन है। बीजगणित लगभग गणित के संपूर्ण गणित को एक सूत्र में पिरोने वाला विषय है। आरंभिक समीकरण हल करने से लेकर समूह, वलय और क्षेत्र, जैसे अमूर्त संकल्पनाओं का अध्ययन है, आदि, अनेकानेक तथ्य बीजगणित के ही अंग है। बीजगतणत के प्रगत अमूर्त भाग को अमूर्त बीजगणित (Algebra) कहते हैं। चर, अचर, चर के गुणांक तथा ऋणेतर घातांक के जोड़, घटाव या गुणन की क्रिया वाले बीजगतिणतीय व्यंजक को बहुपद (Polynomial) कहा जाता है।

एक सीधी रेखा को बनाने के लिए दिया गया समीकरण रैखिक समीकरण कहलाता है। द्विघात समीकरण (Quadric Equation) को 'द्विघात; नाम से परिभाषित किया जा सकता है, एक द्विघात समीकरण में, एक चर वर्ग में होता है इस प्रकार के समीकरण को घात 2 का समीकरण भी कहा जाता है।

सुपरिभाषिता समूह अथवा संग्रह को समुच्चय (Set) कहा जाता है परिभाषा के रूप में वस्तुओं के उस समूह अथवा समाहार को समुच्चय कहते हैं। गणितीय भाषा में संबंध (Relation) को क्रमित युग्मों के समूह के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

गणित में, एक फलन (Function) को एक नियम के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जो प्रत्येक अवयव को एक समुच्चय में जिसे क्षेत्र तथा दूसरे समुच्चय में ठीक ही एक अवयव से संबंधित होता है जिसे रेंज या सीमा कहा जाता है।

टिप्पणी

निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry) एक बीजीय साधन है, जिसके द्वारा आकृतियों की ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है। निर्देशांक ज्यामिति हमें बीजगणित का उपयोग कर आकृतियों की ज्यामिति को समझने में मदद करता है। इसके अतिरिक्त निर्देशांक का शाब्दिक अर्थ निर्देशांक अक्षों का एक युग्म में एक तल पर किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने के योग्य बनाता है। यही करण है कि निर्देशांक ज्यामिति का विभिन्न क्षेत्रों, जैसे कि भौतिक, यांत्रिकी, अभियांत्रिकी, समुद्री परिवहन, भूकम्पशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में व्यापक रूप से उपयोगी साबित है।

इस इकाई में, आप बहुपद की मूल अवधारणाएं तथा उनमें प्रयुक्त संक्रियाएं, रैखिक समीकरण, असमानता, द्विघात समीकरण, समुच्चय, फलन एवं संबंध, निर्देशांक ज्यामिति के बारे में अध्ययन करेंगे।

4.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- बहुपद की मूल अवधारणा का अध्ययन कर पाएंगे;
- बहुपद की संक्रियाओं को समझ पाएंगे;
- एक व दो चर में प्रयुक्त रैखिक समीकरण का अवलोकन कर पाएंगे;
- असमानता तथा द्विघात समीकरण की गणना कर पाएंगे;
- समुच्चय, उपसमुच्चय तथा सार्वभौमिक समुच्चय की व्याख्या कर पाएंगे;
- समुच्चय की संक्रियाओं तथा संघ व उभनिष्ठ के अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा कर पाएंगे;
- फलन एवं संबंध को परिभाषित कर पाएंगे;
- निर्देशांक ज्यामिति की मूल अवधारणा तथा उपयोग को वर्णित कर पाएंगे;
- दूरी तथा खंड सूत्र का विश्लेषण कर पाएंगे।

4.2 बहुपद

$P(x)$ निम्नलिखित प्रकार का एक बीजीय व्यंजक (Algebric Expression) होता है।

$P(x) = a_x x^n + a_{n-2} x^{n-2} ...... + a_2 x^2 + a_2 x^2 + a_1 x + 0$ जहाँ

(i) $a_0, a_1, a_2, a_3 .... a_n$ अचर है और $a_n + 0$

(ii) $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ क्रमशः $x^0, x^1, x^2 .... x^n$ के गुणांकों

(iii) प्रत्येक $a_x\, x^n, a_{n-1}\, x^{n-1}, x^{n-2}$.........., $a_2 x^2, a_1\, x_1\, a_0$ बहुपद के पद कहलाते हैं।

(iv) n बहुपद की घात कहलाता है। जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

1. **बहुपद की घातः** एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद की घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।

2. **बहुपद के प्रकारः** सामान्यतः हम बहुपदों को निम्न रूप में वर्गीकृत कर सकते हैं।

(i) **घात के आधार पर**

घात	बहुपद	सामान्य रूप	उदाहरण
1.	रैखिक बहुपद	$ax+b$	$x+1, 2x$ इत्यादि
2.	द्विघातीय बहुपद	a^2+bx+c	$4x^2+5x+\frac{2}{3}$ इत्यादि

(ii) **पदों के आधार पर**

	पदों की संख्या	बहुपद	उदाहरण
(a)	1	एकपदी	$5, 3x, \frac{1}{3y}$
(b)	2	द्विपदी	$\sqrt{3}+6x, x-5y, x^2+2$
(c)	3	त्रिपदी	$\sqrt{2}x^2+4x+2, 5y^4+2y+6$

(iii) **शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद (Zero Degree Polynomial):** शून्येतद (शून्य को छोड़कर) संख्या (अचर) को शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद कहते हैं। अर्थात $p\,(x)=0$ जहाँ पर $a \neq 0$ एक शून्य घात वाला बहुपद है क्योंकि $p\,(x)=a$ को $p(x)=ax^{\circ}$ लिखा जा सकता है।

उदाहरणतया $5=5x', \frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}x^{\circ}$

(iv) **शून्य बहुपद (Zero Polynomial):** एक बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हो, शून्य बहुपद कहलाता है अर्थात् $p\,(x)=0,$ शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

4.2.1 समीकरण और बहुपद–मूलभूत तथ्य

x में बहुपद इस प्रकार की एक अभिव्यक्ति है–$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ एक सह–गुणांक (Coefficients) के रूप में ज्ञात नियतांक (Constants) हैं और x एक परिवर्तनशील (Variable) है। एकल एकपद (Single Monomials) $a_0x^n, a_1x^{n-1}, \ldots, a_n$ बहुपद के पदों (Terms of the Polynomial) के रूप में जाने जाते हैं। बहुपद (Polynomial) n डिग्री का होता है और a_0x^n अग्रणी पद (Leading Term) होता है जब $a_0 \neq 0$ होता है।

इस प्रकार, हम x में, n डिग्री के बहुपद का $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ द्वारा निरूपण करते हैं।

टिप्पणी

यदि हम बहुपद $f(x)$ में, x के लिए संख्या a को प्रतिस्थापित करते हैं, तो परिणाम एक संख्या है जिसे $x = a$ के लिए बहुपद का मान कहा जाता है और इसे $f(a)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

नोटः (i) एक वास्तविक बहुपद (Real Polynomial) एक बहुपद है जिसमें $f(x)$ के सभी गुणांक वास्तविक होते हैं।

(ii) एक शून्य बहुपद (Zero Polynomial) एक बहुपद है जिसमें $f(x)$ के सभी गुणांक शून्य होते हैं।

विभाजन एल्गोरिथ्म (Division Algorithm)

यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो गैर–शून्य (Non-Zero) बहुपद हैं, और $f(x)$ को, $g(x)$ से विभाजित किया जाता है तो अद्वितीय (Unique) बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ इस प्रकार मौजूद होते हैं कि $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ जहाँ $r(x)$ या तो एक शून्य बहुपद है या $r(x)$ की डिग्री $< g(x)$ की डिग्री से। $q(x)$ को भागफल बहुपद (Quotient Polynomial) कहते हैं और $r(x)$ शेष है।

नोटः (i) $q(x)$ की डिग्री = $f(x)$ की डिग्री − $g(x)$ की डिग्री।

(ii) जब भाजक बहुपद, अर्थात, $g(x)$ पहली डिग्री का होता है, तो शेष बहुपद, अर्थात, $r(x)$ या तो शून्य या एक स्थिरांक बहुपद होता है।

शेष प्रमेय (Remainder Theorem)

प्रमेय 4.1: यदि $f(x)$ एक बहुपद है, तो $f(h)$ शेष है जब $f(x)$ को $x - h$ से विभाजित किया जाता है।

प्रमाणः माना $q(x)$ भागफल हो और R शेष हो। जब हम $x - h$ द्वारा $f(x)$ को विभाजित करते हैं,

$$f(x) = (x - h)\, q(x) + \mathrm{R}$$

$x = h$ डाल कर हम प्राप्त करते हैं

$f(h) = (h - h)\, q(h) + \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R} = f(h) =$ शेष

गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem)

प्रमेय 4.2: यदि समीकरण $f(x) = 0$ का एक मूल α है, तो बहुपद $f(x)$, $(x-\alpha)$ से बिलकुल विभाज्य है ।

प्रमाणः जैसा कि समीकरण $f(x) = 0$ का एक मूल α है, $\Rightarrow f(\alpha) = 0$ ...(4.1)

जब $f(x)$ को $(x - \alpha)$ से विभाजित किया जाता है। तो माना कि $q(x)$ भागफल है और R शेष है

तब, $f(x) = (x-\alpha)\, q(x) + \mathrm{R}$

$x = \alpha$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$f(\alpha) = 0.\, q(\alpha) + \mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{R} = 0$ [समीकरण (4.1) का उपयोग करने पर]

जैसा कि हम शेष = 0 प्राप्त कर रहे हैं, इसलिए $(x - \alpha)$, $f(x)$ को बिल्कुल विभाजित करता है।

इस प्रमेय का उलटा भी सही है।

सामान्य समीकरण (General Equation)

संबंध $f(x) = 0$, अर्थात्, किसी भी बहुपद को जब शून्य के बराबर किया जाता है तो उस समीकरण को सामान्य समीकरण के रूप में जाना जाता है।

समीकरण की डिग्री (Degree of an Equation)

जब कोई समीकरण भिन्नों या भिन्नात्मक सूचकांकों से मुक्त होता है तो समीकरण में होने वाली चर x की उच्चतम शक्ति को, दिए गए समीकरण की डिग्री के रूप में जाना जाता है। रेखीय (Linear), द्विघात (Quadratic), घन (Cubic) और द्विवर्गीय (Biquadratic) समीकरण क्रमशः 1 डिग्री, 2 डिग्री, 3 डिग्री और 4 डिग्री के होते हैं।

पूर्ण और अपूर्ण समीकरण (Complete and Incomplete Equations)

यदि nवीं डिग्री समीकरण में चर की सभी घातें 0 से n तक होती हैं, तो इसे पूर्ण कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $a_0x^3 + a_1x^2 - a_2x + a_3 = 0$, 3वीं डिग्री का पूर्ण समीकरण है।

यदि चर की एक या एक से अधिक घातें nवीं डिग्री समीकरण से रिक्त हैं, तो इसे अपूर्ण कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $a_0x^4 + a_2x^2 - a_4 = 0$ एक अपूर्ण समीकरण है। [$\because$ a_1x^3, a_3x पद लुप्त हैं।]

एक समीकरण के मूल (Roots of an Equation)

x का मान जो $f(x)$ को शून्य (Zero) करता है, (x) को समीकरण के मूल के रूप में जाना जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $f(\alpha) = 0$, तो कहा जाता है कि समीकरण $f(x) = 0$ का मूल α है।

4.2.2 बहुपदों पर संक्रियाएँ

आइए एक समीकरण $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ पर विचार करें और मान लीजिए $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ इस समीकरण के n मूल हैं।

तो हमारे पास है,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv a_0\,(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)$$

$$\equiv a_0\,[x^n - (\Sigma\alpha_1)x^{n-1} + (\Sigma\alpha_1\alpha_2)x^{n-2} - (\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x^{n-3} + \ldots + (-1)^n \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n] \qquad \ldots (4.2)$$

जहां $\Sigma\alpha_1$ सभी मूलों के योग को दर्शाता है।

$\Sigma\alpha_1\alpha_2$ एक बार में दो लिए गए मूलों के गुणन के योग को दर्शाता है।

$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ एक बार में तीन लिए गए मूलों के गुणन के योग को दर्शाता है।

समीकरण (4.2) के दोनों तरफ x की समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

टिप्पणी

$$-a_0\sum\alpha_1 = a_1 \Rightarrow \sum\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} = (-1)\frac{a_1}{a_0};$$

$$a_0\sum\alpha_1\alpha_2 = a_2 \Rightarrow \sum\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} = (-1)^2\frac{a_2}{a_0};$$

$$-a_0\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = a_3 \Rightarrow \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0} = (-1)^3\frac{a_3}{a_0};$$

....

$$a_0(-1)^n\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n = a_n \Rightarrow\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n = \frac{a_n}{(-1)^n a_o} = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

जो मूलों और गुणांकों के बीच आवश्यक संबंध है।

$\therefore$ एक समय में लिए गए r मूलों के गुणन का योग,

अर्थात् $\sum\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_r = \dfrac{(-1)^r\ \text{coeff.of } T_{r+1}}{\text{coeff.of } T_1}$

विशेष प्रकरणः

(i) घन समीकरण $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ के लिए,

$$\sum\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

(ii) द्विवर्गीय समीकरण $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ के लिए,

$$\sum\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\sum\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

मूलों पर नियमों की स्थिति में बहुपद समीकरणों का समाधान

एक दिए गए बहुपद समीकरण को दिए गए संबंधों की मदद से हल किया जा सकता है $\sum\alpha_1$, $\sum\alpha_1\alpha_2$, $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$,... जहां α_i दिए गए समीकरण के मूलों का निरूपण करता है।

घन समीकरण के लिए

(i) यदि तीन मूल A.P. में दिये जाते हैं, तो उन्हें $\alpha - \beta$, α और $\alpha + \beta$ लिया जा सकता है।

(ii) यदि तीन मूल G.P. में दिये जाते हैं, तो उन्हें $\frac{\alpha}{\beta}$, α और $\alpha\beta$ लिया जा सकता है।

द्विवर्गीय (Biquadratic) समीकरण के लिए

(i) यदि A.P. में चार मूल दिये जाते हैं, तो उन्हें $\alpha - 3\beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$ और $\alpha + 3\beta$ लिया जा सकता है।

(ii) यदि G.P. में चार मूल दिये जाते हैं, तो उन्हें $\frac{\alpha}{\beta^3}, \frac{\alpha}{\beta}, \alpha\beta$ और $\alpha\beta^3$ के रूप में लिया जा सकता है।

उदाहरण 4.1: समीकरण $4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 0$ को हल करें, यह देखते हुए कि इसके दो मूलों का योग शून्य है।

हल: माना दी गई समीकरण के मूल α, β, γ और δ इस प्रकार से हैं कि

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \ldots (4.3)$$

अब $\sum\alpha =$ सभी चारों मूलों का योग $= \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{8}{4} = -2$

$\Rightarrow \gamma + \delta = -2$ [समीकरण (4.3) का उपयोग करने पर]

माना, $\alpha\beta = k$ और $\gamma\delta = k'$

α,β मूलों वाली समीकरण इस प्रकार है, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 + k = 0$

और γ,δ मूलों वाली समीकरण है, $x^2 - (\gamma + \delta)x + \gamma\delta = 0$ $\Rightarrow x^2 + 2x + k' = 0$

हमारे पास है, $4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 2x + 3 = 4\left(x^2 + k\right)\left(x^2 + 2x + k'\right)$

$$= 4x^4 + 8x^3 + 4(k + k')x^2 + 8kx + 4kk'$$

x की समान घातों के गुणांकों की तुलना करके, हम प्राप्त करते हैं

$$4(k + k') = 13 \qquad \ldots (4.4)$$

$$8k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{4} \qquad \ldots (4.5)$$

और $4kk' = 3 \Rightarrow k' = \frac{3}{4k} = 3$ [समीकरण (4.5) का उपयोग करने पर]

इस प्रकार दिए गए समीकरण के दो द्विघात (Quadratics) हैं:

$x^2 + k = 0 \quad x^2 + 2x + k' = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

टिप्पणी

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}i \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

इसलिए, दिए गए समीकरण के मूल हैं, $\pm\frac{1}{2}i, -1 \pm \sqrt{2}\,i$

उदाहरण 4.2: समीकरण $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$ को हल करें यह देखते हुए कि इसकी मूल A.P. में हैं।

हलः चूंकि, मूल A.P. में हैं।

$\therefore$ एक जोड़ी का योग, यानी पहला और चौथा मूल = दूसरी जोड़ी का योग यानी दूसरा और तीसरा मूल।

जैसा कि, सभी मूलों का योग $= -2 \Rightarrow$ मूलों की प्रत्येक जोड़ी का योग = − 1

p और q क्रमशः मूलों की पहली जोड़ी और मूलों की दूसरी जोड़ी का गुणन है।

फिर, मूलों की पहली जोड़ी का समीकरण है $x^2 + x + p = 0$

मूलों की दूसरी जोड़ी का समीकरण है $x^2 + x + q = 0$

$$\therefore\ x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = (x^2 + x + p)\,(x^2 + x + q)$$

$$= x^4 + 2x^3 + (p + q + 1)\,x^2 + (p + q)\,x + pq \qquad \ldots (4.6)$$

समीकरण (4.6) के दोनों ओर x के गुणांक (Coefficients) और स्थिरांक पद (Constant Term) की तुलना करके, हम प्राप्त करते हैं।

$$p + q = -22$$

और $\quad pq = 40$

अतः p और q जिस समीकरण के मूल हैं, वो है $t^2 - (p + q)\,t + pq = 0 \Rightarrow t^2 + 22t + 40 = 0$

$$(t + 2)\,(t + 20) = 0 \Rightarrow t = -2, -20$$

$p = -2$ और $q = -20$ उपयोग करने पर।

$\therefore$ अतः दिए गए समीकरण के मूल, इस समीकरण के मूल हैं।

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad x^2 + x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)\,(x + 2) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, -2 \quad \Rightarrow x = 4, -5$$

अतः आवश्यक मूल −5, −2, 1 और 4 हैं।

उदाहरण 4.3: समीकरण को हल करें $3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 = 0$ जिसकी मूल G.P. में हैं।

हलः चूंकि, मूल G.P. में हैं।

दो मूलों का गुणन, यानी, पहला और चौथा = अन्य दो मूलों का गुणन यानी दूसरा और तीसरा।

टिप्पणी

माना α, β, γ और δ दी गई समीकरण के मूल इस प्रकार हैं कि $\alpha\delta = \beta\gamma = k$।

माना $\alpha + \delta = -p$ और $\beta + \gamma = -q$

माना मूलों के दो युग्मों/जोड़ी के अनुरूप समीकरण इस प्रकार से है,

$x^2 + px + k = 0$ and $x^2 + qx + k = 0$

$\therefore 3x^4 - 40x^3 + 130x^2 - 120x + 27 \equiv 3(x^2 + px + k)(x^2 + qx + k)$

$\equiv 3x^4 + 3(p+q)x^3 + 3(pq + 2k)x^2 + 3k(p+q)x + 3k^2 \quad \ldots (4.7)$

समीकरण (4.7) में गुणांकों को समान करके, हम प्राप्त करते हैं।

$$3(p+q) = -40 \Rightarrow p + q = -\frac{40}{3} \quad \ldots (4.8)$$

$$3(pq + 2k) = 130 \Rightarrow pq = \frac{130}{3} - 2k \quad \ldots (4.9)$$

$$3k(p+q) = -120 \Rightarrow 3k\left(-\frac{40}{3}\right) = -120 \Rightarrow k = 3$$

[समीकरण (4.8) का प्रयोग करने पर] … (4.10)

$3k^2 = 27 \qquad \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

समीकरण (4.9) में $k = 3$ रखने पर, $pq = \frac{130}{3} - 6 = \frac{112}{3}$

अतः p और q जिस समीकरण की मूल हैं वो है $t^2 + \frac{40}{3}t + \frac{112}{3} = 0$

$\Rightarrow 3t^2 + 40t + 112 = 0$

$$\therefore \ t = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 1344}}{6} = \frac{-40 \pm 16}{6} = -4, -\frac{28}{3}$$

माना $p = -4$ और $q = -\frac{28}{3}$ लेने पर।

अतः दिए गए समीकरण के मूल, इस समीकरण के मूल हैं।

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$

$\therefore \ x = 1, 3$

और $x^2 - \frac{28}{3}x + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 28x + 9 = 0$

$$\therefore \ x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 108}}{6} = \frac{28 \pm 26}{6}$$

$\Rightarrow x = 9, \frac{1}{3}$

अतः आवश्यक मूल हैं $\frac{1}{3}$, 1, 3 और 9.

