

बी.एस.सी. द्वितीय वर्ष
भौतिकशास्त्र, द्वितीय प्रश्नपत्र

स्थिर विद्युतिकी,
स्थिर चुम्बकत्व और
विद्युत गतिकी
(Electrostatics, Magneto
Statics and
Electrodynamics)



मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY-BHOPAL

Reviewer Committee

1. Dr. Seema Hardikar
Professor,
Govt. SNG (Autonomous)
PG College, Bhopal (MP).
2. Dr. S.K. Vijay
Professor,
Govt. MLB College Bhopal (MP).
3. Dr. B.K. Sinha
Professor,
IEHE, Bhopal (MP).

Advisory Committee

1. Dr. Jayant Sonwalkar
Hon'ble Vice Chancellor,
Madhya Pradesh Bhoj (Open) University,
Bhopal (MP).
2. Dr. L.S. Solanki
Registrar,
Madhya Pradesh Bhoj (Open) University,
Bhopal (MP).
3. Dr. Neelam Wasnik
Assistant Professor,
Madhya Pradesh Bhoj (Open) University,
Bhopal.
4. Dr. Seema Hardikar
Professor,
Govt. SNG (Autonomous) PG College,
Bhopal (MP).
5. Dr. S.K. Vijay
Professor,
Govt. MLB College,
Bhopal (MP).
6. Dr. B.K. Sinha
Professor,
IEHE, Bhopal (MP).

COURSE WRITER

Dr. R.S. Chandok, Principal, Sri Guru Tegh Bahadur Khalsa College, Jabalpur (MP), India.

Copyright © Reserved, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

All rights reserved. No part of this publication which is material protected by this copyright notice may be reproduced or transmitted or utilized or stored in any form or by any means now known or hereinafter invented, electronic, digital or mechanical, including photocopying, scanning, recording or by any information storage or retrieval system, without prior written permission from the Registrar, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal.

Information contained in this book has been published by VIKAS® Publishing House Pvt. Ltd. (Developed by Himalaya Publishing House Pvt. Ltd.) and has been obtained by its Authors from sources believed to be reliable and are correct to the best of their knowledge. However, the Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal, Publisher and its Authors shall in no event be liable for any errors, omissions or damages arising out of use of this information and specifically disclaim any implied warranties or merchantability or fitness for any particular use.

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020



Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

स्थिर विद्युतिकी, स्थिर चुम्बकत्व और विद्युत गतिकी

Syllabi	Mapping in Book
<p>इकाई-1</p> <p>निर्वात में कूलम्ब का नियम – सदिश रूप में, विद्युत क्षेत्र E की स्थिर आवेश के सरल द्विध्रुव व चतुर्ध्रुव आघूर्ण वितरण हेतु गणना। स्थिर विद्युत क्षेत्र में किसी आवेश पर किया गया कार्य एवं उसे रेखिक समाकलन रूप में लिखना, स्थिर विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति। विद्युत क्षेत्र और विभव में संबंध ($E = -\nabla V$)। एक समान विद्युतीय क्षेत्र में द्विध्रुव का आघूर्ण व इसकी उर्जा। विद्युत क्षेत्र का फ्लक्स, गॉस का नियम व इसका सममित आवेश वितरण हेतु E के परिकलन में उपयोग। संधारित्र, समरूप विद्युत क्षेत्र में गोलकार चालक, किसी पृथ्वीकृत अनन्त चालक के सम्मुख बिन्दु पर आवेश। पराविद्युत, पराविद्युत की उपस्थिति में समानांतर प्लेट संधारित्र, परावैद्युतांक, ध्रुवण व ध्रुवण सदिश P, विस्थापन सदिश D. P एवं E में संबंध, क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण की आणविक व्याख्या।</p>	<p>इकाई 1 : स्थिर विद्युतिकी (पृष्ठ 3–133)</p>
<p>इकाई-2</p> <p>किसी गतिमान आवेश पर बल: लारेंज बल समीकरण एवं B की परिभाषा, सीधे धारावाही चालक को चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर बल, धारा लूप पर बल आघूर्ण, चुम्बकीय बल आघूर्ण, कोणीय संवेग व जाइरोमैग्नेटिक अनुपात, बायोट-सेवार्ट का नियम, सरल ज्यामितीय परिस्थितियों में H की गणना (परनलिका एवं एंकर वलय) एम्पीयर का परिपथीय नियम, $\nabla \times B = \mu_0 J$ व $\nabla \cdot B = 0$। चुम्बकीय द्विध्रुव द्वारा बद्ध व मुक्त धाराएँ, चुम्बकन सदिश (M); B, H एवं M में संबंध, असमरूप से चुम्बकित पदार्थ हेतु $\nabla \times M = J$ का निगमन।</p>	<p>इकाई 2 : स्थिर चुम्बकत्व (पृष्ठ 134–213)</p>
<p>इकाई-3</p> <p>स्थाई धारा, धारा घनत्व J, अस्थाई धारा समीकरण एवं सातत्य समीकरण, किरचॉफ के नियम व मल्टीलूप परिपथ विश्लेषण, LR व CR परिपथ में धारा की वृद्धि व क्षय, क्षय-नियतांक, LCR परिपथ। AC परिपथ, सन्निश्र संख्याएँ और उनके अनुप्रयोग द्वारा AC परिपथ में सन्निश्र प्रतिबाधा, रीएक्टेंस, श्रेणी एवं समानांतर अनुनाद को हल करना। Q गुणांक, AC परिपथ द्वारा शक्ति का उपयोग, शक्ति गुणांक Y एवं Δ नेटवर्क व विद्युत शक्ति का प्रेषण। जैविक निकायों में विद्युत का अवलोकन, जैव विद्युत की उत्पत्ति।</p>	<p>इकाई 3 : विद्युत धारा व जैव विद्युत (पृष्ठ 214–341)</p>
<p>इकाई-4</p> <p>(वहाँ उपकरणों के वर्णन की अपेक्षा उनके यांत्रिकीय पक्ष पर अधिक ध्यान दिया जाना चाहिए।)</p> <p>त्वरण क्षेत्र के रूप में E, इलेक्ट्रान गन, विसर्जन नलिका, रेखीय त्वरक, E विक्षेपक क्षेत्र के रूप में CRO, CRO की सुग्राहिता। अनुप्रस्थ B क्षेत्र; 180° विचलन, द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ या वेग सिलेक्टर, नाभिकीय कणों के संसूचन हेतु कणों के पथों की वक्रता, साइक्लोट्रॉन (उर्जा मापन) का सिद्धान्त व कार्य पद्धति, समानान्तर व लम्बवत E व B क्षेत्र, धन-किरण के परवलय, आइसोटोप की खोज, द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ के मूलतत्व, चुम्बकीय फोकस का सिद्धान्त (लैस)।</p>	<p>इकाई 4 : विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति (पृष्ठ 342–423)</p>

इकाई-5

विद्युत चुम्बकीय प्रेरण, फ़ैराडे के नियम, विद्युत वाहक बल, फ़ैराडे नियम के अवकलन व समाकलन रूप, स्व: व अन्योन्य प्रेरण, ट्रान्सफॉर्मर, स्थिर विद्युत क्षेत्र में उर्जा, मैक्सवेल की विस्थापन धारा घनत्व की सकल्पना मैक्सवेल की समीकरणों की स्थापना, विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र का उर्जा घनत्व। पॉयंटिंग सदिश, विद्युत चुम्बकीय तरंग समीकरण, निर्वात एवं परावैद्युत माध्यम में समतल विद्युत चुम्बकीय तरंग, परावैद्युत की समतल सतह से परावर्तन, फ़्रेनेल के नियम, परावर्तन से ध्रुवण व पूर्ण आंतरिक परावर्तन, चालक माध्यम में तरंग, आयनमण्डल के द्वारा परावर्तन व अपवर्तन।

इकाई 5 : विद्युत-गतिकी
(पृष्ठ 424-518)

विषय-सूची

परिचय	1-2
इकाई 1 स्थिर विद्युतिकी	3-133
1.0 परिचय	
1.1 उद्देश्य	
1.2 कूलम्ब का नियम (वेक्टर रूप)	
1.3 विद्युत-क्षेत्र	
1.4 विद्युत आवेश के कारण विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता	
1.4.1 बिन्दु आवेश से उत्पन्न वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता	
1.4.2 आवेश के सतत वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता	
1.5 वैद्युत द्विध्रुव	
1.5.1 वैद्युत द्विध्रुव के कारण वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता	
1.6 चतुर्ध्रुव क्षेत्र	
1.7 वैद्युत द्विध्रुव पर किया गया कार्य रेखीय समाकलन के रूप में	
1.8 स्थैत विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति	
1.9 विद्युत विभव	
1.10 बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विभव	
1.11 एकसमान आवेशित चकती के कारण इसकी अक्ष पर विद्युत विभव तथा विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता	
1.12 असमान आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव	
1.13 समविभवी पृष्ठ	
1.14 विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव में सम्बन्ध	
1.15 एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे वैद्युत द्विध्रुव पर बलयुग्म	
1.16 विद्युत फ्लक्स	
1.17 गॉस प्रमेय	
1.18 गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग	
1.19 एकसमान आवेशित चालक गोले (गोलीय खोल) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव	
1.20 एक समान आवेशित कुचालक ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव	
1.21 अनन्त लम्बाई के एकसमान आवेशित बेलनाकार चालक के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव	
1.22 अनन्त समतल, आवेशित चालक के कारण इसके समीपस्थ बिन्दु पर विद्युत तीव्रता तथा विद्युत विभव	
1.23 एकसमान आवेशित अनन्त कुचालक चादर के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव	
1.24 किसी असमान गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव	
1.25 पॉयसन तथा लाप्लास के समीकरण (अवकल रूप में गॉस की प्रमेय)	
1.26 संधारित्र	
1.27 गोलीय संधारित्र	
1.28 समान्तर प्लेट संधारित्र	
1.29 बेलनाकार संधारित्र	
1.30 स्थिर विद्युत् क्षेत्र ऊर्जा	
1.31 भूसम्पर्कित अनन्त चालक तल के निकट एक बिन्दु आवेश	
1.32 एकसमान विद्युत् क्षेत्र में रखे चालक के पृष्ठ के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाला बल	
1.33 परावैद्युत	

- 1.34 एकसमान वैद्युत-क्षेत्र के कुचालक (परावैद्युत) बाह्य वैद्युत क्षेत्र में किसी परावैद्युत का व्यवहार
- 1.35 परावैद्युत ध्रुवण
- 1.36 परावैद्युतांक या आपेक्षिक वैद्युतशीलता
- 1.37 ध्रुवण वेक्टर
- 1.38 विद्युत वेक्टर और उनका परस्पर सम्बन्ध
- 1.39 क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण की आण्विक व्याख्या
- 1.40 क्लॉसियस-मसोटी समीकरण
- 1.41 आंकिक उदाहरण
- 1.42 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
- 1.43 सारांश
- 1.44 मुख्य शब्दावली
- 1.45 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
- 1.46 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 2 स्थिर चुम्बकत्व

134—213

- 2.0 परिचय
- 2.1 उद्देश्य
- 2.2 चुम्बकीय क्षेत्र तथा चुम्बकीय फ्लक्स
- 2.3 वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में गतिशील आवेश पर बल — लॉरेंज बल
- 2.4 लॉरेंज बल से \vec{B} की परिभाषा
- 2.5 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण
- 2.6 एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में सीधे धारावाही चालक पर बल
- 2.7 धारा लूप पर बल—आघूर्ण
- 2.8 चुम्बकीय द्विध्रुव एवं द्विध्रुव आघूर्ण
- 2.9 कोणीय संवेग और जायरो चुम्बकीय अनुपात
- 2.10 धारा खण्ड के कारण चुम्बकीय क्षेत्र (बायो-सावर्ट नियम)
 - 2.10.1 बायो-सावर्ट नियम के अनुप्रयोग
- 2.11 चुम्बकीय प्रेरण का रैखिक समाकल : परिक्रमी रूप में ऐम्पियर का नियम
- 2.12 अवकल रूप में चुम्बकीय स्थितिकी के मूल नियम
- 2.13 चुम्बकीय द्विध्रुव की अनुदैर्घ्य दिशा (या अक्षीय स्थिति) में चुम्बकीय क्षेत्र
- 2.14 चुम्बकीय द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति (या अनुप्रस्थ दिशा) में चुम्बकीय क्षेत्र
- 2.15 चुम्बकीय क्षेत्र H चुम्बकीय क्षेत्र B व चुम्बकन वेक्टर M त्रिसदिश की विवेचना
- 2.16 दण्ड चुम्बक की परिनालिकीय धारा के पृष्ठीय वितरण के रूप में व्याख्या
- 2.17(a) \vec{B} , \vec{H} और \vec{M} में सम्बन्ध
- 2.17(b) चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा चुम्बकशीलता
 - 2.18 आंकिक उदाहरण
 - 2.19 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 2.20 सारांश
 - 2.21 मुख्य शब्दावली
 - 2.22 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 2.23 सहायक पाठ्य सामग्री

- 3.0 परिचय
- 3.1 उद्देश्य
- 3.2 वैद्युत धारा तथा धारा घनत्व
- 3.3 स्थायी धारा के लिए सांतत्य समीकरण
- 3.4 अस्थायी धारा (या समय के साथ परिवर्ती धारा) तथा सांतत्य समीकरण
- 3.5 किरचौफ के नियम
- 3.6 बाहुल्य परिपथ
 - 3.6.1 थैवनिन प्रमेय
 - 3.6.2 नॉर्टन की प्रमेय
 - 3.6.3 मिलमैन प्रमेय
 - 3.6.4 अधिकतम सामर्थ्य (शक्ति) स्थानान्तरण प्रमेय
 - 3.6.5 अध्यारोपण प्रमेय
- 3.7 प्रत्यावर्ती धाराएँ
- 3.8 प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि तथा क्षय : L-R परिपथ
- 3.9 प्रतिरोध तथा संधारित्र युक्त परिपथ में धारा अथवा प्रतिरोध के द्वारा संधारित्र का आवेशन तथा निरावेशन
C-R परिपथ
- 3.10 LCR श्रेणी परिपथ
- 3.11 L-R परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा
- 3.12 R-C परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा
- 3.13 प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में औसत व्यय शक्ति तथा शक्ति गुणांक
- 3.14 a.c. विश्लेषण के लिए सम्मिश्र संख्या विधि J आपरेटर
- 3.15 प्रतिबाधा, प्रतिघात तथा प्रवेश्यता
- 3.16 श्रेणी अनुनादी परिपथ
 - 3.16.1 अनुनाद की तीक्ष्णता अथवा अनुनाद पर मन्दन का प्रभाव
 - 3.16.2 विशेषता गुणांक
 - 3.16.3 वोल्टेज प्रवर्धन
- 3.17 समान्तर अनुनादी परिपथ
- 3.18 श्रेणी तथा समान्तर अनुनादी परिपथों में अन्तर
- 3.19 A.C. परिपथ में शक्ति
- 3.20 Y तथा Δ नेटवर्क
- 3.21 विद्युत पावर का संचरण
- 3.22 जैव विद्युत् की उत्पत्ति
- 3.23 जैव विद्युत
- 3.24 तन्त्रिका आवेग
- 3.25 विश्राम विभव
- 3.26 प्रेरणा संवहन या तन्त्रिका संवहन की प्रक्रिया
- 3.27 जैव विद्युत् की उत्पत्ति से सोडियम तथा पोटैशियम परिवहन
- 3.28 तन्त्रिका आवेग संवहन की क्रिया-विधि
- 3.29 नर्नस्ट समीकरण
- 3.30 तन्त्रिका ऊतक : संरचना एवं कार्य
- 3.31 तन्त्रिका कोशिका या न्यूरॉन की रचना
- 3.32 तन्त्रिका तंतुओं के प्रकार
- 3.33 तन्त्रिका ऊतक के गुण

- 3.34 झिल्ली क्षमता
- 3.35 आंकिक उदाहरण
- 3.36 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
- 3.37 सारांश
- 3.38 मुख्य शब्दावली
- 3.39 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
- 3.40 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 4 विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

342—423

- 4.0 परिचय
- 4.1 उद्देश्य
- 4.2 गुरुत्वीय, वैद्युत तथा चुम्बकीय बल
- 4.3 त्वरक क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र एवम् एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण
 - 4.3.1 प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण
- 4.4 इलेक्ट्रॉन गन
- 4.5 विसर्जन नलिका
- 4.6 रैखिक त्वरित्र
- 4.7 विक्षेपण क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र
- 4.8 कैथोड किरण नलिका तथा दोलनलेखी
- 4.9(a) CRO की सुग्राहिता
- 4.9(b) तीव्र संग्राही कम्पनदर्शी
 - 4.10 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण
 - 4.11 180° चुम्बकीय फोकसन या 180° चुम्बकीय विक्षेपण या संवेग वरणक
 - 4.12 नाभिकीय कणों के ऊर्जा मापन में नाभिकीय कणों की वक्रता
 - 4.13 साइक्लोट्रॉन का सिद्धान्त
 - 4.14 परस्पर लम्बवत् वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में आवेशित कण
 - 4.15 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों का प्रभाव
 - 4.16 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण : धन किरणें तथा थॉमसन परवलय विधि तथा आइसोटोप की खोज
 - 4.17 द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफी के तत्व
 - 4.18 इलेक्ट्रॉन का विशिष्ट आवेश $\frac{e}{m}$ ज्ञात करने की थॉमसन विधि
 - 4.19 वेग वरणक
 - 4.20 चुम्बकीय फोकसिंग (लेंस) का सिद्धान्त
 - 4.21 आंकिक उदाहरण
 - 4.22 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 4.23 सारांश
 - 4.24 मुख्य शब्दावली
 - 4.25 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 4.26 सहायक पाठ्य सामग्री

- 5.0 परिचय
- 5.1 उद्देश्य
- 5.2 चुम्बकीय फ्लक्स
- 5.2(a) विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण
 - 5.3 विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के फ़ैराडे के नियम
 - 5.4 फ़ैराडे के नियम का समाकलन तथा अवकलन स्वरूप
 - 5.5 स्व-प्रेरण
 - 5.6 लम्बी परिनालिका के स्वप्रेरकत्व के लिए व्यंजक
 - 5.7 अन्योन्य प्रेरण
 - 5.8 दो लम्बी परिनालिकाओं के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व के लिए व्यंजक
 - 5.9 स्वप्रेरण तथा अन्योन्य प्रेरण में अन्तर
 - 5.10 दो प्रेरक कुण्डलियों का श्रेणीक्रम तथा समान्तर क्रम में तुल्य स्व-प्रेरकत्व
 - 5.11 दो कुण्डलियों के स्वप्रेरकत्व तथा अन्योन्य प्रेरकत्व में सम्बन्ध
 - 5.12 परिणामित्र या ट्रान्सफॉर्मर
 - 5.13 स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा
 - 5.14 मैक्सवेल की परिकल्पना – विस्थापन धारा
 - 5.15 मैक्सवेल परिकल्पना की भौतिक व्याख्या
 - 5.16 मैक्सवेल के समीकरण
 - 5.17 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा घनत्व, पोयन्टिंग वेक्टर
 - 5.18 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्रों E तथा B द्वारा तरंग समीकरण
 - 5.19 निर्वात या मुक्त आकाश में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें
 - 5.20 अभिलम्बवत् आपतन पर परावर्तन तथा अपवर्तन [परावैद्युत की समतल सतह]
 - 5.21 परावर्तन द्वारा ध्रुवण
 - 5.22 पूर्ण आन्तरिक परावर्तन द्वारा ध्रुवण
 - 5.23 चालक माध्यम में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें या E व B के लिये तरंग समीकरण
 - 5.23.1 परावैद्युत माध्यम में एकविमीय विद्युत-चुम्बकीय तरंग का संचरण
 - 5.23.2 विद्युत-चुम्बकीय तरंग की अनुप्रस्थ प्रकृति
 - 5.23.3 विद्युत-चुम्बकीय तरंग में \vec{E} , \vec{B} तथा संचरण दिशा का परस्पर लम्बवत् होना
 - 5.23.4 \vec{E} तथा \vec{B} के बीच सम्बन्ध
 - 5.24 आयनमण्डल द्वारा परावर्तन व अपवर्तन
 - 5.25 आंकिक उदाहरण
 - 5.26 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 5.27 सारांश
 - 5.28 मुख्य शब्दावली
 - 5.29 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 5.30 सहायक पाठ्य सामग्री

परिचय

टिप्पणी

उच्च शिक्षा के क्षेत्र में विषय की गुणवत्ता में वृद्धि एवं विद्यार्थियों में सृजनात्मक समुचित विकास की आवश्यकता के अनुरूप म.प्र. भोज विश्वविद्यालय (भोपाल) के लिये द्वितीय वर्ष भौतिकशास्त्र के लिये निर्धारित विषय वस्तु के अनुसार, इस पुस्तक की रचना की गई है।

स्नातक परिक्षा (द्वितीय वर्ष) के लिये स्वीकृत दोनों प्रश्नपत्रों के अनुसार इस पुस्तक में पाठ्य सामग्री के लिये आवश्यक मूल सिद्धांतों का सुस्पष्ट प्रतिपादन किया गया है। भौतिकी के मूल तथ्यों एवं व्यंजकों की उपयोगिता को रोचक बनाने के लिये प्रत्येक अभिधारणा के अन्त में अनेक संख्यात्मक एवं सैद्धान्तिक उदाहरण भी हल सहित दिये गये हैं। विद्यार्थियों के यथार्थ मूल्यांकन परीक्षण के लिये प्रस्तावित नवीन योजना के अनुरूप प्रत्येक अध्याय में ज्ञान बोध तथा कौशल सम्बन्धी पर्याप्त प्रश्नों के साथ साथ बहुविकल्पीय प्रश्न भी प्रचुर मात्रा में दिये गये हैं।

प्रस्तुत पुस्तक में इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है। पुस्तक में त्रुटि कम से कम रहे। लेखक उन समस्त अध्यापक बंधुओं तथा छात्रों का विशेष आभारी रहेगा जो पुस्तक की त्रुटियों के बारे में अपने सुझाव देते रहेंगे ताकि पुस्तक भविष्य में और भी अधिक नामप्रद हो।

डॉ. आर.एस. चंडोक,

जबलपुर

संरचना (Structure)

- 1.0 परिचय
- 1.1 उद्देश्य
- 1.2 कूलम्ब का नियम (वेक्टर रूप)
- 1.3 विद्युत-क्षेत्र
- 1.4 विद्युत आवेश के कारण विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता
 - 1.4.1 बिन्दु आवेश से उत्पन्न वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता
 - 1.4.2 आवेश के सतत वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता
- 1.5 वैद्युत द्विध्रुव
 - 1.5.1 वैद्युत द्विध्रुव के कारण वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता
- 1.6 चतुर्ध्रुव क्षेत्र
- 1.7 वैद्युत द्विध्रुव पर किया गया कार्य रेखीय समाकलन के रूप में
- 1.8 स्थैत विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति
- 1.9 विद्युत विभव
- 1.10 बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विभव
- 1.11 एकसमान आवेशित चकती के कारण इसकी अक्ष पर विद्युत विभव तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता
- 1.12 असमान आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव
- 1.13 समविभवी पृष्ठ
- 1.14 विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव में सम्बन्ध
- 1.15 एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे वैद्युत द्विध्रुव पर बलयुग्म
- 1.16 विद्युत फ्लक्स
- 1.17 गॉस प्रमेय
- 1.18 गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग
- 1.19 एकसमान आवेशित चालक गोले (गोलीय खोल) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव
- 1.20 एक समान आवेशित कुचालक ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव
- 1.21 अनन्त लम्बाई के एकसमान आवेशित बेलनाकार चालक के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव
- 1.22 अनन्त समतल, आवेशित चालक के कारण इसके समीपस्थ बिन्दु पर विद्युत तीव्रता तथा विद्युत विभव
- 1.23 एकसमान आवेशित अनन्त कुचालक चादर के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव
- 1.24 किसी असमान गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव
- 1.25 पॉयसन तथा लाप्लास के समीकरण (अवकल रूप में गॉस की प्रमेय)
- 1.26 संधारित्र
- 1.27 गोलीय संधारित्र
- 1.28 समान्तर प्लेट संधारित्र

टिप्पणी

- 1.29 बेलनाकार संधारित्र
- 1.30 स्थिर विद्युत् क्षेत्र ऊर्जा
- 1.31 भूसम्पर्कित अनन्त चालक तल के निकट एक बिन्दु आवेश
- 1.32 एकसमान विद्युत् क्षेत्र में रखे चालक के पृष्ठ के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाला बल
- 1.33 परावैद्युत
- 1.34 एकसमान वैद्युत-क्षेत्र के कुचालक (परावैद्युत) बाह्य वैद्युत क्षेत्र में किसी परावैद्युत का व्यवहार
- 1.35 परावैद्युत ध्रुवण
- 1.36 परावैद्युतांक या आपेक्षिक वैद्युतशीलता
- 1.37 ध्रुवण वेक्टर
- 1.38 विद्युत वेक्टर और उनका परस्पर सम्बन्ध
- 1.39 क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण की आण्विक व्याख्या
- 1.40 क्लॉसियस-मसोटी समीकरण
- 1.41 आंकिक उदाहरण
- 1.42 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
- 1.43 सारांश
- 1.44 मुख्य शब्दावली
- 1.45 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
- 1.46 सहायक पाठ्य सामग्री

1.0 परिचय (Introduction)

इस इकाई में विद्युत क्षेत्र तथा विभव और संधारित्र तथा परावैद्युत ध्रुवण को समझाया गया है। दैनिक जीवन में हम अनुभव करते हैं कि दो पदार्थों को परस्पर रगड़ने से कभी कभी उनमें अपने आस पास रखी हल्की वस्तुओं को आकर्षित करने का गुण आ जाता है। सर्वप्रथम वैज्ञानिक थेल्स ऑफ मिलेट्स ने इस घटना की खोज की थी। आकर्षित करने की इस घटना को पदार्थों का विद्युतीकरण या आवेशित होना कहा जाता है तथा पदार्थ में उत्पन्न इस गुण को विद्युत् कहते हैं। यदि यह आवेश गतिमान नहीं हैं, अर्थात् स्थिर है, तो इसे स्थिर विद्युत् कहते हैं।

1.1 उद्देश्य (Objectives)

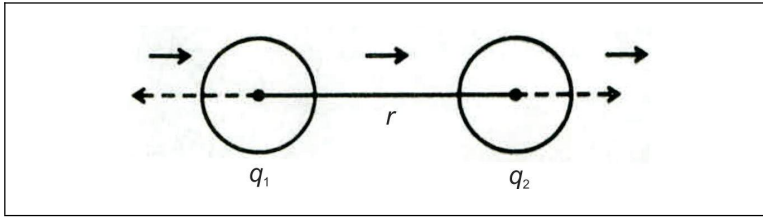
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- विद्युत के लिए कूलम्ब का नियम, विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता, द्विध्रुव एवं चतुर्ध्रुव के कारण विद्युत क्षेत्र की गणना करेंगे;
- इसके साथ विद्युत् फ्लक्स एवं उससे संबंधित गॉस के नियम का विस्तृत अध्ययन तथा विभिन्न प्रकार के संधारित्र एवं उनकी धारिता का अध्ययन करेंगे; एवं
- अंत में परावैद्युत पदार्थ एवं उनके गुणों की विस्तृत चर्चा समझ पाएंगे।

1.2 कूलम्ब का नियम (वेक्टर रूप) [Coulomb's Law (In Vector Form)]

फ्रांसीसी वैज्ञानिक कूलम्ब ने दो आवेशों के बीच लगने वाले आकर्षण बल अथवा प्रतिकर्षण बल के लिए एक नियम प्रतिपादित किया जो कूलम्ब का नियम कहलाता है।

कूलम्ब के नियम के अनुसार, स्थिर अवस्था में किन्हीं दो विद्युत आवेशों के बीच आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण बल दोनों आवेशों के परिणामों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनकी बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।



चित्र क्र. 1.1: कूलम्ब का नियम

यदि आवेश q_1 व q_2 एक-दूसरे से r दूरी पर स्थित हों तो उनके मध्य लगने वाला बल

$$F \propto q_1 q_2 \text{ तथा } F \propto \frac{1}{r^2}$$

अर्थात्
$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$F = A \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

जहाँ A समानुपाती नियतांक है जिसका मान बल F , आवेश q_1 व q_2 तथा दूरी r पर निर्भर करता है।

बल व दूरी वेक्टर राशियाँ हैं अतः कूलम्ब के नियम को वेक्टर रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$\vec{F}_{12} = A \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

जहाँ \vec{F}_{12} , q_1 आवेश के कारण q_2 आवेश पर लगने वाला बल तथा \hat{r}_{12} , q_1 को q_2 से मिलाने वाली रेखा की दिशा में एकांक वेक्टर है।

इसी प्रकार q_2 आवेश का q_1 आवेश पर लगने वाला बल

$$\vec{F}_{21} = A \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

जहाँ \vec{F}_{21}, q_2 आवेश के कारण q_1 आवेश पर लगने वाला बल तथा \hat{r}_{21}, q_2 को q_1 से मिलाने वाली रेखा की दिशा में एकांक वेक्टर है। \vec{F}_{21} और \vec{F}_{12} दोनों बल बराबर व विपरीत दिशा में हैं। अतः दोनों आवेशों के बीच बल

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} = \vec{F} \\ &= A \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= A \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}\end{aligned}$$

क्योंकि $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} = \frac{\vec{r}}{r}$

जहाँ \vec{r} आवेश q_1 व q_2 के बीच सदिश है।

एम.के.एस. पद्धति में कूलम्ब नियम को प्रदर्शित करने के लिए समानुपातिक नियतांक A को $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ से प्रदर्शित करते हैं, जहाँ ϵ माध्यम की विद्युतशीलता है। अतः एम.के.एस पद्धति में किसी माध्यम में स्थित दो आवेशों के बीच लगने वाला बल

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad \dots (1)$$

यदि आवेश निर्वात या हवा में स्थित हों, तो उनके बीच लगने वाला बल

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad \dots (2)$$

जहाँ ϵ_0 निर्वात की विद्युतशीलता है।

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर

$$\frac{\vec{F}_M}{\vec{F}_A} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

या $\frac{\vec{F}_A}{\vec{F}_M} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$ या k

ϵ_r या k को माध्यम की **आपेक्षित विद्युतशीलता** कहते हैं। k को माध्यम **परावैद्युतांक** भी कहते हैं जो एक विमाहीन राशि है। अतः माध्यम की आपेक्षिक विद्युतशीलता

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0 k$$

अतः किसी माध्यम में दो आवेशों के बीच कार्य करने वाला बल

$$\vec{F}_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 k} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

निर्वात में $k = 1$

$$\vec{F}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ फ़ैरड/मीटर}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= \frac{1}{4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12}} \\ &= 9 \times 10^9 \text{ न्यूटन मीटर}^2 / \text{कूलॉम}^2 \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad \vec{F}_A = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

इसी प्रकार यदि किसी माध्यम या निर्वात में तीन आवेश q_1, q_2, q_3 स्थित हैं तो q_1, q_2 आवेश द्वारा q_3 पर लगा बल होगा—

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 k} \cdot \frac{q_1 q_3}{r_{31}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 k} \frac{q_2 q_3}{r_{32}^2} \hat{r}_{23}$$

कूलॉम के नियम की सीमाएँ

- (1) कूलॉम का मूल नियम बिन्दु आवेशों के लिए ही सत्य है परन्तु इस नियम को फैले हुए आवेशों (distributed charges) के लिए भी विस्तारित किया जा सकता है।
- (2) यह नियम केवल स्थिति (static) आवेशों के लिए ही है। गतिशील आवेशों के बीच लगने वाला बल अन्य नियमों द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।
- (3) कूलॉम का नियम आवेशों के मध्य अत्यधिक दूरी (किलोमीटर की कोटि में) से अत्यल्प दूरी (10^{-21} सेमी कोटि की) तक सत्य होता है।

1.3 विद्युत-क्षेत्र (Electric Field)

किसी विद्युत आवेश के चारों ओर का वह क्षेत्र जहाँ तक उसका प्रभाव होता है, विद्युत क्षेत्र कहलाता है।

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता—विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर स्थित एकांक धनावेश जितने बल का अनुभव करता है, उसे उस बिन्दु पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता कहते हैं। यह एक सदिश राशि है।

यदि विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर रखे परीक्षण धनावेश q_0 पर लगने वाला बल \vec{F} हो तो उस बिन्दु पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

टिप्पणी

$$\text{सदिश रूप में } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad \dots (i)$$

टिप्पणी

इस प्रकार किसी बिन्दु पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर रखे परीक्षण धनावेश पर लगने वाले बल और परीक्षण धनावेश के मान के अनुपात के बराबर होती है।

$$\text{विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक—समीकरण (i) से } E = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$$E \text{ का मात्रक} = \frac{\vec{F} \text{ का मात्रक}}{q_0 \text{ का मात्रक}}$$

$$\text{इस प्रकार S.I. पद्धति में } E \text{ का मात्रक} = \frac{\text{न्यूटन}}{\text{कूलॉम}}$$

अतः S.I. पद्धति में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक न्यूटन/कूलॉम (N/C) है। C.G.S. पद्धति में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक डाइन/स्थैत कूलॉम है।

विमायें—समीकरण (i) से

$$E = \frac{F}{q_0}$$

$$\text{विद्युत क्षेत्र की तीव्रता} = \frac{\text{बल}}{\text{आवेश}} = \frac{\text{द्रव्य मान} \times \text{त्वरण}}{\text{धारा} \times \text{समय}}$$

∴ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक

$$= \frac{\text{किग्रा} \times \text{मीटर} \times \text{सेकण्ड}^{-2}}{\text{एम्पीयर} \times \text{सेकण्ड}}$$

$$= \text{किग्रा} \times \text{मीटर} \times \text{सेकण्ड}^{-3} \times \text{एम्पीयर}^{-1}$$

अतः विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का विमीय सूत्र $MLT^{-3}A^{-1}$ होगा।

1.4 विद्युत आवेश के कारण विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Electric Field due to Electric Charge)

माना बिन्दु O पर कोई बिन्दु आवेश $+q$ रखा हुआ है। इससे r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। माना बिन्दु P पर एक परीक्षण आवेश लिया गया है। तब कूलॉम के नियमानुसार आवेश q के कारण q_0 पर लगने वाला बल

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{Kr^2}$$

अतः बिन्दु P पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{F}{q_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{Kr^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

वायु या निर्वात के लिए $K = 1$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

$$E = 9 \times 10^9 \frac{q}{r^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

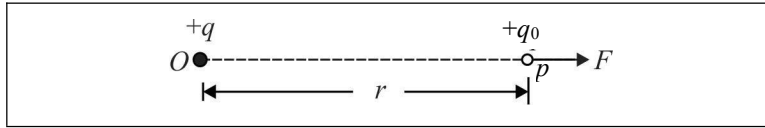
C.G.S. पद्धति से $E = \frac{q}{r^2}$ डाइन/स्थैत कूलॉम

टिप्पणी

1.4.1 बिन्दु आवेश से उत्पन्न वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

(Intensity of Electric Field due to a Point Charge)

चित्र (1.2) के अनुसार, माना कि K परावैद्युतांक के माध्यम में किसी बिन्दु O पर एक बिन्दु धन आवेश $+q$ स्थित है। इस आवेश द्वारा उत्पन्न वैद्युत क्षेत्र में, आवेश से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान ज्ञात करना है। माना बिन्दु P पर एक धन परीक्षण आवेश q_0 है। कूलम्ब के नियमानुसार आवेश q_0 पर लगने वाला वैद्युत-बल F ,



चित्र क्र. 1.2: बिन्दु आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

(i) (CGS पद्धति में), $\vec{F} = \frac{1}{K} \cdot \frac{qq_0}{r^2}$ डाइन

अतः बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{Kr^2} \text{ डाइन/स्थि. वै. मा.} \quad \dots (1)$$

तथा P के बीच निर्वात या वायु होने पर, $K = 1$,

अतः $\vec{E} = \frac{q}{r^2}$ डाइन/स्थि. वै. मा. $\dots (2)$

(ii) (M.K.S. पद्धति में), $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{qq_0}{r^2}$ न्यूटन

अतः इस पद्धति में बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Kr^2} \text{ न्यूटन/कूलम्ब} \quad \dots (3)$$

यदि बिन्दु O तथा P वायु अथवा निर्वात में स्थित हों तो, $K = 1$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \text{ न्यूटन/कूलम्ब} \quad \dots (4)$$

बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा ज्ञात करने के लिये हमें ज्ञात है कि दो सजातीय आवेश (यहां $+q$ तथा $+q_0$) एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं, अतः आवेश $+q$ द्वारा परीक्षण आवेश q_0 एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं, अतः आवेश $+q$ द्वारा परीक्षण आवेश q_0 पर आरोपित बल की दिशा \vec{OP} होगी।

यदि वैद्युत क्षेत्र, $-q$ आवेश द्वारा उत्पन्न किया जाता तो P बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा इसके ठीक विपरीत अर्थात् \vec{PO} दिशा में होती।

अनेक आवेशों के कारण किसी बिन्दु पर वैद्युत-क्षेत्र की परिणामी तीव्रता – वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता एक सदिश राशि है, अतः किसी बिन्दु पर, कई बिन्दु आवेशों के कारण, परिणामी तीव्रता पृथक्-पृथक् आवेशों द्वारा उस बिन्दु पर उत्पन्न, तीव्रताओं के वेक्टर योग के तुल्य होगी। अर्थात् यदि पृथक्-पृथक् रखे हुये n आवेशों द्वारा किसी बिन्दु पर उत्पन्न क्षेत्र की तीव्रतायें $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_i, \dots$ हों तो उस बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र की परिणामी तीव्रता,

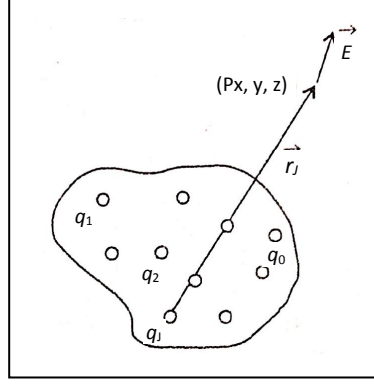
$$E = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + E_i = \Sigma E_i$$

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

1.4.2 आवेश के सतत वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to Continuous Charge Distributions)

चित्र 1.3 के अनुसार, माना किसी निकाय में उपस्थित आवेश q_1, q_2, \dots, q_n के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रतायें क्रमशः $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ हैं, तो बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi r_i^2} \hat{r}_i \quad \dots (1) \end{aligned}$$



चित्र क्र. 1.3(a): सतत आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

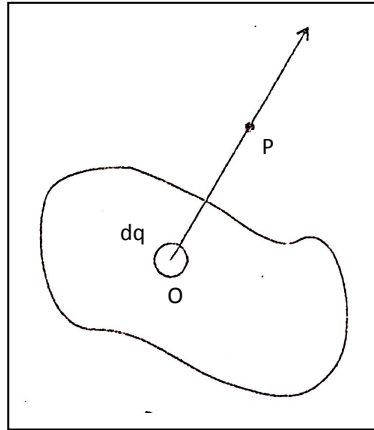
जहाँ \hat{r}_i बिन्दु आवेश q_i को बिन्दु P से मिलाने वाली रेखा की दिशायेँ ईकाई सदिश हैं। अब चूँकि

$$\hat{r}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

अतः समीकरण (1) से,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2} \quad \dots (2)$$

अब यदि आवेश का वितरण सतत हो तो तीव्रता ज्ञात करने के लिये माना किसी सूक्ष्म अवयव में आवेश dq हो तो इस अवयव के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता



चित्र क्र. 1.3(b): सतत आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

अतः बिन्दु P पर परिणामी विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad \dots (3)$$

टिप्पणी

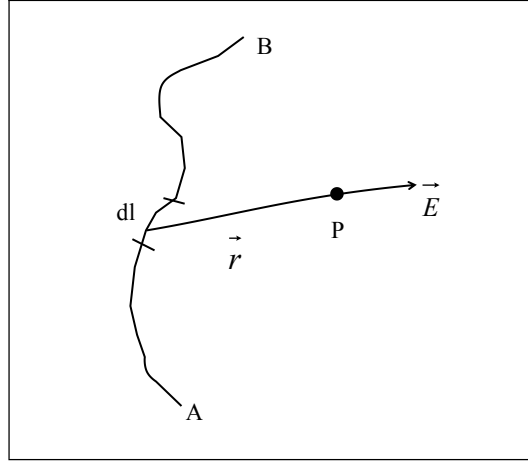
जहाँ \vec{r} बिन्दु P का अवयव के सापेक्ष स्थिति सदिश तथा \hat{r} , सदिश \vec{r} की दिशा में इकाई सदिश है। समीकरण (3) में समाकलन की सीमा इस प्रकार ली जाती है कि सम्पूर्ण क्षेत्र शामिल हो जाये।

किसी माध्यम में स्थूल स्तरीय विधि से सतत वितरित आवेश को निम्न तीन आवेश घनत्वों के रूप में व्यक्त किया जाता है—

- (i) रैखिक आवेश घनत्व (Linear charge density)
- (ii) पृष्ठीय आवेश घनत्व (Surface charge density)
- (iii) आयतन आवेश घनत्व (Volume charge density)

(i) रैखिक आवेश घनत्व – यदि आवेशों का वितरण किसी रेखीय चालक में होता है तो उसके इकाई लम्बाई में उपस्थित आवेश को रैखिक आवेश घनत्व कहते हैं। इसे λ से व्यक्त करते हैं। इसका एस. आई. पद्धति में मात्रक कूलॉम/मीटर होता है।

चित्र 1.3(c) के अनुसार माना कि किसी रैखिक चालक का रैखिक आवेश घनत्व λ है तथा इसका अवयवी चालक पर कुल आवेश $dq = \lambda dl$



चित्र क्र. 1.3(c): रैखिक आवेश

अतः इस अवयव ये कारण बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

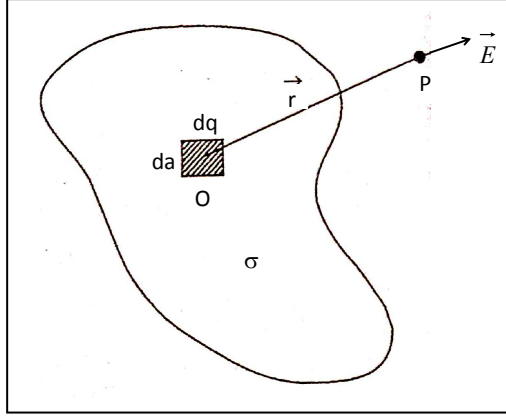
अतः सम्पूर्ण चालक के कारण बिन्दु P पर तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{r} \quad \dots (4)$$

यही रैखिक आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

(ii) पृष्ठीय आवेश घनत्व – यदि आवेश का वितरण किसी चालक के पृष्ठ पर होता है तो उसके इकाई क्षेत्रफल के आवेश को पृष्ठीय आवेश घनत्व

कहते हैं। इसे σ से प्रदर्शित किया जाता है। S.I. पद्धति में इसका मात्रक कूलॉम/मीटर² होता है।



चित्र क्र. 1.3(d): पृष्ठीय आवेश

चित्र 1.3(d) के अनुसार माना कि किसी पृष्ठ का पृष्ठीय आवेश घनत्व σ है तो इसके अवयवी पृष्ठ da में आवेश σda होगा। इस अवयवी पृष्ठ के कारण बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$d\vec{E} = \frac{\sigma da}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

अतः सम्पूर्ण आवेश वितरण के कारण बिन्दु P पर क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma da}{r^2} \hat{r}$$

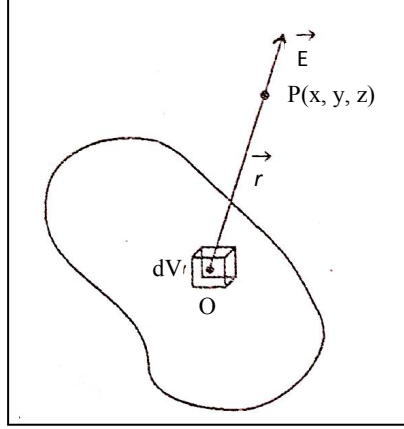
इस सूत्र की सहायता से आवेश के पृष्ठीय वितरण के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात की जाती है।

(iii) आयतन आवेश घनत्व – यदि आवेश का वितरण किसी पदार्थ के सम्पूर्ण आयतन में होता है तो चालक के एकांक आयतन में उपस्थित आवेश को आयतन आवेश घनत्व कहते हैं। इसे ρ से व्यक्त करते हैं। इसका मात्रक कूलॉम/मीटर³ होता है।

चित्र 1.3(e) के अनुसार माना कि बिन्दु O पर लिये गये अवयव का आयतन dV है तथा आवेश घनत्व ρ है तो अवयव में आवेश ρdV होगा। अतः इस अवयव के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$d\vec{E} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.3(e): आयतन आवेश

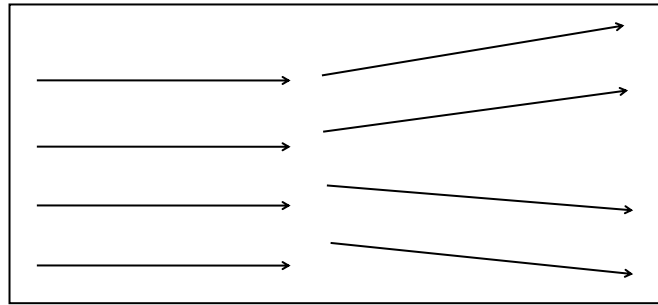
अतः सम्पूर्ण आवेश वितरण के कारण बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता

$$\vec{E} \quad d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$

इस सूत्र की सहायता से आवेश के आयतन वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

एकसमान विद्युत् क्षेत्र (Uniform Electric Field) – उस विद्युत् क्षेत्र को, जिसके प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता परिणाम और दिशा दोनों में बराबर होती है, एकसमान विद्युत् क्षेत्र कहते हैं। एकसमान विद्युत् क्षेत्र में खींची गई बी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है।

चित्र 1.3(f) में एकसमान विद्युत् क्षेत्र तथा असमान विद्युत् क्षेत्र प्रदर्शित किये गये हैं।



(a) एकसमान विद्युत् क्षेत्र

(b) असमान विद्युत् क्षेत्र

चित्र क्र. 1.3(f)

विद्युत् बल रेखाओं के उपयोग (Use of Electric Lines of Force) – विद्युत् बल रेखाओं से किसी आवेश या आवेश समुदाय में उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र की आंशिक जानकारी प्राप्त हो जाती है। जहाँ विद्युत् बल रेखाएँ सघन होती हैं वहाँ विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता अधिक और जहाँ विद्युत् बल रेखाएँ विरल होती हैं वहाँ विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता कम होती है। यदि किसी विद्युत् क्षेत्र की बल रेखाएँ समान्तर हैं तो वह क्षेत्र एक समान क्षेत्र होगा। विद्युत् बल रेखाओं के किसी बिन्दु

पर स्पर्श रेखा खींचकर उस बिन्दु पर परिणामी तीव्रता की दिशा ज्ञात की जा सकती है।

स्थिर विद्युतिकी

विद्युत् बल रेखाओं और चुम्बकीय बल रेखाओं में अन्तर

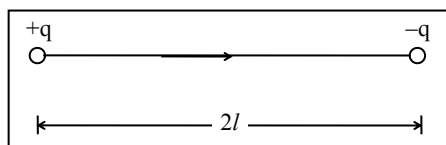
अ.क्र.	विद्युत् बल रेखाएँ	चुम्बकीय बल रेखाएँ
1.	ये खुला वक्र होती हैं।	ये बन्द वक्र होती हैं।
2.	ये चालक के लम्बवत् होती हैं।	ये चुम्बक के लम्बवत् हों आवश्यक नहीं।
3.	ये चालक के अन्दर उपस्थित नहीं रहतीं।	ये चुम्बक के अन्दर भी उपस्थित रहती हैं।

टिप्पणी

1.5 वैद्युत द्विध्रुव (Electric Dipole)

यदि दो बराबर और विजातीय आवेश एक-दूसरे से बहुत अल्प दूरी पर स्थित हों, तो इस निकाय को वैद्युत द्विध्रुव कहते हैं।

चित्र 1.4 में एक वैद्युत् द्विध्रुव प्रदर्शित किया गया है जो दो आवेशों $+q$ और $-q$ से निर्मित है। दोनों आवेशों के बीच की दूरी $2l$ बहुत ही कम होती है।



चित्र क्र. 1.4: वैद्युत् द्विध्रुव

वैद्युत द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र को द्विध्रुव क्षेत्र (Dipole Field) कहते हैं।

उदाहरण – (i) परमाणु में धनावेशों और ऋणावेशों के द्रव्यमान केन्द्र सम्पाती होते हैं, किन्तु जब परमाणु को किसी विद्युत् क्षेत्र में रख दिया जाता है तो धनावेश और ऋणावेश के द्रव्यमान केन्द्र एक-दूसरे के सापेक्ष थोड़ा-सा — जाते हैं जिससे परमाणु द्विध्रुव बन जाता है।

(ii) H_2O , HCl , NH_3 आदि ऐसे अणु हैं जिनके धनावेशों का द्रव्यमान केन्द्र, ऋणावेशों के द्रव्यमान केन्द्र के सम्पाती नहीं होता। ऐसे अणु वैद्युत द्विध्रुव होते हैं।

वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण (Electric Dipole Moment)

वैद्युत द्विध्रुव के किसी एक आवेश और उसके बीच की दूरी के गुणनफल को वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण कहते हैं।

यदि वैद्युत द्विध्रुव के आवेशों $+q$ और $-q$ के बीच की दूरी $2l$ हो, तो

$$\text{वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण } p = q \cdot 2l = 2ql$$

इसका मात्रक कूलॉम-मीटर (C-m) है।

टिप्पणी

वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण एक सदिश राशि है जिसकी दिशा ऋणावेश से धनावेश की ओर होती है। वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण को सदिश रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है—

$$\vec{p} = q \cdot 2\vec{l}$$

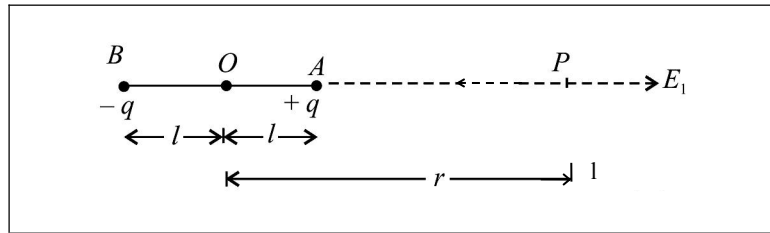
जहाँ $2\vec{l}$ दोनों आवेशों के बीच की सदिश दूरी है। द्विध्रुव के दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा को द्विध्रुव अक्ष कहते हैं।

विमीय सूत्र : $p = 2pl$ से,

$$\begin{aligned} p \text{ का विमीय सूत्र} &= \text{आवेश का विमीय सूत्र} \times \text{लम्बाई का विमीय सूत्र} \\ &= (\text{धारा} \times \text{समय}) \text{ का विमीय सूत्र} \times \text{लम्बाई का विमीय सूत्र} \\ &= A.T.L \\ &= [M^{\circ}LTA] \end{aligned}$$

1.5.1 वैद्युत द्विध्रुव के कारण वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to an Electric Field)

अक्षीय तथा अनुदैर्घ्य स्थिति पर वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता – चित्र 1.4 के अनुसार माना एक वैद्युत द्विध्रुव AB किसी ऐसे माध्यम में स्थित है जिसका परावैद्युतांक K है। द्विध्रुव $+q$ तथा $-q$ कूलॉम के आवेशों से बना है, जिनके बीच की दूरी $2l$ मीटर है द्विध्रुव के मध्य-बिन्दु O से r मीटर की दूरी पर इसकी अक्षीय स्थिति में एक बिन्दु P है इस बिन्दु P पर वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



चित्र क्र. 1.5: विद्युत द्विध्रुव के कारण अक्षीय स्थिति के विद्युत क्षेत्र

माना द्विध्रुव के आवेशों $+q$ तथा $-q$ के कारण बिन्दु P पर वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रताएँ क्रमशः E_1 व E_2 हैं। बिन्दु P की आवेश $+q$ से दूरी $(r-l)$ तथा आवेश $-q$ से दूरी $(r+l)$ है। अतः

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{AP^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r-l)^2} \quad (AP \text{ दिशा में})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PB^2}$$

तथा
$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r+l)^2} \quad (PB \text{ दिशा में})$$

टिप्पणी

तीव्रतायें E_1 व E_2 एक ही रेखा के अनुदिश विपरीत दिशाओं में हैं। अतः बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता E , इनके अन्तर के बराबर होगी तथा AP की दिशा में होगी (क्योंकि $E_1 > E_2$)। अतः बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{q}{(r-l)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{q}{(r+l)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \left[\frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \left[\frac{(r+l)^2 - (r-l)^2}{(r-l)^2 (r+l)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{4lr}{(r^2 - l^2)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{2(2ql)r}{(r^2 - l^2)^2} \end{aligned}$$

परन्तु $2ql = p$ (विद्युत द्विध्रुव का आघूर्ण)

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{2pr}{(r^2 - l^2)^2}$$

यदि l का मान r की अपेक्षा बहुत कम हो ($l < r$) तो l^2 का मान r^2 की तुलना में नगण्य माना जा सकता है। अतः द्विध्रुव के कारण बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{2pr}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{2p}{r^3} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

निर्वात (अथवा वायु) के लिए $K = 1$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \text{ न्यूटन/कूलॉम} \quad \dots (i)$$

जहाँ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9$ न्यूटन-मीटर²/कूलॉम²। यह छोटे विद्युत द्विध्रुव के कारण अक्षीय स्थिति में किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को प्रदर्शित करता है। वैद्युत-क्षेत्र E की दिशा द्विध्रुव की अक्ष के अनुदिश ऋण आवेश से धन आवेश की ओर है।

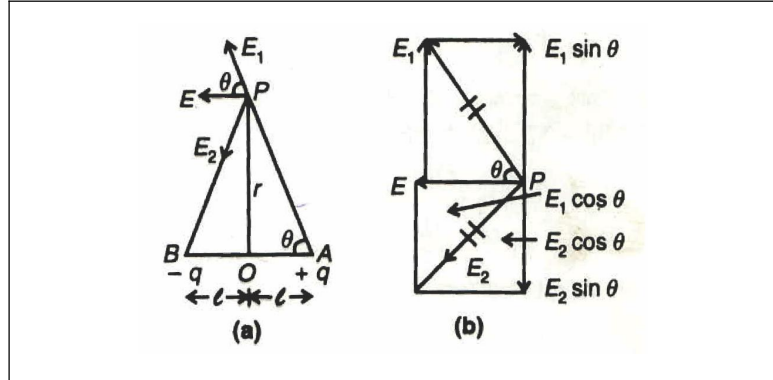
(ii) द्विध्रुव की निरक्षीय रेखा (Equatorial Line) पर स्थित बिन्दु पर वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता – जब कोई बिन्दु द्विध्रुव अक्ष के लम्ब अर्द्धक (निरक्षीय रेखा) पर स्थित होता है तो उस बिन्दु को चुम्बक की निरक्षीय स्थिति कहा जाता है। माना बिन्दु P , द्विध्रुव AB की लम्ब-अर्द्धक रेखा पर उसके मध्य बिन्दु O से r मीटर की दूरी पर स्थित है (चित्र 1.6(a))। माना द्विध्रुव के आवेशों $+q$ व $-q$ के कारण बिन्दु P पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रतायें क्रमशः E_1 व E_2 हैं। बिन्दु P की प्रत्येक आवेश से दूरी $\sqrt{(r^2 + l^2)}$ है [$AP = BP = \sqrt{(r^2 + l^2)}$] अतः

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{AP^2}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} \quad (AP \text{ दिशा में})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{BP^2}$$

तथा
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} \quad (PB \text{ दिशा में})$$



चित्र क्र. 1.6: विद्युत द्विध्रुव के कारण निरक्षीय स्थिति में विद्युत क्षेत्र

स्पष्ट है कि E_1 व E_2 के मान परस्पर बराबर हैं (परन्तु दिशाये भिन्न हैं)। E_1 व E_2 को AB के लम्बवत् व अनुदिश दो घटकों में वियोजित करने पर AB के लम्बवत् घटक ($E_1 \sin \theta$ व $E_2 \sin \theta$) परस्पर निरस्त हो जायेंगे (क्योंकि वे एक-दूसरे के बराबर व विपरीत हैं), जबकि AB के अनुदिश घटक ($E_1 \cos \theta$ व $E_2 \cos \theta$) एक ही दिशा में होने के कारण जुड़ जायेंगे [चित्र 1.6(b)]। अतः बिन्दु P पर वैद्युत-क्षेत्र की परिणामी तीव्रता

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_1 \cos \theta + E_2 \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} \cos \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} \cos \theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} (2 \cos \theta)$$

परन्तु चित्र 1.6(a) से, $\cos \theta = \frac{OA}{PA}$

$$= \frac{OA}{(OP^2 + OA^2)^{1/2}} = \frac{l}{(r^2 + l^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{q}{(r^2 + l^2)} \frac{2l}{(r^2 + l^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{2ql}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

परन्तु $2ql = p$ (वैद्युत द्विध्रुव का आघूर्ण)

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{p}{(r^2 + l^2)^{3/2}}$$

यदि l का मान r की अपेक्षा बहुत कम हो ($l < r$) तो r^2 की तुलना में l^2 को नगण्य माना जा सकता है। अतः द्विध्रुव के कारण बिन्दु P पर वैद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{p}{(r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \frac{p}{r^3} \text{ न्यूटन/कूलॉम।} \end{aligned}$$

निर्वात (अथवा वायु) के लिए $K = 1$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \text{ न्यूटन/कूलॉम} \quad \dots \text{ (ii)}$$

वैद्युत क्षेत्र E की दिशा ध्रुव की अक्ष के समान्तर धन आवेश से ऋण आवेश की ओर है।

अक्षीय स्थिति एवं निरक्षीय स्थिति में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की तुलना—

अक्षीय स्थिति में द्विध्रुव के मध्य बिन्दु से r दूरी पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3} \quad \dots \text{ (1)}$$

तथा निरक्षीय स्थिति में द्विध्रुव के मध्य बिन्दु से r दूरी पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \quad \dots \text{ (2)}$$

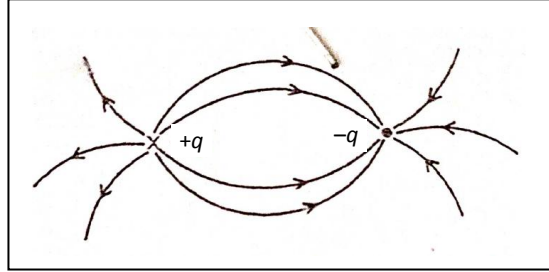
टिप्पणी

समीकरण (1) में (2) का भाग देने पर,

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \text{ या } E_1 = 2E_2$$

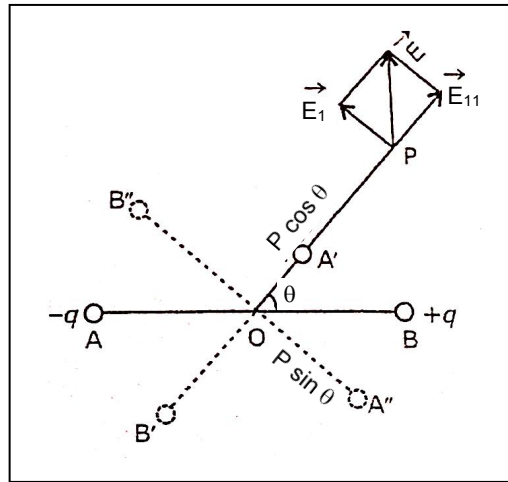
टिप्पणी

अतः वैद्युत द्विध्रुव के कारण किसी अक्षीय बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता उतनी ही दूरी पर निरक्षीय बिन्दु पर तीव्रता की दूगनी होती है। चित्र 1.7 में एक वैद्युत द्विध्रुव का विद्युत क्षेत्र प्रदर्शित किया गया है।



चित्र क्र. 1.7: वैद्युत द्विध्रुव का विद्युत क्षेत्र

(iii) सामान्य स्थिति में किसी वैद्युत द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (**Field at any Point due to an Electric Dipole in General Position**) – चित्र 1.8 के अनुसार, माना कि किसी वैद्युत द्विध्रुव AB का आवेश q तथा लम्बाई $2l$ हैं, अतः इसका द्विध्रुव आघूर्ण $|\vec{p}| = q \cdot 2l$ होगा। इस द्विध्रुव के मध्य बिन्दु O से r दूरी पर θ कोण बनाते हुए किसी बिन्दु $P(r, \theta)$ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



चित्र क्र. 1.8: विद्युत द्विध्रुव के कारण किसी भी स्थिति में स्थित बिन्दु p पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

वैद्युत द्विध्रुव AB को OP दिशा में तथा अभिलम्बवत् अवयवों में विभक्त करने से प्राप्त द्विध्रुव $A'B''$ के द्विध्रुव आघूर्ण क्रमशः $p \cos \theta$ तथा $p \sin \theta$ होंगे। अब बिन्दु P अवयवी द्विध्रुव $A'B'$ के लिये अक्षीय स्थिति में है, अतः बिन्दु P पर द्विध्रुव $A'B'$ के कारण उत्पन्न क्षेत्र की तीव्रता –

$$E_{11} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \dots (1)$$

इसी प्रकार बिन्दु P अवयवी द्विध्रुव $A''B''$ के लिये निरक्षीय स्थिति में है, अतः विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता –

$$E_1 = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \dots (2)$$

अतः बिन्दु P पर परिणामी तीव्रता का परिणाम

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_{11}^2 + E_1^2} \\ &= \sqrt{\frac{4p^2 \cos^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^6} + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^6}} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}} \quad \dots (3)$$

यही किसी वैद्युत द्विध्रुव के कारण सामान्य स्थिति में विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है। अतः इसका परिणाम अलग-अलग स्थितियों में निम्नानुसार होता है—

स्थिति I. अक्षीय स्थिति में—

इस स्थिति में $\theta = 0^\circ$ होता है अतः $\cos \theta = 1$ होगा

अतः समीकरण (3) से,

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3+1} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \dots (4)$$

यही अक्षीय स्थिति में वैद्युत् द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

स्थिति II. अक्षीय स्थिति में—

इस स्थिति में $\theta = 90^\circ$ होता है। अतः $\cos \theta = 0$ होगा

अतः समीकरण (3) से,

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \dots (5)$$

यही निरक्षीय स्थिति में वैद्युत् द्विध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

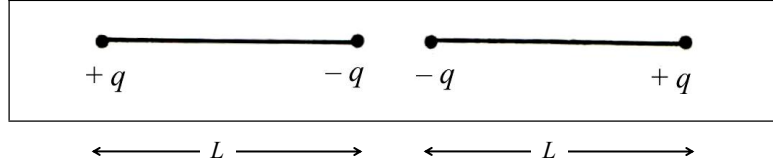
टिप्पणी

1.6 चतुर्ध्रुव क्षेत्र (Quadrupole Field)

टिप्पणी

चतुर्ध्रुव – एक चतुर्ध्रुव दो छोटे द्विध्रुवों (Dipoles) का संयोग है जो एक-दूसरे से एक निश्चित दूरी पर स्थित होते हैं तथा इस प्रकार रखे जाते हैं कि उनके द्विध्रुव आघूर्ण परस्पर विपरीत दिशाओं में हैं। (चित्र 1.9)

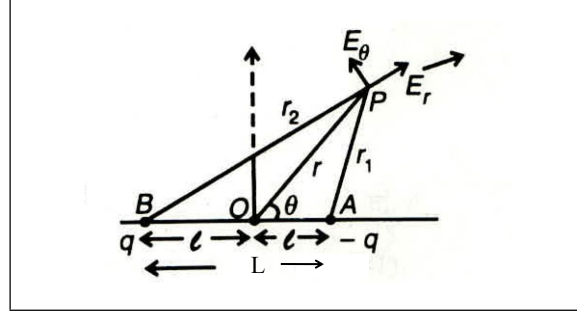
चतुर्ध्रुव आघूर्ण : $Q_d = 2qL^2$.



चित्र क्र. 1.9: विद्युत चतुर्ध्रुव क्षेत्र

चतुर्ध्रुव के कारण विभव एवं वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता

माना एक रेखीय चतुर्ध्रुव है (चित्र 1.10) तथा मूल बिन्दु चतुर्ध्रुव का केन्द्र है। यदि दोनों द्विध्रुवों के आवेशों के बीच की दूरी L है माना P एक बिन्दु है जिसके ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं। माना P की A व B पर स्थित $+q$ आवेश से दूरियाँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं तथा $OP = r$ है।



चित्र क्र. 1.10: विद्युत चतुर्ध्रुव के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

P पर वैद्युत विभव

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{r} \right) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

ΔOPA से

$$r_1^2 = r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta$$

$$\therefore r_1 = (r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta)^{1/2}$$

$$\therefore \frac{1}{r_1} = (r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2L}{r} \cos \theta \right]^{-1/2}$$

अर्थात् $r > L$ मानने पर द्विपद प्रमेय

$$\left[(1-x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \dots \right] \text{ से}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{2L}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{L^2}{r^2} - \frac{2L}{r} \cos \theta \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{L}{r} \cos \theta + \frac{3}{8} \left(\frac{L^4}{r^4} + \frac{4L^2}{r^2} \cos^2 \theta - \frac{4L^3}{r^3} \cos \theta \right) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{L}{r} \cos \theta + \frac{3L^4}{8r^4} + \frac{3L^2}{2r^2} \cos^2 \theta - \frac{3L^3}{2r^3} \cos \theta + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{L^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{L}{r} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{L^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{L}{r} \cos \theta \right]$$

ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[1 + \frac{L^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{L}{r} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + 1 + \frac{L^2}{2r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{L}{r} \cos \theta - 2 \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \left[\frac{L^2}{r^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \end{aligned}$$

$$\text{अर्थात् } \phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qL^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

चतुर्ध्रुव आघूर्ण (Quadrupole moment) के पदों में वैद्युत विभव

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_d}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (\because Q_d = 2qL^2)$$

विद्युत चतुर्ध्रुव के कारण विद्युत क्षेत्र का विभव है।

टिप्पणी

वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity)

टिप्पणी

वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता का घटक (Radial component)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qL^2}{r^3} (3\cos^2\theta - 1) \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} qL^2 (3\cos^2\theta - 1) \frac{\partial}{\partial r} r^{-3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} qL^2 (3\cos^2\theta - 1) \times (-3r^{-4}) \\
\vec{E}_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qL^2}{r^4} (3\cos^2\theta - 1) \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता का अभिलम्बवत् घटक (Transverse component)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qL^2}{r^3} (3\cos^2\theta - 1) \right] \\
&= -\frac{1}{r} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qL^2}{r^3} [3 \times 2\cos\theta \cdot (-\sin\theta)] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6qL^2 \sin\theta \cos\theta}{r^4} \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

परिणामी वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \sqrt{(E_r^2 + E_\theta^2)} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left\{ \frac{3qL^2}{r^4} (3\cos^2\theta - 1) \right\}^2 + \left\{ \frac{6qL^2 \sin\theta \cos\theta}{r^4} \right\}^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qL^2}{r^4} \sqrt{\left[(3\cos^2\theta - 1)^2 + (2\sin\theta \cos\theta)^2 \right]} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qL^2}{r^4} \sqrt{9\cos^4\theta + 1 - 6\cos^2\theta + 4\sin^2\theta \cos^2\theta}
\end{aligned}$$

चूँकि $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qL^2}{r^4} \sqrt{9\cos^4\theta + 1 - 6\cos^2\theta + 4(1 - \cos^2\theta)\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qL^2}{r^4} \sqrt{9\cos^4\theta + 1 - 6\cos^2\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos^4\theta}
\end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qL^2}{r^4} [5\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1]^{1/2}$$

चतुर्ध्रुव आघूर्ण (Quadrupole moment) के पदों में वैद्युतीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Q_d}{2r^4} \sqrt{[5\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1]^{1/2}}$$

जहाँ $Q_d = 2qL^2$

विशेष परिस्थितियाँ (Special Cases)

अक्ष पर $\theta = 0, \cos\theta = \cos 0^\circ = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{E}_{axis} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qL^2}{r^4} [5 - 2 + 1]^{1/2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6qL^2}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q_d}{r^4} \end{aligned}$$

विषुवत् रेखा (Equatorial line) पर

$$\theta = 90^\circ, \text{ i.e., } \cos\theta = \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qL^2}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q_d}{2r^4}$$

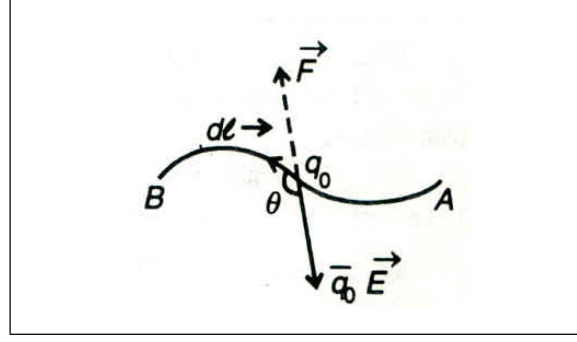
यदि विद्युत चतुर्ध्रुव के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है जिससे यह स्पष्ट है कि क्षेत्र की तीव्रता r^4 के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

1.7 वैद्युत द्विध्रुव पर किया गया कार्य रेखीय समाकलन के रूप में (Electric Potential as a Line Integral of an Electric Field)

माना किसी आवेश वितरण के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में दो बिन्दु A व B हैं। माना एक परीक्षण आवेश q_0 बाहरी रूप से किसी भी पथ के अनुदिश A से B तक गतिमान है। माना परीक्षण आवेश की A से B तक गति के दौरान किसी बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता \vec{E} चित्र 1.11 में प्रदर्शित दिशा में होती है।

चूँकि बाहरी रूप द्वारा परीक्षण आवेश q_0 पर एक बराबर व विपरीत बल \vec{E} आरोपित किया जाता है जिससे आवेश पर कोई त्वरण कार्य नहीं करता है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.11: विद्युत क्षेत्र E में परीक्षण आवेश q_0 को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य

$$\text{अर्थात् } \vec{F} = q_0 \vec{E} \quad \dots (i)$$

यदि इस बल \vec{F} के कारण परीक्षण आवेश एक सूक्ष्म दूरी dl चलता है तो इस गति में बाहरी रूप से परीक्षण आवेश पर किया गया कार्य F व dl के अदिश गुणनफल के बराबर होता है।

$$\text{अतः } dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\because W = \vec{F} \cdot \vec{d})$$

अतः परीक्षण आवेश q_0 को विद्युत क्षेत्र में A से B तक चलाने में परीक्षण आवेश पर किया गया कुल कार्य

$$W_{AB} = -\int_A^B dW = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

समीकरण (i) से \vec{F} का मान उपर्युक्त समीकरण में रखने पर

$$W_{AB} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

यही द्विध्रुव पर किये गये कार्य का रेखीय समाकलन रूप है।

अतः एकांक धनावेश को विद्युत क्षेत्र \vec{E} में वक्र AB के अनुदिश बिंदु A से B तक

$$W = \frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

उपर्युक्त समीकरण को वैद्युत क्षेत्र का रेखीय समाकलन कहते हैं। अतः विद्युत क्षेत्र का रेखीय समाकलन परिणाम में एकांक धनावेश को उस वक्र के अनुदिश ले जाने में किये गये कार्य के बराबर होता है।

एकांक आवेश को विद्युत क्षेत्र में A से B तक ले जाने में किया गया कार्य $W = A$ व B के बीच विभवान्तर

$$W = V_B - V_A$$

$$\text{अतः } V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \dots \text{ (ii)}$$

यह विद्युत क्षेत्र \vec{E} में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर के लिए व्यापक सूत्र है। यदि बिन्दु A अनन्त पर स्थित हो, जहाँ विभव शून्य हो, तब विद्युत क्षेत्र में बिन्दु B पर विद्युत विभव

$$V_B - 0 = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

टिप्पणी

1.8 स्थैत विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति (Conservative Nature of Static Electric Field)

विद्युत क्षेत्र \vec{E} का रेखीय समाकलन यदि केवल स्थिति निर्देशांकों पर निर्भर करें, उन बिन्दुओं के बीच के मार्ग पर निर्भर न करें तो उसे स्थैत विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति कहते हैं अर्थात् विद्युत क्षेत्र एक संरक्षी बल क्षेत्र परिक्षेत्र है।

चित्रानुसार बिन्दु O पर स्थित एकांक बिन्दु आवेश q के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E को बिन्दु P से बिन्दु Q तक मार्ग PP_1Q द्वारा ले जाया जाता है जहाँ P की O से दूरी R_A व Q की O से दूरी R_B है।

अतः किया गया कार्य

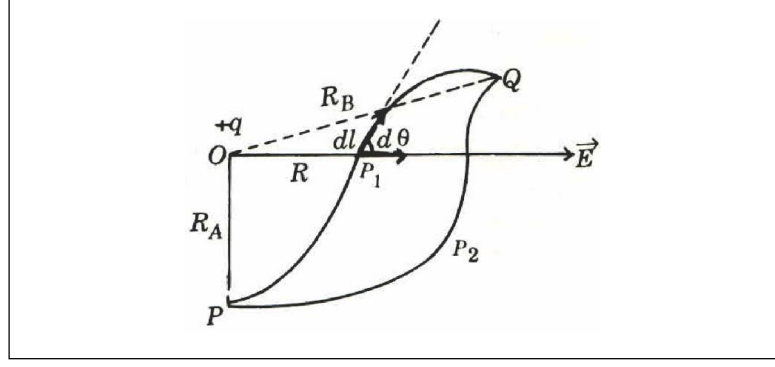
$$W'_{P \rightarrow Q} = W'_{P \rightarrow P_1} + W'_{P_1 \rightarrow Q}$$

$$= - \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \left(- \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) + \left(- \int_{P_1}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \right)$$

$$W'_{P \rightarrow Q} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{P_1}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

लेकिन $= \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ क्योंकि PP_1 के लिए E तथा $d\vec{l}$ लम्बवत् है। अतः



चित्र क्र. 1.12: विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति

$$W_{P \rightarrow Q}' = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{P_1}^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

इस बिन्दु आवेश q के कारण उससे R दूरी पर स्थित विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

$$\begin{aligned} W_{P \rightarrow Q}' &= \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dR \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R} \right)_{R_A}^{R_B} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned}$$

इसी प्रकार एकांक धनावेश को समान बिन्दु आवेश q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र \vec{E} में बिन्दु P से बिन्दु Q तक बहुत से मार्गों द्वारा ले जायें तो कुल कार्य इनके द्वारा किये गये कार्यों के योग के बराबर होगा।

$$\text{अतः} \quad W_{P \rightarrow Q}' = - \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$

स्पष्ट है कि एकांक धनावेश को बिन्दु आवेश q के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E में बिन्दु P से Q तक ले जाने में दोनों मार्गों में किया गया कार्य समान है। अतः विद्युत क्षेत्र \vec{E} का किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच रेखीय समाकलन उन बिन्दुओं के बीच के मार्ग पर निर्भर नहीं करता है, बल्कि केवल बिन्दुओं की स्थिति पर निर्भर करता है ऐसे क्षेत्र संरक्षी बल क्षेत्र कहलाता है। एक संरक्षी बल क्षेत्र के लिए कर्ल (curl) का मान शून्य होता है अतः $\text{Curl } \vec{E} = 0$ होता है।

1.9 विद्युत विभव (Electric Potential)

विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत विभव उस कार्य से मापा जाता है जो एकांक धन आवेश को अनन्त (Infinity) से उस बिन्दु तक, वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता के विरुद्ध लाने में करना पड़ता है।

यदि किसी परीक्षण धन आवेश q_0 को अनन्त से विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बिन्दु तक लाने में W कार्य करना पड़ता हो तो विद्युत विभव की परिभाषा के अनुसार, उस बिन्दु पर विद्युत विभव,

$$V = \frac{W}{q_0} \text{ होगा} \quad \dots (1)$$

उपर्युक्त समीकरण में, कार्य W तथा q_0 , दोनों अदिश राशियाँ हैं अतः विद्युत विभव V भी एक अदिश राशि होगी।

समीकरण (1) से $W = Vq_0$, आवेश को विद्युत क्षेत्र में चलाने में किया गया कार्य है। यह कार्य आवेश में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहता है।

यदि $q_0 = 1$ तो $W = V$, अर्थात् “विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर एकांक आवेश की स्थितिज ऊर्जा उस बिन्दु पर वैद्युत विभव के तुल्य होती है।”

वैद्युत विभव का मात्रक (Unit of Potential)

दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर (Potential Difference between Two Points) – किसी वैद्युत क्षेत्र में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर उस कार्य के बराबर होता है जो एकांक धन आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में करना पड़ता है। यदि परीक्षण धन आवेश q_0 को बिन्दु 1 से बिन्दु 2 तक ले जाने में किया गया कार्य W_{12} हो तो उनके बीच का विभवान्तर,

$$V_2 - V_1 = \frac{W_{12}}{q_0}$$

$$\text{या} \quad W_{12} = q_0(V_2 - V_1) \quad \dots (2)$$

$$\text{अर्थात्} \quad \text{कार्य} = \text{आवेश} \times \text{विभवान्तर}$$

किसी आवेश को वैद्युत क्षेत्र में स्थित किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य आवेश के एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक जाने के पथ पर निर्भर नहीं करता। स्पष्टतः विभवान्तर अदिश राशि है। विभवान्तर का S.I. मात्रक जूल/कूलम अथवा वोल्ट है।

अन्तर्राष्ट्रीय (S.I.) पद्धति में, वैद्युत विभव का मात्रक वोल्ट (Volt) कहलाता है। इस पद्धति में कार्य का मात्रक जूल एवं आवेश का मात्रक कूलॉम है, अतः यदि $W = 1$ जूल, $q_0 = 1$ कूलॉम तो $V_2 - V_1 = 1$ वोल्ट अर्थात् यदि एक कूलॉम आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में 1 जूल कार्य करना पड़ता है तो उन बिन्दुओं के बीच का विभवान्तर 1 वोल्ट कहा जाता है।

टिप्पणी

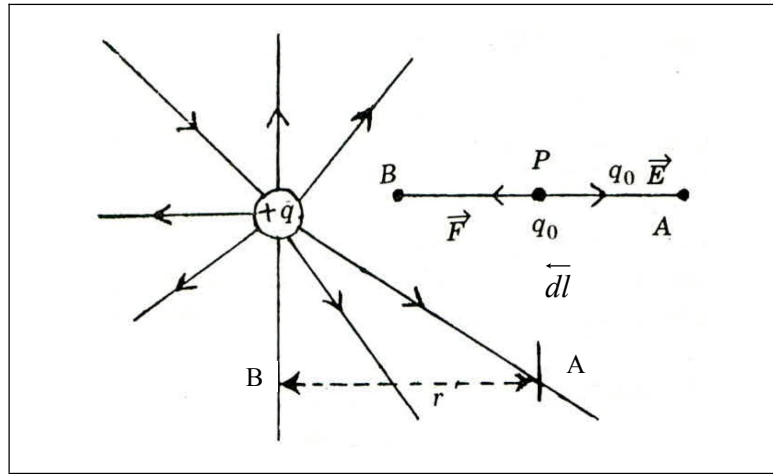
$$1 \text{ वोल्ट} = \frac{1 \text{ जूल}}{1 \text{ कूलॉम}} \text{ होगा}$$

टिप्पणी

1.10 बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विभव (Potential at a point due to a Point Charge)

चित्र 1.13 में माना एक बिन्दु आवेश $+q$ है एवम इसके चारों ओर इसका वैद्युत क्षेत्र है। इस आवेश से r दूरी पर एक बिन्दु P है, बिन्दु P पर q_0 आवेश के कारण विभव ज्ञात करना है। माना बिन्दु P तथा $+q$ को मिलाने वाली रेखा पर दो बिन्दु A तथा B है। माना एक परीक्षण आवेश q_0 को बिन्दु A से बिन्दु B तक लाया जाता है यदि A तथा B बिन्दुओं के बीच विभवान्तर $V_B - V_A$ हो तो

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



चित्र क्र. 1.13: बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विभव

चित्रानुसार E दायीं ओर को है तथा dl बायीं ओर को है तथा इनके बीच 180° का कोण है। अतः

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl \cos 180^\circ = -Edl$$

किन्तु $dl = dr$... (2)

$$E \cdot dl = -E dr$$

समीकरण (2) से $E \cdot dl$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} E \cdot dr$$

चूँकि बिन्दु आवेश $+q$ से r दूरी पर वैद्युत क्षेत्र की वैद्युत तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore V_B - V_A &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \end{aligned}$$

$$\text{या } V_B - V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \quad \dots (3)$$

यदि बिन्दु A को अनन्त पर ले लिया जाये, तो $V_A = 0$ जब $r_A = \infty$

$$\therefore V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_B}$$

अतः बिन्दु P पर विभव V का मान दूरी r_B को r के बराबर रखने पर प्राप्त होता है। अतः

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \text{ वोल्ट} \quad \dots (4)$$

किसी माध्यम जिसका परावैद्युतांक k है q में विभव $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{kr}$ वोल्ट होगा।

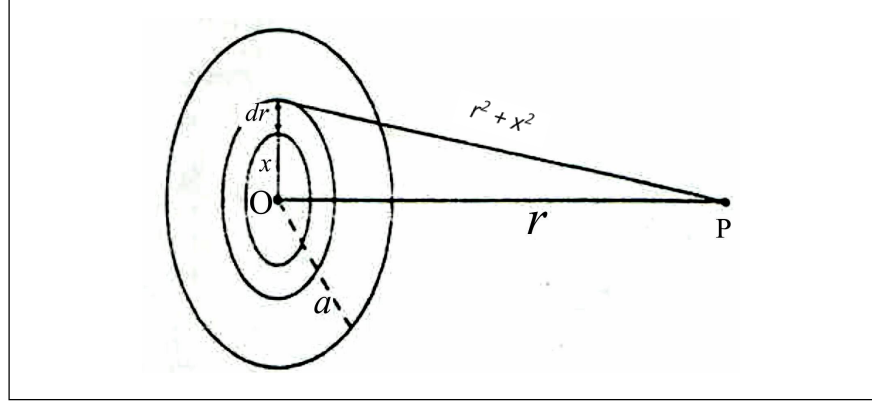
$$\text{इसी प्रकार व्यापक रूप में } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \text{ होगा}$$

1.11 एकसमान आवेशित चकती के कारण इसकी अक्ष पर विद्युत विभव तथा विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता (Electric Potential and Intensity of Electric Field due to a Uniformly Charged Disc on its Axis)

माना चित्र 1.14 में a त्रिज्या की एक वृत्तीय चकती पर आवेश q एकसमान रूप से वितरित है तो आवेश का पृष्ठ घनत्व $\sigma = \frac{q}{\pi a^2}$

टिप्पणी

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.14: एकसमान आवेशित वृत्तीय चकती के कारण इसकी अक्ष पर विद्युत् विभव

