

21104

B. Sc. (Second Year) Examination, 2021

(New Course)

MATHEMATICS

Paper : Second

(Advanced Calculus)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 40

नोट : इस प्रश्न पत्र में **तीन** खण्ड हैं। प्रत्येक खण्ड से सभी प्रश्न अनिवार्य होंगे।

Note: There are **three** section in the questions paper. All questions from each section will be compulsory.

खण्ड-‘अ’

Section-‘A’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

5×1=5

(Short Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Note: Attempt all questions. Each question carries 1 mark.

1. सही उत्तर चुनिए—

Choose the correct answer :

(i) अनुक्रम $\{ S_n \}_{n=1}^{\infty}$ जहाँ $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^m}$ है—

(a) अपसारी

(b) अभिसारी

(c) दोलनीय

(d) इनमें से कोई नहीं

Sequence $\{ S_n \}_{n=1}^{\infty}$, where $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^m}$, is :

(a) Divergent

(b) Convergent

(c) Oscillatory

(d) None of these

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log |x|$ का मान होगा—

(a) 0

(b) ∞

(c) $-\infty$

(d) इनमें से कोई नहीं

$\lim_{x \rightarrow \infty} \log |x|$ of value is :

(a) 0

(b) ∞

(c) $-\infty$

(d) None of these

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} =$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) अस्तित्व में नहीं है

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} =$

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) Does not exist

(iv) सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ जहाँ $a + b = c$ (अचर) का अन्वालोप होगा—

(a) $x + y = c$

(b) $x^2 + y^2 = c^2$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$

(d) इनमें से कोई नहीं

The envelope of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, when $a + b = c$ is given by :

(a) $x + y = c$

(b) $x^2 + y^2 = c^2$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$

(d) None of these

(v) $\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy =$

(a) 1/4

(b) 1/2

(c) 1

(d) 0

$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy =$

(a) 1/4

(b) 1/2

(c) 1

(d) 0

खण्ड-‘ब’
Section-‘B’

(लघु उत्तरीय प्रश्न)
(Short Answer Type Questions)

5×2=10

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

Note: Attempt all questions. Each question carries 2 marks.

2. यदि वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम $\{ S_n \}_{n=1}^{\infty}$ की सीमा L हो, तब सीमा L अद्वितीय होगी।

If the sequence of real numbers $\{ S_n \}_{n=1}^{\infty}$ has its limit L , then limit L is unique.

अथवा

Or

निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

3. दर्शाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ पर संतत है, परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x=0$ but not differentiable at $x=0$.

अथवा

Or

अवकल का प्रथम मध्यमान प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove First Mean Value theorem of Differential Calculus.

4. माना $f: R^2 \rightarrow R$ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तब ज्ञात कीजिए $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

Let $f: R^2 \rightarrow R$ be defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then find $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

अथवा

Or

यदि $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$, तो दर्शाइए कि $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3$

If $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$ then show that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3$.

5. फलन $u = x^3 + y^3 - 3axy$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के मानों की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum or minimum values of the functions.

$$u = x^3 + y^3 - 3axy$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{1/2} = \sqrt{\pi}$$

Prove that :

$$\sqrt{1/2} = \sqrt{\pi}$$

6. $\iint_R dx dy$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ R दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का धन चतुर्थांश है।।

Compute the value of $\iint_R dx \, dy$ when R is the positive quadrant of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

अथवा

Or

मान ज्ञात कीजिए $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x \, dz \, dx \, dy$

Evaluate $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x \, dz \, dx \, dy$

खण्ड-‘स’

Section-‘C’

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

5×5=25

(Long Answer Type Questions)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

Note: Attempt all questions. Each question carries 5 marks.

7. वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है, परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है। सिद्ध कीजिए।

Prove that every convergent sequence is bounded. However converse is not true in general.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि अनन्त श्रेणी

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

अभिसारी होती है, यदि $P > 1$ और यह अपसारी होती है, यदि $P = 1$ या $P \leq 1$

The finite series

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \text{ is}$$

convergent if $P > 1$ and divergent if $P \leq 1$.

8. डारबू का प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Darbox's theorem.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x, y)$ बिन्दु $(2, 3)$ पर संतत है।

Prove that function $f(x, y)$ is continuous at $(2, 3)$.

9. यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ then prove that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}.$$

अथवा

Or

यदि $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, तो दर्शाइए कि—

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$$

If $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, then show that :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

10. किसी त्रिभुज ABC में $\cos A \cos B \cos C$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

In any triangle ABC , find the maximum value of $\cos A \cos B \cos C$.

अथवा

Or

दर्शाइए—

$$\beta(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}, \quad (m, n > 0)$$

To show that :

$$\beta(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}, \quad (m, n > 0).$$

11. परवलय $y = x^2$ तथा $y = x$ रेखा से घिरे हुए क्षेत्र में की गणना $\iint_R xy(x+y) dx dy$ कीजिए।

Evaluate $\iint_R xy(x+y) dx dy$ over the area between the parabola $y = x^2$ and the line $y = x$.

अथवा

Or

समाकल $\int_0^\infty \int_0^x xe^{-x^2/y} dx dy$ का मूल्यांकन उसके क्रम को परिवर्तित कर के कीजिए।

Change the order of Integration $\int_0^\infty \int_0^x xe^{-x^2/y} dx dy$ and evaluate.