टिप्पणी

इस नियम का पता लगाना कि दिये गये समीकरण के मूल एक दिए गए संबंध को संतुष्ट करते हैं

यहाँ हम इस अवधारणा को कुछ उदाहरणों से समझते हैं कि किन नियमों के अंतर्गत, दी गयी समीकरण के मूल, एक सम्बन्ध को संतुष्ट करते हैं ।

उदाहरण 4.4: वह स्थिति ज्ञात करें जिसमें समीकरण $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ के दो मूलों का योग अन्य दो मूलों के योग के बराबर है।

हल: माना α, β, γ तथा δ दी गई समीकरण के मूल इस प्रकार हैं कि $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

अब दी गई समीकरण में, मूलों का योग, अर्थात् $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\dfrac{a_1}{a_0} = p$

$\therefore \alpha + \beta = \gamma + \delta = \dfrac{p}{2}$

माना $\alpha\beta = k$ और $\gamma\delta = k'$

वो समीकरण जिसके मूल α, β तथा γ, δ है।

$x^2 - \dfrac{p}{2}x + k = 0$ और $x^2 - \dfrac{p}{2}x + k' = 0$

$$\therefore x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s \equiv \left(x^2 - \frac{p}{2}x + k\right)\left(x^2 - \frac{p}{2}x + k'\right) \quad \ldots (4.11)$$

समीकरण (4.11) के दोनों तरफ x की समान घातों के गुणांकों की तुलना करके, हम प्राप्त करते हैं,

$$k + k' + \frac{p^2}{4} = q \Rightarrow k + k' = q - \frac{p^2}{4} \quad \ldots (4.12)$$

$$-\frac{p}{2}(k + k') = -r \Rightarrow k + k' = \frac{2r}{p} \quad \ldots (4.13)$$

और $kk' = s$

समीकरणों (4.12) और (4.13) से हम प्राप्त करते हैं।

$$q - \frac{p^2}{4} = \frac{2r}{p} \Rightarrow 4pq - p^3 = 8r$$

$\Rightarrow p^3 - 4pq + 8r = 0$ यह वो आवश्यक नियम है।

उदाहरण 4.5: यदि समीकरण $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ के दो मूलों का गुणन, अन्य दो मूलों के गुणन के परिमाण में बराबर है, लेकिन चिन्ह (Sign) विपरीत है, तो यह दिखाएं कि $p^2s + r^2 = 4qs$।

हल: माना α, β, γ और δ दी गई समीकरण के मूल हैं:

तब, $\alpha\beta\gamma\delta = s$ … (4.14)

दिया है, $\alpha\beta = -\gamma\delta$

$\therefore$ समीकरण (4.14) से हमें प्राप्त होता है $(\alpha\beta)^2 = -s$

माना $\alpha\beta = -\gamma\delta = \sqrt{-s}$

माना $\alpha + \beta = -l$ और $\gamma + \delta = -m$

$\therefore x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s \equiv \left(x^2 + lx + \sqrt{-s}\right)\left(x^2 + mx - \sqrt{-s}\right) \ldots (4.15)$

समीकरण (4.15) के दोनों तरफ x की समान घातों के गुणांकों की तुलना करके, हम प्राप्त करते हैं।

$$l + m = p,\ lm = q \text{ और } \sqrt{-s}\,(m - l) = r$$

जैसा कि $(l + m)^2 = (m - l)^2 + 4lm$

$$\therefore p^2 = \frac{r^2}{-s} + 4q$$

$\Rightarrow p^2s + r^2 = 4qs$ यह वो आवश्यक नियम है।

दो समीकरणों के सामान्य मूल

माना $f_n(x) = 0$ और $f_m(x) = 0$ क्रमशः डिग्री n और m के दो समीकरण हैं।

माना इन समीकरणों के सामान्य मूल हैं $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ $(r < n, r < m)$।

फिर ये दोनों समीकरण $\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_r)$ से विभाज्य हैं, जोकि $f_n(x)$ और $f_m(x)$ का H.C.F. है। अतः दो समीकरणों के सामान्य मूल $\phi(x) = 0$ द्वारा दिए जाते हैं जहां $\phi(x)$, इन दो समीकरणों का म.स.प. (H.C.F.) है।

एक समीकरण के बराबर या एकाधिक/विभिन्न मूल

एक समीकरण $f(x) = 0$ पर विचार करें जिसका मूल α, r बार दोहराया जाता है, तब α, $f'(x) = 0$ का मूल होगा $(r - 1)$ बार दोहराया जाएगा, जहां x के संदर्भ में $f'(x)$, $f(x)$ का अवकल विभेदक/अंतर गुणांक (Differential Coefficient) है।

जैसा कि $(x - \alpha)^r$, $f(x)$ का गुणांक है।

[चूंकि $f(x)$ का एक मूल α है जो r बार दोहराया गया है।]

माना $f(x) = (x - \alpha)^r\ \phi(x)$ … (4.16)

जहां $\phi(\alpha) \neq 0$, अर्थात, $(x - \alpha)$ $\phi(x)$ का गुणनखंड नहीं है।

x के संदर्भ में, समीकरण (4.16) का अवकलन या विभेदन (Differentiation) करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$f'(x) = (x - \alpha)^r \phi'(x) + \phi(x)\, r\, (x - \alpha)^{r-1}$$

$$= (x - \alpha)^{r-1}\, [(x - \alpha)\phi'(x) + r\phi(x)]$$

$\Rightarrow (x - \alpha)^{r-1}$, $f'(x)$ का गुणनखंड है $\Rightarrow$ α, $f'(x) = 0$ का मूल है जो $r - 1$ बार दोहराया गया है।

एक समीकरण के कई मूल को खोजने के लिए नियम

एक समीकरण $f(x) = 0$ पर विचार करें:

(i) $f'(x)$ ज्ञात करें।

(ii) $f(x)$ और $f'(x)$ का H.C.F., $\phi(x)$ ज्ञात करे।

(iii) $\phi(x) = 0$ मान रखकर $\phi(x)$ को हल करें।

(iv) यदि समीकरण $\phi(x) = 0$ का एक मूल α, r बार दोहराया जाता है तो यह मूल $f(x) = 0$ में $r + 1$ बार दोहराया जायेगा।

टिप्पणी

उपप्रमेय (Corollary)

1. यदि $f(x) = 0$ का एक मूल α है जो 2 बार दोहराया गया है तब हमारे पास $f(\alpha) = 0$ तथा $f'(\alpha) = 0$ है। दोनों समीकरणों से α का निराकरण (Elimination) कर आवश्यक नियम प्राप्त किए जा सकते है।
2. यदि $f(x) = 0$ का एक मूल α है जो 3 बार दोहराया गया है तब हमारे पास $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$ और $f''(\alpha) = 0$ है। तीनों समीकरणों से α का निराकरण (Elimination) कर आवश्यक नियम प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 4.6: समीकरण $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$ को हल करें, यह दिया गया है कि इसका एक विभिन्न या बहु मूल (Multiple Root) है।

हल: माना $f(x) \equiv x^4 - 9x^2 + 4x + 12 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 18x + 4 = 2\,(2x^3 - 9x + 2)$

अब $f(x)$ तथा $f'(x)$ का H.C.F.,

	$2x^3 - 9x + 2$ $\times 3$	$x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ $\times 2$	
		$2x^4 - 18x^2 + 8x + 24$	x
		$2x^4 - 9x^2 + 2x$	
		$-\quad+\quad-$	
$2x$	$6x^3 \quad - 27x + 6$	$-9x^2 + 6x + 24$	
	$6x^3 - 4x^2 - 16x$	$-3\,(3x^2 - 2x - 8)$	
	$-\quad+\quad+$		
	$4x^2 - 11x + 6$ $\times 3$		
4	$12x^2 - 33x + 18$		
	$12x^2 - 8x - 32$		
	$-\quad+\quad+$		
	$-25x + 50$		
	$-25\,(x - 2)$	$3x^2 - 2x - 8$	
		$3x^2 - 6x$	
		$-\quad+$	
		$4x - 8$	$3x + 4$
		$4x - 8$	
		$-\quad+$	
		$\times$	

$\therefore$ F $f(x)$ का और $f'(x)$ यहाँ $x - 2$ है।

$\therefore$ $f(x)$ और $f'(x)$ का HCF (x – 2) है।

अब, $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

क्योंकि मूल 2 में, $f'(x)$ में एक बार आया है इसलिए मूल 2 में, $f(x) = 0$ दो बार आएगा।

$\therefore f(x) = 0$ के 2 मूल हैं: 2, 2

$\Rightarrow$ $f(x)$ के 2 गुणनखंड $(x - 2)$ और $(x - 2)$ है।

टिप्पणी

अब, $f(x)$ को $(x-2)(x-2)$ से विभाजित करते हुए, संश्लेषित विभाजन (Synthetic Division) को बार–बार प्रयोग करके, हम प्राप्त करते हैं,

2	1	0	–9	4	12
	…	2	4	–10	–12
2	1	2	–5	–6	0
	…	2	8	6	
	1	4	3	0	

$\therefore$ अवनत समीकरण (Depressed Equation) है $x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -1, -3$

$\therefore$ दी गई समीकरण के मूल हैं: 2, 2, –1 और –3

उदाहरण 4.8: नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए

(a) $x^6 - x^4 + 3$ (b) $2 - y^2 - y^3 + 2y^7$

हल: (a) चर का अधिकतम घातांक 6 है। इसलिए इसे बहुपद की घात 6 है।

(b) चर का अधिकतम घातांक 7 है। इसलिए इस बहुपद की घात 7 है।

उदाहरण 4.7: चरों के दिए गए ज्ञात पर निम्नलिखित में से प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए

(a) $x=1$ पर $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$ का मान

(b) $y = 2$ पर $p(y) = 3y^3 - 5y + \sqrt{11}$ का मान

हल: (a) $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$

बहुपद $p(x)$ से $x=1$ रखने पर यह प्राप्त होता है:

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 4$$
$$= 5 - 3 + 4 = 6$$

(b) $p(y) = 3y^2 - 5y + \sqrt{11}$

बहुपद $p(y)$ में $y = 2$ रखने पर यह होता है:

$$p(2) = 3(2)^3 - 5(2) + \sqrt{11}$$
$$= 24 - 10 + \sqrt{11}$$
$$= 14 + \sqrt{11}$$

उदाहरण 4.9: ज्ञात कीजिए कि –2 और 2 बहुपद $x - 2$ के शून्यक है या नहीं।

हल: मान लीजिए $p(x) = x - 2$

तब $p(2) = 2 - 2 = 0,\ p(-2) = -2 - 2 = -4$

इसलिए 2 बहुपद $x-2$ का एक शून्यक है, परन्तु 2 बहुपद $x-2$ शून्यक नहीं है।

टिप्पणी

उदाहरण 4.10: बहुपद $p(x)=3x+1$ का एक शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल: $p(x)$ का शून्यांक उसी तरह ज्ञात किया जा सकता है जैसे समीकरण $p(x)=0$ को हल किया जाता है।

अब $3x+1=0$ से हमें $x=-\frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

इसलिए $-\frac{1}{3}$ बहुपद $3x+1$ का एक शून्यक है।

किसी बहुपद $p(k)$ के लिए यदि $p(a)=0$ जहाँ 0 वास्तविक संख्या है, हम कह सकते हैं कि '0' बहुपद का शून्यांक है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

1. बहुपद की घात क्या है?
2. शून्येतर बहुपद को परिभाषित करें।
3. एक वास्तविक बहुपद से क्या अभिप्राय है?

4.3 सरल समीकरण

रैखिक समीकरण (Linear Equation): गणित में रैखिक समीकरण एक ऐसा समीकरण होता है, जिसमें चार (Variable) की अधिकतम घात (Power) एक होती है, इन समीकरणों को रेखीय या रैखिक समीकरण कहते हैं, क्योंकि ये कार्टेशिचन निर्देशाक पद्धति (Cartesian Coordinate System) में एक सबल रेखा को निरूपित करते हैं।

- **एक चर के रैखिक समीकरण (Linear Equation of One Variable)** - एक समीकरण जिसे हम $ax+by=0,\ a+0$ और a, b वास्तविक संख्याओं के रूप ले सके, एक चर में रैखिक समीकरण कहलाता है।
- **दो चर में रैखिक समीकरण (Linear Equation of Two Variable)** - कोई समीकरण जिसे हम $ax+by=c=0$, जहाँ $a, 0$ ओर c वास्तविक संख्याएँ हैं और, $a, b \neq 0$, के रूप में लिख सके, दो चर में रैखिक समीकरण कहलाता है।
- **चर** का अर्थ है, ऐसी कोई वस्तु जो विचरण कर, अर्थात् बदल सकती है।
- एक समीकरण में समता और समिका (Equality) का चिन्ह सदैव होता है। समता का चिन्ह यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाई ओर के व्यंजक [बायाँ पक्ष (Left Hand Side)] का मान चिह्न के दाई आरे के व्यंजक [दायाँ पक्ष (Right Hand Side)] के मान के बराबर है।

टिप्पणी

- एक चर में रैखिक समीकरण का केवल एक हल होता है।

$$a \times b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{-b}{a}$$

- दो चर में रैखिक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।
- रेखा पर प्रत्येक बिन्दु रेखा के समीकरण को संतुष्ट करता है।
- समीकरण का प्रत्येक हल रेखा पर स्थित एक बिन्दु को दर्शाता है। इस प्रकार दो चर में एक रैखिक समीकरण का आलेखीय रूप एक रेखा होगी जिसका प्रत्येक बिन्दु उसका हल होगा।

उदाहरण 4.11: नीचे दिए गए समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए-

(a) $2x + 5y = 4.37$ (b) $4 = 6x - 3y$

हलः (a) $2x + 5y = 4.37$

$2x + 5y - 437 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$a = 2,\ b = 5$ और $c = -4.37$

(b) समीकरण $4 = 6x - 3y$ को $6x - 3y - 4 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$$a = 6,\ b = -3 \text{ और } c = -4$$

उदाहरण 4.12: निम्नलिखित रूप में से प्रत्येक को दो चरों वाले समीकरणों के रूप में व्यक्त कीजिए-

(a) $x = -5$ को (b) $2y - 2$

हलः (a) $x = -5$

$1.x + 0.y = -5$ या $1.x + 0.y + 5 = 0$ के रूप

(b) $2y - 2$ को $0.x + 2y - 2 = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 4.13: हल कीजिए-

(a) $3x + 7 = 25$ (b) $2p - 1 = 23$

हलः (a) $3x + 7 - 7 = 25 - 7$

$3x = 18$

$3x = 18 \qquad n = \frac{18}{3} \qquad n = 6$

(b) $2p - 1 = 23$

$2p - 1 + 1 = 23 + 1$

$2p = 24$

$$\frac{2p}{2} = \frac{24}{2}$$

$p = 12$

टिप्पणी

उदाहरण 4.14: हल कीजिए-

(a) $4\,(m+3) = 18$

हलः $m+3 = \dfrac{18}{4}$ या $m+3 = \dfrac{9}{2}$

$$m = \frac{9}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{b}{2} = \frac{3}{2}$$

$$m = \frac{3}{2}$$

(b) $12p + 5 = 25$

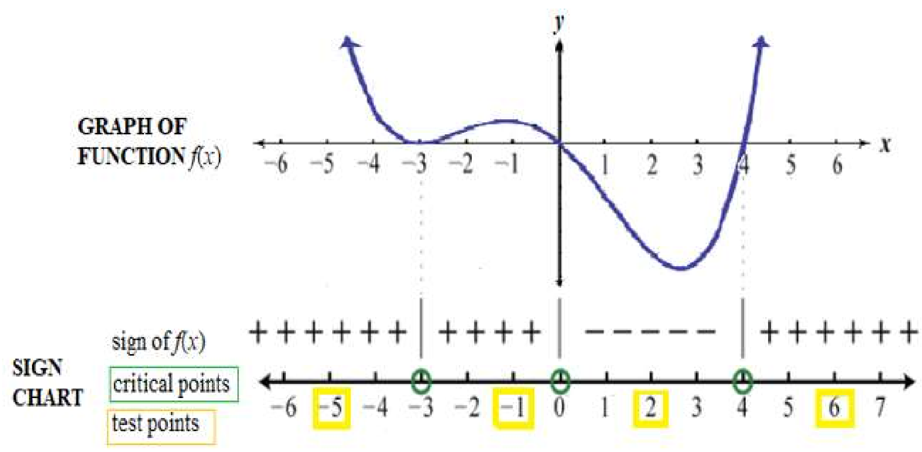
$12p = 25 - 5$

$12p = 20$

$$p = \frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

4.3.1 बहुपद में असमानता

बहुपद असमानता (Polynomial Inequation) एक गणितीय संक्रिया है जो एक बहुपद व्यंजक को दूसरे से छोटा या बड़ा प्रदर्शित करता है। हम एक साथ बहुपद असमानओं को हल करने के लिए साइन चार्ट का प्रयोग कर सकते हैं। आलेख बहुपद असमानताओं के समाधान के लिए एक दृश्य प्रदान करने में सहायक होते हैं। एक बहुपद के आलेख और उसके संगत साइन चार्ट के बीच के संबंध को देखने के लिए नीचे दिए गए ग्राफ का परीक्षण करें।