हमें चकती की अक्ष पर इसके केन्द्र O से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत् विभव की गणना करनी है।

यदि बिन्दु O को केन्द्र मानकर x त्रिज्या तथा dx मोटाई का एक वलय लें तो वलय पर आवेश $dq = \text{वलय का क्षेत्रफल} \times \text{आवेश का पृष्ठ घनत्व} = 2\pi x dx \sigma$

इस वलय के प्रत्येक बिन्दु से बिन्दु P की दूरी $\sqrt{r^2 + x^2}$ होगी, वलय के कारण बिन्दु P पर विभव

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi x dx \sigma}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

अतः सम्पूर्ण चकती के कारण बिन्दु P पर विभव उपर्युक्त समीकरण को x की विमाओं $x = 0$ से $x = a$ तक समाकलित करके ज्ञात कर सकते हैं, अर्थात् सम्पूर्ण चकती के कारण बिन्दु P पर विभव,

$$V = \int_0^a \frac{2\pi x dx \sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

माना $r^2 + x^2 = t$ तो $2\pi x dx = dt$ तब सीमायें भी परिवर्तित होगी

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad V &= \int_{r^2}^{a^2+r^2} \frac{\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(\sqrt{t}) \right]_{r^2}^{a^2+r^2} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + r^2} - r \right] \quad \dots (1) \end{aligned}$$

(i) स्पष्ट है कि चकती के केन्द्र पर $r = 0$, $V = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$

(ii) चकती के केन्द्र से अति दीर्घ दूरी पर, अर्थात् जब $r > a$ तो द्विपद प्रमेय से

$$\sqrt{a^2 + r^2} = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} = r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} \right) \right] = r + \frac{a^2}{2r}$$

तब समीकरण (1) से,

$$V = \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{क्योंकि } q = \pi a^2 \sigma)$$

अर्थात् चकती के कारण अति दीर्घ दूरी पर विभव उतना ही होता है जितना कि एक बिन्दु आवेश q के कारण होता है, अतः अतिदीर्घ दूरी के लिए चकती पर वितरित आवेश, एक बिन्दु आवेश की भाँति व्यवहार करता है

अब बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

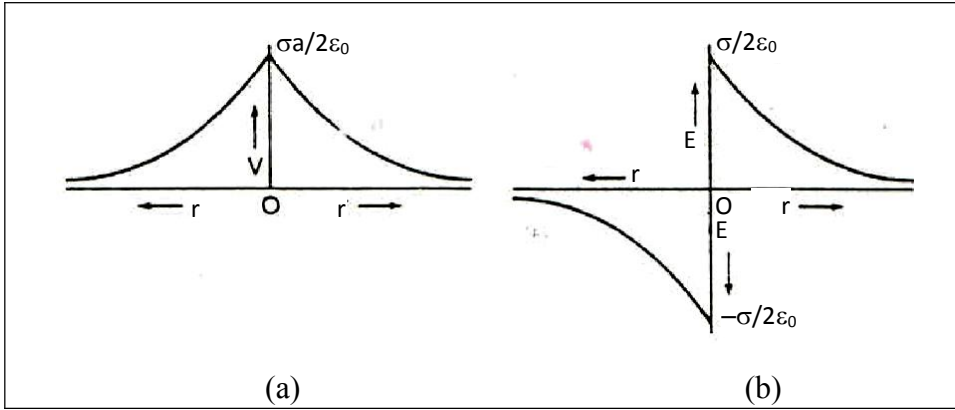
$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{d}{dr} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \sqrt{a^2 + r^2} - r \right\} \right]$$

या
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) \quad \dots (2)$$

अति दीर्घ दूरी पर (जबकि $r > a$),
$$E = \frac{\pi a^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) से स्पष्ट है कि एकसमान आवेशित अनन्त चादर (infinite sheet of charge) के लिए $a = \infty$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



चित्र क्र. 1.15: एकसमान आवेशित चकती की अक्ष पर विभव तथा विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का दूरी के साथ परिवर्तन

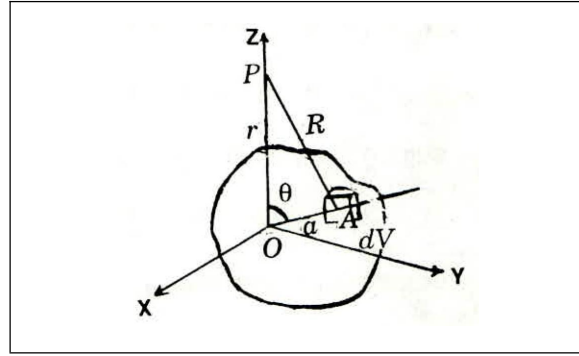
चित्र 1.15(a) में विभव का चकती के केन्द्र से दूरी के साथ परिवर्तन तथा चित्र 1.15(b) में विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का दूरी के साथ परिवर्तन प्रदर्शित है।

टिप्पणी

1.12 असमान आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत विभव (Electric Potential at a Point due to Non Uniform Charge Distribution)

चित्र 1.16 में किसी क्षेत्र में आवेश इस प्रकार वितरित है कि किसी बिन्दु $A(x, y, z)$ पर आवेश का आयतन घनत्व $\rho(x, y, z)$ इस दिये गये आवेश वितरण में किसी बिन्दु O को मूल बिन्दु मानकर हमें Z -अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु P पर, जो मूल बिन्दु से अति दीर्घ दूरी r पर है, विद्युत विभव की गणना करनी है।

माना बिन्दु A पर एक छोटा सा आयतन अवयव dV है जिसमें आवेश $dq = \rho(x, y, z) dV$



चित्र क्र. 1.16: असमान आवेश वितरण के कारण विद्युत विभव

अब यदि बिन्दु A की मूल बिन्दु से दूरी a है, रेखा OA द्वारा Z -अक्ष से बना कोण θ है तथा बिन्दु A से बिन्दु P की दूरी R है तो आयतन अवयव dV के कारण बिन्दु P पर विभव $dV = \frac{\rho(x, y, z) dV}{4\pi\epsilon_0 R}$ तथा सम्पूर्ण आवेश वितरण के कारण बिन्दु P पर विद्युत् विभव

$$V = \iiint_V \frac{\rho(x, y, z) dV}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \dots (1)$$

लेकिन चित्र 1.16 से,

$$R^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{R} = (r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

अब चूँकि $r > a$, अतः द्विपद प्रमेय से,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^2 - \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) + \dots \right]$$

$\frac{a}{r}$ की उच्च घातों को छोड़ने पर समीकरण (1) से बिन्दु P पर विद्युत् विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \iiint_V \rho dV + \frac{1}{r^2} \iiint_V a \cos \theta \rho dV + \frac{1}{r^3} \iiint_V \frac{a^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2} \rho dV + \dots \right]$$

या
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{A_0}{r} + \frac{A_1}{r^2} + \frac{A_2}{r^3} + \dots \right] \quad \dots (2)$$

जहाँ

$$A_0 = \iiint_V \rho dV, A_1 = \iiint_V \rho a \cos \theta dV, A_2 = \iiint_V \frac{\rho a^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) dV \dots$$

समीकरण (2) से स्पष्ट है कि बिन्दु P विद्युत् विभव को $\frac{1}{r}$ की घातीय श्रेणी (power series) द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ $A_0, A_1, A_2 \dots$ आदि के मान आवेश वितरण पर निर्भर करते हैं। $A_0 = \iiint_V \rho dv =$ आवेश वितरण का

कुल आवेश, अतः इसे एकल ध्रुव आघूर्ण (mono pole moment) कहते हैं। यदि आवेश वितरण में बराबर धनात्मक आवेश वितरित है तो स्पष्टतः A_0 का मान शून्य होगा। यदि A_0 का मान शून्य नहीं है तो बिन्दु P पर विभव $V = \frac{A_0}{4\pi\epsilon_0 r}$ होगा।

$$A_1 = \iiint_V \rho a \cos \theta dV = \iiint_V \rho z dV$$

(जहाँ $z = a \cos \theta$, a का Z -अक्ष पर प्रक्षेप हैं)

अतः इसे द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) कहते हैं। यदि $A_0 = 0$ है तो A_1 का मान मूल बिन्दु की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है तथा तब बिन्दु P पर विभव $V = \frac{A_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ होगा।

टिप्पणी

$$A_2 = \iiint_V \frac{\rho a^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) dV \quad \text{को चतुर्ध्रुव आघूर्ण (quadrupole}$$

moment) कहते हैं। यदि A_0 तथा A_1 दोनों शून्य हैं तो बिन्दु P पर विद्युत् विभव $V = \frac{A_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ होगा।

1.13 समविभवी पृष्ठ (Equipotential Surface)

एक अदिश फलन जिसका मान निर्देशांकों (x, y, z) पर निर्भर करता है। चूँकि यह एक अदिश फलन है अतः आकाश में एक स्थिर बिन्दु पर इसका मान स्थिर होगा

किसी अदिश फलन ϕ का ग्रेडियन्ट निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \hat{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \nabla\phi \quad \dots (1) \end{aligned}$$

अदिश क्षेत्रों में उन बिन्दुओं को जिन पर ϕ का मान समान होता है विभिन्न पृष्ठों से जोड़ा जा सकता है ये पृष्ठ समविभवी पृष्ठ (Equipotential Surface) कहलाते हैं।

माना एक निर्देश फ्रेम इस प्रकार है कि कोई समविभवी पृष्ठ इसके $x-z$ तल में है तथा y -अक्ष उस समविभवी पृष्ठ के लम्बवत् है। चूँकि ϕ मान समविभवी पृष्ठ पर परिवर्तित नहीं होता है, अतः

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

$$\text{अतः} \quad \text{grad } \phi = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \dots (2)$$

स्पष्टतः $\nabla\phi$ y -अक्ष के अनुदिश अर्थात् समविभवी पृष्ठ के अभिलम्बवत् होगा। अतः समीकरण (2) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot \hat{n}$$

जहाँ \hat{n} किसी बिन्दु पर समविभवी पृष्ठ के अभिलम्ब के अनुदिश एकांक वेक्टर है।

माना दो निकटस्थ बिन्दुओं A तथा B जिनके निर्देशांक क्रमशः (x, y, z) तथा $(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)$ है, पर वैद्युत विभव के मान ϕ तथा $\phi + \partial\phi$ हैं।

चूँकि $\phi(x, y, z)$ का एक फलन है अर्थात्

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\partial\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\partial z$$

$$\text{अथवा} \quad \left(\hat{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i}\partial x + \hat{j}\partial y + \hat{k}\partial z)$$

$$\partial\phi = \nabla\phi \cdot \vec{\partial r} \quad \dots (2)$$

यदि A तथा B बिन्दुओं के बीच क्षेत्र में वैद्युत क्षेत्र सामर्थ्य का मान E हो तो $\vec{\partial r}$ दूरी से पृथक्कृत दो बिन्दुओं A तथा B के बीच विभवान्तर का मान

$$\partial\phi = -E \cdot \vec{\partial r} \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) की तुलना करने पर

$$-\vec{E} \cdot \vec{\partial r} = \nabla\phi \cdot \vec{\partial r}$$

$$\text{अथवा} (E + \nabla\phi) \cdot \vec{\partial r} = 0$$

चूँकि $\vec{\partial r}$ स्वेच्छ है, अतः

$$\vec{E} + \nabla\phi = 0$$

$$\text{अथवा} \quad E = -\nabla\phi = -\text{grad } \phi$$

घटकों के रूप में

$$\vec{E} = (\hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z) = -\left(\hat{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)$$

\hat{i} , \hat{j} तथा \hat{k} के गुणांकों की तुलना करने पर

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \vec{E}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \vec{E}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

अतः किसी बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र का मान उस बिन्दु पर विभव का ऋणात्मक ग्रेडियन्ट होता है। $\vec{E} = -\nabla\phi$ का उपयोग कर दो $\vec{\partial r}$ दूरी से पृथक्कृत बिन्दुओं के बीच विभवान्तर को निम्न प्रकार से लिख जा सकता है:

$$\partial\phi = -\vec{E} \cdot \vec{\partial r} = (\nabla\phi) \cdot \vec{\partial r}$$

यदि $\vec{\partial r}$ पूर्णतया समविभवी पृष्ठ पर हो तो $\partial\phi = 0$, अतः उपर्युक्त समीकरण से

$$(\nabla\phi) \cdot \vec{\partial r} = 0$$

$$\text{या} \quad (\text{grad } \phi) \cdot \vec{\partial r} = 0$$

विभव या ग्रेडियन्ट शून्य नहीं होता, अतः डॉट गुणन से $\text{grad } \phi \cdot \vec{\partial r}$ अभिलम्बवत् होना चाहिए। अतः $\text{grad } \phi$ समविभवी पृष्ठ के अभिलम्बवत् है।

टिप्पणी

1.14 विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव में सम्बन्ध (Relation between Electric Field Intensity and Electric Potential)

विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता \vec{E} को विद्युत् विभव ϕ द्वारा आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। इसके लिये x तथा $x + dx$ पर दो बिन्दु इस प्रकार लिये गये हैं कि जिनके y तथा z निर्देशांक समान हैं, तो इकाई धन आवेश को x से $x + dx$ तक ले जाने में किया गया कार्य

$$\begin{aligned}\Delta W &= \phi(x + dx, y, z) - \phi(x) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx\end{aligned}\quad \dots (1)$$

विद्युत् क्षेत्र के रूप में,

$$\Delta W = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E}_x dx \quad \dots (2)$$

अतः समीकरण (1) और (2) से,

$$-\vec{E}_x dx = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx$$

$$\text{या} \quad \vec{E}_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \dots (3)$$

$$\text{इसी प्रकार,} \quad \vec{E}_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots (4)$$

$$\text{एवं} \quad \vec{E}_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \dots (5)$$

(3), (4) और (5) से,

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \\ &= -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \\ E &= -\vec{\nabla} \phi\end{aligned}\quad \dots (6)$$

यह किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव में सम्बन्ध है।

अर्थात् किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर विभव फलन की दूरी के सापेक्ष ऋणात्मक प्रणवता के बराबर होती है। ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि विद्युत् क्षेत्र की दिशा उच्च विभव की ओर होती है। चूँकि $\text{curl grad } \theta = 0$, अतः ऐसा विद्युत् क्षेत्र जिसके विभव फलन का ऋणात्मक

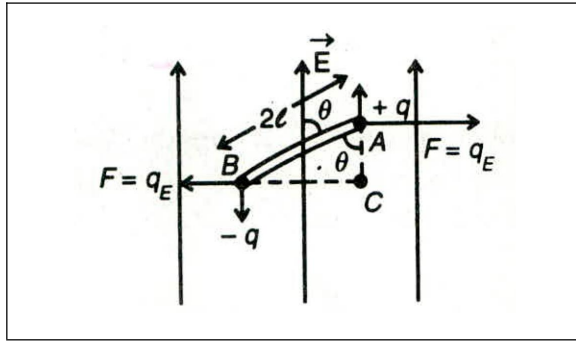
ग्रेडिएन्ट लेकर प्राप्त किया जाता है, आघूर्ण क्षेत्र या लैमलार क्षेत्र रहते हैं तथा यह क्षेत्र संरक्षी होता है।

स्थिर विद्युतिकी

1.15 एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे वैद्युत द्विध्रुव पर बल युग्म (Torque on an Electric Dipole in a Uniform Electric Field)

टिप्पणी

माना एक वैद्युत द्विध्रुव वैद्युत क्षेत्र E में θ कोण बनाते हुए लिया गया है। माना द्विध्रुव के $+q$ और $-q$ आवेश हैं। माना इन आवेशों के बीच की दूरी $2l$ है। विद्युत क्षेत्र E के कारण $+q$ आवेश पर बल $F = qE$ तथा $-q$ आवेश पर बल $F = qE$ विपरीत दिशा में लगता है। ये दोनों बल परिणाम में बराबर व एक दूसरे के समान्तर हैं, विपरीत दिशा में कार्य करते हैं, अतः ये एक बल युग्म का निर्माण करते हैं। इस बल युग्म को प्रत्यानयन बल युग्म कहते हैं, जो द्विध्रुव को घुमाकर क्षेत्र \vec{E} के समान्तर लाने का प्रयास करता है।



चित्र क्र. 1.17: एक समान वैद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव पर बल युग्म

अतः प्रत्यानयन बल युग्म का आघूर्ण

$$\tau = \text{बल} \times \text{दोनों बलों के बीच की दूरी की लंबवत दूरी}$$

$$\tau = F \times BC = qE \times BC$$

$$\Delta ABC \text{ में } \sin \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB \sin \theta = 2l \sin \theta$$

$$\tau = qE \cdot 2l \sin \theta$$

$$= 2ql E \sin \theta$$

वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण = आवेश \times दूरी

$$P = q \times 2l$$

$$\tau = P E \sin \theta$$

यदि $E = 1, \theta = 90^\circ$ तथा $\sin 90^\circ = 1$

$$\tau = P$$

टिप्पणी

किसी वैद्युत द्विध्रुव का द्विध्रुव आघूर्ण उस प्रत्यानयन बलयुग्म के आघूर्ण के बराबर होता है जो वैद्युत द्विध्रुव पर कार्य करता है, जबकि वैद्युत द्विध्रुव एकांक तीव्रता के समान वैद्युत क्षेत्र के लम्बवत् हो।

वैद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा व वैद्युत क्षेत्र में घुमाने में सम्पन्न कार्य

माना एक वैद्युत द्विध्रुव जिसका द्विध्रुव आघूर्ण P एवं तीव्रता E है, समान विद्युत क्षेत्र में रखा हुआ है। यदि द्विध्रुव आघूर्ण P व तीव्रता E के बीच का कोण θ है तो द्विध्रुव पर लगने वाले प्रत्यानयन बलयुग्म का आघूर्ण

$$\tau = PE \sin \theta$$

द्विध्रुव को $d\theta$ कोण से घुमाने पर किया गया कुल कार्य

$$dW = \tau d\theta$$

$$= PE \sin \theta d\theta$$

द्विध्रुव को θ कोण से घुमाने पर किया गया कार्य

$$W = \int_0^\theta dW$$

$$W = \int_0^\theta PE \sin \theta d\theta$$

$$= PE \int_0^\theta \sin \theta d\theta = PE [-\cos \theta]_0^\theta$$

$$= PE (-\cos \theta + \cos 0^\circ) = PE(1 - \cos \theta)$$

$$\boxed{W = PE(1 - \cos \theta)}$$

स्थिति (1) यदि $\theta = 0^\circ$ तो $W = PE(1 - \cos 0^\circ)$

$$= PE(1 - 1) = 0$$

स्थिति (2) यदि $\theta = 90^\circ$ तो $W = PE(1 - \cos 90^\circ)$

$$= PE(1 - 0) = PE$$

स्थिति (3) यदि $\theta = 180^\circ$ तो $W = PE(1 - \cos 180^\circ)$

$$= PE(1 + 1) = 2PE$$

स्थितिज ऊर्जा – वैद्युत द्विध्रुव को वैद्युत क्षेत्र में साम्य स्थिति से वर्तमान स्थिति तक घुमाने में किये गये कार्य को स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

माना एक वैद्युत द्विध्रुव जिसका द्विध्रुव आघूर्ण P है। इस वैद्युत द्विध्रुव को एक समान वैद्युत क्षेत्र E से θ कोण बनाते हुए रखा गया है। द्विध्रुव पर लगने वाले प्रत्यानयन बल युग्म का आघूर्ण

$$\tau = PE \sin \theta$$

द्विध्रुव को अल्पकोण $d\theta$ से घुमाने में किया गया कार्य

$$\begin{aligned} dW &= \tau d\theta \\ &= PE \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

द्विध्रुव को माध्य स्थिति $\theta = \pi/2$ से वर्तमान स्थिति θ तक घुमाने में किया गया कार्य

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi/2}^{\theta} PE \sin \theta \cdot d\theta = PE \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta d\theta \\ &= PE(-\cos \theta)_{\pi/2}^{\theta} - PE(\cos \theta - \cos \pi/2) \\ W &= -PE \cos \theta \end{aligned}$$

यह कार्य द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा के बराबर होता है अतः वैद्युत द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

$$U = -PE \cos \theta$$

$$U = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

स्थिति (1) यदि $\theta = 0^\circ$ तो

$$U = -PE \cos 0^\circ = -PE \text{ जो कि न्यूनतम है अतः}$$

इस स्थिति में द्विध्रुव स्थायी संतुलन में होता है।

स्थिति (2) यदि $\theta = 90^\circ$ तो

$$U = -PE \cos 90^\circ = 0 \text{ यही कारण है कि } \theta = \pi/2 = 90^\circ$$

यह द्विध्रुव की मानक स्थिति कहलाती है।

स्थिति (3) यदि $\theta = 180^\circ$ तो

$$\begin{aligned} U &= -PE \cos 180^\circ \\ &= PE \text{ तो कि अधिकतम है} \end{aligned}$$

इस स्थिति में द्विध्रुव अस्थायी संतुलन में होता है।

1.16 विद्युत फ्लक्स (Electric Flux)

विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी क्षेत्रफल से अभिलम्बवत् गुजरने वाली कुल बल रेखाओं की संख्या को उस पृष्ठ से संबद्ध विद्युत फ्लक्स कहते हैं। इसे ϕ_E से प्रदर्शित करते हैं।

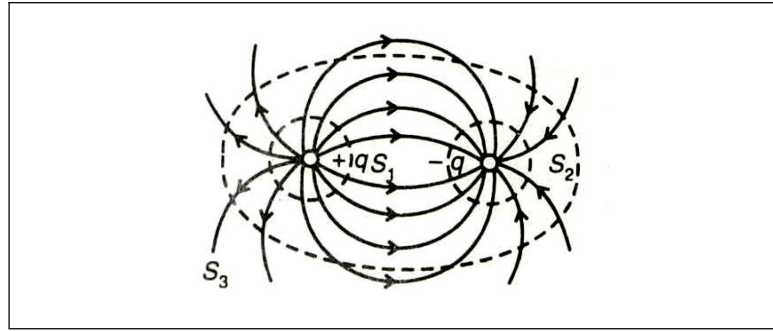
टिप्पणी

टिप्पणी

धनात्मक विद्युत फ्लक्स – जब किसी पृष्ठ से गुजरने वाली विद्युत बल रेखाएँ बाहर की ओर निर्गत होती हैं तो विद्युत फ्लक्स धनात्मक होता है। इस स्थिति में विद्युत बल रेखाएँ अपसरित होती हैं।

ऋणात्मक विद्युत फ्लक्स – जब किसी पृष्ठ से गुजरने वाली विद्युत बल रेखाएँ अन्दर की ओर प्रवेश करती हैं, तो विद्युत फ्लक्स ऋणात्मक होता है। इस स्थिति में विद्युत बल रेखाएँ अभिसरित होती हैं।

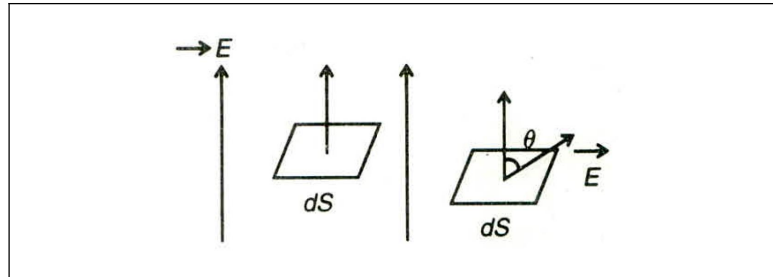
चित्र 1.18 में बंद पृष्ठ S_1 के लिए विद्युत फ्लक्स धनात्मक, S_2 के लिए ऋणात्मक तथा S_3 के लिए लगभग शून्य हैं।



चित्र क्र. 1.18: विद्युत फ्लक्स रेखायें

गणितीय रूप – यदि विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E तथा उसके लम्बवत् स्थित पृष्ठ का क्षेत्रफल ds हो, तो उस पृष्ठ तल से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

$$\phi_E = E \cdot ds$$



चित्र क्र. 1.19: पृष्ठ तल पर सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

किन्तु यदि विद्युत क्षेत्र E , क्षेत्रफल ds वाले पृष्ठ के अभिलम्ब से θ कोण बनाये तो अभिलम्ब की दिशा में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का घटक $E \cos \theta$ होगा। अतः इस स्थिति में पृष्ठ से संबद्ध विद्युत फ्लक्स

$$d\phi_E = \text{क्षेत्रफल} \times E \text{ का पृष्ठ } ds \text{ के अभिलंब दिशा में घटक}$$

$$d\phi_E = E \cos \theta ds$$

या $d\phi_E = E ds \cos \theta$

$$d\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad \dots (1)$$

(i) यदि $\theta = 90^\circ$ अर्थात् P पृष्ठ विद्युत-क्षेत्र के समान्तर हो, तो

$$\phi_E = E ds \cos 90^\circ = 0$$

इस प्रकार यदि पृष्ठ विद्युत क्षेत्र के समान्तर है तो उससे गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स का मान शून्य होता है।

(ii) यदि $\theta = 0^\circ$ अर्थात् पृष्ठ विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् हो, तो

$$\begin{aligned} d\phi_E &= E ds \cos 0^\circ \\ &= E ds \text{ (अधिकतम)} \end{aligned}$$

इस प्रकार यदि पृष्ठ विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् है तो उससे गुजरने वाले फ्लक्स का मान अधिकतम होता है।

समीकरण (1) में ds बड़े पृष्ठ S का अल्प खण्ड है ऐसी स्थिति में बड़े पृष्ठ को छोटे-छोटे पृष्ठ ds में विभाजित किया जा सकता है। अतः पृष्ठ S से गुजरने वाला कुल फ्लक्स इन छोटे पृष्ठों से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्सों के योगफल के बराबर होगा।

अतः पृष्ठ S से गुजरने वाला कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi_E = \int_s E \cos \theta ds$$

$$\phi_E = \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

विद्युत फ्लक्स का S.I. मात्रक न्यूटन-मीटर² प्रति कूलॉम तथा विमीय सूत्र $ML^2T^{-3}A^{-1}$ है।

1.17 गॉस प्रमेय (Gauss Theorem)

गॉस का प्रमेय किसी बंद सतह से सम्बद्ध या बंद पृष्ठ के अभिलम्बवत् गुजरने वाली विद्युत रेखाओं की सम्पूर्ण संख्या अर्थात् सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स तथा बन्द पृष्ठ के अन्दर विद्यमान कुल आवेश में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

अतः गॉस के प्रमेय के अनुसार किसी विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बंद पृष्ठ से होकर अभिलम्बवत् गुजरने वाली विद्युत बल रेखाओं की संख्या अर्थात् सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स, बन्द पृष्ठ के अन्दर विद्यमान आवेश का $\frac{1}{\epsilon_0}$ गुना (हवा या निर्वात

में) तथा अन्य माध्यम में $\frac{1}{\epsilon_0 K}$ होता है।

अर्थात् गणितीय रूप में सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

अतः गॉस प्रमेय से

सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स $= \frac{1}{\epsilon_0} \times$ पृष्ठ के भीतर कुल आवेश

$$\phi_E = \iint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \times Q = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

जहाँ Q पृष्ठ के अन्दर स्थित समस्त आवेशों का योग है। अर्थात्

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots = \Sigma q$$

गॉस प्रमेय से

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

यदि विद्युत क्षेत्र में स्थित पृष्ठ के अन्दर कोई आवेश नहीं हो तथा आवेश पृष्ठ के बाहर स्थित है तो सतह का सम्पूर्ण विद्युत फ्लक्स शून्य होता है।

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0$$

उपपत्ति – माना S एक बन्द पृष्ठ है, इस पृष्ठ के अन्दर बिन्दु O पर आवेश q स्थित है। इस बन्द पृष्ठ पर कोई बिन्दु P है जिसके चारों ओर का क्षेत्रफल ds है।

कूलॉम नियम से बन्द पृष्ठ में स्थित q आवेश के कारण बिन्दु P पर हवा या निर्वात में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \dots (1)$$

माना क्षेत्रफल ds तथा विद्युत क्षेत्र E के बीच कोण θ है तो क्षेत्रफल ds से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\begin{aligned} d\phi_E &= \vec{E} \cdot \vec{ds} \\ &= E ds \cos \theta \end{aligned} \quad \dots (2)$$

E का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\begin{aligned} d\phi_E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} ds \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{ds \cos \theta}{r^2} \end{aligned}$$

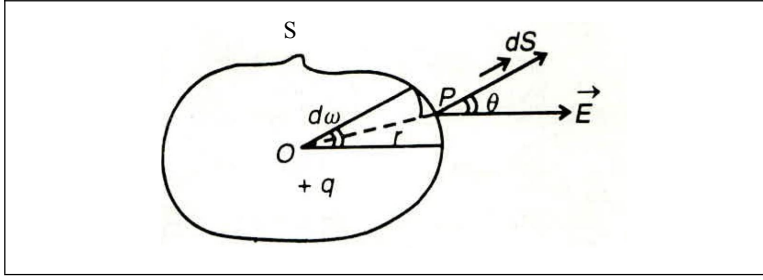
$ds \cos \theta$ स्थिति वेक्टर \vec{r} के लम्बवत् ds का प्रक्षेप है। $ds \cos \theta$ को r^2 से भाग करने पर प्राप्त राशि का क्षेत्रफल ds द्वारा आवेश q पर अन्तरित धन कोण का मान है अर्थात्

$$\frac{ds \cos \theta}{r^2} = d\omega$$

$$d\phi_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\omega$$

अतः सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ पर सम्पूर्ण वैद्युत फलक्स

$$\begin{aligned} &= \Sigma d\phi_E \\ &= \Sigma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Sigma d\omega \end{aligned}$$



चित्र क्र. 1.20(a): गॉस का प्रमेय

किन्तु किसी भी बन्द पृष्ठ द्वारा अपने अन्दर स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कुल घन कोण 4π होता है अर्थात्

$$\Sigma d\omega = 4\pi$$

अतः बन्द पृष्ठ पर सम्पूर्ण वैद्युत फलक्स

$$\begin{aligned} \phi_E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 4\pi \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

इसी प्रकार यदि बन्द पृष्ठ के अन्दर विभिन्न आवेश q_1, q_2, q_3, \dots हों तो

$$\begin{aligned} \phi_E &= \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + \dots) \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \Sigma q \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

यह गॉस प्रमेय की प्रथम अवस्था है।

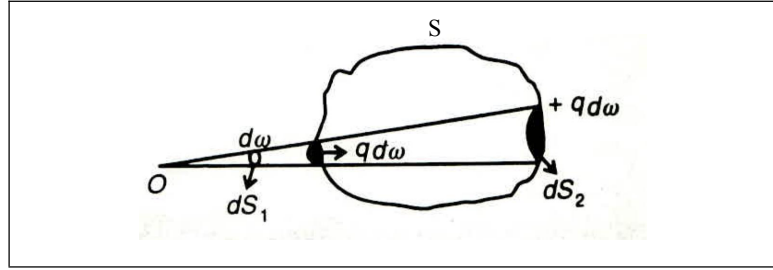
द्वितीय भाग – यदि आवेश बन्द पृष्ठ के अन्दर स्थित न हो बल्कि बन्द सतह के बाहर स्थित हो तो इस बाहरी आवेश के कारण बन्द सतह पर सम्पूर्ण अभिलम्बवत् वैद्युत फलक्स शून्य होता है।

टिप्पणी

टिप्पणी

माना बन्द पृष्ठ के बाहर स्थित बिन्दु O पर q आवेश है। O को शीर्ष मानकर एक शंकु खींचा जो बन्द पृष्ठ को दो क्षेत्रफलों ds_1 व ds_2 पर काटता है।

किसी क्षेत्रफल ds पर अभिलम्बवत् वैद्युत फ्लक्स धनात्मक होता है जबकि वह क्षेत्रफल से बाहर की ओर हो तथा क्षेत्रफल ds पर अभिलम्बवत् वैद्युत फ्लक्स ऋणात्मक होता है जबकि वह क्षेत्रफल के अन्दर की ओर हो।



चित्र क्र. 1.20(b): गॉस का प्रमेय

अतः q आवेश के कारण क्षेत्रफल ds_1 से गुजरने वाला

$$\text{वैद्युत फ्लक्स } d(\phi_E)_I = \frac{-q d\omega}{4\pi\epsilon_0}$$

इसी प्रकार q आवेश के कारण क्षेत्रफल ds_2 से गुजरने वाला

$$\text{वैद्युत फ्लक्स } d(\phi_E)_{II} = \frac{q d\omega}{4\pi\epsilon_0}$$

अतः ds_1 व ds_2 से घिरे बन्द पृष्ठ से होकर गुजरने वाला कुल फ्लक्स

$$d\phi_E = -\left(\frac{q d\omega}{4\pi\epsilon_0}\right) + \left(\frac{q d\omega}{4\pi\epsilon_0}\right) = 0$$

अर्थात् सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स का मान शून्य होता है।

$$\text{अर्थात् } \int_S d\phi_E = 0$$

$$\text{या } \phi_E = 0$$

1.18 गॉस प्रमेय के अनुप्रयोग (Application of Gauss's Theorem)

गॉस प्रमेय को प्रयुक्त कर हम निम्नलिखित आवेशित निकायों के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करेंगे—

- (i) बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता
- (ii) आवेशित गोला के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

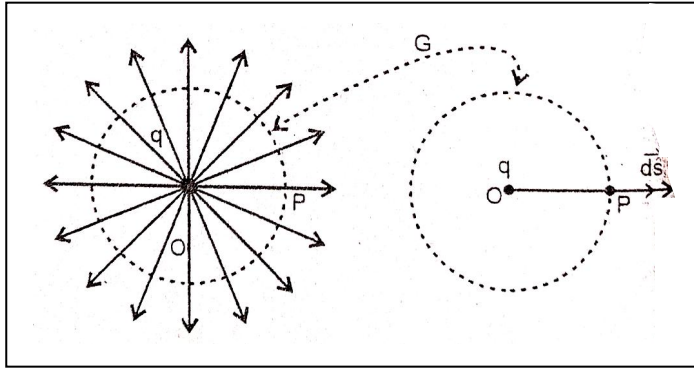
- (iii) एकसमान आवेशित बेलन के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता
- (iv) आवेशित समतल चालक के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता
- (v) किसी भी आकार के आवेशित चालक के समीप किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता।

उपर्युक्त अनुप्रयोगों में, आवेश वितरण के सममिति को ध्यान में रखकर तदानुसार एक काल्पनिक बन्द पृष्ठ लिया जाता है, जिसमें हम गॉस प्रमेय प्रयुक्त करते हैं, इस काल्पनिक बन्द पृष्ठ को गॉसियन पृष्ठ कहा जाता है तथा यह आवश्यक है कि जिस बिन्दु पर तीव्रता ज्ञात करना होता है वह गॉसियन पृष्ठ पर हो।

बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Electric Field of any Point due to Point Charge)

माना एक बिन्दु आवेश q बिन्दु O पर स्थित है तथा P कोई बिन्दु है, जिस पर गॉस प्रमेय को प्रयुक्त कर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता E का मान निकालना है। माना बिन्दु P का O से दूरी r है अर्थात् $OP = r$ । अब O को केन्द्र मानकर तथा $OP = r$ त्रिज्या लेकर एक गोलाकार गॉस पृष्ठ G की रचना करते हैं। स्पष्ट है कि बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता \vec{E} की दिशा त्रिज्यीय अर्थात् OP के अनुदिश तथा यह गॉसियन पृष्ठ G के अभिलम्ब की दिशा में होगी।

गॉसियन पृष्ठ G के प्रत्येक बिन्दु पर भी विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का मान समान होगा तथा उस बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की दिशा अर्थात् बल रेखाओं की दिशा त्रिज्यीय होगी (चित्र 1.21)।



चित्र क्र. 1.21: बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

अब गॉसियन पृष्ठ G के लिये गॉस प्रमेय प्रयुक्त करने पर,

$$\phi_E = \oiint_s \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\text{या } \oiint_G E \cdot dS \cdot \cos \theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$

चूँकि $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = \cos 0^\circ = 1$

$$\oiint_G E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

टिप्पणी

चूँकि यहाँ गॉसियन पृष्ठ G एक गोला है, जिसके प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता समान होगी। अतएव E को हम समाकलन के बाहर निकाल सकते हैं तथा $G = 4\pi r^2$, जिससे

$$E \oiint_{4\pi r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E \cdot [S]_{4\pi r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{अतः } \boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}}$$

यह बिन्दु आवेश q के कारण इससे r दूरी पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का मान है।

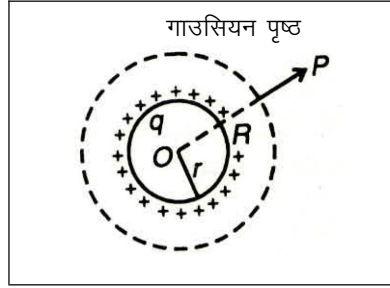
1.19 एकसमान आवेशित चालक गोले (गोलीय खोल) के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव (Electric Field Intensity and Electric Potential due to a Uniform Charged Conducting Sphere or Spherical Sheet)

माना A एकसमान आवेशित गोला है जिसका केन्द्र O है। माना इस गोले पर $+q$ आवेश समान रूप से वितरित है। चूँकि गोला चालक पदार्थ का है, अतः सम्पूर्ण आवेश गोले के बाहरी पृष्ठ पर स्थित रहता है तथा गोले के अन्दर कोई आवेश नहीं होता। गोले के केन्द्र से R दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता की गणना निम्नलिखित तीन स्थितियों में की जा सकती है—

- (1) जबकि बिन्दु P आवेशित गोले के बाहर स्थित हो।
- (2) जबकि बिन्दु P आवेशित गोले के पृष्ठ पर स्थित हो।
- (3) जबकि बिन्दु P आवेशित गोले के अन्दर स्थित हो।

स्थिति (i) जबकि बिन्दु P आवेशित गोले के बाहर स्थित हो — माना r त्रिज्या का एक गोला q आवेश से समरूप आवेशित है। माना बिन्दु P गोले के बाहर केन्द्र O से R दूरी पर स्थित है। बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता की गणना गॉस प्रमेय का उपयोग करके ज्ञात की जानी है अर्थात् ($R > r$) बिन्दु O

को केन्द्र मानकर $OP = R$ त्रिज्या का दूसरा गोला खींचा जिसे गॉसियन पृष्ठ कहते हैं। अतः गॉसियन पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स



चित्र क्र. 1.22: गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र तथा विभव

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \vec{E} \cdot 4\pi R^2 \quad \dots (1)\end{aligned}$$

जहाँ गॉसियन पृष्ठ का क्षेत्रफल $4\pi R^2$ होगा।

$$\text{गॉस के नियम के अनुसार गोले के पृष्ठ पर सम्पूर्ण फ्लक्स } \phi = \frac{q}{\epsilon_0} \dots (2)$$

समी. (1) व (2) से

$$\text{अतः } \vec{E}(4\pi R^2) = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\text{या } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

अतः किसी आवेशित चालक गोले (गोलीय खोल) की तीव्रता पृष्ठ के बाहर स्थित किसी बिन्दु पर उतनी ही होती है जितना सम्पूर्ण आवेश q को गोले के केन्द्र पर रखा जाने पर होती है।

बिन्दु P पर विभव

$$\begin{aligned}V &= -\int_{\infty}^R E dR \\ &= -\int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

स्थिति (ii) जबकि P गोले के पृष्ठ पर स्थित हो – यदि बिन्दु P गोले के पृष्ठ पर स्थित हो, तो इस स्थिति में आवेशित गोला के कारण इसके पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$R = r$$

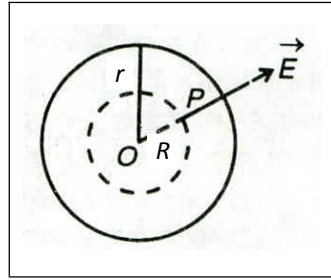
टिप्पणी

टिप्पणी

अतः
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

तथा वैद्युत विभव
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

स्थिति (iii) जबकि बिन्दु P गोले के अन्दर स्थित हो – चित्र 1.23 के अनुसार, केन्द्र O से दूरी R पर बिन्दु P स्थित है जहाँ हमें विद्युत क्षेत्र की तीव्रता एवं विभव की गणना करना है। O को केन्द्र मानकर तथा $OP(r)$ त्रिज्या का एक दूसरा गोला खींचा जिसे गॉसियन पृष्ठ कहते हैं इस पृष्ठ पर बिन्दु P स्थित है। इस आंतरिक गोले के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र समान तथा पृष्ठ के अभिलम्बवत् है तथा गॉसियन पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi R^2$



चित्र क्र. 1.23: गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र एवं विभव

अतः गॉसियन पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

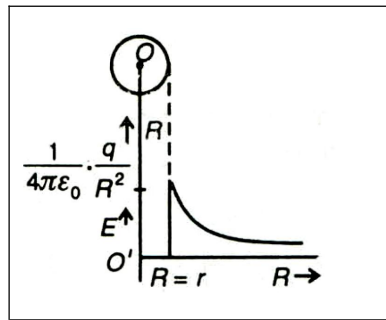
$$\begin{aligned} \phi &= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S E \, dS \\ &= E(4\pi R^2) \end{aligned}$$

चूँकि गोले के अन्दर कोई भी आवेश नहीं है, अतः गॉस के नियम के अनुसार

$$\phi = 0$$

$$\therefore \vec{E}(4\pi R^2) = 0$$

या
$$E = 0$$

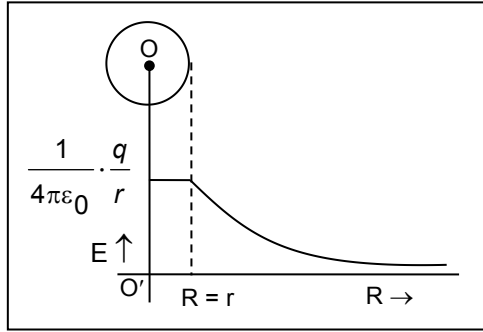


चित्र क्र. 1.24(a): एक समान आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का दूरी के साथ परिवर्तन

अतः एकसमान आवेशित चालक गोले के अन्दर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होती है।

बिन्दु P पर विभव

$$\begin{aligned} V_{R < r} &= - \int_{\infty}^R E dR \\ &= - \left[\int_{\infty}^r E_{R > r} dR + \int_r^R E_{R < r} dR \right] \\ &= - \left[\int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} dR + \int_r^R 0 \cdot dR \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \end{aligned}$$



चित्र क्र. 1.24(b): एकसमान आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत विभव का दूरी के साथ परिवर्तन

अर्थात् एकसमान आवेशित चालक गोले (या गोलीय खोल) के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत विभव ठीक उतना ही होता है जितना कि उसके पृष्ठ पर होता है।

चालक गोले के केन्द्र से R दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E में परिवर्तन चित्र 1.24(a) में प्रदर्शित है। चित्र 1.24(b) में विद्युत विभव का दूरी के साथ परिवर्तन प्रदर्शित है।

1.20 एक समान आवेशित कुचालक ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव (Electric Field Intensity and Electric Potential due to a Uniformly Charged Non-conducting Sphere)

माना किसी कुचालक पदार्थ का गोला जिसकी त्रिज्या r है समान रूप से q आवेश द्वारा आवेशित किया गया है। गोले का आवेश घनत्व

टिप्पणी

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

टिप्पणी

गोले के केन्द्र से R दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की गणना निम्नलिखित तीन स्थितियों में ज्ञात करनी है।

- (1) जबकि बिन्दु P गोले के बाहर स्थित है।
- (2) जबकि बिन्दु P गोले के पृष्ठ पर स्थित है।
- (3) जबकि बिन्दु P गोले के अन्दर स्थित है।

(1) जबकि बिन्दु P गोले के बाहर स्थित है—

माना गोले के केन्द्र O से R दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की गणना की जानी है। बिन्दु O को केन्द्र मानकर R त्रिज्या का गोला खींचा जिसे गॉसियन पृष्ठ कहते हैं, अतः गॉसियन पृष्ठ से गुजरने वाला कुल विद्युत फ्लक्स

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \\ &= E \times 4\pi R^2\end{aligned}\quad \dots (1)$$

लेकिन गॉस प्रमेय के अनुसार

$$\text{कुल फ्लक्स } \phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \dots (2)$$

समी. (1) व (2) से

$$\begin{aligned}\frac{q}{\epsilon_0} &= E(4\pi R^2) \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}\end{aligned}\quad \dots (3)$$

अतः बाह्य स्थित बिन्दुओं पर गोले का प्रभाव इस प्रकार होता है जैसे कि सम्पूर्ण गोले का आवेश उसके केन्द्र पर स्थित है।

बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$\begin{aligned}V &= -\int_{\infty}^R E dR = -\int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dR \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}\quad \dots (4)$$

(2) जबकि बिन्दु P गोले के पृष्ठ पर स्थित है—

इस स्थिति में $R = r$ तो समी. (3) में

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम} \quad \dots (5)$$

तथा
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

(3) जबकि बिन्दु P गोले के अन्दर स्थित है—

माना गोले के अन्दर बिन्दु P , केन्द्र O से R दूरी पर स्थित है जहाँ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। इस आंतरिक गोले के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र समान तथा उसके पृष्ठ के लम्बवत् होगा।

अतः इस आंतरिक गोले के पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_s \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_s E dS \\ &= E(4\pi R^2) \end{aligned} \quad \dots (6)$$

लेकिन गॉस की प्रमेय से

$$\phi = \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \dots (7)$$

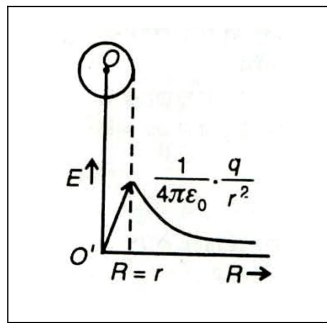
समी. (6) व (7) से

$$\therefore \vec{E}(4\pi R^2) = \left(\frac{1}{\epsilon_0}\right) \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

या
$$\vec{E} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

$$\vec{E} = \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qR}{r^3} \quad (\text{चूँकि } \rho = \frac{q}{4/3\pi r^3})$$

गोले के केन्द्र पर $R = 0$ अतः $E = 0$



चित्र क्र. 1.25(a): एकसमान आवेशित कुचालक गोले के विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का दूरी के साथ परिवर्तन

टिप्पणी

टिप्पणी

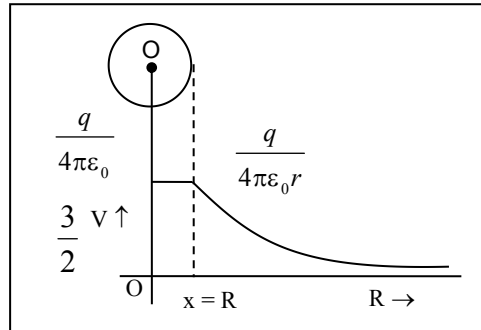
अर्थात् किसी कुचालक गोले के अन्दर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता उसके केन्द्र से दूरी के समानुपाती होती है। जैसे जैसे गोल के अन्दर जाते हैं विद्युत क्षेत्र की तीव्रता घटती जाती है तथा केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य हो जाती है।

बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$\begin{aligned}
 V &= -\int_{\infty}^R \vec{E} dR = -\left[\int_{\infty}^R \vec{E}_{R>r} dR + \int_r^R \vec{E}_{R<r} dR \right] \\
 &= -\left[\int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dR - \int_r^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{r^3} dR \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{q}{R} \right)_{\infty}^r - \frac{q}{r^3} \left(\frac{R^2}{2} \right)_r^R \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{(R^2 - r^2)}{2r^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2r^3} (3r^2 - R^2)
 \end{aligned}$$

केन्द्र O पर $R = 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore V &= \frac{3}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \\
 &= \frac{3}{2} \times \text{गोले के पृष्ठ पर विभव}
 \end{aligned}$$



चित्र क्र. 1.25(b): एकसमान कुचालक गोले के विद्युत विभव का दूरी के साथ परिवर्तन

अर्थात् गोले के केन्द्र पर विद्युत विभव उसके पृष्ठ पर विद्युत विभव का $3/2$ गुना होता है।

उपर्युक्त चित्र 1.25(a) में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का कुचालक गोले के केन्द्र से दूरी के साथ परिवर्तन प्रदर्शित है। चित्र 1.25(b) में एकसमान आवेशित कुचालक गोले के विद्युत विभव का दूरी के साथ परिवर्तन प्रदर्शित है।

टिप्पणी

1.21 अनन्त लम्बाई के एकसमान आवेशित बलेनाकार चालक के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव (Field Intensity and Electric Potential due to a Uniformly Charged Cylindrical Conductor of Infinite Length)

चित्र 1.26 में एक अनन्त लम्बाई तथा R त्रिज्या का बेलनाकार चालक एकसमान रूप से आवेशित है तथा बेलन की एकांक लम्बाई पर आवेश λ है। चूँकि बेलन चालक पदार्थ का बना है अतः समस्त आवेश केवल बेलन के बाहरी पृष्ठ पर रहता है। इसकी अक्ष से दूरी R पर एक बिन्दु P है जहाँ हमें विद्युत क्षेत्र की तीव्रता निम्नलिखित तीन स्थितियों में ज्ञात करनी है—

- जबकि बिन्दु P बेलन के बाहर स्थित है।
- जबकि बिन्दु P बेलन के पृष्ठ पर स्थित है।
- जबकि बिन्दु P बेलन के अन्दर स्थित है।

माना लम्बाई l तथा त्रिज्या R का एक समअक्षीय ऐसा बेलन जिसके वक्र पृष्ठ पर बिन्दु P है। चूँकि बेलन समान रूप से आवेशित है अतः उसकी अक्ष से समान दूरी पर स्थित किसी भी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता समान होगी। इसलिये गाउसियन तल के समतल पृष्ठों से होकर गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स शून्य होगा। अर्थात् केवल बेलन के वक्र पृष्ठ से फ्लक्स गुजरेगा चूँकि वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $2\pi rl$ है। अतः गाउसियन पृष्ठ से होकर गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \iint_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_s E dS = E \times 2\pi rl$$

(i) जबकि बिन्दु P बेलन के बाहर स्थित है — (अर्थात् $r > R$)

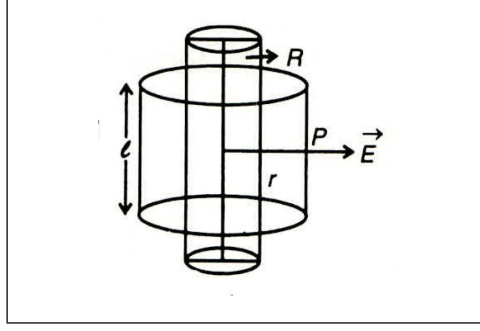
गॉस की प्रमेय के अनुसार बाह्य बेलन (गाउसियन पृष्ठ) से होकर गुजरने वाला

$$\text{कुल विद्युत फ्लक्स } \phi = \frac{1}{\epsilon_0}(\lambda l)$$

(क्योंकि इसके भीतर उपस्थित आवेश = बेलन की लम्बाई l पर आवेश = λl)

$$\text{अतः } E(2\pi rl) = \frac{1}{\epsilon_0}(\lambda l)$$

$$\text{या } E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \text{ न्यूटन/कूलॉम} \quad \dots (1)$$



चित्र क्र. 1.26: अनन्त लंबाई के एकसमान आवेशित बेलनाकार चालक के कारण विद्युत क्षेत्र

विभव ज्ञात करने के लिए किसी एक निर्देश बिन्दु तथा P के बीच विभवान्तर ज्ञात करते हैं। यदि बेलन की अक्ष से निर्देश बिन्दु की दूरी r_1 तथा विद्युत विभव V_{r_1} हो, तब निर्देश बिन्दु तथा P के बीच विभवान्तर

$$\begin{aligned} V(r) - V(r_1) &= -\int_{r_1}^r E dr \\ &= -\int_{r_1}^r \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda (\log_e r - \log_e r_1) \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad V(r) = V_{r_1} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e r_1 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e r$$

$$V(r_1) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e r + \text{नियतांक} \quad \dots (2)$$

$$\text{जहाँ } V(r) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e r_1 = \text{नियतांक}$$

(ii) जबकि बिन्दु P बेलन के पृष्ठ पर है—अर्थात् ($r = R$)

स्मीकरण (1) व (2) से

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

$$\text{तथा} \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log_e R + \text{नियतांक}$$

(iii) जबकि बिन्दु P बेलन के अन्दर है—अर्थात् ($r < R$)

चूँकि बेलन चालक है अतः समस्त आवेश बाहरी पृष्ठ पर ही होगा अतः गॉस की प्रमेय के अनुसार गॉउसियन पृष्ठ से सम्बन्धित फ्लक्स शून्य होगा

$$\therefore E = 0$$

यदि बेलन कुचालक या खोखला है तो भी बेलन के अन्दर आवेश शून्य होगा। अतः बेलन के अन्दर, प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

विशेष परिस्थिति—यदि बेलन कुचालक लेकिन ठोस है तो एकसमान वितरण के लिये आवेश का आयतन घनत्व

$$\rho = \frac{\lambda}{\pi R^2}$$

तब गॉस की प्रमेय के अनुसार बेलन के अंदर गॉसियन पृष्ठ से सम्बद्ध फ्लक्स

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\epsilon_0} \times (\pi r^2 l) \rho \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \times (\pi r^2 l) \frac{\lambda}{\pi R^2} \\ &= \frac{\lambda r^2 l}{\epsilon_0 R^2}\end{aligned}$$

$$\text{अतः } \vec{E} \times 2\pi r l = \frac{\lambda r^2 l}{\epsilon_0 R^2}$$

$$\text{या } \vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda r}{R^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

बेलन की अक्ष तथा उसके पृष्ठ के बीच विभवान्तर

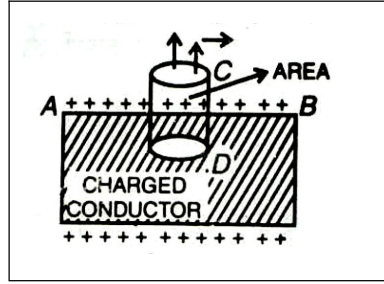
$$V_{(R)} - V_{(0)} = -\int_0^R \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda r}{R^2} dr = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^R = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0} \text{ नियतांक}$$

1.22 अनन्त समतल, आवेशित चालक के कारण इसके समीपस्थ बिन्दु पर विद्युत तीव्रता तथा विद्युत विभव (Electrical Field Intensity and Electrical Potential due to a Uniformly Charged Infinite Plane Conductor)

माना AB एकसमान समान्तर आवेशित चालक का तल है जिसके एकांक क्षेत्रफल पर आवेश का पृष्ठ घनत्व σ है। चालक का समस्त आवेश उसके पृष्ठ पर ही वितरित होता है पृष्ठ के भीतर कोई आवेश नहीं रहता। माना इस तल के अन्दर व बाहर दो बिन्दु C और D जो तल के समीप हैं, चित्रानुसार काल्पनिक (गाउसियन सतह) बेलन CD की रचना की। माना चालक के समीपस्थ बिन्दु C पर

विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। माना बेलन के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल ds है, अतः बेलन के ऊपरी पृष्ठ C पर सम्पूर्ण अभिलम्बवत् फ्लक्स $\phi = E ds$

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.27: अनंत समतल चालक के कारण विद्युत क्षेत्र

चूँकि चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र का मान शून्य होता है अतः बिन्दु D से गुजरने वाला विद्युत फ्लक्स शून्य होगा अतः सम्पूर्ण बेलन CD पर सम्पूर्ण अभिलम्बवत् फ्लक्स

$$\phi_E = E ds + 0 = E ds$$

बेलन के अन्दर चादर का क्षेत्रफल ds है अतः कुल आवेश σds होगा।

अतः गॉसियन पृष्ठ से सम्बद्ध वैद्युत फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma ds$$

अतः
$$E ds = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma ds)$$

या
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

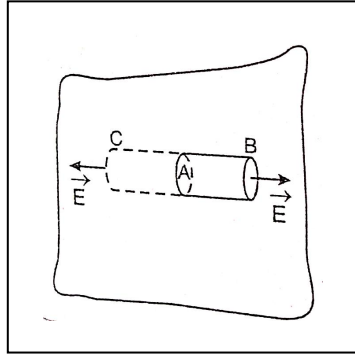
चालक से लम्बवत् दूरी x_1 व x_2 पर स्थित बिन्दुओं के बीच विभवान्तर

$$\begin{aligned} V_{x_2} - V_{x_1} &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx \\ &= - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

1.23 एकसमान आवेशित अनन्त कुचालक चादर के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव (Electrical Field Intensity and Electric Potential due to a Uniformly Charged Infinite Non-conducting Sheet)

टिप्पणी

माना कि चित्र 1.28 में अनन्त लम्बाई व चौड़ाई की एक कुचालक चादर है जिस पर एकसमान रूप से आवेश वितरित है तथा आवेश का पृष्ठ घनत्व (= आवेश प्रति एकांक क्षेत्रफल) σ है। हमें इस चादर के समीप स्थित बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता की गणना करनी है।



चित्र क्र. 1.28: अनन्त कुचालक चादर के कारण विद्युत् क्षेत्र

माना एक ऐसे बेलनाकार बन्द पिल बॉक्स (pill box) की कल्पना करते हैं जिसके दोनों समतल पृष्ठ चादर के समान्तर हैं तथा एक पृष्ठ B , चादर के एक ओर तथा दूसरा पृष्ठ C , चादर के दूसरी ओर है। माना कि बेलन के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है। चादर की सममिति से यह कहा जा सकता है कि चादर के बाहर प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र, चादर के पृष्ठ के लम्बवत् तथा बाहर की दिशा में होगा, अर्थात् विद्युत् क्षेत्र की दिशा, बेलन के वक्र पृष्ठ के समान्तर तथा अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल के लम्बवत् होगी। स्पष्टतः बेलन के वक्र पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत् फ्लक्स शून्य होगा तथा बिन्दु B व C पर स्थित बेलन के सिरों से होकर जाने वाला विद्युत् फ्लक्स बाहर की ओर (अर्थात् धनात्मक) होगा। सिरों B से होकर गुजरने वाला विद्युत् फ्लक्स $= EA$ तथा सिरों C से होकर गुजरने वाला विद्युत् फ्लक्स $= EA$ होगा।

$$\therefore \text{सम्पूर्ण बेलन से जाने वाला कुल विद्युत् फ्लक्स} = EA + EA = 2EA$$

चूँकि इस बेलन के अन्दर, चादर का क्षेत्रफल A बन्द है जिस पर कुल आवेश σA है, अतः गॉस की प्रमेय के अनुसार, बेलन से होकर जाने वाला विद्युत्

$$\text{फ्लक्स } \phi = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma A)$$

$$\text{अतः} \quad 2EA = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma A)$$

टिप्पणी

$$\text{या} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \dots (1)$$

इस प्रकार, आवेशित समतल चादर के समीप स्थित किसी भी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता, बिन्दु की चादर से दूरी पर निर्भर नहीं करती है, अर्थात् समतल चादर के समीप स्थित सभी बिन्दुओं पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता एकसमान होती है।

अब चादर से लम्बवत् दूरी x_1 व x_2 पर स्थित बिन्दुओं P_1 व P_2 के बीच विद्युत् विभवान्तर

$$V_{P_2} - V_{P_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(x_2 - x_1) \quad \dots (2)$$

1.24 किसी असमान गोलीय आवेश वितरण के कारण विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत् विभव (Electric Field Intensity and Electric Potential due to a Non-uniform Spherical Charge Distribution)

माना किसी आयतन में आवेश का वितरण इस प्रकार है कि आवेश का आयतन घनत्व निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है:

$$\text{तथा} \quad \left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) \text{ जबकि } 0 < r < a \\ \rho &= 0 \text{ जबकि } 0 < r < a \end{aligned} \right\} \quad \dots (1)$$

यहाँ ρ_0 एक नियतांक है।

हमें x दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता की गणना निम्नलिखित तीन स्थितियों में करनी है : (i) जबकि $x > a$, (ii) जबकि $x = a$, तथा (iii) जबकि $x < a$

यदि a त्रिज्या का एक समकेन्द्रिक गोला खींचे तो गोले के पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता समान तथा पृष्ठ के लम्बवत् होगी। यह गोला गॉउसियन पृष्ठ होगा। इस गोले से सम्बद्ध विद्युत् फ्लक्स

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \iint_S E da = E(4\pi x^2) \quad \dots (2)$$

स्थिति (i) $x > a$ के लिए – गॉस के नियम के अनुसार गॉउसियन पृष्ठ से सम्बद्ध फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right) 4\pi r^2 dr + \int_a^x (0) 4\pi r^2 dr \right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \left[4\pi\epsilon_0 \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr \right] = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left[\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right)_0^a \right]$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a} \right) = \frac{\pi\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}$$

अतः $E \times 4\pi x^2 = \frac{\pi\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}$

या $E = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 x^2}$

अब बिन्दु P पर विभव $V = \int_{\infty}^x E dx = \int_{\infty}^x \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 x^2} dx = \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 x}$... (3)

स्थिति (ii) $x = a$ के लिए – समीकरण (3) में $x = a$ रखने पर

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 x^2} = \frac{\rho_0 a}{12\epsilon_0} \\ \text{तथा} \quad V &= \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

स्थिति (iii) $x < a$ के लिए – गॉस के नियम के अनुसार, गॉसियन पृष्ठ से सम्बद्ध फ्लक्स

$$\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_0^x \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right) 4\pi r^2 dr \right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi\rho_0 \int_0^x \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a} \right)_0^x = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a} \right)$$

अतः $E \times 4\pi x^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a} \right)$

या $E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4a} \right)$... (5)

अब विद्युत् विभव $V = -\int_{\infty}^x E dx = -\left[\int_{\infty}^a E_{x>a} dx + \int_a^x E_{x<a} dx \right]$

या $V = -\left[\int_{\infty}^a \frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0 x^2} dx + \int_a^x \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{4a} \right) dx \right]$

टिप्पणी

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\rho_0 a^3}{12\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x}\right)_\infty - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12a}\right)_a \\
 &= -\frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{(a^2 - x^2)}{6} - \frac{(a^3 - x^3)}{12a}\right] \\
 &= -\frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{2a}\right) \quad \dots (6)
 \end{aligned}$$

नोट: केन्द्र पर $x=0$, $\therefore V_{x=0} = -\frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0}$

तथा केन्द्र व पृष्ठ के बीच विभवान्तर

$$V_0 - V_a = -\frac{\rho_0 a^2}{6\epsilon_0} - \left(-\frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}\right) = -\frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0}$$

1.25 पॉयसन तथा लाप्लास के समीकरण (अवकल रूप में गॉस की प्रमेय) [Poisson's and Laplace's Equations (Gauss's Theorem in Differential Form)]

माना आवेश q सतत् रूप से किसी आयतन में वितरित है तथा आवेश का आयतन घनत्व ρ है, तो कुल आवेश

$$q = \iiint_V \rho dV$$

गॉस की प्रमेय से, इस आयतन को घेरने वाले पृष्ठ से गुजरने वाला कुल विद्युत फ्लक्स

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad \dots (1)$$

अब गॉस-डाइवर्जेंस प्रमेय से किसी आयतन V पर लिये गये वेक्टर क्षेत्र \vec{E} के डाइवर्जेंस का आयतन समाकल, उस आयतन को घेरने वाले बन्द पृष्ठ S पर लिये गये वेक्टर क्षेत्र \vec{E} के पृष्ठीय समाकल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\iint_S \text{div} \vec{E} dV = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{da} \quad \dots (2)$$

अतः समीकरण (1) व (2) से,

$$\iint_S \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\text{या } \iiint_V \left\{ \text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right\} dV = 0$$

$$\text{अर्थात् } \text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{या } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots (3)$$

उपर्युक्त समीकरण (3) को पॉयसन का समीकरण कहते हैं। इस विभव V के पदों में निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, विद्युत विभव की ऋणात्मक प्रवणता के बराबर होती है, अर्थात्

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} V = -\vec{\nabla} V \\ \text{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) \\ &= -\nabla^2 V \end{aligned} \quad \dots (4)$$

अतः समीकरण (3) से

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{चूँकि } \vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

समीकरण (4) से

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

उपर्युक्त समीकरण पॉयसन के समीकरण का अन्य रूप है।

यदि क्षेत्र आवेश रहित हो अर्थात् $\rho = 0$ होने पर

$$\text{div} \vec{E} = 0 \text{ या } \nabla^2 V = 0$$

$$\text{या } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

उपर्युक्त समीकरण लाप्लास का समीकरण कहलाता है जो आवेश रहित क्षेत्र के लिए लागू होता है।

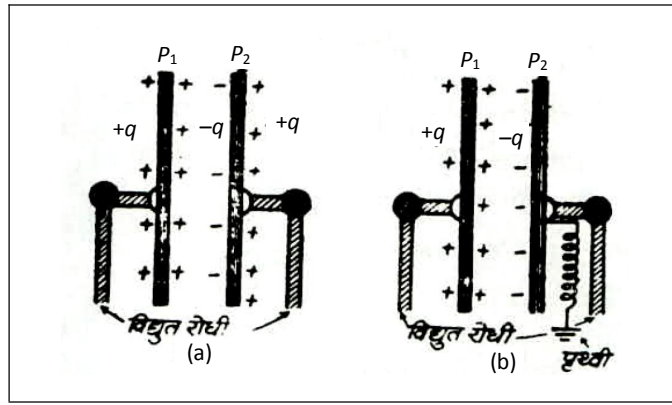
टिप्पणी

1.26 संधारित्र (Condenser or Capacitor)

टिप्पणी

संधारित्र वह युक्ति है जिसके द्वारा किसी चालक के आकार या आयतन में बिना वृद्धि किये उसकी आवेश धारिता बढ़ाई जाती है तथा चालक पर पर्याप्त मात्रा में वैद्युत आवेश संचित किया जा सकता है।

संधारित्र का सिद्धान्त (Principle of a Condenser) – किसी चालक की धारिता $C = q/V$, जहाँ चालक पर आवेश की मात्रा q तथा चालक का विभव V है। इस व्यंजक से स्पष्ट है कि यदि किसी विधि द्वारा चालक का विभव कम कर दिया जाये तो उसकी धारिता बढ़ जायेगी। चालक के विभव को कम करने के लिए निम्नलिखित युक्ति अपनाई जाती है—



चित्र क्र. 1.29: संधारित्र का सिद्धान्त

चित्र 1.29 में, माना किसी चालक की प्लेट P_1 एक विद्युतरोधी (insulated) स्टैंड पर लगी है। इस प्लेट को $+q$ आवेश देकर आविष्ट करने के पश्चात्, इसके समीप चालक की एक अन्य अनावेशित प्लेट P_2 लाने पर, प्रेरण द्वारा P_2 के सामने वाले तल पर उतना ही ऋण आवेश आ जायेगा, तथा पीछे वाले तल ऋण आवेश, प्लेट P_1 के विभव को कम करने का प्रयास करता है जबकि P_1 के पीछे वाले तल का धन आवेश प्लेट P_1 के विभव को बढ़ाने का प्रयास करता है। प्लेट P_2 के सामने वाले तथा पीछे वाले तल पर उपस्थित ऋण तथा धन आवेश बराबर हैं परन्तु ऋण आवेश, धन आवेश की अपेक्षा, प्लेट P_1 के अधिक समीप है अतः इसका प्रभाव, धन आवेश के प्रभाव की अपेक्षा अधिक होता है। परिणामस्वरूप, प्लेट P_1 का विभव कुछ कम हो जाता है। प्लेट P_1 का विभव उसके प्रारम्भिक विभव के बराबर करने के लिये, उसे और आवेश देने की आवश्यकता होगी।

स्पष्ट है कि धनावेशित प्लेट P_1 के समीप एक अन्य अनावेशित प्लेट P_2 लाने पर, प्लेट P_1 की विद्युत धारिता में कुछ वृद्धि हो जाती है। यदि प्लेट P को पृथ्वी से जोड़ दें तो इसके पीछे वाले तल का धन आवेश पृथ्वी में चला जायेगा और उसके सामने वाले तल पर ऋण आवेश रह जायेगा क्योंकि ऋण आवेश के प्रभाव को कम करने वाला धन आवेश पृथ्वी में चला गया है अतः यह ऋण आवेश, P_1 के विभव को और कम कर देता है इस प्रकार, प्लेट P_1 की धारिता बढ़ जाती

है। प्लेट P_1 के विभव को उसके प्रारम्भिक विभव के तुल्य करने के लिये, उसे और अधिक आवेश देने की आवश्यकता होगी।

स्पष्ट है कि किसी आवेशित चालक के समीप, पृथ्वी से सम्बन्धित एक अन्य अनावेशित चालक लाने पर प्रथम चालक की आवेश धारण करने की क्षमता बढ़ जाती है अर्थात् उस पर पर्याप्त मात्रा में आवेश एकत्रित किया जा सकता है। इसी कारण इस समायोजन को संधारित्र (Condenser) कहते हैं। P_1 तथा P_2 संधारित्र की प्लेटें कहलाती हैं। यदि संधारित्र की प्लेटों के बीच वायु के स्थान पर K परावैद्युतांक का परावैद्युत भरा हो तो उसकी धारिता K गुनी हो जाती है।

संधारित्र की धारिता (Capacity of a Condenser) – चित्र 1.26 के अनुसार, माना कि चालक प्लेट P_1 को $+q$ आवेश देने पर उसका विभव V_1 हो जाता है तथा चालक प्लेट P_2 पर प्रेरण द्वारा उत्पन्न आवेश $-q$ के कारण प्लेट P_2 का विभव V_2 हो, तो इस संधारित्र की प्लेटों P_1 तथा P_2 के बीच विभवान्तर $V_1 - V_2$ । अतः संधारित्र की धारिता $C = \frac{q}{V_1 - V_2}$

यदि $V_1 - V_2 = 1$ तो $C = q$ अर्थात् शब्दों में,

किसी संधारित्र की धारिता, उस आवेश के बराबर होती है, जो संधारित्र की दोनों प्लेटों के बीच एकांक विभवान्तर उत्पन्न कर देता है। धारिता का मात्रक कूलाम वोल्ट है जिसे फेरड भी कहते हैं, इसे F से प्रदर्शित करते हैं

$$\text{अर्थात् } 1 \text{ फेरड (F)} = \frac{1 \text{ कूलाम (C)}}{1 \text{ वोल्ट (V)}}$$

अर्थात् 1 फेरड उस चालक की धारिता है जिसे 1 कूलाम आवेश देने पर उसके विभव की वृद्धि 1 वोल्ट होती है।

किसी संधारित्र की धारिता निम्नलिखित राशियों पर निर्भर करती है—

(1) संधारित्र की प्लेटों के क्षेत्रफल पर – प्रत्येक संधारित्र की धारिता उसकी प्लेटों के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती होती है। यदि संधारित्र की धारिता C तथा दोनों प्लेटों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल A हो तो—

$$C \propto A$$

यहाँ A प्लेटों का प्रभावी क्षेत्रफल है।

(2) संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी पर – संधारित्र की धारिता उसकी प्लेटों के बीच की दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होती है। यदि किसी संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी d हो तो उसकी धारिता

$$C \propto 1/d$$

(3) संधारित्र की प्लेटों के बीच के माध्यम पर – यदि संधारित्र की प्लेटों के बीच का माध्यम वायु न होकर कोई अन्य विद्युतरधी पदार्थ जैसे माइका, काँच, मोम, तेल इत्यादि हो तो संधारित्र की धारिता बढ़ जाती है। यदि प्लेटों के बीच के माध्यम का परावैद्युतांक (dielectric constant) K हो तो उसकी धारिता,

टिप्पणी

टिप्पणी

दोनों प्लेटों के बीच वायु होने पर, उसकी धारिता की K गुनी हो जायेगी। अर्थात् यदि प्लेटों के बीच का माध्यम वायु होने पर, संधारित्र की धारिता C_0 हो तथा प्लेटों के बीच K परावैद्युतांक का माध्यम होने पर धारिता C हो, तो

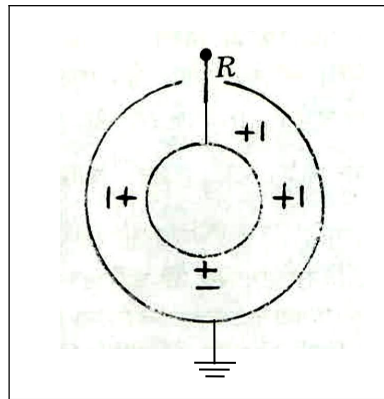
$$C/C_0 = K \text{ या } C = KC_0$$

प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम होने पर, संधारित्र की धारिता बढ़ जाने का कारण यह है कि परावैद्युत पदार्थों में मुक्त इलेक्ट्रॉन नहीं होते। सभी इलेक्ट्रॉन दृढ़तापूर्वक परमाणु के अन्दर बँधे रहते हैं। जब कोई परावैद्युत पदार्थ, किसी आवेशित संधारित्र की प्लेटों के बीच में रखा जाता है तो वैद्युत क्षेत्र के प्रभाव में, परावैद्युत पदार्थ का प्रत्येक परमाणु विकृत हो जाता है अर्थात् परमाणु का धन आवेश, संधारित्र की ऋणावेशित प्लेट की ओर तथा ऋण आवेश, उसकी धनावेशित प्लेट की ओर विस्थापित हो जाता है जैसा चित्र 1.29 में दिखाया गया है। इस प्रकार परावैद्युत पदार्थ के परमाणुओं का ध्रुवण हो जाता है। पदार्थ की धनावेशित प्लेट की ओर वाले तल पर ऋण आवेश एवं ऋणावेशित प्लेट की ओर वाले तल पर धन आवेश अधिक हो जाता है, जिसके परिणामस्वरूप संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर कम हो जाता है और इस प्रकार संधारित्र की धारिता बढ़ जाती है।

संधारित्र तीन प्रकार के होते हैं— (1) गोलीय संधारित्र (2) समान्तर प्लेट संधारित्र (3) बेलनाकार संधारित्र।

1.27 गोलीय संधारित्र (Spherical Condenser)

गोलीय संधारित्र की रचना चित्र 1.30 में प्रदर्शित है। इसमें धातु के दो संकेन्द्री खोखले गोले A और B होते हैं, जिनके बीच कोई परावैद्युत माध्यम भरा होता है। आंतरिक गोले A से धातु की छड़ R जुड़ी रहती है जिसके सिरे पर घुण्डी लगी होती है जो बाह्य गोले B से पृथक्कृत रहती है तथा गोले B का संबंध पृथ्वी से होता है।



चित्र क्र. 1.30: गोलीय संधारित्र

धारिता के लिए व्यंजक – जब गोले A को $+Q$ आवेश दिया जाता है तो प्रेरण द्वारा गोले B के आन्तरिक तल पर $-Q$ आवेश तथा बाह्य तल पर $+Q$

आवेश प्रेरित हो जाता है। चूँकि B का सम्बन्ध पृथ्वी से है, प्रेरित आवेश $+Q$ पृथ्वी में चला जाता है। इस प्रकार B पर केवल $-Q$ आवेश शेष रहता है।

माना गोले A की त्रिज्या a , गोले B की त्रिज्या b है तथा दोनों के बीच के माध्यम का परावैद्युतांक K है।

$$\text{गोले } A \text{ के तल पर स्वयं के आवेश के कारण विभव} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 Ka}$$

खोखले गोले के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विभव उसके तल के विभव के बराबर होता है। अतः गोले B के आन्तरिक तल पर प्रेरित $-Q$ आवेश के कारण तल A पर विभव

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 Kb}$$

∴ गोले A का कुल विभव

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{Ka} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{Kb} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q(b-a)}{Kab} \end{aligned}$$

चूँकि B का सम्बन्ध पृथ्वी से है। अतः उसका विभव शून्य होगा इसलिए गोले A एवं B के बीच विभवान्तर

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q(b-a)}{Kab} - 0$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(b-a)}{Kab}$$

यदि इस संधारित्र की धारिता C हो, तो $C = \frac{Q}{V}$

$$C = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q(b-a)}{Kab}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot Kab}{(b-a)}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 K \left(\frac{ab}{b-a} \right) \quad \dots (1)$$

यह गोलीय संधारित्र की धारिता का व्यंजक है।

वायु या निर्वात के लिए $K = 1$

$$\therefore C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right)$$

टिप्पणी

यह गोलीय संधारित्र का वायु या निर्वात में धारिता का व्यंजक है।

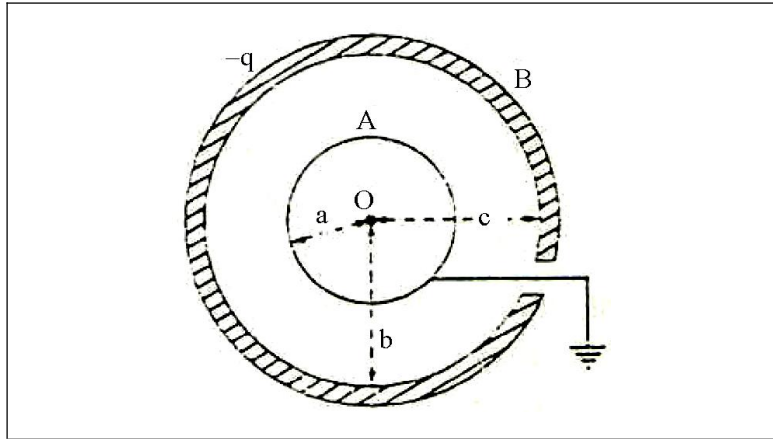
गोलीय संधारित्र की धारिता की निर्भरता – समीकरण (1) से स्पष्ट है कि गोलीय संधारित्र की धारिता निम्नलिखित बातों पर निर्भर करती है—

(i) **गोले की त्रिज्याओं a और b पर** – यदि गोले की त्रिज्याओं a और b के मान अधिक है तो गोलीय संधारित्र की धारिता अधिक होगी।

(ii) **गोलों के बीच की दूरी $b - a$ पर** – यदि $b - a$ का मान कम है अर्थात् दोनों गोलों के बीच की दूरी कम है तो गोलीय संधारित्र की धारिता अधिक होगी।

(iii) **गोलों के बीच के माध्यम पर** – दोनों गोलों के मध्य अधिक परावैद्युतांक वाला माध्यम हो, तो गोलीय संधारित्र की धारिता अधिक होगी।

विशेष परिस्थिति (Special case) – जबकि गोलीय संधारित्र का अन्दर का गोला भूसम्पर्कित हो (When inner sphere of the spherical condenser is earthed) – चित्र 1.31 में एक गोलीय संधारित्र प्रदर्शित है जिसके अन्दर के गोले की त्रिज्या a है तथा बाहर की गोलीय खोल की आन्तरिक व बाह्य त्रिज्याएँ क्रमशः b तथा c हैं। दोनों गोलों के बीच माध्यम (परावैद्युतांक K) भरा है। बाहरी खोल को आवेश $+q$ दिया जाता है तथा अन्दर का गोला भूसम्पर्कित है। बाहरी खोल को दिया गया आवेश q दो भागों में बँट जाता है – (i) q_i आवेश खोल के अन्दर के पृष्ठ (त्रिज्या b) पर वितरित होता है तथा (ii) q_o आवेश खोल के बाहरी पृष्ठ (त्रिज्या c) पर वितरित होता है। खोल के अन्दर के पृष्ठ के आवेश q_i के कारण अन्दर के गोले, जिसकी त्रिज्या a है, पर प्रेरित आवेश $-q_i$ होगा।



चित्र क्र. 1.31: गोलीय संधारित्र जिसका अन्दर का गोला भूसम्पर्कित है

गॉस के नियम से किसी बिन्दु $r > c$ पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E}_{out} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_o + q_i - q_i)}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_o}{r^2} \hat{r}$$

तथा $a < r < b$ पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}_{in} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q_i)}{Kr^2} \hat{r}$

अब चूँकि आन्तरिक गोला A भूसम्पर्कित है, अतः $V_A = 0$ तथा बाहरी खोल B के पृष्ठ पर विभव

$$V_B = -\int_{\infty}^c \vec{E}_{out} \cdot \vec{dr} = -\int_{\infty}^c \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_o}{r^2} dr = \frac{q_o}{4\pi\epsilon_0 c} \dots (1)$$

$$\therefore V_B - V_A = \frac{q_o}{4\pi\epsilon_0 c}$$

$$\begin{aligned} \text{लेकिन } V_B - V_A &= -\int_a^b \vec{E}_{in} \cdot \vec{dr} \\ &= -\int_a^b \frac{-q_i}{4\pi\epsilon_0 K r^2} dr = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \dots (2) \end{aligned}$$

समी. (1) व (2) से,

$$\text{अतः } \frac{q_o}{4\pi\epsilon_0 c} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{या } \frac{q_o}{q_i} = \frac{c}{K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{या } \frac{q_i}{q_o} = \frac{Kab}{c(b-a)}$$

अब गोलीय संधारित्र की धारिता

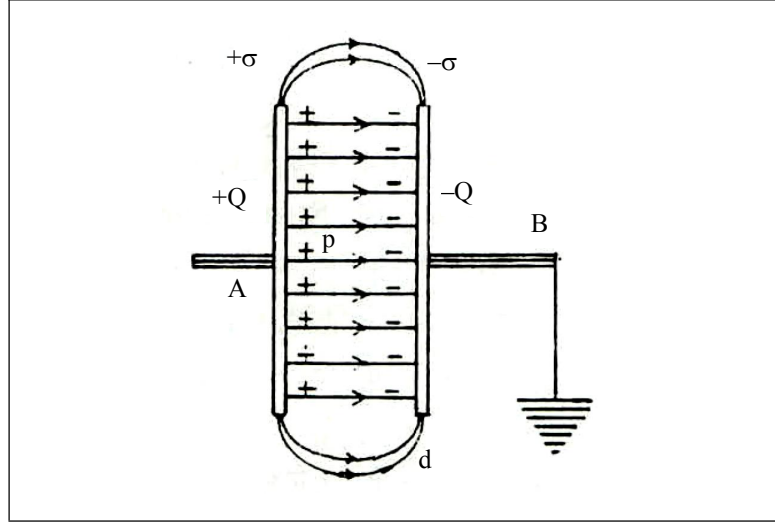
$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{V_A - V_B} \\ &= \frac{q_o + q_i}{q_o / 4\pi\epsilon_0 c} \\ &= 4\pi\epsilon_0 c \left(1 + \frac{q_i}{q_o} \right) \\ &= 4\pi\epsilon_0 c \left[1 + \frac{Kab}{c(b-a)} \right] \end{aligned}$$

1.28 समान्तर प्लेट संधारित्र (Parallel Plate Condenser)

समान्तर प्लेट संधारित्र में धातु की दो आयताकार प्लेटों होती हैं, जो कुछ दूरी पर एक-दूसरे के समान्तर रखी होती है। इनमें से एक पृथक्कृत होती है तथा दूसरी प्लेट का सम्बन्ध पृथ्वी से होता है। इसकी धारिता के लिए दोनों प्लेटों के मध्य कोई परावैद्युतांक माध्यम; जैसे-अभ्रक, मोम, कागज आदि भर दिया जाता है।

टिप्पणी

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.32: समान्तर प्लेट संधारित्र

सिद्धान्त एवं सूत्र – माना A तथा B संधारित्र की दो समान्तर प्लेटें हैं, जिनके बीच की दूरी d है तथा प्रत्येक का क्षेत्रफल A है दोनों प्लेटों के मध्य K परावैद्युतांक का कोई माध्यम है।

