

21118

**B. Sc. (Final Year) Examination, 2021**

**(New Course)**

**MATHEMATICS**

*Paper : First*

**(Linear Algebra and Numerical Analysis)**

*Time Allowed : Three hours*

*Maximum Marks : 40*

*नोट : सभी खण्ड निर्देशानुसार हल कीजिए। सभी के अंक खण्डों के समक्ष अंकित हैं।*

*Note: Attempt all section as directed. Marks are indicate his section.*

**खण्ड-अ**

**Section-A**

**( लघु उत्तरीय प्रश्न )**

**5×3=15**

**(Short Answer Type Questions)**

*नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 3 अंकों का है।*

*Note: Attempt all five questions. Each question carries 3 marks.*

1. सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि  $V(F)$  के एक अतिरिक्त उपसमुच्चय  $W$  को  $V$  का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है—

$$a, b \in F \text{ तथा } \alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$$

Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $W$  of a vector space  $V(F)$  to be a vector subspace of  $V$  is  $a, b \in F$  and  $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$ .

**अथवा**

**Or**

दो उपसमष्टियों का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट होते हैं।

The union of two subspaces is a subspace if and only if one is contained in the other.

2. दर्शाइये कि समाकारिता की अष्टि  $V(F)$  की उपसमष्टि होती है।

Show that the Kernel of homomorphism is a subspace of  $V(F)$ .

अथवा

Or

दर्शाइये कि रूपान्तरण  $T:V_2(R) \rightarrow V_3(R)$  जो परिभाषित है

$$T(a, b) = (a + b, a - b, b), \quad \forall a, b \in R$$

$V_2(R)$  से  $V_3(R)$  में एक रैखिक रूपान्तरण है।  $T$  का परास, जाति शून्य समष्टि और शून्यता ज्ञात कीजिए।

Show that the transformation  $T:V_2(R) \rightarrow V_3(R)$  defined by  $T(a, b) = (a + b, a - b, b)$  is a linear transformation from  $V_2(R)$  into  $V_3(R)$ . Find the range, rank, null space and nullity of  $T$ .

3. परिभाषित कीजिए—

(a) आन्तर गुणन समष्टि

(b) लाम्बिक सदिश

(c) लाम्बिक प्रसामान्य समुच्चय

Define :

(a) Inner product space

(b) Orthogonal vector

(c) Orthonormal set

अथवा

Or

कॉशी-स्वार्ट्ज असमिका लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

Write and prove Cauchy-Swartz inequality.

4. पाँच चरणों में समविभाजन विधि के प्रयोग से समीकरण  $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$  का एक वास्तविक मूल ज्ञात कीजिए।

Find a real root of equation  $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ , using bisection method in five stages.

अथवा

Or

यदि  $x$  तथा  $y$  के मान निम्न सारणी में दिये गये हैं—

$x$  :      5      6      9      11

$y$  :      12      13      14      16

$y$  का मान ज्ञात कीजिए जबकि  $x = 10$  (लाग्रान्ज सूत्र के प्रयोग से)

If the values of  $x$  and  $y$  are given in following table :

$x$  :      5      6      9      11

$y$  :      12      13      14      16

Find the value of  $y$ , when  $x = 10$  by Lagrange's interpolation formula.

5. समाकलन  $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$  का मूल्यांकन सिम्पसन 1/3 नियम से कीजिए।

Evaluate  $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$  by Simpson's 1/3 rule.

अथवा

Or

रुंगे-कुट्टा चतुर्थ कोटि विधि के प्रयोग से  $y$  का एक सन्निकटन मान  $x=0.2$  के लिए  $0.1$  के चरणों में ज्ञात कीजिए

यदि  $\frac{dy}{dx} = x + y^2$  दिया गया है  $y=1$  जब  $x=0$

Apply Runge-Kutta fourth order method to find an approximate value of  $y$  for  $x=0.2$  in steps of  $0.1$ ,

if  $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ , given that  $y=1$  when  $x=0$ .

खण्ड-स

Section-C

( दीर्घ उत्तरीय प्रश्न )

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

**नोट :** सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

**Note:** Attempt all **five** questions. Each question carries 5 marks.

6. सदिश समष्टि समाकारिता का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिये व सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem of vector space homorphism.

अथवा

Or

अस्तित्व प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove existence theorem.

7. आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$  के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए।

Determine the eigen values and corresponding Eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

अथवा

Or

दर्शाइये कि निम्न आव्यूह  $A$  विकर्णीय है—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Show that following matrix  $A$  is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. परिमित विमीय समष्टि के लिए बेसल की असमिका लिखिए व सिद्ध कीजिए।

Write and prove Bessel's inequality.

अथवा

Or

ग्राम-स्मिट लाम्बिकता विधि समझाइये।

Explain Gram-Schmidt Orthogonalization process.

9. न्यूटन विभाजित अन्तर अन्तर्वेशन सूत्र द्वारा निम्नलिखित सारणी से  $f(9)$  का मान ज्ञात कीजिए—

$$\begin{array}{l} x : 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \\ f(x) : 150 \quad 392 \quad 1452 \quad 2366 \quad 5202 \end{array}$$

Evaluate  $f(9)$ , by using Newton's divided difference formula :

$$\begin{array}{l} x : 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \\ f(x) : 150 \quad 392 \quad 1452 \quad 2366 \quad 5202 \end{array}$$

अथवा

Or

गॉउस-लिजान्ड्रे के तीन बिन्दु सूत्र के प्रयोग से समाकल  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  का मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate the integral  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  using Gauss-Legendre three point formula.

10. गॉस विलोपन विधि द्वारा निम्न समीकरणों के निकाय को हल कीजिए—

$$2x - y + 3z = 9, \quad x + y + z = 6, \quad x - y + z = 2$$

Solve the following system of equations by Gauss elimination method.

$$2x - y + 3z = 9, \quad x + y + z = 6, \quad x - y + z = 2$$

अथवा

Or

जैकोबी पुनरावृत्ति विधि द्वारा निम्न समीकरणों को हल कीजिए—

$$20x + y - 2z = 17, \quad 3x + 20y - z = -18, \quad 2x - 3y + 20z = 25$$

Solve the following equations by Jacobi iterative method :

$$20x + y - 2z = 17, \quad 3x + 20y - z = -18, \quad 2x - 3y + 20z = 25$$