चित्र 4.1 बहुपद असमानता

प्रयुक्त ग्राफ में x-अंतःखंड, –3, 0 और 4 महत्वपूर्ण बिन्दु है, जो एकमात्र स्थान है जहां आलेख संभवतः x-अक्ष से ऊपर होने से बदल सकता है (जहाँ हम कह सकते हैं कि $f(x) > 0$), x-अक्ष के नीचे (जहाँ हम कह सकते हैं कि $f(x) < 0$)) दो अत्यन्त महत्वपूर्ण बिन्दुओं के आलेख या तो हमेशा x-अक्ष के ऊपर होता है, या हमेशा x-अक्ष के नीचे होता है इस प्रकार, एक बहुपद असमानता के महत्वपूर्ण बिन्दुओं को खोजना

एक बहुपद असमानता को हल करने में मौलिक भूमिका निभाता है।

बहुपद में असमानता को हल करने के लिए प्रयुक्त चरण निम्नलिखित है–

चरण 1: असमानता को फिर से लिखे ताकि असमानता के दाईं ओर एक शून्य हो और बाईं ओर का व्यंजक $f(x)$ के रूप में निर्दिष्ट है।

चरण 2: महत्वपूर्ण संख्याएँ खोजे। बहुपद कार्यों के लिए महत्वपूर्ण संख्याएँ $f(x) = 0$ के वास्तविक संख्या का हल है लेबल की गई महत्वपूर्ण संख्याओं के साथ एक संख्या रेखा खींचिए। यदि असमानता "$\leq$" या "$\geq$" का उपयोग करती है, तो प्रत्येक संख्या पर एक पूर्ण वृत्त बनाएं।

चरण 3: एक साइन चार्ट बनाएँ। महत्वपूर्ण संख्या रेखा क्षेत्रों में विभाजित करती है। प्रत्येक क्षेत्र के लिए एक परीक्षण मान चुनें, जिनमें सभी महत्वपूर्ण मानों के बाईं ओर एक ओर महत्वपूर्ण मानों के दाईं ओर शामिल है। प्रत्येक परीक्षण मान के लिए 'V' निर्धारित करे कि $f(V)$ धनात्मक है या ऋणात्मक प्रत्येक क्षेत्र के लिए साइन चार्ट पर परिणाम अंकित करें।

चरण 4: x के सभी मानों का समुच्चय ज्ञात करने के लिए साइन चार्ट का प्रयोग करें जिसके लिए असमानता सत्य है।

4.3.2 द्विघात समीकरण

गणित में द्विघात समीकरण (Quadric Equation) द्वितीय घात का एक बहुतपद समीकरण होता है जिसका मानक समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ होता है। जहाँ अनिवार्यताः $a \neq 0$ (अन्यथा यह एक घातीय रेखीय समीकरण हो जाएगा) जहाँ वर्ण a, b और c गुणांक है।

समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल होते हैं।

- समीकरण $b^2 - 4ac = 0$ हो, तो मूल वास्तविक तथा समान होगा।
- समीकरण $b^2 - 4ac < 0$ हो, तो मूल काल्पनिक होगा।
- $b^2 - 4ac$ हो, तो मूल वास्तविक और असमान होगा।

मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = -x$ का गुणांक / (x^2 का गुणांक)

मूलों का गुणनफल $(\alpha \times \beta) = \frac{c}{a} =$ अचर / (x^2 का गुणांक)

द्विघात समीकरण $x^2 - (\alpha + \beta)\, x + (\alpha \times \beta) = 0 =$ होता है।

जब $D = 0$ हो, तो $\alpha = \beta = -b/a$ होता है।

$ax^2 + bx + c = 0$ में जब $a + b + c = 1$ हो, तो इसका एक मूल 1 अवश्य होता है।

उदाहरण 4.15: जाँच कीजिए कि क्या निम्न समीकरण द्विघात समीकरण है

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

टिप्पणी

हलः बायाँ पक्ष $= (x + 1)^2$

$= x^2 + 2x + 1$

$[\because (a + b)^2 = ax^2 + 2ab + b^2]$

अब दायाँ पक्ष $= 2\,(x - 3)$

$= 2x - 6$

$\therefore x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (2x - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x + 6 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$

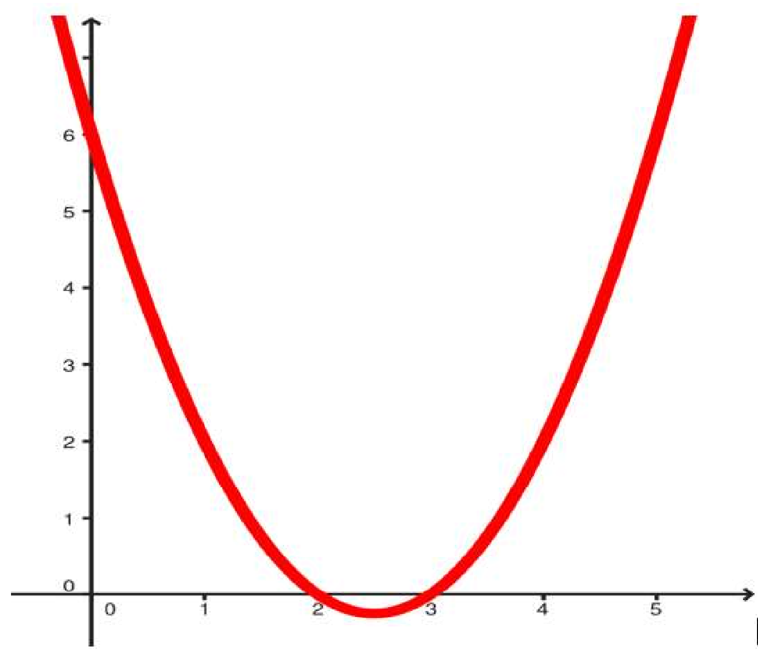
$\because$ दिया गया समीकरण $ax^2 + bx + c$, के प्रकार का है, अतः यह द्विघात समीकरण है।

द्विघात समीकरण के मूल

किसी द्विघात समीकरण के दो हल होते हैं जिन्हें द्विघात समीकरण के मूल या हल कहते हैं, जिन्हें समीकरण $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, के द्वारा दिया जाता है, जहाँ चिन्ह $\pm$ यह दर्शाता है कि

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ और } x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

समीकरणों के प्रयुक्त दो हल हैं।



चित्र 4.2 द्विघातीय समीकरण के दो मूलों का निरूपण

वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ का हल निकालने के लिए $y = x^2 + 5x + 6$ का आलेख खींचा गया है जिससे स्पष्ट है कि $x_1 = 2$ तथा $x_2 = 3$ पर y का मान शून्य है। अर्थात् ये द्विघात समीकरण के दो मूल है।

टिप्पणी

उपरोक्त हल में वर्गमूल की आंतरिक राशिः $\Delta = b^2 - 4ac$, को द्विघात समीकरण का विविक्तर (Discriminant) कहते है। यह प्राप्त मूलों की प्रकृति के बारे में जानकारी देता है कि $\Delta < = > 0$ के अनुसार होती है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

4. एक चर रैखिक समीकरण क्या है?
5. चर क्या है?
6. द्विघात समीकरण को परिभाषित करें।
7. द्विघात समीकरण के मूल के बारे में संक्षिप्त वर्णन करें।

4.4 समुच्चय, संबंध एवं फलन

समुच्चय (Set) गणित में सबसे मौलिक अवधारणाओं में से एक है। एक समुच्चय एक संपूर्ण के रूप में मानी जाने वाली विशिष्ट वस्तु का एक संग्रह है, इस प्रकार हम कह सकते हैं, कि समुच्चय वस्तुओं का एक ऐसा संग्रह जिससे किसी वस्तु को दिए जाने पर यह निर्धारित किया जा सकता है, कि वह वस्तु दिए गए संग्रह से संबंधित है या नहीं है। समुच्चय के समाहरण को अवयव कहते हैं। समुच्चय को निरूपित करने के लिए हम कोष्ठक का प्रयोग करते हैं।

समुच्चय के उदाहरण

(i) सभी पूर्णांको का समुच्चय

(ii) दिल्ली विश्वविधालय के सभी छात्रों का समुच्चय

(iii) वर्णमाला के सभी अक्षरों का समुच्चय

(iv) सम पूर्णांको 2, 4, 6, 8 का समुच्चय

परिभाषाः समुच्चय सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को कहते हैं परिभाषा के रूप में वस्तुओं के उस समूह अथवा समाहार को समुच्चय कहते हैं, जिसमें सम्मिलित प्रत्येक वस्तु किसी विशेष गुण को संतुष्ट करती हो जिसके आधार पर स्पष्ट रूप से यह बताया जा सके कि अमुक वस्तु उस संग्रह से सम्मिलित है या नहीं। गणित की वह शाखा है, जो समुच्चयों का अध्ययन करती है। वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। यद्यपि समुच्चय के अंतर्गत किसी भी प्रकार की वस्तुओं का संग्रह संभव है, किंतु समुच्चय सिद्धांत (Set Theory) मुख्यतः गणित से संबंधित समुच्चयों का ही अध्ययन करता है। प्रथम श्रेणी के तर्क से सुव्यवस्थित किया हुआ समुच्चय सिद्धांत आज गणित का आधारभूत तंत्र है। समुच्चय सिद्धांत की भाषा गणित के लगभग सभी

टिप्पणी

वस्तुओं को परिभाषित करने के काम आती है। समुच्चय सिद्धांत के आरंभिक अवधारणा इतने सरल है कि इन्हें प्राथमिक विद्यालयों के पाठ्यक्रम में भी पढ़ाया जा सकता है।

समुच्चयों के प्रकार निम्नलिखित है–

1. **परिमित समुच्चय (Finite Set)** : जिसके अवयवों की संख्या सीमित हो जैसे $\{3, 7, 9\}$ है।
2. **अपरिमित समुच्चय (Infinite Set):** जिसके अवयवों की संख्या असीमित हो जैसे $A = \{2, 4, 6, 8 ...\}$
3. **रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय (Empty Set or Null Set):** जिसमें अवयवों की संख्या शून्य हो या जिसका कोई अवयव न हो। इसे ϕ अथवा $\{\}$ से निरूपित किया जा सकता है।

जैसे कि मान लीजिए कि एक गाँव में M उन सभी पुरुषों का संग्रह है जो खुद की हजामत नहीं करते हैं। यह देखते हुए कि,

(1) गाँव के सभी पुरुषों को स्वच्छ हजामत कया जाना चाहिए।

(2) गाँव का नाई उन सभी पुरुषों की हजामत करता है, जो खुद की हजामत नहीं करते हैं।

मान लीजिए b गाँव के नाई को दर्शाता है यदि $b \in M$, है जब b स्वयं की हजामत नहीं करता है तब दिए गए कथानुसार (2) b स्वयं की हजामत करता है। तब दिगए गए कथानुसार (1) b स्वयं की हजामत नहीं करता है यह फिर से एक विरोधाभास है।

चूँकि हम इस प्रश्न का उत्तर 'हाँ' या 'ना' में दे सकते हैं क्या नाई स्वयं M का सदस्य है? अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि M समुच्चय नहीं है।

समुच्चय की मौलिक अवधारणाओं के साथ उपसमुच्चय तथा सार्वसमावेशी समुच्चय

किसी समुच्चय के अवयव के निम्नलिखित चार तथ्य है–

(1) सभी अवयवों के लिखने की प्रक्रिया,

उदाहरण 4.16: $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

(2) कुछ अवयवों को लिखने के उपरांत बिन्दुकित करना

जैसेः $A = \{2, 4, 6, 8 ...\}$

(3) कोई विवरण देना,

जैसेः $S = \{$सभी सम संख्याएँ$\}$

(4) बीजगणित की सहायता से;

जैसेः $C = \{x: 2<x<7, x$ एक पूर्ण संख्या है$\}$ इसका अर्थ है कि समुच्चय C के अवयव पूर्णांक है, जो 2 से अधिक तथा 7 से कम है। अर्थात् $C = \{3, 4, 5, 6\}$

टिप्पणी

उपसमुच्चय (Sebset)

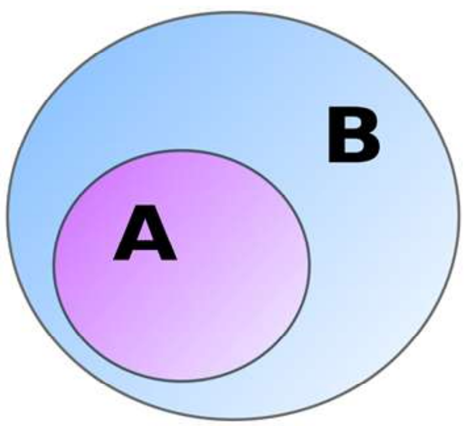
यदि किसी समुच्चय के सभी अवयव किसी अन्य समुच्चयों के भी सदस्य है तो यह कहा जाता है कि A, B का उपसमुच्चय है। जैसे, $A = \{p, \text{q}, \text{r}\}$ एवं $B = \{p, q, r, s\}$ हो तो हम लिखते हैं कि $A \subset B$ प्रत्येक समुच्य के दो उपसमुच्चय अवश्य होते हैं, एक तो स्वयं वही समुच्चय अपने आप का उपसमुच्चय होता है, दूसरा शून्य समुच्चय सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय है।

माना कि A और B दो समुच्चय है। यदि A प्रत्येक अवयव B का एक अवयव है, तो A को B का उपसमुच्चय कहा जा सकता है और हम $A \subseteq B$ और $B \supseteq A$ (और पढ़ा जाता है कि A, B का उपसमुच्चय है या B, A का अधिसमुच्चय है) तार्किक रूप से $A \subseteq B$ का अर्थ है कि $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ प्रत्येक x के लिए सत्य है।

ध्यान दें: 1. यदि $A \subseteq B$ और $A \neq B$ का एक उचित उपसमुच्चय है या B, A का एक उचित अधिसमुच्चय है।

2. प्रत्येक समुच्चय स्वयं का एक अधिसमुच्चय है या उपसमुच्चय है।

3. यदि A, B का उपसमुच्चय नहीं है, तो हम $A \not\subset B$ लिख सकते है।



चित्र 4.3 $A \subseteq B$ *उपसमुच्चय का निरूपण*

सर्वसमावेशी समुच्चय (Universal Sets)

किसी समस्या में विद्यमान सभी उपदानों को लेने पर जो समुच्चय बनता है उसे उस समस्या के सापेक्ष सर्वसमावेशी समुच्चय कहते हैं। यदि हम किसी समुच्चय की बात करते हैं, तो हम एक निश्चित समुच्चय U का उपसमुच्चय मानेंगे। इस नियत समुच्चय U को **सर्वसमावेशी या सार्वत्रिक समुच्चय** कहा जाता है। समुच्चय सिद्धांत में सार्वत्रिक समुच्चय एक ऐसा समुच्चय है जिसमें स्वयं सहित सभी वस्तुएँ समाहित होती है इसे U द्वारा निरूपित किया जाता है।

समुच्चयों की संक्रियाएँ (Operation on Sets)

पाठक अंकगणित में जोड़ और गुणा की संक्रियाओं से परिचित है। किन्हीं दो दी गई संख्याओं के लिए, योग और गुणन की संक्रियाएँ एक अन्य संख्या को जोड़ती है जिसे

टिप्पणी

क्रमशः दो संख्याओं का योग या गुणनफल कहते है, इस भाग में, हम दिए गए किन्हीं दो समुच्चयों को तीसरे समुच्चयों में जोड़ने के लिए तीन संक्रियाओं को परिभाषित करेंगे, ये तीन संक्रियाएँ संघ, सर्वनिष्ठ और सम्पूरक क्रमशः संख्याओं के जोड़, गुणा और व्यवकलन की संक्रियाओं के अनुरूप है।

संघ समुच्चय (Union Set)

दो समुच्चय A और B का संघ वह समुच्चय है जिसके सभी अवयव वे हैं, जो A में है, या B में है या दोनों में है।

यदि किन्हीं दो समुच्चयों A और B का समुच्चय उन सभी अवयवों x का समुच्चय है जो x के सभी समुच्चय A और B से कम से कम संबंधित है इसे $A \cup B$ द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरणार्थ यदि $A\ \{3, 4, 6\}$ एवं $B\ \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ हो तो इन दोनों समुच्चयों का संघ– $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$। यदि दो समुच्चयों A और B में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है, तो इन दोनों समुच्चय को असंयुक्त समुच्चय कहते हैं, जो $A \cap B = \phi$ द्वारा निरुपित किया जाता है।

सर्वनिष्ठ समुच्चय (Intersection Set)

दो समुच्चय A और B हो तो इनका सर्वनिष्ठ समुच्चय वह समुच्चय होगा जिसके वे अवयव होंगे जो A और B दोनों में प्रयुक्त है। जैसे यदि $A = \{2, 4, 7\}$ एवं $B = \{2, 3, 7, 8\}$ हो तो A और B का सर्वनिष्ठ समुच्च्य $\{2, 7\}$ होगा। जिसे हम $A \cap B = \{2, 7\}$ लिख सकते हैं। तार्किकता द्विशर्त कथन $(x \in c) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ सभी के लिए x के लिए सत्य है तो $c = A \cup B$ दूसरे शब्दों में $(x \in A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$

सम्पूरक (Complement Set)

यदि A और B दो समुच्चय है तो A के सापेक्ष B का पूरक उन सभी अवयवों $x \in A$ का समुच्चय है $x \in B$ है इसे $A - B$ से निरुपित किया जाता है।

समुच्चयों के बीजगणित और वास्तविक संख्याओं के नियमों की तुलना (Comparison Laws of Algebra of Sets and Algebra of Real Number)

समुच्चयों के बीजगणितीय नियमः समुच्चयों का बीजगणित समुच्चय संक्रिया और समुच्चय संबंधों के मौलिक गुणों का विकास है। ये गुण समुच्चय की मौलिक प्रकृति में अंतदृष्टि प्रदान करते हैं। सामान्य अंक गणित में व्यंजकों और गणनाओं की तरह, समुच्चयों से जुड़े व्यंजक और गणनाओं की संक्रियाएँ काफी जटिल हो सकते हैं इस तरह के तथ्यों में मूल्यांकन और इस तरह की गणना करने के लिए व्यवस्थित प्रक्रियाएँ उपलब्ध होना मददगार है।

बीजगणित में वास्तविक संख्याओं का नियमः बीजगणित में वास्तविक संख्या सरल रेखा के अनुदिश किसी राशि को प्रयुक्त करने वाला मान है। वास्तविक संख्याओं में सभी परिमेय संख्या (Rational Number) जैसेः 5 एवं भिन्नात्मक संख्याएँ जैसे 4 / 3

और सभी अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Number) शामिल हैं। वास्तविक संख्याओं में अपरिमेय संख्याओं को शामिल करने से इन्हें वास्तविक संख्या रेखा के रूप में एक रेखा पर निरुपित किए जा सकने वाला अनंत बिन्दुओं से प्रस्तुत किया जा सकता है।

संबंध

संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या युग्म जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है।

निम्नलिखित समुच्चय संबंधों के कुछ उदाहरण हैं:

- $\{(0,1), (55,22), (3,-50)\}$
- $\{(0, 1), (5, 2), (-3, 9)\}$
- $\{(-1,7), (1, 7), (33, 7), (32, 7)\}$

माना लीजिए कि A और B कोई दो समुच्चय है। A और B के कार्टेशियन (Cartesian) गुणन या समुच्चय गुणन को निम्नानुसार परिभाषित किया गया है:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A; b \in B\}$$

अतः, सभी $a_i \in A$; $b_j \in B$ के लिए सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय (a_i, b_j) होगा

उदाहरण के लिए, $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{ (1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

यह स्पष्ट रूप से दर्शाता है कि $A \times B \neq B \times A$.