प्लेट A को $+Q$ आवेश देने पर प्लेट B के समीपवर्ती तल पर $-Q$ आवेश तथा दूरवर्ती तल पर $+Q$ आवेश प्रेरित हो जाते हैं। B का पृथ्वी से प्लेट सम्बन्ध होने के कारण प्रेरित आवेश $+Q$ पृथ्वी में चला जाता है इस प्रकार B पर केवल $-Q$ आवेश ही रहता है। माना प्लेट A पर आवेश का पृष्ठ घनत्व σ तथा प्लेट B पर आवेश का पृष्ठ घनत्व $-\sigma$ है। अतः दोनों प्लेटों के बीच प्रत्येक स्थान पर (केवल किनारे को छोड़कर) विद्युत क्षेत्र समान होता है।

$$\text{दोनों प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता } E = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \quad \dots (1)$$

जहाँ $\epsilon_0 =$ निर्वात की विद्युतशीलता तथा K माध्यम का परावैद्युतांक है।

A व B के बीच विभवान्तर $V =$ एकांक आवेश को B से A तक लाने में किया गया कार्य

$$= \text{तीव्रता} \times \text{दूरी}$$

$$\text{या } V = E \times d$$

समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \times d \\ &= \frac{Q/A}{K\epsilon_0} \times d \quad \left[\because \sigma = \frac{Q}{A} \right] \end{aligned}$$

$$\text{या } V = Q \frac{d}{K\epsilon_0 A} \quad \dots (2)$$

यदि संधारित्र की धारिता C हो, तो $C = \frac{Q}{V}$

$$\text{अतः} \quad C = \frac{Q}{Ad / K\epsilon_0 A}$$

$$\text{या} \quad C = \frac{K\epsilon_0 A}{d} \quad \dots (3)$$

यह समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता का व्यंजक है।

यदि दोनों प्लेटों के मध्य वायु या निर्वात हो तो

$$K = 1$$

$$\text{अतः} \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

यह समान्तर प्लेट संधारित्र का वायु या निर्वात माध्यम में धारिता का व्यंजक है।

समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता की निर्भरता – समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता निम्नलिखित बातों पर निर्भर करती है—

(i) प्लेटों के क्षेत्रफल पर – किसी संधारित्र की विद्युत् धारिता C उसकी प्लेटों के क्षेत्रफल A के अनुक्रमानुपाती होती है।

अर्थात् दोनों प्लेटों का क्षेत्रफल A अधिक होना चाहिये।

$$C \propto A$$

(ii) प्लेटों के बीच की दूरी पर – संधारित्र की धारिता C उनकी प्लेटों के बीच की दूरी d के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$$C \propto \frac{1}{d}$$

अर्थात् दोनों प्लेटों के बीच की दूरी कम होना चाहिये।

(iii) प्लेटों के बीच के माध्यम पर – संधारित्र की विद्युत् धारिता C उनकी प्लेटों के बीच के माध्यम के परावैद्युतांक K के अनुक्रमानुपाती होती है।

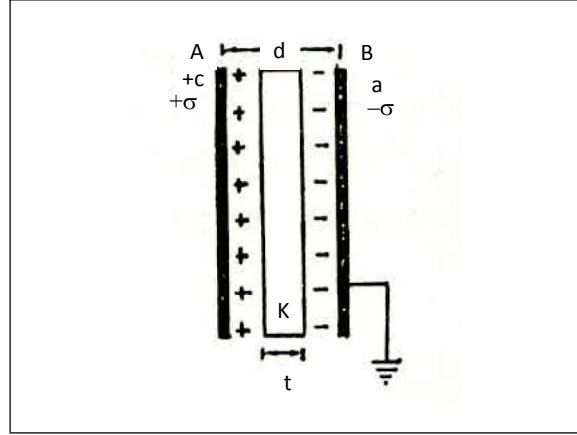
अर्थात् दोनों प्लेटों के बीच माध्यम का परावैद्युतांक अधिक होना चाहिये।

विशेष परिस्थितियाँ (Special cases)

(a) जबकि प्लेटों के बीच उनकी लम्बाई के समान्तर आंशिक माध्यम परावैद्युतांक तथा शेष माध्यम वायु है – चित्र 1.33(a) माना A व B समान्तर प्लेट संधारित्र की दो प्लेटें हैं, जिनके बीच की दूरी d है तथा प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A है। दोनों प्लेटों के मध्य K परावैद्युतांक वाले माध्यम की t मोटाई की प्लेट उनके समान्तर रखी गयी है। स्पष्टतः t मोटाई में परावैद्युत माध्यम तथा शेष $(d-t)$ मोटाई में वायु है।

टिप्पणी

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.33(a): समान्तर प्लेट संधारित्र जबकि उसकी प्लेटों के बीच आंशिक परावैद्युत माध्यम है।

अब प्लेटों के बीच वायु में स्थित किसी बिन्दु पर परिणामी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

तथा परावैद्युत माध्यम में स्थित किसी बिन्दु पर परिणामी विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{K\epsilon_0}$$

अतः दोनों प्लेटों के बीच विभवान्तर

$$V_A - V_B = E_1 \times (d - t) + E_2 \times t$$

या
$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - t) + \frac{\sigma}{K\epsilon_0}t$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(d - t + \frac{t}{K} \right)$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[d - t \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]$$

अतः संधारित्र की धारिता $C = \frac{q}{V_A - V_B}$

$$C = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[d - t \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]}$$

या
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\left[d - t \left(1 - \frac{1}{K} \right) \right]} \quad \dots (A)$$

उपर्युक्त सूत्र (A) से स्पष्ट है कि

(i) संधारित्र की प्लेटों के बीच आंशिक रूप से परावैद्युत माध्यम भर देने पर प्लेटों के बीच की प्रभावी दूरी d से घटकर $[d - t\{1 - (1/K)\}]$ रह जाती है, जिससे संधारित्र की धारिता बढ़ जाती है।

(ii) यदि संधारित्र की प्लेटों के बीच पूर्णतः परावैद्युत माध्यम भरा हो (अर्थात् $t = d$) तो

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{[d - t\{1 - (1/K)\}]} = \frac{K\epsilon_0 A}{d}$$

(iii) यदि दोनों प्लेटों के बीच पूर्णतः वायु (या निर्वात) है, अर्थात् $t = 0$, तो

$$C = \epsilon_0 A / d$$

(iv) यदि प्लेटों के बीच t मोटाई की धातु की पट्टी हो (अर्थात् $K = \infty$), तो

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - t}$$

अर्थात् समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच t मोटाई की धातु की पट्टी रखने से प्लेटों के बीच की प्रभावी दूरी d से घटकर $(d - t)$ रह जाती है।

(v) यदि दोनों प्लेटों के बीच में t_1, t_2, t_3, \dots मोटाई की क्रमशः K_1, K_2, K_3, \dots परावैद्युतांक वाले माध्यमों की पट्टियाँ रखी गयी हैं, तो संधारित्र की धारिता

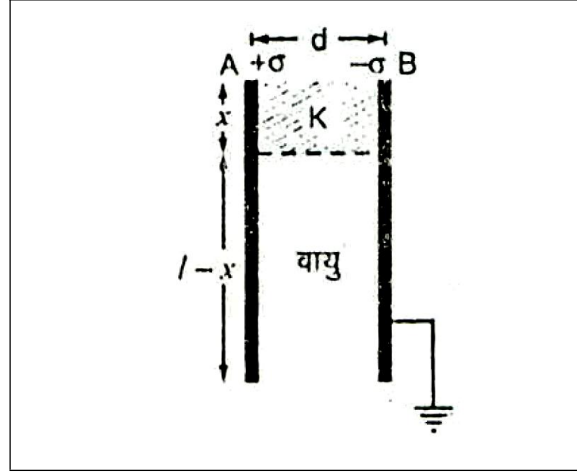
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\left[d - (t_1 + t_2 + t_3 + \dots) + \frac{t_1}{K_1} + \frac{t_2}{K_2} + \frac{t_3}{K_3} + \dots \right]}$$

यदि $d = t_1, t_2, t_3, \dots$ है, तो

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{\left\{ \frac{t_1}{K_1} + \frac{t_2}{K_2} + \frac{t_3}{K_3} + \dots \right\}}$$

(b) जबकि प्लेटों के बीच उनकी x लम्बाई में परावैद्युत माध्यम भरा हो तथा शेष भाग में वायु है – चित्र 1.33(b) में A व B समान्तर प्लेट संधारित्र की दो प्लेट है जिनमें प्रत्येक प्लेट की लम्बाई l , चौड़ाई b , क्षेत्रफल A तथा प्लेटों के बीच की दूरी d है। यह संयोजन समान्तर क्रम से जुड़े दो संधारित्रों के तुल्य है जिसमें एक संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल xb है तथा प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम (परावैद्युतांक K) भरा है तथा दूसरे संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल $(l - x)b$ है तथा इसकी प्लेटों के बीच वायु है। स्पष्टतः

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.33(b)

पहले संधारित्र की धारिता

$$C_1 = \frac{K\epsilon_0 xb}{d}$$

दूसरे संधारित्र की धारिता

$$C_2 = \frac{\epsilon_0(l-x)b}{d}$$

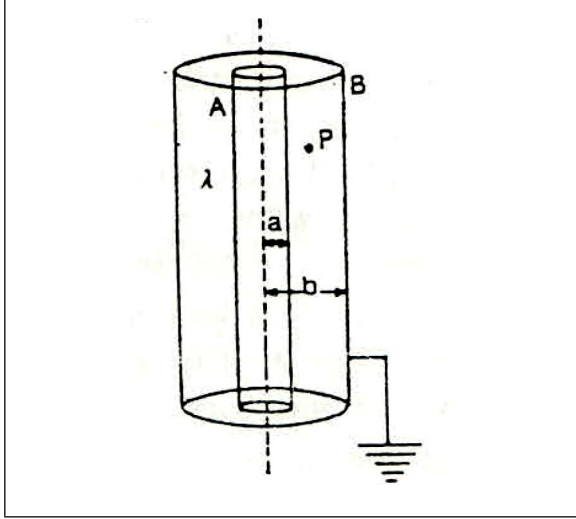
अतः कुल धारिता

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \frac{K\epsilon_0 xb}{d} + \frac{\epsilon_0(l-x)b}{d} \\ &= \frac{\epsilon_0 lb}{d} \left(\frac{Kx}{l} + \frac{l-x}{l} \right) \\ C &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(1 + \frac{x}{l}(K-1) \right) \end{aligned}$$

जहाँ $A = lb$ प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल है।

1.29 बेलनाकार संधारित्र (Cylindrical Condenser)

चित्र 1.34 में बेलनाकार संधारित्र प्रदर्शित है इसमें दो समान अक्षीय खोखले बेलन A तथा B होते हैं, जिनमें से बाहर का बेलन B पृथ्वी से जुड़ा रहता है तथा अन्दर का बेलन A धनावेशित होता है। दोनों बेलनों के बीच रिक्त स्थान में वायु अथवा परावैद्युत माध्यम (परावैद्युतांक K) भरा रहता है।



चित्र क्र. 1.34: बेलनाकार संधारित्र

धारिता के लिए व्यंजक – माना बेलन A पर प्रति एकांक लम्बाई आवेश λ है तथा बेलन A व B की त्रिज्याएँ क्रमशः a व b हैं (जहाँ $b > a$) तथा प्रत्येक बेलन की लम्बाई l है।

दोनों बेलनों के बीच, उनकी अक्ष से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K r} \hat{r}$$

∴ दोनों बेलनों के बीच विभवान्तर

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_b^a \frac{1}{2\pi\epsilon_0 K} \frac{\lambda}{r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K} \log_e \frac{b}{a} \end{aligned}$$

अतः बेलनाकार संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 K} \log_e \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 K l}{\log_e(b/a)}$$

हवा या निर्वात में $K = 1$,

$$\therefore C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log_e(b/a)}$$

यहाँ a तथा b मीटर में हैं।

टिप्पणी

स्पष्ट है कि बेलनाकार संधारित्र की धारिता बढ़ाने के लिए

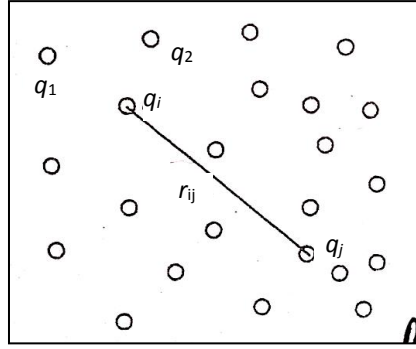
(i) दोनों बेलनों की लम्बाई अधिक होनी चाहिए,

(ii) b/a का मान कम से कम होना चाहिए, अर्थात् दोनों बेलन लगभग बराबर त्रिज्या के होने चाहिए, तथा

(iii) दोनों बेलनों के बीच ऐसा कुचालक माध्यम होना चाहिए जिसका परावैद्युतांक अधिक हो।

1.30 स्थिर विद्युत् क्षेत्र ऊर्जा (Electrostatic Field Energy)

किसी स्थिर विद्युत् निकाय की ऊर्जा को स्थिर विद्युत् ऊर्जा कहते हैं जो कि स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहता है तथा यह ऊर्जा आवेशों के अन्योन्य क्रियाओं द्वारा संचित होती है।



चित्र क्र. 1.35: स्थिर विद्युत् क्षेत्र ऊर्जा

चित्र 1.35 के अनुसार माना कि किसी स्थिर विद्युत् निकाय में आवेश क्रमशः q_1, q_2, \dots है। इसमें आवेश q_1 तथा q_2 के बीच की दूरी r_{12} , q_2 तथा q_3 के बीच की दूरी r_{23}, \dots है। आवेशों के इस वितरण को निर्मित करने के लिए कुछ कार्य करना पड़ेगा जो कि उसकी ऊर्जा के रूप में संचित होती है। आवेश q_1 तथा q_2 के कारण निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

इसी प्रकार,
$$U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}}$$

.....
.....

अतः सम्पूर्ण स्थिर विद्युत् निकाय की ऊर्जा

$$U = \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \dots (1)$$

$$= \sum_i q_i \sum_{j=1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \dots (2)$$

समीकरण (2) से यह स्पष्ट है कि किसी आवेश का उसी आवेश से अन्योन्य क्रिया नहीं होती। अतः समीकरण (2) को विस्तृत रूप में निम्नानुसार लिखा जा सकता है—

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \dots \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}} + \dots \right) + \dots \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad \dots (3) \end{aligned}$$

समीकरण (3) में गुणांक $\frac{1}{2}$ इसलिये लिया गया है, क्योंकि व्यंजक में प्रत्येक युग्म को दो बार प्रयुक्त किया गया है। अब चूँकि

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} = \phi_i \quad \dots (4)$$

जहाँ ϕ_i i वें कण की अन्य समस्त आवेशों के कारण विद्युत् विभव है।

अतः समी. (3) और (4) से,

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot \phi_i \quad \dots (5)$$

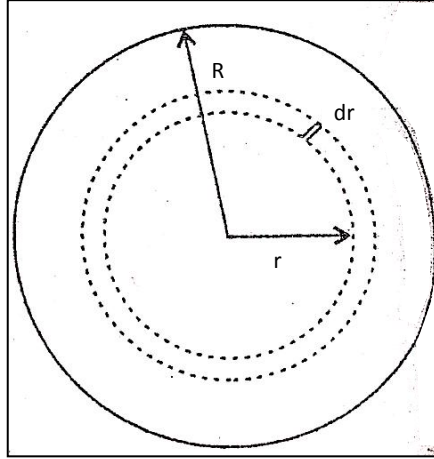
यही आवेशों के विसरण की स्थिर विद्युत् ऊर्जा का व्यंजक है। अब यदि आवेश का वितरण सतत् हो तथा आवेश घनत्व ρ लिया जाये, तो समीकरण (5) को निम्नानुसार व्यक्त किया जाता है —

$$W = \frac{1}{2} \int \phi \rho dt \quad \dots (6)$$

जहाँ $d\tau$ अवयव का आयतन है।

आवेशों के गोले की ऊर्जा (Energy of Uniform Sphere of Charge)

चित्र 1.36 के अनुसार माना कि R त्रिज्या के एकसमान आवेशित गोले की ऊर्जा ज्ञात करना है, जिसका आवेश घनत्व ρ है। इसके लिये हमें इसके समस्त आवेशों को अनन्त से गोले तक लाने में किये गये कार्य की गणना करना होगा।



चित्र क्र. 1.36: आवेशित गोले की स्थिर विद्युत् ऊर्जा

गोला अनेक गोलीय खोलों के संयोग से बना है। अतः यदि r त्रिज्या तथा dr मोटाई का एक अवयवी गोला लिया जाये तो इस अवयव में उपस्थित आवेश

$$dq = \rho \cdot 4\pi r^3 dr \quad \dots (1)$$

अतः इस आवेश को अनन्त से लाने में किया गया कार्य

$$\begin{aligned} dW &= \text{विभव} \times dq \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} \cdot \rho 4\pi dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr \quad \dots (2) \end{aligned}$$

अतः सम्पूर्ण आवेशित गोले की स्थिर विद्युत् ऊर्जा

$$\begin{aligned} U &= W = \int_0^R dW \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R \\ &= \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} R^5 \end{aligned}$$

\therefore

$$U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

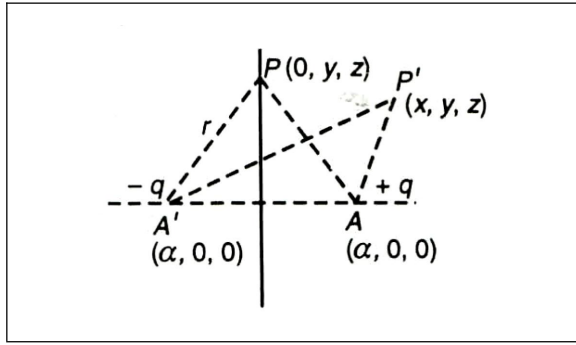
जहाँ गोले का कुल आवेश $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ है।

यही आवेशों के गोले की स्थिर विद्युत् ऊर्जा का सूत्र है।

टिप्पणी

1.31 भूसम्पर्कित अनन्त चालक तल के निकट एक बिन्दु आवेश (A Point Charge near an Earthed Infinite Surface)

माना एक बिन्दु आवेश $+q$, x -अक्ष पर एक ऐसे भूसम्पर्कित अनन्त चालक से d दूरी पर है जो $x = 0$ पर स्थित है तथा जिसका पृष्ठ $X-Z$ तल है। चूँकि चालक तल भूसम्पर्कित है अतः चालक के प्रत्येक बिन्दु पर वैद्युत विभव शून्य होगा। अतः सीमा प्रतिबन्ध होंगे—



चित्र क्र. 1.37: भूसम्पर्कित चालक के समीप रखे आवेश का वैद्युत प्रतिबिंब

- (i) चालक के प्रत्येक बिन्दु पर वैद्युत विभव का मान शून्य है अर्थात् $x = 0$ पर $\phi = 0$ है।
- (ii) अनन्त दूरी पर स्थित बिन्दुओं पर वैद्युत विभव का मान शून्य होगा अर्थात् $y = \infty$ पर $x = 0$ ।
- (i) समतल चालक पर बिन्दु $(0, y, z)$ पर वास्तविक आवेश $+q$ तथा प्रतिबिम्ब आवेश $-q$ के कारण वैद्युत विभव

$$\begin{aligned}\phi(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{PA} - \frac{q}{PA'} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} - \frac{q}{r} \right] = 0\end{aligned}$$

जो प्रथम सीमा प्रतिबन्ध (Boundary condition) है।

- (ii) A' पर रखा आवेश $-q$ अनन्त दूरी पर स्थित बिन्दुओं का वैद्युत विभव के प्रतिबन्ध को प्रभावित नहीं करता।

विद्युत आवेश $+q$ तथा भूसम्पर्कित समतल चालक के बीच आकर्षण बल – बिन्दु आवेश $+q$ तथा भूसम्पर्कित समतल चालक के बीच आकर्षण बल F

का मान A पर स्थित आवेश $+q$ तथा A' पर स्थित प्रतिबिम्ब आवेश $-q$ के बीच होगा। अतः

टिप्पणी

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(q)}{(AA')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2d)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4d^2} \text{ न्यूटन}\end{aligned}$$

चूँकि यह बल विपरीत आवेशों के बीच है अतः आकर्षण बल होगा।

आवेश q को अनन्त तक ले जाने में कृत कार्य—बिन्दु आवेश $+q$ तथा भूसम्पर्कित चालक तल के बीच बल का मान होगा—

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4d^2} \hat{i}$$

अतः बल के विपरीत आवेश $+q$ को $x=d$ से $x=\infty$ तक ले जाने में कुल कार्य

$$\begin{aligned}W &= -\int_{x=d}^{\infty} \vec{F} \cdot \vec{dr} \\ &= -\int_{x=d}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4d^2} \hat{i} \right] \cdot (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^4}{4} \int_d^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4d}\end{aligned}$$

आवेश को $x=\infty$ से $x=d$ तक लाने में कुल कार्य—

$$\begin{aligned}W &= \int_{x=\infty}^d \vec{F} \cdot \vec{dr} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4d}\end{aligned}$$

किसी बिन्दु (x, y, z) पर बिन्दु आवेश q तथा भूसम्पर्कित समतल चालक के कारण वैद्युत विभव तथा वैद्युत क्षेत्र सामर्थ्य बिन्दु $P'(x, y, z)$ पर बिन्दु आवेश q तथा भूसम्पर्कित चालक तल के कारण वैद्युत विभव का मान उतना ही होगा जितना A पर $+q$ बिन्दु आवेश तथा A' पर $-q$ प्रतिबिम्ब आवेश के कारण होगा। अतः

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{AP'} - \frac{q}{A'P'} \right]$$

परन्तु $AP' = \sqrt{\{(x-d)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2\}}$

$$= \sqrt{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}}$$

$$A'P' = \sqrt{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}}$$

$$\therefore \phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}}} - \frac{1}{\sqrt{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}}} \right] \dots (4)$$

यदि $x = \infty$ हो, तो समीकरण (4) से $\phi = 0$

अतः यदि भूसम्पर्कित समतल चालक को A' बिन्दु पर स्थित आवेश $-q$ से प्रतिस्थापित करें तो सीमा प्रतिबन्ध $x = \infty$ पर $\phi = 0$ भी सन्तुष्ट हो जायेगा।

$P'(x, y, z)$ बिन्दु पर वैद्युत क्षेत्र घटकों E_x, E_y तथा E_z के मान समीकरण (4) के आंशिक अवकलन द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं। अर्थात्

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}}} - \frac{1}{\sqrt{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}}} \right\} \right]$$

$$\vec{E}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x-d}{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} - \frac{x+d}{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \dots (5a)$$

$$\vec{E}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}}} - \frac{1}{\sqrt{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}}} \right\} \right]$$

$$\vec{E}_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} - \frac{y}{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \dots (5b)$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\text{तथा } \vec{E}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{\{(x-d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} - \frac{y}{\{(x+d)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \quad \dots (5c)$$

$$\text{वैद्युत क्षेत्र सामर्थ्य } E = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z$$

चालक पर वैद्युत क्षेत्र – समीकरण (5a), (5b) तथा (5c) से चालक तल पर स्थित बिन्दु $P(0, y, z)$ पर वैद्युत क्षेत्र घटक होंगे—

$$\begin{aligned} (E_x)_{x=0} &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{अथवा } (E_x)_{x=0} = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} (E_y)_{x=0} &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x=0} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{y}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } (E_z)_{x=0} &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{x=0} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

स्पष्टतया चालक पर स्थित किसी बिन्दु $P(0, y, z)$ पर वैद्युत क्षेत्र का परिणाम $\frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ होगा तथा इसकी दिशा चालक के अभिलम्ब की दिशा में होगी। इसे निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं—

$$E(P) = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{i}$$

यहाँ \hat{i} , x -अक्ष के अनुदिश अर्थात् चालक से बाहरी अभिलम्ब (Outward drawn normal) की दिशा में एकांक वेक्टर है।

चालक पर पृष्ठ आवेश घनत्व – यदि चालक तल के बिन्दु $P(x, y, z)$ पर प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व σ हो तो P पर वैद्युत क्षेत्र

$$E = (E_x)_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

अतः P पर प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व,

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 \cdot (E_x)_{x=0} \\ &= \epsilon_0 \left[\frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{qd}{2\pi(d^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{जहाँ } r^2 = y^2 + z^2\end{aligned}$$

चूँकि राशि $(d^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ उस चालक तल पर स्थित बिन्दु P की आवेश से दूरी को निरूपित करती है अतः यह स्पष्ट है कि चालक तल पर पृष्ठ घनत्व बिन्दु आवेश से दूरी के घन के समानुपाती होता है।

चालक तल पर प्रेरित कुल आवेश – माना समतल चालक तल पर O बिन्दु के चारों ओर r तथा $r + dr$ त्रिज्याओं का एक वलय क्षेत्रफल है। इस सूक्ष्म क्षेत्रफल पर आवेश dQ_i है

$$\begin{aligned}\therefore dQ_i &= 2\pi r dr \cdot \sigma = 2\pi r dr \cdot \left[\frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{qd \cdot r \cdot dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{कुल प्रेरित आवेश } Q_i = -\int_0^\infty \frac{qd \cdot r \cdot dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}} = -qd \int_0^\infty \frac{r \cdot dr}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

$r = d \tan \theta$ रखने पर,

$$\begin{aligned}\therefore dr &= d \sec^2 \theta d\theta \\ \therefore Q_i &= -qd \int_0^{\pi/2} \frac{d \tan \theta d \cdot \sec^2 \theta d\theta}{d^3 \sec^3 \theta} \\ &= -q \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= -q [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = -q\end{aligned}$$

अतः भूसम्पर्कित समतल चालक पर कुल प्रेरित आवेश $-q$ होगा।

टिप्पणी

1.32 एकसमान विद्युत् क्षेत्र में रखे चालक के पृष्ठ के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाला बल (Force per Unit Area of the Surface of the Conductor in a Uniform Electric Field)

चित्र 1.35 के अनुसार माना कि कोई चालक एकसमान विद्युत् क्षेत्र \vec{E} में रखा है। इस क्षेत्र के कारण चालक में मुक्त इलेक्ट्रॉन क्षेत्र के विपरीत दिशा में गति करते हुए AD पृष्ठ पर एकत्रित होंगे, जिससे BC पृष्ठ धनावेशित हो जाता है। जिससे चालक के अन्दर बाह्य क्षेत्र के विपरीत दिशा में एक प्रेरित विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_i उत्पन्न हो जाता है तथा इलेक्ट्रॉन पृष्ठ पर तब तक एकत्रित होते हैं जब तक कि चालक के अन्दर परिणामी क्षेत्र शून्य नहीं हो जाता, अर्थात् $E = E_i$

$$\text{अब चूँकि } \vec{E} = -\nabla\phi = 0$$

अर्थात् चालक एक समविभव क्षेत्र कि भाँति व्यवहार करता है, क्योंकि चालक में

$$\vec{E} = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\text{या } \rho = 0$$

अर्थात् चालक के अन्दर आवेश वितरण नहीं होता, बल्कि समस्त आवेश पृष्ठ पर एकत्रित होते हैं तथा चालक के पृष्ठ पर विद्युत् क्षेत्र तल के लम्बवत् दिशा में होता है। गॉस प्रमेय के अनुसार आवेशित चालक के पृष्ठ पर आवेश वितरण के कारण क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{E}_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}$$

अब यदि चालक के बिन्दु P पर चित्र 1.37 के अनुसार da क्षेत्रफल का अवयव लें तो अवयव के पास चालक के अन्दर तीव्रता $\vec{E}_{in} = 0$ होगा तथा अवयव के पास बाहर तीव्रता $\vec{E}_{out} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ है। अतः औसत विद्युत् क्षेत्र बाहर की दिशा में कार्य करेगा, अर्थात्

$$E_{out} = \frac{0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0}}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

अतः इस अवयव के आवेश पर लगने वाला बल

$$dF = (\text{अवयव में उपस्थित आवेश}) \times (\text{औसत क्षेत्र})$$

$$= \sigma da \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} da$$

अतः चालक के एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला बल, जिसे वैद्युत दाब (Electrostatic Pressure) कहते हैं, का मान निम्न होगा –

$$p_e = \frac{dF}{da} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{(\epsilon_0 E)^2}{\epsilon_0}$$

या

$$p_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

यही एकसमान विद्युत् क्षेत्र में रखे चालक के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले बल का सूत्र है।

1.33 परावैद्युत (Dielectric)

परावैद्युत वे पदार्थ होते हैं जो अपने से विद्युत् को प्रवाहित नहीं होने देते किन्तु, विद्युत् प्रभाव का प्रदर्शन करते हैं। इनमें मुक्त इलेक्ट्रॉनों का अभाव होता है।

परावैद्युत विद्युतरधी पदार्थ होते हैं जो विद्युत् क्षेत्र में रखे जाने पर ध्रुवित (Polarised) हो जाते हैं। प्रत्येक पदार्थ अणुओं से मिलकर बना होता है। अणु विद्युत् रूपेण उदासीन होते हैं यद्यपि उनमें विपरीत प्रकार के आवेशित कण (इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन) मौजूद रहते हैं। नाभिक के अन्दर धनावेशित प्रोटॉन होते हैं, जबकि नाभिक के बाहर ऋणावेशित इलेक्ट्रॉन उसके चारों ओर वितरित रहते हैं।

आवेश का केन्द्र (Centre of Charge) एक ऐसा बिन्दु होता है जहाँ पर समस्त आवेश को केन्द्रित माना जा सकता है (यह द्रव्यमान केन्द्र से सम्पाती होता है)।

स्पष्ट है कि प्रत्येक अणु में आवेश के दो केन्द्र होते हैं – (i) धनावेश का केन्द्र और (ii) ऋणावेश का केन्द्र।

परावैद्युत के प्रकार – परावैद्युत दो प्रकार के होते हैं :

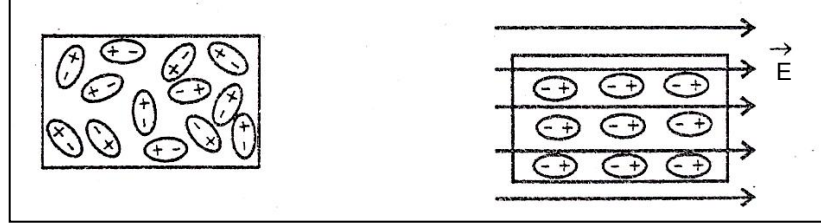
(i) ध्रुवीय परावैद्युत और (ii) अध्रुवीय परावैद्युत।

(i) ध्रुवीय परावैद्युत (Polar Dielectrics) – ध्रुवीय परावैद्युत वे होते हैं, जिनके अणुओं के धनावेशों के केन्द्र और ऋणावेशों के केन्द्र सम्पाती नहीं होते।

टिप्पणी

टिप्पणी

ध्रुवीय परावैद्युत का प्रत्येक अणु वैद्युत द्विध्रुव की भाँति कार्य करता है। अतः जब किसी परावैद्युत को किसी विद्युत् क्षेत्र में रखा जाता है तो उसके अणु बल आघूर्ण का अनुभव करते हैं और क्षेत्र की दिशा में संरेखित होने का प्रयास करते हैं। (चित्र 1.38) H₂O, HCl आदि ध्रुवीय परावैद्युत हैं।



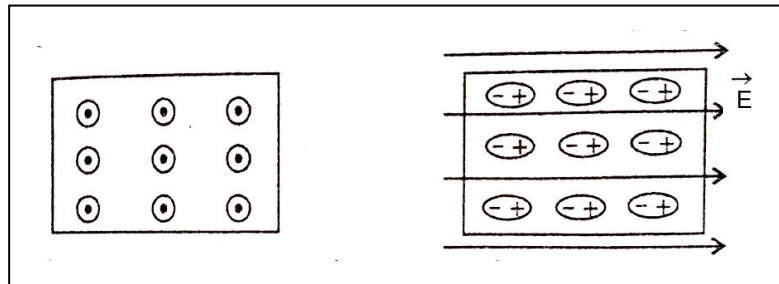
विद्युत् क्षेत्र की अनुपस्थिति में ध्रुवीय परावैद्युत

विद्युत् क्षेत्र की उपस्थिति में ध्रुवीय परावैद्युत

चित्र क्र. 1.38

जब अध्रुवीय परावैद्युत को किसी विद्युत् क्षेत्र में रखा जाता है तो धनावेश और ऋणावेश थोड़ा-सा विस्थापित हो जाते हैं। फलस्वरूप उनके केन्द्र सम्पाती नहीं रह पाते। इस प्रकार अध्रुवीय परावैद्युत को किसी विद्युत् क्षेत्र में रखे जाने पर उसके अणुओं में द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है।

विद्युत् क्षेत्र लगाये जाने पर अध्रुवीय परावैद्युत के अणुओं के धनावेशों के केन्द्र और ऋणावेशों के केन्द्र विस्थापित हो जाने की क्रिया को परावैद्युत का ध्रुवण (Polarisation) कहते हैं।



विद्युत् क्षेत्र की अनुपस्थिति में अध्रुवीय परावैद्युत

विद्युत् क्षेत्र की उपस्थिति में अध्रुवीय परावैद्युत

चित्र क्र. 1.39

परावैद्युत माध्यम का विभव, विद्युत्-धारिता और ऊर्जा पर प्रभाव

विभव और परावैद्युतांक – वायु या निर्वात में आवेश q से r दूरी पर विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad \dots (1)$$

K परावैद्युतांक के माध्यम की उपस्थिति में उसी आवेश से उतनी ही दूरी पर विभव

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 K} \cdot \frac{q}{r} \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) का भाग देने पर $\frac{V}{V'} = K$ या $V' = \frac{V}{K}$

अतः परावैद्युत माध्यम की उपस्थिति में विभव वायु या निर्वात की तुलना में $\frac{1}{K}$ गुना हो जाता है। K का मान सदैव एक से अधिक होता है अतः परावैद्युत की उपस्थिति में विद्युत् विभव कम हो जाता है।

विद्युत्-धारिता और परावैद्युतांक – सूत्र $C = \frac{Q}{V}$ से, $C \propto \frac{Q}{V}$ या $\frac{C}{C'} = \frac{V'}{V}$

परन्तु $\frac{V}{V'} = K$

$\therefore \frac{C}{C'} = \frac{1}{K}$ या $C = KC'$

अतः परावैद्युत माध्यम की उपस्थिति में संधारित्र की धारिता वायु या निर्वात की तुलना में K गुनी हो जाती है। अर्थात् परावैद्युत की उपस्थिति में विद्युत् धारिता का मान बढ़ जाता है।

ऊर्जा और परावैद्युतांक—

सूत्र $U = \frac{1}{2} QV$ से, $U \propto V$ या $\frac{U}{U'} = \frac{V}{V'}$

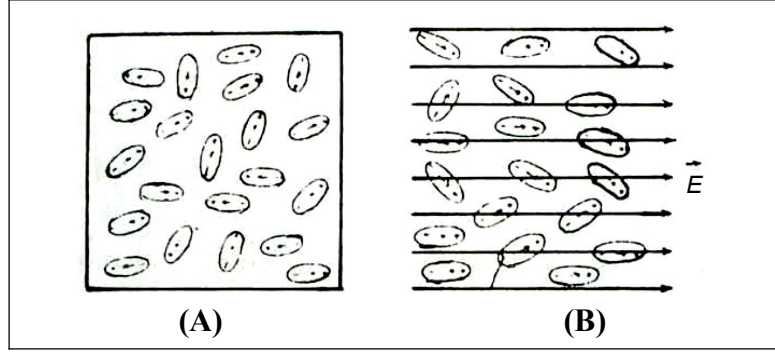
परन्तु $\frac{V}{V'} = K$ अतः $\frac{U}{U'} = K$ या $U' = \frac{U}{K}$

अतः परावैद्युत् माध्यम की उपस्थिति में चालक या संधारित्र की ऊर्जा, वायु या निर्वात की तुलना में K गुनी हो जाती है। अर्थात् परावैद्युत की उपस्थिति में संधारित्र की ऊर्जा कम हो जाती है।

1.34 एकसमान वैद्युत-क्षेत्र के कुचालक (परावैद्युत) बाह्य वैद्युत क्षेत्र में किसी परावैद्युत का व्यवहार (Behaviour of Dielectric in Uniform Electric Field in an External Field)

परावैद्युत, कुचालक पदार्थ होते हैं। कुचालक पदार्थ वह होता है जिसमें मुक्त (Free) इलेक्ट्रॉन नहीं होते हैं या इसमें मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या इतनी कम होती है कि वैद्युत धारा प्रवाहित नहीं कर सकते हैं इसका कारण यह है कि कुचालक में इलेक्ट्रॉन नाभिक से बँधे रहते हैं।

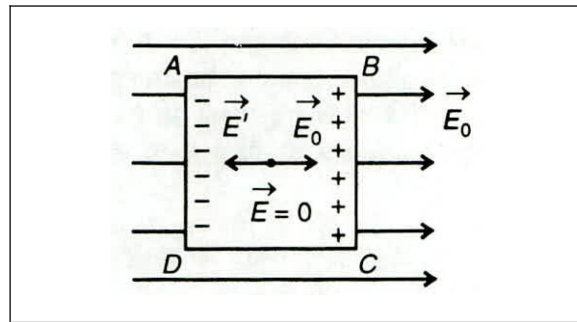
टिप्पणी



चित्र क्र. 1.40: अध्रुवीय परावैद्युत का ध्रुवण

परावैद्युत पदार्थों के अणु दो प्रकार के होते हैं—(1) ध्रुवीय (Polar) तथा अध्रुवीय (Non-polar)। ध्रुवीय अणुओं जैसे H_2O में नाभिक के धन आवेश तथा इलेक्ट्रॉन के ऋण आवेश का केन्द्र एक स्थान पर नहीं होता है। इस कारण प्रत्येक अणु में एक स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण (Permanent dipole moment) होता है। प्रत्येक अणु का अपना द्विध्रुव आघूर्ण होते हुए भी एकांक आयतन का औसत द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है।

चित्र 1.41 के अनुसार माना एक चालक $ABCD$ को E_0 परिमाण की तीव्रता के वैद्युत क्षेत्र में रखा जाता है। चालक में उपलब्ध मुक्त इलेक्ट्रॉन स्वयं इस प्रकार व्यवस्थित हो जाते हैं कि चालक के अन्दर परिणामी वैद्युत तीव्रता शून्य हो जाती है। दूसरे शब्दों में, इलेक्ट्रॉन वितरण से चालक की BC सतह धनात्मक तथा AD सतह ऋणात्मक हो जाती है आवेश के वितरण के कारण चालक के अन्दर विद्युत तीव्रता \vec{E} बाह्य विद्युत तीव्रता \vec{E}_0 के बराबर तथा विपरीत दिशा में होती है तथा चालक में परिणामी तीव्रता का परिमाण $E = E' - E_0 = 0$

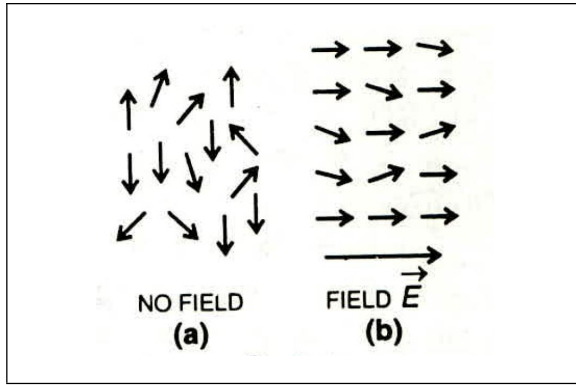


चित्र क्र. 1.41: संधारित्र की प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम का प्रभाव

इसके विपरीत जब एक परावैद्युत को बाहरी वैद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो उसके वैद्युत गुणों में परिवर्तन हो जाता है। जब एक परावैद्युत को एक विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो इसके अध्रुवीय अणुओं के धन व ऋण आवेशों पर बाहरी क्षेत्र के द्वारा विपरीत दिशाओं में बल लगते हैं जिससे इन आवेशों के केन्द्र एक-दूसरे से विस्थापित हो जाते हैं अतः इनमें एक प्रेरित विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण क्षेत्र की दिशा में उत्पन्न होता है यह द्विध्रुव आघूर्ण दो प्रकार से उत्पन्न होता है।

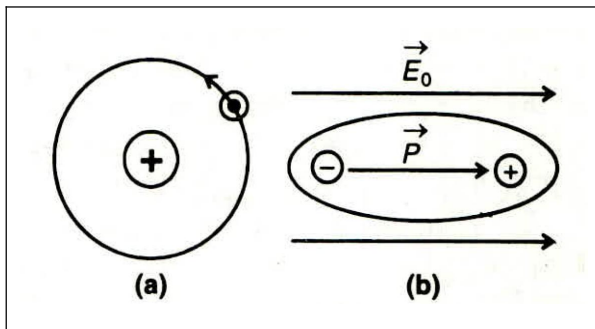
(1) ध्रुवीय अणुओं में एक स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण होता है। बाह्य वैद्युत क्षेत्र की अनुपस्थिति में ये अणु द्विध्रुव सभी दिशाओं में अलग-अलग उपस्थित रहते हैं अतः प्रत्येक अणु में अपना द्विध्रुव आघूर्ण होते हुए भी, परावैद्युत के प्रति एकांक आयतन का औसत द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है [चित्र 1.42(a)]।

(2) किन्तु जब ऐसे अचालक को विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो इन अणुओं के द्विध्रुवों का क्षेत्र की दिशा में संरेखित (Alignment) होते हैं अणुओं के ऊष्मीय प्रक्षोभ (Thermal agitation) के कारण द्विध्रुवों का संरेखन पूर्ण नहीं हो पाता है, परन्तु क्षेत्र की तीव्रता बढ़ने के साथ संरेखन बढ़ता जाता है [चित्र 1.42(b)]। स्थायी द्विध्रुव के कारण यह ध्रुवण (Polarisation) परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती होता है।



चित्र क्र. 1.42: विद्युत संरेखन

दूसरे प्रकार के (अध्रुवीय) अचालकों के अणुओं में स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण नहीं होता, क्योंकि इन अध्रुवीय अणुओं में नाभिक के धन आवेश तथा इलेक्ट्रॉनों के ऋण आवेश का केन्द्र एक ही होता है [चित्र 1.43(a)]। किन्तु वैद्युत क्षेत्र में इन अणुओं के इलेक्ट्रॉनों की कक्षा विकृत (Distorted) हो जाने के कारण ऋण आवेश तथा धन आवेश के केन्द्र विस्थापित हो जाते हैं [चित्र 1.43(b)]। आवेशों के केन्द्रों का यह विस्थापन विद्युत तीव्रता के साथ बढ़ता जाता है। इस प्रकार अध्रुवीय अणुओं में भी बाहरी विद्युत क्षेत्र के प्रभाव के कारण क्षेत्र की दिशा में द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित होता है। प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण क्षेत्र की तीव्रता के साथ बढ़ता जाता है तथा क्षेत्र शून्य होने पर शून्य हो जाता है।

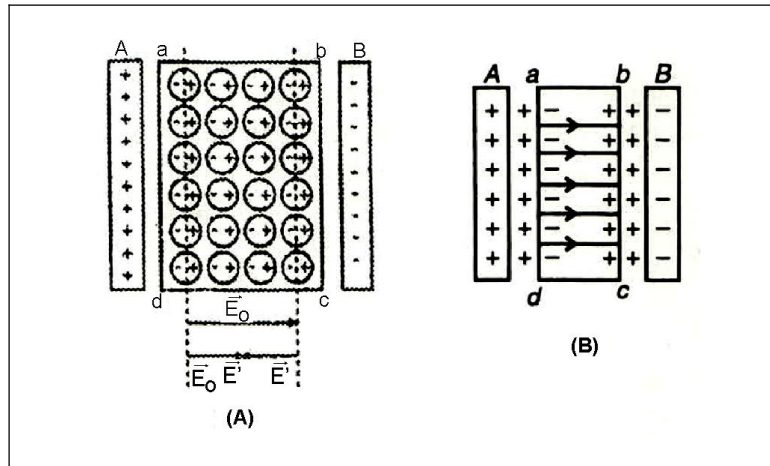


चित्र क्र. 1.43: अध्रुवीय अचालक का वैद्युत क्षेत्र में आवेश विस्थापन

एक वैद्युत क्षेत्र अधुवीय तथा ध्रुवीय परावैद्युत में वैद्युत क्षेत्र की दिशा में एक कुल विद्युत आघूर्ण उत्पन्न कर देता है तथा कुल द्विध्रुव आघूर्ण वाले परावैद्युत को ध्रुवित (Polarised) कहते हैं तथा इस घटना को परावैद्युत ध्रुवण (Dielectric polarisation) या पदार्थ का वैद्युत ध्रुवण (Electric polarisation of matter) कहते हैं।

परावैद्युत माध्यम के साथ समान्तर प्लेट संधारित्र (Parallel Plate Condenser with a Dielectric)

चित्र 1.44 में किसी परावैद्युत पदार्थ के एकसमान वैद्युत क्षेत्र के व्यवहार को समझाया गया है। इस चित्र 1.44 में एक परावैद्युत पदार्थ के आयताकार स्तंभ को एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की समान्तर प्लेटों A व B के बीच एकसमान वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 में रखा जाता है।



चित्र क्र. 1.44: समान्तर प्लेट संधारित्र के प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम का प्रभाव

वैद्युत क्षेत्र के कारण स्तंभ में परावैद्युत ध्रुवण उत्पन्न हो जाता है अर्थात् इसके अणु वैद्युत द्विध्रुव बन जाते हैं, जिनका वैद्युत क्षेत्र की दिशा में संरेखन होने से स्तंभ में क्षेत्र की दिशा में कुल द्विध्रुव आघूर्ण कार्य करने लगता है।

परावैद्युत स्तंभ के अणुओं के क्षेत्र की दिशा में संरेखन के कारण संधारित्र की धन आवेशित प्लेट A के सामने के स्तंभ की सतह ad पर ऋण आवेश तथा संधारित्र की ऋण आवेशित प्लेट B के सामने की स्तंभ की सतह bc पर समान धन आवेश उत्पन्न होता है। स्तंभ के अन्दर कुल आवेश शून्य होता है क्योंकि एक ध्रुवीय अणु की धन सतह उसके समीपस्थ ध्रुवीय अणु की ऋण सतह के समीप होती है तथा ये दोनों विपरीत व समान आवेश एक-दूसरे को सन्तुलित या नष्ट कर देते हैं। इस प्रकार परावैद्युत स्तंभ को विद्युत क्षेत्र में रखने पर दो तलों पर प्रेरित आवेश भी अपना वैद्युत क्षेत्र \vec{E}' उत्पन्न करते हैं, जो बाहरी वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 के विपरीत होता है। परावैद्युत में प्रेरित वैद्युत क्षेत्र \vec{E}' उस पर आरोपित बाहरी वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 से कम होता है, क्योंकि परावैद्युत स्तंभ के तलों पर प्रेरित आवेश

स्तंभ के तलों तक ही निहित अणुओं से बँधे होते हैं। ये अणु इतने विस्तृत क्षेत्र में गति नहीं कर सकते जिससे प्रेरित क्षेत्र आरोपित क्षेत्र के समान हो सके इस प्रकार परावैद्युत स्तंभ के अन्दर परिणामी वैद्युत क्षेत्र $\vec{E}_0 = \vec{E}'$ का मान मुक्त आकाश में बाहरी क्षेत्र \vec{E}_0 से कम होता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि जब एक परावैद्युत को किसी बाहरी वैद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो परावैद्युत के अन्दर वैद्युत क्षेत्र मुक्त आकाश के क्षेत्र से कम होता है। यहाँ यह आवश्यक है कि वैद्युत क्षेत्र में रखे परावैद्युत में वैद्युत क्षेत्र अल्प तो हो जाता है परन्तु शून्य नहीं होता है। परावैद्युत के अन्दर वैद्युत क्षेत्र के कम होने को उपर्युक्त चित्र 1.44(b) में प्रदर्शित किया गया है। इस चित्र के अनुसार धारित्र की धनात्मक प्लेट A से जितनी वैद्युत बल रेखाएँ चलती हैं वे सभी परावैद्युत में प्रवेश नहीं करती हैं, बल्कि उनमें से कुछ परावैद्युत पर प्रेरित आवेशों पर समाप्त हो जाती है।

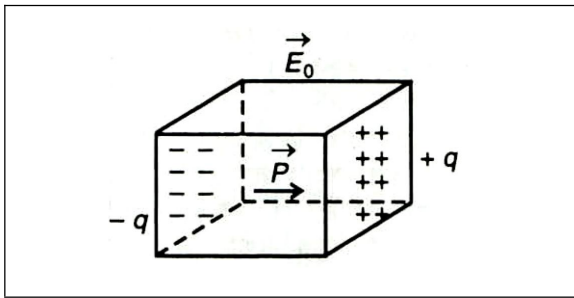
1.35 परावैद्युत ध्रुवण (Dielectric Polarisation)

जब एक परावैद्युत को एकसमान वैद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो उसके अणु वैद्युत द्विध्रुव बन जाते हैं तथा उन वैद्युत द्विध्रुवों का वैद्युत क्षेत्र में संरेखन हो जाने पर पदार्थ में वैद्युत क्षेत्र की दिशा में एक कुल विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है। इस घटना को परावैद्युत ध्रुवण कहते हैं।

किसी परावैद्युत पदार्थ को बाहरी वैद्युत क्षेत्र में रखने पर परावैद्युत पदार्थ के प्रति एकांक आयतन में प्रेरित वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण को परावैद्युत पदार्थ का वैद्युत ध्रुवण कहते हैं। इसे वेक्टर \vec{p} द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

प्रयोगों द्वारा परावैद्युत पदार्थ के प्रत्येक अणु में प्रेरित औसत द्विध्रुव आघूर्ण \vec{p}_m अणु पर कार्य करने वाले वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_m के समानुपाती होता है। परावैद्युतांक पदार्थ के अणु पर कार्य करने वाला वैद्युत क्षेत्र उस पर आरोपित बाहरी क्षेत्र \vec{E}_0 तथा आरोपित परावैद्युत के ध्रुवण के कारण उत्पन्न आन्तरिक क्षेत्र \vec{E}' के अन्तर के बराबर होता है अर्थात् $\vec{E}_m = \vec{E}_0 - \vec{E}'$ । अतः सूक्ष्म क्षेत्रों के लिये

$$\vec{p}_m \propto \vec{E}_m$$



चित्र क्र. 1.45: ध्रुवण तथा ध्रुवण सदिश

या
$$\vec{p}_m = \alpha \vec{E}_m$$

जहाँ α एक नियतांक है, जो परावैद्युत पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है तथा जिसे आण्विक ध्रुवणता (Molecular polarisability) कहते हैं। यदि परावैद्युत पदार्थ के एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n है तो परावैद्युत पदार्थ के एकांक आयतन में प्रेरित कुल वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण अर्थात् परावैद्युत का ध्रुवण \vec{p} निम्न सूत्र से प्राप्त होगा—

$$\vec{p} = n\vec{p}_m = n\alpha\vec{E}_m \quad \dots (1)$$

चित्र 1.45 में l लम्बाई तथा एकसमान परिच्छेद क्षेत्रफल S के एक समांगी (Homogeneous) समदैशिक परावैद्युत पदार्थ को एकसमान बाहरी वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 में रखा गया है। इस परावैद्युत पदार्थ के वैद्युत ध्रुवण के कारण इसके तलों पर प्रेरित आवेश $-q'$ तथा $+q'$ है।

इस परावैद्युत स्तंभ का कुल प्रेरित वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण $= q' \times l$

ब्लॉक का कुल आयतन $= S \times l$

अतः परावैद्युत के एकांक आयतन में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण अर्थात् ब्लॉक में उत्पन्न वैद्युत ध्रुवण \vec{p} का परिमाण

$$\vec{p} = \frac{q'}{Sl} = \frac{q'}{S} \quad \dots (2)$$

परन्तु $\frac{q'}{S}$ ब्लॉक की सतह पर प्रेरित आवेश का सतह घनत्व है जिसे σ_p से प्रकट करते हैं। अतः

$$\vec{p} = \sigma_p \quad \dots (3)$$

अतः किसी परावैद्युत को बाहरी वैद्युत क्षेत्र में रखने पर उसके उत्पन्न विद्युत ध्रुवण \vec{p} परावैद्युत पदार्थ के क्षेत्र के लम्बवत् तलों पर प्रेरित आवेश घनत्व के बराबर होता है।

\vec{p} का मात्रक सतह आवेश घनत्व “कूलॉम/मीटर²” होता है। वैद्युत ध्रुवण \vec{p} की दिशा वैद्युत द्विध्रुव की दिशा की ही तरह ऋणात्मक आवेश $-q'$ से प्रेरित धनात्मक आवेश $+q'$ की ओर होती है।

1.36 परावैद्युतांक या आपेक्षिक वैद्युतशीलता (Dielectric Constant or Relative Permittivity)

जब एक समान्तर प्लेट संधारित्र की $+q$ व $-q$ आवेशों से आवेशित दो प्लेटों के बीच स्थापित एकसमान वैद्युत क्षेत्र में एक परावैद्युत को रखा जाता है, तो परावैद्युत के क्षेत्र के लम्बवत् तथा प्लेटों के सामने वाले तलों पर विपरीत बंधे आवेश $-q'$ व $+q'$ प्रेरित हो जाते हैं, जिनके मान संधारित्र के वास्तविक आवेशों से कम होते हैं। इस प्रकार परावैद्युत का प्रभाव उसके अन्दर वैद्युत क्षेत्र को कम करना है। मुक्त आकाश (निर्वात) में वैद्युत क्षेत्र के परावैद्युत में वैद्युत क्षेत्र के अनुपात को

परावैद्युत पदार्थ का परावैद्युतांक कहते हैं, जिसे K से प्रदर्शित करते हैं। यदि मुक्त आकाश में वैद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 तथा परावैद्युत पदार्थ में वैद्युत क्षेत्र \vec{E} है तब परावैद्युत पदार्थ का परावैद्युतांक

$$K = \frac{E_0}{E} \quad \dots (1)$$

यदि मुक्त आकाश की वैद्युतशीलता ϵ_0 तथा परावैद्युत पदार्थ की निरपेक्ष (Absolute) वैद्युतशीलता ϵ है तो आवेश q से बिन्दु \vec{r} पर मुक्त आकाश में वैद्युत क्षेत्र

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{r^3}$$

तथा परावैद्युत पदार्थ में q आवेश के कारण बिन्दु \vec{r} पर वैद्युत क्षेत्र

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qr}{r^3}$$

\vec{E}_0 व \vec{E} के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$K = \frac{E_0}{E} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

या $\epsilon = \epsilon_0 K \quad \dots (2)$

अतः किसी परावैद्युत पदार्थ का परावैद्युतांक उस परावैद्युत पदार्थ की वैद्युतशीलता तथा मुक्त आकाश की वैद्युतशीलता की निष्पत्ति के बराबर होता है। परावैद्युतांक को परावैद्युत पदार्थ की आपेक्षिक वैद्युतशीलता भी कहते हैं जिसे ϵ_r द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः

$$K = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

या $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

1.37 ध्रुवण वेक्टर (Polarisation Vector)

जब परावैद्युत को किसी वैद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो अणुओं के द्विध्रुव आघूर्णों का क्षेत्र की दिशा में संरेखन (Alignment) होता है बाह्य वैद्युत क्षेत्र के कारण अणुओं के द्विध्रुव आघूर्णों के संरेखन की मात्रा (Degree) को एक वेक्टर राशि से व्यक्त करते हैं, जिसे 'ध्रुवण' \vec{p} कहते हैं। यदि \vec{p} प्रत्येक अणु के औसत द्विध्रुव आघूर्ण का क्षेत्र की दिशा में घटक (Component) हो और n एकांक आयतन में अणुओं की संख्या हो तो प्रति एकांक आयतन के द्विध्रुव आघूर्ण को 'ध्रुवण' वेक्टर \vec{p} कहते हैं। अर्थात्

$$\vec{p} = n \vec{p}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

ध्रुवण \vec{p} की दिशा भी अणुओं के द्विध्रुव आघूर्णों के अनुदिश होती है। \vec{p} का मात्रक कूलॉम मीटर/मीटर³ या कूलॉम/मीटर² (C/m^2) होती है। चित्र 1.46 के अनुसार समान्तर प्लेट संधारित्र है जिसकी प्लेटों के बीच की दूरी l तथा प्लेटों का क्षेत्रफल A है। माना संधारित्र की प्लेटों के बीच परावैद्युत पट्टिका रखी है तथा प्लेट को $+q$ आवेश दिया जाता है जिसे मुक्त (Free) आवेश कहते हैं। माना धन प्लेट M के निकट परावैद्युत सतह पर प्रेरित पृष्ठ आवेश $-q_m$ है तथा ऋण प्लेट N के निकट सतह पर प्रेरित पृष्ठ आवेश $+q$ होगा। इस प्रेरित आवेश को 'ध्रुवण' (Polarisation) आवेश भी कहते हैं क्योंकि परावैद्युत के अन्दर कुल आवेश शून्य होता है। अतः दोनों सतहों पर प्रेरित आवेश $-q_m$ तथा $+q_m$ के कारण परावैद्युत का द्विध्रुव आघूर्ण

$$= \text{आवेश} \times \text{दूरी} = q_m \cdot l$$

प्लेटों के बीच परावैद्युत पट्टिका का आयतन $A \cdot l$ है, अतः पट्टिका के एक एकांक आयतन का द्विध्रुव आघूर्ण या ध्रुवण सदिश

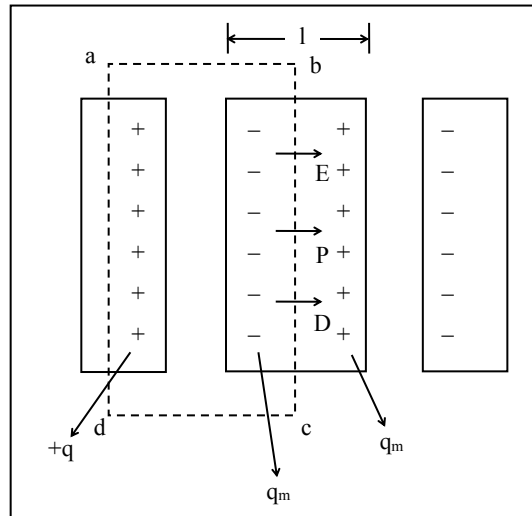
$$\vec{P} = \frac{q_m l}{A \cdot l} = \frac{q_m}{A} = \sigma$$

जहाँ पर σ 'प्रेरित पृष्ठ आवेश घनत्व' है।

अतः "आंकिक रूप में ध्रुवण \vec{P} प्रेरित पृष्ठ आवेश घनत्व σ_p के बराबर होता है।"

एक अदिश समांगी तथा समदैशिक परावैद्युत पदार्थ में ध्रुवण सदिश \vec{P} पदार्थ के अन्दर उपस्थित औसत विद्युत क्षेत्र \vec{E} के अनुक्रमानपाती होती है

$$\begin{aligned} \vec{P} &\propto \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \chi E \end{aligned}$$



चित्र क्र. 1.46: आवेशित प्लेटों के बीच रखे द्र के विद्युत माध्यम का व्यवहार

जहाँ χ एक अदिश तथा विमाहीन राशि है जिस उस परावैद्युत पदार्थ की विद्युत प्रवृत्ति कहते हैं जो कि उस पदार्थ का विशेष गुण है तथा यह प्रदर्शित करता है कि पदार्थ कितनी आसानी से ध्रुवित किया जा सकता है।

टिप्पणी

1.38 विद्युत वेक्टर और उनका परस्पर सम्बन्ध (Electric Vectors and their Inter-relations)

(1) विद्युत क्षेत्र वेक्टर \vec{E} (Electric Intensity \vec{E}) – विद्युत क्षेत्र के किसी बिन्दु पर स्थित विद्युत तीव्रता वेक्टर का परिणाम उस बिन्दु पर स्थित एकांक धन आवेश पर कार्य करने वाले बल के बराबर होता है तथा इसकी दिशा बल की दिशा के समान होती है।

यदि एक परीक्षण आवेश q_0 को विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर रखने पर उस पर क्षेत्र के कारण \vec{F} बल कार्य करता है तो उस बिन्दु पर विद्युत तीव्रता

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

स्पष्टतः \vec{E} का मात्रक न्यूटन/कूलॉम होता है। परावैद्युत के अन्दर वैद्युत तीव्रता बाहरी तथा पदार्थ के अन्दर उत्पन्न तीव्रता परिणामी तीव्रता के बराबर होती है अर्थात् ध्रुवण के कारण परावैद्युतांक में तीव्रता परिवर्तित हो जाती है।

चूँकि $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

तथा $\text{curl } \vec{E} = 0$

एक समांगी एकसमान माध्यम में विस्थापन वेक्टर \vec{D} तथा ध्रुवण वेक्टर \vec{P} की दिशाएँ \vec{E} की दिशा के अनुदिश ही होती हैं।

(2) विद्युत ध्रुवण वेक्टर \vec{P} (Electric Polarization Vector \vec{P}) – जब एक परावैद्युत को किसी बाहरी विद्युत क्षेत्र \vec{E} में रखा जाता है तो परावैद्युत के अणु विद्युत द्विध्रुव बन जाते हैं तथा उनमें एक कुल विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है इस अवस्था में परावैद्युत को विद्युत ध्रुवित कहा जाता है। “परावैद्युत के अन्दर बाहरी विद्युत क्षेत्र के कारण उसके एकांक आयतन में उत्पन्न द्विध्रुव आघूर्ण को विद्युत ध्रुवण कहते हैं।” इसे \vec{P} से व्यक्त करते हैं।

\vec{P} का मान वायु में शून्य होता है। जब एक t मोटाई तथा S पृष्ठ क्षेत्रफल का एक समांगी समदैशिक परावैद्युत स्तंभ एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच जिन पर $+q$ व $-q$ मुक्त आवेश है, विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् रखा जाता है तो स्तंभ ध्रुवित हो जाता है जिससे इसके फलकों पर $+q_p$ व $-q_p$ आवेश प्रेरित हो जाते हैं। सम्पूर्ण स्तंभ का विद्युत ध्रुवण आघूर्ण $= q_p t$ तथा इसका आयतन $= St$ है।

परावैद्युत में प्रेरित विद्युत ध्रुवण का परिमाण परावैद्युत के एकांक आयतन में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण के परिमाण के बराबर होता है। अर्थात्

टिप्पणी

$$P = \frac{\text{प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$$

$$= \frac{q_p t}{St}$$

$$= \frac{q_p}{S}$$

परन्तु $\frac{q_p}{S} = \text{प्रेरित आवेश घनत्व } \sigma$

अतः $P = \sigma$

अतः किसी समांगी समदैशिक परावैद्युत के लिये विद्युत ध्रुवण \vec{P} का मान प्रेरित आवेश घनत्व के बराबर होता है। \vec{P} की दिशा ऋणात्मक प्रेरित आवेश $-q_p$ से धनात्मक प्रेरित आवेश $+q_p$ की ओर होती है।

(3) विद्युत विस्थापन वेक्टर \vec{D} (Electric Displacement Vector \vec{D})

— यह मुक्त आवेश q से सम्बन्धित होता है इसे विद्युत विस्थापन बल रेखाओं से प्रदर्शित कर सकते हैं। \vec{D} की बल रेखायें मुक्त आवेश से प्रारम्भ होकर मुक्त आवेश पर ही समाप्त होती है। इसका मान वायु तथा परावैद्युत में समान रहता है। $\text{div } \vec{D} = \rho$ समीकरण \vec{D} की गणना के लिये पर्याप्त नहीं है। क्योंकि $\text{curl } \vec{D}$ भी शून्य नहीं होता है स्पष्टतः \vec{D} दो भौतिक राशियों \vec{E} व \vec{P} का योग होता है।

जब एक परावैद्युत को संधारित्र की प्लेटों के बीच रखते हैं तो परावैद्युत स्तंभ की सतहों पर प्रेरित आवेश $-q_p$ व $+q_p$ उत्पन्न होने के कारण परावैद्युत स्तंभ पर प्रेरित या आवेश घनत्व σ_p है। संधारित्र की प्लेटों पर मुक्त आवेश घनत्व σ है। इन आवेश घनत्वों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्रों की तीव्रतायें निम्न होंगी—

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

तथा $\vec{E}_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$

ये दोनों तीव्रतायें एक-दूसरे के विपरीत होंगी, अतः परावैद्युत के अन्दर उत्पन्न परिणामी वैद्युत क्षेत्र का परिमाण

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_p$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

या $\epsilon_0 \vec{E} = \sigma - \sigma_p$

$\therefore \sigma = \epsilon_0 E - \sigma_p \dots (1)$

परन्तु प्रेरित आवेश घनत्व σ_p विद्युत प्रेरण ध्रुवण वेक्टर \vec{P} के परिमाण के बराबर होता है अर्थात्

$\sigma_p = P \dots (2)$

अतः समीकरण (1) व (2) से

$\sigma = \epsilon_0 E + P$

उपर्युक्त समीकरण में राशि $\epsilon_0 E + P$ को ही विद्युत विस्थापन D कहते हैं।

अतः

$D = \epsilon_0 E + p$

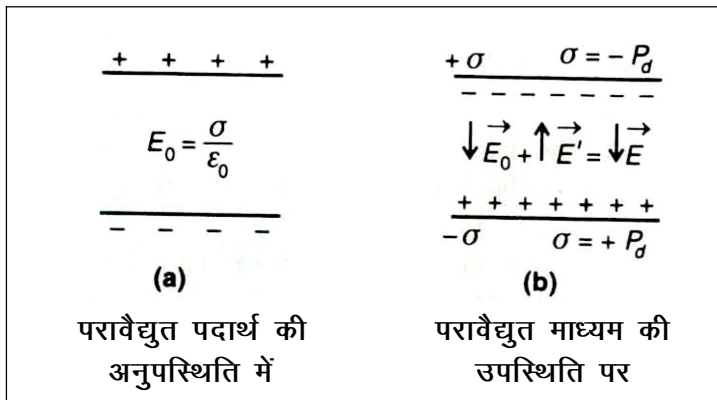
जहाँ $D = \sigma$ (मुक्त आवेश घनत्व)

विद्युत विस्थापन D , विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E व विद्युत ध्रुवण P में सम्बन्ध – चित्रानुसार माना एक समान्तर प्लेट संधारित्र की ऊपर की प्लेट पर धनात्मक पृष्ठीय आवेश घनत्व $+\sigma$ तथा नीचे की प्लेट पर ऋणात्मक आवेश घनत्व $-\sigma$ है।

यदि प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ नहीं हो, तब विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (नीचे की ओर), $\dots (1)$

चित्र 1.47(a) के अनुसार प्लेटों के मध्य एक परावैद्युत पदार्थ भर दिया जाये तो परावैद्युत पदार्थ के ऊपरी पृष्ठ पर ऋणात्मक आवेश तथा निचले पृष्ठ पर जो ऋणात्मक प्लेट के पास है, धनात्मक आवेश प्रेरित हो जाता है।



चित्र क्र. 1.47: \vec{D} , \vec{E} तथा \vec{P} में सम्बन्ध

ऐसी स्थिति में स्पष्टः परावैद्युत में प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व σ , ध्रुवण सदिश \vec{P}_d के बराबर होता है। अतः परावैद्युत पदार्थों के पृष्ठों पर प्रेरित आवेश के

टिप्पणी

कारण एक विद्युत क्षेत्र E' जिसकी दिशा E_0 के विपरीत होगी, उत्पन्न होता है। अर्थात्

टिप्पणी

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \\ &= -\frac{\vec{P}_d}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad \dots (2)$$

चित्र 1.47(b) से स्पष्ट है कि सदिश \vec{E}' की दिशा विद्युत क्षेत्र \vec{E}_0 या ध्रुवण सदिश \vec{p} की दिशा के विपरीत है। अर्थात्

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}_d}{\epsilon_0}\quad \dots (3)$$

अतः परावैद्युत पदार्थ के कारण परिणामी तीव्रता \vec{E} है, तब उस दशा में

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\text{या } \vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\quad \dots (4)$$

$$\text{या } \vec{E}_0 = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\quad \dots (5)$$

पदार्थ की सापेक्षिक विद्युतशीलता या पदार्थ का परावैद्युतांक

$$\epsilon_r = \frac{\text{पदार्थ की अनुपस्थिति में विद्युत क्षेत्र } \vec{E}_0}{\text{पदार्थ की उपस्थिति में विद्युत क्षेत्र } \vec{E}}$$

$$\text{या } \vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}\quad \dots (6)$$

समीकरण (5) व (6) से

$$\vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \epsilon_r \vec{E}\quad \dots (7)$$

$$\text{या } \vec{E}(\epsilon_r - 1) = \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}(\epsilon_r - 1)\quad \dots (8)$$

यह \vec{P} तथा E में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

लेकिन समांगी व समदैशिक परावैद्युत माध्यम में ध्रुवण \vec{P} वैद्युत क्षेत्र E के समानुपाती होता है।

$$\text{अर्थात् } \vec{P} \propto E \text{ या } \vec{P} = \epsilon_0 \chi E\quad \dots (9)$$

जहाँ χ_e एक अदिश व विमाहीन राशि है जिसे माध्यम की वैद्युत प्रवृत्ति कहते हैं।

समीकरण (8) व (9) की तुलना करने पर

$$\chi_e = (\epsilon_r - 1)$$

यह समीकरण पदार्थ के परावैद्युतांक तथा वैद्युत प्रवृत्ति में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

समीकरण (7) से

$$\epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 E + p_d$$

यदि $\epsilon_0 \epsilon_r E = D$ विस्थापन सदिश मानें तो

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 E + \vec{P}}$$

उपर्युक्त समीकरण D, E, P में सम्बन्ध दर्शाता है। यदि माध्यम में वायु के स्थान पर निर्वात हो, तो

$$\epsilon_r = 1$$

जिससे $\chi_e = 0$

तथा $D = \epsilon_0 \vec{E}$

तथा $p_d = 0$

यदि परावैद्युत माध्यम की निरपेक्ष विद्युतशीलता ϵ है, तो

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

तथा $D = \epsilon E$

यह समीकरण \vec{D} तथा \vec{E} में संबंध प्रदर्शित करता है।

1.39 क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण की आण्विक

व्याख्या (Molecular Interpretation of Clausius-Mossotti Equation)

किसी परावैद्युत पट्टी को किसी आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच रखने पर किसी बिन्दु पर परिणामी विद्युत् क्षेत्र, संधारित्र की प्लेटों पर स्वतन्त्र आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र तथा परावैद्युत माध्यम में ध्रुवण के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र के वेक्टर योग के बराबर होता है। अब हम परावैद्युत माध्यम में ध्रुवण के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र की व्याख्या करेंगे।

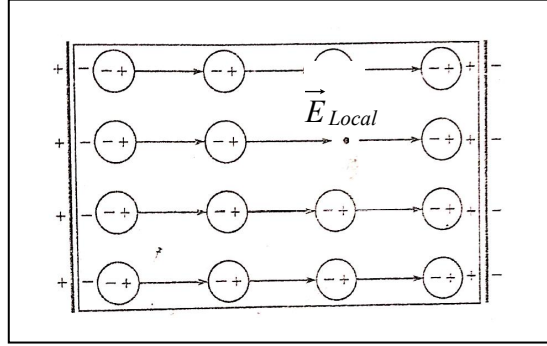
परावैद्युत पट्टी में ध्रुवण के कारण उत्पन्न औसत विद्युत् क्षेत्र को **स्थूलस्तरीय विद्युत् क्षेत्र** (Macroscopic electric field) कहते हैं तथा परावैद्युत पट्टी के प्रत्येक अणु पर लगने वाले विद्युत् क्षेत्र को सूक्ष्मस्तरीय विद्युत् क्षेत्र

टिप्पणी

(Microscopic electric field) अथवा स्थानीय विद्युत् क्षेत्र (local electric field) कहते हैं।

टिप्पणी

दो आवेशित समान्तर प्लेटों के बीच परावैद्युत पदार्थ की पट्टिका रखने पर परावैद्युत पदार्थ के अणुओं के ध्रुवण के कारण पट्टिका के पृष्ठ पर ध्रुवण आवेश प्रेरित हो जाता है, जबकि पट्टिका के अन्दर एक अणु का धनावेश, समीपस्थ अणु के ऋणावेश के सम्पर्क में होने के कारण एक-दूसरे को निष्फल कर देते हैं। पट्टिका के पृष्ठ पर प्रेरित ध्रुवण आवेश के कारण सम्पूर्ण परावैद्युत पट्टिका के अन्दर एक स्थूलस्तरीय विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}_{in} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$ होता है, जहाँ \vec{P} पदार्थ में ध्रुवण घनत्व (अर्थात् प्रति एकांक आयतन प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण) है। इस विद्युत् क्षेत्र की दिशा, प्लेटों के मध्य बाह्य विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_0 के विपरीत दिशा में होती है तथा इसकी तीव्रता, बाह्य विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता से कम होती है। ध्रुवण के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{in} को स्थूलस्तरीय विद्युत् क्षेत्र इसलिए कहा गया है, क्योंकि परावैद्युत पदार्थ के विभिन्न अणुओं पर वास्तविक विद्युत् क्षेत्र भिन्न-भिन्न होता है तथा यह अणु की स्थिति पर निर्भर करता है।



चित्र क्र. 1.48: एकसमान ध्रुवित पदार्थ में स्थानीय विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{Local} की स्थिति

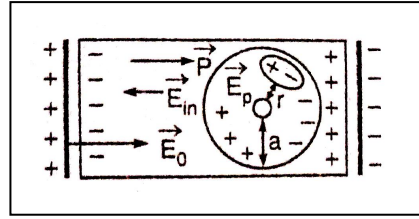
परावैद्युत पदार्थ के एक अणु पर लगने वाले सूक्ष्मस्तरीय या स्थानीय विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{Local} की गणना करेंगे। किसी अणु पर लगने वाला स्थानीय विद्युत् क्षेत्र, उस बिन्दु पर रखे एकांक धनावेश पर लगने वाला बल है जबकि उस बिन्दु से अणु को (अन्य सभी अणुओं को यथास्थिति में छोड़कर) हटा लिया जाता है। चित्र 1.48 में एकसमान ध्रुवित पदार्थ प्रदर्शित है जिसमें शेष सभी अणु द्विध्रुवों को छोड़कर केवल एक अणु द्विध्रुव को हटाया गया है। अणु के धनावेश व ऋणावेश के बीच विस्थापन, स्थानीय विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता पर निर्भर करता है। अतः अणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण \vec{P}_{in} , स्थानीय विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{Local} के अनुक्रमानुपाती होता है, अर्थात्

$$\vec{P}_{in} \propto \vec{E}_{Local}$$

या
$$\vec{P}_{in} = \alpha \vec{E}_{Local} \quad \dots (1)$$

जहाँ α अनुक्रमानुपाती नियतांक है जिसे आण्विक ध्रुवणता (molecular polarisability) कहते हैं।

स्थानीय विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{Local} की गणना – माना चित्र 1.49 में आवेशित समान्तर प्लेटों के बीच परावैद्युत पदार्थ भरा है। प्लेटों व परावैद्युत माध्यम की लम्बाई बहुत अधिक है तथा प्लेटों के बीच की दूरी बहुत कम है जिससे कि प्लेटों के बीच विद्युत् क्षेत्र एकसमान माना जा सकता है। अब हमें परावैद्युत पदार्थ के एक अणु पर विद्युत् क्षेत्र (अर्थात् स्थानीय विद्युत् क्षेत्र) की गणना करनी है। चित्र 1.49 में एक अणु प्रदर्शित है जिसको केन्द्र मानकर त्रिज्या a का एक गोला खींचा गया है जोकि इस अणु की स्थानीय क्षेत्र की सीमा व्यक्त करता है। इस अणु पर परिणामी विद्युत् क्षेत्र, निम्नलिखित आवेशों के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्रों का वेक्टर योग होगा:



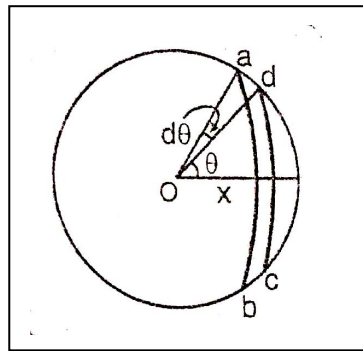
चित्र क्र 1.49: स्थानीय विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_{Local} की गणना

- (i) संधारित्र की प्लेटों पर उपस्थित स्वतन्त्र आवेश के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र

$$\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{क्योंकि } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \dots (2)$$

- (ii) संधारित्र की प्लेटों के समीप परावैद्युत पदार्थ के पृष्ठों पर प्रेरित आवेशों (अर्थात् ध्रुवित आवेश पृष्ठ घनत्व $\sigma_p = P$) के कारण उत्पन्न स्थूलस्तरीय विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}_{in} = -\vec{P}/\epsilon_0$

- (iii) त्रिज्या a की गोलीय सीमा रेखा के अन्दर उपस्थित पृष्ठ आवेशों (पृष्ठ घनत्व σ_p) के कारण उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र $\vec{E}_p = \vec{P}/\epsilon_0$



चित्र क्र. 1.50

टिप्पणी

टिप्पणी

उपपत्ति – माना त्रिज्या a के खोखले गोले पर आवेश का पृष्ठ घनत्व σ_p है। हमें इस गोले के केन्द्र पर विद्युत् क्षेत्र की गणना करनी है। चित्र 1.50 के अनुसार यदि हम एक वलय $abcd$ लें तो इसकी त्रिज्या $= a \sin \theta$, मोटाई $= a d\theta$ तथा केन्द्र से दूरी $= a \cos \theta$

अतः वलय का क्षेत्रफल $= (2\pi a \sin \theta) a d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$

वलय का आवेश $= (2\pi a^2 \sin \theta d\theta) \sigma_p$

वलय के कारण गोले के केन्द्र पर विद्युत् क्षेत्र

$$dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi a^2 \sin \theta d\theta) \sigma_p a \cos \theta}{a^3} = \frac{\sigma_p \sin \theta \cos \theta d\theta}{2\epsilon_0} \quad \dots (3)$$

(क्योंकि वलय की अक्ष पर विद्युत् क्षेत्र $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{y^3}$, जहाँ q वलय पर आवेश, x वलय के केन्द्र से बिन्दु की दूरी तथा y वलय की परिधि से बिन्दु की दूरी है।)

लेकिन $\sigma_p =$ ध्रुवण वेक्टर \vec{P} के लम्बवत् पृष्ठ पर आवेश घनत्व $= |P| \cos \theta$

\therefore सम्पूर्ण गोले के कारण केन्द्र पर विद्युत् क्षेत्र

$$E_p = \int_0^\pi \frac{|P| \sin \theta \cos^2 \theta d\theta}{2\epsilon_0}$$

$$E_p = \frac{|P|}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{|P|}{2\epsilon_0} \times \frac{2}{3} = \frac{|P|}{3\epsilon_0} \quad \dots (4)$$

(iv) त्रिज्या a के गोले के अन्दर उपस्थित अन्य अणु द्विध्रुवों के कारण विद्युत् क्षेत्र।

यदि सिद्ध किया जा सकता है कि यदि केवल द्विध्रुव-द्विध्रुव अन्योन्य क्रियाएँ ली जायें तो गोले के अन्दर उपस्थित सभी अणु द्विध्रुवों (केवल एक अणु को छोड़कर) के कारण अणु पर लगने वाला परिणामी विद्युत् क्षेत्र शून्य होता है।

अतः एक परावैद्युत अणु पर कुल स्थानीय विद्युत् क्षेत्र

$$\vec{E}_{Local} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{in} + \vec{E}_p = \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \dots (5)$$

1.40 क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण (Clausius-Mosotti Equation)

क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण किसी अध्रुवीय परावैद्युत पदार्थ के सूक्ष्मस्तरीय गुण अर्थात् आण्विक ध्रुवणकता तथा स्थूलस्तरीय गुण अर्थात् परावैद्युतांक के बीच

सम्बन्ध प्रदर्शित करती है तथा परावैद्युतांक नियतांक k का मान ज्ञात किया जाता है।

किसी अणु की आविष्क ध्रुवणकता α अणु में एकांक ध्रुवण क्षेत्र \vec{E}_m के लिये प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण \vec{P}_m के बराबर होती है।

$$\text{अर्थात्} \quad \vec{P}_m = \alpha \vec{E}_m \quad \dots (1)$$

यदि परावैद्युतांक के एकांक आयतन में अणुओं की संख्या n है तो परावैद्युत में द्विध्रुव आघूर्ण

$$\begin{aligned} \vec{P} &= n \vec{P}_m \\ \vec{P} &= n \alpha E_m \end{aligned} \quad \dots (2)$$

लॉरेंज क्षेत्र समीकरण के अनुसार किसी स्थूल वैद्युत क्षेत्र E में स्थित अध्रुवीय समदैशिक परावैद्युत के एक अणु पर कार्य करने वाला ध्रुवण क्षेत्र निम्न सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \dots (3)$$

E_m का मान रखने पर परावैद्युत में उत्पन्न ध्रुवण P का मान

$$\vec{P} = n \alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \quad \dots (4)$$

किन्तु द्विध्रुव आघूर्ण एवं विद्युत क्षेत्र की तीव्रता में निम्न सम्बन्ध होता है—

$$P = \chi_e E \quad \dots (5)$$

जहाँ χ_e को वैद्युत प्रवृत्ति कहते हैं।

वैद्युत प्रवृत्ति एवं परावैद्युत नियतांक में निम्न सम्बन्ध होता है।

$$\begin{aligned} K &= 1 + \frac{\chi_e}{\epsilon_0} \\ \chi_e &= (K - 1) \epsilon_0 \end{aligned} \quad \dots (6)$$

समीकरण (4) व समीकरण (6) का मान समीकरण (5) में रखने पर

$$(K - 1) \epsilon_0 E = n \alpha \left[E + \frac{(K - 1) \epsilon_0 E}{3\epsilon_0} \right]$$

$$(K - 1) \epsilon_0 = n \alpha \left(1 + \frac{K - 1}{3} \right)$$

$$(K - 1) \epsilon_0 = n \alpha \left(\frac{K + 2}{3} \right)$$

टिप्पणी

$$\frac{K-1}{K+2} = \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}$$

टिप्पणी

या
$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(K-1)}{n(K+2)}$$

इस समीकरण को क्लॉसियस मोसोटी समीकरण कहते हैं।

इस समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

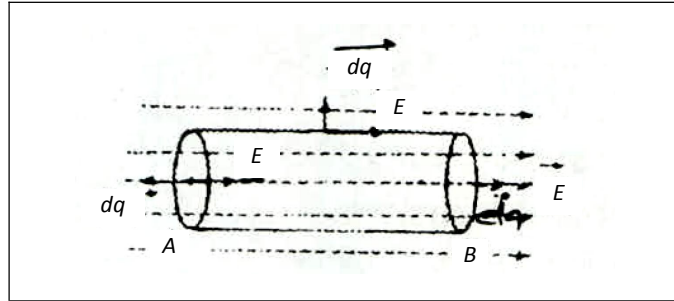
$$\alpha = M \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{(K-1)}{(K+2)}$$

परावैद्युतांक K का मान प्रयोगों द्वारा ज्ञात करने पर आण्विक ध्रुवणता α का मान ज्ञात किया जा सकता है। M परावैद्युत पदार्थ का अणुभार घनत्व है क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण का अनेक गैसों के लिये प्रायोगिक सत्यापन किया गया है, क्योंकि किसी गैस के लिये α एक नियतांक है तो $\frac{1}{n} \frac{(K-1)}{(K+2)}$ भी नियत होगा। यह आण्विक ध्रुवणता α तथा परावैद्युतांक k में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

1.41 आंकिक उदाहरण (Numerical Examples)

उदाहरण 1 – एक बेलन जिसकी लम्बाई l तथा त्रिज्या r है, एक एकसमान विद्युत क्षेत्र E में रखा है। बेलन की अक्ष विद्युत क्षेत्र की दिशा में है। सम्पूर्ण बेलन से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स कितना होगा?

