

21105

B. Sc. (Second Year) Examination, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper : Third

(Differential Equations)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : सभी खण्ड निर्देशानुसार हल कीजिए। अंकों का विभाजन खण्डों के साथ दिया जा रहा है।

Note: Attempt all as directed. Distribution of marks is given with sections.

खण्ड-अ

Section-A

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

5×1=5

(Objective Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note: Attempt all five questions. Each question carries 1 mark.

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए—

Choose the correct answer :

(i) बेसल अवकल समीकरण है

(a) $x^2y'' + ny = 0$

(b) $x^2y'' + xy' + ny = 0$

(c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

(d) $xy' + ny = 0$

The Bessel's Differential Equations is :

(a) $x^2y'' + ny = 0$

(b) $x^2y'' + xy' + ny = 0$

(c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

(d) $xy' + ny = 0$

(ii) $L(\cos at)$ का मान है

(a) $\frac{a}{p^2 + a^2}$

(b) $\frac{p}{p^2 + a^2}$

(c) $\frac{a}{p^2 - a^2}$

(d) $\frac{p}{p^2 - a^2}$

The value of $L(\cos at)$ is :

(a) $\frac{a}{p^2 + a^2}$

(b) $\frac{p}{p^2 + a^2}$

(c) $\frac{a}{p^2 - a^2}$

(d) $\frac{p}{p^2 - a^2}$

(iii) $L^{-1}\left\{\frac{1}{2p-5}\right\}$ का मान है

(a) $e^{5/2}$

(b) $\frac{1}{2}e^{5t}$

(c) $\frac{1}{2}e^{(5/2)t}$

(d) 1

The value of $L^{-1}\left\{\frac{1}{2p-5}\right\}$ is :

(a) $e^{5/2}$

(b) $\frac{1}{2}e^{5t}$

(c) $\frac{1}{2}e^{(5/2)t}$

(d) 1

(iv) $z = ax + by + ab$ का आंशिक अवकल समीकरण है—

(a) $z = p^2 + q^2$

(b) $z = px + qy$

(c) $z = px + qy + pq$

(d) $z = px + qy + p^2 + q^2$

The partial differential equation of $z = ax + by + ab$ is :

(a) $z = p^2 + q^2$

(b) $z = px + qy$

(c) $z = px + qy + pq$

(d) $z = px + qy + p^2 + q^2$

(v) आंशिक अवकल समीकरण $r = 6x$ का हल है—

(a) $z = x^2 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(b) $z = x^3 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(c) $z = x^4 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(d) $z = x^3 + x^2\phi_1(y) + x\phi_2(y)$

The solution of partial differential equation $r = 6x$ is :

(a) $z = x^2 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(b) $z = x^3 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(c) $z = x^4 + x\phi_1(y) + \phi_2(y)$

(d) $z = x^3 + x^2\phi_1(y) + x\phi_2(y)$

खण्ड-ब

Section-B

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×2=10

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

Note: Attempt all five questions. Each question carries 2 marks.

2. सिद्ध कीजिए कि—

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \sin x$$

Show that :

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)} \sin x$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$(2n+1)P_n = P_{n+1}^1 - P_{n-1}^1$$

Show that :

$$(2n+1)P_n = P_{n+1}^1 - P_{n-1}^1$$

3. फलन $F(t) = (\sin t - \cos t)^2$ का लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए।

Find the Laplace transformation of $F(t) = (\sin t - \cos t)^2$.

अथवा

Or

$L\{t e^{-t} \sin^2 t\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $L\{t e^{-t} \sin^2 t\}$.

4. $L^{-1}\left(\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $L^{-1}\left(\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right)$.

अथवा

Or

संवलन प्रमेय के उपयोग से $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+3)(p-1)}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Use of convolution theorem to find $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+3)(p-1)}\right\}$.

5. यदि $z = f(x+ay) + \phi(x-ay)$ तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

If $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$ then prove that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

अथवा

Or

समीकरण को हल कीजिए—

$$yzp + zxp = xy$$

Solve :

$$yzp + zxp = xy$$

6. हल कीजिए—

$$s = 2x + y$$

Solve :

$$s = 2x + y$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$t = \sin xy$$

Solve :

$$t = \sin xy$$

खण्ड-स

Section-C

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note: Attempt all **five** questions. Each question carries 5 marks.

7. सिद्ध कीजिए कि—

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Prove that :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

अथवा

Or

$f(x) = 35x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 15x + 3$ को लीजेंडर बहुपद के पदों में व्यक्त कीजिए।

Express $f(x) = 35x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 15x + 3$ in terms of Legendre's polynomials.

8. $L\{e^{-t}(3\sin 2t - 5\cos 2t)\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $L\{e^{-t}(3\sin 2t - 5\cos 2t)\}$.

अथवा

Or

दर्शाइये—

$$\int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t dt = \frac{3}{50}$$

Prove that :

$$\int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t dt = \frac{3}{50}$$

9. हैविसाइड विस्तार सूत्र का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए—

$$L^{-1} \left\{ \frac{2p^2 + 5p - 4}{p^3 - p^2 - 2p} \right\}$$

Using Heaviside expansion formula to find :

$$L^{-1} \left\{ \frac{2p^2 + 5p - 4}{p^3 - p^2 - 2p} \right\}$$

अथवा

Or

समीकरण $(D^2 + 6D + 9)y = \sin t$ को हल कीजिए जहाँ $y(0) = 1, y'(0) = 0$

Solve $(D^2 + 6D + 9)y = \sin t$ if $y(0) = 1, y'(0) = 0$

10. समीकरण $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$ को हल कीजिए।

Solve $p + 3q = 5z + \tan(y - 3x)$.

अथवा

Or

चारपिट विधि से हल कीजिए—

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

Solve by Charpit's method :

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

11. निम्न समीकरण वर्गीकृत कर हल कीजिए—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Classify and solve the equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

अथवा

Or

समीकरण $(D^2 + 3D D' + 2D'^2)z = x + y$ को हल कीजिए।

Solve :

$$(D^2 + 3D D' + 2D'^2)z = x + y$$