नोट: हम कार्टेशियन गुणन को n पंक्तियों और m पंक्ति वाले एक आयताकार सरणी क्रम में $a_1, a_2,..., a_n$ और $b_1, b_2, ...,b_n$ के रूप को क्रमबद्ध रूप में दर्शा सकते हैं।

द्विआधारी संबंध (Binary Relation)

एक द्विआधारी संबंध R समुच्चय A से B के बीच क्रमित युग्मों $A \times B$ का उप –समुच्चय होता है।

उदाहरण के लिए,

1. मान लीजिए कि $A = B = N$, प्राकृत संख्याओं का समूह है

   (i) संबंध R का '=' के रूप में परिभाषित करें

   अब, $R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3),....\} \subseteq N \times N$

   इसलिए R एक द्विआधारी संबंध है।

   (ii) R का '<' के रूप में परिभाषित करें

   $R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4),..... (1, 3), (2, 4), (3, 5), ...\} \subseteq N \times N$

   इसलिए R एक द्विआधारी संबंध है।

2. मान लीजिए कि A पृथ्वी पर सभी लोगों के समूह का समुच्चय है और $a, b \in A$, और $a\,R\,b$, अगर a और b उसी वर्ष एक ही जन्म लेते हैं।

टिप्पणी

संबंध का रेंग और परिसर या डोमेन

मान लीजिए कि R एक द्विआधारी संबंध है। सभी अवयवों x के समुच्चय $D(R)$ को, सभी y के लिए, $(x, y) \in R$ को डोमेन कहा जाता है।

अतः $D(R) = \{ x : (x, y) \in R$ सभी y के लिए$\}$

इसी तरह, सभी अवयवों y के $Rg(R)$ को, सभी x के लिए, $(x, y) \in R$ को परिसर कहा जाता है।

अतः $Rg(R) = \{y : (x, y) \in R$ सभी x के लिए$\}$

संबंधों पर संक्रियाएं

मान लीजिए कि R और S का समुच्चय A से समुच्चय B के संबंध हैं तो R और S के सर्वनिष्ठ और सम्मिलन को निम्नानुसार परिभाषित किया गया है–

(i) $R \cup S = \{ (a, b) : (a, b) \in R$ या $(a, b) \in S\}$

(ii) $R \cap S = \{(a,b) : (a, b) \in R$ और $(a, b) \in S\}$

उदाहरण 4.17: मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

मान लीजिए कि X से X तक R और S संबंध में हैं,

$R = \{ (x, y) : (x + y)$ संख्या 2 का गुणन है$\}$

$S = \{ (x, y) : (x + y)$ संख्या 3 का गुणन है$\}$

$R \cup S$ और $R \cap S$ ज्ञात कीजिए।

हल: $R = \{(1, 3), (1, 5)\}$ और $S = \{(2, 4), (1, 5)\}$

$R \cup S = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R \cap S = \{(1, 5)\}$

***R* का व्युत्क्रम:** समुच्चय A के समुच्चय B के बीच,एक संबंध R है। R का व्युत्क्रम B से A तक का संबंध है और इसे $R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

समाधानों का निरूपण

(i) एक द्विआधारी संबंधों वाले n अवयवों के एक समुच्चय A को m अवयवों के एक समुच्चय B के साथ M_R में पदों को चिह्नित करने $n \times m$ सरणी के रूप में दर्शाया जाता है। जो स्थितियां जोड़ों के अनुरूप होती हैं, वे सभी जगह 1 और 0 के रूप मे R मे होती हैं।

अर्थात, $M_R = [a_{ij}]\begin{cases} 1 \text{ अगर } A \text{ का } i \text{ अवयव } B \text{ के } j \text{ अवयव से संबंधित हो} \\ 0, \text{ अन्यथा} \end{cases}$

उदाहरण 4.18: मान लीजिए कि $A = B = X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तो R को X पर '$<$' के रूप में परिभाषित करें।

हलः $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

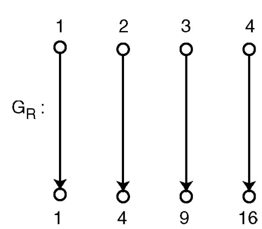
(ii) संबंध सरणी को आलेखों के रूप में प्रतिरूप द्वारा दर्शाए गए अवयवों के समुच्चयों के रूप में देखा जा सकता है और एक क्रमिक युग्म को अवयवों के जोड़ों के दो शीर्षों के बीच कोरे से दर्शाया जाता है, जिसमें एक तीर दूसरी जोड़ी के अवयवों की ओर संकेत करता है।

उदाहरण 4.19: माना कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ और संबंध $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$। संबंध आलेख को बनाएँ।

हलः पहले हम संबंध आव्यूह M_R लिखेंगे–

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब हम संबंध आलेख G_R तैयार करेंगे।

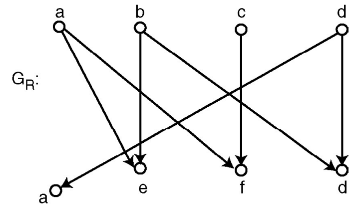


उदाहरण 4.20: माना कि $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, f, d\}$ और $R = \{(a, e), (a, f), (b, e), (c, f), (b, d), (d, d), (d, a)\}$ संबंध आलेख को बनाएँ।

हलः पहले हम संबंध आव्यूह M_R लिखेंगे–

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संबंध ग्राफ G_R निम्नानुसार दिया गया है–



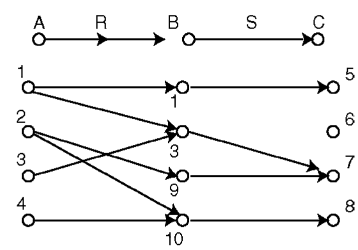
दो संबंधों का संयोजन

टिप्पणी

मान लीजिए कि एक द्विआधारी संबंध R का समुच्चय A से समुच्चय B तक संबंध हैं और द्विआधारी संबंध S का समुच्चय B से समुच्चय C तक संबंध हैं, तब क्रमित युग्मों (R, S) को संयोजित (Composable) कहा जा सकता है। यदि द्विआधारी संबंधों की एक युग्म या जोड़ी (R, S) संयोजित (Composable) है, तब संयुक्त ROS और R और S, समुच्चय A से समुच्चय C तक द्विआधारी संबंधों में होगे इस तरह कि $a \in A$ और $c \in C\, a\, (R \circ S)c$ होगा अगर कुछ $b \in B$ है, तो aRb और bSc दोनों द्विआधारी संबंध होंगे।

उदाहरण 4.21: मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 9, 10\}$ $C = \{5, 6, 7, 8\}, R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 9), (2, 10), (3, 3), (4, 10)\}$ $S = \{(1, 5), (3, 7), (9, 7), (10, 8)\}$ $R \circ S$ निकले और संबंध आलेख बनाएँ।

हल:

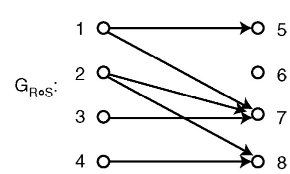


$$R \circ S = \{(1, 5), (1, 7), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (4, 8)\}$$

संबंधित आव्यूह इस प्रकार होगा–

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

और संबंधित संबंध ग्राफ $G_{R \circ S}$ इस प्रकार होगा–



द्विआधारी संबंधों के गुण

गणित में, द्विआधारी संबंधों को समुच्चय A पर एक संबंध के रूप में परिभाषित किया जाता है जो कि समुच्चय A के अवयकों के क्रमित युग्मों का संग्रह है। इसे कार्टेशियन उत्पाद $A^2 = A \times A$ के उप– समुच्चय के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है। मूल रूप से, एक द्विआधारी संबंध दो समुच्चयों A और B के बीच $A \times B$ का उप–समुच्चय होता है। 2–स्थान संबंध द्विआधारी संबंधों का पर्याय है। एक द्विआधारी संबंध एक n–Ary संबंध $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ का $n = 2$ पर एक असाधारण प्रकरण है जोकि

n-टुपल्स (Tuples) का एक समुच्चय है जहाँ रजी घटक संबंध के प्रत्येक n-टुपल्स (Tuple) को jवे डोमेन (Domain) A_j से लिया जाता है। स्वयंसिद्ध समुच्चय सिद्धांत की कुछ विशिष्ट प्रणालियों में, संबंधों को उन वर्गों तक बढ़ाया जा सकता है जो समुच्चय से सामान्यीकृत हैं। समुच्चय सिद्धांत में, इस विस्तार की 'का अवयव या का उप समुच्चय ' की अवधारणाओं को प्रतिरूप करने की आवश्यकता होती है। निम्नलिखित द्विआधारी संबंधों के गुण हैं।

मान लीजिए कि R समुच्चय A से एक संबंध हैं (अर्थात् $R \subseteq \mathrm{A} \times A$)। तो R को निम्नलिखित विधि से परिभाषित किया जा सकता है–

(i) स्वतुल्यता/प्रतिवर्त (Reflexive) यदि aRa, तो $\forall\, a \in A$

(ii) सममित (Symmetric) : यदि aRb तो bRa $\forall\, a, b \in A$

(iii) सकर्मक (Transitive) : यदि aRb और bRc तो aRc $\forall\, a, b, c \in A$

(iv) अप्रतिवर्त (Irreflexive) : यदि $a \not R a$ और $a \in A$

(v) प्रतिसममित (Antisymmetric): यदि aRb तो $b \not R a$, और $a = b, a, b \in A$ के लिए

(vi) कनेक्टेड (Connected) : A में एक संबंध कनेक्टेड होता है अगर A में दो अलग–अलग अवयवों x और y के लिए $<x,y> \in R$ या $<y,x> \in R$ दोनों होता है।

इन गुणों के आधार पर, अन्य संयोजनों को संबंधों के कुछ वर्गों जैसे कि समतुल्यता, सहिष्णुता या आदेश का उपयोग करके परिभाषित किया जा सकता है।

- **समतुल्यता (Equivalence)** : एक समुच्चय A पर एक संबंध R को समतुल्य संबंध कहा जाता है। यदि R प्रतिवर्ती, सममित और सकर्मक हो। तुल्यता संबंधों के उदाहरण मे एक सतह में समांतर रेखाओं का एक समुच्चय है।
- **सहिष्णुता (Tolerance)** : $A \times A$ में एक संबंध R को सहिष्णुता या सहिष्णुता संबंध कहा जाता है यदि यह प्रतिवर्त और सममित हो। सहिष्णुता समतुल्यता से कमजोर या दुर्बल होता है। सहिष्णुता संबंध की धारणा समानता या निकटता की व्याख्या करना है।
- **ऑडरिंग (Ordering)** : एक द्विआधारी संबंध जो मूल रूप से सकर्मक है और आगे यह या तो प्रतिवर्ती, और प्रतिसममित या अप्रतिवर्त और असममित हो सकता है।

संबंधों का समापन या क्लोजर

मान लीजिए कि R समुच्चय A पर कोई भी संबंध है। R सममित, प्रतिवर्त और सकर्मक हो सकता है या नहीं। मान लीजिए कि S, A पर कोई अन्य संबंध इस तरह है कि S में R है, और S, R से युक्त प्रत्येक संबंध का उप–समुच्चय हो। तब S को R का समापन कहा जाता है।

प्रतिवर्त समापन या क्लोजर (Reflexive Closure)

मान लीजिए कि R समुच्चय X पर कोई भी संबंध है। R के प्रतिवर्त समापन S को फॉर्म (a, a) के सभी जोड़ों को R में जोड़कर प्राप्त किया जाता है, जो R में नहीं हैं, $a \in A$ अब S प्रतिवर्त होगा, जिसमें R है और किसी भी प्रतिवर्त संबंध में R युक्त होगा।

टिप्पणी

उदाहरण 4.22: समुच्चय $A = \{a, b, c\}$ पर $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b)\}$ है। R का प्रतिवर्त समापन ज्ञात कीजिए।

हल : निरीक्षण से, हम देख सकते हैं कि R में $(b, b), (c, c)$ नहीं हैं।

$\therefore S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (b, b), (c, c)\}$

अब, S, R का प्रतिवर्त समापन है।

नोट: किसी संबंध R का एक प्रतिवर्त समापन प्राप्त करने के लिए, विकर्ण अवयवों को R में जोड़ें, अर्थात, $D = \{(a,c) / a \in A\}$ विकर्ण संबंध S, R का प्रतिवर्तनात्मक समापन होता है तब $S = R \cup D$।

सममित समापन (Symmetric Closure)

मान लीजिए कि R समुच्चय A पर एक संबंध है। तो R का सममितीय समापन S को R में फॉर्म (b, a) के सभी युग्मों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है अगर $(a, b) \in R$ और $(b, a) \notin R$ हो।

दूसरे शब्दों में, R का सममित समापन $S = R \cup R^{-1}$ के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 4.23: मान लीजिए कि समुच्चय $A =(a, b, c)$ पर $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, b)\}$ संबंध है। R के सममितीय समापन का पता लगाएं।

हल : स्पष्ट रूप से R सममित नहीं है।

अब $S = R \cup R^{-1} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$

स्पष्ट रूप से अब S सममित है और यह R से समाहित है और यह R युक्त किसी भी सममित संबंध में होगा।

कनेक्टिविटी संबंध (Connectivity Relation)

प्रमेय 4.3: मान लीजिए कि R समुच्चय A पर एक संबंध है। तो कनेक्टिविटी संबंध R^* में जोड़ी (a, b) इस तरह होगी कि R में A और B के बीच का एक रास्ता हो।

प्रमाण: कोई भी संबंध R का सकर्मक समापन कनेक्टिविटी (Connectivity) संबंध R^* के तुल्य (बराबर) होता है।

मान लीजिए कि R समुच्चय। पर एक संबंध है।

दावा: R^*, R का सकर्मक समापन है। यह सिद्ध करने के लिए,

(i) R^* सकर्मक है और

(ii) $R \subseteq S$ के साथ, S, A पर एक सकर्मक संबंध है। तब $R^* \subseteq S$ होगा

परिभाषा के अनुसार, $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

अर्थात R^* में R होता है।

(i) यदि $(a,b) \in R^*$ और $(b,c) \in R^*$ है, तो R में a से b और b से c तक एक पथ होगा। इस प्रकार, हम a से b शुरू करके और इसका अनुसरण b से c तक करते हुए, a से c तक का मार्ग प्राप्त करते हैं।

$\therefore (b,c) \in R^*$.

अर्थात, R^* सकर्मक है।

(ii) मान लीजिए कि S, R युक्त एक सकर्मक संबंध है।

चूंकि S सकर्मक है, S^n भी सकर्मक होगा।

आगे $S^n \subseteq S$ चूंकि, $S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$, और $S^i \subseteq S, S^* \subseteq S$.

चूँकि R में कोई भी पथ S में भी एक पथ होगा, $R^* \subseteq S^*$, अगर $R \subseteq S$

अब हमारे पास $R^* \subseteq S^*$ और $S^* \subseteq S$ है।

$\Rightarrow R^* \subseteq S^*$

अर्थात, किसी भी सकर्मक संबंध जिसमें R होता है, उसमें R^* भी होगा।

इस प्रकार, R^*, R का सकर्मक समापन है।

सकर्मक समापन (Transitive Closure)

मान लीजिए कि M_R संबंध R के द तत्वों के समुच्चय A पर एक आव्यूह संबंध है। तो सकर्मक समापन आव्यूह M_{R^*} को निम्न रूप से लिखा जाता है–

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \ldots \vee M_{R^n}$$

उदाहरण 4.24 (i) समुच्चय $\{a,b,c\}$ पर किसी संबंध R का सकर्मक समापन ज्ञात करें, जिसका संबंध आव्यूह M_R निम्नानुसार है :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) संबंध R के सकर्मक समापन आव्यूह का पता लगाएं, जिसका संबंध आव्यूह निम्नानुसार है:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

हल : (i) मान लीजिए कि R^*, R का सकर्मक समापन है। तब R^* का संबंध आव्यूह M_{R^*} इस प्रकार होगा–

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R_2} \vee M_{R_3}$$

अब,

$$M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{R3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii)मान लीजिए कि R^*, R का सकर्मक समापन मानते हैं और $M_R{}^*$ संबंधित संबंध आव्यूह है।

टिप्पणी

हमारे पास है : $M_{R^*} = M_R \vee M_{R_2} \vee M_{R_3}$

अब,

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

नोट : सकर्मक समापन को निम्नलिखित एल्गोरिथम द्वारा प्राप्त किया जा सकता है–

सकर्मक समापन (M_R; $0 - 1$ $n \times n$ आव्यूह (Matrix)

$A \leftarrow M_R$

$B \leftarrow A$

i के लिए $\leftarrow 2$ to n

प्रारंभ करें,

$A \leftarrow A \,.\, M_R$

$B \leftarrow B \vee A$

समाप्त (B, R^* का आव्यूह है)

समतुल्यता संबंध

एक समुच्चय A पर संबंध R को समतुल्यता संबंध कहा जाता है यदि R, प्रतिवर्ती, सममित और सकर्मक है।

उदाहरण 4.25: मान लीजिए कि N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हैं। N पर R को परिभाषित करें :

$$R = \{(x,y) : x + y \text{ सम है}, x, y \in N\}$$

हल : मान लीजिए कि $x \in N$। अब $x + x = 2x$

स्पष्ट रूप से $2x$ सम है। इसलिए R प्रतिवर्त है। मान लीजिए कि $x, y \in N$ और $x + y$ सम (Even) है।

स्पष्ट रूप से $y + x$ भी सम होगा और इसलिए R सममित है।

अब, यदि $x + y$ सम है और $y + z$ भी सम है तो हमें यह सिद्ध करना होगा कि $x + z$ भी सम होगा।

चूंकि, $x + y$ और $y + z$ सम हैं, दोनों $(x + y)$ और $(y + z)$, 2 से विभाज्य हैं।

इसलिए $(x + y) + (y + z)$ भी 2 से विभाज्य होगा, अर्थात, $x + (y + y) + z$, 2 से विभाज्य है।

$(x+z)$, 2 से विभाज्य है।

R सकर्मक है। इसलिए, एक समतुल्य संबंध है।

नोट: संबंध आलेख या संबंध आव्यूह से, संबंध के प्रकार की पहचान की जा सकती है।

उदाहरण 4.26: एक समुच्चय पर संबंध R निम्नलिखित द्वारा दर्शाया गया है–

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

क्या R प्रतिवर्त (Reflexive), सममित (Symmetric) या प्रतिसममित (Antisymmetric) है?