हल – चित्र 1.51 के अनुसार, सम्पूर्ण बेलन से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स ϕ , बायीं सतह A से सम्बद्ध फ्लक्स, दायीं सतह B से सम्बद्ध फ्लक्स तथा वक्र पृष्ठ से सम्बद्ध फ्लक्स के योग के बराबर होगा। अर्थात्



चित्र क्र. 1.51

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{\text{बायीं सतह}} + \phi_{\text{दायीं सतह}} + \phi_{\text{वक्र पृष्ठ}} \\ &= \iint E ds \cos 180^\circ + \iint E ds \cos 0^\circ + \iint E ds \cos 90^\circ \\ &= -\iint E ds + \iint E ds = 0 \end{aligned}$$

अर्थात् सम्पूर्ण बेलन से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स शून्य होगा।

उदाहरण 2 – 0.1 मीटर अर्द्धव्यास वाले धातु के एक खोखले गोले को एक समान रूप से 10^{-8} कूलॉम आवेश दिया गया है। निम्नलिखित अवस्थाओं में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो : (i) गोले की सतह पर, (ii) गोले के केन्द्र से 5 सेमी दूर, (iii) गोले के केन्द्र से 0.50 मीटर दूर।

हल – प्रश्नानुसार $Q = 10^{-8}$ कूलॉम, त्रिज्या $R = 0.1$ मीटर।

(1) गोले की सतह पर –

$$\text{विद्युत क्षेत्र } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-8}}{(0.1)^2} = 9000 \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

(2) गोले के केन्द्र से 5 सेमी दूर – यह बिन्दु स्पष्टतः गोले के अन्दर होगा।

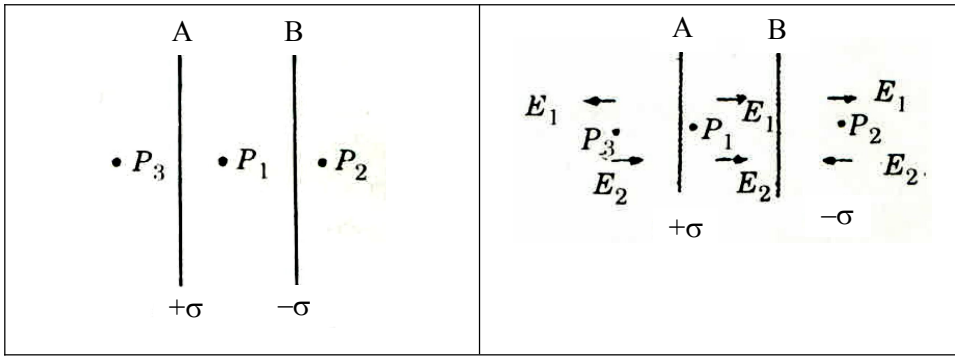
अतः विद्युत क्षेत्र $E = 0$ (शून्य), क्योंकि खोले गोल चालक के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।

(3) गोले के केन्द्र से $r = 0.50$ मीटर दूर – स्पष्टतः यह बिन्दु गोले के बाहर है।

अतः विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-8}}{(0.5)^2} = 360 \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

उदाहरण 3 – संलग्न चित्र 1.52(a) में दो समान्तर कुचालक चादरें A व B हैं, जिन पर पृष्ठ घनत्व क्रमशः σ तथा $-\sigma$ कूलॉम/मीटर² है। बिन्दु P_1, P_2 व P_3 पर विद्युत क्षेत्र की गणना कीजिए।



चित्र क्र. 1.52(a)

चित्र क्र. 1.52(b)

हल – (i) बिन्दु P_1 पर–

चादर A के कारण विद्युत क्षेत्र,

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (A से B की ओर) [चित्र क्र. 1.52(b)]}$$

टिप्पणी

चादर B के कारण विद्युत क्षेत्र,

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (A से B की ओर)}$$

परिणामी विद्युत क्षेत्र $E = E_1 + E_2$

$$\text{या } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ न्यूटन/कूलॉम (A से B की ओर) चित्र 1.52(b)}$$

में प्रदर्शित है।

(ii) बिन्दु P_2 पर—

$$\text{चादर A के कारण विद्युत क्षेत्र, } E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (चादर A से दूर)}$$

$$\text{चादर B के कारण विद्युत क्षेत्र, } E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (चादर B की ओर)}$$

∴ परिणामी विद्युत क्षेत्र $E = 0$ (शून्य) चित्र 1.42 में प्रदर्शित है।

(iii) बिन्दु P_1 पर—

$$\text{चादर A के कारण विद्युत क्षेत्र, } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (चादर A से दूर)}$$

$$\text{चादर B के कारण विद्युत क्षेत्र, } E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ (चादर B की ओर)}$$

∴ परिणामी विद्युत क्षेत्र $E = 0$ (शून्य) चित्र 1.52(b) में प्रदर्शित है।

उदाहरण 4 — हीरे की विद्युतशीलता 1.46×10^{-19} कूलॉम/न्यूटन \times मीटर² है तो परावैद्युतांक एवं विद्युत प्रवृत्ति की गणना कीजिये

$$\text{हल — चूँकि } \epsilon = \epsilon_0 K$$

$$\therefore \text{परावैद्युतांक } K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{1.46 \times 10^{-10}}{8.86 \times 10^{-12}} = 16.48$$

$$\text{विद्युत प्रवृत्ति } \chi = K - 1 = 16.48 - 1 = 15.48$$

उदाहरण 5 — 0.5 सेमी³ आयतनकी एक समांगी तथा समदैशिक पट्टिका (परावैद्युतांक = 5) को विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् रखा गया है जिससे विस्थापन वेक्टर \vec{D} का परिमाण 5×10^{-12} कूलॉम/मीटर है, तो पट्टिका में (i) विद्युत क्षेत्र \vec{E} का परिमाण, (ii) विद्युत ध्रुवण \vec{P} का परिमाण, तथा (iii) प्रेरित कुल द्विध्रुव आघूर्ण की गणना कीजिये।

$$\text{हल — (i) } D = \epsilon_0 K E$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 K} = \frac{5 \times 10^{-12}}{8.86 \times 10^{-12} \times 5} = 0.113 \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

$$(ii) \quad D = \epsilon_0 E + P \text{ से,}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = D - \frac{D}{K} = D \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{या} \quad P &= 5 \times 10^{-12} \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 5 \times 10^{-12} \times 0.8 \\ &= 4 \times 10^{-12} \text{ कूलॉम/मीटर}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \text{ कुल प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण} &= P \times \text{आयतन} \\ &= 4 \times 10^{-12} \times (0.5 \times 10^{-6}) \\ &= 2 \times 10^{-18} \text{ कूलॉम} \times \text{मीटर।} \end{aligned}$$

उदाहरण 6 – 0°C तथा 1 वायुमण्डलीय दाब पर हीलियम गैस का परावैद्युतांक 1.000074 है। यदि इसे 100 वोल्ट/मीटर तीव्रता के बाह्य विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो प्रत्येक हीलियम अणु में प्रेरित द्विध्रुव तथा आण्विक ध्रुवणता की गणना करो।

हल – एवोगैड्रो परिकल्पना के अनुसार 22.4 लीटर ($= 22.4 \times 10^{-3}$ मीटर³) गैस में अणुओं की संख्या $= 6.02 \times 10^{23}$

\therefore 1 मीटर³ आयतन में अणुओं की संख्या

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}} = 2.6875 \times 10^{25}$$

प्रश्नानुसार, $K = 1.000074$, $E = 100$ वोल्ट/मीटर।

$$\begin{aligned} \therefore \text{ ध्रुवण वेक्टर } P &= (K - 1) \epsilon_0 E \\ &= (1.000074 - 1) \times 8.86 \times 10^{-12} \times 100 \\ &= 6.556 \times 10^{-14} \text{ कूलॉम/मीटर}^2 \end{aligned}$$

अतः प्रत्येक अणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण

$$P = n P_{in}$$

$$\therefore P_{in} = \frac{P}{n} = \frac{6.556 \times 10^{-14}}{2.6875 \times 10^{25}} = 2.44 \times 10^{-39} \text{ कूलॉम} \times \text{मीटर}$$

\therefore आण्विक ध्रुवणता

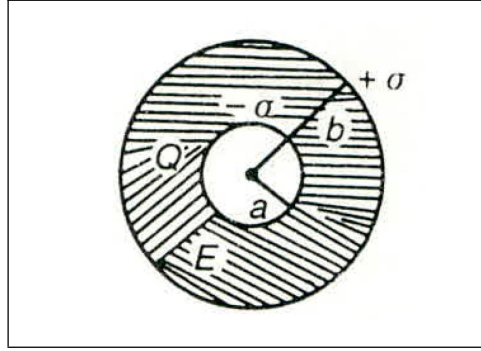
$$\alpha = \frac{P_{in}}{\epsilon_0 E} = \frac{2.44 \times 10^{-39}}{8.86 \times 10^{-12} \times 100} = 2.75 \times 10^{-30} \text{ मीटर}^3$$

उदाहरण 7 – चित्र 1.53 में प्रदर्शित त्रिज्या a के धातु के एक गोले पर आवेश Q कूलॉम है। इसके चारों ओर त्रिज्या b तथा विद्युतशीलता ϵ का परावैद्युत माध्यम घिरा है। ज्ञात करो : (i) धातु गोले के बाहर व अन्दर विद्युत विस्थापन \vec{D}

टिप्पणी

तथा विद्युत क्षेत्र \vec{E} , (ii) परावैद्युत माध्यम में ध्रुवण घनत्व \vec{P} तथा प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व।

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.53

हल – (i) धातु गोले के बाहर प्रत्येक बिन्दु पर विस्थापन

$$\text{वेक्टर } \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

धातु गोले के अन्दर (अर्थात् $r < a$), $\vec{D} = 0$

धातु गोले के बाहर परावैद्युत माध्यम के बाहर (जबकि $r > b$),

$$\text{विद्युत क्षेत्र } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

लेकिन धातु के गोले के अन्दर $\vec{E} = 0$

(ii) धातु गोले के बाहर परावैद्युत माध्यम में $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e Q$

$$\text{अतः } \vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

परावैद्युत माध्यम में बाहरी पृष्ठ पर प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व

$$= \sigma = +P = \epsilon_0 \chi_e Q / 4\pi\epsilon b^2$$

तथा अन्दर के पृष्ठ पर प्रेरित आवेश का पृष्ठ घनत्व

$$= -\sigma = -P = -\epsilon_0 \chi_e Q / 4\pi\epsilon b^2$$

उदाहरण 8 – $2 \mu\text{C}$ के दो बराबर तथा विपरीत आवेशों के बीच की दूरी 3 सेमी है। उसे 2.0×10^5 न्यूटन/कूलॉम के विद्युत क्षेत्र में रखा गया है। निम्न की गणना कीजिए—

(a) द्विध्रुव पर अधिकतम बल युग्म का आघूर्ण, (b) क्षेत्र से 90° घुमाने में किया गया कार्य।

हल – (a) सूत्र: $\tau = PE \sin \theta$

दिया है : $q = 2 \mu\text{C} = 2 \times 10^{-6} \text{C}$; $2l = 3$ सेमी $= 3 \times 10^{-2}$ मीटर

$$E = 2.0 \times 10^5 \text{ न्यूटन/कूलॉम, अधिकतम } \tau \text{ के लिए } \sin \theta = 1$$

$$\begin{aligned} \text{अब } p &= q \times 2l = 2 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-2} \\ &= 6 \times 10^{-8} \text{ कूलॉम-मीटर} \end{aligned}$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$\begin{aligned} \tau &= 6 \times 10^{-8} \times 2.0 \times 10^5 \times 1 = 12 \times 10^{-3} \\ \tau &= 1.2 \times 10^{-2} \text{ न्यूटन-मीटर।} \end{aligned}$$

$$(b) \text{ सूत्र : } W = PE(1 - \cos \theta)$$

दिया है : $\theta = 90^\circ$

$$W = 6 \times 10^{-8} \times 2.0 \times 10^5 (1 - \cos 90^\circ)$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$W = 1.2 \times 10^{-2} \text{ जूल।}$$

उदाहरण 9 – 5 सेमी त्रिज्या के एक चालक गोले के कारण उसके पृष्ठ पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता 5×10^6 न्यूटन/कूलॉम है। इस गोले के केन्द्र से 20 सेमी की दूरी पर स्थित 5×10^{-8} कूलॉम आवेश पर कार्य करने वाले बल की गणना कीजिए।

हल – पृष्ठ पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{R^2}$$

तथा केन्द्र से r दूरी पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore \frac{E_1}{E_2} = \frac{r^2}{R^2}$$

दिया है : $E_1 = 5 \times 10^6$ न्यूटन/कूलॉम,

$R = 5$ सेमी = 5×10^{-2} मीटर

तथा $r = 20$ सेमी = 20×10^{-2} मीटर

उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर,

$$\frac{5 \times 10^6}{E_2} = \left(\frac{20 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2}} \right)^2 = 16$$

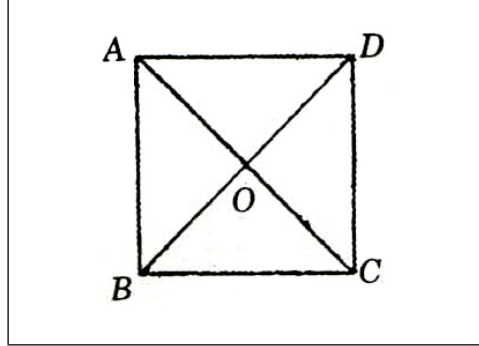
$$\therefore E_2 = \frac{5 \times 10^6}{16} \text{ न्यूटन/कूलॉम}$$

टिप्पणी

$$F = q_0 E \text{ से, } F = 5 \times 10^{-8} \times \frac{5 \times 10^6}{16} = 1.56 \times 10^{-2} \text{ न्यूटन।}$$

टिप्पणी

उदाहरण 10 – 1.0×10^{-5} कूलॉम का धनावेश एक वर्ग, जिसकी भुजा 10 सेमी है, के प्रत्येक कोने पर स्थित है। वर्ग के केन्द्र पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।



चित्र क्र. 1.54

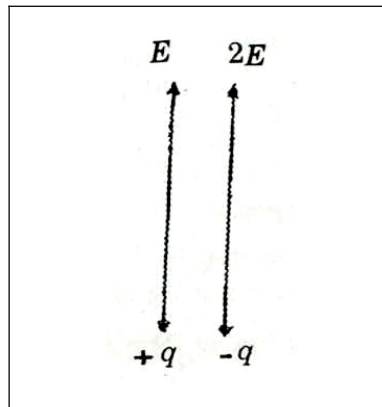
हल – माना ABCD के कोने A, B, C और D पर 1.0×10^{-8} कूलॉम का धनावेश रखा गया है। O वर्ग का केन्द्र है, तथा $AO = OC$ इसी तरह $OB = OD$ । A और C पर स्थित धनावेश भी समान परिमाण के हैं। अतः उनके मध्य बिन्दु O पर विद्युत-क्षेत्र पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी। इसी तरह B और D पर स्थित धनावेश भी समान परिमाण के हैं। अतः उनके मध्य बिन्दु O पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता शून्य होगी।

इस प्रकार वर्ग के केन्द्र पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रत शून्य होगी।

उदाहरण 11 – हीलियम के नाभिक के कारण उससे 1Å की दूरी पर विद्युत-क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिए।

हल – सूत्र : $E = 9 \times 10^9 \frac{q}{r^2}$

हीलियम के नाभिक में 2 प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन होते हैं।



चित्र क्र. 1.55

∴ हीलियम के नाभिक पर आवेश $q = 2 \times 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम

दिया है : $r = 1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ मीटर,

सूत्र में मान रखने पर,

$$\begin{aligned} E &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(10^{-10})^2} \\ &= \frac{28.8 \times 10^{-10}}{10^{-20}} \\ &= 28.8 \times 10^{10} = 2.88 \times 10^{11} \text{ न्यूटन/कूलॉम।} \end{aligned}$$

उदाहरण 12 – उस विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए जो पानी की एक बूँद को जिसकी त्रिज्या 10^{-5} सेमी है और जिस पर एक इलेक्ट्रॉन का आवेश है, वायु में स्थिर लटका सके। ($g = 10$ मीटर प्रति सेकण्ड, $d = 10^3$ किग्रा/मीटर³ तथा $e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम।)

हल – पानी का भार ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है। अतः विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता की दिशा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होनी चाहिए।

पानी की बूँद का भार = mg

विद्युत्-क्षेत्र के कारण पानी की बूँद पर ऊपर की ओर लगने वाला बल

$$= qE = neE$$

सन्तुलन की अवस्था में

$$nEe = mg \therefore E = \frac{mg}{ne}$$

दिया है : बूँद की त्रिज्या $r = 10^{-5}$ सेमी = $10^{-5} \times 10^{-2} = 10^{-7}$ मीटर

∴ $m = \frac{4}{3} \pi r^3 d$ [∴ द्रव्यमान = आयतन × घनत्व]

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10^{-7})^3 \times 10^3 \text{ किग्रा, } n = 1$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$= \frac{\frac{4}{3} \times 3.14 \times (10^{-7})^3 \times 10^3 \times 10}{1 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$= \frac{4.19 \times 10^{-17}}{1.6 \times 10^{-19}}$$

$$= 2.62 \times 10^2 = 262 \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

उदाहरण 13 – दो आवेशों $2\mu C$ और एक-दूसरे से 10^{-2} मीटर दूरी पर स्थित हैं। इस द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति में इससे 0.3 मीटर दूरी पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल - सूत्र : } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} = 9 \times 10^9 \frac{P}{r^3}$$

दिया है : $q = 2\mu C = 2 \times 10^{-6}$ कूलॉम, $2l = 10^{-2}$ मीटर तथा $r = 0.3$ मीटर

$$p = 2 \times 10^{-6} \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-8} \text{ कूलॉम/मीटर}$$

उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-8}}{(0.3)^3} = \frac{180}{27 \times 10^{-3}}$$

$$= 6.6 \times 10^3 \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

उदाहरण 14 – दो प्रोटॉनों के बीच लगने वाले प्रतिकर्षण बल की गणना कीजिए जबकि उनके बीच की दूरी 4.0×10^{-15} मीटर है।

$$\text{हल - सूत्र : } F = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

दिया है : $q_1 = q_2 = +1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम तथा $r = 4.0 \times 10^{-15}$ मीटर
सूत्र में मान रखने पर,

$$F = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.6 \times 10^{-19}}{(4.0 \times 10^{-15})^2}$$

$$= \frac{23.04 \times 10^{-29}}{16 \times 10^{-30}} = 14.4 \text{ न्यूटन।}$$

उदाहरण 15 – ताँबे के दो आवेशित विद्युत्रोधी गोले A और B के केन्द्रों के बीच की दूरी 50 सेमी है।

(a) यदि प्रत्येक गोले पर आवेश की मात्रा 6.5×10^{-7} कूलॉम हो, तो उनके बीच प्रतिकर्षण बल का मान ज्ञात कीजिए।

(b) प्रतिकर्षण बल का मान क्या होगा : यदि (i) प्रत्येक गोले पर आवेश की मात्रा दुगुनी कर दी जाती है, किन्तु उनके बीच की दूरी आधी कर दी जाती है?

(c) दोनों गोले पानी में रख दिये जाते हैं? (पानी का परावैद्युतांक 80 है।) गोले की त्रिज्याएँ उनके बीच की दूरी की तुलना में नगण्य हैं।

हल – दिया है : $r = 50$ सेमी $= 50 \times 10^{-2}$ मीटर

(a) सूत्र : $F = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2}$

दिया है : $q_1 = q_2 = 6.5 \times 10^{-7}$ कूलॉम

सूत्र में मान रखने पर,

$$\begin{aligned} F &= \frac{9 \times 10^9 \times 6.5 \times 10^{-7} \times 6.5 \times 10^{-7}}{(50 \times 10^{-2})^2} \\ &= \frac{380.25 \times 10^{-5}}{2500 \times 10^{-4}} = 15.21 \times 10^{-3} \\ &= 1.521 \times 10^{-2} \text{ न्यूटन।} \end{aligned}$$

(b) (i) $q_1 = q_2 = 2 \times 6.5 \times 10^{-7}$ कूलॉम

$$r = \frac{50 \times 10^{-2}}{2} = 25 \times 10^{-2} \text{ मीटर}$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$\begin{aligned} F &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 6.5 \times 10^{-7} \times 2 \times 6.5 \times 10^{-7}}{(25 \times 10^{-2})^2} \\ &= \frac{1521 \times 10^{-5}}{625 \times 10^{-4}} \\ &= 2.4336 \times 10^{-1} = 0.24336 \text{ न्यूटन।} \end{aligned}$$

(c) सूत्र : $F = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{Kr^2}$

दिया है : $K = 80$

$$F = \frac{1.521 \times 10^{-2}}{80} = 0.019 \times 10^{-2} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ न्यूटन}$$

उदाहरण 16 – 15×10^{-4} कूलॉम आवेश पर 2.25 न्यूटन का बल कार्य करता है। उस बिन्दु पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हल – सूत्र : $E = \frac{F}{q}$

दिया है : $q = 15 \times 10^{-4}$ कूलॉम, $F = 2.25$ न्यूटन।

सूत्र में मान रखने पर,

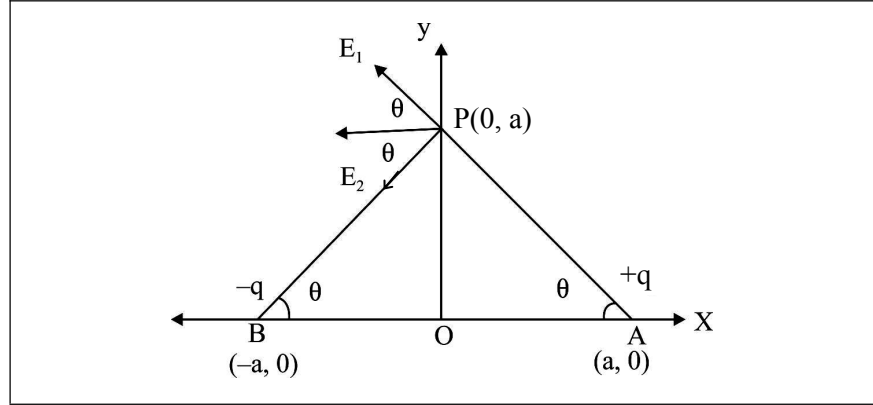
$$E = \frac{2.25}{15 \times 10^{-4}} = 1500 \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

उदाहरण 17 – आवेश $+q$ और $-q$ क्रमशः $(a, 0)$ और $(-a, 0)$ पर रखे हुए हैं। बिन्दु $(0, a)$ पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता एवं दिशा ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

हल – दिये गये बिन्दु $A(a, 0)$ और $B(-a, 0)$ X -अक्ष पर तथा $P(0, a)$ Y -अक्ष पर स्थित है। (चित्र क्र. 1.56)

टिप्पणी



चित्र क्र. 1.56

$$\therefore OA = OB = a \text{ तथा } OP = a$$

$$AP^2 = OP^2 + OA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\therefore AP = \sqrt{2}a \text{ इसी तरह } BP = \sqrt{2}a.$$

A पर स्थित $+q$ आवेश के कारण बिन्दु P पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a^2} \end{aligned}$$

(इसकी दिशा \overrightarrow{AP} होगी।)

B पर स्थित $-q$ आवेश के कारण बिन्दु P पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a^2}$$

(इसकी दिशा \overrightarrow{PB} होगी)

पुनः चूँकि $AP = BP \therefore \angle PAB = \angle PBA = \theta$ माना।

$$\Delta POA \text{ में } \tan \theta = \frac{OP}{OA} = \frac{a}{a} = 1 \text{ अतः } \theta = 45^\circ$$

स्पष्टतः E_1 और E_2 परस्पर लम्बवत् होंगे।

अतः परिणामी तीव्रता

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q^2}{4a^4} + \frac{q^2}{4a^4}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2q^2}{4a^4}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{2} a^2} \text{ न्यूटन/कूलॉम}
\end{aligned}$$

चूँकि E_1 और E_2 बराबर हैं, अतः उनका परिणामी E दोनों के बीच के कोण के अर्द्धक के अनुदिश अर्थात् $+q$ और $-q$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर कार्य करेगा।

उदाहरण 18 – क्या 1 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले को एक कूलॉम आवेश दिया जा सकता है? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

हल – गोले के तल पर विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$

दिया है : $q = 1$ कूलॉम, $r = 1$ सेमी = 10^{-2} मीटर,

सूत्र में मान रखने पर,

$$E = \frac{9 \times 10^9 \times 1}{(10^{-2})^2} = 9 \times 10^{13} \text{ न्यूटन/कूलॉम।}$$

वायु में विद्युत्-क्षेत्र की तीव्रता 3×10^6 न्यूटन/कूलॉम से अधिक होने पर वायु आयनित हो जावेगी जिससे गोले के आवेश का वायु में क्षरण होने लगेगा। अतः गोले को 1 कूलॉम आवेश नहीं दिया जा सकता।

उदाहरण 19 – हीरे की वैद्युतशीलता 1.46×10^{-10} कूलॉम²/न्यूटन-मीटर² है। इसके लिये परावैद्युतांक तथा विद्युत प्रवृत्ति ज्ञात कीजिये।

दिया है: $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ कूलॉम²/न्यूटन-मीटर²

हल – दिया है कि हीरे की विद्युतशीलता

$$\epsilon = 1.46 \times 10^{-10} \text{ कूलॉम}^2/\text{न्यूटन-मीटर}^2$$

तथा $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ कूलॉम²/न्यूटन-मीटर²

हम जानते हैं कि परावैद्युतांक

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

अतः
$$\epsilon_r = \frac{1.46 \times 10^{-10}}{8.86 \times 10^{-12}} = 16.48$$

अतः पदार्थ की वैद्युत् प्रवृत्ति

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

टिप्पणी

ϵ_r का मान रखने पर, $\chi_e = 16.48 - 1 = 15.48$.

उदाहरण 20 – समान्तर प्लेट संधारित्र की दो प्लेटों पर बराबर व विपरीत आवेश हैं तथा ये प्लेटें 5 मिमी के परावैद्युत जिसका परावैद्युतांक 3 है, के द्वारा एक-दूसरे से अलग हैं। यदि परावैद्युत में विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता 10^6 वोल्ट/मीटर हो, तो गणना कीजिये

- संधारित्र की प्लेटों पर प्रति एकांक क्षेत्रफल स्वतन्त्र आवेश,
- परावैद्युत के पृष्ठ पर प्रति एकांक क्षेत्रफल बद्ध आवेश,
- परावैद्युत में विस्थापित सदिश।

हल – दिया है :

परावैद्युत में विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता $E = 10^6$ वोल्ट/मीटर

परावैद्युतांक $\epsilon_r = 3$

यदि बाह्य विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता E_0 हो, तो

$$E_0 = \epsilon_r E = 3 \times 10^6 \text{ वोल्ट/मीटर}$$

अब गॉस के प्रमेय से,

$$E_0 A = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E_0 = \frac{q}{A \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \left(\because \frac{q}{A} = \sigma \right)$$

(i) अतः संधारित्र की प्लेटों पर प्रति एकांक क्षेत्रफल स्वतन्त्र आवेश

या आवेश घन $\sigma = \epsilon_0 E_0$

$$= 8.86 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^6$$

$$= 26.55 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम/मीटर}^2$$

(ii) बद्ध (प्रेरित) आवेश के कारण विद्युत् क्षेत्र

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

$$\text{परन्तु } \vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

$$\text{या } \vec{E}' = \vec{E}_0 - \vec{E}$$

$$\text{अतः } \vec{E}' = 3 \times 10^6 - 10^6 = 2 \times 10^6 \text{ वोल्ट/मीटर}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः} \quad \sigma' &= \text{प्रेरित (बद्ध) आवेश घनत्व} = \epsilon_0 \vec{E}' \\ &= 8.86 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^6 \\ &= 17.7 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम/मीटर}^2\end{aligned}$$

(iii) विद्युत् विस्थापन सदिश

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\begin{aligned}\text{या} \quad \vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ &= 3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^6 \\ &= 26.55 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम/मीटर}^2\end{aligned}$$

उदाहरण 21 – एक समांगी, समदैशिक परावैद्युत पट्टिका को एकसमान विद्युत् क्षेत्र के लम्बवत् रखा गया है। परावैद्युत की आपेक्षिक विद्युतशीलता 5 है तथा विद्युत् विस्थापन सदिश का परिमाण 5 cm^2 है। यदि पट्टिका का आयतन 5 cm^3 है, तो ज्ञात कीजिये –

(i) विद्युत् ध्रुवण \vec{P} , (ii) पट्टिका में कुल द्विध्रुव आघूर्ण

हल – (i) विद्युत् ध्रुवण

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\text{तथा} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$\text{अतः} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_r} (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\text{या} \quad \vec{P} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r} (\epsilon_r - 1), \quad (\because \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \vec{D})$$

दिया हुआ है : $\epsilon_r = 5, D = 5 \text{ सेमी}^2$

$$\text{अतः} \quad \vec{P} = \frac{5}{5} (5 - 1)$$

$$\text{या} \quad \vec{P} = 4 \text{ सेमी}^2$$

(ii) पट्टिका में कुल द्विध्रुव आघूर्ण

$$= 4 \times 0.5$$

$$= 2.0$$

उदाहरण 22 – किसी पदार्थ की विद्युत् प्रवृत्ति 4.0 है, उस पदार्थ का परावैद्युतांक तथा निरपेक्ष विद्युतशीलता ज्ञात कीजिये।

हल – दिया है: $\chi_e = 4.0$

हम जानते हैं कि $\chi_e = \epsilon_r - 1$

टिप्पणी

टिप्पणी

जहाँ ϵ_r पदार्थ का परावैद्युतांक है

अतः $\epsilon_r = \chi_e + 1$

परावैद्युतांक $\epsilon_r = 4 + 1 = 5$

अब $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$

जहाँ ϵ पदार्थ का निरपेक्ष विद्युतशीलता है।

एवं $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ कूलॉम²/न्यूटन-मीटर²

अतः पदार्थ की निरपेक्ष विद्युतशीलता

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_r \epsilon_0 \\ &= 5 \times 8.86 \times 10^{-12} \\ &= 4.43 \times 10^{-11} \text{ कूलॉम}^2 / \text{न्यूटन-मीटर}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 23 – 3×10^4 वोल्ट/मीटर का एक विद्युत् क्षेत्र नियॉन गैस के एक नमूने पर N.T.P. पर लगाया गया है। प्रत्येक परमाणु में प्रेरित आघूर्ण ज्ञात कीजिये। N.T.P. पर निऑन गैस का परावैद्युतांक 1.000134 है। निऑन की परमाण्विक ध्रुवणता भी ज्ञात कीजिये।

हल – निऑन गैस को विद्युत् क्षेत्र E_0 में रखने पर उसके प्रत्येक परमाणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण P_{in} हो, तो विद्युत् ध्रुवण

$$\vec{P} = nP_{in}$$

जहाँ n गैस के एकांक आयतन में परमाणुओं की संख्या है।

अब, हम जानते हैं कि

$$P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

अतः $nP_{in} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$

या $P_{in} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E}{n}$

परन्तु $\frac{E_0}{E} = \epsilon_r$ या $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$

अतः $P_{in} = \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E_0}{n \epsilon_r}$

अब एकांक आयतन में परमाणुओं की संख्या

$$n = \frac{6.023 \times 10^{26}}{22.4}$$

(क्योंकि ऐवोगेड्रो की परिकल्पना के अनुसार N.T.P. पर 1 kg परमाणु का आयतन 22.4 मीटर³ तथा परमाणुओं की संख्या 6.023×10^{26} होती है।)

$$\text{अतः } P_{in} = \frac{(1.000134-1) \times 8.86 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^4 \times 22.4}{6.023 \times 10^{26} \times 1.000134}$$

$$= 1.32 \times 10^{-36} \text{ कूलॉम-मीटर}$$

$$\text{अब } P_{in} = \alpha \epsilon_0 \cdot E_0$$

अतः परमाणुवीय ध्रुवणता

$$\alpha = \frac{P_{in}}{\epsilon_0 E_0}$$

$$\text{या } \alpha = \frac{1.32 \times 10^{-36}}{8.86 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^4}$$

$$\alpha = 4.97 \times 10^{-30} \text{ मीटर}^3 \text{।}$$

उदाहरण 24 – एक परावैद्युत गोला त्रिज्यीय रूप से ध्रुवित है, जिसका ध्रुवण सदिश $\vec{P} = C\vec{r}$ द्वारा व्यक्त होता है, तो आयतन आवेश घनत्व का मान निकालिये जहाँ C नियतांक है।

हल – सदिश \vec{P} के लिये अवकल रूप में गॉस प्रमेय निम्नानुसार व्यक्त होता है –

$$\text{div } \vec{P} = -\rho$$

जहाँ ρ आयतन आवेश घनत्व है।

$$\therefore \rho = \text{div } \vec{P} = -\text{div}(C\vec{r})$$

$$\rho = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot C(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\rho = -3C$$

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

- यदि किसी क्षेत्र में विद्युत् बल रेखायें समान्तर एवं समदूरस्थ हों, तो वहाँ विद्युत् क्षेत्र होता है –
 (क) शून्य (ख) अनन्त
 (ग) एकसमान (घ) असमान।
- यदि किसी बन्द पृष्ठ के अन्दर q आवेश रखा हो, तो सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से निकलने वाला फ्लक्स होता है –
 (क) q (ख) q/ϵ_0
 (ग) $\frac{q}{4\pi\epsilon_0}$ (घ) $4\pi\epsilon_0 q$.

टिप्पणी

टिप्पणी

3. किसी ठोस गोलीय आवेशित चालक के अन्दर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता होती है –

- (क) शून्य (ख) गोले पर आवेश के समान
(ग) अनन्त (घ) $4\pi\epsilon_0$.

4. किसी कुचालक आवेशित गोले के पृष्ठ के अन्दर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता E तथा बिन्दु की गोले के केन्द्र से दूरी r हो, तो –

- (क) $E \times \frac{1}{r}$ (ख) $E \times \frac{1}{r^2}$
(ग) $E \times r^2$ (घ) $E \times r$.

5. यदि किसी समतल आवेशित चादर का आवेश घनत्व σ हो, तो उसके समीप विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता होती है –

- (क) $E = \sigma\epsilon_0$ (ख) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
(ग) $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ (घ) $E = \sigma$.

6. गॉस प्रमेय का अवकल रूप होता है –

- (क) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (ख) $\nabla \times \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
(ग) $\nabla \cdot \vec{E} = \rho\epsilon_0$ (घ) $\nabla \times \vec{E} = \rho\epsilon_0$.

7. किसी समान्तर प्लेट संधारित्र के प्लेटों का क्षेत्रफल A तथा उनके बीच की दूरी d है, तो उसकी धारिता होगी –

- (क) $C = \epsilon_0 Ad$ (ख) $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$
(ग) $C = \frac{\epsilon_0 d}{A}$ (घ) $C = \frac{Ad}{\epsilon_0}$.

8. यदि C_1, C_2 तथा C_3 धारिता के संधारित्र समान्तर क्रम में जुड़े हों, तो उसकी परिणामी धारिता होगी –

- (क) $C = C_1 + C_2 + C_3$ (ख) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$
(ग) $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3}$ (घ) $C = \frac{1}{C_1} + C_2 + C_3$.

9. R त्रिज्या के कुचालक गोले पर Q आवेश एकसमान रूप से वितरित है। इसकी स्थिर विद्युत् ऊर्जा होगी—

(क) $\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ (ख) $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

(ग) $\frac{2}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ (घ) $\frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$

10. $4\mu F$, $5\mu F$ तथा $6\mu F$ धारिता के संधारित्र समान्तर क्रम में जुड़े हैं, तो इनकी परिणामी धारिता होगी —

(क) $10\mu F$ (ख) $15\mu F$
(ग) $5\mu F$ (घ) इनमें से कोई नहीं।

11. एक अनन्त विस्तार के भू-सम्पर्कित समतल चालक से d दूरी पर बिन्दु आवेश q रखा है, दोनों के मध्य आकर्षण बल होगा —

(क) $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ (ख) $-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}$

(ग) $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2}$ (घ) $-\frac{q^2}{16\epsilon_0 d^2}$

12. a भुजा के एक वर्ग के केन्द्र से $\frac{a}{2}$ दूरी पर एक बिन्दु आवेश q रखा है। घन से गुजरने वाला फ्लक्स होगा —

(क) $\frac{q}{\epsilon_0}$ (ख) $\frac{q}{2\epsilon_0}$

(ग) $\frac{q^2}{4\epsilon_0}$ (घ) $\frac{q}{6\epsilon_0}$

13. विद्युतरोधी (परावैद्युत) पदार्थों में परमाणु के इलेक्ट्रॉन:

- (क) मुक्त होते हैं जो पदार्थ में मुक्त विचरण कर सकते हैं।
(ख) नाभिक से दृढ़तापूर्वक बँधे रहते हैं जिन्हें मुक्त नहीं किया जा सकता।
(ख) प्रोटॉनों की संख्या से कम होते हैं।
(घ) मुक्त इलेक्ट्रॉनों की अपेक्षाकृत भारी होते हैं।

टिप्पणी

14. परावैद्युत पदार्थ को बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में रखने पर, उसके परमाणुओं:
- (क) के धनावेशित केन्द्रक, इलेक्ट्रॉन मेघ केन्द्रक से संपातित हो जाते हैं।
- (ख) के धनावेशित केन्द्रक, इलेक्ट्रॉन मेघ केन्द्रक के सापेक्ष तनिक विस्थापित हो जाते हैं फलतः वैद्युत द्विध्रुव की रचना होती है।
- (ग) के धनावेशित केन्द्रक तथा ऋणावेशित केन्द्रक, दोनों ही क्षेत्र की दिशा में गति करने लगते हैं।
- (घ) के लाक्षणिक गुणधर्म यथावत् रहते हैं।
15. वैद्युत द्विध्रुव का मात्रक है:
- (क) कूलाम्ब-मीटर (ख) कूलाम्ब-मीटर²
- (ग) कूलाम्ब/मीटर (घ) कूलाम्ब² × मीटर।
16. ध्रुवीय अणु वे हैं जिनमें –
- (क) धनावेश तथा ऋणावेश के गुरुत्व-केन्द्र एक-दूसरे से कुछ दूरी पर होते हैं
- (ख) धनावेश का गुरुत्व-केन्द्र ऋणावेश के गुरुत्व-केन्द्र से सम्पाती होता है
- (ग) बाह्य विद्युत् क्षेत्र की अनुपस्थिति में भी नेट द्विध्रुव आघूर्ण होता है
- (घ) विद्युत् द्विध्रुव नहीं बनते तथा द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है।
17. वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण घनत्व का मात्रक है:
- (क) कूलाम्ब-मी² (ख) कूलाम्ब-मीटर
- (ग) कूलाम्ब/मी² (घ) कूलाम्ब/मीटर।
18. परावैद्युतांक K का मान सदैव होता है –
- (क) एक से बड़ा (ख) एक से छोटा
- (ग) अनन्त (घ) शून्य।
19. परावैद्युतांक माध्यम की उपस्थिति में बढ़ती है –
- (क) विभव (ख) क्षेत्र की तीव्रता
- (ग) धारिता (घ) ऊर्जा।

20. समान्तर प्लेट संधारित्र की ऊर्जा होती है –
- (क) QV (ख) CV^2
 (ग) Q^2C (घ) $\frac{1}{2}CV^2$
21. सदिश \vec{D} किस मात्रक के बराबर होता है
- (क) \vec{E} (ख) \vec{P}
 (ग) \vec{E}/q (घ) q .
22. परावैद्युत माध्यम के लिये $\text{div}\vec{D}$ का मान होता है –
- (क) $\epsilon_0\sigma_{free}$ (ख) $\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_{free}$
 (ग) σ_{free} (घ) $\frac{1}{\epsilon}\sigma_{free}$
23. $\text{div}\vec{P}$ का मान होता है –
- (क) $-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma_b$ (ख) $\frac{1}{\epsilon}\sigma_b$
 (ग) $\epsilon\sigma_b$ (घ) $-\sigma_b$.
24. परावैद्युत पदार्थ में परमाणु के इलेक्ट्रॉन –
- (क) मुक्त होते हैं
 (ख) नाभिक से दृढ़तापूर्वक बँधे रहते हैं
 (ग) मुक्त इलेक्ट्रॉनों की अपेक्षा भारी होते हैं
 (घ) इनमें से कोई नहीं।
25. कौन-सा कथन असत्य है
- (क) अध्रुवीय परावैद्युत को विद्युत् क्षेत्र में रखने पर धनावेश नाभिक का गुरुत्व-केन्द्र, इलेक्ट्रॉन मेघ के गुरुत्व-केन्द्र के सापेक्ष थोड़ा-सा विस्थापित हो जाता है।
 (ख) अध्रुवीय परावैद्युत को विद्युत् क्षेत्र में रखने पर उसमें प्रेरित विद्युत् द्विध्रुव उत्पन्न हो जाते हैं तथा ये प्रेरित विद्युत् द्विध्रुव क्षेत्र की दिशा से संरेखित होते हैं

टिप्पणी

- (ग) ध्रुवीय परावैद्युत को विद्युत् क्षेत्र में रखने पर उसके स्थायी विद्युत् द्विध्रुव क्षेत्र की दिशा में संरेखित हो जाते हैं
- (घ) ध्रुवीय परावैद्युत के अणुओं का ध्रुवण ताप पर निर्भर नहीं करता है।
26. यदि समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों पर आवेश क्रमशः $+q$ तथा $-q$ हो तथा प्लेटों के बीच रखे परावैद्युत पदार्थ के पृष्ठ पर प्रेरित आवेश $-q'$ तथा $+q'$ हो तो सही कथन है –
- (क) $q' < q$ (ख) $q' > q$
- (ग) $q' = q$ (घ) $q' = 0$
27. एक परावैद्युत पट्टी को विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_0 में रखा जाता है। गलत कथन है—
- (क) प्रेरित पृष्ठ आवेश द्वारा उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र \vec{E} का मान \vec{E}' के मान से कम होता है
- (ख) प्रेरित पृष्ठ आवेश द्वारा उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र \vec{E} का मान \vec{E}_0 की दिशा के विपरीत होता है
- (ग) परावैद्युत पट्टी के अन्दर परिणामी विद्युत् क्षेत्र का मान \vec{E}_0 से कम होता है
- (घ) परावैद्युत पट्टी के अन्दर परिणामी विद्युत् क्षेत्र की दिशा, \vec{E}_0 की दिशा के विपरीत होती है।
28. कौन-सा कथन सत्य है
- (क) परावैद्युत माध्यम के अन्दर स्थूल स्तरीय विद्युत् क्षेत्र ही विद्युत् क्षेत्र व्यक्त करता है
- (ख) परावैद्युत माध्यम के अन्दर सूक्ष्म स्तरीय विद्युत् क्षेत्र की विद्युत् व्यक्त करता है
- (ग) परावैद्युत माध्यम के अन्दर विद्युत् क्षेत्र, स्थूल स्तरीय तथा सूक्ष्म स्तरीय विद्युत् क्षेत्रों का योगफल होता है
- (घ) इनमें से कोई नहीं।
29. एक आवेशित संधारित्र की प्लेटों के बीच एक परावैद्युत पट्टी रखी जाती है। परावैद्युत पट्टी की मोटाई, प्लेटों के बीच की दूरी से कम है। प्लेटों के बीच रिक्त स्थान (Gap) तथा परावैद्युत पट्टी में—
- (क) D का मान समान होगा
- (ख) E का मान समान होगा

- (ग) D का मान E दोनों के समान होंगे
 (घ) D तथा E दोनों के मान अलग-अलग होंगे।
30. \vec{D} , \vec{E} तथा \vec{P} में सही सम्बन्ध है –
- (क) $\vec{D} - \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}$ (ख) $\vec{D} - \vec{P} = \epsilon \vec{E}$
 (ग) $\vec{P} = \epsilon_0 (K - 1) \vec{E} + \vec{D}$ (घ) $\vec{P} - \vec{D} = \epsilon \vec{E}$.
31. निर्वात में सही सम्बन्ध है –
- (क) $\vec{D} = 0$ (ख) $\vec{E} = 0$
 (ग) $\vec{P} = 0$ (घ) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - 1$.
32. विद्युतीय प्रवृत्ति तथा विद्युतशीलता में सही सम्बन्ध है –
- (क) $\epsilon_p = \epsilon_0 (1 - \chi_e)$ (ख) $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$
 (ग) $\chi_r = 1 + \epsilon_r$ (घ) $\epsilon_r = \epsilon_r (1 + \chi_e)$

1.42 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

- | | | |
|---------|---------------|---------|
| 1. (ग) | 12. (घ) | 23. (क) |
| 2. (ख) | 13. (ख) | 24. (क) |
| 3. (क) | 14. (ख) | 25. (घ) |
| 4. (घ) | 15. (क) | 26. (क) |
| 5. (ग) | 16. (क) व (ग) | 27. (क) |
| 6. (क) | 17. (ग) | 28. (क) |
| 7. (ख) | 18. (क) | 29. (क) |
| 8. (क) | 19. (ग) | 30. (क) |
| 9. (घ) | 20. (घ) | 31. (ग) |
| 10. (ख) | 21. (ख) | 32. (ख) |
| 11. (ख) | 22. (ग) | |

1.43 सारांश (Summary)

इस इकाई के द्वारा निर्वात में कूलॉम का नियम, विद्युत् क्षेत्र \vec{E} की स्थिर आवेश के सरल वितरण हेतु गणना, स्थिर विद्युत् क्षेत्र में किसी आवेश पर किया गया

कार्य विद्युत् क्षेत्र और विभव में सम्बन्ध स्थापित किया। एक समान विद्युत् क्षेत्र में द्विध्रुव पर बल आघूर्ण, विद्युत् क्षेत्र का फ्लक्स। गॉस का नियम व इसका समनित आवेश वितरण हेतु \vec{E} के परिकलन में उपयोग। विभिन्न प्रकार के संधारित्रों को समझाया गया। परावैद्युत, परावैद्युत की उपस्थिति में समान्तर प्लेट संधारित्र, \vec{P} एवं \vec{E} में सम्बन्ध, क्लॉसियस – मोसोटी समीकरण की व्याख्या।

1.44 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- स्थिर विद्युत्
- आवेश
- क्वाण्टीकरण
- विद्युत् क्षेत्र
- विद्युत् द्विध्रुव
- विद्युत् चतुर्ध्रुव
- विद्युत् विभव
- संधारित्र तथा परावैद्युत ध्रुवण

1.45 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. स्थिर आवेशों के लिए कूलॉम का नियम एवं इसका महत्त्व लिखिए।
2. दो आवेशित कणों के मध्य लगने वाले विद्युत् बल तथा गुरुत्वाकर्षण बल में दो समानताएँ व दो असमानताएँ लिखिए।
3. विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता से क्या तात्पर्य है? इसका मात्रक लिखिए।
4. विद्युत् द्विध्रुव से क्या तात्पर्य है? दो उदाहरण दीजिए।
5. विद्युत् द्विध्रुव आघूर्ण का अर्थ समझाइए तथा इसका मात्रक व विमीय सूत्र लिखिए। इसकी दिशा क्या होती है?
6. विद्युत् चतुर्ध्रुव से क्या तात्पर्य है?
7. विद्युत् फ्लक्स क्या है?
8. विद्युत् क्षेत्र E तथा फ्लक्स ϕ में क्या सम्बन्ध है?
9. स्थिर वैद्युतिकी सम्बन्धी गॉस का नियम लिखिये।
10. गॉस नियम का समाकलन तथा अवकलन रूप लिखिये।

11. किसी आवेश q से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र लिखिये।
12. किसी ठोस आवेशित गोलीय चालक के पृष्ठ के अन्दर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता कितनी होती
13. ठोस कुचालक आवेशित गोले के पृष्ठ के अन्दर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र लिखिये।
14. किसी समतल आवेशित चादर के समीप विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता कितनी होती है?
15. किसी आवेशित चालक पर विद्युत् क्षेत्र की दिशा क्या होती है?
16. परावैद्युत क्या है?
17. गोलीय संधारित्र के धारिता का व्यंजक क्या है ?
18. किसी चालक की धारिता को समझाइए। इसका मात्रक क्या है?
19. संधारित्र किसे कहते हैं? इसकी धारिता से क्या अभिप्राय है? संधारित्र का सिद्धान्त समझाइए।
20. समान्तर प्लेट संधारित्र क्या है? समझाइए।
21. क्या कारण है कि संधारित्र में परावैद्युत माध्यम के रूप में किसी धातु को उपयोग में नहीं लाया जाता है?
22. गोलाकार संधारित्र क्या है? इसकी धारिता का सूत्र लिखिए।
23. एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा, यदि इसकी प्लेटों के बीच, परावैद्युतांक K का माध्यम भर दिया जाए?
24. परावैद्युत पदार्थ से क्या तात्पर्य है? ये चालक पदार्थों से किस प्रकार भिन्न हैं?
25. कुछ परावैद्युत पदार्थों के उदाहरण दीजिए।
26. परावैद्युत सामर्थ्य क्या है?
27. किसी परावैद्युत युक्त समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता कितनी होती है?
28. ध्रुवण सदिश \vec{P} तथा ध्रुवण घनत्व ρ_p में क्या सम्बन्ध है?
29. विस्थापन सदिश \vec{D} तथा विद्युत् क्षेत्र \vec{E} में सम्बन्ध लिखिये।
30. \vec{D} , \vec{E} तथा \vec{P} में सम्बन्ध लिखिये।
31. ध्रुवीय तथा अध्रुवीय अणुओं में क्या अन्तर है?
32. ध्रुवीय सदिश \vec{P} को परिभाषित कीजिये।

टिप्पणी

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. विद्युत स्थैतिकी में कूलम्ब के नियम का वर्णन वेक्टर रूप में कीजिए।
2. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को समझाइये और वैद्युत द्विध्रुव के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अक्षीय व निरक्षीय स्थिति में व्यंजक ज्ञात कीजिए।
3. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता से क्या अभिप्राय है? एक बिन्दु आरेख के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक निगमित कीजिए।
4. विद्युत द्विध्रुव से क्या तात्पर्य है? किसी द्विध्रुव के कारण अक्षीय स्थिति में किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
5. द्विध्रुव आघूर्ण से क्या तात्पर्य है? किसी विद्युत द्विध्रुव के कारण निरक्षीय स्थिति में किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
6. चतुःध्रुव आघूर्ण के कारण विद्युत विभव व विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए।
7. विद्युत क्षेत्र \vec{E} के रेखीय समाकलन का भौतिक अर्थ समझाइए।
8. स्थैत विद्युत क्षेत्र की संरक्षी प्रकृति की व्याख्या कीजिए।
9. किसी बिन्दु पर विद्युत विभव की परिभाषा दीजिए। एक बिन्दु आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विभव के व्यंजक की स्थापना कीजिए।
10. सिद्ध कीजिए कि $\vec{E} = -\text{grad } V$ ।
11. एकसमान आवेशित चकती के कारण इसकी अक्ष पर विभव तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
12. असमान आवेश वितरण के लिए वैद्युत तथा वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिए।
13. समविभव पृष्ठ किसे कहते हैं? सिद्ध कीजिए कि

$$E = -\nabla\phi$$
14. एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे वैद्युत द्विध्रुव पर बलयुग्म के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए तथा स्थितिज ऊर्जा के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए।
15. विद्युत फ्लक्स किसे कहते हैं? इसका मान अधिकतम तथा न्यूनतम किन परिस्थितियों में होता है? इसका मात्रक तथा विमाएँ लिखिये।
16. गॉस की प्रमेय लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए।
17. किसी एक समान आवेशित चालक गोलीय खोल के (i) अन्दर, (ii) पृष्ठ पर, (iii) बाह्य स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए तथा आरेख खींचकर गोले के केन्द्र से दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का विचरण प्रदर्शित कीजिए।

18. गॉस की प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि किसी एक समान आवेशित ठोस गोले के अन्दर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता गोले के केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी के अनुक्रमानुपाती होती है।
19. गॉस की प्रमेय की सहायता से एक समान आवेशित कुचालक पदार्थ की चादर से समीप स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
20. गॉस की प्रमेय लिखिए। एक अनन्त लम्बाई तथा R त्रिज्या के चालक बेलन में वितरित आवेश का प्रति एकांक लम्बाई आवेश λ है।
गॉस की प्रमेय से बेलन की अक्ष से x दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना कीजिए। जबकि (i) $x < R$ (ii) $x = R$ तथा (iii) $x > R$
21. गॉस की प्रमेय की सहायता से किसी आवेशित चालक के समीप स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना कीजिए।
22. वैद्युत स्थैतिकी में पॉयसन व लाप्लास के समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।
23. गॉस प्रमेय का समाकल एवं अवकल रूप लिखिए।
24. किसी संधारित्र की संरचना कार्यप्रणाली तथा सिद्धान्त लिखिये।
25. किसी समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए, यदि प्लेटों के बीच माध्यम रखा जाये तो धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
26. किसी गोलाकार संधारित्र की धारिता के लिये सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।
27. किसी बेलनाकार संधारित्र की धारिता के लिये व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।
28. परावैद्युत पदार्थ से क्या तात्पर्य है? ये चालक पदार्थों से कैसे भिन्न हैं?
29. परावैद्युत ध्रुवण से आप क्या समझते हैं? परावैद्युत पदार्थ में विद्युत क्षेत्र \vec{E} , विद्युत ध्रुवण \vec{P} तथा विद्युत विस्थापन \vec{D} की व्याख्या कीजिए तथा इनमें सम्बन्ध निगमित कीजिए।
30. सिद्ध कीजिए कि (i) $E = \epsilon E$ (ii) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P}$ ।
31. निम्नलिखित की परिभाषा दीजिए तथा समझाइए—
(i) परावैद्युत ध्रुवण, (ii) परावैद्युत विस्थापन, (iii) परमाण्वीय ध्रुवणता, (iv) विद्युत प्रवृत्ति, (v) परावैद्युतांक।
32. एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र के बीच भरे परावैद्युत माध्यम के किसी अणु पर विद्युत क्षेत्र कार्यरत होते हैं। अणु पर नैट विद्युत क्षेत्र की गणना कीजिए।

टिप्पणी

33. सिद्ध कीजिए कि किसी बन्द पृष्ठ से गुजरने वाला सम्पूर्ण फ्लक्स उस बन्द पृष्ठ के अनन्त कुल आवेश का $\frac{1}{\epsilon_0}$ गुना होता है जबकि ϵ_0 मुक्त आकाश की वैद्युतशीलता है।
34. क्लॉसियस-मोसोटी समीकरण लिखिये तथा इसे निगमित कीजिए
- $$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \left(\frac{k-1}{k+2} \right)$$

आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

- एक पृष्ठ $\vec{S} = 10\hat{k}$ के स्थैत विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ में रखा जाता है। गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स की गणना कीजिए।
- एक अनन्त लम्बाई तथा 0.01 मीटर त्रिज्या के चालक बेलन से वितरित आवेश का लम्बाई पर आवेश 0.1 कूलॉम/मीटर है। बेलन की अक्ष से 100 सेमी तथा 0.5 सेमी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना कीजिए।
[उत्तर— 1.8×10^9 न्यूटन]
- दो अनन्त समतल चादरों A व B पर आवेश के पृष्ठ घनत्व क्रमशः 3×10^{-9} कूलॉम -4×10^{-9} कूलॉम/मीटर² हैं। ये चादरें एक-दूसरे के लम्बवत् रखी हैं। इनसे विभव के प्रत्येक भाग में विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए। [उत्तर— चारों भागों $E = \frac{2.5}{\epsilon_0} \times 10^{-9}$ न्यूटन/कूलॉम, धनात्मक चादर से ऋण की ओर धनात्मक चादर से कोण]
- 15×10^{-4} कूलॉम आवेश पर विद्युत क्षेत्र में 2.25 न्यूटन बल कार्य करता है। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— 1.5×10^3 न्यूटन/कूलॉम]
- एक इलेक्ट्रॉन के आवेश के कारण निर्वात में 1.0 मीटर दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 1.44×10^{-9} न्यूटन/कूलॉम]
- दो बिन्दु आवेश $+9e$ एवं $+e$ एक-दूसरे से 8 मीटर दूरी पर स्थित हैं। इनके बीच एक आवेश q को कहाँ रखा जाये कि वह सन्तुलन में हो?
[उत्तर— $+9e$ आवेश से 6 मीटर दूर]
- दो आवेश $+Q$ और $+4Q$ एक-दूसरे से d दूरी पर स्थित हैं। एक अन्य आवेश को कहाँ रखा जाये कि तीनों सन्तुलन में हों? इस आवेश का परिमाण भी बताइये। [उत्तर— $+Q$ आवेश से $d/3$ दूरी पर, $-\frac{4}{9}Q$]
- दो आवेश $4\mu C$ और $-4\mu C$ एक-दूसरे से 10^{-2} मीटर की दूरी पर स्थित हैं। इस द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति में इससे 0.3 मीटर की दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिए। [उत्तर— 1.33×10^4 न्यूटन/कूलॉम]

9. यदि विभव फलन $V = y(3x^2 - y^2)$ हो, तो विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— $V = 6xy\hat{i} - 3(x^2 - y^2)\hat{j}$]
10. किसी क्षेत्र में विभव फलन $V = 4x^2 + 3y^3 - 9z^2$ द्वारा व्यक्त है। बिन्दु (3, 4, 5) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— $24\hat{i} - 144\hat{j} + 90\hat{k}$]
11. एक पदार्थ की विद्युत प्रवृत्ति 4.0 है। उस पदार्थ का परावैद्युतांक तथा निरपेक्ष विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— 5.0, 4.43×10^{-11} कूलॉम²/न्यूटन]
12. एक माध्यम का परावैद्युतांक 5 है। इसमें विद्युत स्थापन सदिश 5×10^{-12} कूलॉम इसमें विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के परिणाम की गणना कीजिए।
($\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ न्यूटन/कूलॉम \times मी²) [उत्तर— 0.113 न्यूटन]
13. समान्तर प्लेट वायु संधारित्र जिसकी प्लेटों के बीच की दूरी। सेमी तथा प्रत्येक प्लेट 10^{-2} मीटर² है, को 100 वोल्ट विभव तक आवेशित किया जाता है। अब यदि प्लेटों सेमी मोटाई तथा 7.0 परावैद्युतांक की एक पट्टी डाल दी जाये तो \vec{E} , D तथा P के मान में तथा (ii) वायु में ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— (i) $E = 1.43 \times 10^3$ वोल्ट/मीटर
 $D = 8.86 \times 10^{-8}$ कूलॉम $P = 7.59 \times 10^{-8}$
(ii) $E = 10 \times 10^4$ वोल्ट/मीटर $D = 8.86 \times 10^{-8}$ कूलॉम/मीटर]
14. N.T.P. पर हीलियम गैस का परावैद्युतांक 1.000074 है। जब गैस को 100 वोल्ट/मीटर तीव्रता वाले विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो प्रत्येक हीलियम परमाणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— 24.46×10^{-40} कूलॉम-मीटर]
15. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम भर दिया जाता है। दर्शाइये कि परावैद्युतांक $K = (1 - \sigma'/\sigma)^{-1}$, जहाँ σ' प्रेरित पृष्ठीय आवेश घनत्व है। यदि माध्यम सुचालक, हो तो दर्शाइए कि $k = \infty$ ।
16. हीरे की विद्युतशीलता 1.46×10^{-10} कूलॉम²/न्यूटन मीटर² है। इसके लिए परावैद्युतांक तथा विद्युत प्रवृत्ति ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— 16.5, 1.37×10^{-10} कूलॉम²/न्यूटन-मीटर²]
17. जल के अणु का द्विध्रुव आघूर्ण ज्ञात कीजिए। यह मान लीजिए कि अणु के सभी दस इलेक्ट्रॉन, ऑक्सीजन परमाणु के चारों ओर सममित रूप से परिक्रमण करते हैं। O-H बन्ध की दूरी 0.96×10^{-8} सेमी है तथा दो OH बन्ध के बीच कोण 104° है। [उत्तर— 1.9×10^{-29} कूलॉम-मीटर]

टिप्पणी

18. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल 0.01 मीटर^2 है। इसकी प्लेटों के बीच $K = 3.5$ का परावैद्युत रखा है। यदि संधारित्र की धारिता 100 pF हो, तो कागज की मोटाई ज्ञात कीजिए। 100 वोल्ट विभवान्तर पर निम्न की गणना कीजिए—
- (i) प्लेटों का स्वतन्त्र आवेश, (ii) कागज के पृष्ठ पर प्रेरित आवेश, (iii) कागज के अन्दर \vec{E} , \vec{D} व \vec{P} के मान।
- [उत्तर— 3.1 मिमी, (i) $0.01 \text{ } \mu\text{C}$, (ii) $0.007 \text{ } \mu\text{C}$, (iii) $3\pi 10^4$ वोल्ट/मीटर, $1 \text{ } \mu\text{C}/\text{मीटर}^3$ तथा $0.7 \text{ } \mu\text{C मी}^3$]
19. सिद्ध कीजिए कि किसी समदैशिक परावैद्युत में गोलाकार अहाते के अन्दर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E_i = E_0 + \frac{P}{3t_0}$ होती है।
20. 0.004 माइक्रो फ़ैरड धारिता का समान्तर प्लेट संधारित्र बनाने में कितने कागज के क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी, यदि कागज का परावैद्युतांक 2.5 और उसकी मोटाई 0.025 मिमी हो? [उत्तर— 4.51×10^{-3} मीटर²]
21. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों को जिनका व्यास 20 सेमी है जिनके बीच स्थित माध्यम का परावैद्युतांक 3 है, कितनी दूरी पर रखा जाये, जिससे उसकी धारिता उतनी ही हो जितनी 100 सेमी व्यास वाले गोले की होती है। [उत्तर— 1.5 सेमी]
22. एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल 22 सेमी² है। उनके बीच की दूरी 0.7 मिमी तथा धारिता 1 मीटर व्यास वाले गोले की धारिता के बराबर है। प्लेटों के बीच भरे माध्यम का परावैद्युतांक ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 2]
23. एक गोलाकार संधारित्र के गोलों की त्रिज्याएँ क्रमशः 0.5 मीटर तथा 0.6 मीटर है। गोलों के बीच के स्थान में भरे माध्यम का परावैद्युतांक 6 है। संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 2×10^{-9} फ़ैरड]
24. एक परावैद्युत पदार्थ का परावैद्युतांक 4.5 है। इसकी विद्युतशीलता तथा विद्युतीय प्रवृत्ति ज्ञात कीजिये। ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ मात्रक)
- [उत्तर— विद्युतशीलता = 39.83×10^{-12} मात्रक
विद्युतीय प्रवृत्ति = 3.5]
25. 6.000 परावैद्युतांक वाले पदार्थ की एक समांगी व समदैशिक पट्टिका को 0.1 न्यूटन/कूलॉम तीव्रता के विद्युत् क्षेत्र के लम्बवत् रखा गया है। पट्टिका में विस्थापन \vec{D} तथा ध्रुवण सदिश \vec{P} की गणना कीजिये।
- [उत्तर— $\vec{D} = 5.316 \times 10^{-12}$ कूलॉम/मीटर
 $\vec{P} = 4.43 \times 10^{-12}$ कूलॉम/मीटर²]
26. एक समान्तर प्लेट संधारित्र जिसकी प्लेटों के बीच की दूरी 1 सेमी तथा प्रत्येक प्लेट का क्षेत्र 10^{-2} मीटर² है, को 100 वोल्ट विभव तक आवेशित

किया जाता है। अब यदि प्लेटों के बीच 0.5 सेमी मोटाई तथा 7.0 परावैद्युतांक की एक पट्टी डाल दी जाती है तो \vec{E} , \vec{D} तथा \vec{P} के मान (i) परावैद्युत में तथा (ii) वायु में ज्ञात कीजिये।

[उत्तर— (i) $E = 1.43 \times 10^3$ वोल्ट/मीटर
 $D = 8.86 \times 10^{-8}$ कूलॉम/मीटर,
 $P = 7.59 \times 10^{-8}$ कूलॉम/मीटर²,
(ii) $E = 1.0 \times 10^{-4}$ वोल्ट/मीटर,
 $D = 8.86 \times 10^8$ कूलॉम/मीटर², $P = 0$]

27. कार्बन परमाणु का ध्रुवण घनत्व 4.8×10^{-4} कूलॉम/मीटर² है। यदि कार्बन का घनत्व 3.5×10^3 किग्रा/मीटर³ है, तो ध्रुवण के कारण कार्बन परमाणु के छः इलेक्ट्रॉनों के गुरुत्व केन्द्र का विस्थापन ज्ञात कीजिये।

[उत्तर— 2.85×10^{-15} मीटर]

28. एक माध्यम का परावैद्युतांक 5 है इसमें विद्युत् विस्थापन सदिश 5×10^{-12} कूलॉम/मीटर² है। इसमें विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिये।

[उत्तर— 0.113 न्यूटन/कूलॉम]

29. सिद्ध कीजिये परावैद्युत माध्यम बदलने पर बल रेखायें $\epsilon_1 \cot \theta_1 = \epsilon_2 \cot \theta_2$ के अनुसार अपवर्तित होते हैं, जहाँ ϵ_1 व ϵ_2 आपेक्षिक विद्युतशीलता है तथा θ_1 व θ_2 उभयनिष्ठा पृष्ठ पर खींचे अभिलम्ब से क्षेत्र रेखाओं द्वारा बनाये कोण हैं।

30. कार्बन टेट्राक्लोराइड के अणु का द्विध्रुव आघूर्ण P ज्ञात कीजिये यदि $\epsilon_r = 2.24$, घनत्व = 1.6 ग्राम/सेमी³, अणुभार = 156, विद्युत क्षेत्र = 10^7 वोल्ट/मीटर।

[उत्तर— 1.77×10^{-32} कूलॉम-मी]

1.46 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. Berkley Physics Course, Electricity and Magnetism Ed. E. M. Purcell McGraw Hill.
2. Physics Volume 2, D. Halliday and R. Resnick
3. Introduction to Electrodynamics: D.J. Griffiths, 4th Edition, Prentice Hall.
4. Electricity and Magnetism: S.S. Atwood Dover.
5. Electrodynamics: Emi Cossor and Bassin Lorraine, Asahi Shimbunsha Publishing Ltd.
6. From Neuron to Brain: Kuffler and Nicholas, Sinauer Associates, Inc Pub. Sunderlan Massachusetts.
7. Schaums Outline of Beginners Physics II: Electricity and Magnetism.

इकाई 2 स्थिर चुम्बकत्व (Magnetostatics)

टिप्पणी

संरचना (Structure)

- 2.0 परिचय
- 2.1 उद्देश्य
- 2.2 चुम्बकीय क्षेत्र तथा चुम्बकीय फलक
- 2.3 विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में गतिशील आवेश पर बल – लॉरेंज बल
- 2.4 लॉरेंज बल से \vec{B} की परिभाषा
- 2.5 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण
- 2.6 एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में सीधे धारावाही चालक पर बल
- 2.7 धारा लूप पर बल-आघूर्ण
- 2.8 चुम्बकीय द्विध्रुव एवं द्विध्रुव आघूर्ण
- 2.9 कोणीय संवेग और जायरो चुम्बकीय अनुपात
- 2.10 धारा खण्ड के कारण चुम्बकीय क्षेत्र (बायो-सावर्ट नियम)
 - 2.10.1 बायो-सावर्ट नियम के अनुप्रयोग
- 2.11 चुम्बकीय प्रेरण का रैखिक समाकल : परिक्रमी रूप में ऐम्पियर का नियम
- 2.12 अवकल रूप में चुम्बकीय स्थितिकी के मूल नियम
- 2.13 चुम्बकीय द्विध्रुव की अनुदैर्घ्य दिशा (या अक्षीय स्थिति) में चुम्बकीय क्षेत्र
- 2.14 चुम्बकीय द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति (या अनुप्रस्थ दिशा) में चुम्बकीय क्षेत्र
- 2.15 चुम्बकीय क्षेत्र H चुम्बकीय क्षेत्र B व चुम्बकन वेक्टर M त्रिसदिश की विवेचना
- 2.16 दण्ड चुम्बक की परिनालिकीय धारा के पृष्ठीय वितरण के रूप में व्याख्या
- 2.17(a) \vec{B} , \vec{H} और \vec{M} में सम्बन्ध
- 2.17(b) चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा चुम्बकशीलता
 - 2.18 आंकिक उदाहरण
 - 2.19 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 2.20 सारांश
 - 2.21 मुख्य शब्दावली
 - 2.22 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 2.23 सहायक पाठ्य सामग्री

2.0 परिचय (Introduction)

इस इकाई के प्रथम भाग में हम लॉरेंज बल एवं इसके प्रभाव का अध्ययन करेंगे तथा अगले भाग में हम धारावाही चालक द्वारा उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र का अध्ययन करेंगे। प्रारम्भ में भौतिकी के दो शाखाओं विद्युत् तथा चुम्बकत्व का अध्ययन पृथक्-पृथक् किया जाता था, किन्तु कालान्तर में खोजों के आधारपर यह माना जाने लगा जाने लगा है कि विद्युत् एवं चुम्बकत्व एक ही घटना 'विद्युत्-चुम्बकत्व' की दो अभिव्यक्तियाँ हैं। अब चुम्बकत्व को भौतिक विज्ञान की अलग शाखा नहीं माना जाता, वरन् विद्युत् धारा के कारण उत्पन्न प्रभाव के रूप में माना जाता है।

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- चुम्बकीय क्षेत्र में किसी गतिशील आवेश एवं धारा वाहक रेखीय चालक पर लगने वाले लॉरेन्ज बल, धारा लूप पर कार्यरत बल आघूर्ण, चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण, कोणीय संवेग, पायरो चुम्बकीय निष्पत्ति आदि का विस्तृत अध्ययन किया जायेगा;
- इसके साथ ही बोयोट-सावार्ट का नियम, ऐम्पियर का नियम, चुम्बकीय द्विध्रुव की अक्षीय व निरक्षीय स्थिति चुम्बकन धारा, चुम्बकनशीलता, चुम्बकन वेक्टर B एवं H के संबंध आदि का अध्ययन किया जायेगा।

टिप्पणी

2.2 चुम्बकीय क्षेत्र तथा चुम्बकीय फ्लक्स (Magnetic Field and Magnetic Flux)

चुम्बक अथवा धारावाही चालक के चारों ओर का वह क्षेत्र (Region), जिसमें वह चुम्बकीय प्रभाव का अनुभव करता है, चुम्बकीय क्षेत्र कहलाता है। मूल चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टर को चुम्बकीय प्रेरण (Magnetic induction) कहते हैं। चुम्बकीय प्रेरण को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है—

- चुम्बकीय प्रेरण रेखाओं के अभिलम्बवत् रखे एकांक क्षेत्रफल से होकर जाने वाली रेखाओं की संख्या, चुम्बकीय प्रेरण अथवा चुम्बकीय फ्लक्स B के परिणाम को प्रदर्शित करती है अतः जहाँ प्रेरण रेखाओं के बीच अन्तराल कम होता है, चुम्बकीय प्रेरण अधिक होता है।
- किसी बिन्दु पर प्रेरण रेखा पर स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर चुम्बकीय प्रेरण B की दिशा को निरूपित करती है।

प्रेरण रेखाएँ साधारणतया ग्राफीय रूप में यह निरूपित करती हैं कि किसी क्षेत्र में चुम्बकीय क्षेत्र B किस प्रकार परिवर्तित होता है।

वैद्युत क्षेत्र के फ्लक्स के अनुरूप किसी पृष्ठ से होकर चुम्बकीय फ्लक्स ϕ_B को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है –

$$\phi_B = \iint_S B \cdot dS$$

यहाँ B चुम्बकीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टर (अर्थात् चुम्बकीय प्रेरण) तथा dS उस बिन्दु के सापेक्ष अति सूक्ष्म क्षेत्रफल है। अतः किसी पृष्ठ S से होकर चुम्बकीय फ्लक्स का मान सम्पूर्ण पृष्ठ S से होकर जाने वाली प्रेरण रेखाओं की संख्या के बराबर होता है।

चुम्बकीय फ्लक्स का M.K.S. मात्रक वेबर (weber) होता है तथा चुम्बकीय प्रेरण का मात्रक वेबर/मीटर² (अथवा टैस्ला) होता है।

2.3 वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में गतिशील आवेश पर बल – लॉरेंज बल (The Force on a Charge Moving in Electric and Magnetic Fields – Lorentz Force)

यदि कोई आवेशित कण किसी चुम्बकीय क्षेत्र में गति करता है तो चुम्बकीय क्षेत्र के कारण भी उस कण पर एक बल लगता है जिसे लॉरेंज बल कहते हैं।

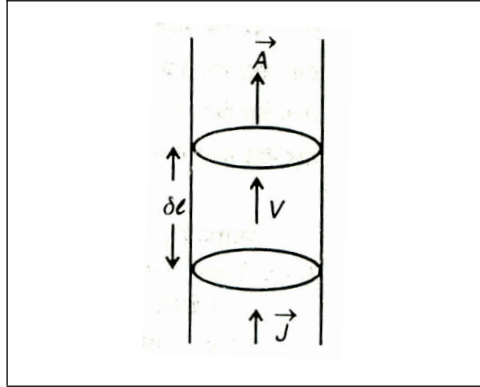
माना q आवेश का एक आवेशित कण E सामर्थ्य के वैद्युत क्षेत्र तथा B सामर्थ्य के चुम्बकीय क्षेत्र में गति करता है, अतः

$$\text{वैद्युत बल } \vec{F}_E = q\vec{E} \quad \dots (1)$$

B प्रेरण के चुम्बकीय क्षेत्र में रखे I एम्पियर धारा प्रवाहित करने वाले किसी चालक की δl लम्बाई पर कार्यरत चुम्बकीय बल का मान

$$\delta F_M = I \delta \vec{l} \times B = I \delta l B \sin \theta \hat{n} \quad \dots (2)$$

अतः बल का परिमाण $I \delta l B \sin \theta$ तथा इसकी दिशा $\delta \vec{l}$ तथा B के तल के लम्बवत् होगी।



चित्र क्र. 2.1: वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में गतिशील आवेश पर बल

चित्र 2.1 में माना एक चालक जिसका अनुप्रस्थ परिच्छेद A है तथा इसमें आवेश वाहकों के कारण धारा I प्रवाहित हो रही है प्रत्येक आवेश वाहक एकसमान वेग v से गतिमान है तथा B प्रेरण के चुम्बकीय बल में रखा है। चालक की δl लम्बाई के द्वारा चुम्बकीय बल का मान होगा

$$\delta F_M = I \delta \vec{l} \times B \quad \dots (3)$$

यदि प्रति एकांक आयतन आवेश वाहकों की संख्या n तथा प्रत्येक आवेश वाहक पर आवेश का मान q हो, तो चालक में धारा घनत्व J

$$J = nqv$$

अतः चालक में प्रवाहित कुल धारा

$$I = J \cdot A = nqv \cdot A \quad \dots (4)$$

समीकरण (3) में I का मान रखने पर, चालक के भाग $\vec{\delta l}$ पर आरोपित बल

$$\delta F_M = (nqv \cdot A) \vec{\delta l} \times B$$

$$\text{अथवा} \quad \delta F_M = (nq\vec{\delta l} \cdot A) \vec{v} \times B \quad \dots (5)$$

यहाँ $\vec{\delta l} \cdot A$ धारा घनत्व का आयतन है अतः $(nq\vec{\delta l} \cdot A)$ आवेश वाहकों की कुल संख्या होगी। अतः B प्रेरण के चुम्बकीय क्षेत्र में v वेग से गति कर रहे q आवेश के एकल आवेश वाहक द्वारा चुम्बकीय बल का मान होगा –

$$\begin{aligned} \vec{F}_M &= \frac{\delta F_m}{n\vec{\delta l} \cdot A} = \frac{(nq\vec{\delta l} \cdot A) \vec{v} \times B}{n\vec{\delta l} \cdot A} \\ &= q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

यह बल, कण की दिशा तथा चुम्बकीय प्रेरण B की दिशा दोनों के लम्बवत् होगा।

अतः संयुक्त वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में आवेश q पर कार्यरत कुल बल

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_M = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (7)$$

इस परिणामी बल F को **लॉरेंज बल (Lorentz force)** कहते हैं तथा समीकरण (7) लॉरेंज बल समीकरण कहलाता है अतः लॉरेंज बल का परिमाण–

(1) कण के आवेश, (2) कण के वेग, (3) वैद्युत क्षेत्र के परिमाण, (4) चुम्बकीय क्षेत्र के परिमाण पर निर्भर करता है।

2.4 लॉरेंज बल से \vec{B} की परिभाषा (Definition of \vec{B} from Lorentz's Force)

माना एक ऐसी स्थिति जिसमें वैद्युत क्षेत्र अनुपस्थित है तथा एक परीक्षण आवेश q किसी बिन्दु P से होकर एक स्वेच्छ वेग v से गतिमान है। गुरुत्वीय बल को नगण्य मानते हुए यदि परीक्षण आवेश q , वेग v पर एक पार्श्विक विक्षेपण बल F_M का अनुभव करे तो बिन्दु P पर एक चुम्बकीय क्षेत्र विद्यमान होगा तथा इस क्षेत्र के चुम्बकीय प्रेरण B को चुम्बकीय बल F_M तथा अन्य मापित राशियों के पदों में परिभाषित किया जा सकता है। पार्श्विक विक्षेपण बल F_M (अथवा चुम्बकीय बल F_M) B से निम्न प्रकार सम्बन्धित होता है–

$$\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (1)$$

स्पष्टतया F_M सदैव v तथा B के लम्बवत् होता है तथा सदा एक पार्श्विक बल (Sideways force) के रूप में कार्य करता है।

विक्षेपण बल F_M का परिमाण $= qvB \sin \theta$

जहाँ θ , v तथा B के बीच बनने वाला कोण है।

अतः चुम्बकीय प्रेरण का परिमाण,

$$\vec{B} = \frac{F_M}{qv \sin \theta} \quad \dots (2)$$

यदि v , B के लम्बवत् हो तो बल F_M का मान महत्तम होगा तथा B का परिणाम इस महत्तम बल के परिमाण $(F_M)_{\max.}$ के पदों में निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है –

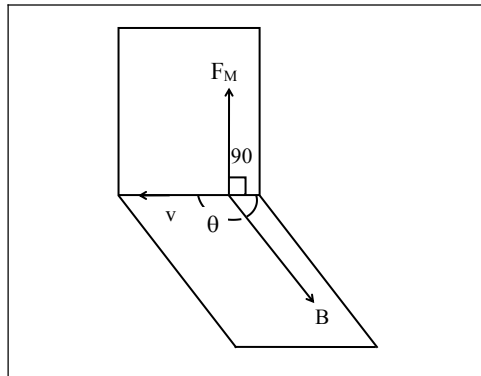
$$\vec{B} = \frac{(F_M)_{\max.}}{qv} \quad \dots (3)$$

चुम्बकीय प्रेरण B की परिभाषा समीकरणों (1), (2) तथा (3) से निरूपित है। इन समीकरणों से निम्नलिखित तथ्य स्पष्ट हैं –

- (i) चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टर B , F_M के तल के लम्बवत् होता है।
- (ii) चुम्बकीय बल F_M का परिणाम $qvB \sin \theta$ होता है।
- (iii) गतिशील आवेश q पर आरोपित चुम्बकीय बल F_M का मान निम्नलिखित स्थितियों में शून्य होता है—
 - (a) यदि $v = 0$, (b) $B = 0$, (c) यदि v , B की दिशा के समान्तर अथवा प्रति-समान्तर हो।
- (iv) चुम्बकीय बल का मान महत्तम $(F_M)_{\max.}$ होगा, यदि v तथा B परस्पर लम्बवत् हों, अर्थात्

$$(F_M)_{\max.} = qvB \quad \dots (4)$$

चित्र 2.2 में वेक्टरों F_M , v तथा B के बीच सम्बन्ध प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 2.2: F_M , v तथा B सदिशों के बीच सम्बन्ध

उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट है कि चुम्बकीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर चुम्बकीय प्रेरण B को एक ऐसी वेक्टर राशि से परिभाषित किया जा सकता है

जिसका परिमाण $\frac{F_M}{qv \sin \theta}$ अथवा $\frac{(F_M)_{\max.}}{qv}$ के बराबर है तथा जिसकी दिशा सदैव F_M के लम्बवत् है तथा इसका निरूपण वेक्टर गुणन के अनुरूप है।

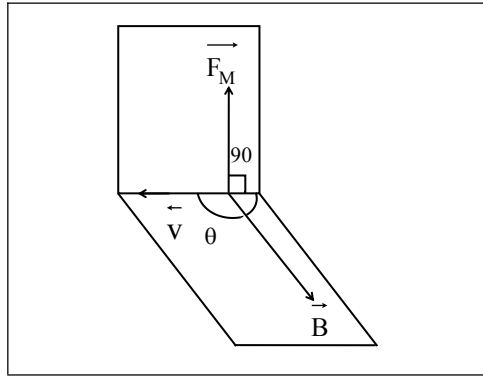
यदि $q = 1$ कूलाम तथा $v = 1$ मीटर/सेकण्ड तथा $\theta = 90^\circ$ हो तो अर्थात् जब 1 कूलाम आवेश का कण किसी अभिलम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र में एक मीटर प्रति सेकण्ड के वेग से गति करता है तो उस पर लगने वाले बल को चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता कहते हैं। इसका मात्रक टेसला (T) होता है या वेबर/मीटर² (Wb/m²) या न्यूटन/ऐम्पियर (N/A) मीटर होता है।

2.5 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण (Charged Particle in a Uniform Constant Magnetic Field)

माना एक ऐसी स्थिति जिसमें वैद्युत क्षेत्र अनुपस्थित है तथा एक परीक्षण आवेश q किसी चुम्बकीय क्षेत्र B में किसी स्वेच्छ (Arbitrary) वेग v से बिन्दु P में से होकर गतिमान है, परीक्षण आवेश पर आरोपित विक्षेपक बल F_M

$$\vec{F}_M = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (1)$$

स्पष्टतया F_M सदैव v तथा B के लम्बवत् होगा तथा सदैव एक पार्श्विक बल होगा। चित्र 2.3 में वेक्टरों F_M , v तथा B के बीच सम्बन्ध निरूपित है।