हल : आव्यूह M_R में, विकर्ण अवयवों 1 हैं, इसलिए R प्रतिवर्त (Reflexive) है।

चूंकि R सममित है, इसलिए संबंध R भी सममित होगा।

उदाहरण 4.27 : संबंध R और R_1 एक सेट निम्नलिखित द्वारा दर्शाया गया है–

(i) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

क्या संबंध R और R_1 प्रतिवर्त (Reflexive), सममित (Symmetric), प्रतिसममित (Antisymmetric) या सकर्मक हैं ?

हल :

(i) चूँकि, आव्यूह M_R सममित और इसकी विकर्ण प्रविष्टियाँ 1 हैं, इसलिए संबंध R सममित और प्रतिवर्त है। चूँकि R प्रतिसममित नहीं है, इसलिए R सकर्मक है।

(ii) संबंध R_1 प्रतिवर्ती नहीं है।

R_1 सममित है।

इसलिए M_{R_1} सममित होगा।

और R_1 सकर्मक है।

उदाहरण 4.28: निम्नलिखित संबंधों के लिए संबंध आलेख बनाएँ।

(i) समुच्चय $X = \{1, 2, 3, 4\}$ पर $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

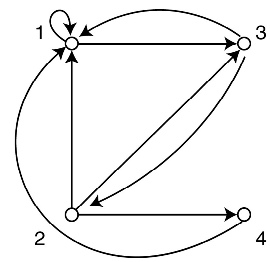
(ii) समुच्चय $Y = \{1, 2, 3\}$ पर $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

हल :

(i) R का संबंध आलेख G_R निम्नानुसार है:

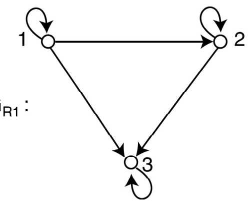
G_R के शीर्षों 1, 2, 3, 4 हैं।

G_R :



(ii) R_1 का संबंध आलेख G_{R_1} निम्नानुसार है:

G_{R1} :



उदाहरण 4.29: मान लीजिए कि एक संबंध R को निम्नानुसार दर्शाया गया है:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(i)\ R^{-1}$ $(ii)\ R^c$ $(iii)\ R^2$ का निरूपण करने वाले संबंध आव्यूह का पता लगाएं।

हल:

(i) संबंध R का व्युत्क्रम संबंध आव्यूह $(M_{R^{-1}})$ प्राप्त करने के लिए सिर्फ (M_R) का मैट्रिक्स परिवर्तन या ट्रैन्स्पोज (Transpose) लिखना होता है।

$$\therefore \qquad M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) पूरक संबंध आव्यूह को प्राप्त करने के लिए, दिए गए संबंध आव्यूह में 0 को 1 और 1 को 0 से बदलें।

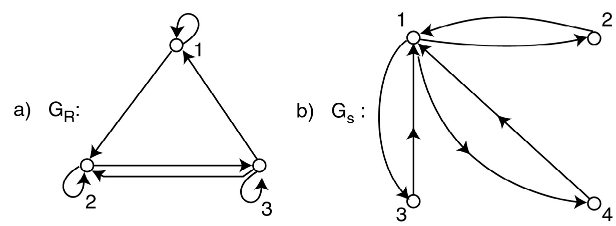
$$\therefore \qquad M_{R^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) R^2 का संबंध आव्यूह को प्राप्त करना जब $R^2 = R \, o \, R$ हो।

यदि संबंध आव्यूह M_R ज्ञात है, तो $M_{R^2} = M_R . M_R$ (आव्यूह गुणन)

$$\therefore \qquad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 4.30: पता करें कि निम्नलिखित आलेखों में दिखाए गए निर्देशित दिष्ट के संबंध प्रतिवर्ती, सममितीय, प्रतिसममितीय और/या सकर्मक हैं।



हल:

(i) G_R में, संबंध आलेखों के प्रत्येक शीर्ष पर लूप होते हैं और इसलिए यह प्रतिवर्ती होते है।

यह न तो सममित है और न ही प्रतिसममितीय है क्योंकि 1 और 2 के बीच कोर है लेकिन 2 से 1 के बीच नहीं है, लेकिन 2 और 3 के बीच दोनों तरह कोरे हैं।

इसके अलावा, संबंध सकर्मक नहीं है, क्योंकि 1 से 2 और 2 से 3 तक कोरे है, लेकिन 1 से 3 तक कोई कोरे नहीं है।

(ii) चूंकि G_S में लूप मौजूद नहीं हैं, इसलिए यह संबंध प्रतिवर्ती नहीं है। इसके अलावा, यह सममित है और प्रतिसममितीय नहीं है।

इसके अलावा, संबंध सकर्मक नहीं है।

समतुल्यता वर्ग और विभाजन

मान लीजिए कि एक संबंध R का समुच्चय A के साथ समतुल्य संबंध है। यदि $x \in A$ तो तुल्यता वर्ग a को निम्न विधि से दर्शाया जाता है,

$$[a]_R = \{x \in A: (a, x) \in R\}$$

नोट : $[a]_R \neq \phi$, क्योंकि $a \in [a]$।

उदाहरण 4.31: सिद्ध कीजिए कि कोई दो समतुल्य वर्ग समरूप या असंयुक्त होते हैं।

हल : पहले हम यह सिद्ध करेंगे कि $(a,b) \in R$ । इसका मतलब है कि $[a]_R = [b]_R$

मान लीजिए कि $(a, b) \in R$

प्रकरण I: $[a] = [b]$

यदि $x \in [a] \Rightarrow (x, a) \in R$

$\Rightarrow (x,b) \in R$ [$\because$ $(x,a) \in R$ और $(a,b) \in R$ और R सकर्मक है]

$\Rightarrow x \in [b]$

$\Rightarrow [a] = [b]$

$\therefore \quad [a] = [b]$

अब मान लीजिए कि $[a], [b]$ दो समतुल्य वर्ग हैं।

प्रकरण II: $[a] = [b]$ or $[a] \cap [b] = \phi$

अगर $[a] \cap [b] = \phi$ तो सिद्ध करने के लिए कुछ नहीं होगा।

टिप्पणी

मान लीजिए कि $[a] \cap [b] \neq \phi$, तब $x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow x \in [a]$ और $x \in [b]$

$\Rightarrow (x, a) \in R$ और $(x, b) \in R$

$\Rightarrow [x] = [a]$ और $[x] = [b]$

$\Rightarrow [a] = [b]$

$\therefore \quad [a] \cap [b] = \phi$ या $[a] = [b]$

अर्थात, कोई दो समतुल्य वर्ग समरूप या असंयुक्त होते हैं।

उदाहरण 4.32: सिद्ध करें कि एक समतुल्य संबंध एक विभाजन के लिए प्रेरित करता है और एक विभाजन एक समतुल्य संबंध को प्रेरित करता है।

हल : मान लीजिए कि $\{A_i : i \in Z\}$ एक समुच्चय A का एक विभाजन है। A पर एक संबंध R को $(a,b) \in R$ से परिभाषित करें। अगर कुछ i के लिए $a, b \in A_i$ है।

प्रकरण I : R, A पर एक समतुल्य संबंध है।

जब $a \in A$

$\Rightarrow a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow a, a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow (a, a) \in R.$

R, A पर एक प्रतिवर्ती संबंध है।

यदि $(a, b) \in R$, R की परिभाषा के अनुसार,

$a, b \in A_i$ कुछ i के लिए

$\therefore \quad b, a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow \quad (b, a) \in R.$

$\therefore \quad R, A$ पर एक सममित संबंध है।

यदि $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R$ तब $a, b \in A_i$ और $b, c \in A_j$ कुछ i और j के लिए

यहाँ, $b \in A_i$ और $b \in A_j$

$\therefore A_i \cap A_j \neq \phi \Rightarrow A_i = A_j$, अन्यथा $\{A_i\}_{i \in I}$ एक विभाजन नहीं है और इसलिए $a, b, c \in A_i$

$\therefore (a, c) \in R$

$\therefore R,A$ पर एक सकर्मक संबंध है।

R,A पर एक समतुल्य संबंध भी है।

इसके अलावा, हम यह भी दिखा सकते हैं कि $A_i = [a]_{a \in A}$

इसके विपरीत, हम मान सकते हैं कि R, समुच्चय A पर एक समतुल्य संबंध है।

प्रकरण *II*: R,A के लिए एक विभाजन को प्रेरित करता है।

यदि, $x \in A$, $[x] = \{y \in A$ è $(y, x) \in R\}$ और किसी भी $x, y \in A$ के लिए हमारे पास,

$$[x] \cap [y] = \phi \text{ or } [x] = [y]$$

$\therefore\ A = \cup_{x \in A} [x]$ है

अर्थात् $\{[x] : x \in A\}$, A का एक विभाजन है।

फलन

माना कि A तथा B दो समुच्चय हैं। A से B का एक **प्रतिचित्रण** या (**फलन**) f, A से B का संबंध होता है, इस प्रकार कि प्रत्येक $a \in A$ के लिए एक विशिष्ट $b \in B$ विद्यमान होता है। दूसरे शब्दों में, $f A \times B$ का सब समुच्चय होता है इस प्रकार कि $(a, b_1) \in f$ तथा $(a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$ तथा प्रत्येक $a \in A$ के लिए, कुछ $b \in B$ इस प्रकार होता है कि $(a, b) \in f$, A से B का प्रतिचित्रण $f, f : A \to B$ के द्वारा दर्शाया जाता है।

A को f का **डोमेन** (कार्यक्षेत्र) कहते हैं।

B को f का **सहडोमेन** (सहकार्य क्षेत्र) कहते हैं।

f की **प्रतिकृति** उन घटकों $b \in B$ का समुच्चय है इस प्रकार कि कुछ $a \in A$ के लिए $(a, b) \in f$ होता है। इसे हम $Im(f)$ के द्वारा दर्शा सकते हैं।

नोट: 1. यदि $f : A \to f$ तथा $(a, b) \in f$ तो हम $b = f(a)$ लिख सकते हैं तथा b को f के अंतर्गत, a की प्रतिकृति कहते हैं।

2. प्रत्येक घटक की प्रतिकृति विशिष्ट होती है।

उदाहरण 4.33: माना कि, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ तो परिभाषित करें कि $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4)\}$ यदि f, A से B तक का प्रतिचित्रण है। g तथा h को भी परिभाषित कीजिये।

हल: दिया गया है–

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{4, 5\}$

f प्रतिचित्रण है $A \to B$ तक का।

लेकिन $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4), (1, 5)\}$ A से B तक का प्रतिचित्रण नहीं हैं। क्योंकि B में दो घटक 4 तथा 5, घटक $1 \in A$ के लिए निर्धारित हैं।

तथा $h = \{(1, 4), (2, 5)\}$ एक प्रतिचित्रण नहीं है क्योंकि $Dom\,(h) = \{1, 2\} \neq$ A।

वन-टू-वन फलन (One to One Function)

A का प्रतिचित्रण $f : A \to B$ को हम वन-वन कहते हैं यदि $f(a_1) = f(a_2)$ का तात्पर्य $a_1 = a_2$ हो, जहां $a_1 \in A$, $a_2 \in A$। इसे कभी-कभी 'प्रस्थापित प्रतिचित्रण' भी कहते हैं।

दूसरे शब्दों में, एक प्रतिचित्रण $f: A \rightarrow B$ *वन-वन* होता है यदि और यदि केवल $a_1 \neq a_2 \; (a_1 \in A, a_2 \in A)$ तथा $f(a_1) \neq f(a_2)$ अर्थात् A में पृथक घटकों की प्रतिकृतियां, पृथक होती हैं।

टिप्पणी

ऑनटू प्रतिचित्रण

एक प्रतिचित्रण $f: A \rightarrow B$ को ऑनटू तभी कहते हैं, जब दिये गये $b \in B$ में $a \in A$ विद्यमान होता है, इस प्रकार कि $f(a) = b$। इसे कभी-कभी 'सरजेक्टिव प्रतिचित्रण' भी कहते हैं।

उदाहरण 4.34: माना $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5\}$ तो परिभाषित कीजिये, $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$।

हल: तब $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार है कि $f, f(1) = 4$ तथा $f(2) = 4$ अर्थात् f वन-वन फलन नहीं हैं।

लेकिन $1 \neq 2, f$ ऑनटू है क्योंकि 4 तथा 5 की A में पूर्व-प्रतिकृतियां क्रमशः 1 तथा 3 हैं।

उदाहरण 4.35: माना कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ तो परिभाषित कीजिये कि $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$

हल: तब $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार कि A में, f वन-वन एक भिन्न घटक की तरह है तथा जिसकी पृथक प्रतिकृति B में हैं। f ऑनटू नहीं है क्योंकि 7 की A में कोई पूर्व प्रतिकृति नहीं हैं।

उदाहरण 4.36: माना कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ तो परिभाषित कीजिये कि

$f = (1, 6), (2, 4), (3, 5)$

हल: $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार है कि f वन-वन तथा ऑनटू है।

उदाहरण 4.37 : माना कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ तो परिभाषित कीजिये कि

$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$

हल: $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार है कि f ना तो वन-वन है ना ही ऑनटू है।

उदाहरण 4.38: यदि $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार है कि f ऑनटू है तब $Im\,(f) = B$।

हल: परिभाषानुसार, $Im\, f \subseteq B$। माना कि $b \in B$। तब $a \in A$ इस प्रकार विद्यमान होता है कि $f(a) = b$ (जहां f ऑनटू है)।

इसका तात्पर्य यह है,

$b \in Im\,(f)$, इसलिए $B \subseteq Im(f)$

इसलिए, $Im(f) = B$

युग्मक संयोजन

एक समुच्चय S का युग्मक संयोजन एक नियम है, जो S के प्रत्येक घटकों a, b के युग्म के लिए S का विशिष्ट घटक c निर्धारित करता है।

फलन के प्रकार

फलन के प्रकार का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है–

1. **एकमानी तथा बहुमानी फलन**– यदि चर x के प्रत्येक मान के लिए फलन y का केवल एक ही मान निर्धारित होता है तो y का x का एकमानी फलन कहा जाता है लेकिन यदि x के प्रत्येक मान के लिए y के दो या दो से अधि क मान निर्धारित होते हों तो y को x का बहुमानी फलन कहा जाता है। जैसे $y = f(x)\ 2n = 2$, एकमानी फलन है, $y^2 = x$ द्विमानी फलन है।

   $y = Sin_x^1$, जहां $x = \frac{1}{2}$ के लिए y का मान 30^0, 150^0, 390^0 होगा।

2. **समफलन एवं विषम फलन**– यदि फलन $y = f(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने से फलन का मान न बदले तो उसे सममान कहते हैं। उदाहरण के लिए–

   $y = f(x)\ x^2 + 2 - (-x)^2 + 2$ अतः $y = x^2 + 2$ समफलन है।

   यदि फलन $y = (fx)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर फलन का मान बदल जाये तो उसे विषम फलन कहते हैं। जैसे–

   $y = f(x) = 3x + 5 \neq -3x + 5$

   अतः $y = 3x + 5$ विषम फलन है।

3. **अचर फलन**– फलन $y = f(x) = c$ है जहां c एक अचर राशि है को अचर फलन कहते हैं। अचर फलन में x के प्रत्येक मान के लिए y का मान स्थिर रहता है।

4. **परिमेय फलन एवं अपरिमेय फलन**– जब कोई फलन दो बीजीय फलन जिनमें स्वतंत्र चर का घातांक पूर्णांक हो के अनुपात के रूप में लिख जा सके तो उसे परिमेय फलन कहते हैं। यदि ये उसके विपरीत हों तो उसे अपरिमेय फलन कहते हैं। उदाहरण के लिए–

   को परिमेय फलन $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{4x^4 + 3x^2 7}$ को परिमेय फलन कहा जाता है तथा

   $f(x) = \sqrt{5x^2 - 3x + 9}$ को अपरिमेय फलन कहा जाता है।

5. **आवर्ती फलन**– $y = f(x)$ आवृत्ति फलन कहलाता है। यदि x कोई वास्तविक संख्या है जो 0 के बराबर नहीं है अर्थात $k \neq 0$ तो संख्या K को फलन का आवर्त्ति काल कहते हैं।

6. **असतत एवं सतत फलन**– यदि $x = a$ पर फलन $f(x)$ का मान एवं सीमांत मान बराबर हो अर्थात यदि $f(x) = f(a)$ हो तो फलन को $x = a$ पर सतत कहते हैं जो फलन सतत नहीं है, उसे असतत फलन कहा जाता है।

टिप्पणी

7. **स्पष्ट एवं अस्पष्ट फलन**– जब कोई फलन y स्वतंत्र चर x के पदों में स्पष्ट रूप से लिखा हो तो y को x का स्पष्ट फलन कहते हैं जैसे $y = 3x^2 + 5x^2 + 3x + 7$ आदि इसके विपरीत यदि फलन y को स्वतंत्र चर x के पदों में स्पष्ट रूप से नहीं लिखा गया है तो y को x का अस्पष्ट फलन कहते हैं, जैसे– $x^3 + 2xy + y^2 = 0$ है। इस प्रकार के फलन का सामान्य संकेतन $x(x, y) = 0$ है।

8. **परिभाषित एवं अपरिभाषित फलन**– यदि x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $x(x)$ का निश्चित एवं परिमित मान प्राप्त हो जो सर्वथा अर्थपूर्ण हो तो उसे परिभाषित फलन कहते हैं। इसके विपरीत यदि x के किसी वास्तविक मान के लिए $f(x)$ का मान निम्न में से किसी एक रूप में प्राप्त हो तो वह अपरिभाषित मान कहा जाता है। उदाहरण के लिए–

   $y = f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ का मान $x = 3$ के लिए $\dfrac{0}{0}$ के रूप में आ जाता है।

9. **बीजीय फलन एवं अबीजीय फलन**– जो फलन किसी स्वतंत्र चर की विभिन्न सांख्यिक घातों से प्राप्त पदों से बनता है, उसे बीजीय फलन कहते हैं। इसके विपरीत वे फलन जो बीजीय नहीं हैं अबीजीय फलन कहलाते हैं। अबीजीय फलन कई प्रकार के होते हैं– जैसे (क) त्रिकोणमितीय फलन, (ख) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, (ग) लघुगणकीय फलन, (घ) चर घातांकी फलन।

प्रतिलोम फलन

माना f एक फलन है जो $A \to B$ के द्वारा परिभाषित किया जाता है, तब f के लिए **प्रतिलोम फलन,** विपरीत दिशा का फलन होता है। इसे f^{-1} द्वारा दर्शाया जाता है तथा $B \to A$ द्वारा दर्शाया जाता है। प्रतिलोम फलन के गुणों के आधार पर कहा जा सकता है कि एक फलन $A \to B \to A$ (B से A तथा B तक वापस आना) अपने आरंभिक समुच्चय के प्रत्येक घटक को स्वयं को वापस कर देता है। जब एक आगत (इनपुट) X को फलन f में रखा जाता है, तब यह Y निर्गत (आउटपुट) उत्पन्न करता है तथा Y इनपुट को f^{-1} में स्थापित करने पर X आउटपुट प्राप्त होता है। ऐसे फलन **प्रतीत्य** कहलाते हैं। प्रत्येक फलन का प्रतिलोम नहीं होता है। एक फलन के लिए प्रतिलोम होने के लिए आवश्यक है कि वह बाइजैक्टिव हो अर्थात् वन–वन तथा ऑनटू हो।

इसलिए, $f, X \to Y$ का प्रतिचित्रण है तथा $f^{-1}\ Y \to X$ का प्रतिचित्रण हो।

f फलन का डोमेन X इसकी श्रेणी है, जो $Y =$ द्वारा दर्शायी जाती है।

f^{-1} फलन का डोमेन Y है तथा उसकी श्रेणी X = सहडोमेन है, जो f का प्रतिलोम है।

इस प्रकार, दूसरे शब्दों में, एक फलन प्रतीप्य तभी होता है जब इसका प्रतिलोम भी एक फलन हो। इसलिए, एक प्रतिलोमीय संबंध को हर स्थान पर X तथा Y का आपस में फेर बदल करके प्राप्त किया जा सकता है। निम्नलिखित दो परिस्थितियों को संतुष्ट करना आवश्यक है-

- फलन वन-टू-वन हो अर्थात् एक दूसरे में प्रस्थापित हो।
- फलन ऑनटू हो अर्थात् एक सरजक्शन हो, जिसका अर्थ है, सहडोमेन = श्रेणी

प्रारंभिक गणित में हम वास्तविक मूल्यों के फलन को अभिव्यक्त करते हैं तथा इसी कारण डोमेन को हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय की तरह लेते हैं। श्रेणी डोमेन की प्रतिकृति होती है। प्रत्येक फलन का प्रतिलोम नहीं होता है क्योंकि प्रत्येक फलन में वाइजेक्शन नहीं पाया जाता है।

$f(x) = x^2$ के द्वारा परिभाषित फलन, प्रतीप्य नहीं होता है, क्योंकि x के दो मानों के लिए (एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक), फलन का केवल एक मान ही होता है। डोमेन को सीमाबद्ध करके फलन को प्रतीप्य बनाया जा सकता है। इसे नीचे दिये गये उदाहरण द्वारा भली भांति समझ सकते हैं:

संबंध $f(x) = x^2$ में, यदि $f(x)$ को y के द्वारा संकेतित करें तथा इसे $y = x^2$ लिखें, तो हमें y के एक अकेले मान के लिए x के दो मान ज्ञात होंगे। यहां $x =$ sqrt (Y) है तथा यह फलन तभी मान्य होगा जब y के पास केवल धनात्मक मान हो। चुंकि $(-x)^2 = (x)^2$ से यह पता नही चलता है कि कौन सा मान लेना है। ये परिस्थितियां एक प्रतिलोम को नहीं परिभाषित करती हैं। लेकिन यदि हम अपनी परिभाषा को सीमाबद्ध करें और धनात्मक मानों को केवल x के लिए रखें तो फलन प्रतीप्य बन जाता है। इसलिए, इस प्रकार के फलन के लिए, यह संभव है कि केवल आंशिक प्रतिलोम को परिभाषित किया जाये।

त्रिकोणमितीय फलनों में भी, त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोम को परिभाषित करने के लिए डोमेन (कार्यक्षेत्र) को सीमाबद्ध किया जाता है। माना कि $f(x) = \sin x$, इसे साइन फलन कहते हैं, नाकि वन-टू-वन। x के एक से अधिक मानों के लिए, $\sin x$ का एक मान होता है। $\sin x$ के दिये गये मान के लिए, x का मान विशिष्ट नहीं होता तथा फलन वन-टू-वन नहीं होता है। इसलिए $\sin(x)$ का मान बार-बार दोहराया जाता है, इसी कारण इसे आवृत्ति फलन कहते हैं। लेकिन अंतराल $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ से } \frac{\pi}{2} \text{ तक का}\right]$ में $\sin$ फलन वन-टू-वन होता है। इसलिए, यदि डोमेन (कार्यक्षेत्र) सीमाबद्ध हो, तो प्रतिलोम को परिभाषित किया जा सकता है तथा इस प्रकार के प्रतिलोम को आंशिक प्रतिलोम कहते हैं। इसे arcsine or arcsin द्वारा संकेतित करते हैं। सीमाबद्ध डोमेन, *arc*sin का मुख्य मान होता है।

टिप्पणी

फलन	मुख्य मान की श्रेणी
$\sin^{-1}$	$-\pi/2 \le \sin^{-1}(x) \le \pi/2$
$\cos^{-1}$	$0 \le \cos^{-1}(x) \le \pi$
$\tan^{-1}$	$-\pi/2 < \tan^{-1}(x) < \pi/2$
$\cot^{-1}$	$0 < \cot^{-1}(x) < \pi$
$\sec^{-1}$	$0 < \sec^{-1}(x) < \pi$
cosec^{-1}	$-\pi/2 \le \mathrm{cosec}^{-1}(x) < \pi/2$

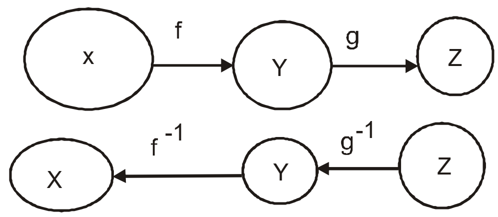
प्रतिलोम फलन को लिखते समय मतभेद उत्पन्न हो सकता है। $f^{-1}(x)$ तथा $f(x)^{-1}$ दोनों पद बराबर नहीं है। पद $f(x)^{-1}, f(x)$ का गुणात्मक प्रतिलोम है जबकि $f^{-1}(x)$ नहीं है। यही स्थिति $(\sin x)^{-1}$ तथा $\sin^{-1} x$ में होती है। इसी कारण से, $\sin^{-1} x$ के स्थान पर arcsin लिखने को वरीयता प्राप्त होती है।

प्रतिलोम फलन के गुण

विशिष्टता: दिये गये फलन f के लिए प्रतिलोम फलन, यदि विद्यमान है, तो वह विशिष्ट होता है।

सममिती: फलन तथा उसका प्रतिलोम, सरूप रेखा पर एक दूसरे से सममितीय होते हैं, जहां फलन $y = x$ होता है।

एक संयोजन का प्रतिलोम



यदि फलन के संयोजन को सूत्र $go\,f$ द्वारा दर्शाया जाता है, तो इसका प्रतिलोम होता है,

$f^{-1} \circ g^{-1}$ तथा गणितीय रूप से $(go\,f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

हम एक उदाहरण लेते हैं, जिसमें एक फलन $f(t) = t + 7$ द्वारा परिभाषित है तथा माना $g(t) = 2t$। तो $f\,og$ फलन है, $f\{g(t)\} = f(2t) = 2t + 7$ का। इसका प्रतिलोम $(t - 7)/2$ होगा। इसके प्रतिलोम को प्राप्त करने के लिए, इसे 7 से घटाये तथा 2 से भाग दें। संयोजन $(g^{-1} \circ f^{-1})(t)$ के द्वारा दिया जायेगा।

$$f^{-1}(t) = t - 7$$

और $g^{-1}(t) = t/2.\ (g^{-1}of^{-1})(t) = g^{-1}(f^{-1}) = g^{-1}(t - 7) = (t - 7)/2$

इससे यह सिद्ध होता है कि, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

स्वयं का प्रतिलोम

माना X एक समुच्चय है तथा $x \in X$ है। इसका सरूपता फलन $id^{-1}(x) = id(x)$ के द्वारा व्याख्यित किया जाता है। इस प्रकार सरूपता फलन स्वयं का एक प्रतिलोम होता है।

प्रतिलोम फलन (Inverse Function)

फलन, जो कि एक अकेली चर राशि द्वारा अभिव्यक्त किया जाता है, उसकी अभिव्यक्ति फलन के साथ होती है जिसमें प्रतिचित्रण $R \to R$ होता है अर्थात् जिसमें डोमेन तथा सह-डोमेन दोनों ही वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होते हैं। ये सूत्र के द्वारा परिभाषित किये जाते हैं जैसे कि $f(x) = (ax + b)^3$ जहां a और b वास्तविक संख्यायें हैं। एक फलन $R \to R$ के पास एक प्रतिलोम तब तक होता है जब तक कि वह वन-टू-वन होता है अर्थात् जब फलन का ग्राफ क्षैतिज रेखा जांच की पुष्टि करता है। क्षैतिज रेखा जांच, X-अक्ष के समान्तर एक लाइन को बना कर की जाती है तथा यह देखा जाता है कि यह लाइन फलन के ग्राफ को केवल एक बिंदु पर ही काटती है। यदि यह ग्राफ को केवल एक बिंदु पर काटती है, तो ही फलन वन-टू-वन होगा अन्यथा नहीं।

नीचे दी गई सारणी कुछ मानक फलनों को उनके प्रतिलोमों के साथ सूचीबद्ध कर रही है।

फलन	प्रतिलोम	टिप्पणी
$f(x)$	$f^{-1}(y)$	
$x + a$	$y - a$	
$a - x$	$a - y$	
mx	y/m	$m \neq 0$
$1/x$	$1/y$	$x, y \neq 0$
x^2		$x, y \geq 0$ सिर्फ
x^3		x तथा y पर कोई प्रतिबंध नहीं
x^p	$y^{1/p}$	$x, y \geq 0$ जबकि $p \neq 0$
e^x	$\ln y$	$y > 0$
a^x	$\log_a y$	$y > 0$ and $a > 0$

दिये गये फलन के लिए प्रतिलोम ज्ञात करना

f^{-1} को ज्ञात करने के लिए, यदि यह विद्यमान है, तो x के लिए समीकरण $y = f(x)$ को हल करना चाहिये, जैसा कि यहां बताया गया है। माना कि f एक फलन है जैसा कि नीचे दिया गया है।

अतः $f(x) = (2x + 8)^3$

सर्वप्रथम, हम x के लिए समीकरण $y = (2x + 8)^3$ को हल करते हैं।

$$y = (2x + 8)^3$$

$$\sqrt[3]{y} = 2x + 8$$

$$\sqrt[3]{y} - 8 = 2x$$

$$\frac{\sqrt[3]{y} - 8}{2} = x.$$

इसलिए प्रतिलोम f^{-1} सूत्र के द्वारा दिया जाता है, $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y-8}}{2}$ चर राशि को y से x में बदलने पर, $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x-8}}{2}$ हमें प्राप्त होता है।

टिप्पणी

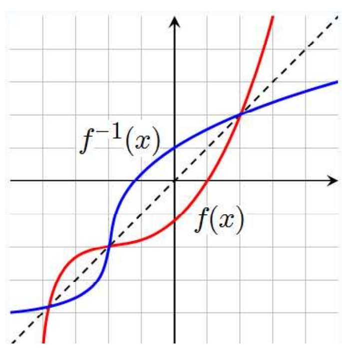
अतः एक फलन के प्रतिलोम को प्राप्त करने के लिए, निम्न चरणों का पालन करें–

1. $f(x)$ के लिए y को रखें तथा x को y के फलन के लिए अभिव्यक्त करें अर्थात् $x = f(y)$।
2. $f^{-1}(x)$ को प्राप्त करने के लिए चर राशियों को आपस में बदलें अर्थात् y को x के स्थान पर तथा x को y के स्थान पर रखें।

ये सारे दृष्टांत हैं जब फलन वन-टू-वन होता है। जबकि उसका प्रतिलोम, सूत्र के द्वारा नहीं दिया जा सकता है। इसकी व्याख्या के लिए, एक फलन $f(x) = x + \sin x$ लेते हैं। यह वन-टू-वन है, लेकिन x के लिए इसे बीजगणितीय रूप से हल नहीं किया जा सकता है अतः इसके लिए कोई सरल सूत्र नहीं होता है।

प्रतिलोम का आलेख (Inverse Graph)

यदि कोई फलन f है और इसका प्रतिलोम f^{-1} है तो, इन दोनों फलनों का ग्राफ समरूपीय होता है केवल x तथा y की भूमिकायें विपरीत होती हैं। f के ग्राफ से f^{-1} का ग्राफ x तथा y अक्षों को आपस में बदल कर प्राप्त किया जा सकता है। अतः एक फलन का प्रतिलोम, उस फलन की शीशे में प्रतिकृति होती है जब $y = x$ होता है तथा यह एक सरूपता फलन होता है।



इस ग्राफ में क्रमशः $y = f(x)$ तथा $y = f^{-1}(x)$ हैं। बिंदुओं द्वारा बनायी गयी रेखा $y = x$ है।

गणितीय फलन (Mathematics Function)

गणितीय फलन वह फलन है जो राशियों के बीच निर्भरता की व्याख्या करता है। जिसमें एक राशि ज्ञात होती है और उसे स्वतंत्र चर राशि कहते हैं तथा जो फलन का तर्क या इसका आगत (इनपुट) होती है जबकि दूसरी राशि उत्पन्न की जाती है तथा उसे निर्भर चर राशि, फलन का मान या आउटपुट (निर्गत) कहते हैं। फलन को विभिन्न तरीकों से

परिभाषित कर सकते हैं, सूत्रों का प्रयोग करके, ग्राफ के द्वारा, कलन गणित द्वारा इसका परिकलन करके या इसके गुणों की व्याख्या करके। एक फलन की इसके अन्य फलनों के साथ संबंधों की व्याख्या इसके मानों की सारणी निर्दिष्ट करके या सूत्रों द्वारा भी की जा सकती है। उदाहरण के लिए, फलनों के सभी गणितीय संयोजन में यदि z, y का फलन है और y, x का फलन है तो z, x का भी फलन होगा। हम संयुक्त फलन को, प्रथम फलन के आउटपुट को द्वितीय फलन के इनपुट की तरह प्रयोग करके प्राप्त कर सकते हैं। बीजगणित में, फलन को बीजगणितीय संक्रियाओं के पदों में दर्शाया जाता है। गणितीय फलन अक्षरों के प्रयोग द्वारा संकेतित किये जाते हैं तथा x इनपुट के साथ f फलन के आउटपुट के लिए $f(x)$ होगी। जब निश्चित इनपुट के लिए फलन की व्याख्या की जाती है तो फलन के सभी स्वीकार योग्य इनपुटों का संचय इसका डोमेन (कार्यक्षेत्र) कहलाता है जबकि सभी आउटपुटों के परिणात्मक समुच्चय को फलन की प्रतिकृति कहते हैं।

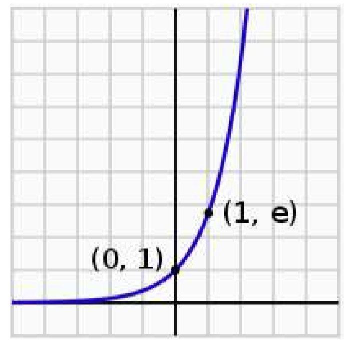
घातांकी फलन (Exponents Function)

यह फलन गणित में प्राथमिक रूप से महत्त्वपूर्ण स्थान रखती है तथा विज्ञान तथा तकनीकी की विभिन्न शाखाओं और कलन विधि में इसका अधिक अनुप्रयोग पाया जाता है। x का घातांकी फलन $exp\ (x)$ या e^x लिखा जाता है। जहां e एक नियतांक है तथा एक अयुक्तियुक्त संख्या है। इसे *Euler* (इयूलर) ने 2.718281828 के अनुमानित किया था तथा इसे उसी के नाम से जानते हैं और इसे 'इयूलर्स संख्या' कहते हैं, जो प्राकृतिक संख्या का आधार भी है। एक घातांकी फलन, एक लघुगुणकीय फलन का विपरीत होता है और कभी-कभी इसे **प्रतिलघुगुणक** (Antilog) कहते हैं। एक घातांकी फलन का प्रतिलोम एक लघुगुणकीय फलन होता है।

एक घातांकी फलन धीमी गति से आगे बढ़ता है और $x < 0$ के लिए लगभग सीधा होता है, लेकिन $x > 0$ के मान के लिए यह तेजी से आगे बढ़ता है। इसका ऑर्डिनेट मान उस बिंदु पर वक्र की ढाल होती है। इसी कारण एक घातांकी फलन को ऋणात्मक मान के साथ घातांकी क्षय तथा धनात्मक मान के साथ घातांकी विकास कहते हैं। जब विकास बहुत तेजी से होता है तो इसे घातांकी विकास कहते हैं, उदाहरणार्थ, जनसंख्या का विकास।

घातांकी फलन लगभग सीधा होता है। x के ऋणात्मक मानों के लिए धीमी गति से बढ़ता है तथा x के धनात्मक मानों के लिए तेजी से आगे बढ़ता है तथा जब x, 0 के बराबर हो तो यह 1 के बराबर होता है। इसका y मान हमेशा उस बिंदु पर ढाल के बराबर होता है।

टिप्पणी



एक घातांकी फलन का ग्राफ सदैव भुज के ऊपर स्थित होता है, क्योंकि e^x हमेशा धनात्मक होता है। यह X-अक्ष के धनात्मक भाग की तरफ बढ़ता है। X-अक्ष के ऋणात्मक भाग की तरफ यह घटता है पर कभी भी X- अक्ष को नहीं छूता है। घातांकी फलन e^x को अपरिमित शृंखलाओं तक विस्तारित किया जा सकता है जिसे घात शृंखला करते हैं :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

यह फलन एक सीमा के रूप में भी दर्शाया जा सकता है जैसा कि नीचे दिया गया है।

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ or } e^x = \lim_{n\to\infty}(1+nx)^{\frac{1}{n}}$$

एक घातांकी फलन के अभियंताओं के कारण, घातांकी फलन गणित, तकनीकी तथा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में प्रधान रूप से प्रयुक्त होता है, जो कि इस प्रकार है:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- किसी बिंदु पर e^X के ग्राफ की ढाल, $x = e^x$ होती है।
- किसी बिंदु पर फलन के बढ़ने की दर x के संदर्भ में $= e^x$ होती है।
- क्योंकि $y^1 = y$ होता है, यह फलन अंतरीय समीकरण $y^1 - y = 0$ का हल होता है।