चित्र क्र. 2.3: चुम्बकीय क्षेत्र में धारावाही चालक पर बल

समीकरण (1) से यदि कण क्षेत्र में विरामावस्था में हो ($v = 0$) तो कण पर कोई बल कार्य नहीं करेगा तथा यह विराम में ही रहेगा। (2) यदि कण चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर गति कर रहा हो, तो भी कण द्वारा अनुभव किया गया बल शून्य होगा, क्योंकि इस स्थिति में $|\vec{v} \times \vec{B}| = (vB \sin \theta) = 0$ होगा, क्योंकि वेग v तथा क्षेत्र B के बीच कोण θ का मान शून्य होगा, अतः एक आवेशित कण जो प्रारम्भ में चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर गति कर रहा है, एक समान्तर पथ पर प्रारम्भिक स्थिर वेग से निरन्तर गति करता रहेगा। अब हम दो स्थितियों की व्याख्या करेंगे—

स्थिति I – जब कण चुम्बकीय क्षेत्र में क्षेत्र से समकोण बनाती दिशा में प्रवेश करता है।

टिप्पणी

माना कण का चुम्बकीय क्षेत्र के अभिलम्बवत् प्रारम्भिक वेग v है। चूँकि आवेशित कण पर कार्यरत चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल सदैव कण की गति की दिशा तथा क्षेत्र की दिशा दोनों के लम्बवत् होता है अतः चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा आवेशित कण पर कोई बल कार्य नहीं करेगा, अतः कण को कोई गतिज ऊर्जा प्राप्त नहीं होगी तथा इसका वेग अपरिवर्तित रहेगा।

अब चूँकि v तथा B स्थिर हैं अतः F_M भी स्थिर होगा। यह स्थिर बल गति के प्रत्येक बिन्दु पर लम्बवत् कार्य करेगा तथा आवश्यक अभिकेन्द्र बल उत्पन्न करेगा जिसके कारण कण द्वारा चला गया पथ एक r त्रिज्या का वृत्त होगा जैसा चित्र 2.4 में प्रदर्शित है।

चूँकि v तथा B परस्पर लम्बवत् हैं, अतः चुम्बकीय बल

$$F_M = qvB$$

इसका परिमाण $qvB \sin \theta = qvB$

क्योंकि $\theta = 90^\circ$

यदि इस बल द्वारा उत्पन्न त्वरण a हो, तो न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$F_M = ma = m \frac{v^2}{r} \quad \dots (2)$$

तथा $F_M = qvB$

$$\therefore \frac{mv^2}{r} = qvB$$

$$\therefore \text{कण का संवेग } mv = qBr \quad \dots (3)$$

तथा पथ की त्रिज्या

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \dots (4)$$

यह त्रिज्या r कण की **जाइरो-त्रिज्या (Gyro-radius)** अथवा **साइक्लोट्रॉन-त्रिज्या (Cyclotron-radius)** कहलाती है।

कोणीय वेग ω का मान v/r होता है, अतः समीकरण (4) से

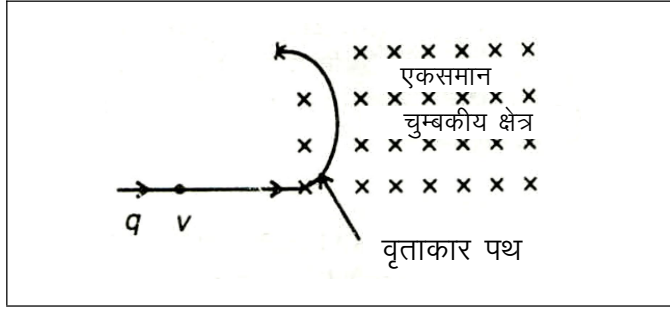
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad \dots (5)$$

अतः आवृत्ति f का मान होगा

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \dots (6)$$

चूँकि इस समीकरण में v नहीं है अतः f का मान कण की चाल पर निर्भर नहीं करता। तीव्र गतिमान कण बड़े वृत्तों में (समीकरण 4) तथा धीमे कण छोटे

वृत्तों में इस प्रकार गति करते हैं कि चुम्बकीय क्षेत्र में एक चक्र पूरा करने में लगा समय T (आवर्त काल) समान हो।



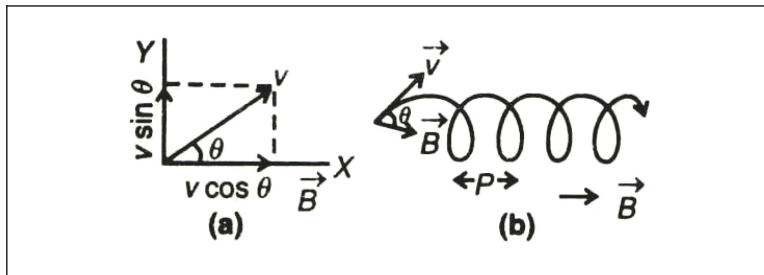
चित्र क्र. 2.4: आवेशित कण का पथ

आवृत्ति f चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की अभिलाक्षणिक आवृत्ति होती है तथा क्षेत्र में कण की जाइरो-आवृत्ति (Gyro-frequency) अथवा साइक्लोट्रॉन आवृत्ति (Cyclotron frequency) कहलाती है, क्योंकि साइक्लोट्रॉन में कण इसी आवृत्ति से परिक्रमा करते हैं।

स्थिति II – जब कण चुम्बकीय क्षेत्र में किसी भी दिशा में प्रवेश करते हैं।

यदि आवेशित कण चुम्बकीय क्षेत्र में ऐसे वेग v से प्रवेश करे जोकि चुम्बकीय क्षेत्र के अभिलम्बवत् न हो बल्कि उससे θ कोण बनाये तो इस चुम्बकीय क्षेत्र को आरोपित क्षेत्र के अनुदिश तथा लम्बवत् दो घटकों $v \cos \theta$ तथा $v \sin \theta$ में वियोजित किया जा सकता है (चित्र 2.5(a))। चुम्बकीय क्षेत्र के अनुदिश घटक $v \cos \theta$ क्षेत्र से अप्रभावित रहता है तथा आवेशित कण क्षेत्र के अनुदिश $v \cos \theta$ चाल से चलता रहता है परन्तु वेग अवयव $v \sin \theta$ जो चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् तल में हैं, कण पर एक बल F_M आरोपित करता है जिसके कारण यह इस तल में निश्चित चाल $v \sin \theta$ से एक वृत्त के अनुदिश गति करता है। समीकरण (4) के अनुसार इस वृत्तीय पथ की त्रिज्या,

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad \dots (7)$$



आवेशित कण की संगामी गति आवेशित कण का पथ कुण्डलिनी

चित्र क्र. 2.5

अतः आवेशित कण में दो संगामी गतियाँ होती हैं – (1) स्थिर वेग $v \sin \theta$ से चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् तल में वृत्तीय गति तथा (2) क्षेत्र के

टिप्पणी

टिप्पणी

अनुदिश स्थिर वेग $v \cos \theta$ से रेखिक गति। इन संगामी गतियों के कारण आवेशित कण का पथ कुण्डलिनी (Helix) हो जायेगा जैसाकि चित्र 2.5(b) में प्रदर्शित है।

एक चक्र के लिए कण द्वारा लिया गया समय अर्थात् आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi r}{v \sin \theta} = \frac{2\pi}{v \sin \theta} \left(\frac{mv \sin \theta}{qB} \right) = \frac{2\pi m}{qB} \quad \dots (8)$$

तथा आवेशित कण की चुम्बकीय क्षेत्र में घूर्णन आवृत्ति

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

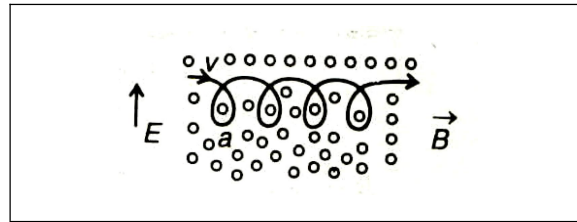
एक चक्र में अर्थात् T समय में चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर कण द्वारा चली गई दूरी कुण्डलिनी की पिच (Pitch) कहलाती है तथा इसका मान

$$p = v \cos \theta T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB} \quad \dots (9)$$

आवेशित कण द्वारा चुम्बकीय क्षेत्र में चले इस कुण्डलिनी पथ का उपयोग कैथोड किरण नलिकाओं तथा इलेक्ट्रॉन माइक्रोस्कोप आदि में इलेक्ट्रॉन पुंज के फोकसन में किया जाता है।

2.6 एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में सीधे धारावाही चालक पर बल (Force on a Straight Current Carrying Conductor in a Uniform Magnetic Field)

जब किसी चालक पर विद्युत धारा प्रवाहित की जाती है तो चारों ओर चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। यदि धारावाही चालक के पास एक चुम्बकीय सुई रखी जाये तो वह विक्षेपित हो जाती है। इसके विपरीत यदि किसी चुम्बकीय क्षेत्र में धारावाही तार रखा जाये तो उस पर एक बल कार्य करने लगता है जिसकी दिशा चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा और तार में प्रवाहित होने वाली विद्युत धारा की दिशा दोनों के लम्बवत् होती है।



चित्र क्र. 2.6(a): विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में गतिशील आवेशित कण का पथ

माना एक चालक तार AB चुम्बकीय क्षेत्र B में रखा हुआ है। यदि इस तार में धारा I प्रवाहित की जाये तो धारावाही तार पर लगने वाला बल F –

- (i) तार में प्रवाहित धारा I के समानुपाती होता है अर्थात् $F \propto I$
- (ii) तार की लम्बाई l के समानुपाती होता है अर्थात् $F \propto l$
- (iii) चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B के समानुपाती होता है अर्थात् $F \propto B$
- (iv) $\sin \theta$ के समानुपाती होता है, जहाँ θ धारा और चुम्बकीय क्षेत्र के बीच कोण है अर्थात् $F \propto \sin \theta$

सभी को साथ में लेने पर

$$F \propto IlB \sin \theta$$

या $F = KIlB \sin \theta$

जहाँ K एक समानुपातिक नियतांक है जिसका मान मापन की पद्धति पर निर्भर करता है। स.ग.स. (C.G.S.) व म.क.स. (M.K.S.) पद्धति में F का मात्रक इस प्रकार लेते हैं कि $K = 1$ हो,

∴ चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित धारावाही तार पर लगने वाला बल

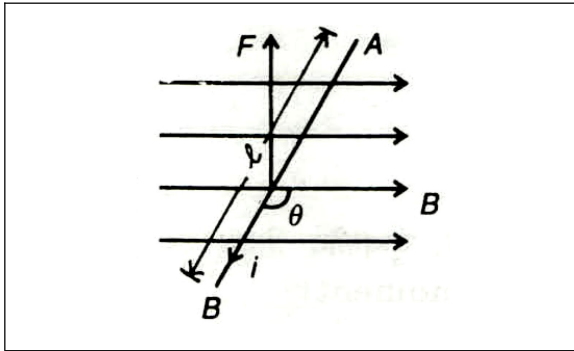
$$F = IlB \sin \theta$$

सदिश रूप में $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$

स्थिति 1 – यदि $\sin \theta = 1$ या $\theta = 90^\circ$ अर्थात् I और B परस्पर लम्बवत् हों, तो

धारावाही तार पर लगने वाला बल

$$F_{\max} = BIl \text{ (अधिकतम)}$$



चित्र क्र. 2.6(b): चुम्बकीय क्षेत्र में धारावाही चालक पर बल

अर्थात् यदि धारावाही तार चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् हो, तो उस पर लगने वाला बल अधिकतम होगा।

स्थिति 2 – $\sin \theta = 0$ या $\theta = 0$ अर्थात् I और B परस्पर समान्तर हों, तो

धारावाही तार पर लगने वाला बल $F = 0$

टिप्पणी

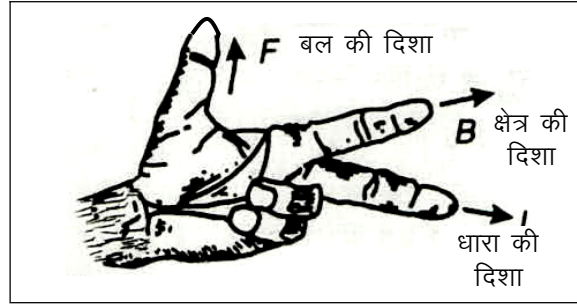
अर्थात् यदि धारावाही तार चुम्बकीय क्षेत्र के अनुदिश हो, तो उस पर लगने वाला बल शून्य होता है।

टिप्पणी

बल की दिशा – चुम्बकीय क्षेत्र में धारावाही चालक पर लगने वाले बल की दिशा निम्न नियमों में से किसी एक नियम की सहायता से दी जा सकती है—

(i) फ्लेमिंग का बायें हाथ का नियम (Fleming's Left Hand Rule)

– बायें हाथ का अँगूठा, तर्जनी व मध्यमा परस्पर लम्बवत् रखने पर तर्जनी बल रेखाओं की दिशा (क्षेत्र की दिशा), मध्यमा विद्युत धारा की दिशा तथा अँगूठा चालक पर लगने वाले बल की दिशा को प्रदर्शित करता है।



चित्र क्र. 2.7: फ्लेमिंग का बायें हाथ का नियम

(ii) दाहिने हाथ का नियम (Right Hand Palm Rule) – दाहिने हाथ की हथेली को इस प्रकार फैलाने पर कि अँगूठा, अँगुलियों के लम्बवत् रहे तो अँगूठा धारा की दिशा और अँगुलियाँ चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा को प्रदर्शित करती हैं तथा बल हथेली के लम्बवत् बाहर की दिशा में लगेगा।

चुम्बकीय क्षेत्र B का मात्रक

$$F = IlB \sin \theta \text{ से}$$

$$B = \frac{F}{l \sin \theta}$$

$$\therefore B \text{ का मात्रक} = \frac{F \text{ का मात्रक}}{F \text{ का मात्रक} \times l \text{ का मात्रक}}$$

$$\begin{aligned} \text{C.G.S. पद्धति में } B \text{ का मात्रक} &= \frac{\text{डाइन}}{\text{वि.चु.मा.} \times \text{सेमी}} \\ &= \text{ओस्टेड या गॉस} \end{aligned}$$

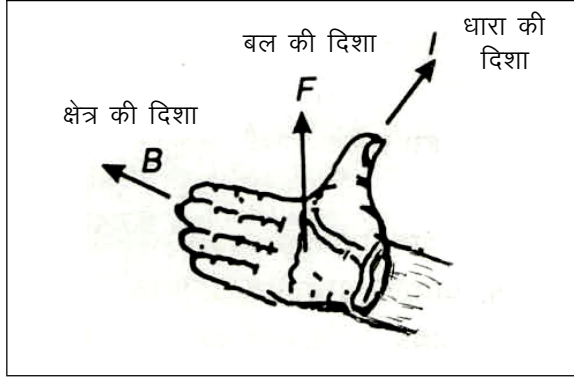
$$\text{तथा S.I. पद्धति में } B \text{ का मात्रक} = \frac{\text{न्यूटन}}{\text{ऐम्पियर} \times \text{मीटर}}$$

अतः S.I. पद्धति में चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक न्यूटन/ऐम्पियर \times मीटर ($NA^{-1}m^{-1}$)

यदि $F = 1$ न्यूटन, $I = 1$ ऐम्पियर, $l = 1$ मीटर तथा $\sin \theta = 1$ हो, तो

$$B = 1 \text{ न्यूटन/ऐम्पियर} \times \text{मीटर}$$

अतः यदि चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् स्थित 1 मीटर लम्बे चालक में 1 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित करने पर उस पर 1 न्यूटन का बल लगे तो उस चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता 1 न्यूटन/ऐम्पियर × मीटर होती है। अतः S.I. पद्धति में चुम्बकीय क्षेत्र का मात्रक न्यूटन/ऐम्पियर × मीटर है। इसे टेसला या वेबर/मीटर² भी कहते हैं।



चित्र क्र. 2.8: दाहिने हाथ की हथेली का नियम

चुम्बकीय क्षेत्र B के C.G.S. व S.I. पद्धति में सम्बन्ध

$$\text{चूँकि } B = \frac{F}{Il \sin \theta}$$

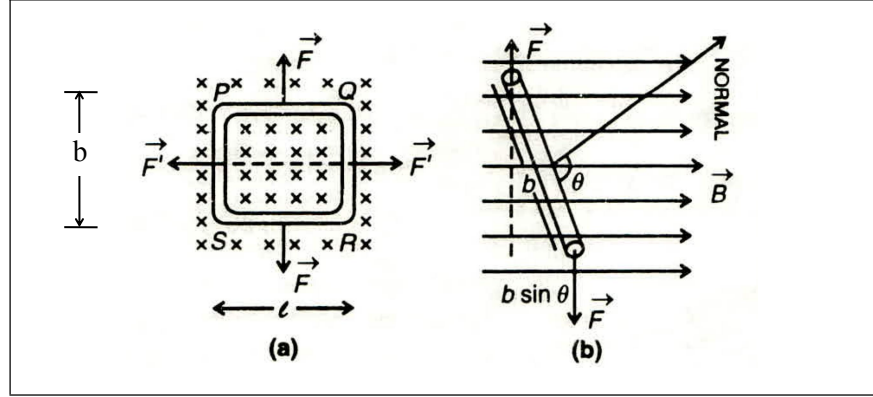
$$\begin{aligned} 1 \text{ न्यूटन/ऐम्पियर} \times \text{मीटर} &= \frac{1 \text{ न्यूटन}}{1 \text{ ऐम्पियर} \times 1 \text{ मीटर}} \\ &= \frac{10^5 \text{ डाइन}}{\frac{1}{10} \text{ वि.चु.मा.} \times 100 \text{ सेमी}} \\ &= 10^4 \frac{\text{डाइन}}{\text{वि.चु.मा.} \times \text{सेमी}} \end{aligned}$$

$$1 \text{ न्यूटन/ऐम्पियर} \times \text{मीटर} = 10^4 \text{ ओर्स्टेड}$$

2.7 धारा लूप पर बल-आघूर्ण (Torque on a Current Loop)

जब किसी एक समान चुम्बकीय क्षेत्र में स्वतंत्रतापूर्वक लटके किसी लूप में धारा प्रवाहित की जाती है तो लूप पर बल आघूर्ण आरोपित होता है जो लूप की अक्ष को चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर करने का प्रयास करता है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 2.9(a, b): चुम्बकीय क्षेत्र में स्थिर विद्युत धारा लूप पर बल युग्म

(i) आयताकार धारा लूप पर बल आघूर्ण (Torque on a Rectangular Current Loop)

माना l लम्बाई तथा b चौड़ाई का एक आयताकार तार का लूप $PQRS$ है। माना इसमें विद्युतधारा I प्रवाहित हो रही है तथा यह B चुम्बकीय प्रेरण के एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित है [चित्र 2.9(a)]।

माना लूप की अक्ष चुम्बकीय क्षेत्र B की दिशा से θ कोण बनाती है [चित्र 2.9(b)]।

तथा भुजाएँ QR तथा PS , क्षेत्र से कोण $(90^\circ - \theta)$ बनाती हैं। अतः उन पर आरोपित बलों का परिमाण

$$F' = IBb \sin(90^\circ - \theta) = IBb \cos \theta$$

भुजाएँ PQ तथा SR सदैव क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् हैं। अतः उन पर आरोपित बलों का मान

$$F = IBl$$

चित्रानुसार ये आरोपित बल एक बल युग्म बनायेंगे जो लूप को दक्षिणावर्त घुमाने का प्रयास करेंगे। अतः लूप पर एक बल आघूर्ण (Torque) कार्य करेगा जिसका परिमाण

$$\begin{aligned} \tau &= F(b \sin \theta) = IBl(b \sin \theta) \\ &= IBA \sin \theta \end{aligned}$$

जहाँ $A(=lb)$ लूप का क्षेत्रफल है। यह बल आघूर्ण प्रत्येक फेरे पर कार्य करेगा। अतः यदि लूप N फेरों की एक बन्द कुण्डली हो, तो सम्पूर्ण लूप पर बल आघूर्ण

$$\tau = NIBA \sin \theta$$

यह एक सम्पूर्ण धारा लूप पर बल आघूर्ण का अभीष्ट व्यंजक है। चल-कुण्डल गैल्वेनोमीटर इस सिद्धान्त पर आधारित है।

यह व्यंजक किसी भी आकृति, आयताकार, वृत्ताकार अथवा अन्य आकृतियों के बन्द लूपों के लिए सत्य है। इसका कारण यह है कि कोई भी लूप, सूक्ष्म संलग्न आयताकार लूपों की बाहुल्य संख्या से प्रतिस्थापित किया जा सकता है। एवं आयताकार लूपों के क्षेत्रफलों के योग को ज्ञात लूप के क्षेत्रफल के लगभग समान बनाया जा सकता है। समस्त आयताकार लूपों में एक ही दिशा में प्रवाहित विद्युत धाराएँ ऐसे बल उत्पन्न करेंगी जो परिसीमा को छोड़ अन्य समस्त बिन्दुओं पर निरस्त हो जायेंगे। अतः

$$\text{बल आघूर्ण} \quad \tau = NIBA \sin \theta$$

किसी भी आकृति के लूप के लिए सत्य होगा।

बल आघूर्ण वेक्टर रूप में – धारा लूप पर बल आघूर्ण

$$\tau = NIBA \sin \theta,$$

$$\tau = (NIA)B \sin \theta$$

पद NIA लूप का चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण M है।

$$\text{अब} \quad \tau = MB \sin \theta$$

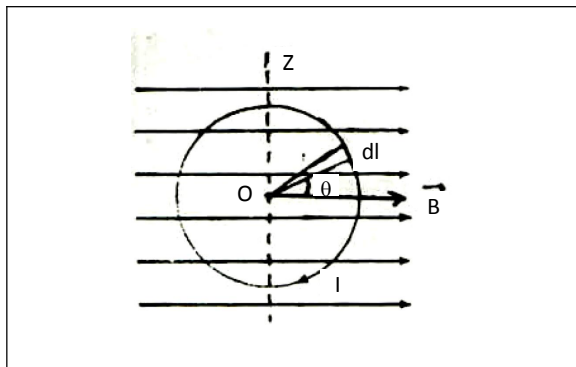
वेक्टर रूप में इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है –

$$\text{बल आघूर्ण} \quad \vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$$

(ii) वृत्तीय धारा लूप पर बल आघूर्ण (Torque on a Circular Current Loop)

माना चित्र 2.9(c) में त्रिज्या r का एक वृत्तीय लूप, जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही है, X -अक्ष के समान्तर एक समान चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} में X - Z तल में रखा है। लूप के एक अल्पांश dl पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला लॉरेन्ज बल

$$\begin{aligned} \vec{dF} &= I \vec{dl} \times \vec{B} \\ &= I dl B \sin \theta \end{aligned}$$



चित्र क्र. 2.9(c): वृत्तीय धारा लूप में बल आघूर्ण

जहाँ θ , \vec{dl} तथा \vec{B} के बीच का कोण है।

बल \vec{dF} का Z -अक्ष के परितः आघूर्ण $= dF \times r \sin \theta$

टिप्पणी

जहाँ $r \sin \theta$, Z अक्ष के बल की लम्बवत् दूरी है।

अतः Z -अक्ष के परितः लूप पर लगने वाला कुल बल आघूर्ण

टिप्पणी

$$\begin{aligned}\tau &= \int_0^{2\pi} dF \times r \sin \theta \\ &= \int_0^{2\pi} I dl B \sin \theta \times r \sin \theta\end{aligned}$$

किन्तु $dl = r d\theta$, अतः

$$\tau = IB r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = IB \pi r^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \right]$$

यदि लूप में N फेरे हैं तथा प्रत्येक फेरे का क्षेत्रफल A है तो $A = \pi r^2$ तथा लूप पर कुल बल आघूर्ण

$$\tau = N I A B \quad \dots (1)$$

समीकरण (1) को वेक्टर रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं –

$$\vec{\tau} = N I (\vec{A} \times \vec{B}) \quad \dots (2)$$

$$\tau = N I A B \sin \theta$$

2.8 चुम्बकीय द्विध्रुव एवं द्विध्रुव आघूर्ण (Magnetic Dipole and Dipole Moment)

वह निकाय जिसमें दो एक समान तथा विपरीत ध्रुव सूक्ष्म दूरी पर व्यवस्थित हों, “द्विध्रुव” कहते हैं। चुम्बकीय द्विध्रुव का विशेष गुण यह है कि जब इसे एक बाहरी चुम्बकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो द्विध्रुव पर एक बल आघूर्ण कार्य करता है जिसके कारण द्विध्रुव एक विशेष दिशा में संरेखित हो जाता है। कम्पास सुई, छड़ चुम्बक, धारा लूप, धारावाही कुण्डली तथा धारावाही परिनालिका सभी बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र में बल आघूर्ण का अनुभव करते हैं। अतः ये सभी चुम्बकीय द्विध्रुव की श्रेणी में आते हैं।

प्रत्येक चुम्बकीय द्विध्रुव का चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण (Magnetic Dipole Moment) होता है जिसे \vec{p}_m से प्रदर्शित करते हैं। यदि \vec{p}_m द्विध्रुव आघूर्ण के द्विध्रुव को \vec{B} चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर उस पर आरोपित बल आघूर्ण τ हो तब

$$\tau = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad \dots (1)$$

इस बल आघूर्ण का परिणाम

$$\tau = p_m B \sin \theta \quad \dots (2)$$

जहाँ, \vec{p}_m व \vec{B} के बीच का कोण θ है।

इसी प्रकार धारावाही लूप के चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण की गणना की जा सकती है।

माना N फेरों की एक कुण्डली को, जिसके प्रत्येक फेरे का परिच्छेद क्षेत्रफल A है तथा जिसमें I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है, \vec{B} चुम्बकीय क्षेत्र में इस प्रकार लटकाया गया है कि उसका तल चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा से θ कोण बनाता है। कुण्डली पर जो बल आघूर्ण कार्य करता है, उसका परिमाण निम्न सूत्र से प्राप्त होता है—

$$\tau = NIBA \sin \theta = (NIA)(B \sin \theta) \quad \dots (3)$$

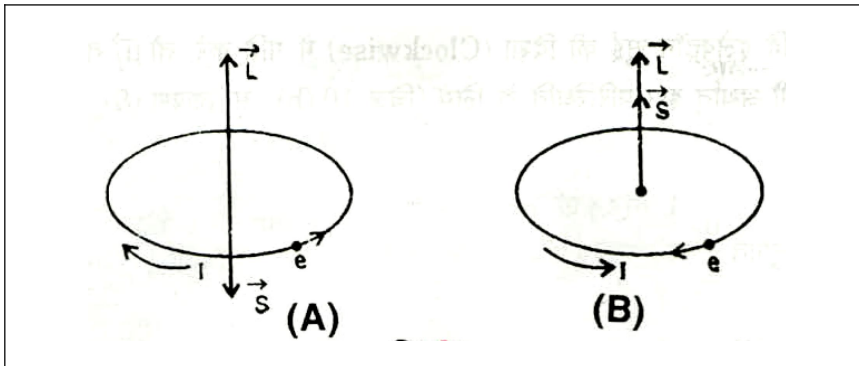
इस समीकरण की, समीकरण (2) से तुलना करने पर धारावाही कुण्डली का द्विध्रुव आघूर्ण

$$\vec{p}_m = NIA$$

चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण का S.I. पद्धति में मात्रक "ऐम्पियर मीटर²" (Am^2) होता है।

2.9 कोणीय संवेग और जायरो चुम्बकीय अनुपात (Angular Momentum and Gyromagnetic Ratio)

चित्र 2.10(a) में माना एक इलेक्ट्रॉन नाभिक के चारों ओर वृत्तीय कक्ष में घूम रहा है। माना कक्ष में इसकी प्रति घड़ी की सुई के विपरीत दिशा (Anticlockwise) में है। माना इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान m_e , कक्षा की त्रिज्या r तथा चाल v है अतः इस वृत्तीय कक्ष में घूमते हुए इलेक्ट्रॉन एक वृत्तीय धारा का निर्माण करेगा। चूँकि धारा की दिशा इलेक्ट्रॉन की गति की दिशा के विपरीत होती है, अतः धारा की दिशा घड़ी की सुई की दिशा (Clockwise) होगी।



चित्र क्र. 2.10(a): इलेक्ट्रॉन का कक्षीय द्विध्रुव आघूर्ण

इस धारायुक्त लूप का तुल्य चुम्बकीय आघूर्ण μ_l निम्नानुसार व्यक्त होगा—

$$\mu_l = \text{धारा} \times \text{लूप का क्षेत्रफल} \quad \dots (1)$$

$$\text{पाश का क्षेत्रफल} = r \text{ त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{धारा} &= \frac{\text{आवेश}}{\text{इलेक्ट्रॉन को एक चक्कर घूमने में लगा समय}} \\ &= \frac{-e}{2\pi r / v} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{धारा} = \frac{-ev}{2\pi r} \quad \dots (3)$$

समी. (1) में समी. (2) तथा समी. (3) के मानों को रखने पर,

$$\mu_l = \left(\frac{-ev}{2\pi r} \right) \pi r^2$$

$$\therefore \mu_l = -\frac{evr}{2} \quad \dots (4)$$

इस इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग L

$$L = m_e \vec{r} \times \vec{v} \quad \dots (5)$$

$$\text{या} \quad |L| = m_e vr$$

समी. (4) एवं (5) से,

$$\mu_l = -\left(\frac{e}{2m_e} \right) L \quad \dots (6)$$

सदिश रूप में,

$$\vec{\mu}_l = -\left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L} \quad \dots (7)$$

\vec{L} की दिशा वृत्तीय तल के लम्बरूप तथा ऊपर की ओर होती है, $\vec{\mu}_l$ की दिशा वृत्तीय तल के लम्बरूप तथा नीचे की ओर होती है। क्वाण्टम यांत्रिकी के अनुसार L क्वाण्टीकृत होता है। किसी दिशा में इनके क्वाण्टीकृत मान $L = n \cdot \left(\frac{h}{2\pi} \right)$ द्वारा व्यक्त होता है, इस मान को समी. (6) में रखने पर,

$$\vec{\mu}_l = \frac{e}{2m_e} \cdot n \left(\frac{h}{2\pi} \right) = n \cdot \frac{eh}{4\pi m_e} \quad \dots (8)$$

यदि इलेक्ट्रॉन सुई की दिशा (Clockwise) में गति करे, तो $\vec{\mu}_l$ तथा \vec{L} दोनों की दिशा ऊपर की ओर होगी अर्थात् इस परिस्थिति के लिये (चित्र 10(b)) समीकरण (6) से,

$$\frac{\vec{\mu}_l}{L} = -\left(\frac{e}{2m_e} \right) \quad \dots (9)$$

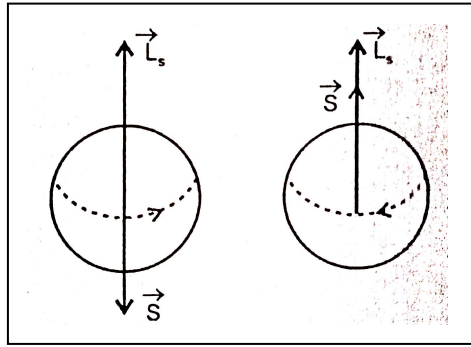
अनुपात $\frac{\mu}{L}$ को कक्षीय गति के लिये जाइरोचुम्बकीय अनुपात (Gyromagnetic ratio) कहा जाता है।

जब कोई आवेशित कण घूर्णन गति करता है, तो उसके गति को एक धारायुक्त लूप के समतुल्य माना जा सकता है जो एक द्विध्रुव की भाँति व्यवहार करता है। इस द्विध्रुव के द्विध्रुव आघूर्ण μ तथा कण के कोणीय संवेग के अनुपात को जायरोचुम्बकीय अनुपात कहते हैं। अतः

$$\text{जायरो मैग्नेटिक अनुपात} = \frac{\mu}{L}$$

पदार्थों के चुम्बकीय गुणों की व्याख्या के लिये जायरोमैग्नेटिक अनुपात का ज्ञान महत्वपूर्ण होता है। परमाणु संरचना के अनुसार परमाणु के नाभिक में प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन होते हैं जबकि इलेक्ट्रॉन विभिन्न कक्षाओं में चक्कर लगाते रहते हैं। इन्हीं इलेक्ट्रॉनों के कक्षीय गति के कारण कक्षीय जायरोचुम्बकीय अनुपात प्राप्त होता है साथ ही इलेक्ट्रॉन में चक्रण गति होती है इससे हमें चक्रण जायरोचुम्बकीय अनुपात प्राप्त होता है।

(ii) इलेक्ट्रॉन का चक्रण द्विध्रुव आघूर्ण (Spin Dipole Moment of Electron) – उहलेनबैक एवं गाउड स्मिट (Uhlenback and Goudsmit) ने सन् 1925 में यह परिकल्पना किया कि इलेक्ट्रॉन कक्षीय गति के साथ-साथ अपने ही अक्ष के परितः घूर्णन गति करता है, इलेक्ट्रॉन का स्वयं के अक्ष के परितः घूर्णन गति को चक्रण (Spin) कहते हैं।



चित्र क्र. 2.10(b) चित्र क्र. 2.10(c)

इस प्रकार चक्रण के कारण इलेक्ट्रॉन का एक कोणीय संवेग तथ इससे सम्बद्ध चुम्बकीय आघूर्ण होगा। क्वाण्टम यान्त्रिकी के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि चक्रण गति के कारण इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग L_s निम्नानुसार व्यक्त होता है—

$$L_s = \frac{h}{4\pi} \quad \dots (1)$$

जहाँ h प्लांक नियतांक है।

टिप्पणी

अतएव इलेक्ट्रॉन का चक्रण के कारण चुम्बकीय आघूर्ण S निम्नानुसार व्यक्त होगा -

टिप्पणी

$$S = \frac{-e}{m_e} \cdot L_s \quad \dots (2)$$

इस समीकरण में L_s का मान समी. (10) से रखने पर,

$$S = \frac{-eh}{4\pi m_e} \quad \dots (3)$$

समी. (11) से,

$$\frac{S}{L_s} = \frac{-e}{m_e} \quad \dots (4)$$

अनुपात $\frac{S}{L_s}$ को चक्रण गति के लिये जाइरोमैग्नेटिक अनुपात कहा जाता है।

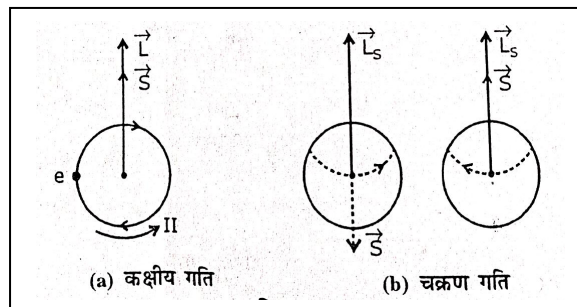
सदिश रूप में समी. (11) को निम्नानुसार व्यक्त करते हैं-

$$\vec{S} = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_s \quad \dots (5)$$

इस समीकरण में ऋण चिह्न यह दर्शाता है कि :

- (i) यदि इलेक्ट्रॉन में चक्रण चित्र 2.10(b) की भाँति हो, तो \vec{L}_s एवं \vec{S} की दिशा परस्पर विपरीत होंगे।
- (ii) यदि इलेक्ट्रॉन में चक्रण चित्र 2.10(c) की भाँति हो, तो \vec{L}_s एवं \vec{S} की दिशा समान होंगे।
- (iii) अतएव चक्रण के दो मान होते हैं : $\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$ या क्वाण्टम संख्या के पद में $\pm \frac{1}{2}$.

माना कि किसी इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति से सम्बद्ध द्विध्रुव आघूर्ण μ_i तथा चक्रण गति से सम्बद्ध द्विध्रुव आघूर्ण μ_s हो, तो इलेक्ट्रॉन से सम्बद्ध कुल द्विध्रुव आघूर्ण



चित्र क्र. 2.10(d)

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_i + \vec{\mu}_s \quad \dots (6)$$

यदि परमाणु का परमाणु क्रमांक Z हो तो जिनसे सम्बद्ध द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \dots, \vec{\mu}_Z$

$$M = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \dots + \vec{\mu}_Z \quad \dots (7)$$

समी (6) व (7) से परमाणवीय द्विध्रुव की अवधारणा को समझाया जा सकता है।

2.10 धारा खण्ड के कारण चुम्बकीय क्षेत्र (बायो-सावर्ट नियम) [The Magnetic Field due to a Current Elements (Biot-Savart Law)]

बायो-सावर्ट के नियम से किसी धारावाही चालक के क्षेत्र में किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता की गणना की जा सकती है।

माना XY एक चालक है जिसमें I ऐम्पियर की स्थायी धारा प्रवाहित हो रही है। माना इस चालक में एक खण्ड δl है।

अतः इस धारावाही चालक में अल्पांश δl द्वारा उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र के किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B —

- (1) चालक में बहने वाली धारा I के समानुपाती होती है—

$$\delta B \propto I$$

- (2) चालक के उस अल्पांश की लम्बाई δl के समानुपाती होता है अर्थात् $\delta B \propto \delta l$

- (3) अल्प खण्ड की लम्बाई तथा अल्पांश को बिन्दु P से मिलाने वाली रेखा के बीच बनने वाले कोण θ की ज्या के समानुपाती होती है

$$\delta B \propto \sin \theta$$

- (4) अल्पांश और बिन्दु P के बीच की दूरी r के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अतः $\delta B \propto \frac{1}{r^2}$

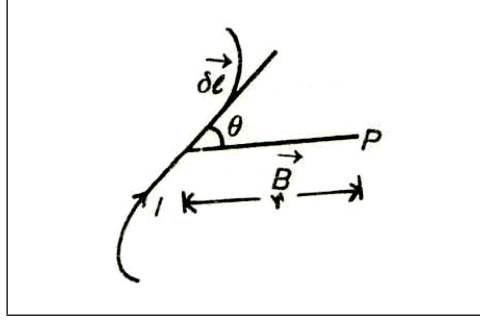
सभी को साथ में लेने पर

$$\therefore \delta B \propto \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2}$$

$$\delta B = K \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2}$$

जहाँ K एक समानुपातिक नियतांक होगा।

टिप्पणी



चित्र क्र. 2.11: बायो सावर्ट नियम

S.I. पद्धति के लिये वायु या निर्वात में

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{ लेते हैं}$$

जहाँ μ_0 वायु या निर्वात की चुम्बकनशीलता है।

$$\therefore \delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2} \text{ वेबर/मीटर}^2 \quad \dots (1)$$

$$\text{या} \quad \delta B = 10^{-7} \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

C.G.S. वि. चुम्बकीय पद्धति में वायु या निर्वात के लिये $K = 1$

$$\delta B = \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2} \text{ गॉस} \quad \dots (2)$$

यदि चालक किसी अन्य माध्यम में स्थित हो जिसकी आपेक्षिक चुम्बकनशीलता μ_r है, तो

$$\delta B = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2} \quad \dots (3)$$

जहाँ $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ माध्यम की निरपेक्ष विद्युतशीलता तथा μ_r विमाहीन राशि है। समीकरण (3) को लाप्लास का नियम भी कहते हैं।

चुम्बकीय प्रेरण δB की दिशा $\delta \vec{l}$ तथा r के तल के लम्बवत् होगी तथा इसका निर्धारण फ्लेमिंग के दायें हाथ के नियम (Right hand rule) से होता है, जिसके अनुसार—

यदि एक धारावाही चालक को दाहिने हाथ में इस प्रकार पकड़े कि अँगूठा विद्युत धारा की दिशा को प्रदर्शित करे तो चालक के ऊपर अँगुलियों का घुमाव (Curling) चुम्बकीय बल रेखाओं की दिशा को प्रदर्शित करता है।

वेक्टर रूप में समीकरण (1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं—

$$\vec{\delta B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{\delta l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \dots (4)$$

स्पष्टतया चुम्बकीय प्रेरण का परिमाण,

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \delta l r \sin \theta}{r^3} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \delta l r \sin \theta}{r^2} \text{ वेबर/मीटर}^2 \quad \dots (5)$$

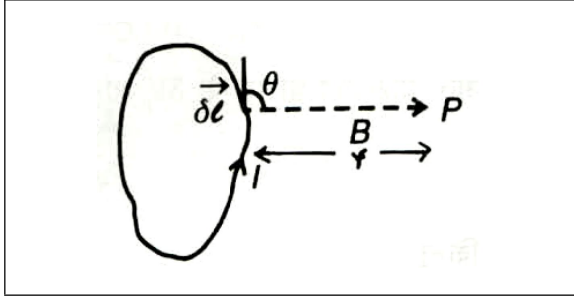
तथा इसकी दिशा वेक्टर $(\vec{\delta l} \times \vec{r})$ की दिशा होगी।

समीकरण (4) को सदिश रूप में समीकरण (5) को अदिश रूप में ऐम्पियर का अथवा लाप्लास का अथवा बायो-सावर्ट का नियम कहलाता है।

P पर परिणामी क्षेत्र समीकरण (5) को समाकलित कर प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात्

$$B = \int \delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{\delta l} \times \vec{r}}{r^3}$$

चित्र 2.12 में धारा के बंद लूप के लिए परिणामी चुम्बकीय प्रेरण



चित्र क्र. 2.12: धारा लूप के लिये चुम्बकीय प्रेरण

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{\delta l} \times \vec{r}}{r^3}$$

जहाँ समाकलन सम्पूर्ण बन्द लूप परिपथ पर होगा।

निर्वात या वायु में

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{\delta l} \times \vec{r}}{r^3}$$

इसे बायो-सावर्ट का नियम कहते हैं।

बायो-सावर्ट नियम की उत्पत्ति

बायो-सावर्ट नियम के अनुसार किसी धारावाही चालक में धारा की दिशा में लिये गये एक सूक्ष्म भाग δl के लिये किसी बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$\vec{\delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{\delta l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \dots (1)$$

टिप्पणी

जहाँ \vec{r} उस धारा के δl भाग से बिन्दु P की ओर खींचा गया वेक्टर है
अतः $\vec{\delta B}$ का परिमाण

$$\vec{\delta B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \delta l \sin \theta}{r^2} \quad \dots (2)$$

जहाँ θ , $\vec{\delta l}$ तथा \vec{r} की दिशाओं के बीच का कोण है :

चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} और चुम्बकीय वेक्टर विभव A में निम्न संबंध होता है :

$$\vec{B} = \text{curl } A$$

तथा $\text{curl } B = \mu_0 J$

$$\therefore \text{curl curl } A = \mu_0 J$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 J$$

$$\begin{aligned} \text{किन्तु } \nabla \times (\nabla \times A) &= \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} \\ &= \text{grad div } A - \nabla^2 A \end{aligned}$$

$$\therefore \text{grad div } A - \nabla^2 A = \mu_0 J$$

किन्तु वेक्टर विभव A इस प्रकार होता है कि उसका डाइवर्जेंस शून्य होता है अर्थात् $\text{div } \vec{A} = 0$

$$0 - \nabla^2 A = \mu_0 J$$

$$\therefore \nabla^2 A = -\mu_0 J$$

स्थिर विद्युत का पॉइसन समीकरण

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ से तुलना करने पर}$$

$$\text{जहाँ } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(xyz)}{r} dV$$

$$\vec{A}(xyz) = \mu_0 \iiint_V \frac{J(xyz)}{r} dV$$

अतः धारावाही चालक के δV आयतन तथा $\vec{\delta l}$ सूक्ष्म भाग के कारण वेक्टर विभव

$$\vec{\delta A} = \frac{\mu_0 J \delta V}{r}$$

किन्तु

$$\delta V = a \delta l$$

$$\delta \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{J} a \delta l}{r}$$

$$(I = Ja)$$

$$\delta \vec{A} = \frac{\mu_0 I \delta l}{r}$$

सूक्ष्म भाग δl के कारण चुम्बकीय क्षेत्र δB

$$\delta B = \text{curl } \delta A$$

$$= \text{curl} \left(\frac{\mu_0 I \delta l}{r} \right)$$

$$= \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I \delta l}{r} \right)$$

$$= -\mu_0 I \delta l \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= -\mu_0 I \delta l \times \left(-\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

$$= \mu_0 I \delta l \times \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

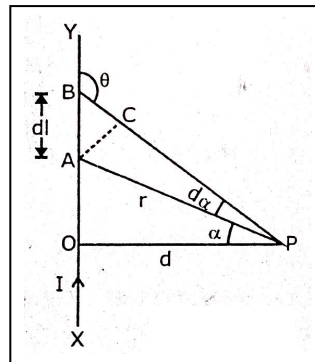
$$\vec{\delta B} = \mu_0 \frac{I \delta l \times \hat{r}}{r^2} \text{ जबकि } \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= \frac{\mu_0 I (\delta \vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$$

यही बायो-सावर्ट का नियम है।

2.10.1 बायो-सावर्ट नियम के अनुप्रयोग (Applications of Bio-Savart's Law)

(i) लम्बे ऋजुरेखीय धारावाही चालक के कारण चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field due to Long Straight Current Carrying Conductor)



चित्र क्र. 2.13(a): लम्बे ऋजुरेखीय धारावाही चालक के कारण चुम्बकीय क्षेत्र

स्थिर चुम्बकत्व

टिप्पणी

टिप्पणी

चित्र 2.13(a) में अनन्त लम्बाई का एक चालक तार XY प्रदर्शित किया गया है जिसमें विद्युत् धारा X से Y की दिशा में प्रवाहित हो रही है। वायु या निर्वात में इस चालक तार से d दूरी पर बिन्दु P है जहाँ पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।

चालक तार के बिन्दु O से x दूरी पर एक छोटा-सा खण्ड (अल्पांश) AB है, जिसकी लम्बाई dl है। बायो-सावर्ट के नियम से dl लम्बाई के अल्पांश AB के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \theta}{r^2} \quad \dots (1)$$

जहाँ $AP = r$ । बिन्दु A से BP पर AC लम्ब डालो। तब समकोण $\triangle ACB$ में,

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{AC}{BC}$$

या $\sin \theta = \frac{AC}{BC}$

$$AC = dl \sin \theta \quad \dots (2)$$

पुनः समकोण $\triangle PCA$ में,

$$\sin d\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{r}$$

$$\therefore AC = r \sin d\alpha$$

यदि $d\alpha$ छोटा हो, तो

$$AC = r \cdot d\alpha \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) और (3) से,

$$r \cdot d\alpha = dl \sin \theta$$

समीकरण (1) में मान रखने पर,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot r \cdot d\alpha}{r^2}$$

या $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot d\alpha \quad \dots (4)$

समकोण $\triangle AOP$ में,

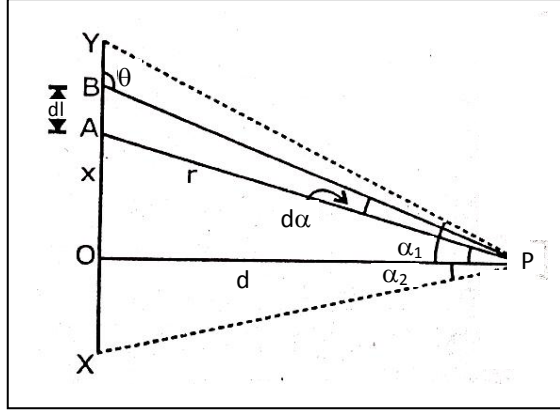
$$\cos \alpha = \frac{OP}{AP} = \frac{d}{r}$$

या $\frac{1}{r} = \frac{\cos \alpha}{d}$

समीकरण (4) में मान रखने पर,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cos \alpha \, d\alpha}{d} \quad \dots (5)$$

समीकरण (5) एक अल्पांश के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता के लिए व्यंजक है। सम्पूर्ण चालक के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करने के लिए PX और PY को मिलाओ। मानलो $\angle OPY = \alpha_1$ तथा $\angle OPX = \alpha_2$



चित्र क्र. 2.13(b): लम्बे ऋजुरेखीय धारावाही चालक के कारण चुम्बकीय क्षेत्र

अतः चालक XY के कारण बिन्दु P पर

चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cos \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} [\sin \alpha]_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} [\sin \alpha_1 - \sin(-\alpha_2)] \end{aligned}$$

या
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) \quad \dots (6)$$

लम्बे ऋजुरेखीय चालक के लिए

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{तथा} \quad \alpha_2 = \frac{-\pi}{2}$$

समीकरण (6) में मान रखने पर,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \left[\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} (1+1)$$

या

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \frac{I}{d} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

टिप्पणी

यही लम्बे ऋजुरेखीय धारावाही चालक के कारण किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता के लिए व्यंजक है।

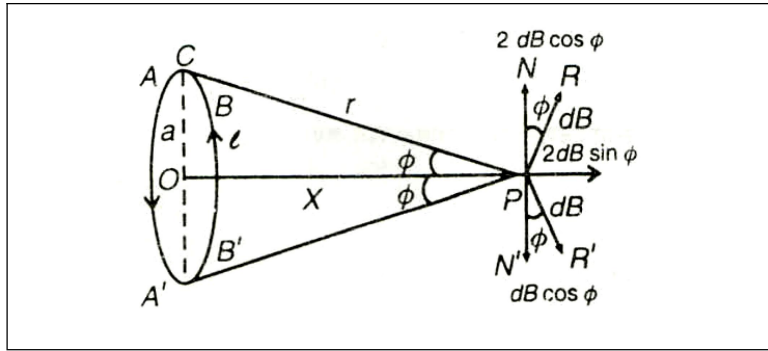
टिप्पणी

C.G.S. पद्धति में $B = \frac{2I}{d}$ गॉस।

चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता की दिशा – दाहिने हाथ के नियम या दाहिने हाथ की हथेली के नियम 1 से चित्र 2.13(a) या चित्र 2.13(b) में प्रदर्शित धारावाही चालक XY के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर होगी।

(2) धारावाही वृत्तीय कुण्डली के अक्ष पर चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field at a Point on the Axis of Circular Current Coil)

माना a त्रिज्या की एक वृत्तीय कुण्डली है जिसमें विद्युत धारा I ऐम्पियर प्रवाहित हो रही है। कुण्डली के अक्ष पर उसके केन्द्र O से x दूरी पर एक बिन्दु P है, जिस पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। माना कुण्डली का तल कागज के तल के लम्बवत् तथा उसका अक्ष OP कागज के तल पर स्थित है।



चित्र क्र. 2.14: धारावाही वृत्तीय कुण्डली का चुम्बकीय क्षेत्र

माना कुण्डली के ठीक ऊपरी सिरे पर dl लम्बाई का एक अल्पांश AB है। इस अल्पांश से बिन्दु P की दूरी r है।

अतः इस अल्पांश AB के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin \phi}{r^2}$$

जहाँ ϕ अल्पांश AB और अल्पांश को बिन्दु P से मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण है। स्पष्ट है कि $\phi = 90^\circ$

$$\therefore dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot dl \cdot \sin 90^\circ}{r^2}$$

$$\text{या } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \quad \dots (1)$$

इस क्षेत्र dB की दिशा अल्पांश AB और अल्पांश को बिन्दु P से मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् तल में PR के अनुदिश होगी।

माना $\angle CPO = \phi$

dB को दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है—

- (i) $dB \sin \phi$ अक्ष OP के अनुदिश
- (ii) $dB \cos \phi$ अक्ष OP के लम्बवत् PN दिशा में।

यदि कुण्डली के ठीक निचले सिरे पर उतनी ही लम्बाई dl का एक दूसरा अल्पांश $A'B'$ लें, तो इस अल्पांश के कारण भी बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \text{ होगी।}$$

किन्तु अब इसकी दिशा PR' के अनुदिश होगी।

dB को पुनः दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है—

- (i) $dB \sin \phi$ अक्ष OP के अनुदिश
- (ii) $dB \cos \phi$ अक्ष OP के लम्बवत् PN' दिशा में।

चूँकि PN और PN' एक-दूसरे के विपरीत हैं, अब OP के लम्बवत् घटक एक-दूसरे को निरस्त कर देते हैं। स्पष्ट है कि वृत्तीय कुण्डली के सभी अल्पांशों के कारण जो घटक अक्ष OP के लम्बवत् होंगे, एक-दूसरे को निरस्त कर देंगे। किन्तु अक्ष OP के अनुदिश सभी घटक आपस में जुड़ जायेंगे।

अतः वृत्तीय कुण्डली के कारण बिन्दु P पर अक्ष के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$B = \Sigma dB \sin \phi$$

$$\text{या } B = \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \sin \phi \quad \dots (2)$$

$$\text{परन्तु } \sin \phi = \frac{a}{r}$$

समीकरण (2) में मान रखने पर,

$$B = \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \frac{a}{r}$$

$$\text{या } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \Sigma \frac{Idla}{r^3} \quad \dots (3)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} \Sigma dl$$

किन्तु $\Sigma dl = 2\pi a =$ कुण्डली की परिधि

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ia}{r^3} 2\pi a$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\text{अतः} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi I a^2}{r^3} \quad \dots (4)$$

समकोण ΔCOP में

$$r^2 = a^2 + x^2$$

$$\text{या} \quad r = (a^2 + x^2)^{1/2}$$

$$\therefore r^3 = (a^2 + x^2)^{3/2}$$

अतः समीकरण (4) में मान रखने पर

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi a^2 I}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots (5)$$

अब यदि कुण्डली में फेरों की संख्या n हो तो समीकरण (5) को निम्नानुसार लिखा जा सकता है :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi n I a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = 10^{-7} \frac{2\pi n I a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots (6)$$

यही धारावाही वृत्तीय कुण्डली के अक्ष के किसी बिन्दु पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक है।

वृत्तीय कुण्डली के केन्द्र पर तीव्रता – चूँकि केन्द्र पर $x = 0$ अतः समीकरण (5) से

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{a}$$

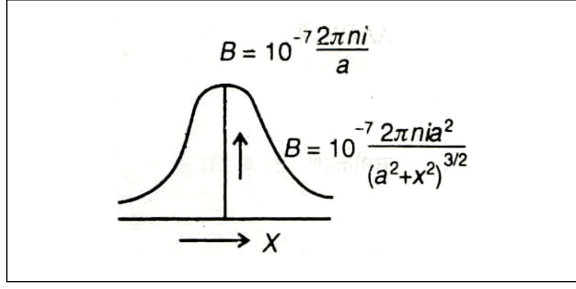
तथा यदि कुण्डली में फेरों की संख्या n हो, तो

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi n I}{a}$$

$$B = 10^{-7} \frac{2\pi n I}{a} \text{ वेबर/मीटर}^2 \quad \dots (7)$$

यही धारावाही कुण्डली के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

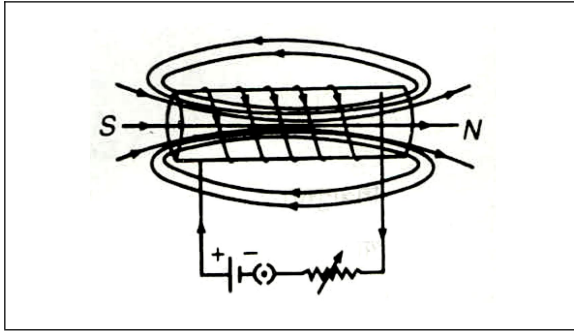
समीकरण (7) चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का अधिकतम मान प्रदर्शित करता है। समीकरण (6) से स्पष्ट है कि x का मान बढ़ने पर B का मान घटने लगता है। $x = \infty$ के लिये $B = 0$ हो जाता है। चित्र 2.15 में कुण्डली के केन्द्र से दूरी x के साथ चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता में परिवर्तन प्रदर्शित किया गया है।



चित्र क्र. 2.15: कुण्डली के केन्द्र से दूरी के साथ चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता में परिवर्तन

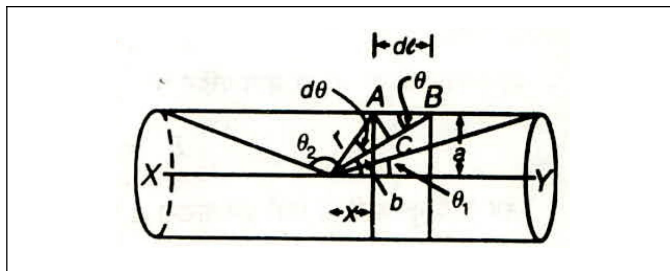
(3) धारावाही परिनालिका का चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field of Solenoid Carrying Current)

विद्युतरोधी ताँबे की बनी लम्बी बेलनाकार कुण्डली को परिनालिका कहते हैं। आदर्श परिनालिका की लम्बाई उसकी त्रिज्या से अधिक होती है। माना XY एक परिनालिका है। इसकी त्रिज्या a तथा प्रति एकांक लम्बाई पर फेरों की संख्या n है। माना परिनालिका में विद्युत धारा I प्रवाहित की जा रही है। धारावाही परिनालिका एक दण्ड चुम्बक की भाँति व्यवहार करती है। जब परिनालिका में धारा प्रवाहित की जाती है तो उसके अन्दर व बाहर चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है तथा परिनालिका के भीतर चुम्बकीय क्षेत्र समान रहता है तथा इसके अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



चित्र क्र. 2.16: परिनालिका के भीतर चुम्बकीय क्षेत्र

माना परिनालिका की सम्पूर्ण लम्बाई को अनेक अल्पांशों में विभक्त किया गया है। माना बिन्दु P से x दूरी पर dl लम्बाई का एक अल्पांश AB है।



चित्र क्र. 2.17: धारावाही परिनालिका के लिये चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

टिप्पणी

इस अल्पांश में फेरों की संख्या = $n\delta l$

अतः अल्पांश AB , $n\delta l$ फेरों वाली एक कुण्डली की भाँति है।

टिप्पणी

∴ इस अल्पांश के कारण अक्ष पर स्थित बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi(n\delta l)Ia^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \dots (1)$$

चित्रानुसार माना

$$\angle BPY = \theta = \angle PBA$$

अतः $\sin \theta = \frac{AC}{AB}$

∴ $AC = AB \sin \theta$

या $AC = \delta l \sin \theta \quad \dots (2)$

ΔAPC

$$\delta \theta = \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{r}, \quad \dots (3)$$

$$AC = r\delta \theta$$

समीकरण (2) व (3) से

$$\delta l \sin \theta = r\delta \theta$$

∴ $\delta l = \frac{r\delta \theta}{\sin \theta}$

चूँकि $r^2 = a^2 + x^2$

अतः समीकरण (1) से

$$\begin{aligned} \delta B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi n r \delta \theta}{\sin \theta r^3} I a^2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi n I a^2 \delta \theta}{r^2 \sin \theta} \end{aligned}$$

चित्रानुसार $\sin \theta = \frac{a}{r}$

या $a = r \sin \theta$

$$\begin{aligned} \therefore \delta B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi n I r^2 \sin^2 \theta \delta \theta}{r^2 \sin \theta} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

अतः सम्पूर्ण परिनालिका के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

स्थिर चुम्बकत्व

$$\begin{aligned}
 B &= \int_N^M \delta B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I [-\cos \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I [\cos \theta_1 - \cos \theta_2] \text{ वेबर/मीटर}^2
 \end{aligned}$$

यह परिनालिका के अन्दर किसी बिन्दु P पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र है।

विशेष स्थिति-

(1) यदि P परिनालिका के एक सिरे पर स्थित हो-इस स्थिति में $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$

\therefore चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

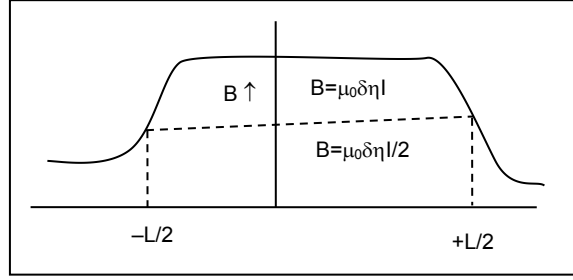
$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I \\
 &= \frac{\mu_0 n I}{2} \text{ वेबर/मीटर}^2
 \end{aligned}$$

(2) यदि परिनालिका की लम्बाई उसकी त्रिज्या की तुलना में अधिक हो तथा बिन्दु परिनालिका के केन्द्र पर हो $\theta_1 = 0^\circ$ तथा $\theta_2 = 180^\circ$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi n I [\cos 0^\circ - \cos \pi] \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 4\pi n I \\
 &= \mu_0 n I
 \end{aligned}$$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता परिनालिका की लम्बाई तथा इसके परिच्छेद क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं है इसका मान वृत्तीय कुण्डली परिनालिका में धारा बढ़ाकर व फेरों की संख्या बढ़ाकर बढ़ाया जा सकता है। चित्र 2.17(b) में परिनालिका के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का उसकी अक्ष पर स्थित बिन्दु की दूरी के साथ परिवर्तन प्रदर्शित हैं।

टिप्पणी



चित्र क्र. 2.17(b): परिनलिका के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की दूरी के साथ परिवर्तन

2.11 चुम्बकीय प्रेरण का रैखिक समाकल : परिक्रमी रूप में ऐम्पियर का नियम (Line Integral of Magnetic Induction : Ampere's Law in Circuital Form)

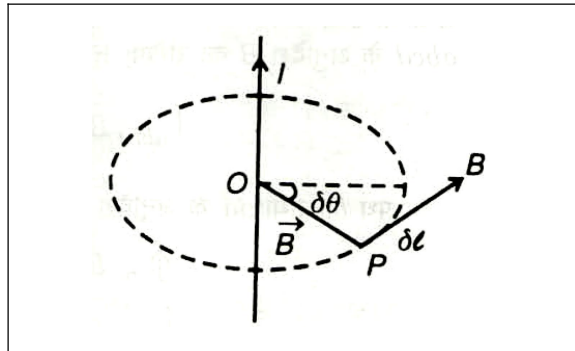
ऐम्पियर का नियम चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} तथा धारा I में परिणात्मक सम्बन्ध प्रदर्शित करता है। ऐम्पियर के नियमानुसार किसी बिन्दु वक्र C के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} का रेखीय समाकलन उस वक्र C के अन्दर निहित धाराओं के बीजीय योग का μ_0 गुना होता है अर्थात् गणितीय रूप से

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

जहाँ μ_0 निर्वात (अथवा वायु) की चुम्बकनशीलता है यदि बन्द वक्र में कुल धारा शून्य होती है तो उस वक्र के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} का रेखीय समाकलन शून्य होता है

$$\oint B dl = 0$$

माना B प्रेरण का चुम्बकीय क्षेत्र एक लम्बे तार में बहने वाली I ऐम्पियर की धारा के कारण उत्पन्न होता है। माना इस धारावाही तार पर केन्द्रित r त्रिज्या का एक वृत्ताकार पथ लिया गया है।



चित्र क्र. 2.18: ऐम्पियर का नियम

वृत्ताकार पथ के किसी बिन्दु P पर चुम्बकीय प्रेरण का परिणाम

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \dots (1)$$

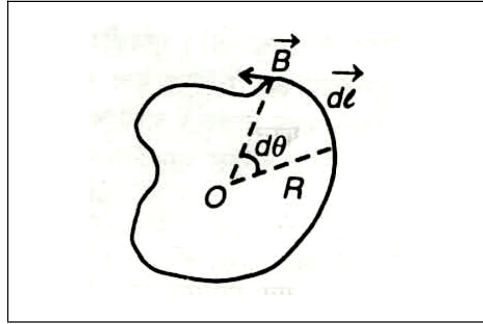
वृत्ताकार पथ के समस्त बिन्दुओं के लिए चुम्बकीय प्रेरण का परिणाम समीकरण (1) से निरूपित होगा। अतः धारावाही तार पर केन्द्रित वृत्ताकार पथ के चारों ओर चुम्बकीय प्रेरण B का रैखिक समाकल होगा :

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint \vec{B} dl = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\theta \quad (\because dl = r d\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 2\pi = \mu_0 I \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \dots (2)$$

इस समाकल का चिह्न वलयित धारा (Encircled current) की दिशा पर निर्भर करता है। यदि रैखिक समाकल के लिए पथ B के समान्तर हो तो यह चिह्न धन होगा तथा यदि प्रति-समान्तर हो तो ऋण होगा।

यदि धारा को परिवर्द्ध करने वाला पथ वृत्ताकार के स्थान पर किसी अनियमित आकार का हो तो इस पथ को बड़ी संख्या में सूक्ष्म खण्डों में विभाजित किया जा सकता है। माना पथ का एक सूक्ष्म खण्ड dl है तथा त्रिज्या R है।



चित्र क्र. 2.19(a): ऐम्पियर का नियम

तब इस सूक्ष्म खण्ड के लिए \vec{B} तथा $d\vec{l}$ एक ही रेखा के अनुदिश होंगे, अर्थात्

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot R d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta \quad \dots (3)$$

यह खण्ड की धारा से दूरी R से स्वतन्त्र है।

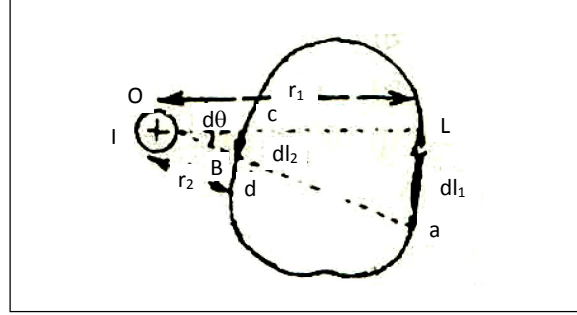
$\therefore B$ का सम्पूर्ण पथ के अनुदिश रैखिक समाकलन

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 2\pi = \mu_0 I \quad \dots (4)$$

यह समीकरण प्रदर्शित करता है कि ऐम्पियर का नियम किसी भी आकृति के बन्द पथ के लिए सत्य होता है।

टिप्पणी

जब पथ धारा को परिबद्ध नहीं करता – माना विद्युत धारा I तथा उसके निकटवर्ती एक बन्द पथ है जो धारा को परिबद्ध नहीं करता। पथ को पुनः सूक्ष्म खण्डों में विभाजित किया जा सकता है।



चित्र क्र. 2.19(b): ऐम्पियर का नियम

माना Oa तथा Ob दो रेखाएँ हैं जिनके बीच $d\theta$ कोण अन्तरित है तथा वे पथ से चाप ab तथा cd काटती हैं। अतः पथ $abcd$ के अनुदिश B का रैखिक समाकल

$$\int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

पथ bc तथा da के अनुदिश dl तथा B के बीच कोण 90° है, अतः

$$\oint_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{da} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\therefore \int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

पथ $ab = dl_1$ तथा $cd = dl_2$ को त्रिज्यीय तथा स्पर्शीय दिशाओं में वियोजित करने पर स्पष्ट है कि $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ का मान त्रिज्यीय दिशा में शून्य होगा जबकि स्पर्शीय घटकों के कारण कुछ मान अवश्य होगा।

$$\therefore \int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{ab} B_1 dl_1 \cos 0^\circ + \int_{cd} B_2 \cdot dl_2 \cos \pi$$

$$\text{परन्तु } B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \text{ तथा } B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{ab} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} dl_1 - \int_{cd} \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} dl_2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{ab}{r_1} - \frac{cd}{r_2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{परन्तु } \frac{ab}{r_1} = \frac{cd}{r_2} = d\theta$$

$$\therefore \int_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

अतः ऐम्पियर की प्रमेय का संक्षिप्त रूप निम्न होगा—

स्थिर चुम्बकत्व

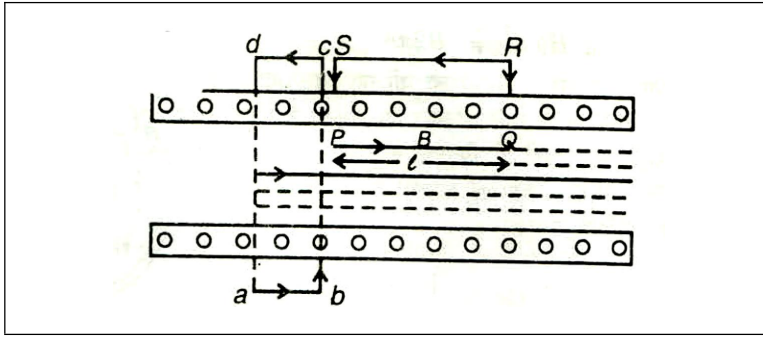
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \mu_0 I, & \text{यदि पथ धारा को परिबद्ध करे} \\ 0, & \text{यदि पथ किसी धारा को परिबद्ध न करे} \end{cases}$$

टिप्पणी

विशेष स्थितियाँ

(i) एक लम्बी परिनालिका के भीतर चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic field inside a long solenoid) – माना एक सममित लम्बी परिनालिका है जिसकी प्रति एकांक लम्बाई में फेरों की संख्या n है।

माना परिनालिका में प्रवाहित धारा का मान I है। अतः दार्ये हाथ के नियम से, चुम्बकीय क्षेत्र परिनालिका की अक्ष के समान्तर होगा।



चित्र क्र. 2.20: धारावाही परिनालिका

परिनालिका के बाहर क्षेत्र (Field outside the Solenoid) – माना एक बन्द पथ $abcd$ है। इस पथ पर ऐम्पियर के नियम के अनुसार

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \times 0$$

(क्योंकि पथ द्वारा परिबद्ध धारा का मान शून्य है)

चूँकि $dl \neq 0 \therefore B = 0$

इसका तात्पर्य है कि परिनालिका के बाहर चुम्बकीय क्षेत्र का मान शून्य होता है।

परिनालिका के भीतर क्षेत्र (Field inside the Solenoid) – माना $pqrs$ एक बन्द परिपथ है। पथ $pqrs$ के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र B का रैखिक समाकल

$$\oint_{pqrs} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{pq} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{qr} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{rs} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{sp} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

... (1)

पथ pq के लिए, B तथा $d\vec{l}$ एक ही दिशा में होंगे,

$$\therefore \int_{pq} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl \quad (pq = l, \text{ माना})$$

टिप्पणी

पथों qr तथा sp के लिए B तथा dl परस्पर लम्बवत् हैं।

$$\therefore \oint_{qr} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{sp} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int B dl \cos 90^\circ = 0$$

पथ rs के लिए $B = 0$ (चूँकि परिनालिका के बाहर चुम्बकीय क्षेत्र का मान शून्य है)

$$\therefore \oint_{rs} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

अतः समीकरण (1) से

$$\oint_{pqrs} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{pq} \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl \quad \dots (2)$$

ऐम्पियर के नियम से $\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times$ पथ द्वारा परिबद्ध कुल धारा

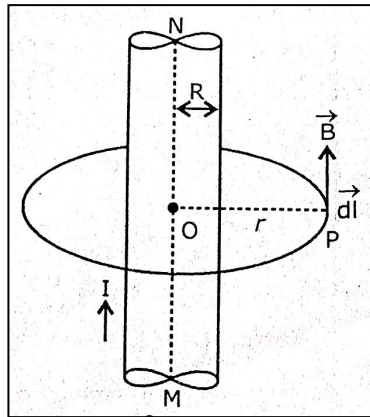
$$\therefore Bl = \mu_0(nI)$$

$$\therefore B = \mu_0 nI$$

यही अभीष्ट परिणाम है।

(ii) लम्बे बेलनाकार धारावाही चालक के कारण चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field Due to Long Cylindrical Current Carrying Conductor) – चित्र 2.21(a) के अनुसार माना कि R त्रिज्या के बेलनाकार चालक में प्रवाहित धारा I है तो इसके कारण किसी बिन्दु P पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B का मान ज्ञात करना है। जबकि बिन्दु P

- (a) चालक के अन्दर हो।
- (b) चालक के पृष्ठ पर हो।
- (c) चालक के बाहर हो।



चित्र क्र. 2.21(a)

माना कि बिन्दु O से P की दूरी r है तो $OP = r$ त्रिज्या के वृत्तीय पथ के लिये चुम्बकीय क्षेत्र B का रेखीय समाकलन

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times \text{वृत्त के अन्दर प्रवाहित धारा} \quad \dots (9)$$

अतः विभिन्न स्थितियों में तीव्रता निम्नानुसार प्राप्त होंगे—

(a) **चलक के अन्दर** : चालक के अन्दर बिन्दु P के लिये

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times \frac{I\pi r^2}{\pi R^2}$$

या $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$

या $B = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \quad \dots (10)$

(b) **बेलन के पृष्ठ पर** : इस स्थिति में $r = R$ होता है।

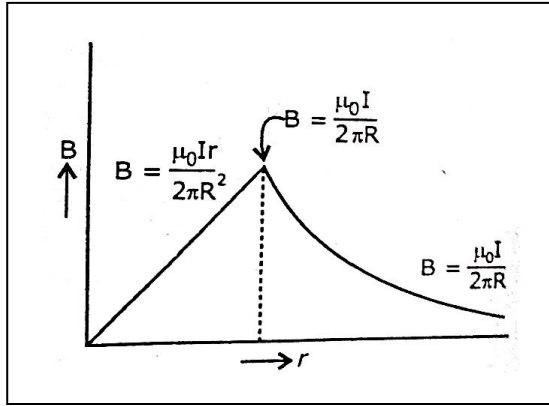
$\therefore B \cdot 2\pi R = \mu_0 I$

या $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \dots (11)$

(c) **बेलन के बाहर** : इस स्थिति में,

$B \cdot 2\pi R = \mu_0 I$

या $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \dots (12)$



चित्र क्र. 2.21(b)

अतः धारावाही बेलनाकार चालक के कारण किसी बिन्दु पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र का दूरी के साथ वितरण चित्र 2.21(b) के अनुसार होती है।

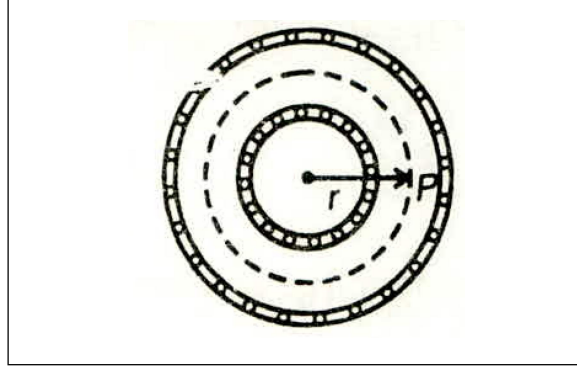
(iii) **एंकर वलय या एक टोरोइड (अन्तहीन परिनालिका) के कारण चुम्बकीय क्षेत्र [Magnetic field due to a toroid (endless solenoid)]** — माना एक एंकर वलय (टोरोइड) अर्थात् एक परिनालिका एक वृत्त के रूप में है जिसके सिरे जुड़े हैं। माना इसमें एक धारा I_0 प्रवाहित हो रही है सममिति से, चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा उस वृत्ताकार पथ के किसी बिन्दु पर स्पर्शरेखीय दिशा में होगी, जिसका केन्द्र टोरोइड के केन्द्र पर है। माना बिन्दु P , जिस पर चुम्बकीय

टिप्पणी

क्षेत्र का मान ज्ञात करना है, से इस चुम्बकीय क्षेत्र का r त्रिज्या का एक वृत्ताकार पथ लिया गया है। हमें ज्ञात है कि इस वृत्ताकार पथ के अनुदिश $\oint B \cdot d\vec{l}$ का मान होगा।

$$\oint B \cdot d\vec{l} = B2\pi r$$

यदि टोरोइड में फेरों की संख्या n हो तो परिबद्ध धारा का मान $I = nI_0$ होगा।



चित्र क्र. 2.22: एंकर वलय

अतः ऐम्पियर की प्रमेय से

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I,$$

अर्थात् $B \cdot 2\pi r = \mu_0 n I_0$

अथवा $B = \frac{\mu_0}{2\pi} n \frac{I_0}{r}$

अतः चुम्बकीय क्षेत्र B किसी बिन्दु की केन्द्र से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यह परिनालिका की स्थिति से भिन्न है, B सम्पूर्ण अनुप्रस्थ परिच्छेद पर स्थिर होता है।

आंतरिक पृष्ठ पर अर्थात् ($r = r_1$)

अतः $B = \frac{\mu_0 n I_0}{2\pi r_1}$

बाह्य पृष्ठ पर अर्थात् ($r = r_2$)

अतः $B = \frac{\mu_0 n I_0}{2\pi r_2}$

बाह्य पृष्ठ के बाहर अर्थात् ($r > r_2$)

अतः $B = 0$

2.12 अवकल रूप में चुम्बकीय स्थितिकी के मूल नियम (Basic Law of Magnetostatics In Differential Form)

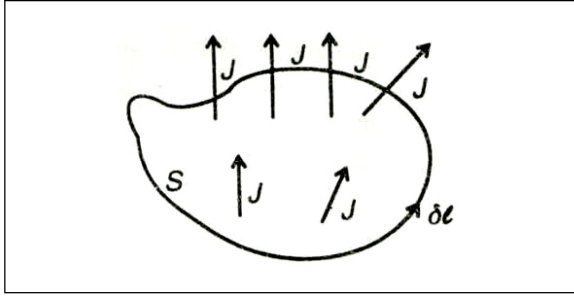
टिप्पणी

स्थैत चुम्बकत्व के दो मूल नियम हैं

- (1) $\text{div} \vec{B} = 0$ था $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (गॉस का प्रमेय)
- (2) $\text{curl} B = \mu_0 \vec{J}$ या $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (ऐम्पियर नियम)

माना एक क्षेत्र, जिसमें आवेश का प्रवाह स्थायी है। इस क्षेत्र में धारा घनत्व J का मान स्थिर रहेगा अर्थात् धारा घनत्व J का मान समय के सापेक्ष परिवर्तित नहीं होगा, परन्तु इसका मान स्थान के सापेक्ष परिवर्तित हो सकता है।

माना इस क्षेत्र में चित्र 2.23 में प्रदर्शित एक बन्द पथ है। इस पथ से परिबद्ध कुल धारा इस बन्द पथ से परिबद्ध पृष्ठ से होकर धारा घनत्व के फ्लक्स के बराबर होगी अर्थात् इस पथ द्वारा परिबद्ध कुल धारा का मान होगा।



चित्र क्र. 2.23: धारा का आयतन वितरण

$$I = \iint_S J \cdot dS \quad \dots (3)$$

जहाँ, dS बन्द पथ के भीतर धारा घनत्व J के बिन्दु पर एक सूक्ष्म क्षेत्रफल है।

अब ऐम्पियर, के नियम के परिक्रमी रूप से, बन्द पथ के चारों ओर चुम्बकीय प्रेरण B का रैखिक समाकल उस वक्र के अन्दर निहित धाराओं के योग का μ_0 गुना होता है।

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times \text{पथ द्वारा परिबद्ध धारा} = \mu_0 I$$

समीकरण (3) से

$$\oint B dl = \mu_0 \iint_S J \cdot dS \quad \dots (4)$$

परन्तु स्टोक्स की प्रमेय से

$$\oint B \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{curl} B \cdot dS \quad \dots (5)$$

समीकरण (4) और (5) की तुलना करने पर

$$\iint_S \text{curl } B \cdot dS = \mu_0 \iint_S J \cdot dS$$

अथवा $\iint_S (\text{curl } B - \mu_0 J) \cdot dS = 0$

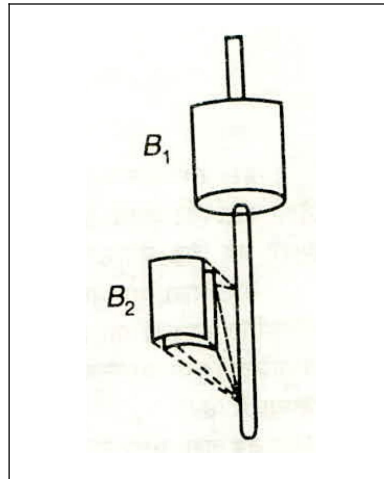
चूँकि पृष्ठ स्वेच्छ (Arbitrary) है, अतः

$$\text{curl } B - \mu_0 J = 0$$

अथवा $\text{curl } B = \mu_0 J$... (4)

यह सम्बन्ध प्रदर्शित करता है कि किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र का कर्ल उस बिन्दु पर धारा घनत्व का μ_0 गुना होता है।

(1) चुम्बकीय स्थैतिकी के लिये अवकल रूप में गॉस प्रमेय (Differential Form of Theorem for Magnetostatic) – माना एक सीधे तार में I धारा प्रवाहित हो रही है। माना इसके क्षेत्र में B_1 तथा B_2 दो इस प्रकार के पृष्ठ हैं कि B_1 तार को परिबद्ध करता है जबकि B_2 इसके बाहर है (चित्र 2.24)। चुम्बकीय बल रेखायें सदैव बन्द वक्र बनाती हैं अतः किसी चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित बन्द सतह में प्रवेश करने वाली बल रेखाओं की संख्या उससे बाहर निकलने वाली बल रेखाओं की संख्या के बराबर होगी अतः किसी बन्द सतह में कुल चुम्बकीय फ्लक्स शून्य होता है। अर्थात्



चित्र क्र. 2.24: सीधे तार द्वारा उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र

$$\iint_S B \cdot dS = 0 \quad \dots (1)$$

अतः गॉस की डाइवर्जेंस प्रमेय से

$$\iint_S B \cdot dS = \iiint_V \text{div } B \, dV$$

$$\therefore \iiint_V \text{div } B \, dV = 0$$

चूँकि आयतन स्वेच्छ है, अतः

$$\operatorname{div} B = 0 \text{ (प्रत्येक स्थान पर)} \quad \dots (2)$$

या $\nabla \cdot B = 0$ या $\operatorname{div} B = 0$

यह दोनों नियम चुम्बकीय स्थैतिकी के लिये गॉस का प्रमेय है

$$(1) \quad \operatorname{div} B = 0$$

या $\nabla \cdot B = 0$

$$(2) \quad \operatorname{Curl} B = \mu_0 J$$

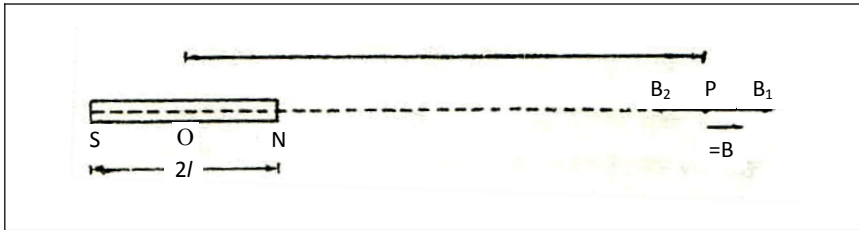
या $\nabla \times B = \mu_0 J$

चुम्बकीय स्थैतिकी के मूल नियम भी कहलाते हैं।

टिप्पणी

2.13 चुम्बकीय द्विध्रुव की अनुदैर्घ्य दिशा (या अक्षीय स्थिति) में चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field in End on Position of Magnetic Dipole)

चित्र 2.25 में एक चुम्बकीय द्विध्रुव NS है जिसकी ध्रुव प्रबलता m , प्रभावकारी लम्बाई $2l$ तथा चुम्बकीय आघूर्ण $M = m \times 2l$ है। इसके अक्ष पर एक बिन्दु P , मध्य बिन्दु O से दूरी r पर स्थित है जहाँ हमें चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



चित्र क्र. 2.25: चुम्बकीय द्विध्रुव की अनुदैर्घ्य (या अक्षीय) स्थिति में चुम्बकीय क्षेत्र

माना बिन्दु P पर एक एकांक उत्तरी ध्रुव N के कारण लगने वाला बल (अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{NP^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{(r-l)^2} (\vec{NP} \text{ दिशा में})$$

तथा द्विध्रुव के दक्षिणी ध्रुव S के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{SP^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{(r+l)^2} (\vec{PS} \text{ दिशा में})$$

उपर्युक्त समीकरणों से स्पष्ट है द्विध्रुव के उत्तरी तथा दक्षिणी ध्रुवों द्वारा P पर चुम्बकीय क्षेत्र क्रमशः \vec{B}_1 व \vec{B}_2 परस्पर विपरीत दिशाओं में हैं तथा चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}_1 का परिमाण, चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}_2 के परिमाण की अपेक्षा अधिक है। अतः बिन्दु P पर परिणामी चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता $= (B_1 - B_2)$ । अतः चुम्बकीय द्विध्रुव NS के कारण बिन्दु P पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \left[\frac{m}{(r-l)^2} - \frac{m}{(r+l)^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{4mlr}{(r^2 - l^2)^2} \quad (\overrightarrow{NP} \text{ या } \overrightarrow{OP} \text{ दिशा में})\end{aligned}$$

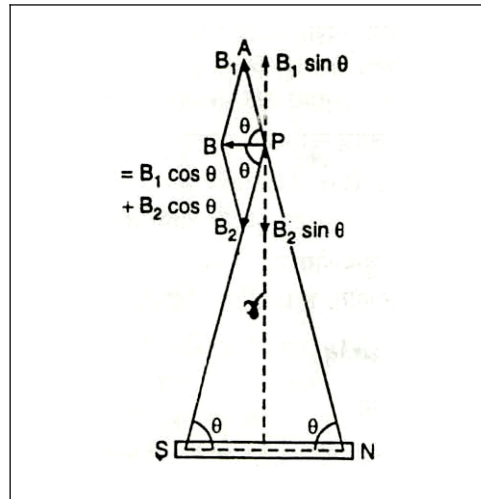
किन्तु द्विध्रुव का चुम्बकीय आघूर्ण $M = 2ml$ तथा $l \ll r$ अतः

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2M}{r^3} \quad \dots (1)$$

चुम्बकीय क्षेत्र B की दिशा, द्विध्रुव की अक्ष के समान्तर द्विध्रुव के दक्षिणी ध्रुव S की ओर अथवा उत्तरी ध्रुव N से दूर की ओर होती है।

2.14 चुम्बकीय द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति (या अनुप्रस्थ दिशा) में चुम्बकीय क्षेत्र (Magnetic Field in Broad Side on Position or Magnetic Dipole)

चित्र 2.26 में एक चुम्बकीय द्विध्रुव NS है जिसकी ध्रुव प्रबलता m , प्रभावकारी लम्बाई $2l$ तथा चुम्बकीय आघूर्ण $M = m \times 2l$ है। इसकी अक्ष NS का लम्ब समद्विभाजक, अक्ष के मध्य बिन्दु O पर अभिलम्ब OP है। रेखा OP को द्विध्रुव की निरक्षीय अथवा अनुप्रस्थ रेखा कहते हैं। माना कि इस निरक्षीय रेखा पर कोई बिन्दु P , द्विध्रुव के मध्य बिन्दु O से दूरी r पर स्थित है जहाँ हमें चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। माना बिन्दु P पर एकांक उत्तरी ध्रुव रखा है।



चित्र क्र. 2.26: चुम्बकीय द्विध्रुव की निरक्षीय स्थिति में चुम्बकीय क्षेत्र

द्विध्रुव के उत्तरी ध्रुव N के कारण बिन्दु P पर रखे एकांक उत्तरी ध्रुव पर लगने वाला बल (अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{m}{NP^2} (\vec{NP} \text{ दिशा में})$$

तथा द्विध्रुव के दक्षिणी ध्रुव S के कारण बिन्दु P पर एकांक उत्तरी ध्रुव पर लगने वाला बल (अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता)

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{m}{SP^2} (\vec{PS} \text{ दिशा में})$$

चित्र 2.26 से स्पष्ट है कि $NP = SP$, अतः इन दोनों चुम्बकीय क्षेत्रों के परिमाण बराबर हैं, (अर्थात् $B_1 = B_2$) तथा दिशाएँ क्रमशः \vec{NP} (या \vec{PA}) तथा \vec{PS} है। यदि $\angle PNS = \theta$

$$\text{तब } \angle PNS = \angle BPA = \angle BPS = \theta$$

अब बिन्दु P पर परिणामी चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करने के लिये प्रत्येक चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}_1 व \vec{B}_2 को क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित करते हैं। चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}_1 का ऊर्ध्वाधर घटक $= B_1 \sin \theta$ (\vec{OP} दिशा में) तथा क्षैतिज घटक $B_1 \cos \theta$ (\vec{PB} दिशा में) होगा। इसी प्रकार, चुम्बकीय क्षेत्र B_2 का ऊर्ध्वाधर घटक $B_2 \sin \theta$ (\vec{PO} दिशा में) तथा क्षैतिज घटक $= B_2 \cos \theta$ (PB दिशा में) होगा।

$B_1 \sin \theta = B_2 \sin \theta$, अतः ऊर्ध्वाधर घटक एक दूसरे की विपरीत दिशा में होने से एक-दूसरे के परिणाम को निष्फल कर देते हैं तथा क्षैतिज घटक $B_1 \cos \theta$ और $B_2 \cos \theta$ एक ही दिशा (\vec{PB} दिशा) में होने से परस्पर जुड़ जाते हैं। अतः बिन्दु P पर परिणामी चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$\vec{B} = B_1 \cos \theta + B_2 \cos \theta$$

$$\text{या } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \left[\frac{m}{NP^2} \cos \theta + \frac{m}{SP^2} \cos \theta \right]$$

$$\text{लेकिन } NP = SP = \sqrt{r^2 + l^2}, \cos \theta = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}} \text{ तथा } l \ll r$$

$$\text{अतः } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2ml}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{(r^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M}{r^3}$$

... (2)

इस चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा द्विध्रुव अक्ष से समान्तर उत्तरी ध्रुव N से दक्षिणी ध्रुव S की ओर है। समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि यदि दूरी r समान रखी जाये तो एक चुम्बकीय द्विध्रुव की अनुदैर्घ्य (या अक्षीय) दिशा में स्थित किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता, द्विध्रुव की अनुप्रस्थ (या निरक्षीय) दिशा में स्थित बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता की लगभग दोगुनी होती है। अक्षीय स्थिति में

टिप्पणी

चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा चुम्बक की अक्ष के अनुदिश दक्षिणी ध्रुव से उत्तरी ध्रुव की ओर होती है, जबकि निरक्षीय स्थिति में चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा चुम्बक के अक्ष के समान्तर उत्तरी ध्रुव से दक्षिणी ध्रुव की ओर होती है।

2.15 चुम्बकीय क्षेत्र H चुम्बकीय क्षेत्र B व चुम्बकन वेक्टर M त्रिसदिश की विवेचना (Discussion Triple Vector – Magnetic Field H , Magnetic Field B and Magnetisation Vector M)

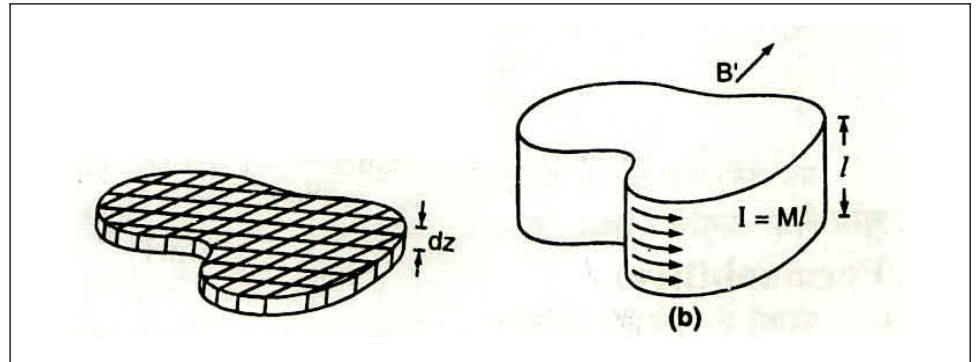
किसी चुम्बकित पदार्थ के गुणों की व्याख्या के लिये अग्रलिखित दो धारायें प्रमुख हैं –

(1) स्वतंत्र अथवा चालान धारायें – ये धारायें जिनके प्रवाह को प्रारंभ किया जा सकता है अथवा रोका जा सकता है। जिसे अमीटर द्वारा नापा जा सकता है स्वतंत्र धारायें अथवा चालान धारायें कहलाती हैं।

(2) बद्ध धारायें – वे धारायें जो पदार्थ के परमाणु में इलेक्ट्रॉन की चक्रण एवं कक्षीय गति के कारण उत्पन्न होती हैं बद्ध धारायें कहलाती हैं।

चुम्बकन वेक्टर M एवं चुम्बकन धारा I_s

एकसमान चुम्बकित पदार्थ के एकांक आयतन में निहित चुम्बकीय आघूर्ण को चुम्बकन वेक्टर अथवा चुम्बकन तीव्रता कहते हैं। इसे M से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक एम्पियर/मीटर है सदिश M बद्ध धाराओं से उत्पन्न होते हैं अर्थात् M का स्रोत बद्ध धारा है।



चित्र क्र. 2.27: एकसमान चुम्बकीय पदार्थ की पतली चादर

माना एक समान चुम्बकित पदार्थ का छोटा ब्लाक है जिसकी मोटाई dx है समतल पृष्ठ चुम्बकन तीव्रता M पर लम्बवत् है। माना इस ब्लॉक को छोटे-छोटे टुकड़ों में विभाजित किया गया है, अतः परमाण्वीय चुम्बकीय द्विध्रुव एक ही दिशा में संरेखित एवं एकसमान रूप से वितरित होंगे। यदि प्रत्येक टुकड़े की मोटाई dz है एवं अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल da है चूंकि इस टुकड़े के कारण किसी बिन्दु पर चुम्बकीय आघूर्ण के बराबर होगा, अतः चुम्बकीय द्विध्रुव के टुकड़े की परिसेमा

से धारा लूप का चुम्बकीय आघूर्ण $m = I da = M da dz$ । अतः प्रत्येक टुकड़े को धारा लूप के रूप में लेने पर प्रत्येक लूप में धारा समान होगी अतः चुम्बकित चादर की परिसीमा के अनुदिश बाह्य धारा $I = Mdz$ होगी ।

अतः चुम्बकित पदार्थ के ब्लाक को बहुत सी चादरों से मिलकर बना माना जा सकता है। इस ब्लाक में धारा $I_s = MI$ होगी जहाँ l लम्बाई वाले पृष्ठ में धारा I_s बहती है। इस धारा I_s को चुम्बकन धारा कहते हैं।

किसी चुम्बकित पदार्थ की चुम्बकन धारा I_s स्वतंत्र धारा I_{free} व बद्ध धारा I_{bound} का योग होती है।

$$\text{अर्थात्} \quad I_s = I_{free} + I_{bound}$$

स्वतंत्र धारा से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र को चुम्बकन क्षेत्र कहते हैं और इसे वेक्टर H से प्रदर्शित करते हैं। किन्तु स्वतंत्र धारा एवं बद्ध धारा अर्थात् कुल चुम्बकन धारा से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र को चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व अथवा चुम्बकीय प्रेरण कहते हैं और इसे वेक्टर B से प्रदर्शित करते हैं।

\vec{B} तथा \vec{H} में केवल इतना अन्तर है कि

(1) \vec{B} किसी चुम्बकीय पदार्थ में प्रेरित कुल चुम्बकीय क्षेत्र को प्रदर्शित करता है जबकि \vec{H} केवल स्वतंत्र धाराओं से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र है।

(2) $div \vec{B}$ का मान सभी जगहों पर शून्य होता है जबकि $div \vec{H}$ का मान सभी जगह शून्य नहीं होता।

(3) वेक्टर \vec{B} का कुल धारा घनत्व

$$\text{Curl } \vec{B} = \mu_0 J_{total} = \mu_0 (J_{free} + J_{bound})$$

वेक्टर \vec{H} का धारा घनत्व

$$\text{Curl } \vec{H} = J_{free}$$

(4) किसी चुम्बकित पदार्थ में औसत चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} होता है न कि \vec{H} किन्तु चुम्बकन क्षेत्र H का विशेष महत्व है क्योंकि किसी चुम्बकित निकाय में केवल स्वतंत्र धाराओं को आसानी से रोका व नियंत्रित किया जा सकता है जबकि चुम्बकन तीव्रता M तथा चुम्बकीय क्षेत्र B को नियंत्रित करना संभव नहीं है।

टिप्पणी

2.16 दण्ड चुम्बक की परिनालिकीय धारा के पृष्ठीय वितरण के रूप में व्याख्या (Interpretation of a Bar Magnet as a Surface Distribution of Solenoid Current)

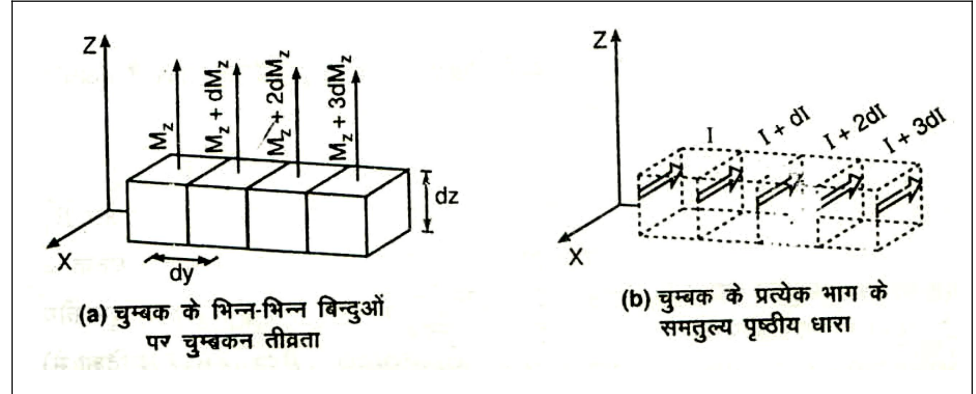
यह सिद्ध करना है कि $\mathbf{J}_{\text{bound}} = \text{Curl } \mathbf{M}$

चुम्बकीय पदार्थ के चुम्बकत्व सदिश का परिमाण M एकांक लम्बाई में बहने वाली पृष्ठीय धारा के बराबर होता है।

$$\text{अर्थात्} \quad M = \frac{I_s}{l}$$

$$\text{या} \quad I_s = Ml \quad \dots (1)$$

इस आधार पर दण्ड चुम्बक की व्याख्या परिनालिकीय धारा वितरण के रूप में की जा सकती है। माना एक दण्ड चुम्बक (अथवा चुम्बकित पदार्थ) को छोटे-छोटे भागों में विभाजित किया गया है जिसका चुम्बकन Z दिशा में है चुम्बक के अन्दर चुम्बकन तीव्रता घनात्मक Y अक्ष की ओर बढ़ रही है प्रत्येक छोटे भाग का आकार X, Y व Z दिशा में dx, dy व dz है।



चित्र क्र. 2.28: दण्ड चुम्बक की परिनालिकीय धारा के पृष्ठीय वितरण के रूप में व्याख्या

यदि दण्ड के प्रत्येक भाग का पृष्ठीय धारा द्वारा प्रतिस्थापित किया जाये तो किसी भी लूप में धारा

$$dI = (dM_z) dz \quad \dots (2)$$

$$(I_s = M_z dz)$$

यदि चुम्बक Z दिशा में चुम्बकित हो तो चुम्बकन तीव्रता Z अक्ष के अनुदिश बढ़ रही है।

$$dM_z = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right) dy \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) व (3) से

$$dI = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right) dy dz \quad \dots (4)$$

इसी प्रकार सम्पूर्ण चुम्बक में प्रत्येक संधि स्थान पर अन्दर की सभी धारायें एक दूसरे को निष्फल कर देंगी। X दिशा के अनुदिश बद्ध धारा के कारण धारा घनत्व

$$J_x = \frac{dI}{dy dz} = \frac{\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} \right) dy dz}{dy dz} = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

इसी प्रकार यदि चुम्बक Y दिशा में भी चुम्बकित हो और उसकी चुम्बकन तीव्रता Z अक्ष के अनुदिश बढ़ रही है तो X अक्ष के अनुदिश धारा घनत्व

$$J_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

चुम्बक में बद्ध धाराओं के कारण धारा घनत्व का X घटक

$$J_x = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \\ = (\text{Curl } M)_x$$

चुम्बक में बद्ध धाराओं के कारण धारा घनत्व का Y घटक

$$J_y = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) = (\text{Curl } M)_y$$

तथा धारा घनत्व का Z घटक

$$J_z = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = (\text{Curl } M)_z$$

अतः चुम्बक के किसी बिन्दु पर सम्पूर्ण धारा घनत्व

$$J_{\text{bound}} = \hat{i}J_x + \hat{j}J_y + \hat{k}J_z \\ = \hat{i} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) \\ = \hat{k} \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right)$$

$$J_{\text{bound}} = \text{Curl } M$$

यह व्यंजक चुम्बकित पदार्थ के चुम्बकन सदिश M एवं पृष्ठीय धारा J के मध्य सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है, अर्थात् परिनालिकीय धारा का मान एक दण्ड चुम्बक के समतुल्य होता है।

2.17(a) \vec{B} , \vec{H} और \vec{M} में सम्बन्ध (Relation between \vec{B} , \vec{H} and \vec{M})

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

एम्पियर के परिपथीय नियम से

$$\text{Curl } \vec{B} = \mu_0 J_{\text{total}} \quad \dots (1)$$

किन्तु कुल धारा घनत्व

$$J_{\text{total}} = J_{\text{free}} + J_{\text{bound}} \quad \dots (2)$$

$$\text{अतः } \text{Curl } \vec{B} = \mu_0(J_{\text{free}} + J_{\text{bound}}) \quad \dots (3)$$

वेक्टर M का कुल धारा घनत्व

$$J_{\text{bound}} = \text{Curl } \vec{M}$$

वेक्टर H का कुल धारा घनत्व

$$J_{\text{free}} = \text{Curl } \vec{H}$$

$$\text{Curl } \vec{B} = \mu_0(\text{Curl } \vec{H} + \text{Curl } \vec{M})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \text{Curl } \vec{B} = \text{Curl } \vec{H} + \text{Curl } \vec{M}$$

$$\text{Curl } \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \text{Curl } \vec{M} = \text{Curl } \vec{H}$$

$$\text{Curl } \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \text{Curl } \vec{H}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

यह समीकरण \vec{B} , \vec{H} तथा \vec{M} में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

2.17(b) चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा चुम्बकशीलता (Magnetic Susceptibility and Permeability)

पदार्थों की चुम्बकीय प्रवृत्ति चुम्बकन तीव्रता M , चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता H तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है। अतः अधिकांश पदार्थों में M तथा H में लगभग समानुपातिक सम्बन्ध होता है। समदैशिक (Isotropic) पदार्थों में

$$M \propto H$$

$$M = \chi_m H \quad \dots (1)$$

जहाँ पर χ_m को पदार्थ की 'चुम्बकीय प्रवृत्ति' कहते हैं। अतः

“किसी पदार्थ में चुम्बकीय प्रवृत्ति, पदार्थ में बाह्य चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता के एकांक मान से उत्पन्न चुम्बकन तीव्रता के बराबर होती है।”

चुम्बकीय प्रवृत्ति विमाहीन अदिश राशि है। अनुचुम्बकीय (Paramagnetic) पदार्थों के लिये इसका मान धनात्मक तथा प्रतिचुम्बकीय (Diamagnetic) पदार्थों के लिये ऋणात्मक होता है। लौहचुम्बकीय (Ferromagnetic) पदार्थों के लिये इसका मान बहुत अधिक होता है। निर्वात में क्योंकि चुम्बकन तीव्रता M का मान शून्य होता है, इसलिये निर्वात के लिये चुम्बकीय प्रवृत्ति शून्य होती है। क्योंकि अधिकांश पदार्थों के लिये चुम्बकन तीव्रता ताप के साथ घटती है, अतः चुम्बकीय प्रवृत्ति χ_m की ताप पर निर्भरता 'क्यूरी नियम' से प्रदर्शित होती है—

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad \dots (2)$$

जहाँ C को 'क्यूरी नियतांक' कहते हैं तथा T —केल्विन ताप है। प्रतिचुम्बकीय पदार्थों की प्रवृत्ति ताप पर निर्भर करती है।

\vec{B} , \vec{H} तथा \vec{M} के संबंध से

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

किन्तु $B = \mu H$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mu \vec{H} &= \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) \\ &= \mu_0 \vec{H}(1 + \chi_m) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m$$

किन्तु $\mu = \mu_0 \mu_r$

अतः $\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r =$ आपेक्षिक चुम्बकशीलता

$$\therefore \mu_r = 1 + \chi_m$$

या $\mu_r - 1 = \chi_m \quad \dots (1)$

जहाँ विमाहीन राशि μ_r को आपेक्षिक चुम्बकशीलता (Relative permeability) तथा नियतांक μ को 'निरपेक्ष चुम्बकशीलता' (Absolute permeability) कहते हैं। निरपेक्ष चुम्बकशीलता μ का मात्रक 'हेनरी/मीटर' होता है।

टिप्पणी

निर्वात के लिए $\mu_r = 1$

$\therefore \chi_m = 0$ अर्थात् निर्वात की चुम्बकीय प्रवृत्ति शून्य होती है

यदि $\mu_r = 1$ तो $\mu = \mu_0$

इसलिये μ_0 को निर्वात की चुम्बकशीलता कहते हैं जिसका मान $4\pi \times 10^{-7}$ हेनरी/मीटर होता है।

प्रतिचुम्बकीय पदार्थों के लिये μ_r का मान एक से कम, अनुचुम्बकीय पदार्थों के लिये एक से अधिक तथा लौहचुम्बकीय के लिये बहुत उच्च होता है।

अर्थात् प्रतिचुम्बकीय पदार्थों के लिये $\mu_r < 1$

अनुचुम्बकीय पदार्थों के लिये $\mu_r > 1$

लौहचुम्बकीय पदार्थों के लिये $\mu_r \gg 1$.

उपरोक्त समीकरण (1) आपेक्षिक चुम्बकशीलता μ_r तथा चुम्बकीय प्रवृत्ति χ_m में संबंध व्यक्त करता है।

2.18 आंकिक उदाहरण (Numerical Examples)

उदाहरण 1 – 5 MeV का एक प्रोटॉन 1.5 वेबर/मी² प्रेरण के चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गतिमान है। क्षेत्र क्षैतिजतः दक्षिण से उत्तर की ओर दिष्ट है। प्रोटॉन पर कार्यरत बल का परिकलन कीजिए। प्रोटॉन का द्रव्यमान 1.6×10^{-27} किग्रा है।

हल – प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}mv^2 = 5MeV$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-27} v^2 = 5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ जूल}$$

$$\text{अथवा } v^2 = \frac{2 \times 5 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-27}} = 10^{15}$$

$$\therefore v = 3.1 \times 10^7 \text{ मी/से}$$

प्रोटॉन पर कार्यरत चुम्बकीय बल

$$F_m = q(v \times B) \text{ न्यूटन}$$

दक्षिण से उत्तर की ओर Y -अक्ष तथा ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर Z -अक्ष लेने पर

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलम्ब}$$

$$v = -3.1 \times 10^7 \text{ k}$$

$$B = 1.5 \text{ j}$$

$$\begin{aligned}
F_m &= 1.6 \times 10^{-19} [(-3.1 \times 10^7 k) \times (1.5 j)] \\
&= 1.6 \times 10^{-19} \times 3.1 \times 10^7 \times 1.5 i \\
&= 7.44 \times 10^{-12} i \text{ न्यूटन}
\end{aligned}$$

अतः प्रोटॉन पर कार्यरत बल का परिणाम $= 7.44 \times 10^{-12}$ न्यूटन है तथा इसकी दिशा पश्चिम से पूर्व की ओर है।

उदाहरण 2 – एक निर्वात कोष्ठ में, प्रोटॉनों तथा ड्यूट्रॉनों की एक धारा एक-समान चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करती है। प्रोटॉन तथा ड्यूट्रॉन दोनों पर समान त्वरक विभव आरोपित होता है, अतः दोनों कणों की गतिज ऊर्जाएँ समान हैं। यदि आयन-धारा चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् हों तथा प्रोटॉन 15 सेमी त्रिज्या के वृत्तीय पथ में गति कर रहे हों तो ड्यूट्रॉनों द्वारा चले पथ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। दिया है कि ड्यूट्रॉन का द्रव्यमान प्रोटॉन के द्रव्यमान से दोगुना है।

हल – चूँकि आवेशित कणों का वेग तथा चुम्बकीय क्षेत्र परस्पर लम्बवत् हैं अतः कण के पथ की त्रिज्या r के लिए

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \text{ अथवा } r = \frac{mv}{qB}$$

$$\text{प्रोटॉन के लिए, } r_p = \frac{m_p v_p}{q_p B} \quad \dots (1)$$

$$\text{ड्यूट्रॉन के लिए, } r_d = \frac{m_d v_d}{q_d B} \quad \dots (2)$$

समीकरण (2) को (1) से विभाजित करने पर

$$\frac{r_d}{r_p} = \frac{m_d v_d}{m_p v_p} \cdot \frac{q_p}{q_d} \quad \dots (3)$$

परन्तु ड्यूट्रॉन का आवेश प्रोटॉन के आवेश के बराबर होता है,

$$\text{अर्थात् } q_p = q_d \text{ तथा दिया है } \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_d v_d^2$$

$$\text{अतः } \frac{v_d}{v_p} = \left(\frac{m_p}{m_d} \right)^{1/2}$$

अतः समीकरण (3) से

$$\begin{aligned}
\frac{r_d}{r_p} &= \left(\frac{m_d}{m_p} \right)^{1/2} = \left(\frac{2m_p}{m_p} \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \text{ (चूँकि } m_d = 2m_p)
\end{aligned}$$

टिप्पणी

∴ ड्यूट्रॉन द्वारा चले पथ की त्रिज्या

$$r_d = \sqrt{2} r_p = 1.414 \times 0.15$$

$$= 0.212 \text{ मीटर} = 21.2 \text{ सेमी}$$

टिप्पणी

उदाहरण 3 – (a) किसी साइक्लोट्रॉन में, ड्यूट्रॉन द्वारा चुम्बकीय क्षेत्र से बाहर आने से ठीक पूर्व उसके पथ की त्रिज्या 20 सेमी है। (i) इस त्रिज्या पर ड्यूट्रॉन के क्षेत्र का परिकलन कीजिए। (ii) ड्यूट्रॉन की MeV में ऊर्जा कितनी होगी? दिया है, चुम्बकीय क्षेत्र = 15000 गॉस, ड्यूट्रॉन का द्रव्यमान = 3.34×10^{-27} किग्रा।

(b) धन आयन उस क्षेत्र में प्रक्षिप्त किये जाते हैं जिसमें वैद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र परस्पर लम्बवत् हैं। आयनों का प्रारम्भिक वेग दोनों के लम्बवत् हैं। क्षेत्रों के परिमाण क्रमशः E तथा B हैं। दर्शाइये कि केवल वे आयन जिनके लिए $v = E/B$ हैं, ही अविक्षेपित पारगमित होंगे।

हल – (a) (i) साइक्लोट्रॉन में ड्यूट्रॉन का पथ एक r त्रिज्या का वृत्त होगा,

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

अतः ड्यूट्रॉन का वेग,

$$v = \frac{qBr}{m}$$

$$q = \text{ड्यूट्रॉन पर आवेश} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलॉम}$$

$$m = \text{ड्यूट्रॉन का द्रव्यमान} = 3.34 \times 10^{-27} \text{ किग्रा}$$

$$r = \text{वृत्तीय पथ की त्रिज्या} = 20 \text{ सेमी} = 0.2 \text{ मीटर}$$

$$B = \text{चुम्बकीय प्रेरण} = 15000 \text{ गॉस}$$

$$= 15000 \times 10^{-4} \text{ वेबर/मी}^2$$

$$= 1.5 \text{ वेबर/मी}^2$$

∴ ड्यूट्रॉन का वेग

$$v = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1.5 \times 0.2}{3.34 \times 10^{-27}}$$

$$= 1.437 \times 10^7 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

(ii) ड्यूट्रॉन की ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} mv^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.34 \times 10^{-27} \times (1.437 \times 10^7)^2$$

$$= 3.449 \times 10^{-13} \text{ जूल}$$

$$= \frac{3.449 \times 10^{-13}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 2.156 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$= 2.156 \text{ MeV}$$

(b) क्रमशः E तथा B सामर्थ्यों के वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में v वेग से गति कर रहे q आवेश के कण पर कुल बल का मान होता है –

$$F = q [E + (v \times B)]$$

चूँकि आवेशित कण अविक्षेपित पारगमित होता है अतः आवेशित कण (आयन) पर कुल बल का मान शून्य होगा, अर्थात्

$$q[E + (v \times B)] = 0$$

$$\text{अथवा } E + (v \times B) = 0 \quad \dots (1)$$

चूँकि v, E तथा B परस्पर लम्बवत् हैं अतः माना कि आयन का वेग v , X -अक्ष के अनुदिश, वैद्युत क्षेत्र E , Y -अक्ष के अनुदिश तथा चुम्बकीय क्षेत्र B , Z -अक्ष के अनुदिश है।

अतः समीकरण (1) से

$$\hat{E}j + (\hat{v}i \times \hat{B}k) = 0$$

$$\text{अथवा } \hat{E}j - v\hat{B}j = 0$$

$$\text{अर्थात् } v = \frac{E}{B} \quad \dots (2)$$

उदाहरण 4 – दर्शाइये कि चुम्बकीय क्षेत्र कण की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं करता।

हल – B सामर्थ्य के चुम्बकीय क्षेत्र में v वेग से गति कर रहे आवेशित कण पर कार्यरत चुम्बकीय बल का मान होता है –

$$F = q (v \times B)$$

dt समय में dS सूक्ष्म विस्थापन के लिए चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कृत कार्य

$$dW = F \cdot ds$$

$$= q(v \times B) \cdot ds = q(v \times B) \cdot \frac{ds}{dt} dt$$

$$= q(v \times B) \cdot v dt \quad \left(\text{क्योंकि } \frac{ds}{dt} = v \right)$$

\therefore चुम्बकीय बल द्वारा कृत कुल कार्य

$$W = \Sigma dW = \Sigma q(v \times B) \cdot v dt$$

$$= \Sigma qv \cdot (v \times B) (q dt) = \text{शून्य} \quad (\because v \cdot v \times B = \text{शून्य})$$

टिप्पणी

अतः आवेशित कण पर चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कृत कार्य सदैव शून्य होगा।
अतः हम यह कह सकते हैं कि चुम्बकीय क्षेत्र आवेशित कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन नहीं करता।

उदाहरण 5 – एक फेरे के धारा लूप का द्विध्रुव आघूर्ण 2.0×10^{-4} ऐम्पियर-मीटर² है। इस द्विध्रुव की अक्ष पर केन्द्र से 8.0 सेमी दूर स्थित बिन्दु पर चुम्बकीय प्रेरण घनत्व ज्ञात कीजिये।

हल – किसी a त्रिज्या के वृत्ताकार धारा लूप के कारण केन्द्र से x दूरी पर चुम्बकीय प्रेरण घनत्व

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

केन्द्र से बहुत अधिक दूरी ($x \gg a$) के लिये

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I \pi a^2}{x^3}$$

परन्तु $\pi a^2 = A$ लूप का परिच्छेद

$$\text{अतः } B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{IA}{x^3}$$

पुनः $IA = p_m$ (लूप का चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m}{x^3}$$

यहाँ, $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मीटर, $x = 8.0$ सेमी $= 8.0 \times 10^{-2}$ मीटर

तथा $p_m = 2.0 \times 10^{-4}$ ऐम्पियर-मीटर²

$$\text{अतः } B = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2.0 \times 10^{-4}}{(8.0 \times 10^{-2})^3} = 7.8 \times 10^{-8} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

उदाहरण 6 – एक पैरा चुम्बकीय गैस के परमाणु के चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण 1.0×10^{-23} ऐम्पियर-मीटर² है। इस गैस को 1.0 वेबर/मीटर² के चुम्बकीय क्षेत्र में रखा जाता है। गैस परमाणु द्विध्रुवों की सीमान्त स्थितियों में अन्तर ज्ञात कीजिये तथा इस ऊर्जा की 27°C पर औसत गतिज ऊर्जा $\frac{3}{2} kT$ से तुलना कीजिये।

$$[k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ जूल/}^\circ K]$$

हल - p_m चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण के परमाणु के B क्षेत्र में $\theta = 0^\circ$ से $\theta = 180^\circ$ घुमाने पर परमाणु द्वारा प्राप्त स्थितिज ऊर्जा

$$U_B = Bp_m(1 - \cos\theta) = 2p_mB$$

$$= 2 \times 1.0 \times 10^{-23} \times 1.0 = 2.0 \times 10^{-23} \text{ जूल}$$

परमाणु की $27^\circ C = 273 + 27 = 300^\circ K$ पर औसत गतिज ऊर्जा

$$U_T = \frac{3}{2}kT$$

या $U_T = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ जूल}$

$$\therefore \frac{U_T}{U_B} = \frac{6.21 \times 10^{-21}}{2.0 \times 10^{-23}} = 310$$

उदाहरण 7 - चक्रण (Spinning) करते प्रोटॉन से उसकी चक्रण अक्ष पर 1.0 \AA दूरी पर स्थित बिन्दु पर वैद्युत तीव्रता तथा चुम्बकीय तीव्रता ज्ञात कीजिये। प्रोटॉन का चुम्बकीय आघूर्ण $1.4 \times 10^{-26} \text{ amp-m}^2$ तथा आवेश $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ है।

हल - प्रोटॉन बिन्दु आवेश की तरह व्यवहार करता है। अतः उसके कारण r दूरी पर वैद्युत तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

यहाँ पर $q = e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम तथा $r = 1.0 \text{ \AA} = 1.0 \times 10^{-10}$ मीटर

$$\therefore E = (9 \times 10^9) \frac{1.6 \times 10^{-19}}{(1.0 \times 10^{-10})^2}$$

$$= 1.44 \times 10^{11} \text{ N/C}$$

चक्रण करता प्रोटॉन द्विध्रुव की तरह व्यवहार करता है और उसका चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण p_m है (माना)। अतः r दूरी पर अक्षीय बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{r^3}$$

$$= (2 \times 10^{-7}) \frac{1.4 \times 10^{-26}}{(1.0 \times 10^{-10})^3} = 2.8 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

उदाहरण 8 - 30 सेमी परिधि तथा 1 वर्ग सेमी परिच्छेद के एक लोहे के छल्ले पर 300 चक्करों की एकसार कुण्डली लपेटी जाती है। जब चक्करों में 0.032 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाती है तब छल्ले में उत्पन्न फ्लक्स 2×10^{-6} वेबर होता है। छल्ले में फ्लक्स घनत्व, चुम्बकीय तीव्रता तथा लोहे की चुम्बकशीलता ज्ञात कीजिये।

टिप्पणी

हल – प्रश्न में, $I = 30$ सेमी = 0.30 मीटर, $A = 1$ सेमी² = 10^{-4} मीटर², $N = 300$, $I = 0.032$ ऐम्पियर तथा $\phi = 2 \times 10^{-6}$ वेबर

टिप्पणी

अतः छल्ले का फ्लक्स घनत्व

$$B = \frac{\phi_B}{A} = \frac{2 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = 2 \times 10^{-2} \text{ वेबर/मीटर}$$

$$\text{चुम्बकीय तीव्रता } H = \frac{NI}{l} = \frac{300 \times 0.032}{0.30} = 32 \text{ ऐम्पियर-चक्कर/मीटर}$$

$$\text{चुम्बकशीलता } \mu = \frac{B}{H} = \frac{2 \times 10^{-2}}{32} = 6.25 \times 10^{-4} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर}$$

आपेक्षिक चुम्बकशीलता

$$\mu_r = \frac{6.25 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} = 500$$

उदाहरण 9 – किसी पदार्थ के शैथिल्य लूप का क्षेत्रफल 250 जूल/मीटर³ के तुल्य है। पदार्थ के 10 किग्रा को 50 हर्ट्ज की आवृत्ति से चुम्बकित करने में एक घण्टे में व्यय ऊर्जा की गणना कीजिये। पदार्थ का घनत्व 7.5 ग्राम/सेमी³ है।

हल – ऊर्जा क्षय प्रति मीटर³ प्रति चक्र = 250 जूल

पदार्थ का आयतन

$$V = \frac{10000 \text{ ग्राम}}{7.5 \text{ ग्राम/सेमी}^3} = \frac{4 \times 10^{-3}}{3} \text{ मीटर}^3$$

प्रति घण्टे चक्रों की संख्या

$$= 3600 \times 50$$

$$\therefore \text{कुल ऊर्जा क्षय} = 250 \times \frac{4 \times 10^{-3}}{3} \times 3600 \times 50$$

$$= 60,000 \text{ जूल}$$

उदाहरण 10 – 0.1 मीटर त्रिज्या की लोहे की एन्कर (Anchor) रिंग से ऊपर एक तार लपेटकर परिनालिका बनायी गयी है जिसके कुल 10^4 चक्कर हैं। यदि लोहे की चुम्बकशीलता 2000 तथा तार में प्रवाहित धारा 2 ऐम्पियर हो तो रिंग में चुम्बकीय फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल – चुम्बकीय फ्लक्स} = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{2\pi r}$$

$$\text{दिया है : } \mu = 2 \times 10^3, I = 2A, r = 0.1m \text{ तथा } n = 10^4$$

$$\text{फ्लक्स} = \frac{2 \times 10^3 \times 10^4 \times 2 \times 4 \times 3.142 \times 10^{-7}}{2 \times 3.142 \times 0.1}$$

$$= 80 \text{ मात्रक}$$

उदाहरण 11 – 0.2 मीटर लम्बी, 10 मिमी व्यास की तथा 10^3 चुम्बकशीलता वाले लोहे की छड़ को 300 फेरे प्रति मीटर वाली परिनालिका में रखा गया है। यदि परिनालिका में 0.5 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाये तो छड़ का चुम्बकीय आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल – हम जानते हैं कि चुम्बकन तीव्रता

$$M = (m\mu_r - 1)H$$

यहाँ पर, $n = 300$ फेरे/मीटर,

$$H = 300 \times 0.5 = 150 \text{ ऐम्पियर फेरे/मीटर}$$

$$\therefore M = (1000 - 1) \times 150$$

छड़ का चुम्बकीय आघूर्ण

$$= M \times V = M \times \pi r^2 \times l$$

$$= 999 \times 150 \times 3.142 (5 \times 10^{-3})^2 \times 0.2$$

$$= 2.354 \text{ मात्रक}$$

उदाहरण 12 – तार की दो समान कुण्डलियों की त्रिज्या 7 सेमी तथा फेरों की संख्या 60 है। इनकी अक्ष उभयनिष्ठ है तथा ये परस्पर 18 सेमी दूरी पर रखी हैं। उनकी उभयनिष्ठ अक्ष पर बीच में स्थित बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की सामर्थ्य ज्ञात कीजिए जबकि 0.10 ऐम्पियर धारा उनसे होकर प्रवाहित होती हो।

हल – केन्द्र से x दूरी पर स्थित अक्षीय बिन्दु पर किसी एक वृत्ताकार कुण्डली के कारण चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

दोनों कुण्डलियों के कारण क्षेत्र

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 n I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

यहाँ, $I = 0.1$ ऐम्पियर, $n = 60$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मी, $a = 7$ सेमी = 0.07 मीटर, $x = 9$ सेमी = 0.09 मीटर

$$\therefore B = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर}) \times 60 \times (0.1 \text{ ऐम्पियर}) (0.07 \text{ मीटर})^2}{[(0.07 \text{ मीटर})^2 + (0.09 \text{ मीटर})^2]^{3/2}}$$

$$= 2.5 \times 10^{-5} \text{ वेबर/मी}^2$$

टिप्पणी

उदाहरण 13 – यदि n फेरों तथा a त्रिज्या की एक वृत्ताकार कुण्डली जिसमें I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है, के तल के अभिलम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र की कुण्डली के केन्द्र से अक्ष पर स्थित अल्प दूरी h पर मापित किया जाये तो दर्शाइये कि यह केन्द्र पर मान से गुणक $\frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2}$ से कम होगी।

हल – त्रिज्या a तथा n फेरों की एक वृत्ताकार कुण्डली जिसमें I ऐम्पियर धारा प्रवाहित हो रही है, के केन्द्र से h दूरी पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \frac{\mu_0 n I a^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I a^2}{2a^2 \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2a} \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)^{-3/2}$$

चूँकि h, a की तुलना में बहुत कम है,

अतः द्विपद प्रमेय से

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2a} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2}\right)$$

कुण्डली के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B_0 = \frac{\mu_0 n I}{2a}$$

अतः चुम्बकीय क्षेत्र में कमी

$$= B_0 - B$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2a} - \frac{\mu_0 n I}{2a} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2}\right) = \frac{\mu_0 n I}{2a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2}$$

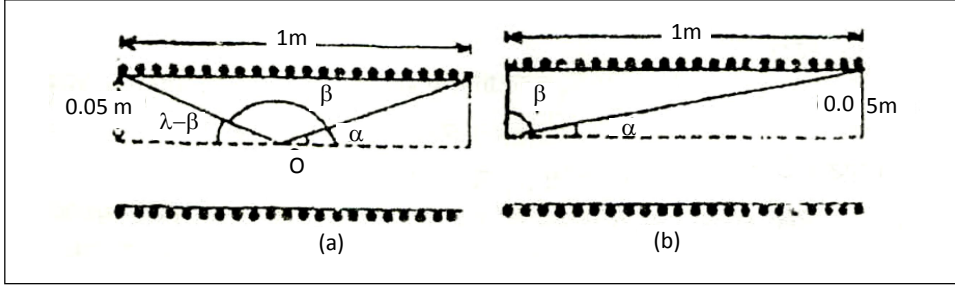
अतः चुम्बकीय क्षेत्र में भिन्नात्मक कमी

$$= \frac{B_0 - B}{B_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{a^2}$$

उदाहरण 14 – 1 मीटर लम्बी तथा 10 सेमी मध्यमान व्यास की एक परिनालिका में 1000 फेरे हैं। 20 ऐम्पियर की एक धारा इससे होकर प्रवाहित होती है। इस की अक्ष पर स्थित (i) इसके केन्द्र पर (ii) इसके सिरों पर चुम्बकीय क्षेत्र का परिकलन कीजिये।

हल – परिनालिका के अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)$$



चित्र क्र. 2.29

यहाँ, $I = 20$ ऐम्पियर, $n = 1000$ फेरे/मीटर, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मीटर

$$\cos \alpha = \frac{0.05}{\sqrt{(0.05)^2 + (0.05)^2}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.0025}}$$

$$\cos \beta = \cos(\pi - \beta) = -\frac{0.05}{\sqrt{0.0025}}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर})}{2} \times \frac{(1000 \text{ फेरे/मीटर}) \times (20 \text{ ऐम्पियर})}{\sqrt{0.0025}} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 20}{2 \times 0.05} \\ &= 2.502 \times 10^{-2} \text{ वेबर/मी}^2 \end{aligned}$$

(ii) चित्र से, सिरे P पर

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (0.05)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1.0025}}$$

$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर})}{2} \times \left(\frac{(1000 \text{ फेरे/मीटर}) \times (20 \text{ ऐम्पियर})}{\sqrt{1.0025}} - 0 \right) \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 20}{2 \times \sqrt{1.0025}} \\ &= 1.256 \text{ वेबर/मीटर}^2 \end{aligned}$$

नोट — चूँकि परिनालिका लम्बी है, अतः सीधे निम्नलिखित सूत्र का उपयोग कर सकते हैं—केन्द्र O पर चुम्बकीय क्षेत्र $= \mu_0 n I$ वेबर/मीटर²

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \text{ वेबर/मी}^2।$$

टिप्पणी

उदाहरण 15 – 1 मीटर लम्बाई तथा 1.5 सेमी अनुप्रस्थ परिच्छेद की त्रिज्या की एक लम्बी परिनालिका में 850 फेरों के वेष्टनों की पाँच परतें हैं। यदि परिनालिका की त्रिज्या में 5 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही हो तो परिकलित कीजिए—

(i) चुम्बकीय प्रेरण, तथा

(ii) परिनालिका के केन्द्र पर परिनालिका के अनुप्रस्थ परिच्छेद के लिए चुम्बकीय फ्लक्स ϕ_B

हल – (i) लम्बी तथा संकीर्ण परिनालिका के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 n I \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मीटर} \\ &\quad \times (5 \times 850 \text{ फेरे/मीटर}) \times (5.0 \text{ ऐम्पियर}) \\ &= 2.67 \times 10^{-2} \text{ वेबर/मीटर}^2 \end{aligned}$$

(ii) पृष्ठ S के लिए चुम्बकीय फ्लक्स ϕ_B का मान होगा

$$\phi_B = \int B \cdot dS$$

परिनालिका के केन्द्र पर B का मान स्थिर है, अतः

$$\phi_B = BA,$$

[जहाँ A परिनालिका के अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल है]

$$\begin{aligned} &= (2.67 \times 10^{-2} \text{ वेबर/मीटर}^2) \times \pi (0.015 \text{ मीटर})^2 \\ &= 1.887 \times 10^{-5} \text{ वेबर।} \end{aligned}$$

उदाहरण 16 – एक इस्पात की छड़ का चुम्बकीय आघूर्ण 2 ऐम्पियर-मीटर² तथा चुम्बक का भार 200 ग्राम है। यदि इस्पात का घनत्व 7950 किलोग्राम/मीटर³ है, तो छड़ का चुम्बकन ज्ञात कीजिये।

हल – चुम्बक का आयतन

$$\begin{aligned} V &= \text{द्रव्यमान/घनत्व} \\ &= \frac{0.2}{7950} = \frac{1}{39750} \text{ मीटर}^3 \end{aligned}$$

$$\text{छड़ का चुम्बकन } M = \frac{\text{चुम्बकीय आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$$

$$= \frac{2 \times 39750}{1}$$

$$= 79500 = 7.95 \times 10^4 \text{ ऐम्पियर/मीटर।}$$

उदाहरण 17 – किसी चुम्बकित पदार्थ के एक टुकड़े का चुम्बकीय आघूर्ण 0.9 ऐम्पियर.मीटर² है। टुकड़े का द्रव्यमान 0.24 किग्रा तथा टुकड़े के पदार्थ घनत्व 8×10^3 किग्रा/मीटर³ है। चुम्बकन तीव्रता ज्ञात कीजिये।

हल –

$$\text{टुकड़े का आयतन} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{घनत्व}}$$

$$= \frac{0.24}{8 \times 10^3} = 3 \times 10^{-5} \text{ मीटर}^3$$

अतः चुम्बकनशीलता

$$M = \frac{\text{चुम्बकीय आघूर्ण}}{\text{आयतन}}$$

$$= \frac{0.9}{3 \times 10^{-5}} = 3 \times 10^4 \text{ ऐम्पियर/मीटर।}$$

उदाहरण 18 – एक लम्बी तथा R त्रिज्या के ताँबे की छड़ में I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है। छड़ के अन्दर व बाहर \vec{H} तथा \vec{B} के मान ज्ञात कीजिये। मान लीजिये कि छड़ के अन्दर चुम्बकन तीव्रता नगण्य है।

हल – चूँकी ताँबा प्रतिचुम्बकीय पदार्थ है, अतः चुम्बकित अवस्था में छड़ के अन्दर बन्द धारा I_b की दिशा मुक्त धारा I_f के अनुदिश होगी।

यदि छड़ के अन्दर त त्रिज्या ($r > R$) का एक धारा लूप लें तो ऐम्पियर के नियम से,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \text{धारा लूप के अन्दर मुक्त धारा का मान}$$

$$\text{या } H(2\pi r) = \frac{I_f}{\pi R^2} \times \pi r^2$$

$$\text{या } H = \frac{I_f r}{2\pi R^2}$$

चूँकि $M = 0$, अतः

$$B = \frac{I_f r}{2\pi R^2}$$

टिप्पणी

छड़ के बाहर,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

या $H(2\pi r) = I_f$ अथवा $H = \frac{I_f}{2\pi r}$

चूँकि $M = 0$, अतः

$$B = H = \frac{I_f}{2\pi r}$$

उदाहरण 19 – पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र के फ्लक्स घनत्व का क्षैतिज घटक 1.7×10^{-5} वेबर/मीटर² है। पृथ्वी के क्षेत्र में क्षैतिज घटक की तीव्रता ज्ञात कीजिये।

हल – प्रश्नानुसार,

$$\vec{B} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ वेबर/मीटर}^2$$

तथा $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मीटर

अतः पृथ्वी के क्षेत्र में क्षैतिज घटक की तीव्रता,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1.7 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7}} = 13.5 \text{ ऐम्पियर/मीटर}$$

उदाहरण 20 – 10^{-4} मीटर³ आयतन की लोहे की छड़ की आपेक्षिक चुम्बकनशीलता 1000 है। इस छड़ को एक लम्बी परिनालिका में रखा जाता है। परिनालिका पर 5 फेरे प्रति सेमी लिपटे हैं। यदि परिनालिका में 0.5 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाये तो छड़ में उत्पन्न चुम्बकीय आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल – हम जानते हैं कि

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

या $B = \mu_0 H + \mu_0 M$

या $M = \frac{B - \mu_0 H}{\mu_0}$

परन्तु $B = \mu H$ तथा $\mu = \mu_r \mu_0$

अतः $M = \frac{\mu H - \mu_0 H}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \mu_r H - \mu_0 H}{\mu_0}$

या $M = (\mu_r - 1)H$

परिनालिका के अन्दर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता,

$$\begin{aligned} H = nI &= (500 \text{ फेरे/मीटर}) \times 0.5 \text{ (ऐम्पियर)} \\ &= 250 \text{ ऐम्पियर-फेरे/मीटर} \end{aligned}$$

$$\text{चुम्बकन तीव्रता } M = (\mu_r - 1)H$$

$$M = (1000 - 1) \times 250 = 2.49 \times 10^5 \text{ ऐम्पियर/मीटर}$$

छड़ में उत्पन्न चुम्बकीय आघूर्ण

$$= 2.49 \times 10^5 \times 10^{-4}$$

$$= 24.9 \text{ ऐम्पियर-मीटर}^2।$$

उदाहरण 21 – 0.2 मीटर लम्बी, 10 मिमी व्यास की तथा 10^3 चुम्बकनशीलता वाले लोहे की छड़ को 100 फेरे प्रति मीटर वाली परिनालिका में रखा गया है। यदि परिनालिका में 0.5 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाये तो छड़ का चुम्बकीय आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल – हम जानते हैं कि चुम्बकन क्षेत्र, $H = nI$

$$\text{अथवा } H = 100 \times 0.5 = 50 \text{ ऐम्पियर.फेरे/मीटर}$$

अतः चुम्बकन तीव्रता

$$M = (\mu_r - 1)H$$

$$= (1000 - 1) 50 = 999 \times 50$$

$$= 49950$$

छड़ का चुम्बकीय आघूर्ण $= M \times \text{आघूर्ण}$

$$= M \times \pi r^2 l$$

$$= 49950 \times 3.14 \times (5 \times 10^{-3})^2 \times 0.2$$

$$= 0.784 \text{ मात्रक।}$$

उदाहरण 22 – एक लोहे की रिंग पर पृथक्कृत तारों के 1000 फेरे लिपटे हैं। रिंग का औसत व्यास 6 सेमी है तथा उसमें 0.3 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाती है। लोहे की आपेक्षिक चुम्बकनशीलता 600 है। ज्ञात कीजिये कि क्रोड में फ्लक्स घनत्व तथा चुम्बकीय तीव्रता कितनी है? इलेक्ट्रॉनिक लूप धारा के कारण क्रोड फ्लक्स घनत्व का कितना भाग है?

हल – रिंग पर लिपटे फेरे (अर्थात् टेरॉइड) के कारण चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व,

$$B = \frac{\mu NI}{l} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$$

$$\text{या } B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 600 \times 1000 \times 0.3}{2 \times 3.14 \times (3 \times 10^{-2})}$$

$$= 1.2 \text{ वेबर/मीटर}^2$$

$$\text{चुम्बकीय तीव्रता } H = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

टिप्पणी

$$\text{या } H = \frac{1.2}{4\pi \times 10^{-2} \times 600} = 1592.3 \text{ ऐम्पियर-फेरे/मीटर।}$$

$$\text{अब, } B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

क्रोड में फ्लक्स घनत्व

$$= \mu_0 H = \frac{B}{\mu_r}$$

$$= \frac{1.2}{600} = 0.002 \text{ वेबर/मीटर}^2 \text{।}$$

उदाहरण 23 – 2 सेमी त्रिज्या तथा 0.4 सेमी मोटाई की एक चुम्बकीय वृत्ताकार चकती की चुम्बकन तीव्रता $4\pi \times 10^{-2}$ ऐम्पियर/मीटर चकती की अक्ष के अनुदिश है। ज्ञात कीजिए—

(i) बद्ध धारा I_b , (ii) चकती के केन्द्र पर \vec{B} तथा \vec{H} के मान, (iii) चकती का चुम्बकीय आघूर्ण, (iv) चुम्बकीय प्रवृत्ति, (v) आपेक्षिक चुम्बकनशीलता।

$$\begin{aligned} \text{हल — (i) बद्ध धारा } I_b &= \text{चुम्बकन तीव्रता} \times \text{मोटाई} = M \times t \\ &= (4\pi \times 10^{-2}) \times (0.4 \times 10^{-2}) \\ &= 5.024 \times 10^{-4} \text{ ऐम्पियर।} \end{aligned}$$

(ii) चकती के केन्द्र पर,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I_b}{2r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times (5.024 \times 10^{-2})}{2 \times (2 \times 10^{-2})} \\ &= 1.57 \times 10^{-8} \text{ टेसला} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \frac{B}{\mu_0} - M = \frac{1.57 \times 10^{-8}}{4\pi \times 10^{-7}} - (4\pi \times 10^{-2}) \\ &= -11.31 \times 10^{-2} \text{ ऐम्पियर/मीटर।} \end{aligned}$$

(iii) चकती का चुम्बकीय आघूर्ण

$$\begin{aligned} m &= M \times V = M \times (\pi r^2 t) \\ &= (4\pi \times 10^{-2}) \times [\pi \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 0.004] \\ &= 6.31 \times 10^{-7} \text{ ऐम्पियर-मीटर}^2 \text{।} \end{aligned}$$

$$\text{(iv) चुम्बकीय प्रवृत्ति } \chi_m = \frac{M}{H} = \frac{4\pi \times 10^{-2}}{(-11.31 \times 10^{-2})} = -1.11$$

(v) आपेक्षिक चुम्बकनशीलता

$$\begin{aligned} \mu_r &= \chi_m + 1 \\ &= -1.11 + 1 = -0.11 \end{aligned}$$

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

टिप्पणी

- जब एक आवेशित कण q वेग v से चुम्बकीय क्षेत्र B के समान्तर गति करता है तो आवेश q के द्वारा अनुभव बल होता है –

(क) qvB	(ख) $qvB \sin \theta$
(ग) शून्य	(घ) इनमें से कोई नहीं।
- चुम्बकीय क्षेत्र के कारण एक आवेश चुम्बकीय बल का अनुभव करता है जबकि वह –

(क) स्थिर होता है
(ख) गतिमान होता है
(ग) स्थिर होता है अथवा गतिमान होता है
(घ) चुम्बकीय क्षेत्र के साथ कोई कोण बनाते हुए गतिमान होता है।
- आवेशित कण की गति के समान्तर लग रहे चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कण पर आरोपित बल होगा –

(क) अनन्त	(ख) आवेश की प्रकृति के अनुसार
(ग) अधिकतम	(घ) शून्य।
- जब कोई आवेशित कण चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् गति करता है तो परिवर्तन होता है –

(क) कण की चाल का
(ख) कण की गतिज ऊर्जा का
(ग) कण पर लगने वाले बल के परिमाण का
(घ) कण की गति के मार्ग का।
- लॉरेन्ज बल का व्यंजक है –

(क) $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$	(ख) $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{E})$
(ग) $\vec{F} = q(\vec{B} \times \vec{v})$	(घ) $\vec{F} = q\vec{E}$.
- चुम्बकीय क्षेत्र का मात्रक है –

(क) वेबर	(ख) वेबर/मीटर ²
(ग) वेबर/मीटर	(घ) वेबर/मीटर ³ ।

टिप्पणी

7. चुम्बकीय क्षेत्र में रखे हुए धारावाही चालक पर लगने वाले बल का परिमाण होता है –
- (क) $F = IB \sin \theta$ (ख) $F = InB / \sin \theta$
 (ग) $F = InB / l$ (घ) $F = I / Bl$
8. l लम्बाई का विद्युत् चालक B चुम्बकीय क्षेत्र में रखा गया है। यदि चालक में प्रवाहित धारा I है, तो चालक पर बल अनुक्रमानुपाती होगा –
- (क) $\frac{1}{l}$ के (ख) $\frac{1}{B}$ के
 (ग) $\frac{1}{I}$ के (घ) 1 के।
9. चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} में रखे चुम्बकीय आघूर्ण \vec{M} वाले चुम्बकीय द्विध्रुव पर लगने वाला बल आघूर्ण होता है –
- (क) $\vec{\tau} = \vec{M} \cdot \vec{B}$ (ख) $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$
 (ग) $\vec{\tau} = MB \cot \theta$ (घ) $\vec{\tau} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{B}}{4\pi}$
10. इलेक्ट्रॉन के लिए जाइरो चुम्बकीय निष्पत्ति का व्यंजक होता है –
- (क) $\frac{e}{m}$ (ख) $\frac{e}{2m}$
 (ग) $\frac{2e}{m}$ (घ) me
11. इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग \vec{L} है। इसका चुम्बकीय आघूर्ण होगा –
- (क) $\frac{em}{2} \vec{L}$ (ख) $\frac{m}{2e} \vec{L}$
 (ग) $\frac{e}{2m} \vec{L}$ (घ) $\frac{2m}{e} \vec{L}$
12. 1 बोर मेग्नेटॉन बराबर होता है –
- (क) 9.28×10^{-28} ऐम्पियर मीटर²
 (ख) 9.28×10^{-24} ऐम्पियर मीटर²
 (ग) 1.6×10^{-19} ऐम्पियर मीटर²
 (घ) 1.6×10^{-34} ऐम्पियर मीटर²।

टिप्पणी

13. बायो-सावार्ट नियम का अन्य नाम है –
 (क) ऐम्पियर का नियम (ख) लॉरेन्ज का नियम
 (ग) फ़ैराडे का नियम (घ) लाप्लास का नियम।
14. निरपेक्ष चुम्बकनशीलता का मात्रक है –
 (क) हेनरी/मीटर (ख) गॉस/मीटर
 (ग) ऐम्पियर/मीटर (घ) क्यूरी/मीटर।
15. धारावाही चालक में धारा अल्पांश के लिए बायो-सावार्ट के नियम का सदिश रूप है –
 (क) $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$ (ख) $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$
 (ग) $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \hat{r}}{r^3}$ (घ) $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \vec{r}}{r^2}$.
16. किसी सीधे लम्बे तार में प्रवाहित धारा I के कारण चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता अनुक्रमानुपाती होती है –
 (क) I के (ख) I² के
 (ग) \sqrt{I} के (घ) 1/I के।
17. दो पतले समान्तर तार एक-दूसरे से r मीटर दूरी पर हैं। प्रत्येक में I ऐम्पियर धारा बह रही है। एक तार के कारण दूसरे तार की प्रति मीटर लम्बाई पर लगने वाला बल होगा –
 (क) $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (ख) $\frac{\mu_0 I^2}{r^2}$
 (ग) $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$ (घ) $\frac{\mu_0 I^2}{r^2}$.
18. ऐम्पियर का परिपथीय नियम है –
 (क) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{I}$ (ख) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\mu_0}$
 (ग) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (घ) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = I$.
19. एक वृत्तीय कुण्डली में बहने वाली धारा को दोगुना करने तथा इसमें फेरों की संख्या आधी करने पर इसके केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र होगा।
 (क) दोगुना (ख) आधा
 (ग) वही रहेगा (घ) चार गुना।

टिप्पणी

20. धारावाही वृत्तीय कुण्डली के केन्द्र पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र होता है –
 (क) न्यूनतम (ख) अधिकतम
 (ग) न्यूनतम या अधिकतम (घ) न न्यूनतम, न अधिकतम।
21. धारावाही वृत्तीय कुण्डली के केन्द्र पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र होता है –
 (क) कुण्डली के तल में (ख) कुण्डली के तल के लम्बवत्
 (ग) कुण्डली के तल से 45° पर (घ) कुण्डली के तल से 135° पर।
22. क्षेत्रफल A तथा धारा I वाले लूप का चुम्बकीय आघूर्ण M होता है –
 (क) $M = IA$ (ख) $M = I^2 A$
 (ग) $M = \frac{IA}{\mu}$ (घ) $M = \frac{I^2 A}{\mu}$.
23. चुम्बकीय क्षेत्र B का S.I. मात्रक है –
 (क) वेबर (ख) न्यूटन/ऐम्पियर \times मीटर
 (ग) गॉस (घ) वेबर \times मीटर²।
24. चुम्बकन क्षेत्र H का S.I. मात्रक है –
 (क) न्यूटन/ऐम्पियर \times मीटर (ख) ऐम्पियर/मीटर
 (ग) ऐम्पियर (घ) वेबर।
25. स्थैतिक चुम्बकीय क्षेत्र में सही सम्बन्ध है –
 (क) $div \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (ख) $div \vec{B} = 0$
 (ग) $Curl \vec{B} = 0$ (घ) $Curl \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{free}$
26. चुम्बकन तीव्रता M का S.I. मात्रक है –
 (क) ऐम्पियर (ख) ऐम्पियर/न्यूटन
 (ग) ऐम्पियर/मीटर (घ) टेसला।
27. वे धाराएँ जिन्हें अमीटर से नापा जा सकता है, कहलाती हैं –
 (क) मुक्त धाराएँ (ख) बद्ध धाराएँ
 (ग) मुक्त तथा बद्ध धाराएँ दोनों (घ) इनमें से कोई नहीं।
28. माध्यम की चुम्बकीय प्रवृत्ति निम्न अनुपात द्वारा व्यक्त होती है।
 (क) चुम्बकन एवं चुम्बकन क्षेत्र
 (ख) चुम्बकीय प्रेरण एवं चुम्बकन क्षेत्र

टिप्पणी

- (ग) चुम्बकन एवं चुम्बकन प्रेरण
 (घ) इनमें से कोई नहीं।
29. कौन सा विकल्प स्थिर चुम्बकत्व के मूल नियमों का सही अवकल रूप है?
- (क) $\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{Curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
 (ख) $\text{curl } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = -\rho$
 (ग) $\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{curl } \vec{B} = 0$
 (घ) $\text{div } \vec{B} = -\rho, \quad \text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
30. किसी चुम्बकित छड़ के बाहर होता है –
- (क) $\vec{H} = 0$ (ख) $\vec{B} = 0$
 (ग) $\vec{M} = 0$ (घ) $\vec{H} = \vec{B}$
31. किसी चुम्बकित पदार्थ में चुम्बकन क्षेत्र H का कारण है –
- (क) मुक्त तथा बद्ध धारा दोनों (ख) केवल मुक्त धारा
 (ग) केवल बद्ध धारा (घ) इनमें से कोई नहीं।
32. सही सम्बन्ध है –
- (क) $\text{div } \vec{B} = 0$ (ख) $\text{div } \vec{B} = \mu_0 \rho$
 (ग) $\text{curl } \vec{B} = 0$ (घ) $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
33. \vec{B}, \vec{H} तथा \vec{M} में सही सम्बन्ध है –
- (क) $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ (ख) $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} - \vec{M}$
 (ग) $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ (घ) $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} - \vec{M})$
34. किसी चुम्बकित पदार्थ में चुम्बकीय प्रेरण \vec{B} के कारण है –
- (क) मुक्त तथा बद्ध धारा दोनों (ख) केवल मुक्त धारा
 (ग) केवल बद्ध धारा (घ) इनमें से कोई नहीं।
35. चुम्बकीय पदार्थ में चुम्बकन तीव्रता \vec{M} अथवा चुम्बकीय आघूर्ण के कारण है –
- (क) मुक्त तथा बद्ध धारा दोनों (ख) केवल मुक्त धारा
 (ग) केवल बद्ध धारा (घ) इनमें से कोई नहीं।
36. एक धारायुक्त परिनालिका के अन्दर लोहे की छड़ को डाला जाता है तो छड़ के अन्दर चुम्बकीय क्षेत्र \vec{H} का मान –

टिप्पणी

- (क) बढ़ जाता है
 (ख) कम हो जाता है
 (ग) अपरिवर्तित रहता है
 (घ) लोहा के बाहर की अपेक्षा अन्दर में बढ़ जाता है।

37. निम्न में से कौन-सा समीकरण गलत है?

- (क) $\text{curl } \vec{H} = \vec{J}_{free}$ (ख) $\text{curl } \vec{M} = \vec{J}_b$
 (ग) $\text{curl } \vec{B} = (\vec{J}_b + \vec{J}_{free})$ (घ) $\text{div } \vec{B} = 0$.

38. माध्यम की चुम्बकनशीलता निम्न अनुपात द्वारा व्यक्त होता है –

- (क) चुम्बकन एवं चुम्बकीय प्रेरण
 (ख) चुम्बकन एवं चुम्बकन क्षेत्र
 (ग) चुम्बकीय प्रेरण एवं चुम्बकत्व क्षेत्र
 (घ) आपेक्षिक चुम्बकनशीलता एवं निर्वात की चुम्बकनशीलता।

39. निम्न में सही संबंध है –

- (क) $\mu_r = (1 - \chi_m)$ (ख) $\chi_m = \mu_r - 1$
 (ग) $\mu = \mu_0(1 - \chi_m)$ (घ) $\mu_0 = \mu(1 + \chi_m)$

2.19 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

- | | | |
|---------|---------|---------------|
| 1. (ग) | 14. (क) | 27. (क) |
| 2. (घ) | 15. (ख) | 28. (क) |
| 3. (घ) | 16. (क) | 29. (क) |
| 4. (घ) | 17. (ग) | 30. (ग) |
| 5. (क) | 18. (ग) | 31. (ख) |
| 6. (ख) | 19. (ग) | 32. (क) व (घ) |
| 7. (क) | 20. (ख) | 33. (ग) |
| 8. (घ) | 21. (ख) | 34. (क) |
| 9. (ख) | 22. (क) | 35. (ग) |
| 10. (ख) | 23. (ख) | 36. (ग) |
| 11. (ग) | 24. (ख) | 37. (ग) |
| 12. (ख) | 25. (ख) | 38. (ग) |
| 13. (घ) | 26. (ग) | 39. (क) |

2.20 सारांश (Summary)

इस इकाई के माध्यम से किसी गतिमान आवेश पर बल, लॉरेन्ज बल समीकरण एवं \vec{B} की परिभाषा को समझाया गया है। सीधे धारावाही चालक को चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर बल की व्याख्या की गई है। धारा लूप पर बल-आघूर्ण, चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण, कोणीय संवेग व जाइरोमेगनेटीक अनुपात को समझाया गया है। बायो सावार्ट का नियम, ऐम्पियर का परिपथीय नियम, स्थिर चुम्बकत्व के नियम $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ में सम्बन्ध का निगमन किया गया है। \vec{B}, \vec{H} एवं \vec{M} असमरूप चुम्बकित पदार्थ हेतु $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}$ का निगमन।

टिप्पणी

2.21 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- स्थैत चुम्बकत्व
- लॉरेन्ज बल,
- विद्युत् बल तथा चुम्बकी बल,
- जाइरो चुम्बकीय अनुपात
- बायो-सावार्ट नियम
- ऐम्पियर का परिपथीय
- चुम्बकनशीलता
- चुम्बकीय प्रवृत्ति

2.22 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में गतिशील धारावाही चालक पर कितना बल लगता है?
2. चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान आवेश पर लगने वाले लॉरेन्ज बल का व्यंजक लिखिए। इस बल की दिशा ज्ञात करने के लिए फ्लेमिंग के बायें हाथ का नियम लिखिए।
3. फ्लेमिंग का बायें हाथ का नियम क्या है? यह फ्लेमिंग के दायें हाथ के नियम से किस प्रकार भिन्न है?
4. लॉरेन्ज बल क्या है? यह किन-किन कारकों पर निर्भर करता है?

टिप्पणी

5. दर्शाइए कि चुम्बकीय क्षेत्र, कण की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं करता है।
6. किसी इलेक्ट्रॉन की कक्षीय तथा चक्रण गति के कारण जायरोमैग्नेटिक अनुपात का सूत्र लिखिये।
7. एक इलेक्ट्रॉन चुम्बकीय क्षेत्र में गति कर रहा है, परन्तु उस पर कोई बल नहीं लग रहा है। ऐसा कब सम्भव है?
8. बद्ध धाराएँ क्या हैं?
9. माध्यम की चुम्बकनशीलता μ को परिभाषित कीजिए।
10. माध्यम की चुम्बकीय प्रवृत्ति χ_m को परिभाषित कीजिए।
11. सदिश \vec{M} का स्रोत क्या है?
12. सदिश \vec{H} का स्रोत क्या है?
13. चुम्बकीय पदार्थ की चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा आपेक्षिक चुम्बकनशीलता में क्या अन्तर है?
14. चुम्बकीय पदार्थ की चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा चुम्बकनशीलता में क्या संबंध है?
15. चुम्बक स्थैतिकी के लिए गॉस प्रमेय लिखिये तथा इसको अवकलन रूप में व्यक्त कीजिए।
16. \vec{B} , \vec{H} तथा \vec{M} में क्या संबंध है?
17. ऐम्पियर के परिपथीय नियम को (i) चुम्बकित पदार्थ के बाहर तथा (ii) चुम्बकित पदार्थ के अन्दर अवकलन रूप में व्यक्त कीजिए।
18. बायो-सावार्ट का नियम वेक्टर रूप में लिखिए तथा इसे समझाइए।
19. दायें हाथ के हथेली का नियम लिखिए तथा इसकी व्याख्या कीजिए।
20. किसी धारावाही कुण्डली के कारण उसके केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र का व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा बताइए कि इसे किस प्रकार बढ़ाया जा सकता है।
21. एक वृत्ताकार धारावाही कुण्डली की अक्ष पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता, केन्द्र से दूरी के साथ किस प्रकार बदलती है? आरेख खींचकर समझाइए।
22. एक धारावाही परिनालिका की अक्ष पर अन्दर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक लिखिए तथा बताइए कि उसे किस प्रकार बढ़ाया जा सकता है?
23. किसी धारावाही परिनालिका के कारण उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र को किस प्रकार बढ़ाया जा सकता है? इसका तीव्रता वितरण आरेख खींचिए।
24. ऐम्पियर का परिपथीय नियम लिखिए तथा इसे बायो-सावार्ट नियम से प्राप्त कीजिए।
25. ऐम्पियर के परिपथीय नियम का अवकलन रूप लिखिए तथा इसे समझाइए।

26. चुम्बकीय द्विध्रुव तथा द्विध्रुव आघूर्ण से आप क्या समझते हैं? इनमें अन्तर समझाइए।
27. किसी चुम्बकित पदार्थ के अन्दर चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} के डाइवर्जेंस तथा कर्ल के मान लिखिए।

टिप्पणी

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. चुम्बकीय प्रेरण, चुम्बकीय फ्लक्स तथा चुम्बकीय बल से आप क्या समझते हैं?
2. बायो-सावर्ट के नियम का वर्णन कीजिए। इस नियम का उपयोग कर एक ऐसी कुण्डली के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र के व्यंजक प्राप्त कीजिए जो कि $2d$ भुजा के वर्ग के रूप की है तथा जिसमें I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है।
3. बायो-सावर्ट का नियम लिखिए तथा इसकी सहायता से एक लम्बे ऋतु धारामापी तार के कारण इसके समीप किसी बिन्दु पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक स्थापित कीजिए।
4. ऐम्पियर का नियम क्या है? एक लम्बी परिनालिका के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। यह परिनालिका के सिरों पर किस प्रकार परिवर्तित होती है।
5. ऐम्पियर के नियम को परिक्रमी रूप (circuital form) में वर्णन कीजिए। सिद्ध कीजिए कि चुम्बकीय क्षेत्र का कर्ल धारा घनत्व का μ_0 गुना होता है।
6. ऐम्पियर के नियम का अवकलज रूप प्राप्त कीजिए।
7. सिद्ध कीजिए चुम्बकीय फ्लक्स के लिए $\text{div } B = 0$ ।
8. एक धारा लूप पर बल-आघूर्ण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
9. सिद्ध कीजिये कि किसी m द्रव्यमान तथा q आवेश के एक समान पिण्ड के घूर्णन से संबद्ध चुम्बकीय आघूर्ण की उसके कोणीय संवेग से निष्पत्ति $q/2m$ के बराबर होती है।
10. लारेंज बल को समझाइये। एक चुम्बकीय क्षेत्र में धारा लूप पर बल आघूर्ण की व्याख्या कीजिए।
11. लारेंज बल का क्या अर्थ है? इसके न्यूनतम व अधिकतम होने की शर्त समझाइये।
12. सिद्ध कीजिए कि चुम्बकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा $U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_v E^2 dv$ है।
13. ऐम्पियर के नियम का परिक्रमी रूप में वर्णन कीजिए तथा टोरोइड के कारण चुम्बकीय क्षेत्र ज्ञात कीजिए।
14. चुम्बकीय द्विध्रुव को परिभाषित कीजिए तथा धारावाही लूप का चुम्बकीय द्विध्रुव आघूर्ण लिखिए।

टिप्पणी

15. चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} की परिभाषा एवं मात्रक लिखिए। सिद्ध करो कि इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति के कारण चुम्बकीय आघूर्ण $ml = \left(\frac{eh}{4\pi me}\right)$ ।
16. वृत्ताकार सोलेनॉयड की सहायता से चुम्बकशीलता ज्ञात करने की विधि का वर्णन कीजिए।
17. एक चुम्बकीय द्विध्रुव के कारण उसकी अक्षीय एवं निरक्षीय स्थिति में चुम्बकीय क्षेत्र का व्यंजक ज्ञात कीजिये।
18. चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक ज्ञात कीजिए तथा चुम्बकीय प्रवृत्ति तथा चुम्बकशीलता को परिभाषित कीजिए।
19. सिद्ध कीजिये कि $J_{\text{bound}} = \text{curl } M$
20. चुम्बकीय माध्यम में B, H, M की व्याख्या कीजिये और इनमें सम्बन्ध स्थापित कीजिये।
21. सिद्ध कीजिये $B = \mu_0(H + M)$

$$\mu_r - 1 = X_m$$
22. जाइरो चुम्बकीय अनुपात क्या है? इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति के लिए इसका मान ज्ञात कीजिये।
23. ऐम्पियर का परिपथीय नियम लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए। इसके उपयोग लिखिए।
24. अवकलन के रूप में स्थिर चुम्बकत्व के मूल नियम लिखिये और सिद्ध कीजिए।
25. सिद्ध करो कि $\oint B \cdot dl = \mu_0 I$
जहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।
26. दर्शाइये कि चुम्बकीय क्षेत्र कण की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं करता है।
27. बायो-सावार्ट नियम की सहायता से किसी धारावाही वृत्ताकार कुण्डली के अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।
28. सिद्ध कीजिए कि धारावाही कुण्डली की अक्ष पर केन्द्र से दोनों ओर उसकी त्रिज्या की आधी दूरी पर, चुम्बकीय क्षेत्र की दूरी के साथ परिवर्तन की दर (db/dx) अधिकतम होती है।
29. बायो-सावार्ट नियम की व्याख्या कीजिए तथा इसकी सहायता से धारावाही रेखीय चालक के कारण किसी बिन्दु पर क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

30. सिद्ध कीजिए कि किसी m द्रव्यमान तथा q आवेश के एकसमान आवेशित वस्तु के घूर्णन से सम्बद्ध चुम्बकीय आघूर्ण की उसके कोणीय संवेग से निष्पत्ति $q/2m$ के बराबर होती है। जाइरोचुम्बकीय अनुपात किसे कहते हैं?
31. एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में स्वतन्त्रतापूर्वक लटकी धारावाही आयताकार कुण्डली पर लगने वाले बल आघूर्ण का सूत्र स्थापित कीजिए। किस दशा में यह आघूर्ण (i) अधिकतम एवं (ii) न्यूनतम होगा?
32. चुम्बकीय माध्यम में \vec{B} , \vec{H} तथा \vec{M} पदों की व्याख्या कीजिए। इनमें परस्पर सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
33. सिद्ध कीजिए कि $div \vec{B} = 0$ या $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.
34. सिद्ध कीजिए कि $Curl \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ या $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.
35. निम्नलिखित पदों की व्याख्या कीजिए :
- (i) मुक्त तथा बद्ध धाराएँ, (ii) चुम्बकन तीव्रता, (iii) चुम्बकन धारा, (iv) चुम्बकन क्षेत्र \vec{H} , तथा (v) चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} .
36. मुक्त एवं बद्ध धाराओं की अभिधारणा को समझाइए। सिद्ध कीजिए कि $Curl \vec{H} = \vec{J}_{free}$.
37. सिद्ध कीजिए कि $\vec{J}_{bound} = Curl \vec{M}$, जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं।
38. चुम्बकनशीलता तथा चुम्बकीय प्रवृत्ति की परिभाषा देते हुए इनमें सम्बन्ध $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ स्थापित कीजिए।
39. टिप्पणी लिखिए –
- (i) बायो-सावार्ट नियम,
(ii) मुक्त तथा बद्ध धाराएँ,
(iii) \vec{B} , \vec{H} तथा \vec{M} .
(iv) ऐम्पियर का परिपथीय नियम,
(v) चुम्बकीय द्विध्रुव के कारण चुम्बकीय क्षेत्र।

आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. 10 टेस्ला फ्लक्स घनत्व के एक चुम्बकीय क्षेत्र में एक इलेक्ट्रॉन स्थित वेग 3.0×10^7 मी/सेकण्ड से क्षेत्र के लम्बवत् प्रक्षिप्त किया जाता है। इलेक्ट्रॉन पर चुम्बकीय बल का परिकलन कीजिए तथा इलेक्ट्रॉन के भार से इसकी तुलना कीजिए। इलेक्ट्रॉन पर आवेश $= 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम तथा इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा है।

$$[\text{उत्तर— } 4.8 \times 10^{-11} \text{ न्यूटन, } Fm/w = 5 \times 10^{18}]$$

टिप्पणी

2. एक प्रोटॉन 1.0×10^7 मी/से की चाल से पृथ्वी की परिक्रमा करता है। इस कार्य के लिए आवश्यक महत्तम चुम्बकीय क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए। प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 1.67 \times 10^{-27}$ किग्रा तथा इलेक्ट्रॉन पर आवेश $= 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम, पृथ्वी की त्रिज्या $= 6.37 \times 10^6$ मी।

[उत्तर— 1.67×10^{-8} वेबर/मी²]

3. यदि 0.5 सेमी त्रिज्या, 240 सेमी लम्बाई तथा 1,440 फेरों वाली एक लम्बी परिनालिका में 0.5 ऐम्पियर धारा प्रवाहित होती हो, तो परिनालिका के केन्द्र तथा सिरों पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए।

[उत्तर— 3.77 गॉस, 1.88 गॉस]

4. एक लोहे की रिंग की परिधि की औसत लम्बाई 60 सेमी तथा परिच्छेद 0.5 सेमी²। इस पर पृथक्कृत तार के 300 फेरे लिपटे हैं। जब तारों में 0.032 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित होती है तब रिंग से 2×10^{-6} वेबर का फ्लक्स सम्बन्धित होता है। रिंग में फ्लक्स घनत्व, चुम्बकीय तीव्रता तथा चुम्बकशीलता ज्ञात कीजिए।

[उत्तर— 4×10^{-2} वेबर/मीटर,
16 ऐम्पियर-फेरे/मीटर, 2.5×10^{-3}]

5. एक प्रोटॉन 1.5 वेबर/मीटर² के चुम्बकीय क्षेत्र में 2×16^7 मीटर/सेकण्ड के वेग से क्षेत्र के साथ 30° कोण पर प्रवेश करता है। प्रोटॉन पर लगने वाले बल की गणना करो। प्रोटॉन पर आवेश 1.6×10^{-19} कूलॉम है।

[उत्तर— 2.4×10^{-12} न्यूटन]

6. 1 मीटर ऊर्ध्वाधर चालक में ऊपर से नीचे की ओर 2A धारा प्रवाहित हो रही है। पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र का क्षैतिज घटक 3×10^{-5} टेसला है। इसके कारण चालक पर बल (परिमाण एवं दिशा) ज्ञात कीजिए।

[उत्तर— 6×10^{-5} न्यूटन, पश्चिम की ओर]

7. 50 सेमी लम्बी तथा 1.4 सेमी त्रिज्या की एक परिनालिका में 350 फेरों की चार परतें हैं। यदि इसमें 6 ऐम्पियर धारा प्रवाहित की जाये, तो इसके (i) केन्द्र पर, (ii) सिरों के पास अक्ष पर, (iii) सिरों से बाहर, चुम्बकीय क्षेत्र की गणना करो।

[संकेत— $n = \frac{350 \times 4}{0.5} = 2800$ प्रति मीटर]

[उत्तर— (i) 2.1×10^{-2} टेसला, (ii) 1.05×10^{-2} टेसला, (iii) शून्य]

8. 50 सेमी लम्बी परिनालिका में 1990 फेरे हैं तथा इसमें 8.0 ऐम्पियर धारा बह रही है। परिनालिका के भीतर अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र की गणना करो।

[उत्तर— 0.04 न्यूटन/ऐम्पियर × मीटर]

9. 50 फेरों तथा 4 सेमी त्रिज्या की एक वृत्ताकार कुण्डली में 2 ऐम्पियर धारा बह रही है। इसे 0.4 वेबर/मीटर² के चुम्बकीय क्षेत्र में रखकर सन्तुलन में 180° घुमाने में कितना कार्य करना पड़ेगा?

[संकेत— कार्य $W = MB(1 - \cos\theta)$, जहाँ $M = nIA$]

[उत्तर— 0.1 जूल]

10. 200 फेरों वाली एक चपटी चालक कुण्डली की अक्ष पर केन्द्र से 0.12 मीटर दूरी पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। इस कुण्डली की त्रिज्या 0.15 मीटर है तथा इसमें 4.8 ऐम्पियर धारा प्रवाहित हो रही है।

[उत्तर— 1.93×10^{-3} न्यूटन/ऐम्पियर \times मीटर]

11. एक टोरोइड की माध्य परिमाण 0.5 मीटर में 500 फेरे हैं जिनमें प्रत्येक फेरे से $0.15 A$ धारा बहती है। गणना करो: (i) वायु क्रोड होने पर H तथा B के मान, (ii) लोहे क्रोड (आपेक्षिक चुम्बकनशीलता = 5000) होने पर B तथा M के मान।

[उत्तर— (i) $H = 150$ ऐम्पियर/मीटर,
 $B = 1.88 \times 10^{-4}$ टेसला, (ii) $B = 0.94$ टेसला,
 $M = 7.5 \times 10^5$ ऐम्पियर/मीटर]

12. एक वायु क्रोड परिनालिका से प्रति सेमी लम्बाई 20 फेरे हैं तथा इसमें $0.18 A$ धारा बहायी जाती है। परिनालिका के केन्द्र पर H तथा B के मान ज्ञात करो।

यदि परिनालिका में लोह क्रोड जिसकी निरपेक्ष चुम्बकशीलता 6×10^{-3} न्यूटन/ऐम्पियर² है तो H तथा B के मान क्या हो जायेंगे?