उच्चतर गणितीय अनुप्रयोगों में अंतरीय समीकरण बहुत अधिक होते हैं, जिनके हल घातांकी फलन द्वारा ज्ञात किये जाते हैं। लैप्लास (Laplace) समीकरण तथा सरल आवर्तगति के समीकरण इनके उदाहरण हैं। सरल आवर्त गति के समीकरण भी घातांकी फलन देते हैं।

कुछ घातांकी फलन अन्य आधारों के साथ होते हैं, जैसा कि नीचे एक फलन $y = a^x$ के लिये दिया गया है:

$$\frac{d}{dx}a^x = (\ln a)\, a^x$$

प्रमाण

$$y = a^x$$
$$1\text{n}y = 1\text{n}a^x$$
$$1\text{n}y = x\ 1\text{n}a$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1\text{n}\ a$$
$$\frac{dy}{dx} = (1\text{n}\ a)\ y = (\ln a)\ a^x$$

यह ये प्रदर्शित करता है कि घातांकी फलन का व्युत्पन्न, स्वयं का नियत गुणक होता है। यदि एक चर राशि के बदलने की दर उस चर राशि के स्वयं के अनुक्रमानुपाती होती है तो उसका परिणाम एक घातांकी फलन होता है। जनसंख्या वृद्धि, रेडियो एक्टिव क्षय, संतत यौगिक ब्याज, इत्यादि व्यावहारिक जीवन में घातांकी फलन के उदाहरण हैं। अंतरीय फलन $f(x)$ के लिए, चेन नियम के अनुसार–

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f^1\ (x)\ e^{f(x)}$$

जटिल समतल पर घातांकी फलन

वास्तविक संख्याओं की तरह जटिल/मिश्रित राशियों के संदर्भ में भी घातांकी फलन को परिभाषित किया जा सकता है। इनमें से कुछ परिभाषायें, वास्तविक मानों के घातांकी फलन से मिलती जुलती हैं। इनमें घात श्रेणियों की परिभाषाओं को प्रयोग किया जा सकता है तथा वास्तविक मान, जटिल मानों द्वारा बदले जाते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है–

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

इनके व्युत्पन्न, वास्तविक राशियों की तरह जटिल राशियों को सहेजते हैं तथा इसे इस प्रकार लिखते हैं–

$\frac{d}{dz}e^z = e^z$ जटिल समतल में समाहित है।

हम संकल्पनाओं को वास्तविक घातांकी फलन से जटिल फलन तक नीचे दिये गये के अनुसार $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ लिख कर विस्तारित कर सकते हैं। इसमें वास्तविक भाग e^x तथा e^{iy} $\cos(y) + i\sin(y)$ हैं। इसलिए इसकी उपेक्षा किये बिना हम वास्तविक परिभाषा का प्रयोग करते हैं।

अब हम लिख सकते हैं**:**

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

यहां a और b वास्तविक मान हैं।

उदाहरण 4.39: नीचे दिए गये फलनों को देखते हुए, वो फलन ज्ञात कीजिये जो घातांकी नहीं है–

टिप्पणी

(*i*) $f(x) = 3e^{-2x}$

(*ii*) $g(x) = 2^{x/2}$

(*iii*) $h(x) = x^{3/2}$

(*iv*) $g(x) = 15/7^x$

(*v*) $p(x) = x^e$

हलः यहां $h(x)$ तथा $p(x)$ घातांकी फलन नहीं है। फलन के घातांकी होने के लिए, स्वतंत्र चर राशि को घातांकी होना चाहिये।

उदाहरण 4.40: $f(x) = kb^x$ द्वारा परिभाषित का डोमेन तथा फलन की श्रेणी ज्ञात करें। इस फलन के ग्राफ की प्रकृति की विवेचना करें। $f(x)$ कैसे बदलता है जब (*i*) x अपरिमित हो जाता है तथा (*ii*) x ऋणात्मक अपरिमित हो जाता है? क्या यहां कोई क्षैतिज *asymptotes* है? इसके क्षैजित *asymptote* के बारे में बतायें।

हलः इस फलन का डोमेन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, जबकि इसकी श्रेणी सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। जब $b > 1$ हो तो फलन $f(x)$ बढ़ता है तथा ग्राफ दायीं ओर बढ़ता है। (*i*) जब x अपरिमित होता है तो $f(x)$ बढ़ता है तथा (*ii*) जब x फलन के अपरिमित के ऋणात्मक भाग की ओर घटता है तो $f(x)$ भी घटता है और शून्य हो जाता है। $y = 0$ द्वारा दी गई लाइन जो x -अक्ष है, वह क्षैतिज *asymptote* होती है।

$b < 1$ के लिए स्थिति इसके विपरीत होती है। यह x के बढ़ते हुए मानों के लिए घटती है तथा घटते हुए मानों के लिए बढ़ती है। यह ग्राफ के बायीं ओर अधिक तथा दायीं ओर कम होती है।

उदाहरण 4.41: एक माध्यम में बैक्टीरिया घातांकी रूप से पैदा होते हैं। यह देखा गया है कि 2 : 00 p.m. पर बैक्टीरिया की संख्या 80 थी जो 6 : 00 p.m. पर 500 हो गयी थी। बैक्टीरिया की वृद्धि फलन $f(t) = k.e^{at}$ द्वारा दर्शायी जाती है। 10 : 00 p.m. पर बैक्टीरिया की संख्या ज्ञात करें।

हलः किसी भी समय t पर बैक्टीरिया की वृद्धि $f(t) = 80\ e^{0.4581t}$ द्वारा दी जाती है। इसलिए 10 : 00 p.m. बैक्टीरिया की संख्या 3125 होगी।

उदाहरण 4.42: एक यूरोपीयन देश ने 1990 में पैसिफिक सागर के एक द्वीप पर न्यूक्लिअर टैस्ट किया। विस्फोट के ठीक बाद, द्वीप पर स्ट्रांटियम-90, इंसानी वास स्थान के लिए निर्धारित सुरक्षित स्तर का 100 गुना पाया गया। यदि स्ट्रांटियम-90 का अर्धजीवनकाल 28 वर्ष है तो उन वर्षों की संख्या ज्ञात करें जिसके पश्चात् वह द्वीप दोबारा रहने योग्य हो जायेगा।

हलः द्वीप लगभग 186 वर्षों बाद रहने योग्य हो जायेगा जो कि वर्ष 2176 है।

लघुगुणकीय फलन (Antilogy Function)

गणित में लघुगुणकीय फलन अत्यधिक महत्वपूर्ण होता है। यदि $y = a^x$ हो तो x, a आधार पर y का लघुगुणक होगा; जिसे $x = \log_a y$ द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरणार्थ $100 = 10^2$ इसलिए $2 = \log_{10}100$ है तो 2 यह बताता है कि 100 प्राप्त करने के लिए 10 कितनी बार स्वयं से गुणा किया गया है। इसलिए $10 \times 10 = 100$। 16 का लघुगुणक 2 आधार पर 4 होता है क्योंकि 16 पाने के लिए 4 स्वयं से गुणा होता है। इसे हम 2 को स्वयं से 4 बार गुणा करके भी प्राप्त कर सकते हैं। अतः, यह स्पष्ट है कि $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$। क्योंकि $10^2 = 100$ इसलिए लघुगुणक $_{10}100 = 2$ या $\log_{10}100$ तथा $2^4 = 16$ इसलिए लघुगुणक $_{2}16 = 4$ या $\log_2 16 = 4$

यदि हम x का लघुगुणक b आधार पर ज्ञात करें तो हम इसे $\log_b(x)$ लिखते हैं। यदि आधार समझा जा चुका है तो हम इसे सामान्यतः $\log(x)$ भी लिखते हैं।

यदि $x = b^y$ तो $y = \log_b(x)$।

लघुगुणक $\log(x.y) = \log x + \log y$ सूत्र द्वारा गुणा के कठिन प्रश्नों को जोड़ में बदल देते हैं। इस क्रिया द्वारा जटिल गणनायें आसान हो जाती हैं और संकल्पनाओं के विकास में अधिक योगदान देती है। लघुगुणक सारणी जटिल गणनाओं को आसान कर देती हैं। e के आधार के साथ लघुगुणक प्राकृतिक तथा 10 के आधार के साथ सामान्य होता है। फलन विधि में प्राकृतिक लघुगुणक का प्रयोग करते हैं। द्विपदीय गणित में '2' आधार की तरह प्रयोग होता है जो संख्या या करैक्टर को प्रस्तुत करने में संकेत की तरह प्रयुक्त होता है।

लघुगुणक के गुण

$x > 0$ तथा $b > 0$ (लेकिन $\neq 1$) के लिए, $\log_b(x)$ एक विशिष्ट वास्तविक संख्या है। जबकि आधार 1 को छोड़कर कोई भी धनात्मक संख्या होती है, जैसे 10, e या 2। लघुगुणक वास्तविक तथा जटिल संख्याओं दोनों के लिए व्याख्यित किये जाते हैं।

सबसे महत्वपूर्ण गुण लघुगुणक का, गुणा को योग में बदलना है। हम जानते हैं–

$b^x \times b^y = b^{x+y}$ दोनों तरफ का लघुगुणक लेने पर,

$b^x \times b^y = b^{x+y}$

लघुगुणक लेने के द्वारा–

$\log_b(b^x \times b^y) = \log_b(b^{x+y}) = x + y = \log_b(b^x) \times \log_b(b^y)$

उदाहरण के लिए,

$$4 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \log_2(4) = 2,$$

$$8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad \log^2(8) = 3,$$

$$\log_2(32) = \log_2(4 \times 8) = \log_2(4) + \log_2(8) = 2 + 3 = 5.$$

सरूपता के प्रयोग द्वारा एक संबंधित गुण घातांकों को कम करके गुणा करना भी है।

$$c = b^{\log_b(c)}$$

टिप्पणी

यदि c, p घातांक का अनुसरण करता है तो,

$$c^p = \left(b^{\log_b(c)}\right)^p = b^{p\log_b(c)},$$

या लघुगुणक लेने पर,

$$\log_b(c^p) = p\log_b(c).$$

अतः घात p तक एक संख्या को बढ़ाने के लिए, संख्या का लघुगुणक ज्ञात करके उसे p से गुणा करें। तब इस परिणाम का घातांकी मान इसका प्रतिलोम या अलघुगुणक होगा अर्थात्,

घातों की संख्या $= b^{\text{गुणन}}$

लघुगुणक के प्रयोग द्वारा लम्बी अंकीय गणनायें आसान हो जाती हैं, इसके लिए हम लघुगुणक सारणी या स्लाइड नियमों का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 4.43: $\log_3 27$ क्या है?

हलः 3 क्योंकि $27 = 3^3$

उदाहरण 4.44: $\log_5 1/25$ क्या है?

हलः -2 क्योंकि $1/25 = 1/(5^2) = 5^{-2}$

लघुगुणगीय सर्वसमिकायें

$$\log(cd) = \log(c) + \log(d)$$
$$\log(c/d) = \log(c) - \log(d)$$
$$\log(c^d) = d\log(c)$$
$$\log\left(\sqrt[d]{c}\right) = \frac{\log(c)}{d}$$

फलन की तरह लघुगुणक

लघुगुणक के विकास के पूर्व चरणों में इसे धनात्मक वास्तविक संख्याओं के ज्यामितीय क्रमों की तुलना में संख्याओं के अंकीय क्रम में लेते थे। परन्तु अब इसे विश्लेषणात्मक क्रिया की तरह जटिल संख्याओं के संदर्भ में भी लेते हैं।

लघुगुणक पद $\log_b(x)$ के रूप में होता है। आधार b स्थायी तथा x स्वतंत्र चर होता है। लेकिन आधार वास्तविक धनात्मक संख्या होनी चाहिये संख्या '।' को छोड़कर। इसलिए आधार b के साथ लघुगुणकीय फलन, एक घातांकी फलन का प्रतिलोम b^x के रूप में होता है। लघुगुणकीय फलन के स्थान पर सामान्यतः लघुगुणक का प्रयोग किया जाता है।

'अपनी प्रगति जांचिए'

8. 'समुच्चय' शब्द को परिभाषित करें।
9. उपसमुच्चय से क्या तात्पर्य है?
10. संघ समुच्चय को संक्षिप्त में वर्णित करें।
11. गणित के संदर्भ में संबंध का वर्णन करें।

4.5 निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry) के गणित की सबसे महत्वपूर्ण अवधारणाओं में से एक माना गया है, क्योंकि ज्यामिति और बीजगणित के बीच के वक्र और रेखा से जुड़े आलेख के जरिए संबंध का वर्णन करता है हालांकि यह बीजगणित से ज्यामिति के विशेष पहलू को महत्व देता है। जिससे समस्याओं को हल करने में मदद मिलती है निर्देशांक ज्यामिति बिंदुओं की स्थिति को एक क्रमबद्ध समूह की संख्या का उपयोग करके वर्णित करना सिखाता है जिसमें समीकरण तथा महत्वपूर्ण सूत्र शमिल है।

4.5.1 निर्देशांक ज्यामिति की मूल अवधारणाएँ एवं उपयोग

परिभाषाः निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जिनमें समतल बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़ से परिभाषित किया जाता है। जिन संख्याओं के जोड़ों से उस बिन्दु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है वे दो बिन्दु निर्देशांक (Point Coordinate) कहलाते हैं।

दूसरे शब्दों में, ज्यामिति शाखाओं का वह समूह है, जहाँ निर्देशांक का प्रयोग करके एक बिन्दु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है, वह निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है।

यह वर्णित है, कि एक तल पर किसी बिन्दु की स्थिति को निर्धारित करने के लिए, हमें निर्देशांक अक्षों के एक युग्म की आवश्यकता होती है किसी बिन्दु y-अक्ष से दूरी उस बिन्दु का x-निर्देशांक या भुज (Abscissa) कहलाती है। किसी बिन्दु की x-अक्ष से दूरी, उस बिन्दु का y-निर्देशांक या कोटि (Ordinate) कहलाती है। x-अक्ष पर स्थिति किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, o) के रूप में होते हैं तथा y-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (o, y) के रूप में होते है।

निर्देशांक ज्यामिति के उपयोग (Uses of Coordinate Geometry)

निर्देशांक ज्यामिति में हम नित्नलिखित तथ्यों का प्रयोग करके गणित में यह उपयोगी साबित कर सकते हैं–

- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का पता लगा सकते हैं।
- एक रेखा खंड का मध्य बिन्दु एवं उसके समीकरण की गणना कर सकते हैं।
- एक रेखा समानान्तर है या लंबवत् है इसका निर्धारण किया जा सकता है।
- दूरी संबंधी प्रश्नों के हल की गणना में महत्वपूर्ण उपयोगी साबित है।
- निर्देशांक ज्यामिति ने विमीय संरचना को एक व्यापकता प्रदान की है जो समष्टि में दिशात्मक उपयोगी साबित है।
- निर्देशांक ज्यामिति ने संख्याओं का व्यापीकरण किया जिससे काल्पनिक संख्याओं का आविर्भाव हुआ।

- इसका उपयोग समधातीय निर्देशांक, त्रिकोणीय निर्देशांक स्पर्शीय निर्देशांक इत्यादि में महत्वपूर्ण साबित है।

4.5.2 दूरी एवं विभाजन सूत्र

इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिंदुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

चालः किसी पिण्ड द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी को उसकी चाल कहते हैं।

चाल = दूरी/समय

दूसरी = चाल × समय

समय = दूरी × चाल

मात्रक (Units)

समय : सेकेण्ड, मिनट, घंटा

दूरी : मीटर, किलोमीटर

चाल : किमी/घंटा, मीटर/सेकेण्ड

इकाइयों का रूपांतरण

- किमी / घंटा = 5/8 मीटर / सेकण्ड
- मीटर/ सेकेण्ड = 18/5 किमी / घंटा
- किमी / घंटा = 5/8 मील / घंटा
- मील / घंटा = 22/5 फुट / सेकेण्ड

उदाहरण 4.45: एक स्कूटर सवार 45 किमी/घंटा की चाल से 4 मिनट में कितनी दूरी तय कर लेगा?

हलः स्कूटर सवार की चाल = 45

$$= \frac{45 \times 1000}{60} = 750 \frac{\text{मीटर}}{\text{मिनट}}$$

$\therefore$ 4 मिनटर में नय की गई दूरी $= 4 \times 750 = 3000$ मीटर

उदाहरण 4.46: एक 300 मीटर लंबे ट्रेन की चाल 10m/s है। इसे एक इलेक्ट्रिक पोल को पार करने में कितना समय लगेगा?

हलः $\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

यहाँ ट्रेन की लंबाई की दूरी होगी जो 3000 मीटर है।

$\therefore$ समय $= \frac{300}{10} = 30$ सेकेण्ड

टिप्पणी

उदाहरण 4.47: एक व्यक्ति स्कूटर से एक निश्चित दूरी तय करता है। यदि वह 3 किमी/घंटा तेज रफ़्तार से जाता है तो उसे 20 मिनट कम समय लगता है। यदि 2 किमी/घंटा धीमी रफ़्तार जाता है तो उसे 20 मिनट ज्यादा समय लगता है। वास्तविक चाल ज्ञात करें।

हल: चाल $= \dfrac{2 \times (3 \times 2)}{2 - 2} = 12\,\text{km/Hr.}$

उदाहरण 4.48: एक लड़का 10 किमी/घंआ की चाल से चलकर अपने स्कूल 12 मिनट देर से पहुँचता है। अलगी बार वह 15 किमी/घंटा की चाल से चलकर अपने स्कूल 7 मिनट देर से पहुँचता है। उसके घर से स्कूल तक की दूसरी ज्ञात कीजिए।

हल: दोनों समय के बीच का अंतर $= 12 - 7 = 5$ मिनट $= \dfrac{5}{60} = \dfrac{1}{12}$ wr.