[संकेत— वायु क्रोड पर $H = nl$, $B = \mu_0 H$, लोहे क्रोड होने पर $H = nl$, लेकिन $B = \mu H$]

[उत्तर— 360 ऐम्पियर/मीटर, 4.5×10^{-5} टेसला,
360 ऐम्पियर/मीटर, 2.16 टेसला]

13. एक लम्बे सीधे तार में $15 A$ धारा बहायी जाती है। तार की अक्ष से 0.105 मीटर दूर स्थित किसी बिन्दु पर चुम्बकन क्षेत्र H तथा चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व B की गणना कीजिए।

[उत्तर— $H = 22.7$ ऐम्पियर/मीटर, $B = 2.857 \times 10^{-5}$ टेसला]

14. एक परिनालिका में 200 फेरे हैं तथा इसकी लम्बाई 0.24 मीटर है। इसमें $1.6 A$ धारा बहायी जाती है। परिनालिका के केन्द्र पर चुम्बकन क्षेत्र H तथा चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व B ज्ञात कीजिए।

[संकेत— $H = nI$, $B = \mu_0 nI$, जहाँ $n =$ प्रति एकांक लम्बाई फेरों की संख्या]

[उत्तर— $H = 13.33$ ऐम्पियर/मीटर, $B = 0.0168$ टेसला]

15. यदि 1000 ऐम्पियर/मीटर के चुम्बकन क्षेत्र द्वारा लोहे की एक छड़ में प्रेरित चुम्बकीय फ्लक्स 25 वेबर/मीटर² है तो लोहे की आपेक्षिक चुम्बकशीलता ज्ञात कीजिए।

[उत्तर— 1.99×10^4]

टिप्पणी

16. एक लोहे की रिंग पर पृथक्कृत तारों के 1000 फेरे लिपटे हैं। रिंग का औसत व्यास 6 सेमी. हैं तथा उसमें 0.3 ऐम्पियर धारा प्रवाहित होती है। लोहे की आपेक्षिक चुम्बकशीलता 600 है। क्रोड में फ्लक्स घनत्व कितना है तथा चुम्बकीय तीव्रता कितनी है, फ्लक्स घनत्व का कितना भाग क्रोड में इलेक्ट्रॉनिक लूप धारा के कारण चुम्बकशीलता फ्लक्स घनत्व है?
[उत्तर— 1.2 वेबर/मी², 1592 ऐम्पियर-फेरे/मीटर, 1.1998 वेबर/मी²]
17. किसी धातु की चुम्बकीय प्रवृत्ति 25.14×10^{-11} हेनरी/मी है। इसकी आपेक्षिक चुम्बकशीलता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर— 12.57×10^{-7} हेनरी/मीटर]
18. लोहे के छल्ले पर एक तार के 500 चक्कर लपेटकर उसमें 0.3 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाती है। छल्ले का औसत व्यास 12 सेमी. तथा उसकी आपेक्षिक चुम्बकशीलता 600 है। छल्ले में फ्लक्स घनत्व का मान ज्ञात कीजिए। चुम्बकीय तीव्रता का मान भी ज्ञात कीजिए। फ्लक्स घनत्व का कितना भाग क्रोड में इलेक्ट्रॉनिक धारा लूपों के कारण होता है?
[उत्तर— 0.3 वेबर/मीटर², 398 ऐम्पियर-चक्कर/मीटर, तथा 99.83%]
19. एक धातु के क्रोड में तारों के 10 फेरे प्रति सेमी. लिपटे हैं जिनमें 2.0 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित होती है। उस पदार्थ में फ्लक्स घनत्व 1.0 वेबर/मी² है। चुम्बकन बल तथा पदार्थ की चुम्बकन तीव्रता ज्ञात कीजिए। क्रोड की आपेक्षिक चुम्बकशीलता क्या है?
[$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मीटर]
[उत्तर— $H = 2000$ ऐम्पियर-चक्कर/मीटर, $M = 7.9 \times 10^5$ ऐम्पियर-चक्कर-मीटर तथा $\mu_r = 397$ वेबर/मी²]
20. एक लोहे के छल्ले की औसत लम्बाई 0.5 मीटर तथा इसका परिच्छेद क्षेत्रफल 4×10^{-4} मीटर² है। छल्ले पर तारों के 200 चक्कर लिपटे हैं। तारों में किस प्रबलता की धारा प्रवाहित की जाये जिससे कि छल्ले में 4×10^{-4} वेबर का फ्लक्स उत्पन्न हो सके। इस फ्लक्स के लिए लोहे की चुम्बकशीलता 65×10^{-4} वेबर/ऐम्पियर-मीटर है।
[उत्तर— 0.384 ऐम्पियर]
21. एक नर्म लोहे की रिंग की औसत परिधि 250 सेमी तथा व्यास 1 सेमी. है। लोहे की आपेक्षिक चुम्बकशीलता 2500 है। रिंग में 500 माइक्रो-वेबर के फ्लक्स के लिए रिंग पर तार के कितने फेरे लें कि उनमें 2 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित करने पर यह फ्लक्स उत्पन्न हो सके? [उत्तर— 2500]
22. एक लूप में 50 फेरे हैं तथा इसमें 2.0 ऐम्पियर धारा बहायी जाती है। यदि लूप की त्रिज्या 10 सेमी. है तो इसके समतुल्य चुम्बकीय द्विध्रुव के चुम्बकीय आघूर्ण की गणना कीजिए।

23. एक लम्बे और सीधे तार में 20 ऐम्पियर धारा बह रही है। चालक तार से 10 सेमी. दूर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता कितनी होगी?
23. एक इलेक्ट्रॉन एक वृत्तीय पथ में जिसकी त्रिज्या 5.0×10^{-9} मीटर है, 4.0×10^6 मीटर/सेकण्ड की एक समान चाल से चक्कर लगाता है। वृत्तीय पथ के केन्द्र पर उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र की गणना कीजिए।
24. एक तार की लम्बाई 40 मीटर है। उसे 8 सेमी. व्यास वाली कुण्डली के रूप में मोड़ा गया है। यदि इसमें 9 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित की जाए तो कुण्डली के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

2.23 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. Berkley Physics Course, Electricity and Magnetism Ed. E. M. Purcell McGraw Hill.
2. Physics Volume 2, D. Halliday and R. Resnick
3. Introduction to Electrodynamics: D.J. Griffiths, 4th Edition, Prentice Hall.
4. Electricity and Magnetism: S.S. Atwood Dover.
5. Electrodynamics: Emi Cossor and Bassin Lorraine, Asahi Shimbunsha Publishing Ltd.
6. From Neuron to Brain: Kuffler and Nicholas, Sinauer Associates, Inc Pub. Sunderland Massachusetts.
7. Schaums Outline of Beginners Physics II: Electricity and Magnetism.

इकाई 3 विद्युत धारा व जैव विद्युत (Current Electricity and Bio Electricity)

संरचना (Structure)

- 3.0 परिचय
- 3.1 उद्देश्य
- 3.2 वैद्युत धारा तथा धारा घनत्व
- 3.3 स्थायी धारा के लिए सांतत्य समीकरण
- 3.4 अस्थायी धारा (या समय के साथ परिवर्ती धारा) तथा सांतत्य समीकरण
- 3.5 किरचौफ के नियम
- 3.6 बाहुल्य परिपथ
 - 3.6.1 थेवनिन प्रमेय
 - 3.6.2 नॉर्टन की प्रमेय
 - 3.6.3 मिलमैन प्रमेय
 - 3.6.4 अधिकतम सामर्थ्य (शक्ति) स्थानान्तरण प्रमेय
 - 3.6.5 अध्यारोपण प्रमेय
- 3.7 प्रत्यावर्ती धाराएँ
- 3.8 प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि तथा क्षय : L-R परिपथ
- 3.9 प्रतिरोध तथा संधारित्र युक्त परिपथ में धारा अथवा प्रतिरोध के द्वारा संधारित्र का आवेशन तथा निरावेशन C-R परिपथ
- 3.10 LCR श्रेणी परिपथ
- 3.11 L-R परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा
- 3.12 R-C परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा
- 3.13 प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में औसत व्यय शक्ति तथा शक्ति गुणांक
- 3.14 a.c. विश्लेषण के लिए सम्मिश्र संख्या विधि J आपरेटर
- 3.15 प्रतिबाधा, प्रतिघात तथा प्रवेश्यता
- 3.16 श्रेणी अनुनादी परिपथ
 - 3.16.1 अनुनाद की तीक्ष्णता अथवा अनुनाद पर मन्दन का प्रभाव
 - 3.16.2 विशेषता गुणांक
 - 3.16.3 वोल्टेज प्रवर्धन
- 3.17 समान्तर अनुनादी परिपथ
- 3.18 श्रेणी तथा समान्तर अनुनादी परिपथों में अन्तर
- 3.19 A.C. परिपथ में शक्ति
- 3.20 Y तथा Δ नेटवर्क
- 3.21 विद्युत पावर का संचरण
- 3.22 जैव विद्युत् की उत्पत्ति
- 3.23 जैव विद्युत
- 3.24 तन्त्रिका आवेग
- 3.25 विश्राम विभव
- 3.26 प्रेरणा संवहन या तन्त्रिका संवहन की प्रक्रिया
- 3.27 जैव विद्युत् की उत्पत्ति से सोडियम तथा पोटेशियम परिवहन
- 3.28 तन्त्रिका आवेग संवहन की क्रिया-विधि

- 3.29 नर्नस्ट समीकरण
- 3.30 तन्त्रिका ऊतक : संरचना एवं कार्य
- 3.31 तन्त्रिका कोशिका या न्यूरॉन की रचना
- 3.32 तन्त्रिका तंतुओं के प्रकार
- 3.33 तन्त्रिका ऊतक के गुण
- 3.34 झिल्ली क्षमता (मेम्ब्रेन पोटेन्शियल)
- 3.35 आंकिक उदाहरण
- 3.36 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
- 3.37 सारांश
- 3.38 मुख्य शब्दावली
- 3.39 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
- 3.40 सहायक पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

3.0 परिचय (Introduction)

इस इकाई के प्रथम भाग में हम विद्युत् धारा का अध्ययन करेंगे। किसी चालक में आवेश प्रवाह की दर ही उसमें बहने वाली विद्युत् धारा की माप होती है। इस अध्याय में हम स्थायी धारा एवं अस्थायी धारा के लिये सांतत्व समीकरण, बाहुल्य परिपथ के अन्तर्गत थैवनिन, नॉर्टन, मिलमैन अधिकतम शक्ति, संचरण एवं अध्यारोपण प्रमेय इसके अतिरिक्त LR , CR , LCR current एवं समान्तर एवं श्रेणी अनुनादी परिचय, Y तथा Δ नेटवर्क विद्युत पावर संचरण का अध्ययन करेंगे। अगले भाग में हम बायो-इलेक्ट्रीसिटी का अध्ययन करेंगे। प्राणी शरीर में समन्वय एवं समाकलन को बनाये रखने के लिए दूरसंचार तारों की तरह पूर्ण शरीर में महीन धागों के जैसे तान्त्रिकाएँ, फैली रहती है। वे वातावरणीय उद्दीपनों को संवेदी अंगों से ग्रहण कर विद्युत-आवेगी या प्रेरणाओं के रूप में तीव्रता के साथ इसका प्रसारण करके शरीर के विभिन्न अंगों, भागों एवं ग्रन्थियों आदि के बीच समन्वय स्थापित करती है।

3.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- विद्युत् धारा के विभिन्न रूपों का विस्तृत अध्ययन करेंगे, जैसे-स्थायी धारा, अस्थायी धारा या परिवर्ती धारा तथा प्रत्यावर्ती धारा।
- बाहुल्य परिचय थैवनिन नार्टन मिलमैन अधिकतम शक्ति संचरण एवं अध्यारोपण प्रमेय का अध्ययन करना
- LR , CR एवं LCR current का अध्ययन करना
- श्रेणी एवं समान्तर अनुनादी परिपथों का अध्ययन करना
- Y तथा Δ नेटवर्क एवं विद्युत संचरण प्रभाव का अध्ययन करना
- इस इकाई में हम जीवन में विद्युत् के अत्यन्त महत्व को समझेंगे।

- किस तरह जैव-विद्युत् निकाय जीवनभर सतत् रूप से कार्यरत रहते हैं तथा जीव के आराम करने या सोने पर भी विद्युत् सिग्नल का अविरत प्रवाह होता रहता है।
- जैव विद्युत् से तात्पर्य जैव, कोशिका, ऊतक आदि से उत्पन्न विद्युत् से है यह समझ पाएंगे।

3.2 वैद्युत धारा तथा धारा घनत्व (Electric Current and Current Density)

एक चालक के किसी अनुप्रस्थ परिच्छेद से होकर जाने वाली विद्युत धारा प्रति सेकण्ड प्रवाहित कुल आवेश के बराबर होती है। यदि चालक के किसी अनुप्रस्थ-परिच्छेद से t समय में कुल आवेश q गुजरता है तो वैद्युत धारा

$$I = \frac{q}{t} \quad \dots (1)$$

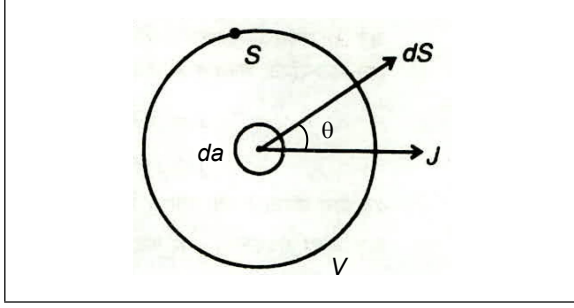
M.K.S. पद्धति में विद्युत धारा का मात्रक **ऐम्पियर** (ampere) होता है। जब विद्युत धारा इलेक्ट्रॉनों की गति के कारण उत्पन्न होती है (जैसे कि धात्विक चालकों में) तो धारा की दिशा इलेक्ट्रॉन प्रवाह की दिशा के विपरीत होती है। स्थायी स्थिति में प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैद्युत धारा का मान चालक के प्रत्येक परिच्छेद के लिए समान होता है, चाहे अनुप्रस्थ परिच्छेद के विभिन्न स्थानों पर भिन्न मान क्यों न हो। स्थायी स्थिति में वैद्युत धारा की यह निश्चितता आवेश संरक्षण के नियम के अनुसार होती है। जब आवेश के प्रवाह की दिशा समय के सापेक्ष परिवर्तित नहीं होती तो धारा **दिष्ट** (direct) कहलाती है परन्तु जब आवेश गति की दिशा आवर्त के रूप में बदलती है तो धारा **प्रत्यावर्ती** (alternating) कहलाती है।

यदि वैद्युत धारा का परिमाण समय का फलन हो, तो वैद्युत धारा निम्न समीकरण से निरूपित होती है—

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \dots (2)$$

यदि धारा का मान समय के साथ नहीं बदलता है, अर्थात् निकाय में धारा नियत रहती है तो इसे स्थायी धारा (stationary current) कहते हैं। स्थायी धारा, आवेश संरक्षण के नियम का पालन करती है अर्थात् आवेश न तो उत्पन्न किया जा सकता है और नहीं नष्ट किया जा सकता है। आवेश संरक्षण के इस सिद्धान्त के गणितीय रूप को सांतत्य समीकरण कहते हैं।

किसी चालक के भीतर किसी बिन्दु पर **धारा घनत्व** (Current density) एक वेक्टर राशि है जिसका परिमाण उस बिन्दु पर स्थित एक अतिसूक्ष्म क्षेत्रफल से होकर प्रवाहित धारा के बराबर होता है, इसे J से प्रदर्शित करते हैं।



चित्र क्र. 3.1: आयतन V तथा पृष्ठ क्षेत्रफल S का क्षेत्र

अतः किसी अतिसूक्ष्म पृष्ठ क्षेत्रफल dS से होकर प्रवाहित धारा dI (चित्र 3.1)

$$dI = J \cdot dS \quad \dots (3)$$

पृष्ठ S से होकर कुल धारा I का मान पृष्ठीय समाकलन (Surface integral) होगा अर्थात्

$$I = \iint_S J \cdot dS \quad \dots (4)$$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि कुल धारा I दिये गये धारा घनत्व \vec{J} के फ्लक्स के बराबर होती है।

यदि किसी धारा प्रवाहित होने वाले चालक के सम्पूर्ण अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल A पर धारा घनत्व वेक्टर J का मान स्थिर हो तथा उसके अभिलम्बवत् हो तो

$$\text{धारा घनत्व } \vec{J} = \frac{I}{A}$$

अर्थात् धारा घनत्व का परिमाण

$$|J| = \frac{I}{A} \quad \dots (5)$$

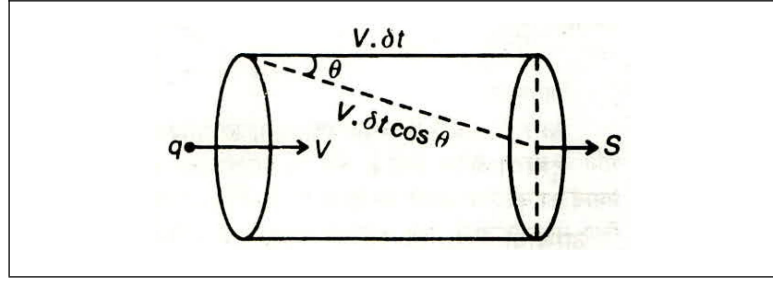
अतः धारा घनत्व का मात्रक $\frac{\text{धारा}}{\text{क्षेत्रफल}}$ का मात्रक होगा, अर्थात् एम्पियर/मीटर² होगा।

धारा घनत्व के लिए व्यंजक (Expression for Current Density)

माना एक चालक के प्रति घन मीटर आयतन में n आवेश वाहक हैं जिन पर समान आवेश q समान वेग वेक्टर \vec{v} से गतिमान हैं। माना एक सूक्ष्म वृत्ताकार अल्पांश जिसका क्षेत्रफल S है सूक्ष्म समय अन्तराल δt में, प्रत्येक आवेश वाहक द्वारा चली गई दूरी $l = v \cdot \delta t$ होगी। अतः δt समय में समस्त आवेश वाहक जो कि ' $v\delta t$ ' तिर्यक ऊँचाई तथा S क्षेत्रफल के आधार के बेलन में स्थित हैं सूक्ष्म क्षेत्रफल से

होकर प्रवाहित होंगे। इस बेलन का आयतन = (आधार × ऊँचाई) = $S \cdot v \delta t$ होगा।

टिप्पणी



चित्र क्र. 3.2

अतः δt समय में S क्षेत्रफल से होकर जाने वाली आवेश वाहकों की संख्या होगी

$$= nS \cdot v \delta t \quad \dots (6)$$

$$\text{अतः } \delta t \text{ समय में क्षेत्रफल } S \text{ से प्रवाहित आवेश } \delta Q = qnS \cdot v \delta t \quad \dots (7)$$

अतः काल्पनिक क्षेत्रफल से होकर प्रवाहित धारा

$$I = \text{आवेश प्रवाह की दर} \\ = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{qnS \cdot v \delta t}{\delta t} = nqv \cdot S \quad \dots (8)$$

$$I = J \cdot S \text{ (परन्तु } nqV = J) \quad \dots (9)$$

यह धारा घनत्व J तथा धारा I में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है।

अतः अल्प क्षेत्रफल $d\vec{a}$ से प्रवाहित धारा $dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$

तथा सम्पूर्ण पृष्ठ S में प्रवाहित धारा

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

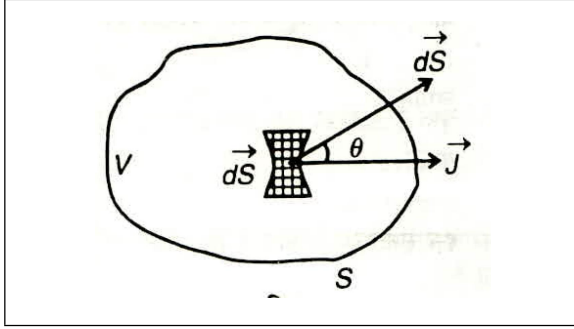
किसी चालक में प्रवाहित धारा, उसके परिच्छेद से सम्बद्ध धारा घनत्व का फलक्स होती है।

स्पष्टतः धारा घनत्व का SI मात्रक ऐम्पियर/मीटर² है।

(1) यदि धारा घनत्व J का मान समय के साथ नहीं बदलता है, तो निकाय में धारा नियत रहती है तथा इसे स्थायी धारा (Stationary current) कहते हैं। स्थायी धारा, आवेश संरक्षण के नियम का पालन करती है (अर्थात् आवेश न तो उत्पन्न किया जा सकता है और न ही नष्ट किया जा सकता है)। आवेश संरक्षण के इस सिद्धान्त के गणितीय रूप को सांतत्य समीकरण कहते हैं।

3.3 स्थायी धारा के लिए सांतत्य समीकरण (Equation of Continuity for Steady Current)

माना एक क्षेत्र जिनका आयतन V तथा पृष्ठ क्षेत्रफल S है। माना इसका एक अल्पांश dS है जिसकी दिशा पृष्ठ पर खींचे गये बाहरी अभिलम्ब (outward normal) के अनुदिश है (चित्र 3.3)। यदि अल्पांश dS के किसी बिन्दु पर धारा घनत्व \vec{J} है तो dS क्षेत्रफल से घिरे आयतन dV से बहने वाली धारा (अर्थात् आवेश प्रवाह की दर) $I = \vec{J} \cdot d\vec{S}$



चित्र क्र. 3.3: आयतन V तथा पृष्ठ क्षेत्रफल S का क्षेत्र

अतः सम्पूर्ण पृष्ठ द्वारा घिरे आयतन V से बहने वाली कुल धारा (या आवेश प्रवाह की दर)

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

लेकिन समय के साथ अपरिवर्ती (time-independent) धारा वितरण (अर्थात् स्थायी धारा) के लिए चालक के दो क्रमागत परिच्छेदों के बीच किसी भी बिन्दु पर आवेशों का एकत्रीकरण (accumulation) नहीं होता है, अर्थात् धारा एकसमान रहती है।

अतः सम्पूर्ण पृष्ठ S पर धारा घनत्व का पृष्ठीय समाकलन नियतांक होगा।

$$\text{अर्थात् } \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = K \text{ (नियतांक)} \quad \dots (1)$$

लेकिन गॉस की डाइवर्जेंस प्रमेय के अनुसार

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{J} \cdot dV$$

∴ समीकरण (1) से,

$$= \iiint_V \text{div } \vec{J} \cdot dV = K \quad \dots (2)$$

अवकलन करने पर,

$$\text{div } \vec{J} = 0 \text{ (समय के साथ अपरिवर्ती धारा वितरण या स्थायी धारा के लिए)}$$

टिप्पणी

दूसरे शब्दों में, समय के साथ अपरिवर्ती धारा वितरण (या स्थायी धारा) के लिए सम्पूर्ण आयतन से धारा घनत्व का कुल फ्लक्स शून्य होता है। इसे स्थायी धारा का सांतत्य समीकरण कहते हैं।

3.4 अस्थायी धारा (या समय के साथ परिवर्ती धारा) तथा सांतत्य समीकरण (Non Steady Current and Equation of Continuity)

माना एक क्षेत्र जिसका आयतन V तथा पृष्ठ क्षेत्रफल S है। यदि धारा स्थायी नहीं है तो धारा घनत्व \vec{J} , स्थिति (x, y, z) के साथ-साथ समय t पर भी निर्भर करेगा। ऐसी स्थिति में, आवेश संरक्षण के नियम से, किसी भी क्षण पृष्ठ S द्वारा घिरे आयतन V में प्रवेश होने वाले आवेश की दर = पृष्ठ S द्वारा घिरे आयतन V में से निर्गत होने वाले आवेश की दर

$$\text{अर्थात् } \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad \dots (1)$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह बताता है कि इस आयतन में समय के साथ आवेश की कमी हो रही है। यदि आवेश का आयतन घनत्व (volume charge density) ρ है तो पृष्ठ S द्वारा घिरे आयतन में कुल आवेश

$$q = \iiint_V \rho dV$$

समीकरण (1) से,

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \quad \dots (2)$$

लेकिन गॉस की डाइवर्जेंन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{J} \cdot dV$$

∴ समीकरण (2) से,

$$\iiint_V \text{div } \vec{J} \cdot dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \left(\text{div } \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} \right) dV = 0$$

$$\text{अर्थात् } \text{div } \vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\text{या } \text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt} \quad (\text{समय के साथ परिवर्ती धारा वितरण के लिए})$$

उपर्युक्त समीकरण समय के साथ परिवर्ती धारा वितरण के लिए सांतत्य समीकरण कहलाता है जिसके अनुसार परिवर्ती धारा वितरण में धारा घनत्व का डाइवर्जेंस, आवेश घनत्व में कमी होने की दर के बराबर होता है।

स्पष्ट है कि स्थायी धारा (या समय के साथ अपरिवर्ती धारा वितरण के लिए),

$$d\rho/dt = 0 \quad \therefore \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad \dots (4)$$

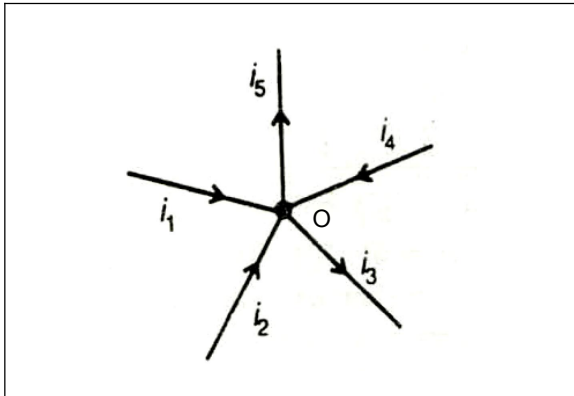
इस प्रकार, यदि किसी आयतन को घेरने वाले पृष्ठ से होकर जाने वाले आवेश की मात्रा शून्य नहीं है तो समय के साथ उस आयतन में आवेश घनत्व इस प्रकार बदलता है कि किसी अल्पांश में प्रवेश करने वाले आवेश की दर, उस अल्पांश में से बाह्य प्रवाहित आवेश की दर के बराबर होती है। यही आवेश संरक्षण का सिद्धान्त है इस समीकरण को अविरतता का समीकरण भी कहते हैं।

3.5 किरचौफ के नियम (Kirchoff's Laws)

1842 में किरचौफ ने आवेश संरक्षण एवं ओह्म के नियम के आधार पर दो नियम प्रतिपादित किये जिनकी सहायता से जटिल वैद्युत परिपथों (अथवा चालकों के नेटवर्कों) में धारा का वितरण सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

(i) **प्रथम नियम (First law) (धारा का नियम)** – यह सिद्धान्त आवेश संरक्षण के नियम पर आधारित है। इसके अनुसार किसी वैद्युत परिपथ (अथवा तारों के नेटवर्क) में किसी सन्धि (Junction) पर मिलने वाली समस्त धाराओं का बीजगणित योग (algebraic sum) शून्य होता है। इस नियम के अनुसार सन्धि में प्रवेश करने वाली कुल धारा का मान उससे निर्गत होने वाली कुल धारा के बराबर होना चाहिए। इस नियम का उपयोग करने के लिए सन्धि में प्रवेश करने वाली धाराएँ धनात्मक तथा सन्धि से निर्गत होने वाली धाराएँ ऋणात्मक ली जाती हैं। किसी सन्धि पर, गणितीय रूप में इस नियम को निम्न प्रकार लिखा जाता है –

$$\sum I = 0 \quad \dots (1)$$



चित्र क्र. 3.4: विद्युत धाराओं का किसी संधि पर बीजगीय योग

टिप्पणी

टिप्पणी

माना कि चित्र 3.4 में प्रदर्शित एक विद्युत परिपथ है। चिन्ह परिपाटी के अनुसार I_1, I_2, I_4 धनात्मक हैं तथा I_3, I_5 ऋणात्मक हैं। अतः किरचौफ के प्रथम नियम से सन्धि O पर

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{अर्थात् } I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5 \quad \dots (1)$$

अतः सन्धि O में प्रवेश करने वाली धाराओं का योग उससे निर्गत धाराओं के योग के बराबर है। दूसरे शब्दों में किरचौफ के प्रथम नियम के अनुसार,

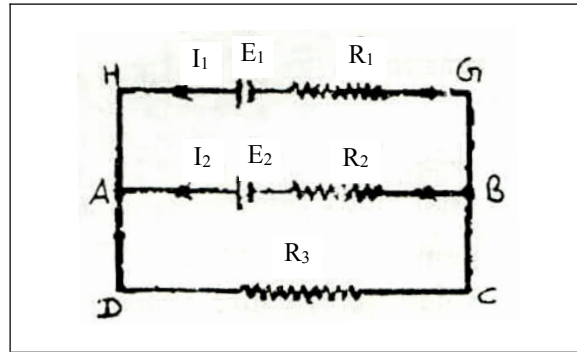
“जब किसी वैद्युत परिपथ में अपरिवर्ती धाराएँ प्रवाहित होती हैं तो किसी सन्धि पर आवेश का संचयन नहीं होता।” यह नियम आवेश संरक्षण के सिद्धान्त के अनुकूल है।

(ii) द्वितीय नियम (Second law) (वोल्टेज नियम) : यह नियम ओह्म के नियम पर आधारित है तथा इसके अनुसार, “किसी परिपथ के किसी बन्द लूप में विभिन्न अवयवों के सिरों के बीच विभवान्तरों का बीजीय योग शून्य होता है अर्थात् $\Sigma V = 0$ किसी बन्द लूप में वैद्युत धारा तथा प्रतिरोध के गुणन का बीजीय योग, उस लूप में कार्यरत विद्युत वाहक बलों (वि.वा.बल) (Electromotive force - e.m.f.) के बीजीय योग के बराबर होता है।”

इस नियम के उपयोग के लिए धारा तथा प्रतिरोध का गुणनफल धनात्मक लिया जाता है तथा वोल्टेज वृद्धि को धनात्मक तथा वोल्टेज में कमी को ऋणात्मक लिया जाता है। गणितीय रूप में इस नियम को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

$$\Sigma IR = \Sigma E \quad \dots (2)$$

यदि हम चित्र 3.5 के विद्युत परिपथ को ले तो बन्द लूप अथवा मेश (Closed loop or mesh) $ABGHA$ के लिए –



चित्र क्र. 3.5: विद्युत परिपथ का बन्द जाल

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2 \quad \dots (3)$$

मेश $ABGHA$ के लिए

$$I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 = E_2 \quad \dots (4)$$

मैश HGCDH के लिए

$$I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 = E_1 \quad \dots (5)$$

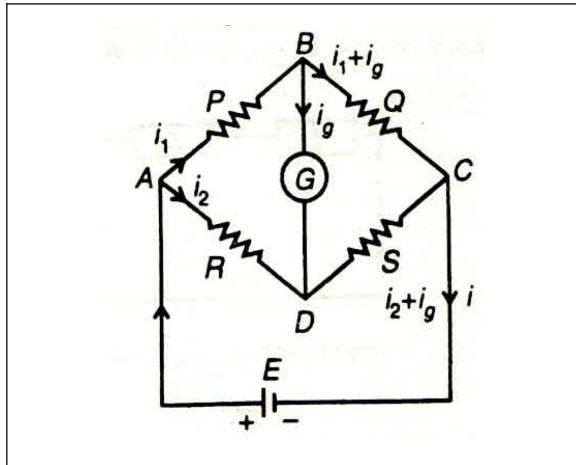
इन समीकरणों को हल करके I_1 व I_2 के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

किरचौफ का द्वितीय नियम ओह्म के नियम का व्यापक रूप है तथा यह ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त पर आधारित है तथा बन्द परिपथों के लिये सत्य है। दूसरे शब्दों में किरचौफ के द्वितीय नियम से,

एक विद्युत परिपथ के किसी बन्द लूप में विभव पात (Potential drop) का बीजगणितीय योग उस लूप में कार्यरत वि. वा. बलों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।

किरचौफ के नियमों का अनुप्रयोग : व्हीटस्टोन सेतु में सन्तुलन का प्रतिबन्ध (Application of Kirchoff's Laws : Condition of Balance in a Wheatstones' Bridge)

व्हीटस्टोन सेतु का विन्यास चित्र 3.6 में प्रदर्शित है। प्रतिरोध P, Q, R तथा S क्रमशः चार भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA बनाते हैं एक नगण्य आन्तरिक प्रतिरोध तथा E वोल्ट वि. वा. बल की एक बैटरी A तथा C के बीच में तथा G प्रतिरोध का एक गैल्वेनोमीटर B तथा D के बीच जुड़ा होता है। माना बैटरी द्वारा स्थायी (Steady) धारा I प्रवाहित की जाती है। बिन्दु A पर धारा I दो भागों में विभाजित हो जाती है। माना I_1 भुजा AB में धारा का मान है B पर धारा I_1 पुनः दो भागों में विभाजित हो जाती है। माना I_g भुजा BD में धारा का मान है। किरचौफ के प्रथम नियम के अनुसार विभिन्न शाखाओं में धारा का वितरण चित्र 3.6 में प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 3.6: व्हीटस्टोन सेतु

बन्द लूपों ABDA तथा BCDB में क्रम से किरचौफ के द्वितीय नियम का उपयोग करने पर,

$$I_1 P + I_g G - (I - I_1) R = 0 \quad \dots (1)$$

विद्युत धारा v
जैव विद्युत

टिप्पणी

$$\text{तथा } (I_1 - I_g)Q - (I - I_1 + I_g)S - I_g G = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{अथवा } I_1(P + R) + I_g G - IR = 0 \quad \dots (3)$$

$$\text{तथा } I_1(Q + S) - I_g(Q + S + G) - IS = 0 \quad \dots (4)$$

जब सेतु सन्तुलित होता है तो गैल्वेनोमीटर में कोई धारा नहीं होती, अर्थात् $I_g = 0$ । अतः समीकरणों (3) तथा (4) से

$$I_1(P + R) = IR \quad \dots (5)$$

$$\text{तथा } I_1(Q + S) = IS \quad \dots (6)$$

समीकरण (5) को (6) से भाग देने पर

$$\frac{P + R}{Q + S} = \frac{R}{S}$$

$$\text{अथवा } PS + RS = QR + RS$$

$$\text{अथवा } PS = QR$$

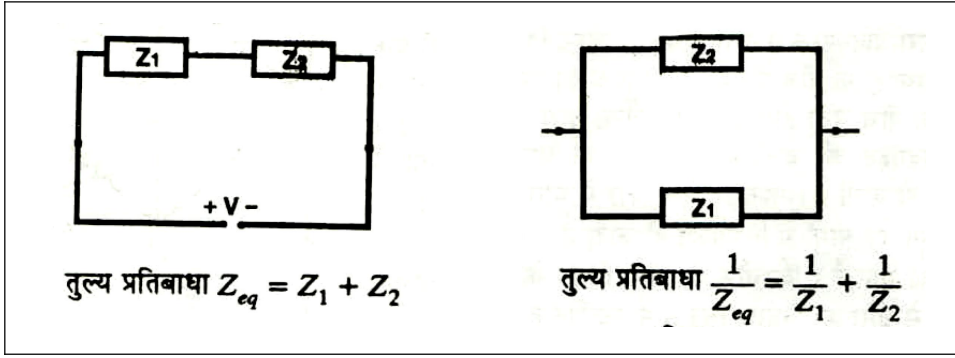
$$\text{अथवा } \frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \quad \dots (7)$$

यही व्हीटस्टोन सेतु के सन्तुलन के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है।

3.6 बाहुल्य परिपथ (Multiple Circuit)

विद्युत स्रोतों एवं प्रतिबाधाओं से युक्त विद्युत परिपथ को विद्युतीय जाल (electrical network) कहते हैं। एक बन्द परिपथ को सरल नेटवर्क (simple network) कहते हैं। यदि बहुत से सरल परिपथ आपस में जुड़े हों तो ऐसे परिपथ को सम्मिश्र नेटवर्क (complex network) कहते हैं। किसी सम्मिश्र नेटवर्क के एक बन्द परिपथ को लूप (loop) कहा जाता है। नेटवर्क के विभिन्न अवयव जिन सन्धि बिन्दुओं पर मिलते हैं, उन्हें नोड (node) कहते हैं। यदि किसी नेटवर्क में विभव स्रोत या धारा स्रोत न हो तो उसे निष्क्रिय नेटवर्क (Passive network) कहते हैं। ऐसा नेटवर्क जिसमें विभव स्रोत या धारा स्रोत जुड़ा हो सक्रिय नेटवर्क (Active network) कहलाता है। प्रतिरोध, प्रेरकत्व तथा संधारित्र निष्क्रिय अवयव (Passive element) कहलाते हैं, क्योंकि ये स्वयं परिपथ में धारा प्रवाहित करने में सक्षम नहीं होते। धारा स्रोत या वोल्टेज स्रोत सक्रिय अवयव (active element) कहलाते हैं, क्योंकि ये परिपथ में धारा प्रवाह प्रारम्भ कर सकते हैं।

एक से अधिक परिपथों से युक्त सम्मिश्र नेटवर्क के किसी प्रतिबाधा के सिरों के बीच विभवान्तर या उसमें प्रवाहित धारा की गणना ओह्म के नियम या किरचौफ के नियम से कर पाना सरल नहीं है, क्योंकि इसके लिए कई समीकरणों को हल करना पड़ता है। गणना को सरल बनाने हेतु विभिन्न नेटवर्क प्रमेयों के द्वारा जटिल नेटवर्क को सरल समतुल्य परिपथों में बदला जाता है।



चित्र क्र. 3.7(a)

चित्र क्र. 3.7(b)

विभिन्न प्रतिबाधाओं के श्रेणीक्रम संयोजन में समतुल्य प्रतिबाधा का मान सभी प्रतिबाधाओं के योग के बराबर होता है [चित्र 3.7(a)], अर्थात्

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots$$

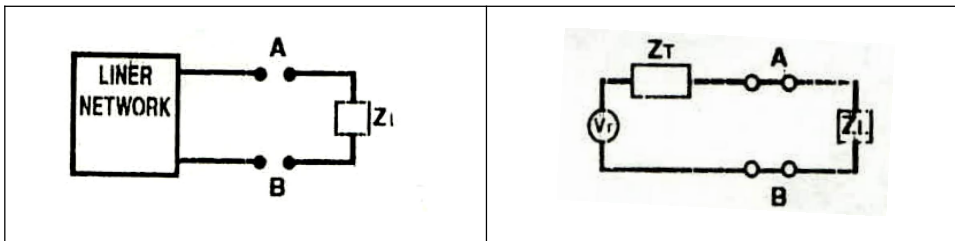
जबकि प्रतिबाधाओं के समान्तर क्रम संयोजन में समतुल्य प्रतिबाधा का व्युत्क्रम सभी प्रतिबाधाओं के व्युत्क्रमों के योग के बराबर होता है चित्र 3.7(b) अर्थात्

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$$

3.6.1 थैवनिन प्रमेय (Thevenin's Theorem)

थैवनिन प्रमेय के अनुसार, "प्रतिबाधाओं तथा ऊर्जा स्रोतों से निर्मित दो टर्मिनल रैखिक नेटवर्क को एक समतुल्य परिपथ से प्रतिस्थापित किया जा सकता है जिसमें एक वोल्टेज स्रोत V_T तथा श्रेणीक्रम में एक रैखिक प्रतिबाधा Z_T जुड़ी होती हैं।" जहाँ V_T थैवनिन समतुल्य वोल्टेज जो कि खुले परिपथ में नेटवर्क के दो सिरों के मध्य विभवान्तर तथा Z_T थैवनिन समतुल्य प्रतिबाधा हैं जो कि दोनों टर्मिनलों के मध्य समतुल्य प्रतिबाधा है।

चित्र 3.8 में एक दो टर्मिनल रैखिक नेटवर्क प्रदर्शित है तथा चित्र 3.9 में इस नेटवर्क का थैवनिन समतुल्य परिपथ प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 3.8

थैवनिन प्रमेय

चित्र क्र. 3.9

चित्र 3.9 के अनुसार लोड प्रतिरोध Z_L में से प्रवाहित धारा

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} \text{ होगी}$$

टिप्पणी

दो टर्मिनल परिपथ को थैवनिन समुल्य परिपथ में निम्न बिन्दुओं के आधार पर परिवर्तित किया जाता है—

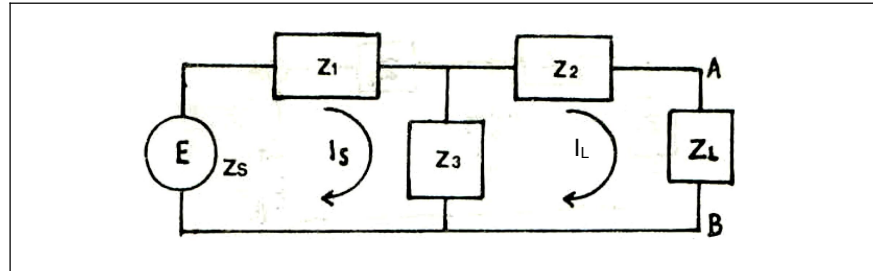
(i) परिपथ की जिस प्रतिबाधा में धारा ज्ञात करना हो उसे लोड प्रतिबाधा Z_L मानते हैं तथा इस प्रतिबाधा को परिपथ से अलग कर सिरें A व B प्राप्त करते हैं।

(ii) खुले सिरों A व B के बीच वोल्टेज ज्ञात करते हैं। यह वोल्टेज थैवनिन समतुल्य वोल्टेज कहलाता है।

(iii) सभी स्रोतों को उनकी आन्तरिक प्रतिबाधाओं के द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं तथा सिरें A व B के बीच प्रतिबाधा ज्ञात करते हैं। यह प्रतिबाधा थैवनिन समतुल्य प्रतिबाधा कहलाती है।

(iv) अन्त में वोल्टेज स्रोत V_T के साथ श्रेणीक्रम में प्रतिबाधा Z_T व लोड प्रतिबाधा Z_L को जोड़कर लोड प्रतिबाधा में धारा ज्ञात कर लेते हैं।

उपपत्ति — चित्र 3.10 में दो टर्मिनल वाला रैखिक नेटवर्क प्रदर्शित है जिसमें दो लूप हैं। लोड प्रतिबाधा Z_L में धारा ज्ञात करने के लिए परिपथ में किरचौफ के वोल्टेज नियमानुसार,



चित्र क्र. 3.10: थैवनिन प्रमेय

$$E = (Z_S + Z_1 + Z_3)I_S - Z_3I_L \quad \dots (1)$$

तथा $0 = (Z_3 + Z_2 + Z_L)I_L - Z_3I_S \quad \dots (2)$

समीकरण (2) से

$$I_S = \frac{Z_2 + Z_3 + Z_L}{Z_3} I_L \quad \dots (3)$$

समीकरण (3) का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$E = \frac{(Z_1 + Z_3 + Z_S)(Z_2 + Z_3 + Z_L)}{Z_3} I_L - Z_3I_L$$

टिप्पणी

$$E = \frac{(Z_2 + Z_L)(Z_1 + Z_3 + Z_S) + Z_3(Z_1 + Z_3 + Z_S) - Z_3^2 I_L}{Z_3}$$

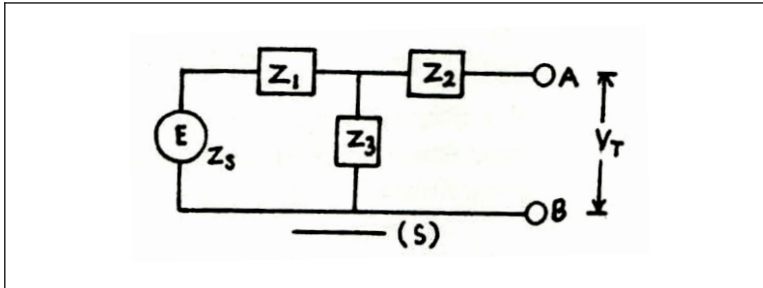
$$E = \frac{(Z_2 + Z_L)(Z_1 + Z_3 + Z_S) + Z_3(Z_1 + Z_S)}{Z_3} I_L$$

$$\therefore I_L = \frac{EZ_3}{(Z_2 + Z_L)(Z_1 + Z_3 + Z_S) + Z_3(Z_1 + Z_S)}$$

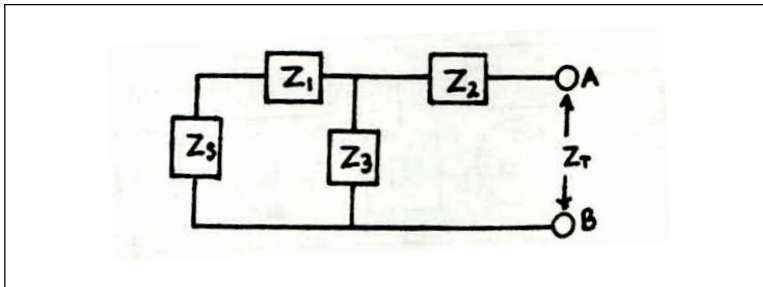
$$I_L = \frac{EZ_3 / Z_1 + Z_3 + Z_S}{Z_2 + Z_L + \frac{Z_3(Z_1 + Z_S)}{Z_1 + Z_3 + Z_S}} \quad \dots (4)$$

अब चित्र 3.11 के अनुसार, बिन्दु A व B के बीच विभवान्तर (जब लोड प्रतिरोध न जुड़ा हो)

$$V_T = \frac{EZ_3}{Z_1 + Z_3 + Z_S} \quad \dots (5)$$



चित्र क्र. 3.11: थैवनिन प्रमेय



चित्र क्र. 3.12: थैवनिन प्रमेय

स्रोतों को आन्तरिक प्रतिबाधा, Z_S से प्रतिस्थापित करने पर चित्र 3.12 के अनुसार A व B के बीच प्रतिबाधा

$$Z_T = Z_2 + \frac{Z_3(Z_1 + Z_S)}{Z_1 + Z_3 + Z_S} \quad \dots (6)$$

चित्र 3.9 से चूँकि लोड प्रतिबाधा में धारा

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L}$$

समी. (5) व (6) से Z_T एवं V_T का मान रखने पर

$$\therefore I_L = \frac{EZ_3 / Z_1 + Z_3 + Z_S}{Z_2 + \frac{Z_3(Z_1 + Z_S)}{Z_1 + Z_2 + Z_S} + Z_L} \quad \dots (7)$$

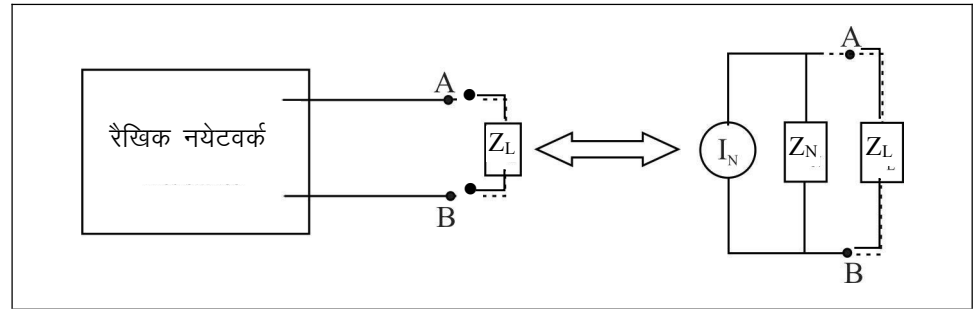
समीकरण (4) व (7) समान हैं अतः थैविनिन प्रमेय की पुष्टि होती है।

3.6.2 नॉर्टन की प्रमेय (Norton's Theorem)

नॉर्टन प्रमेय एक जटिल नेटवर्क का एक समान्तर परिपथ है, जिसमें एक आदर्श धारा स्रोत तथा एक समान्तर प्रतिरोध का परिपथ लिया जाता है। अतः यह प्रमेय उन नेटवर्कों में अधिक उपयोगी होता है जिनमें धारा स्रोत, वि. वा. बलों की तुलना में अधिक उपयोगी हो। इस प्रमेय के अनुसार,

जनित्रों तथा प्रतिरोधों के एक नेटवर्क के दो टर्मिनलों के बीच लोड प्रतिरोध में विद्युत धारा का मान उस धारा के बराबर होता है जिसमें लोड प्रतिरोध को उस नियत धारा स्रोत से जोड़ दिया जाय जिसके द्वारा अन्य नेटवर्क के उन्हीं टर्मिनलों के ऐसे लघु-परिपथी धारा (Short-circuited current) के बराबर हो तथा जोकि एक ऐसे प्रतिरोधक के बीच समान्तर क्रम में रखा हो जिसका प्रतिरोध टर्मिनलों के बीच पूर्व नेटवर्क के प्रतिरोधों के बराबर हो जबकि नेटवर्क के समस्त जनित्र उनके आन्तरिक प्रतिरोधों से प्रतिस्थापित कर दिये गये हों।

चित्र 3.13 में दो टर्मिनल रैखिक नेटवर्क प्रदर्शित है तथा 3.14 में नेटवर्क का नोर्टन समतुल्य प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 3.13: नोर्टन प्रमेय

चित्र क्र. 3.14: समतुल्य परिपथ

नेटवर्क के सभी ऊर्जा स्रोतों को उनकी आन्तरिक प्रतिबाधाओं द्वारा प्रतिस्थापित करने पर नेटवर्क के सिरों के बीच की प्रतिबाधा ही शण्ट प्रतिबाधा कहताली है जो कि नोर्टन समतुल्य धारा स्रोत के समान्तर क्रम में जोड़ी जाती है।

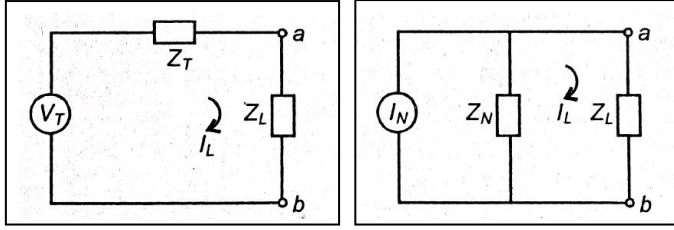
नोर्टन प्रमेय का उपयोग निम्न प्रकार से किया जाता है –

- (i) परिपथ के जिस अवयव में धारा ज्ञात करनी होती है उसे लोड प्रतिबाधा Z_L मानते हैं और उसे परिपथ से अलग कर दो स्वतंत्र सिरों a व b प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी

- (ii) बिन्दुओं a व b को जोड़कर उसमें प्रवाहित धारा I_N ज्ञात करते हैं।
- (iii) समस्त स्रोतों को उनके आन्तरिक प्रतिबाधाओं से प्रतिस्थापित कर स्वतंत्र सिरों a व b के बीच कुल प्रतिबाधा Z_N ज्ञात करते हैं।
- (iv) धारा स्रोत I_N के समान्तर क्रम में प्रतिबाधा Z_N को जोड़कर a व b के बीच Z_L को भी जोड़कर उसमें से प्रवाहित धारा I_L ज्ञात करते हैं।

प्रमाण (Proof) – नोर्टन प्रमेय को सिद्ध करने के लिए दिये गए नेटवर्क का पहले थैवनिन समतुल्य परिपथ खींचते हैं फिर नोर्टन समतुल्य परिपथ खींचकर लोड प्रतिबाधा में से प्रवाहित धारा I_L प्राप्त करते हैं।



चित्र क्र. 3.15(a) नोर्टन प्रमेय चित्र क्र. 3.15(b)

चित्र 3.15(a) के अनुसार Z_L में प्रवाहित धारा

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} \quad \dots (1)$$

चित्र 3.15(b) के अनुसार Z_L में प्रवाहित धारा

$$I_L = \frac{I_N \times Z_N}{Z_N + Z_L} \quad \dots (2)$$

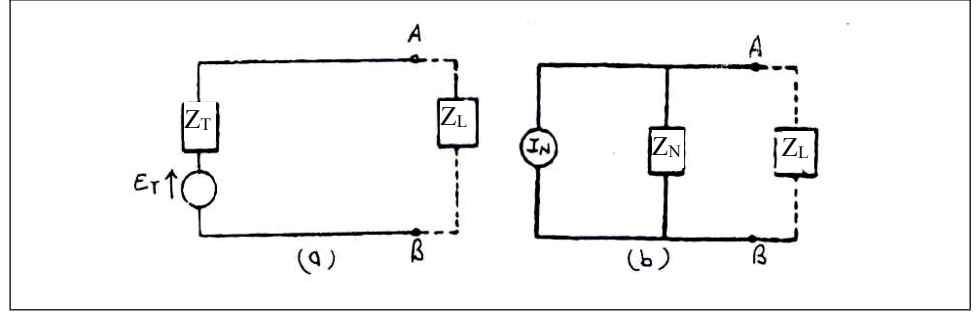
चूँकि थैवनिन प्रमेय में स्वतंत्र सिरों a व b के बीच कुल प्रतिबाधा को Z_T तथा नोर्टन प्रमेय में इसी प्रतिबाधा को Z_N माना जाता है। अर्थात्

$$Z_T = Z_N \quad \text{तथा} \quad \frac{V_T}{Z_T} = I_N$$

अतः समी. (1) एवं (2) से प्राप्त धाराएँ समान हैं अतः नोर्टन प्रमेय सिद्ध होता है।

थैवनिन तथा नोर्टन तुल्य परिपथों की द्वैतता (Duality of Thevenin's and Norton's Equivalent Circuits)

माना कि एक ही नेटवर्क के लिए थैवनिन तथा नोर्टन के तुल्य परिपथ चित्र 3.16(a) तथा (b) में प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 3.16

लोड Z_L से होकर थैवनिन के तुल्य परिपथ में धारा I_L

$$I_2 = \frac{E_T}{Z_T + Z_L} \quad \dots (1)$$

लोड Z_L में नॉर्टन के तुल्य परिपथ में धारा I_L का मान होगा

$$I_L = \frac{I_N Z_N}{Z_N + Z_L} \quad \dots (2)$$

परन्तु $Z_N = Z_T$ (दोनों प्रमेयों में आन्तरिक प्रतिरोध की परिभाषा से)

$$\therefore Z_N = Z_T = Z_i \text{ (माना)}$$

अतः समीकरण (1) तथा (2) को निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

$$I_2 = \frac{E_T}{Z_i + Z_L} \text{ तथा } I_L = \frac{I_N Z_i}{Z_i + Z_L} \quad \dots (3)$$

थैवनिन के तुल्य परिपथ की नॉर्टन धारा I_N

$$I_N = \frac{E_T}{Z_T} = \frac{E_T}{Z_i} \text{ अर्थात् } I_N Z_i = E_T$$

समी. (3) से

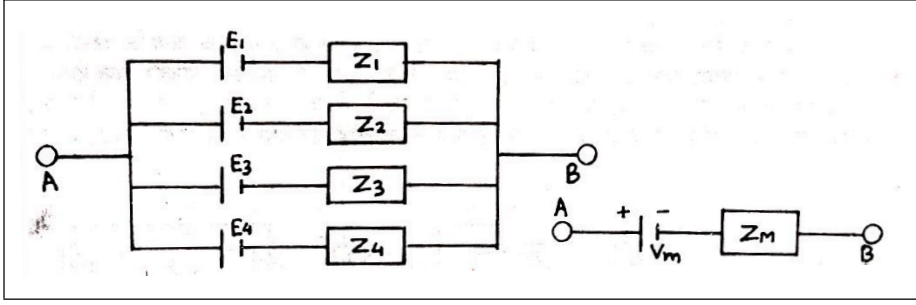
$$I_2 = I_L = \frac{E_T}{Z_i + Z_L}$$

अतः थैवनिन तथा नॉर्टन के तुल्य परिपथों से लोड धारा के समान मान प्राप्त है। अतः किसी ज्ञात नेटवर्क में सुविधानुसार दोनों में से किसी भी प्रमेय का उपयोग किया जा सकता है।

3.6.3 मिलमैन प्रमेय (Millman's Theorem)

मिलमैन प्रमेय के अनुसार, यदि दो टर्मिनलों वाले रैखिक नेटवर्क में अलग-अलग आन्तरिक प्रतिबाधाओं के ऊर्जा स्रोत परस्पर समान्तर क्रम में जुड़े हों तो उन्हें एक वोल्टेज स्रोत V_M तथा उसके श्रेणीक्रम में जुड़ी एक समतुल्य प्रतिबाधा Z_M से प्रतिस्थापित किया जा सकता है, यह नोर्टन प्रमेय का विस्तारित रूप है अर्थात्

$$V_M = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4} + \dots$$



चित्र क्र. 3.17: मिलमैन प्रमेय

चित्र 3.17 में A व B टर्मिनलों के बीच चार नियत वोल्टेज स्रोत E_1 , E_2 , E_3 व E_4 परस्पर समान्तर क्रम में जुड़े हैं जिनकी आन्तरिक प्रतिबाधाएँ क्रमशः Z_1 , Z_2 , Z_3 व Z_4 हैं। इस नेटवर्क को वोल्टेज स्रोत V_M के साथ श्रेणीक्रम में जुड़ी समतुल्य प्रतिबाधा Z_M से प्रतिस्थापित किया जा सकता है जहाँ

$$V_M = \frac{\frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}}$$

या
$$V_M \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4}$$

या
$$\frac{V_M}{Z_M} = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4} \quad \text{जहाँ} \quad \frac{1}{Z_M} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \dots (1)$$

उपपत्ति— चित्र 3.17 में यदि A व B सिरों के बीच समतुल्य वोल्टेज V_M है तथा E_1 , E_2 , E_3 व E_4 वोल्टेज स्रोतों से ली गयी धाराएँ क्रमशः I_1 , I_2 , I_3 व I_4 हैं, तो

$$V_M = E_1 - I_1 Z_1; \quad V_M = E_2 - I_2 Z_2, \quad V_M = E_3 - I_3 Z_3$$

$$\text{तथा } V_M = E_4 - I_4 Z_4$$

$$\text{या } \frac{V_M}{Z_1} = \frac{E_1}{Z_1} - I_1; \quad \frac{V_M}{Z_2} = \frac{E_2}{Z_2} - I_2, \quad \frac{V_M}{Z_3} = \frac{E_3}{Z_3} - I_3 \quad \text{तथा} \quad \frac{V_M}{Z_4} = \frac{E_4}{Z_4} - I_4$$

सभी को जोड़ने पर,

$$V_M \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4} - (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

लेकिन किरचौफ के नियमानुसार बिन्दु A पर कुल धारा शून्य होगी, क्योंकि A व B टर्मिनलों से आगे परिपथ खुला है, अर्थात् $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$

$$\therefore V_M \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right) = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4}$$

टिप्पणी

या
$$\frac{V_M}{Z_M} = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} + \frac{E_4}{Z_4}$$

जहाँ
$$\frac{1}{Z_M} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}$$

यही मिलमैन की प्रमेय है।

3.6.4 अधिकतम सामर्थ्य (शक्ति) स्थानान्तरण प्रमेय (Maximum Power Transfer Theorem)

अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण प्रमेय के अनुसार, प्रतिबाधाओं तथा ऊर्जा स्रोतों से निर्मित दो टर्मिनल वाले रैखिक नेटवर्क को थैविनिन प्रमेय के अनुसार समतुल्य परिपथ से प्रतिस्थापित करने पर (जिसमें एक वोल्टेज स्रोत V_T तथा उसके श्रेणीक्रम में एक रैखिक प्रतिबाधा Z_T जुड़ी हो) परिपथ में अधिकतम शक्ति स्थानान्तरण के लिये लोड की प्रतिबाधा, परिपथ की समतुल्य रैखिक प्रतिबाधा के सम्मिश्र संयुग्म (complex conjugate) के बराबर होनी चाहिये।

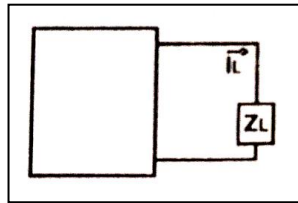
अर्थात् लोड का ओमीय प्रतिरोध, समतुल्य थैविनिन प्रतिरोध के बराबर होना चाहिए तथा लोड की प्रतिघात, समतुल्य थैविनिन प्रतिघात की संयुग्मी (conjugate) होनी चाहिए।

उपपत्ति— चित्र 3.18(a) में एक रैखिक सम्मिश्र नेटवर्क प्रदर्शित है जिसमें लोड प्रतिबाधा Z_L में अधिकतम शक्ति स्थानान्तरित की जानी है। थैविनिन प्रमेय के अनुसार चित्र 3.18(b) में इस नेटवर्क को एक वोल्टेज स्रोत V_T के साथ श्रेणीक्रम में जुड़े समतुल्य प्रतिबाधा Z_T के द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है। अतः लोड प्रतिबाधा Z_L में धारा

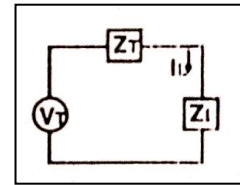
$$I_L = \frac{V_T}{|Z_T + Z_L|}$$

थैविनिन प्रतिबाधा Z_T एक सम्मिश्र राशि है अतः थैविनिन प्रतिबाधा Z_T का प्रतिरोध R_T तथा प्रतिघात (reactance) X_T है तो

$$Z_T = R_T + jX_T \text{ जहाँ } j = \sqrt{-1}$$



(a) दिया गया परिपथ



(b) थैविनिन समतुल्य परिपथ

चित्र क्र. 3.18: अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण प्रमेय

इसी प्रकार, लोड प्रतिबाधा Z_L भी एक सम्मिश्र राशि है तथा यदि लोड प्रतिबाधा Z_L का प्रतिरोध R_L तथा प्रतिघात X_L है तो

$$Z_L = R_L + jX_L$$

तब $|Z_T + Z_L| = \sqrt{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}$

तथा $I_L = \frac{V_T}{\sqrt{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}}$

लोड पर प्राप्त शक्ति

$$P_L = I_L^2 R_L = \frac{V_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^2 + (X_T + X_L)^2}$$

अब यदि X_L परिवर्ती है तो लोड पर अधिकतम शक्ति प्राप्त करने के लिये आवश्यक शर्त

$$X_L + X_T = 0 \text{ या } X_L = -X_T$$

अतः $(P_L)_{\max} = \frac{V_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^2} \dots (1)$

यदि R_L स्थिर न हो अर्थात् परिवर्ती हो P_L का मान अधिकतम होने के लिये $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$

या $\frac{V_T^2 [(R_T + R_L)^2 \times 1 - R_L \times 2(R_T + R_L)]}{(R_T + R_L)^4} = 0$

या $\frac{V_T^2 (R_T + R_L) [R_T + R_L - 2R_L]}{(R_T + R_L)^4} = 0$

$$\frac{V_T^2 (R_T + R_L)(R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} = 0$$

या $R_T + R_L - 2R_L = 0$ या $R_L = R_T \dots (2)$

उपर्युक्त समीकरणों से स्पष्ट है कि लोड पर अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण के लिये $Z_L = R_L + jX_L = R_T - jX_T$, अर्थात् लोड प्रतिबाधा, समतुल्य थैवनिन प्रतिबाधा की सम्मिश्र संयुग्म (complex conjugate) होनी चाहिए। तब समीकरण (1) में मान रखने पर

$$P_{\max} = \frac{V_T^2}{4R_L}$$

3.6.5 अध्यारोपण प्रमेय (Superposition Theorem)

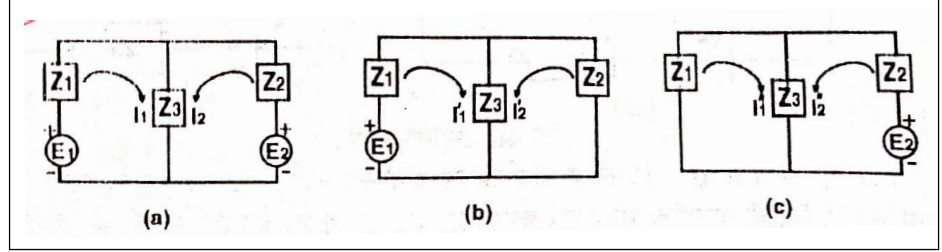
इस प्रमेय के अनुसार, जब किसी रैखिक प्रतिबाधा नेटवर्क में दो या दो से अधिक ऊर्जा स्रोत सक्रिय होते हैं तो नेटवर्क के किसी एक बिन्दु पर प्रवाहित धारा का

टिप्पणी

टिप्पणी

मान, उन सभी धाराओं के योग के बराबर होता है जो अलग-अलग प्रत्येक स्रोत को सक्रिय मानकर तथा शेष सभी स्रोतों को निष्क्रिय मानकर प्राप्त होती है।

उपपत्ति— माना चित्र 3.19 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में दो वोल्टेज स्रोत E_1 व E_2 हैं जिनकी आन्तरिक प्रतिबाधाएँ क्रमशः Z_1 व Z_2 हैं तथा इन स्रोतों के कारण लोड प्रतिबाधा Z_3 में धारा I_1 व I_2 प्रवाहित होती है।



चित्र क्र. 3.19: अध्यारोपण प्रमेय

माना दो लूपों में धारा I_1 व I_2 प्रवाहित हो रही है अतः किरचौफ के नियम से,

$$(Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3I_2 = E_1 \text{ तथा } (Z_2 + Z_3)I_2 + Z_3I_1 = E_2$$

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$I_1 = \frac{E_1(Z_2 + Z_3) - E_2Z_3}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2}$$

$$= \frac{E_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} - \frac{E_2Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

तथा
$$I_2 = \frac{E_1Z_3 - E_2(Z_1 + Z_3)}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2}$$

या
$$I_2 = \frac{-E_1Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} + \frac{E_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$
 ... (1)

अब केवल E_1 स्रोत को सक्रिय मानने पर तथा E_2 को निष्क्रिय मानने पर अर्थात् $E_2 = 0$ चित्र 3.19(b) के अनुसार किरचौफ के नियम से,

$$(Z_1 + Z_3)I'_1 + Z_3I'_2 = E_1 \text{ तथा } (Z_2 + Z_3)I'_2 + Z_3I'_1 = 0$$

उपर्युक्त समीकरण को हल करने पर,

$$I'_2 = \frac{E_1(Z_2 + Z_3)}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2} = \frac{E_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

तथा
$$I'_2 = \frac{-E_1Z_3}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2} + \frac{-E_1Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$
 ... (2)

इसी प्रकार, केवल E_2 स्रोत को सक्रिय मानने तथा E_1 को निष्क्रिय मानने पर अर्थात् $E_1 = 0$ चित्र 3.19(c) के अनुसार किरचौफ के नियम से,

$$(Z_1 + Z_3)I_1'' + Z_3I_2'' = E_2 \quad \text{तथा} \quad (Z_2 + Z_3)I_2'' + Z_3I_1'' = 0$$

उपर्युक्त समीकरण को हल करने पर,

$$I_1'' = \frac{-E_2Z_3}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2} = \frac{-E_2Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

$$\text{तथा} \quad I_2'' = \frac{E_2(Z_1 + Z_3)}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2} + \frac{E_2(Z_1 + Z_3)}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}$$

... (3)

समीकरण (1), (2) व (3) से स्पष्ट है कि

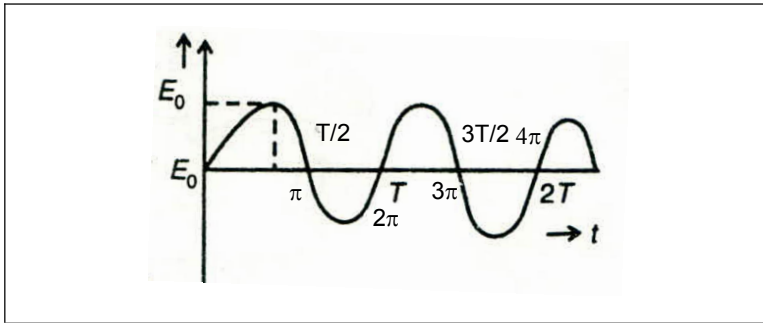
$$I_1 = I_1' + I_1'' \quad \text{तथा} \quad I_2 = I_2' + I_2''$$

इस प्रकार अध्यारोपण प्रमेय सिद्ध होती है।

टिप्पणी

3.7 प्रत्यावर्ती धाराएँ (Alternating Currents)

वह धारा जो परिमाण तथा दिशा में आवर्ती रूप से परिवर्तित होती है, प्रत्यावर्ती धारा कहलाती है। प्रत्यावर्ती धारा परिपथों में वह स्थिति जिसमें धारा तथा वोल्टता बिना आयाम में परिवर्तन किये ज्यावक्रीय (sinusoidally) होती है, स्थायी सम्बद्ध होते हैं। प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का स्रोत एक डायनेमो अथवा एक इलेक्ट्रॉनिक निर्वात दौलित्र होता है। किसी समय t पर प्रत्यावर्ती वि. वा बल E को निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं –



चित्र क्र. 3.20: प्रत्यावर्ती धारा

$$E = E_0 \sin \omega t = I_m (E_0 e^{j\omega t})$$

जहाँ I_m का अर्थ काल्पनिक भाग तथा j एक सम्मिश्र संख्या (complex number) हैं, $j = \sqrt{-1}$, ω प्रत्यावर्ती वोल्टता की कोणीय आवृत्ति तथा E_0 प्रत्यावर्ती वि. वा. बल का शिखर मान (peak value) अथवा आयाम (amplitude) है,

टिप्पणी

प्रत्यावर्ती वोल्टता की आवृत्ति $f = \omega / 2\pi$ तथा प्रत्यावर्ती वोल्टता का आवर्तकाल $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ होता है।

किसी परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा, जो किसी प्रत्यावर्ती वि. वा. बल के स्रोत से प्रवाहित होती है, प्रेरकत्व L , प्रतिरोध R तथा धारिता C की सहायता से नियन्त्रित किया जा सकता है। L तथा C की उपस्थिति के कारण यह आवश्यक नहीं है कि आरोपित धारा वि. वा. बल की कला में नहीं हो। अतः सामान्यतया, प्रत्यावर्ती धारा को निम्न प्रकार से निरूपित किया जा सकता है –

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

जहाँ ϕ कला (phase) का मान है जो परिपथ की प्रकृति के अनुसार धनात्मक, शून्य अथवा ऋणात्मक हो सकता है।

ज्यावक्रीय तरंग का माध्य मान एक सम्पूर्ण चक्र पर माध्य होता है तथा इसका मान शून्य होता है, क्योंकि इसमें समान धनात्मक तथा ऋणात्मक अर्द्ध चक्र होते हैं। गणितीय रूप से सम्पूर्ण चक्र पर AC का मध्यमान निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{\int_0^T I dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T I_0 \sin \omega t dt}{\int_0^T dt} \\ &= I_0 \frac{\int_0^T \sin \omega t dt}{\int_0^T dt} = I_0 \overline{\sin \omega t} \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ } \overline{\sin \omega t} = \frac{\int_0^T \sin \omega t dt}{\int_0^T dt}$$

$\overline{\sin \omega t}$ एक सम्पूर्ण चक्र पर माध्य मान है तथा इसका मान शून्य होता है। इसे निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं –

$$\begin{aligned} \overline{\sin \omega t} &= \frac{\int_0^T \sin \omega t dt}{\int_0^T dt} = \frac{\left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^T}{T} \\ &= -\frac{1}{\omega T} [\cos \omega T - \cos 0] \end{aligned}$$

चूँकि $\omega = 2\pi / T$ अर्थात्, $\omega T = 2\pi$

$$\therefore \overline{\sin \omega t} = -\frac{1}{2\pi} [\cos 2\pi - \cos 0] = 0$$

$$\therefore (I_{av})_{\text{पूर्ण चक्र}} = 0$$

... (1)

इस प्रकार प्रत्यावर्ती वोल्टता $E = E_0 \sin \omega t$ का सम्पूर्ण चक्र पर माध्य मान शून्य होगा, अर्थात्

$$(E_{av})_{\text{पूर्ण चक्र}} = 0$$

अर्द्ध चक्र पर प्रत्यावर्ती धारा (A.C.) का माध्य मान (Average value of Alternating Current over half cycle) : प्रत्यावर्ती धारा का अर्द्ध चक्र पर माध्य मान निश्चित होता है तथा निम्न प्रकार से प्रदर्शित है—

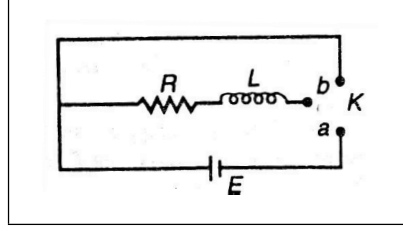
$$\begin{aligned} (I_{av})_{\text{पूर्ण चक्र}} &= \frac{\int_0^{T/2} I dt}{\int_0^{T/2} dt} = \frac{\int_0^{T/2} I_0 \sin \omega t dt}{[t]_0^{T/2}} \\ &= \frac{I_0}{T/2} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{T/2} \\ &= -\frac{2I_0}{\omega T} \left[\cos \frac{\omega T}{2} - \cos 0 \right] \\ &= -\frac{2I_0}{2\pi} [\cos \pi - \cos 0] = -\frac{2I_0}{2\pi} [-1 - 1] = \frac{2I_0}{\pi} \\ (I_{av})_{\text{अर्द्ध चक्र}} &= \frac{2I_0}{2\pi} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

अर्थात् प्रत्यावर्ती धारा का माध्य मान, जबकि माध्य अर्द्ध-चक्र पर लिया गया हो, $2I_0/\pi$ होता है इसी प्रकार प्रत्यावर्ती वोल्टता का एक अर्द्ध चक्र पर माध्य मान $2E_0/\pi$ होगा।

3.8 प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि तथा क्षय : L-R परिपथ (Growth and Decay of Current in a Circuit Containing Resistance and Inductance : L-R Circuit)

चित्र 3.21 में माना प्रतिरोध R तथा प्रेरकत्व कुण्डली L को श्रेणीक्रम में जोड़कर एक द्विमार्गी कुंजी K द्वारा E वि. वा. बल की एक बैटरी से जोड़ा जाता है। चित्र से स्पष्ट है कि द्विमार्गी कुंजी K में स्विच a लगाकर प्रतिरोध व कुण्डली के श्रेणी संयोजन का सम्बन्ध बैटरी से किया जाता है जिससे परिपथ में धारा की वृद्धि होती है और जब स्विच a निकालकर स्विच b लगाने से प्रतिरोध व कुण्डली का बैटरी से सम्बन्ध टूट जाता है तब परिपथ में धारा का क्षय होता है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 3.21: L-R परिपथ

(1) परिपथ में धारा की वृद्धि (Growth of current in circuit) – चित्र 3.21 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में द्विमार्गी कुंजी K का प्लग a लगाया जाता है तो परिपथ में धारा की वृद्धि होती है जिसके फलस्वरूप कुण्डली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स बदलता है तथा कुण्डली में वि. वा. बल प्रेरित हो जाता है। लेंज के नियमानुसार यह प्रेरित वि. वा. बल परिपथ में धारा की वृद्धि का विरोध करता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में धारा धीरे-धीरे अधिकतम मान तक पहुँचती है।

माना परिवर्ती अवस्था में जबकी धारा के मान में लगातार वृद्धि हो रही है तब किसी क्षण t पर धारा का मान I है तथा धारा परिवर्तन की दर dI/dt है। धारा के मान में परिवर्तन के कारण कुण्डली L में प्रेरित वि. वा. बल $= -LdI$ है (यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि प्रेरित वि. वा. बल बैटरी के वि. वा. बल E का विरोध करता है)। अतः

ओह्म के नियमानुसार, यह प्रभावी वि. वा. बल, प्रतिरोध R के सिरों पर उत्पन्न विभवान्तर $V = RI$ के बराबर होना चाहिये। अतः प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व मुक्त परिपथ में वि. वा. बल का समीकरण, किरचौफ के द्वितीय नियम से

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \quad \text{या} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \quad \dots (1)$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों ओर $e^{\frac{Rt}{L}}$ से गुणा करने पर,

$$e^{\frac{Rt}{L}} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$\text{या} \quad \frac{d}{dt} [I e^{\frac{Rt}{L}}] = \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}}$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{d}{dt} (I e^{\frac{Rt}{L}}) dt = \int \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}} dt + C$$

जहाँ C समाकलन नियतांक है।

$$\text{या} \quad I e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{L} \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{(R/L)} + C$$

$$\text{या} \quad I e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}} + C \quad \dots (2)$$

प्रारम्भ में परिपथ में धारा शून्य है, अर्थात् $t = 0$ पर $I = 0$

अतः समीकरण (2) से, $0 = \frac{E}{L} + C$ या $C = -\frac{E}{L}$

समीकरण (2) में C का मान रखने पर,

$$Ie^{Rt/L} = \frac{E}{L}e^{Rt/L} - \frac{E}{R}$$

या $I = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-Rt/L} = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$

लेकिन $\frac{E}{R} = I_0$ (= परिपथ में अधिकतम धारा का मान)

$$\therefore I = I_0(1 - e^{-Rt/L}) \quad \dots (3)$$

उपर्युक्त समीकरण (3) प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में किसी भी क्षण धारा का मान प्रदर्शित करता है। अतः

- (i) प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि चरघातांकी नियम (exponential law) के अनुसार होती है, अर्थात् प्रारम्भ में धारा तेजी से बढ़ती है तथा फिर धीरे-धीरे बढ़ती है।
- (ii) $I = I_0$ जबकि $t = \infty$, अर्थात् परिपथ में धारा को अपना अधिकतम स्थायी मान प्राप्त करने में अनन्त समय लगता है।
- (iii) राशि L/R की विमायें व समय t की विमायें समान हैं। अतः राशि L/R को परिपथ का **कालांक** अथवा **समय स्थिरांक** (time constant) कहते हैं तथा इसे अक्षर λ ($= L/R$) से प्रदर्शित करते हैं। तब समीकरण (3) से, $I = I_0(1 - e^{-t/\lambda})$

यदि $t = \lambda (= L/R)$, तो $I = I_0(1 - e^{-1}) = I_0\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

लेकिन $\frac{1}{e} = \frac{1}{2.718} = 0.368$, अतः $I = I_0(1 - 0.368) = 0.632I_0$

अतः प्रेरकत्व युक्त प्रतिरोध परिपथ का कालांक या समय नियतांक वह समय है जिसमें धारा का मान शून्य से बढ़कर अपने अधिकतम मान का **0.632** (अर्थात् **63.2%**) हो जाता है।

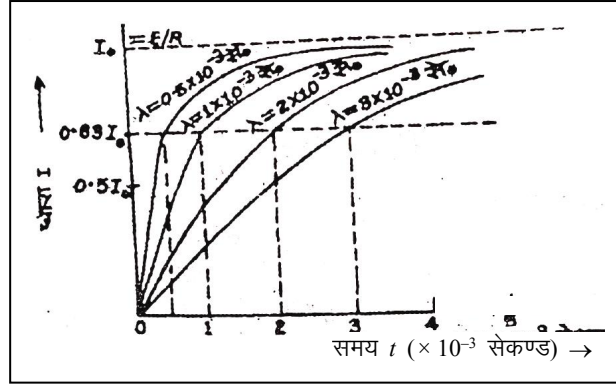
- (iv) परिपथ में धारा-वृद्धि की दर,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}[I_0(1 - e^{-Rt/L})]$$

$$= I_0 \left[-e^{Rt/L} \left(-\frac{R}{L} \right) \right] = \frac{E}{R} \times \frac{R}{L} e^{-Rt/L}$$

$$= \frac{E}{L} e^{-Rt/L} = \frac{R}{L} (I_0 - I) \quad \dots (4)$$

अर्थात् I के मान में वृद्धि होने पर धारा वृद्धि की दर में क्षय होता है तथा धारा वृद्धि की दर समय नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है। समय नियतांक जितना अधिक होता है धारा वृद्धि की दर उतनी ही कम होती है।



चित्र क्र. 3.22: L-R परिपथ में समय के साथ धारा में वृद्धि

चित्र 3.22 में विभिन्न समय नियतांको के लिये $L-R$ परिपथ में समय के साथ धारा में वृद्धि प्रदर्शित है।

(2) परिपथ में धारा का क्षय (Decay of current in circuit) – जब चित्र 3.21 में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में द्विमार्गी कुंजी K से स्विच a निकालकर स्विच b लगाते हैं तो परिपथ का बैटरी से सम्बन्ध नहीं रह जाता है तथा परिपथ में धारा का क्षय होना प्रारम्भ हो जाता है। परिपथ में धारा क्षय होते समय पुनः कुण्डली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स के मान में परिवर्तन होता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में वि. वा. बल प्रेरित हो जाता है। यह प्रेरित वि. वा. बल परिपथ में धारा के क्षय होने का विरोध करता है।

माना कि धारा के क्षय होते समय किसी क्षण t पर परिपथ में धारा I है तथा परिपथ में धारा क्षय होने की दर dI/dt है। धारा के मान में परिवर्तन के कारण कुण्डली में प्रेरित वि. वा. बल $= -L dI/dt$ (जहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह बताता है कि यह प्रेरित वि. वा. बल परिपथ में धारा के क्षय होने का विरोध करता है)।

$V(=RI)$ के बराबर होना चाहिये। अर्थात् किरचौफ के नियम से

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

$$-L \frac{dI}{dt} = RI \quad \text{या} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dI}{I} = \int \frac{-R}{L} dt + C \quad \text{या} \quad \log_e I = \frac{-R}{L} t + C \quad \dots (5)$$

जहाँ C समाकलन नियतांक है।

लेकिन यदि प्रारम्भ में परिपथ में अधिकतम स्थायी धारा $I_0 = E/R$ है तो

$$t = 0 \text{ पर, } I = I_0,$$

अतः $\log_e I = \frac{-R}{L}t + \log_e I_0$

या $\log_e I - \log_e I_0 = \frac{-R}{L}t$ या $\log_e \left(\frac{I}{I_0} \right) = \frac{-R}{L}t$

या $\frac{I}{I_0} = e^{-Rt/L}$ या $I = I_0 e^{-Rt/L}$... (6)

समीकरण (6) प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा क्षय होते समय किसी भी क्षण t पर धारा का मान बताता है।

स्पष्ट है कि,

- (i) प्रेरकत्व युक्त प्रतिरोध परिपथ में धारा का क्षय चरघातांकी नियम (exponential law) के अनुसार होता है, अर्थात् प्रारम्भ में धारा तेजी से क्षय होती है तथा फिर धीरे-धीरे क्षय होती है।
- (ii) $I = 0$ जबकि $t = \infty$, अर्थात् परिपथ में धारा को अपने अधिकतम मान से शून्य होने में अनन्त समय लगता है।
- (iii) राशि $L/R =$ परिपथ का कालांक अथवा समय नियतांक (time constant) λ .