अभीष्ट दूरी $= \dfrac{\text{L}5 \times 10}{15 - 10} \times \dfrac{1}{12}$

$= \dfrac{\text{L}50}{5} \times \dfrac{1}{12}$ = 2.5 km

विभाजन सूत्र: (Section formula)

- माना दो बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2)
- **अन्त: विभाजन–**

$$P = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

- **बाह्य विभाजन–**

$$P = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

नोट: मध्य बिन्दु के लिए

निर्देशांक $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 y_2}{2} \right)$

उदाहरण 4.49: निम्न बिन्दुओं के मध्य बिंदु ज्ञान कीजिए:

(2, –3) तथा (4, 7)

हल: मध्य बिन्दु $= \left(\dfrac{2 + 4}{2}, \dfrac{-3 + 7}{2} \right)$

= (3, 2)

टिप्पणी

उदाहरण 4.50: अन्त: विभाजन बिन्दु को ज्ञात करें-

(3, -2), (4, 1); 4:2

हल: बिन्दु $= \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$$= \left(\frac{4 \times 4 + 2(3)}{4 + 2}, \frac{4 \times 1 + 2 \times (-2)}{4 + 2}\right)$$

$$= \left(\frac{16 + 6}{6}, \frac{4 - 4}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{20}{6}, \frac{0}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{10}{3}, 0\right)$$

उदाहरण 4.51: बाह्य विभाजन बिन्दु ज्ञात करें-

(1, 3); (5, 9); 1:2

हल: बिन्दु $= \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$

$$= \left(\frac{1 \times 5 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 9 - 2 \times 3}{1 - 2}\right)$$

$$= \left(\frac{5 - 2}{-1}, \frac{9 - 6}{-1}\right)$$

$$= (-3, -3)$$

प्रश्नावली

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य है और कौन से असत्य ज्ञात कीजिए-

(a) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

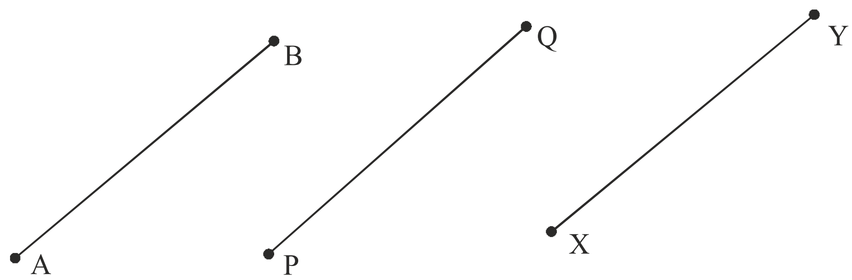
(b) दो भिन्न बिंदुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ है।

(c) एक सात रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

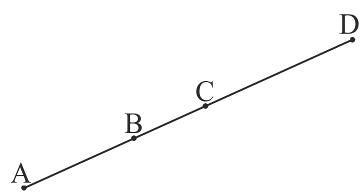
(d) यदि दो वृत बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती है।

(e) यदि AB = PQ और PQ = CY है, तो AB = XY होगा।

टिप्पणी



प्रश्न 2. दी गई आकृति में यदि AC = BD है, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।



प्रश्न 3. 300 लंबे ट्रेन की चाल 10 m/s है। इसे 50 मीटर लंबे प्लेटफार्म को पार करने में कितना समय लगेगा।

प्रश्न 4. एक बस लुधियाना से 5 बजे सुबह निकलती है और दिल्ली दोपहर 12 बजे पहुँचती है। एक दूसरी बस दिल्ली से 8 बजे सुबह निकलती है और लुधियाना शाम को 3 बजे पहुँती है। किस समय दोनों बसें एक दूसरे से मिलेंगी?

प्रश्न 5. एक लड़का अपने सामान्य चाल के 3/5 चाल से 14 मिनट देर से स्कूल पहुँचता हैं इसके स्वकूल पहुँचने का सामान्य समय ज्ञात करें।

प्रश्न 6. निम्न बिंदुओं के मध्य बिन्दु ज्ञात करें-

$(1, 4), \quad (2, 1)$

मध्य बिंदु $= \left(\frac{1+2}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

प्रश्न 7. अन्त: विभाजन बिन्दु को ज्ञात करे

$(-4, 6)\ (3, -5);\ 3 : 2$

प्रश्न 8. निम्नलिखित व्यंजकों में; वे पद छाँटिए जो अचर नहीं है। उनके संख्यात्मक गुणांक भी लिखिए।

(i) $13 - y + 5y^2$

(ii) $4p^2q - 3\,pq^2 + 5$

प्रश्न 9. (a) निम्नलिखित व्यंजकों में x के क्या गुणांक हैं?

(i) $y^2\,x - y$

(ii) $2z - 5xz$

(b) निम्नलिखित व्यंजकों में y के क्या गुणांक हैं?

(i) $yz^2 + 5$

(ii) $my + m$

टिप्पणी

प्रश्न 10. निम्नलिखित युग्मों में कौन-कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन-कौन से युग्म असमान पदों के हैं।

(i) $3xy, 3k$

(ii) $6xy^2, 9x^2 y$

(iii) $pq^2, -4pq^2$

प्रश्न 11. जोड़िए-

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, 3 - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9nn - 8, 2mn - 3$

प्रश्न 12. घटाइए-

(i) y^2 में से $-5\ y^2$

(ii) $-12\ xy$ में से $6\ xy$

(iii) $(a + b)$ में से $(a - b)$

प्रश्न 13. निम्नलिखित व्यंजकों का मान ज्ञात कीजिए जब $n = -2$

(i) $5n - 2$

(ii) $5x^2 + 5x - 2$

(iii) $x^3 + 5x^2 + 5x - 2$

'अपनी प्रगति जांचिए'

12. गणित में निर्देशांक ज्यामिति का महत्व बताएं।
13. निर्देशांक ज्यामिति को परिभाषित करें।
14. चाल को परिभाषित करें।

4.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद की घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।
2. शून्येतद (शून्य को छोड़कर) संख्या (अचर) को शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद कहते हैं। अर्थात $p\,(x) = 0$ जहाँ पर $a \neq 0$ एक शून्य घात वाला बहुपद है क्योंकि $p\,(x) = a$ को $p\,(x) = ax^{\circ}$ लिखा जा सकता है।
3. एक वास्तविक बहुपद एक बहुपद है जिसमें $f(x)$ के सभी गुणांक वास्तविक होते हैं।

टिप्पणी

4. एक समीकरण जिसे हम $ax + by = 0,\ a \neq 0$ और a, b वास्तविक संख्याओं के रूप ले सके, एक चर में रैखिक समीकरण कहलाता है।
5. चर का अर्थ है, ऐसी कोई वस्तु जो विचरण कर, अर्थात् बदल सकती है।
6. गणित में द्विघात समीकरण द्वितीय घात का एक बहुतपद समीकरण होता है जिसका मानक समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ होता है।
7. किसी द्विघात समीकरण के दो हल होते हैं जिन्हें द्विघात समीकरण के मूल या हल कहते हैं, जिन्हें समीकरण $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, के द्वारा दिया जाता है, जहाँ चिन्ह $\pm$ यह दर्शाता है कि

   $$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ और } x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

   समीकरणों के प्रयुक्त दो हल हैं।
8. समुच्चय सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को कहते हैं परिभाषा के रूप में वस्तुओं के उस समूह अथवा समाहार को समुच्चय कहते हैं, जिसमें सम्मिलित प्रत्येक वस्तु किसी विशेष गुण को संतुष्ट करती हो जिसके आधार पर स्पष्ट रूप से यह बताया जा सके कि अमुक वस्तु उस संग्रह से सम्मिलित है या नहीं।
9. यदि किसी समुच्चय के सभी अवयव किसी अन्य समुच्चयों के भी सदस्य है तो यह कहा जाता है कि A, B का उपसमुच्चय है। जैसे, $A = \{p, \mathrm{q}, \mathrm{r}\}$ एवं $B = \{p, q, r, s\}$ हो तो हम लिखते हैं कि $A \subset B$ प्रत्येक समुच्य के दो उपसमुच्चय अवश्य होते हैं, एक तो स्वयं वही समुच्चय अपने आप का उपसमुच्चय होता है, दूसरा शून्य समुच्चय सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय है।
10. यदि किन्हीं दो समुच्चयों A और B का समुच्चय उन सभी अवयवों x का समुच्चय है जो x के सभी समुच्चय A और B से कम से कम संबंधित है इसे $A \cup B$ द्वारा दर्शाया जाता है।
11. संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या युग्म जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है।
12. निर्देशांक ज्यामिति के गणित की सबसे महत्वपूर्ण अवधारणाओं में से एक माना गया है, क्योंकि ज्यामिति और बीजगणित के बीच के वक्र और रेखा से जुड़े आलेख के जरिए संबंध का वर्णन करता है हालांकि यह बीजगणित से ज्यामिति के विशेष पहलू को महत्व देता है। जिससे समस्याओं को हल करने में मदद मिलती है निर्देशांक ज्यामिति बिंदुओं की स्थिति को एक क्रमबद्ध समूह की

टिप्पणी

संख्या का उपयोग करके वर्णित करना सिखाता है जिसमें समीकरण तथा महत्वपूर्ण सूत्र शमिल है।

13. निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जिनमें समतल बिन्दुओं की स्थिति को दो संख्याओं के जोड़ से परिभाषित किया जाता है। जिन संख्याओं के जोड़ों से उस बिन्दु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है वे दो बिन्दु निर्देशांक कहलाते हैं।
14. किसी पिण्ड द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी को उसकी चाल कहते हैं।

4.7 सारांश

- जब कोई समीकरण भिन्नों या भिन्नात्मक सूचकांकों से मुक्त होता है तो समीकरण में होने वाली चर x की उच्चतम शक्ति को, दिए गए समीकरण की डिग्री के रूप में जाना जाता है। रेखीय, द्विघात, घन और द्विवर्गीय समीकरण क्रमशः 1 डिग्री, 2 डिग्री, 3 डिग्री और 4 डिग्री के होते हैं।
- यदि nवीं डिग्री समीकरण में चर की सभी घातें 0 से n तक होती हैं, तो इसे पूर्ण कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $a_0x^3 + a_1x^2 - a_2x + a_3 = 0$, 3वीं डिग्री का पूर्ण समीकरण है।
- एक समीकरण जिसे हम $ax + by = 0,\ a + 0$ और a, b वास्तविक संख्याओं के रूप ले सके, एक चर में रैखिक समीकरण कहलाता है।
- कोई समीकरण जिसे हम $ax + by = c = 0$, जहाँ $a, 0$ ओर c वास्तविक संख्याएँ हैं और, $a, b \neq 0$, के रूप में लिख सके, दो चर में रैखिक समीकरण कहलाता है।
- एक समीकरण में समता और समिका का चिन्ह सदैव होता है। समता का चिन्ह यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाई ओर के व्यंजक [बायाँ पक्ष] का मान चिह्न के दाई आरे के व्यंजक [दायाँ पक्ष] के मान के बराबर है।
- समीकरण का प्रत्येक हल रेखा पर स्थित एक बिन्दु को दर्शाता है। इस प्रकार दो चर में एक रैखिक समीकरण का आलेखीय रूप एक रेखा होगी जिसका प्रत्येक बिन्दु उसका हल होगा।
- बहुपद असमानता एक गणितीय संक्रिया है जो एक बहुपद व्यंजक को दूसरे से छोटा या बड़ा प्रदर्शित करता है। हम एक साथ बहुपद असमानओं को हल करने के लिए साइन चार्ट का प्रयोग कर सकते हैं। आलेख बहुपद असमानताओं के समाधान के लिए एक दृश्य प्रदान करने में सहायक होते हैं।
- गणित में द्विघात समीकरण द्वितीय घात का एक बहुतपद समीकरण होता है जिसका मानक समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ होता है।
- समुच्चय गणित में सबसे मौलिक अवधारणाओं में से एक है। एक समुच्चय एक संपूर्ण के रूप में मानी जाने वाली विशिष्ट वस्तु का एक संग्रह है, इस प्रकार हम

टिप्पणी

कह सकते हैं, कि समुच्चय वस्तुओं का एक ऐसा संग्रह जिससे किसी वस्तु को दिए जाने पर यह निर्धारित किया जा सकता है, कि वह वस्तु दिए गए संग्रह से संबंधित है या नहीं है। समुच्चय के समाहरण को अवयव कहते हैं। समुच्चय को निरूपित करने के लिए हम कोष्ठक का प्रयोग करते हैं।

- प्रथम श्रेणी के तर्क से सुव्यवस्थित किया हुआ समुच्चय सिद्धांत आज गणित का आधारभूत तंत्र है। समुच्चय सिद्धांत की भाषा गणित के लगभग सभी वस्तुओं को परिभाषित करने के काम आती है। समुच्चय सिद्धांत के आरंभिक अवधारणा इतने सरल है कि इन्हें प्राथमिक विद्यालयों के पाठ्यक्रम में भी पढ़ाया जा सकता है।
- किसी समस्या में विद्यमान सभी उपदानों को लेने पर जो समुच्चय बनता है उसे उस समस्या के सापेक्ष सर्वसमावेशी समुच्चय कहते हैं। यदि हम किसी समुच्चय की बात करते हैं, तो हम एक निश्चित समुच्चय U का उपसमुच्चय मानेंगे। इस नियत समुच्चय U को सर्वसमावेशी या सार्वत्रिक समुच्चय कहा जाता है।
- समुच्चयों का बीजगणित समुच्चय संक्रिया और समुच्चय संबंधों के मौलिक गुणों का विकास है। ये गुण समुच्चय की मौलिक प्रकृति में अंतदृष्टि प्रदान करते हैं।
- बीजगणित में वास्तविक संख्या सरल रेखा के अनुदिश किसी राशि को प्रयुक्त करने वाला मान है। वास्तविक संख्याओं में सभी परिमेय संख्या जैसेः 5 एवं भिन्नात्मक संख्याएँ जैसे 4 ⁄ 3 और सभी अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Number) शामिल हैं।
- संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या युग्म जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है।
- एक द्विआधारी संबंधों वाले n अवयवों के एक समुच्चय A को m अवयवों के एक समुच्चय B के साथ M_R में पदों को चिह्नित करने $n \times m$ सरणी के रूप में दर्शाया जाता है। जो स्थितियां जोड़ों के अनुरूप होती हैं, वे सभी जगह 1 और 0 के रूप मे R मे होती हैं।
- गणित में, द्विआधारी संबंधों को समुच्चय A पर एक संबंध के रूप में परिभाषित किया जाता है जो कि समुच्चय A के अवयकों के क्रमित युग्मों का संग्रह है। इसे कार्टेशियन उत्पाद $A^2 = A \times A$ के उप– समुच्चय के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है। मूल रूप से, एक द्विआधारी संबंध दो समुच्चयों A और B के बीच $A \times B$ का उप– समुच्चय होता है।

टिप्पणी

- एक समुच्चय A पर एक संबंध R को समतुल्य संबंध कहा जाता है। यदि R प्रतिवर्ती, सममित और सकर्मक हो। तुल्यता संबंधों के उदाहरण मे एक सतह में समांतर रेखाओं का एक समुच्चय है।
- एक द्विआधारी संबंध जो मूल रूप से सकर्मक है और आगे यह या तो प्रतिवर्ती, और प्रतिसममित या अप्रतिवर्त और असममित हो सकता है।
- जब कोई फलन दो बीजीय फलन जिनमें स्वतंत्र चर का घातांक पूर्णांक हो के अनुपात के रूप में लिख जा सके तो उसे परिमेय फलन कहते हैं। यदि ये उसके विपरीत हों तो उसे अपरिमेय फलन कहते हैं।
- ज्यामिति शाखाओं का वह समूह है, जहाँ निर्देशांक का प्रयोग करके एक बिन्दु की स्थिति को परिभाषित किया जाता है, वह निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है।

4.8 मुख्य शब्दावली

- **वास्तविक बहुपदः** एक बहुपद जिसके सभी गुणांक वास्तविक बहुपद होते हैं।
- **शून्य बहुपदः** एक बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य होते हैं।
- **रेखीय समीकरणः** गणित में रेखीय समीकरण एक ऐसा समीकरण होता है जिसमें चर की अधिकतम घात एक होती है, इन समीकरणों को रेखीय या रैखिक समीकरण कहते हैं।
- **समुच्चयः** समुच्चय सुपरिभाषित समूह अथवा संग्रह को कहते हैं।
- **बीजीय फलनः** जो फलन किसी स्वतंत्र चर की विभिन्न सांख्यिक घातों से प्राप्त पदों से बनता है, उसे बीजीय फलन कहते हैं।
- **चालः** किसी पिण्ड द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी उसकी चाल कहते हैं।
- **द्विपदः** एक व्यंजक जिसमें केवल दो पद हो और वे असमान पद हो वह द्विपद कहलाता है।

4.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. शिक्षणशास्त्र में बीजगणित के महत्व को संक्षेप में बताएं।
2. बहुपद को परिभाषित करें।
3. बहुपद की मूल अवधारणाओं के बारे में टिप्पणी दें।
4. रैखीय समीकरण क्या है?
5. एक चर रैखिक समीकरण को समझाएँ।
6. द्विघात समीकरण से क्या अभिप्राय है?

7. समुच्चय को परिभाषित करें।
8. उपसमुच्चय के बारे में संक्षेप में बताएँ।
9. गणित में 'संबंध' शब्द को बताएँ।
10. द्विआधारी संबंध से क्या अभिप्राय है?
11. फलन को परिभाषित करें।
12. एक फलन की संकल्पना कैसे की जाती है?
13. निर्देशांक ज्यामिति क्या है?
14. दूरी सूत्र की गणना करें।
15. विभाजन सूत्र किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. बहुपद क्या है? इसके समीकरण तथा मूलभूत तत्यों को विस्तार से समझाएँ।
2. बहुपद पर संक्रियाओं की गणनाओं का विस्तार से वर्णन करें।
3. रैखीय समीकरण, असमानता तथा द्विघात समीकरण की उदाहरण सहित गणना करें।
4. समुच्चय, उपसमुच्चय तथा सार्वत्रिक समुच्चय को विस्तार से समझाएँ।
5. बीजगणित में समुच्यय तथावास्तविक संख्याओं के नियमों की तुलना उदाहरण सहित करें।
6. संबंध को परिभाषित कीजिए तथा उदाहरण देकर समुच्चय संबंधों की व्याख्या करें।
7. फलन क्या है? फलन के विभिन्न प्रकारों का विस्तार से उल्लेख कीजिए।
8. निर्देशांक ज्यामिति की अवधारणा का अनुप्रयोगों को उदाहरण सहित समझाएँ तथा दूरी एवं विभाजन सूत्र का विश्लेषण करें।

4.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Anderson, Lorin W. and David R. Krathwohl. 2001. *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: David McKay Company.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition.

Charles, H. and F. Lynwood Wren Butler. 1941. *The Teaching of Secondary Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Krathwohl, David R., Benjamin S. Bloom and Bertram B. Masia. 1964. *Taxonomy of Educational Objectives*, Handbook II. New York: David McKay Company.

Howson, Geoffrey, Christine Keitel and Jeremy Kilpatrick. 1981. *Curriculum Development in Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Dhand, Harry. 1990. *Techniques of Teaching*. New Delhi: Ashish Publishing House.

Mangal, Dr. S. K. 1997. *Teaching of Science*. New Delhi: Arya Book Depot.

Sidhu, Kulbir Singh. 1995. *Teaching of Mathematics*. New Delhi: Sterling Publishers.

Servais, W. and T. Varga. 1971. *Teaching School Mathematics*. United Kingdom: Penguin Random House Company.