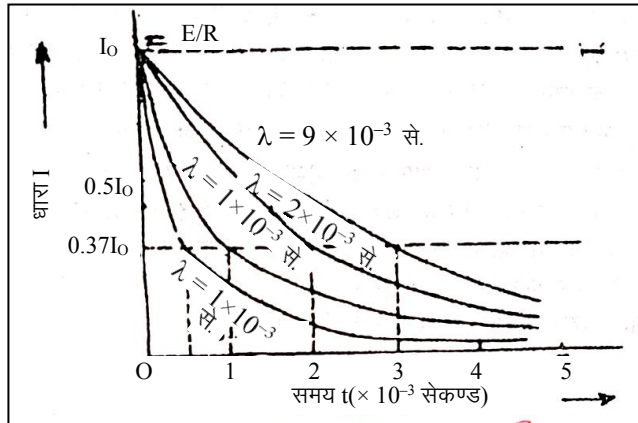
\therefore समीकरण (6) से, $I = I_0 e^{-t/\lambda}$

यदि $t = \lambda(L/R)$, तो $I = I_0 e^{-1} = I_0 \times \frac{1}{2.718} = 0.368 I_0$

अतः प्रेरकत्व युक्त प्रतिरोध परिपथ का कालांक अथवा समय नियतांक वह समय है जिसमें धारा का मान अपने अधिकतम स्थायी मान से घटकर 0.368 गुना (अर्थात् 36.8%) रह जाता है।

- (iv) परिपथ में धारा-क्षय की दर

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} (I_0 e^{-Rt/L})$$



चित्र क्र. 3.23: L-R परिपथ में समय के साथ धारा का क्षय

टिप्पणी

$$\text{या } \frac{dI}{dt} = I_0 e^{-Rt/L} \left(-\frac{R}{L} \right)$$

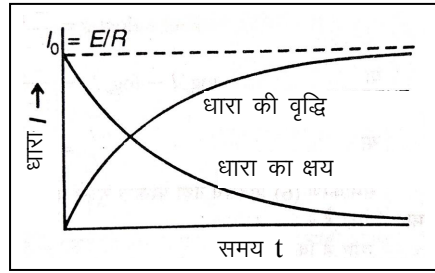
$$= -\left(\frac{R}{L} \right) I_0 e^{-Rt/L}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{-R}{L} I \quad \dots (7)$$

यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि परिपथ में समय बढ़ने पर धारा का क्षय होता है।

परिपथ में धारा का मान घटने पर धारा क्षय की दर भी घटती है तथा धारा क्षय की दर समय नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

चित्र 3.23 में विभिन्न समय नियतांकों के लिये $R-L$ परिपथ में समय के साथ धारा का क्षय प्रदर्शित है। चित्र 3.24 में धारा में वृद्धि तथा धारा में क्षय एक साथ प्रदर्शित है।

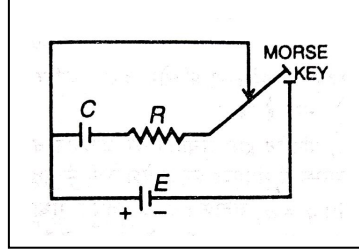


चित्र क्र. 3.24: L-R परिपथ में धारा की वृद्धि तथा धारा का क्षय

3.9 प्रतिरोध तथा संधारित्र युक्त परिपथ में धारा अथवा प्रतिरोध के द्वारा संधारित्र का आवेशन तथा निरावेशन (Current in a Circuit Containing Resistance and Capacitance or Charging and Discharging of a Condenser through a Resistance) $C-R$ परिपथ

चित्र 3.25 में माना C धारिता के एक संधारित्र तथा प्रतिरोध R को श्रेणीक्रम में मोर्स कुंजी के द्वारा E वि. वा. बल की एक बैटरी से जोड़ा गया है। चित्र से स्पष्ट है कि जब मोर्स कुंजी को दबाते हैं तो संधारित्र तथा प्रतिरोध दोनों बैटरी के साथ श्रेणीक्रम में जुड़ जाते हैं तथा परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है जिससे संधारित्र आवेशित होने लगता है, अर्थात् संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर उत्पन्न हो जाता है। जैसे-जैसे संधारित्र पर आवेश बढ़ता है, इसकी प्लेटों के बीच विभवान्तर भी बढ़ता है। जब संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर, बैटरी के वि. वा. बल E के बराबर हो जाता है तो संधारित्र पूर्णतः आवेशित हो जाता है तथा

परिपथ में धारा प्रवाह रुक जाता है। इस प्रकार परिपथ में धारा प्रारम्भ में अधिक होती है तथा धीरे-धीरे यह कम होती जाती है। इसके विपरीत, जब संधारित्र के पूर्णतः आवेशित हो जाने के बाद मोर्स कुंजी को छोड़ते हैं तो प्रतिरोध तथा संधारित्र परिपथ का बैटरी से सम्बन्ध टूट जाता है तथा संधारित्र निरावेशित होने लगता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में धारा धीरे-धीरे घटने लगती है।



चित्र क्र. 3.25: C-R परिपथ

(1) संधारित्र का आवेशन (Charging of condenser) – स्पष्ट है कि जब चित्र 3.25 में मोर्स कुंजी को दबाया जाता है तो परिपथ में अधिकतम धारा प्रवाहित होना प्रारम्भ हो जाता है जिससे संधारित्र आवेशित होने लगता है (अर्थात् संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर बढ़ने लगता है)। संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर, बैटरी द्वारा आरोपित वि. वा. बल के विपरीत होता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में धारा घटने लगती है, अन्ततः जब संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर, बैटरी के वि. वा. बल के बराबर हो जाता है (अर्थात् संधारित्र पूर्णतः आवेशित हो जाता है), तब परिपथ में धारा शून्य हो जाती है।

माना किसी क्षण t पर संधारित्र पर आवेश q है तथा उस क्षण परिपथ में धारा $I = dq/dt$ है। इस क्षण संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर $V = q/c$ होगा जो बैटरी द्वारा आरोपित वि. वा. बल E के विपरीत होगा।

ओह्म के नियमानुसार यह प्रभावी वि. वा. बल, प्रतिरोध R के सिरों पर उत्पन्न विभवान्तर RI के बराबर होना चाहिये। अतः प्रतिरोध के द्वारा संधारित्र के आवेशन के दौरान वि. वा. बल का समीकरण किरचौफ के द्वितीय नियम से

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \text{तथा} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CR}q = \frac{E}{R}$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों ओर $e^{t/CR}$ से गुणा करने पर,

$$e^{t/CR} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{CR} q e^{t/CR} = \frac{E}{R} e^{t/CR} \quad \text{या} \quad \frac{d}{dt} (q e^{t/CR}) = \frac{E}{R} e^{t/CR}$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{d}{dt} (q e^{t/CR}) dt = \int \frac{E}{R} e^{t/CR} dt + A$$

जहाँ A समाकलन नियतांक है।

$$\text{या} \quad q e^{t/CR} = \frac{E}{R} \frac{e^{t/CR}}{(1/CR)} + A \quad \text{या} \quad q e^{t/CR} = EC e^{t/CR} + A \dots (1)$$

प्रारम्भ में संधारित्र पर आवेश शून्य है, अर्थात् $t = 0$ पर $q = 0$, अतः समीकरण (1) से

$$0 = EC + A \text{ या } A = -EC$$

समीकरण (1) में A का मान रखने पर

$$qe^{t/CR} = ECe^{t/CR} - EC$$

$$\text{या } q = EC - ECe^{t/CR} = EC(1 - e^{-t/CR})$$

लेकिन $EC = q_0$ (= संधारित्र पर अधिकतम आवेश जब वह पूर्णतः आवेशित हो जाता है)।

$$\therefore q = q_0(1 - e^{-t/CR}) \quad \dots (2)$$

उपर्युक्त समीकरण प्रतिरोध द्वारा संधारित्र के आवेशन के दौरान किसी भी क्षण संधारित्र का आवेश बताता है। स्पष्ट है कि –

- (i) प्रतिरोध द्वारा संधारित्र का आवेशन चरघातांकी नियम (exponential law) के अनुसार होता है,
- (ii) $q = q_0$ जबकि $t = \infty$, अर्थात् संधारित्र को पूर्णतः आवेशित होने में अनन्त समय लगता है।
- (iii) राशि CR की विमायें ठीक वही हैं जो समय t की विमायें हैं। अतः राशि CR को परिपथ का **कालांक** अथवा **समय स्थिरांक** (time constant) कहते हैं तथा इसे अक्षर λ द्वारा प्रदर्शित करते हैं (अर्थात् $\lambda = CR$)। तब समीकरण (2) से, $q = q_0(1 - e^{-t/\lambda})$

$$\text{यदि } t = \lambda (= CR) \text{ हो तो } q = q_0(1 - e^{-1}) = q_0\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.632 q_0$$

अतः प्रतिरोध युक्त संधारित्र के आवेशन में परिपथ का कालांक या समय नियतांक वह समय है जिसमें संधारित्र अपने अधिकतम आवेश का 0.632 (या 63.2%) मान प्राप्त कर लेता है।

$$(iv) \text{ परिपथ में धारा } I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[q_0(1 - e^{-t/CR})]$$

$$= q_0 \left[-e^{-t/CR} \left(-\frac{1}{CR} \right) \right] = EC \times \frac{1}{CR} e^{-t/CR}$$

$$= \frac{E}{R} e^{-t/CR} = \frac{1}{CR} (q_0 - q) \quad \dots (3)$$

संधारित्र पर आवेश बढ़ाने पर परिपथ में धारा कम होती है तथा आवेश के किसी मान के लिये धारा समय नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

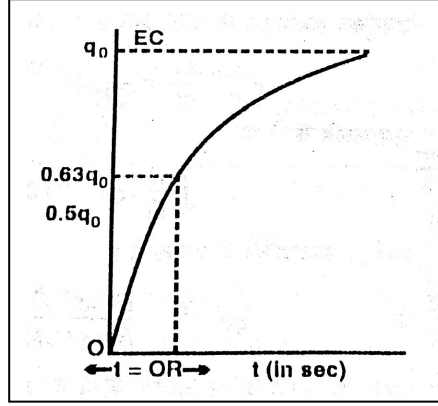
(2) संधारित्र का निरावेशन (Discharging of a condenser) – चित्र

3.26 में संधारित्र को पूर्णतः आवेशित करके मोर्स कुंजी छोड़ने पर संधारित्र व प्रतिरोध का बैटरी से, सम्बन्ध विच्छेद हो जाता है जिसके फलस्वरूप संधारित्र

टिप्पणी

निरावेशित होने लगता है तथा परिपथ में धारा प्रवाहित होने लगती है। जैसे-जैसे संधारित्र पर आवेश घटता जाता है, परिपथ में धारा घटती जाती है।

विद्युत धारा व
जैव विद्युत



चित्र क्र. 3.26: C-R परिपथ में समय के साथ आवेश में वृद्धि

माना संधारित्र के निरावेशन के दौरान किसी क्षण t पर संधारित्र पर आवेश q है तथा परिपथ में धारा $I = -dq/dt$ है। यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह बताता है कि समय t के साथ आवेश घट जाता है। इस क्षण संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर $V = q/C$ होगा। चूँकी परिपथ में कोई बाह्य वि. वा. बल नहीं है, अतः यह विभवान्तर, प्रतिरोध के सिरों पर विभवान्तर RI के बराबर होना चाहिये। अर्थात्

$$\frac{q}{C} = RI \quad \text{या} \quad \frac{q}{C} = -R \frac{dq}{dt}$$

या
$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dq}{q} = \int -\frac{1}{RC} dt + A$$

जहाँ C समाकलन नियतांक है।

या
$$\log_e q = -\frac{1}{RC} t + A \quad \dots (4)$$

लेकिन यदि प्रारम्भ में संधारित्र पर अधिकतम आवेश $q_0 = EC$ है तो $t = 0$ पर $q = q_0$

अतः
$$\log_e q_0 = 0 + A \quad \text{या} \quad A = \log_e q_0$$

A का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$\log_e q = -\frac{1}{RC} t + \log_e q_0$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\text{या } \log_e q - \log_e q_0 = \frac{-1}{RC} t \text{ या } \log_e \left(\frac{q}{q_0} \right) = \frac{-1}{RC} t$$

$$\text{या } \frac{q}{q_0} = e^{-t/RC} \text{ या } q = q_0 e^{-t/RC} \quad \dots (5)$$

समीकरण (5) प्रतिरोध द्वारा संधारित्र के निरावेशन के दौरान किसी भी क्षण t पर संधारित्र पर आवेश का मान बताता है। स्पष्ट है कि -

- (i) प्रतिरोध द्वारा संधारित्र का निरावेशन चरघातांकी नियम के अनुसार होता है, अर्थात् प्रारम्भ में संधारित्र का आवेश तेजी से घटता है तथा फिर धीरे-धीरे घटता है।
- (ii) $q = 0$, जबकि $t = \infty$, अर्थात् संधारित्र के पूर्णतः निरावेशित होने में अनन्त समय लगता है।
- (iii) राशि $CR =$ परिपथ का कालांक अथवा समय नियतांक (time constant) λ है।

$$\therefore \text{समीकरण (5) से, } q = q_0 e^{-t/\lambda}$$

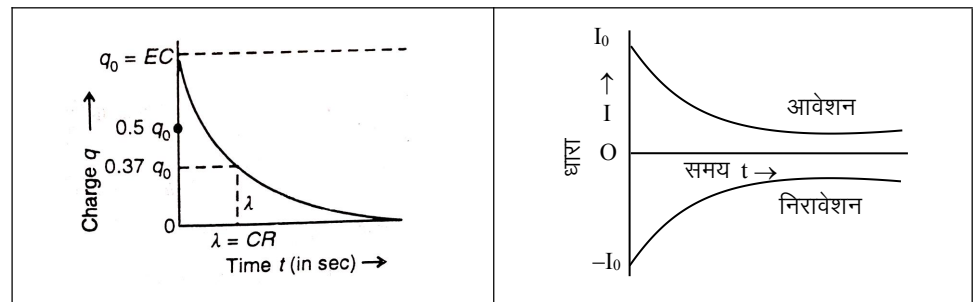
$$\text{यदि } t = \lambda (= CR), \text{ तो } q = q_0 e^{-1} = q_0 \times \frac{1}{2.718} = 0.368 q_0$$

अतः प्रतिरोध युक्त संधारित्र के निरावेशन में परिपथ का कालांक अथवा समय नियतांक वह समय है जिसमें संधारित्र का आवेश घटकर अधिकतम मान का 0.368 गुना (अर्थात् 36.8%) रह जाता है।

- (iv) परिपथ में धारा

$$\begin{aligned} I &= -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}(q_0 e^{-t/CR}) = -q_0 e^{-t/CR} \left(-\frac{1}{CR} \right) \\ &= \frac{1}{CR} q = \frac{E}{R} e^{t/CR} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

संधारित्र पर आवेश घटने पर परिपथ में धारा बढ़ती है तथा आवेश क्षय होने की दर समय नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है।



चित्र क्र. 3.27(a): C-R परिपथ में समय के साथ आवेश का क्षय

चित्र क्र. 3.27(b): C-R परिपथ में आवेशन तथा निरावेशन के दौरान धारा का समय के साथ परिवर्तन

चित्र 3.27(a) में संधारित्र के निरावेशन के दौरान संधारित्र के आवेश का क्षय प्रदर्शित है।

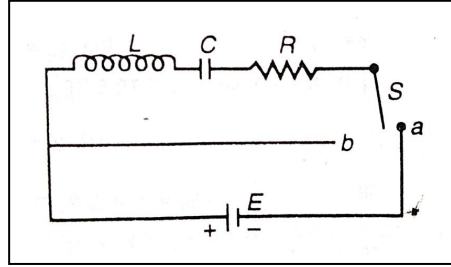
चित्र 3.27(b) में आवेशन व निरावेशन के दौरान परिपथ में धारा का समय के साथ परिवर्तन एक साथ प्रदर्शित है।

टिप्पणी

3.10 LCR श्रेणी परिपथ (Series LCR Circuit)

(a) प्रेरकत्व तथा प्रतिरोध से होकर एक संधारित्र का आवेशन (Charging of a capacitor through Inductance and Resistance)

माना एक परिपथ में L प्रेरकत्व की एक कुंडली, C धारिता का एक संधारित्र तथा R प्रतिरोध का एक प्रतिरोधक श्रेणी क्रम में जुड़े हैं तथा E वि. वा. बल की एक बैटरी तथा एक द्वि-पथ कुंजी सम्बद्ध है, बैटरी को स्विच S की सहायता से परिपथ में जोड़ा अथवा हटाया जा सकता है।



चित्र क्र. 3.28: LCR परिपथ

माना स्विच S को a स्थिति में लाकर बैटरी को परिपथ में जोड़ा जाता है जिससे संधारित्र आवेशित होना प्रारम्भ करता है तथा परिपथ में क्षणिक धारा प्रवाहित होने लगती है।

माना आवेशन के दौरान t समय के बाद संधारित्र पर आवेश q तथा परिपथ में धारा I तथा धारा परिवर्तन की दर $\frac{dI}{dt}$ है।

$$\text{संधारित्र पर विभवान्तर, } V_C = \frac{q}{C}$$

$$\text{प्रतिरोध पर विभवान्तर, } V_R = RI$$

$$\text{कुंडली पर विभवान्तर, } V_L = L \frac{dI}{dt}$$

किरचौफ के द्वितीय नियम के अनुसार, वि. वा. बल का समीकरण

$$V_L + V_R + V_C = E$$

$$\text{अर्थात् } L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E \quad \dots (1)$$

टिप्पणी

किन्तु $I = \frac{dq}{dt}$, अतः समीकरण (1) से,

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$\text{अथवा } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L} \quad \dots (2)$$

$$\frac{R}{L} = 2k \quad \text{तथा} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \dots (3)$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2k \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$$

$$\text{अथवा } \frac{d^2q}{dt^2} + 2k \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \left(q - \frac{E}{\omega_0^2 L} \right) = L \quad \dots (4)$$

$$\text{माना } x = q - \frac{E}{\omega_0^2 L} \quad \dots (5)$$

$$\text{अतः } \frac{dx}{dt} = \frac{dq}{dt} \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

समीकरण (4) से

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \dots (6)$$

यह समीकरण अवमंदित सरल आवर्ती दोलक के समीकरण के समान है।
माना इसका हल है

$$x = Ae^{\alpha t} \quad \text{है} \quad \dots (7)$$

$$\text{अतः } \frac{dx}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

इन मानों को समी. (6) में रखने पर

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2k A\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$$\text{अथवा } A e^{\alpha t} [\alpha^2 + 2k\alpha + \omega_0^2] = 0$$

$$\text{चूँकि } A e^{\alpha t} \neq 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 2k\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$= -k \pm \sqrt{(k^2 - \omega_0^2)}$$

अर्थात् $\alpha = -k \pm \beta$ जहाँ $\beta = \sqrt{(k^2 - \omega_0^2)}$

इसका तात्पर्य है कि α के दो मान होंगे,

$$\alpha_1 = -k + \beta \text{ तथा } \alpha_2 = -k - \beta$$

समीकरण (6) का सर्वाधिक सामान्य हल होगा

$$x = A_1 e^{(-k+\beta)t} + A_2 e^{(-k-\beta)t} = e^{-kt} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] \quad \dots (8)$$

जहाँ A_1 तथा A_2 नियतांक है जिनका मान सीमान्त प्रतिबन्धों से ज्ञात किया जाता है।

समीकरण (5) से x का मान समीकरण (8) में रखने पर

$$q = \frac{E}{\omega_0^2 L} + e^{-kt} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] \quad \dots (9)$$

परन्तु
$$\frac{E}{\omega_0^2 L} = \frac{E}{\left(\frac{1}{LC}\right) \times L} = CE = q_0$$

= संधारित्र पर अन्तिम स्थायी आवेश

समीकरण (9) को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं—

$$q = q_0 + e^{-kt} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] \quad \dots (10)$$

अब प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t = 0$ पर $q = 0$ लेने से, समीकरण (10) निम्न प्राप्त होगा —

$$0 = q_0 + A_1 + A_2 \text{ अर्थात् } A_1 + A_2 = -q_0 \quad \dots (11)$$

समीकरण (10) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$I = \frac{dq}{dt} = -k e^{-kt} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] + e^{-kt} [\beta A_1 e^{\beta t} - \beta A_2 e^{-\beta t}]$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t = 0$ पर, $I = \frac{dq}{dt} = 0$, उपर्युक्त समीकरण में रखने पर

$$0 = -k(A_1 + A_2) + \beta(A_1 - A_2)$$

अथवा
$$A_1 - A_2 = \frac{k}{\beta}(A_1 + A_2)$$

$$= \frac{k}{\beta}(-q_0) \quad \text{[समी. (11) से]}$$

$$\therefore A_1 - A_2 = -\frac{kq_0}{\beta} \quad \dots (12)$$

टिप्पणी

समीकरण (11) तथा (12) को A_1 तथा A_2 के लिए हल करने पर

$$A_1 = -\frac{q_0}{2} \left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \text{ तथा } A_2 = -\frac{q_0}{2} \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) \quad \dots (13)$$

A_1 तथा A_2 के मान समीकरण (10) में रखने पर

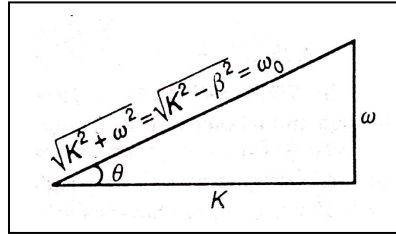
$$q = q_0 - \frac{q_0}{2} e^{-kt} \left[\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) e^{\beta t} + \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) e^{-\beta t} \right] \quad \dots (14)$$

अब निम्नलिखित विशिष्ट स्थितियों पर विचार करेंगे,

स्थिति (i) : अति-अवमन्दित आवेशन जब $k^2 > \omega_0^2$ अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$

तब $\beta = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$ का मान

वास्तविक होगा। अतः इस स्थिति में समीकरण (14) प्रदर्शित करता है कि संधारित्र पर आवेश तब तक चरघातांकी रूप से बढ़ेगा जब तक कि यह अन्त में स्थायी मान q_0 न प्राप्त कर ले, चित्र 3.29 के वक्र (a) से प्रदर्शित है। इस आवेशन को अनावर्ती या अति-अवमन्दित या रुद्र दोल आवेशन कहते हैं।



चित्र क्र. 3.29

स्थिति (ii) : क्रान्तिक अवमन्दन जब $k^2 = \omega_0^2$ अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$

जब $\beta = \sqrt{k^2 - \omega_0^2} = 0$

यदि हम समीकरण (14) में $\beta = 0$ रखें तो, q का मान अनिर्धारित (indeterminate) होगा। अतः हम पुनः समी. (10) प्राप्त करेंगे। यदि हम β को एक ऐसी सूक्ष्म धनात्मक राशि मानें कि $\beta \rightarrow 0$ तो समीकरण (10) को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} q &= q_0 + e^{-kt} \left[A_1 \left(1 + \beta t + \frac{\beta^2 t^2}{2!} + \dots \right) + A_2 \left(1 - \beta t + \frac{\beta^2 t^2}{2!} - \dots \right) \right] \\ &= q_0 + e^{-kt} [(A_1 + A_2) + \beta(A_1 - A_2)t] \\ &= q_0 + e^{-kt} (A_3 + A_4 t) \quad \dots (15) \end{aligned}$$

जहाँ $A_3 = (A_1 + A_2) +$ तथा $A_4 = \beta(A_1 - A_2)$ नये नियतांक हैं।

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t = 0$ पर $q = 0$ समीकरण (15) में रखने पर

$$0 = q_0 + A_3, \text{ अतः } A_3 = -q_0 \quad \dots (16)$$

समीकरण (15) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$I = \frac{dq}{dt} = -ke^{-kt}(A_3 + A_4t) + e^{-kt}A_4$$

प्रतिबन्ध $t = 0$ पर $I = 0$ रखने पर

$$0 = -kA_3 + A_4 = kq_0 + A_4 \quad (\text{चूँकि } A_3 = -q_0)$$

$$\therefore A_4 = -kq_0 \quad \dots (17)$$

समीकरण (16) तथा (17) से A_3 व A_4 का मान समी. (15) में रखने पर

$$q = q_0 + e^{-kt}[-q_0 - kq_0t]$$

$$\text{अर्थात् } q = q_0 - q_0(1 + kt)e^{-kt} \quad \dots (18)$$

स्पष्टतः आवेश अदोलनीय है तथा चित्र 3.30 के वक्र (b) के अनुसार बढ़ता है। इसे क्रान्तिक अवमंदन कहते हैं।

स्थिति (iii) : दोलनी आवेश

जब $k^2 < \omega_0^2$ अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, तो $\sqrt{k^2 - \omega_0^2}$ काल्पनिक होगा तथा हम $\beta = j\sqrt{\omega_0^2 - k^2} = j\omega$ रख सकते हैं, जहाँ $j = \sqrt{-1}$ तथा $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ इस स्थिति में, समी. (14) होगा

$$\begin{aligned} q &= q_0 - \frac{q_0}{2} e^{-kt} \left[\left(1 + \frac{k}{j\omega} \right) e^{-j\omega t} + \left(1 - \frac{k}{j\omega} \right) e^{-j\omega t} \right] \\ &= q_0 - q_0 e^{-kt} \left[\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \frac{k}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) \right] \\ &= q_0 - q_0 e^{-kt} \left(\cos \omega t + \frac{k}{\omega} \sin \omega t \right) \quad \dots (19) \end{aligned}$$

$\frac{k}{\omega} = \cot \theta$ रखने पर, जहाँ θ एक नया नियतांक है,

$$\sin \theta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{तथा} \quad \cos \theta = \frac{k}{\omega_0}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

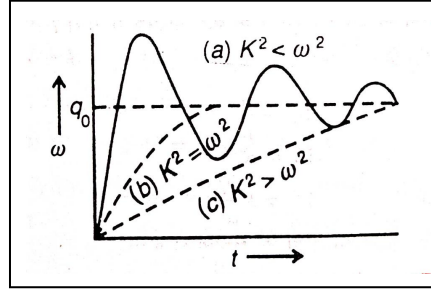
अतः समीकरण (19) से

$$\begin{aligned} q &= q_0 - q_0 e^{-kt} [\cos \omega t + \cos \theta \sin \omega t] \\ &= q_0 - q_0 e^{-kt} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega t + \cos \theta \sin \omega t}{\sin \theta} \right] \\ &= q_0 - q_0 e^{-kt} \frac{\sin(\omega t + \theta)}{(\omega / \omega_0)} \end{aligned}$$

$$\therefore q = q_0 - \frac{q_0 \omega_0}{\omega} e^{-kt} \sin(\omega t + \theta) \quad \dots (20)$$

जहाँ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$

यह समीकरण निरूपित करती है कि संधारित्र पर आवेश अपने अन्तिम स्थायी मान q_0 के परितः अवपन्दित दोलनी होगा जैसा चित्र 3.30 के वक्र (c) से निरूपित है।



चित्र क्र. 3.30

दोलनी आवेश का t समय पश्चात् आयाम होगा

$$\frac{q_0 \omega_0}{\omega} e^{-kt} = \frac{q_0 \omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - k^2)}} e^{-kt} \quad \dots (21)$$

जहाँ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ और $k = \frac{R}{2L}$

$$\therefore \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - k^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)}$$

यह प्रदर्शित करता है कि दोलनों का आयाम गुणक $e^{-kt} = e^{-(R/2L)t}$ की उपस्थिति के कारण चरघातांकी रूप में समाप्त हो जायेगा। यदि प्रतिरोध कम हो तो आयाम धीमी गति से कम होगा।

आवेश दोलनों की आवृत्ति

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} \quad \dots (22)$$

$$\text{तथा आवर्तकाल } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}}$$

धारा (Current) : परिपथ में धारा का मान समीकरण (20) को समय t के सापेक्ष अवकलित कर प्राप्त होगा, अर्थात्

$$\begin{aligned} I = \frac{dq}{dt} &= -\frac{q_0\omega_0}{\omega} [\omega e^{-kt} \cos(\omega t + \theta) - k e^{-kt} \sin(\omega t + \theta)] \\ &= -\frac{q_0\omega_0^2 e^{-kt}}{\omega} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega t + \theta) - \frac{k}{\omega_0} \sin(\omega t + \theta) \right] \\ &= -\frac{q_0\omega_0^2 e^{-kt}}{\omega} [\sin \theta \cos(\omega t + \theta) - \cos \theta \sin(\omega t + \theta)] \\ &= \frac{q_0\omega_0^2 e^{-kt}}{\omega} \sin\{(\omega t + \theta) - \theta\} \\ &= \frac{q_0\omega_0^2 e^{-kt}}{\omega} \sin \omega t \quad \dots (24 a) \end{aligned}$$

$$= \frac{q_0\omega_0^2 e^{-kt}}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - k^2} t\right) \quad \dots (24 b)$$

यह समीकरण प्रदर्शित करता है कि परिपथ में धारा भी अवमंदित दोलनी है।

(b) प्रेरकत्व तथा प्रतिरोध से होकर संधारित्र का निरावेशन (Discharging of a capacitor through Inductance and Resistance) –

माना कि स्विच S को a स्थिति में लाकर पहले संधारित्र को q_0 आवेश तक आवेशित किया जाता है। अब स्विच S को a से असम्बद्ध कर b स्थिति में लाया जाता है तथा संधारित्र को श्रेणीक्रम में सम्बद्ध प्रेरकत्व L तथा प्रतिरोध R से होकर निरावेशित होने दिया जाता है।

माना निरावेशन की प्रक्रिया के दौरान t समय के बाद परिपथ में धारा I तथा धारा में परिवर्तन की दर $\frac{dI}{dt}$ है तथा संधारित्र पर आवेश q है –

$$\text{संधारित्र पर विभवान्तर,} \quad V_C = \frac{q}{C}$$

$$\text{प्रतिरोधक पर विभवान्तर,} \quad V_R = RI$$

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

टिप्पणी

स्व-अधिगम
पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

तथा कुंडली पर विभवान्तर, $V_L = L \frac{dI}{dt}$

किरचौफ के द्वितीय नियम से, वि. वा. बलों का समीकरण होगा

$$V_L + V_R + V_C = 0 \text{ अर्थात् } L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

चूँकि $I = \frac{dq}{dt}$, अतः समीकरण (1) होगा

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{अथवा } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{R}{L} = 2k \text{ तथा } \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad \dots (3)$$

रखने पर समीकरण (2) हो जायेगी

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2k \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad \dots (4)$$

माना इसका हल $q = Ae^{\alpha t}$ है। ... (5)

$$\text{अतः } \frac{dq}{dt} = A\alpha e^{\alpha t} \text{ तथा } \frac{d^2q}{dt^2} = A\alpha^2 e^{\alpha t}$$

ये मान समीकरण (4) में रखने पर

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + 2k A\alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

$$\text{अथवा } A e^{\alpha t} (\alpha^2 + 2k\alpha + \omega_0^2) = 0 \quad (\text{चूँकि } q = Ae^{\alpha t} \neq 0)$$

$$\therefore \alpha^2 + 2k\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{अतः } \alpha = -k \pm \sqrt{(k^2 - \omega_0^2)} = -k \pm \beta$$

$$\text{जहाँ } \beta = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$$

इसका तात्पर्य है कि α के दो मान होंगे

$$\alpha_1 = -k + \beta \text{ तथा } \alpha_2 = -k - \beta$$

समीकरण (4) का सर्वाधिक सामान्य हल निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है -

$$q = A_1 e^{(-k+\beta)t} + A_2 e^{(-k-\beta)t} = e^{-kt} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}) \quad \dots (6)$$

जहाँ A_1 तथा A_2 नियतांक हैं जिनके मान सीमा प्रतिबन्धों से ज्ञात किये जाते हैं। ये प्रतिबन्ध हैं –

$$t=0 \text{ पर } q=q_0 \text{ तथा } t=0 \text{ पर } I=\frac{dq}{dt}=0$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t=0$ पर $q=q_0$ रखने पर

$$q_0 = A_1 + A_2 \text{ अर्थात् } A_1 + A_2 = q_0 \quad \dots (7)$$

समीकरण (6) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$I = \frac{dq}{dt} = -ke^{-kt} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] + e^{-kt} [A_1 \beta e^{\beta t} - A_2 \beta e^{-\beta t}]$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t=0$ पर $I=0$ रखने पर

$$0 = -k(A_1 + A_2) + \beta(A_1 - A_2)$$

$$\text{अर्थात् } A_1 - A_2 = \frac{k}{\beta}(A_1 + A_2)$$

समीकरण (7) से

$$A_1 - A_2 = \frac{k}{\beta} q_0 \quad \dots (8)$$

समीकरण (7) तथा (8) को हल करने पर

$$A_1 = \frac{q_0}{2} \left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \text{ तथा } A_2 = \frac{q_0}{2} \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) \quad \dots (9)$$

समीकरण (9) से A_1 तथा A_2 के मान (6) में रखने पर

$$q = \frac{q_0}{2} e^{-kt} \left[\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) e^{\beta t} + \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) e^{-\beta t} \right] \quad \dots (10)$$

अतः निम्नलिखित तीन विशेष स्थितियाँ होंगी –

स्थिति (i) $k^2 > \omega_0^2$ अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, तो $\beta = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$ वास्तविक तथा धनात्मक है। अतः इस स्थिति में समीकरण (10) यह प्रदर्शित करती है कि संधारित्र पर आवेश समय के साथ चरघातांकी रूप से घट कर शून्य हो जाता है। यह स्थिति अति अवमंदित तथा अदोलनीय अथवा रुद्ध दोल (dead beat) निरावेशन की है। यह चित्र 3.31 के वक्र से प्रदर्शित है।

$$\text{स्थिति (ii)} \quad k^2 > \omega_0^2 \text{ अर्थात् } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \text{ तो } \beta = \sqrt{k^2 - \omega_0^2} = 0$$

यदि हम (10) में $\beta = 0$ रखें तो q अनिर्धारित (indeterminate) हो जायेगा। यदि हम इसको अल्प धनात्मक राशि मानें, तो

टिप्पणी

टिप्पणी

$$q = e^{-kt} \left[A_1 \left(1 + \beta t + \frac{\beta^2}{2!} t^2 + \dots \right) + A_2 \left(1 - \beta t + \frac{\beta^2}{2!} t^2 + \dots \right) \right]$$

$$= e^{-kt} [(A_1 + A_2) + \beta(A_1 - A_2)t] \quad (\text{क्योंकि } \beta \rightarrow 0)$$

$$= e^{-kt} (A_3 + A_4 t) \quad \dots (11)$$

जहाँ $A_3 = A_1 + A_2$ तथा $A_4 = \beta(A_1 - A_2)$ नियतांक है।

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t = 0$ पर $q = q_0$ समीकरण (11) में रखने पर

$$q_0 = A_3 \quad \text{अर्थात् } A_3 = q_0 \quad \dots (12)$$

समीकरण (11) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$I = \frac{dq}{dt} = -ke^{-kt} (A_3 + A_4 t) + e^{-kt} A_4$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध $t = 0$ पर $I = 0$ रखने पर,

$$0 = -kA_3 + A_4 \quad \text{या } -kq_0 + A_4 = 0 \quad [\text{समीकरण (12) से}]$$

$$\therefore A_4 = kq_0 \quad \dots (13)$$

समीकरण (12) तथा (13) A_3, A_4 का मान समीकरण (11) में रखने पर

$$q = e^{-kt} (q_0 + k q_0 t) = q_0 (1 + kt) e^{-kt} \quad \dots (14)$$

स्पष्टतया इस स्थिति में भी निरावेशन अदोलनीय होगा तथा यह क्रान्तिक अवमंदित (critically damped) कहलाता है। यह चित्र 3.31 के वक्र से प्रदर्शित है।

स्थिति (iii) दोलनी निरावेशन (Oscillatory Discharge): जब

$k^2 < \omega_0^2$ अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ तो $\omega = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$ काल्पनिक होगा तथा हम $\beta = j\sqrt{(\omega_0^2 - k^2)} = j\omega$, जहाँ $j = \sqrt{-1}$ तथा $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - k^2)}$ रख सकते हैं।

इस स्थिति में समीकरण (10) को हम निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं -

$$q = \frac{q_0}{2} e^{-kt} \left[\left(1 + \frac{k}{j\omega} \right) e^{j\omega t} + \left(1 - \frac{k}{j\omega} \right) e^{-j\omega t} \right]$$

$$= q_0 e^{-kt} \left[\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + \frac{k}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) \right]$$

$$= q_0 e^{-kt} \left[\cos \omega t + \frac{k}{\omega} \sin \omega t \right] \quad \dots (15)$$

$$\frac{k}{\omega} = \cot \theta \quad \text{रखने पर, जहाँ } \theta \text{ एक नया नियतांक है अतः } \sin \theta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

(चित्र 3.29) होगा। अतः समीकरण (15) से

$$\begin{aligned} q &= q_0 e^{-kt} [\cos \omega t + \cot \theta \sin \omega t] \\ &= q_0 e^{-kt} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega t + \cos \theta \sin \omega t}{\sin \theta} \right] \\ &= q_0 e^{-kt} \left[\frac{\sin(\omega t + \theta)}{(\omega / \omega_0)} \right] \end{aligned}$$

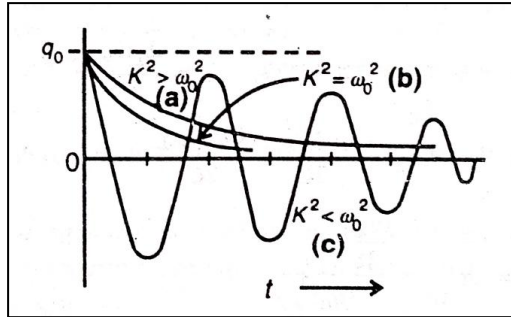
अर्थात् $q = \frac{q_0 \omega_0}{\omega} e^{-kt} \sin(\omega t + \theta) \quad \dots (16)$

जहाँ $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - k^2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)} \quad \dots (17)$

यह समीकरण यह निरूपित करती है कि संधारित्र का निरावेशन अवमंदित दोलनीय है। यह चित्र 3.31 में वक्र (c) से निरूपित है।

समय के बाद दोलनों का आयाम

$$(q_0)_t = \frac{q_0 \omega_0}{\omega} e^{-kt} = \frac{q_0 \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} e^{-kt} \quad \dots (18)$$



चित्र क्र. 3.31

दोलनी निरावेशन (oscillatory discharge) का प्रतिबन्ध होगा –

$$k^2 < \omega_0^2$$

अथवा $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

अर्थात् $R < 2\sqrt{L/C} \quad \dots (19)$

दोलनी निरावेशन की आवृत्ति

$$f = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0 \omega_0}{\omega} [-k e^{-kt} \sin(\omega t + \theta) + \omega e^{-kt} \cos(\omega t + \theta)] \quad \dots (20)$$

टिप्पणी

$$\text{यदि } R \rightarrow 0 \text{ तो आवृत्ति होगी } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \dots (21)$$

टिप्पणी

स्पष्टतया अवमंदन गुणांक की उपस्थिति संधारित्र के निरावेशन की आवृत्ति को कम कर देती है।

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = \frac{q_0\omega_0}{\omega} [-ke^{-kt} \sin(\omega t + \theta) + \omega e^{-kt} \cos(\omega t + \theta)] \\ &= \frac{q_0\omega_0}{\omega} e^{-kt} [\omega \cos(\omega t + \theta) - k \sin(\omega t + \theta)] \\ &= \frac{q_0\omega_0^2}{\omega} e^{-kt} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega t + \theta) - \frac{k}{\omega_0} \sin(\omega t + \theta) \right] \\ &= \frac{q_0\omega_0^2}{\omega} e^{-kt} [\sin \theta \cos(\omega t + \theta) - \cos \theta \sin(\omega t + \theta)] \\ I &= \frac{q_0\omega_0^2}{\omega} e^{-kt} \sin \omega t \quad \dots (22) \end{aligned}$$

यह समीकरण प्रदर्शित करती है कि परिपथ में धारा भी अवमंदित दोलनी होगी तथा धारा आयाम $\left(\frac{q_0\omega_0^2}{\omega}\right) e^{-kt}$ समय के सापेक्ष चरघातांकी रूप से कम होती है तथा अन्त में आयाम शून्य हो जाता है।

गुणता कारक (Quality Factor) – किसी परिपथ का गुणता कारक (Quality factor) संचित ऊर्जा तथा प्रति चक्र ऊर्जा की हानि के अनुपात का 2π गुना होता है, अर्थात्

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{संचित ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र ऊर्जा की हानि}} \quad \dots (23)$$

जब संधारित्र पर विभवान्तर महत्तम होता है संधारित्र की प्लेटों के बीच स्थित वैद्युत क्षेत्र में समस्त ऊर्जा संचित हो जाती है, अर्थात् t समय के बाद

$$E_1 = \frac{(q_0)_t^2}{2C}, \text{ जहाँ } t \text{ समय के बाद आवेश आयाम, } (q_0)_t = \frac{q_0\omega_0}{\omega} e^{-kt}$$

$$\text{प्रति चक्र ऊर्जा ह्रास} = E_1 - E_{t+T} = \frac{(q_0)_t^2}{2C} - \frac{(q_0)_{t+T}^2}{2C}$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{(q_0)_t^2}{2C}}{\frac{(q_0)_t^2}{2C} - \frac{(q_0)_{t+T}^2}{2C}}$$

$$= 2\pi \frac{\left[\left(\frac{q_0 \omega_0}{\omega} \right) e^{-kt} \right]^2}{\left[\left(\frac{q_0 \omega_0}{\omega} \right) e^{-kt} \right]^2 - \left[\left(\frac{q_0 \omega_0}{\omega} \right) e^{-k(t+T)} \right]^2}$$

$$Q = 2\pi \frac{e^{-2kt}}{e^{-2kt} - e^{-2k(t+T)}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2kT}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{1 - \left[1 - 2kT + \frac{(3kT)^2}{2!} + \dots \right]}$$

अल्प अपमंदन के लिये उच्च क्रम के पद नगण्य मानने पर

$$Q = \frac{2\pi}{2kT}$$

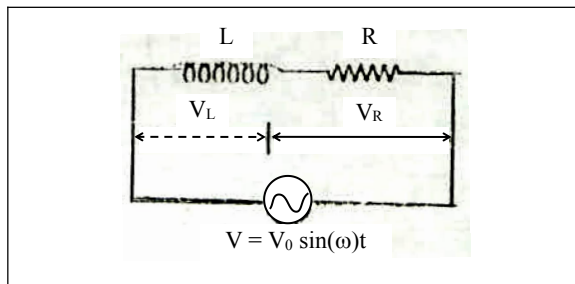
$$= \frac{2\pi/T}{2k}$$

$$= \frac{2\pi/T}{R/L}$$

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

3.11 L-R परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा (Alternating Current L-R Circuit)

चित्र 3.32 में माना प्रेरकत्व L तथा प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हैं तथा इनके सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $V = V_0 \sin \omega t$ आरोपित किया गया है। माना किसी भी क्षण परिपथ में धारा का मान I है तथा इस धारा के कारण प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर $V_R = IR$ तथा प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर $V_L = IX_L = I\omega L$.



चित्र क्र. 3.32

टिप्पणी

किरचौफ के नियम से,

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V_0 \sin \omega t \quad \dots (1)$$

माना परिपथ में किसी क्षण धारा $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ है तो

$$\frac{dI}{dt} = I_0 \omega \cos(\omega t - \phi) \text{ समीकरण (1) में ये मान रखने पर,}$$

$$RI_0 \sin(\omega t - \phi) + LI_0 \omega \cos(\omega t - \phi) = V_0 \sin \omega t$$

$$\text{या } RI_0[\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi] + LI_0 \omega[\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi] \\ = V_0 \sin \omega t$$

अतः $\sin \omega t$ तथा $\cos \omega t$ के गुणांको को बराबर लेने पर,

$$RI_0 \cos \phi + LI_0 \omega \sin \phi = V_0 \quad \text{तथा} \quad -RI_0 \sin \phi + LI_0 \omega \cos \phi = 0$$

$$\text{अर्थात्} \quad I_0 = \frac{V_0}{R \cos \phi + L \omega \sin \phi} \quad \text{तथा} \quad \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad \dots (2)$$

$$\text{या} \quad I_0 = \frac{V_0}{R \left(\cos \phi + \frac{L \omega}{R} \sin \phi \right)} = \frac{V_0}{R(\cos \phi + \tan \phi \sin \phi)} \\ = \frac{V_0 \cos \phi}{R} \quad \dots (3)$$

$$\text{लेकिन} \quad \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\therefore I_0 = \frac{V_0}{R} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

अतः परिपथ में किसी क्षण धारा, $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left[\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right] \quad \dots (4)$$

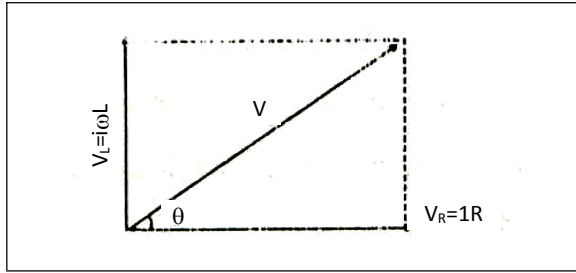
उपर्युक्त समीकरण में राशि $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ (या $\sqrt{R^2 + X_L^2}$) परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध व्यक्त करती है। इस राशि को परिपथ की प्रतिबाधा (impedance) कहते हैं तथा इसे Z_{R-L} से प्रदर्शित करते हैं इसका मात्रक ओह्म है। अतः $L-R$ परिपथ की प्रतिबाधा

$$Z_{R-L} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \dots (5)$$

प्रतिबाधा के व्युत्क्रम को **प्रवेश्यता (Admittance)** कहते हैं तथा इसका मात्रक म्हा अथवा ओम⁻¹ (Ω^{-1}) है। इसे अक्षर Y द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अतः R - L परिपथ की प्रवेश्यता

$$Y_{R-L} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \dots (6)$$

स्पष्ट है कि R - L परिपथ में धारा, आरोपित विभवान्तर से ϕ कोण पश्चगामी है। यदि $L=0$ तो $\tan \phi=0$ या $\phi=0$, अर्थात् यदि परिपथ में शुद्ध प्रतिरोध है तो विभवान्तर V तथा धारा I समान कला में होंगे। यदि $R=0$ तो $\tan \phi=\infty$ या $\phi=90^\circ$ अर्थात् यदि परिपथ में शुद्ध प्रेरकत्व है तो धारा I , विभवान्तर V से कला में 90° पश्चगामी होगी।



चित्र क्र. 3.33: L - R परिपथ में V_R तथा V_L के बीच कलान्तर

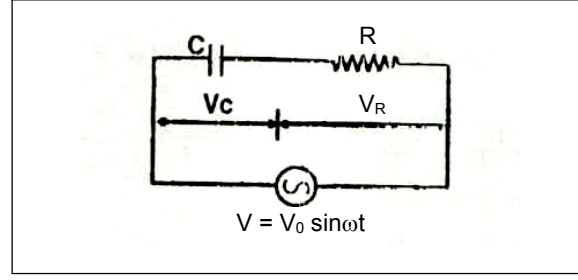
प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर V_R तथा धारा I समान कला में होंगे, लेकिन प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर V_L धारा I से कला में 90° अग्रगामी होगा, अर्थात् V_R व V_L के बीच कलान्तर 90° होगा। चित्र 3.33 में V_V , V_R से 90° आगे है। यदि V_R व V_L का परिणामी विभवान्तर V है तो चित्र 3.27 से स्पष्ट है कि

$$V^2 = V_R^2 + V_L^2.$$

3.12 R - C परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा (Alternating Current in R - C circuit)

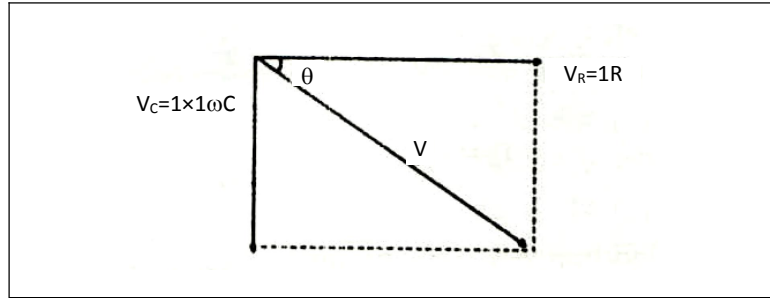
चित्र 3.34 में माना संधारित्र जिसकी धारिता C है तथा प्रतिरोध R श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। इस श्रेणी संयोजन के सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $V = V_0 \sin \omega t$ आरोपित किया गया है। माना किसी भी क्षण परिपथ में धारा I है। धारा I के कारण प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर $V_R = IR$ तथा संधारित्र C के सिरों पर विभवान्तर

टिप्पणी



चित्र क्र. 3.34: प्रत्यावर्ती R-C परिपथ

$$V_C = IX_C = I \times \left(\frac{1}{\omega C} \right) = \frac{Q}{C}$$



चित्र क्र. 3.35: प्रत्यावर्ती R-C परिपथ में V तथा I के बीच कलान्तर

प्रतिरोध R के सिरो पर विभवान्तर V_R तथा धारा I समान कला में होंगे, लेकिन संधारित्र की धारिता C के सिरो पर विभवान्तर V_C धारा I से कला 90° पश्चगामी होगा, अर्थात् V_R व V_C के बीच कलान्तर 90° होगा। चित्र 3.35 में V_R व V_C परस्पर लम्बवत् प्रदर्शित है तथा V_C, V_R से 90° पश्चगामी है। यदि V_R व V_C का परिणामी विभवान्तर V है तो चित्र 3.35 से स्पष्ट है कि

$$V^2 = V_R^2 + V_C^2 \quad \dots (1)$$

किरचौफ के नियम से,

$$RI + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t \quad \dots (2)$$

माना परिपथ में किसी क्षण धारा $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ है तो

$$Q = \int I dt = \int I_0 \sin(\omega t + \phi) dt = \frac{I_0}{\omega} \cos(\omega t + \phi)$$

समीकरण (2) में मान रखने पर,

$$RI_0 \sin(\omega t + \phi) - \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \phi) = V_0 \sin \omega t$$

$$RI_0 [\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi] - \frac{I_0}{\omega C} [\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi] = V_0 \sin \omega t$$

उपर्युक्त समीकरण समय t के सभी मानों के लिए सत्य होगा, अतः $\sin \omega t$ तथा $\cos \omega t$ के गुणांक को बराबर रखने पर,

$$RI_0 \cos \phi + \frac{I_0}{\omega C} \sin \phi = V_0 \quad \text{तथा} \quad RI_0 \sin \phi + \frac{I_0}{\omega C} \cos \phi = 0 \quad \dots (3)$$

या
$$I_0 = \frac{V_0}{R \cos \phi + (1/\omega C) \sin \phi}$$

तथा
$$\tan \phi = \frac{1/\omega C}{R} \quad \dots (4)$$

या
$$I_0 = \frac{V_0}{R \left[\cos \phi + \left(\frac{1/\omega C}{R} \right) \sin \phi \right]}$$

$$= \frac{V_0}{R [\cos \phi + \tan \phi \sin \phi]} = \frac{V_0 \cos \phi}{R}$$

लेकिन
$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$$

$$\therefore I_0 = \frac{V_0}{R} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$$

अतः परिपथ में किसी क्षण धारा

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin \left[\omega t + \tan^{-1} \left(\frac{1/\omega C}{R} \right) \right] \dots (5)$$

उपर्युक्त समीकरण में राशि $\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$ (या $\sqrt{R^2 + X_C^2}$) परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध (C व R दोनों के कारण) व्यक्त करती है। इस राशि को परिपथ की **प्रतिबाधा** कहते हैं तथा इसे अब Z_{R-C} से प्रदर्शित करते हैं। अतः $R-C$ परिपथ की प्रतिबाधा

$$Z_{R-C} = \sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$$

तथा प्रवेश्यता
$$Y_{R-C} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}} \quad \dots (6)$$

स्पष्ट है कि $R-C$ परिपथ में धारा, आरोपित विभवान्तर से ϕ कोण अग्रगामी है।

(1) यदि $C = 0$ तो $\tan \phi = 0$, अर्थात् यदि परिपथ में ओमीय (अथवा शुद्ध) प्रतिरोध है तो विभवान्तर V तथा धारा समान कला में होंगे।

(2) यदि $R = 0$ तो $\tan \phi = \infty$ या $\phi = 90^\circ$, अर्थात् यदि परिपथ में शुद्ध धारिता हो तो धारा, I विभवान्तर V से कला में 90° अग्रगामी होगी।

टिप्पणी

3.13 प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में औसत व्यय शक्ति तथा शक्ति गुणांक (Average Power Consumed in an a-c Circuit and Power Factor)

यदि किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में आरोपित वि. वा बल $V = V_0 \sin \omega t$ के फलस्वरूप धारा $I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$ बहती है तो परिपथ में व्यय सामर्थ्य

$$\begin{aligned} P &= VI = V_0 \sin \omega t I_0 \sin(\omega t - \phi) \\ &= \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)] \end{aligned}$$

∴ एक पूर्ण चक्र में व्यय औसत सामर्थ्य

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} V_0 I_0 [\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)] d(\omega t)}{2\pi} \\ &= \frac{V_0 I_0}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos \phi d(\omega t) - \int_0^{2\pi} \cos(2\omega t - \phi) d(\omega t) \right] \\ &= \frac{V_0 I_0}{4\pi} \left[2\pi \cos \phi - \left\{ \frac{\sin(2\omega t - \phi)}{2} \right\}_0^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \phi = V_{rms} I_{rms} \cos \phi \quad \dots (1) \end{aligned}$$

जहाँ $V_{rms} = V_0 / \sqrt{2}$ आरोपित वि. वा. बल का आभासी अथवा वर्ग माध्य मूल मान है तथा $I_{rms} = I_0 / \sqrt{2}$ परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा का आभासी अथवा वर्ग माध्य मूल मान है।

$V_{rms} \times I_{rms} =$ आभासी सामर्थ्य, अतः राशि $\cos \phi$ को परिपथ का शक्ति गुणांक (power factor) कहते हैं। इस प्रकार, प्रत्यावर्ती धारा परिपथ का शक्ति गुणांक वह राशि है जिसका आभासी सामर्थ्य में गुणा करने पर एक चक्र में परिपथ में व्यय औसत सामर्थ्य ज्ञात होती है।

अब हम निम्नलिखित विशेष परिस्थितियों में आरोपित प्रत्यावर्ती वि. वा. बल के कारण प्रत्यावर्ती धारा तथा शक्ति गुणांक के मान ज्ञात कर सकते हैं –

(i) जबकि परिपथ में केवल ओमीय प्रतिरोध हो (अर्थात् $L = 0, C = \infty$) तो

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \text{ तथा } \tan \phi = 0 \text{ या } \phi = 0 \therefore \text{ शक्ति गुणांक } \cos \phi = 1$$

अर्थात् परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल की कला में होती है।

(ii) जबकि परिपथ में शुद्ध प्रेरकत्व (प्रतिरोधहीन कुण्डली) लगा हो (अर्थात् $R = 0, C = \infty$) तो

$$I_0 = \frac{V_0}{X_L} = \frac{V_0}{\omega L} \text{ तथा } \tan \phi = \infty \text{ या } \phi = \pi/2$$

तब शक्ति गुणांक $\cos \phi = 0$, अर्थात् $P_{av} = 0$

इस परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल से कला में $\pi/2$ कोण पश्चगामी होती है, अर्थात् जिस क्षण परिपथ में धारा शून्य होती है, विभवान्तर अधिकतम होता है तथा जिस क्षण धारा अधिकतम होती है, विभवान्तर शून्य होता है। एक चक्र में परिपथ में औसत व्यय सामर्थ्य शून्य होती है। परिपथ में इस धारा को वाटहीन धारा (Wattless current) कहते हैं।

(iii) जबकि परिपथ में शुद्ध धारिता (अर्थात् $R = 0, L = 0$) तो

$$I_0 = \frac{V_0}{X_C} = \frac{V_0}{1/\omega C} \text{ तथा } \tan \phi = -\infty \text{ या } \phi = -\pi/2$$

तब शक्ति गुणांक $\cos \phi = 0$, अर्थात् $P_{av} = 0$

इस परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल से कला में $\pi/2$ कोण अग्रगामी होती है। जिस क्षण विभवान्तर शून्य होता है, परिपथ में धारा अधिकतम होती है तथा जिस क्षण विभवान्तर अधिकतम होता है, परिपथ में धारा शून्य होती है। एक चक्र में परिपथ में औसत व्यय सामर्थ्य शून्य होती है, अर्थात् परिपथ में धारा वाटहीन होती है।

(iv) जबकि परिपथ में प्रेरकत्व L तथा प्रतिरोध R दोनों हों (अर्थात् $C = \infty$) तो

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ तथा } \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

$$\text{तब शक्ति गुणांक } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{R}{Z}$$

$$\text{तथा } P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos \phi = I_{rms}^2 R$$

(v) जबकि परिपथ में संधारित्र C तथा ओमीय प्रतिरोध R दोनों हों (अर्थात् $L = 0$) तो

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \text{ तथा } \tan \phi = \frac{-1/\omega C}{R}$$

(यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह बताता है कि धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में आगे है।)

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\text{तब शक्ति गुणांक } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} = \frac{R}{Z}$$

$$\text{तथा } P_{av} = I_{rms} V_{rms} \cos \phi = I_{rms}^2 R$$

(vi) जबकि परिपथ में प्रेरकत्व L व संधारित्र C लगे हों (अर्थात् $R = 0$) तब

$$I_0 = \frac{V_0}{X_L - X_C} \text{ तथा } \tan \phi = \infty \text{ या } \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{शक्ति गुणांक } \cos \phi = 1 \text{ तथा } P_{av} = I_{rms} V_{rms}$$

$$\text{लेकिन यदि } X_L = X_C, \text{ तब } I_0 = \infty \text{ (अनन्त) तथा } \tan \phi = 0$$

इसे अनुनाद की स्थिति कहते हैं तथा अनुनादी आवृत्ति $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ जो परिपथ की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर है।

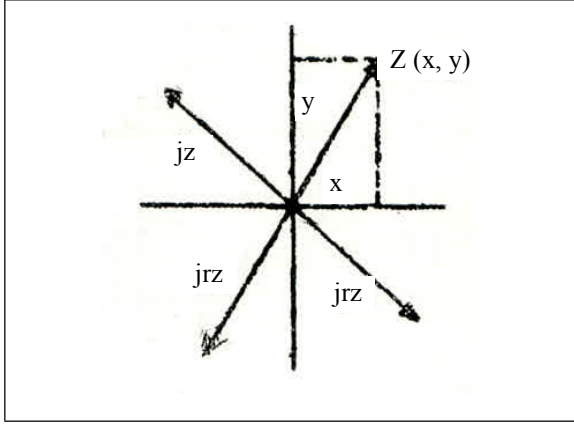
3.14 a.c. विश्लेषण के लिए सम्मिश्र संख्या विधि J ऑपरेटर (The Complex Number Method for a.c. Analysis J Operator)

सम्मिश्र बीजगणित के उपयोग से कई a.c. समस्याओं का समाधान सरल हो जाता है। सर्वप्रथम हम सम्मिश्र संख्याओं के कुछ गुणों की संक्षिप्त विवेचना करेंगे तथा उसके पश्चात् प्रत्यावर्ती धाराओं की कुछ समस्याओं के समाधान में उपयोग करेंगे।

$$\text{माना } z = x + jy \quad \dots (1)$$

एक राशि है जहाँ x तथा y वास्तविक संख्याएँ हैं, तथा $j = \sqrt{-1}$ एक काल्पनिक राशि है। z में एक वास्तविक अवयव तथा एक काल्पनिक अवयव होता है, तथा यह एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है।

सम्मिश्र संख्याओं को उनके वास्तविक घटकों को X -अक्ष तथा काल्पनिक घटकों को Y -अक्ष पर अंकित कर, ग्राफीय रूप में निरूपित किया जा सकता है। राशि $z = x + jy$ का इस प्रकार का ग्राफ चित्र 3.36 में प्रदर्शित है। स्पष्टतया, इस प्रकार के ग्राफ में, सम्मिश्र संख्या एक वेक्टर के रूप में प्रदर्शित होती है, जिसकी लम्बाई इस सम्मिश्र संख्या का परिमाण (modulus) तथा जिसकी दिशा इसके वास्तविक तथा काल्पनिक घटकों के आपेक्षिक अनुपातों को प्रदर्शित करती है।



चित्र क्र. 3.36: सम्मिश्र संख्या का परिमाण

किसी सम्मिश्र सदिश का j से गुणन एक वेक्टर संक्रिया को निरूपित करता है जो सम्मिश्र वेक्टर में बिना उसके मापांक को परिवर्तित करे 90° वामावर्ती घूर्णन उत्पन्न करता है।

$$\text{अतः} \quad jz = j(x + jy) = jx - y \quad \dots (2)$$

की दिशा चित्र 3.36 के द्वितीय चतुर्थांश में प्रदर्शित होगी तथा j के पुनः दो बार गुणन के फलस्वरूप परिणामी वेक्टरों को चित्र 3.36 में तृतीय तथा चतुर्थांशों में प्रदर्शित किया गया है।

सम्मिश्र राशियों को ध्रुवीय निर्देशांकों (polar coordinates) के पदों में निरूपित

$$(E_{av})_{\text{अर्ध चक्र}} = \frac{2E_0}{\pi} \quad \dots (3)$$

प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग माध्य मूल अथवा प्रभावी मान (Root mean square or effective value of alternating current) – प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य मूल मान एक सम्पूर्ण चक्र में वर्ग धारा के माध्य (mean) के वर्गमूल से परिभाषित होता है।

एक सम्पूर्ण चक्र पर धारा का वर्ग माध्य मान

$$\overline{I^2} = \frac{\int_0^T I^2 dt}{\int_0^T dt}$$

परन्तु $I = I_0 \sin \omega t$ तथा $T = 2\pi / \omega$

$$\therefore \overline{I^2} = \frac{\int_0^T I_0^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} = I_0^2 \frac{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} = I_0^2 \sin^2 \omega t \dots (1)$$

टिप्पणी

$$\text{जहाँ } \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt}$$

$\sin^2 \omega t$ का एक सम्पूर्ण चक्र पर माध्य मान है तथा इसका मान $1/2$ होता है। इसे निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है :

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2 \omega t} &= \frac{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt}{T} \\ &= \frac{1}{2T} \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2T} \left[T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T} 4\pi \\ \overline{\sin^2 \omega t} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{अर्थात् } \therefore \overline{I^2} = I_0^2 \cdot \frac{1}{2} \quad \dots (2)$$

$$\therefore I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2}} = \sqrt{\left(\frac{I_0^2}{2} \right)} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \dots (3)$$

अतः प्रत्यावर्ती धारा का वर्ग-माध्य मूल मान शिखर मान का $(1/\sqrt{2})$ गुना होता है। प्रत्यावर्ती वोल्टता $E = E_0 \sin \omega t$ का वर्ग-माध्य मूल मान

$$E_{rms} = \sqrt{\overline{E^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad \dots (4)$$

जब एक प्रत्यावर्ती धारा $I = I_0 \sin \omega t$ किसी प्रतिरोध से होकर प्रवाहित होती है तो तात्क्षणिक ऊष्मा उत्पन्न होने की दर $I^2 R$ होती है।

अतः एक सम्पूर्ण चक्र के लिए तापन की माध्य दर होगी

$$\begin{aligned} H &= \frac{\int_0^T I^2 R dt}{\int_0^T dt} = I_0^2 \frac{R \int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} \\ &= I_0^2 \frac{R \int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} = I_0^2 R \overline{\sin^2 \omega t} \end{aligned}$$

$$= I_0^2 R \cdot \frac{1}{2} = \frac{I_0^2}{2} R$$

अर्थात् $H = I_{rms}^2 R$... (5)

अतः तापन की माध्य दर, एक दिष्ट धारा $I = I_{rms}$ से उत्पन्न होगी।

अतः किसी प्रत्यावर्ती धारा का rms मान उस दिष्ट धारा के बराबर होता है जो एक ज्ञात प्रतिरोध में समान ऊष्मीय प्रभाव उत्पन्न करे। इस कारण से धारा का rms मान धारा का प्रभावी (effective) अथवा आभासी (virtual) मान भी कहलाता है।

$$\therefore I_{आभासी} = I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \dots (6)$$

इसी प्रकार प्रत्यावर्ती वोल्टता का r.m.s. मान प्रत्यावर्ती वोल्टता का प्रभावी अथवा आभासी मान कहलाता है तथा यह होगा

$$E_{आभासी} = E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad \dots (7)$$

प्रत्यावर्ती धारा केवल ऊष्मीय प्रभाव ही प्रदर्शित करती है। अतः A.C. मापक यंत्र ऊष्मीय प्रभाव पर आधारित हैं तथा तप्त-तार मीटर (hot-wire meters) कहलाते हैं। तप्त-तार मीटरों में विक्षेप धारा के वर्ग माध्य मान के समानुपाती होता है, परन्तु पैमाने को इस प्रकार अंशांकित किया जाता है कि इसका पाठ विक्षेप के वर्गमूल, के अनुक्रमानुपाती होता है। अतः ये मीटर सीधे r.m.s. मान को निरूपित करते हैं। चूँकि दिष्ट धारा भी उतना ही ऊष्मीय प्रभाव उत्पन्न करती है जितना r.m.s. मान, अतः तप्त तार (अर्थात् A.C.) मीटर A.C. तथा D.C. दोनों मानों को पढ़ते हैं केवल D.C. मीटर जो धारा तथा चुम्बकीय क्षेत्र की अन्योन्य क्रिया पर आधारित होते हैं केवल D.C. को पढ़ते हैं।

सम्मिश्र राशि $z = x + jy$ में $x = r \cos \theta$ तथा $y = r \sin \theta$ रखने पर,

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} \quad \dots (8)$$

जहाँ $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ तथा $\tan \theta = y/x$... (9)

राशि $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ सम्मिश्र राशि का परिमाण (modulus) तथा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ कोणांक (argument) या कला (phase) कहलाती है।

दो सम्मिश्र संख्याओं के चरघातांकी में गुणन तथा विभाजन का परीक्षण भी अत्यन्त उपयोगी होता है।

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad \dots (10)$$

तथा $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$... (11)

टिप्पणी

सम्मिश्र संख्याओं का योग अथवा अन्तर पृथक् घटकों के योग अथवा अन्तर के साधारण नियमों के अनुसार होता है, अतः

$$\text{यदि } z_1 = x_1 + jy_1 \text{ तथा } z_2 = x_2 + jy_2$$

$$\text{तो } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

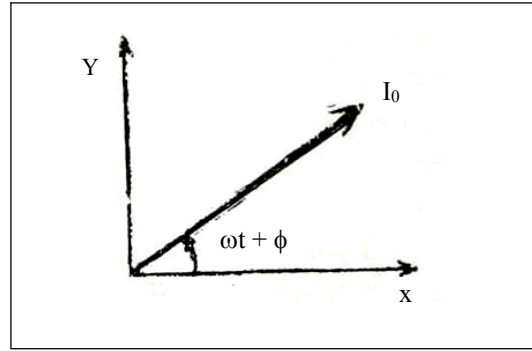
$$\text{तथा } z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

अब ज्या-वक्रिय धारा $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ तथा वोल्टता

$E = E_0 \sin \omega t$ को क्रमशः $I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ तथा $E_0 e^{j\omega t}$ के काल्पनिक भाग के रूप में मान सकते हैं। प्रत्यावर्ती धाराओं तथा वोल्टताओं के वास्तविक मान उसके केवल काल्पनिक मानों को लेकर ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ

$$I = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

I_0 के शिखर मान तथा ω कोणीय आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ को निरूपित करता है, जहाँ ϕ कला का मान है। चित्र 3.37 धाराओं $I = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ का ग्राफ निरूपित करता है।



चित्र क्र. 3.37

3.15 प्रतिबाधा, प्रतिघात तथा प्रवेश्यता (Impedance, Reactance and Admittance)

किसी परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा को प्रतिरोध, प्रेरकत्व तथा संधारित्र की सहायता से नियंत्रित किया जा सकता है, जबकि दिष्ट धारा केवल प्रतिरोध से ही नियंत्रित होती है। प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में, परिपथ में विभवान्तर तथा उसमें प्रवाहित धारा का अनुपात **प्रतिबाधा** (impedance) कहलाता है तथा $Z (= E/I)$ से निरूपित होता है। भौतिक से a.c. (प्रत्यावर्ती धारा) परिपथ की प्रतिबाधा, परिपथ द्वारा उसमें से होकर बहने वाली प्रत्यावर्ती धारा के प्रवाह में उत्पन्न बाधा है।

प्रतिघात (X) : किसी प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा के प्रवाह पर तथा संधारित्र द्वारा उत्पन्न बाधा को प्रतिघात (reactance) कहते हैं। अतः जब परिपथ में कोई ओमीय प्रतिरोध नहीं होता, तो प्रतिबाधा प्रतिघात के बराबर होती है। कुण्डली के कारण प्रतिघात, प्रेरण-प्रतिघात (inductive reactance) कहलाता

है तथा X_L निरूपित होता है, जबकि संधारित्र के कारण प्रतिघात, धारितीय-प्रतिघात (capacitive reactance) कहलाता है तथा X_C से निरूपित किया जाता है।

प्रवेश्यता (Admittance) : प्रतिबाधा का व्युत्क्रम प्रवेश्यता कहलाता है तथा Y से निरूपित होता है, अर्थात्

$$Y = \frac{1}{Z}$$

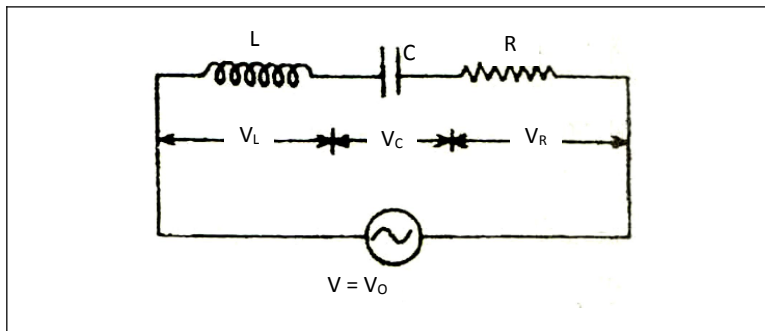
परिपथ के किसी तत्व (element) के लिए प्रवेश्यता तथा वोल्टता का गुणन तत्व से होकर धारा को निरूपित करता है।

प्रवेश्यता का वास्तविक भाग चालकत्व (conductance) तथा काल्पनिक भाग सक्रियता (susceptance) कहलाता है।

टिप्पणी

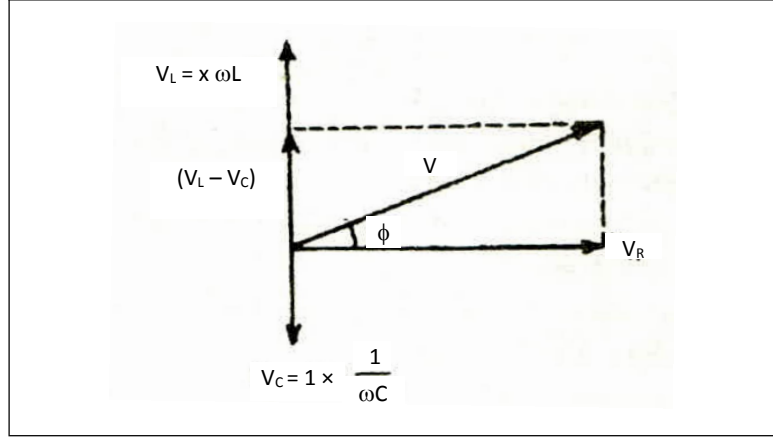
3.16 श्रेणी अनुनादी परिपथ (Series Resonant Circuit)

चित्र 3.38 में प्रेरकत्व L धारिता C तथा प्रतिरोध R को श्रेणीक्रम में जोड़कर प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $V = V_0 \sin \omega t$ लगाया जाता है। किसी भी क्षण परिपथ के प्रत्येक घटक में प्रवाहित धारा का मान समान होता है। माना क्षण t पर परिपथ में धारा I है तथा कुण्डली के सिरों पर विभवान्तर V_L , संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर V_C व प्रतिरोध के सिरों पर विभवान्तर V_R है। यदि इस क्षण आरोपित वि. वा. बल का मान V है तो V_L , V_C व V_R का योग V से अधिक होता है। इसका कारण यह है कि शुद्ध प्रतिरोध के सिरों पर विभवान्तर व धारा समान कला में होते हैं, शुद्ध प्रेरकत्व में धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में $\pi/2$ कोण पीछे होती है (या कुण्डली के सिरों पर विभवान्तर, धारा से $\pi/2$ कला कोण अग्रगामी होता है), शुद्ध धारिता में धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में $\pi/2$ कोण आगे होती है (या संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर धारा से $\pi/2$ कला कोण पश्चगामी होता है)। अतः V_L , V_C व V_R का वेक्टर योग आरोपित वि. वा. बल V के बराबर होता है।



चित्र क्र. 3.38: श्रेणी अनुनादी परिपथ

टिप्पणी



चित्र क्र. 3.39: प्रत्यावर्ती LCR परिपथ में कला आरेख

अब कुण्डली के प्रेरकत्व L के सिरों पर विभवान्तर $V_L = IX_L$, संशारित्र की धारिता C के सिरों पर विभवान्तर $V_C = IX_C$ तथा प्रतिरोध R के सिरों पर विभवान्तर $V_R = IR$.

चित्र 3.39 में V_R , V_L व V_C वेक्टर प्रदर्शित है। चित्र से स्पष्ट है कि V_L व V_C का परिणामी विभवान्तर $= (V_L - V_C)$ है जो V_R के लम्बवत् है तथा V_R व $(V_L - V_C)$ का परिणामी विभवान्तर

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

या

$$V = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

$$= I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

या

$$\frac{V}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}$$

ओह्म के नियमानुसार $V/I =$ परिपथ का प्रभवी प्रतिरोध अर्थात् प्रतिबाधा (impedance) Z .

अतः

$$Z_{LCR} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}$$

चित्र 3.39 से स्पष्ट है कि परिपथ में धारा I , आरोपित विभवान्तर V से कला में ϕ कोण पश्चगामी है (यदि $X_L > X_C$) अथवा अग्रगामी है (यदि $X_L < X_C$) जहाँ

$$\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$= \frac{\omega L - (1/\omega C)}{R}$$

उपर्युक्त समीकरणों से स्पष्ट है—

(1) आरोपित प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की उच्च आवृत्ति पर प्रेरकत्व प्रतिघात $X_L (= L\omega)$ का मान अधिक होता है तथा धारितीय प्रतिघात $X_C (= 1/\omega C)$ का मान कम होता है।

(2) आरोपित वि. वा. बल निम्न आवृत्ति पर प्रेरकत्व प्रतिघात X_L का मान कम होता है तथा धारितीय प्रतिघात X_C का मान अधिक होता है।

(3) किसी निश्चित आवृत्ति पर X_L का मान X_C के बराबर किया जा सकता है। यदि $X_L = X_C$ या $\omega L = 1/\omega C$, तो परिपथ की परिणामी प्रतिघात $X_L - X_C = 0$, कुल प्रतिबाधा $Z_{LCR} = R$ (न्यूनतम), परिपथ में धारा $I = V/R$ (अधिकतम) तथा $\tan \phi = 0$ या $\phi = 0$ होगा, अर्थात् इस स्थिति में परिपथ की प्रतिबाधा न्यूनतम, धारा अधिकतम तथा धारा व विभवान्तर के बीच कलान्तर शून्य होता है। इसे **अनुनाद की स्थिति** कहते हैं तथा इस परिपथ को **श्रेणी अनुनादी परिपथ** कहते हैं।

श्रेणी अनुनादी परिपथ के लिए आरोपित वि. वा. बल की आवृत्ति f के लिए शर्त है कि

$$\omega L = 1/\omega C \text{ या } \omega^2 = 1/LC \text{ या } \omega = 1/\sqrt{LC}$$

$$\text{या } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi(\sqrt{LC})} = f_0 \text{ (माना)}$$

अर्थात् श्रेणी अनुनादी परिपथ के लिए आरोपित प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की आवृत्ति, प्रेरकत्व L व धारिता C के गुणनफल पर निर्भर करती है। इसका मान परिपथ में लगे ओह्मीय प्रतिरोध पर अथवा परिपथ में आरोपित विभवान्तर के आयाम, कला आदि पर निर्भर नहीं करता है।

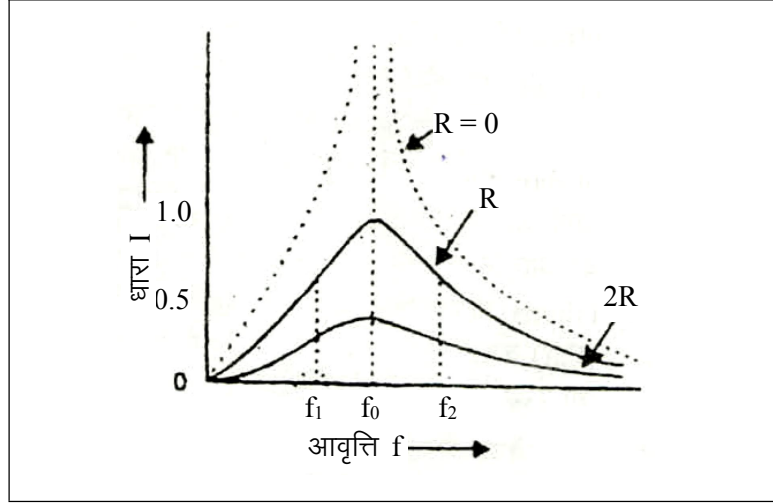
अब यदि परिपथ में L , C व R के मान नियत रखकर आरोपित प्रत्यावर्ती वि. वा. बल की आवृत्ति f का मान शून्य से धीरे-धीरे बढ़ाते हैं, तो

(i) यदि आवृत्ति $f = 0$ (अर्थात् आरोपित विभवान्तर दिष्ट हों) तो $X_L = 0$, $X_C = \infty$, अतः परिपथ में धारा $I = 0$ (अर्थात् परिपथ में कोई धारा नहीं होगी।)

(ii) यदि आवृत्ति f का मान अनुनादी आवृत्ति $f_0 (= 1/2\pi\sqrt{LC})$ के मान से कम हो तो X_L का मान X_C से कम होता है किन्तु जैसे-जैसे f का मान बढ़ता है, X_L का मान बढ़ता है, X_C का मान घटता है, लेकिन $(X_L - X_C)^2$ का मान घटता है, अर्थात् $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ का मान घटता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में धारा बढ़ती है। चूँकि $X_L < X_C$ अतः परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल से कला में अग्रगामी (Lead) होती है। जब $X_L \rightarrow 0$, $X_C \rightarrow \infty$ तो $\tan \phi \rightarrow -\infty$ या $\phi \rightarrow -\pi/2$ (अर्थात् धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में $\pi/2$ कोण अग्रगामी होगी)।

टिप्पणी

टिप्पणी



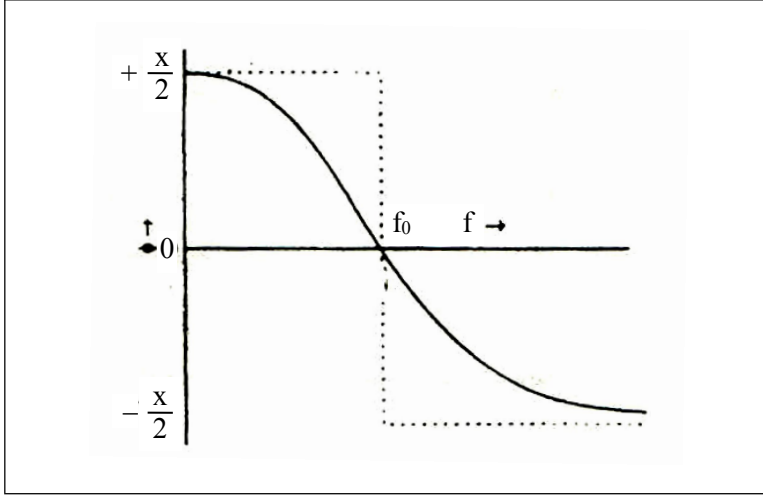
चित्र क्र. 3.40: श्रेणीबद्ध LCR प्रत्यावर्ती परिपथ में धारा का आवृत्ति के साथ परिवर्तन

(iii) यदि आवृत्ति f का मान अनुनादी आवृत्ति $f_0 = \left(= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right)$ के बराबर है तो $X_L = X_C$ या $(X_L - X_C) = 0$ तथा $Z = R$ (न्यूनतम) तथा परिपथ में धारा $I = V/R$ (अधिकतम)। इस स्थिति में परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल की कला में होती है।

(iv) यदि आवृत्ति f का मान अनुनादी आवृत्ति $f_0 = \left(= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \right)$ से अधिक है तो X_L का मान X_C से अधिक होता है। जैसे-जैसे आवृत्ति f का मान बढ़ता है, $(X_L - X_C)^2$ का मान बढ़ता है, अर्थात् $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ का मान बढ़ता है जिसके फलस्वरूप परिपथ में धारा घटती है। चूँकि $X_L < X_C$ अतः परिपथ में धारा, आरोपित वि. वा. बल से कला पश्चगामी (lag) होती है।

(v) जब आरोपित विभवान्तर की आवृत्ति का मान अनन्त की ओर बढ़ता है, अर्थात् $f \rightarrow \infty$ तो $X_L \rightarrow \infty$ तथा $X_C \rightarrow 0$, अतः परिपथ में धारा पुनः शून्य होती है तथा धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में $\pi/2$ कोण पश्चगामी होती है (क्योंकि $\tan \phi \rightarrow \infty$ या $\phi \rightarrow \pi/2$)।

चित्र 3.41 में धारा I का आवृत्ति f के साथ परिवर्तन के लिए बोडे (Bode plot) आरेख प्रदर्शित है। स्पष्ट है कि अनुनाद की स्थिति में धारा का अधिकतम मान परिपथ में लगे ओह्मीय प्रतिरोध R पर निर्भर करता है, अर्थात् परिपथ में ओह्मीय प्रतिरोध R का मान जितना कम होता है, अनुनाद की स्थिति में अधिकतम धारा का मान उतना ही अधिक होता है। चित्र 3.41 में R व $2R$ दो प्रतिरोधों के लिए वक्र प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 3.41: श्रेणीबद्ध प्रत्यावर्ती LCR परिपथ में कलान्तर का आवृत्ति के साथ परिवर्तन

श्रेणी LCR परिपथ में धारा तथा आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर के मध्य कलान्तर ϕ का आवृत्ति f के साथ परिवर्तन के लिए बोडे आरेख (Bode plot) प्रदर्शित है। चित्र में धनात्मक Y-अक्ष पर कला कोण ϕ यह प्रदर्शित करता है कि परिपथ में धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में आगे है तथा ऋणात्मक Y-अक्ष पर कला कोण ϕ यह प्रदर्शित करता है कि परिपथ में धारा, आरोपित विभवान्तर से कला में पीछे है।

स्पष्ट है कि यदि बाह्य आरोपित विभवान्तर की आवृत्ति, परिपथ की स्वाभाविक आवृत्ति ($1/2\pi\sqrt{LC}$) के बराबर होती है तो परिपथ बाह्य स्रोत से अधिकतम धारा खींचने में सक्षम होता है, अर्थात् बाह्य स्रोत परिपथ में अधिकतम ऊर्जा प्रेषित करता है। दूसरे शब्दों में, यदि LCR परिपथ पर परिवर्ती आवृत्ति का प्रत्यावर्ती स्रोत लगाया जाता है तो परिपथ में एक विशेष आवृत्ति ($f = 1/2\pi\sqrt{LC}$) की धारा का आयाम अधिकतम होता है तथा शेष आवृत्तियों की धारा का आयाम बहुत कम (लगभग शून्य) होता है। अतः इस परिपथ को आवृत्ति वरणकारी परिपथ (Frequency selector circuit) या ग्राही परिपथ (Accepter circuit) भी कहते हैं।

3.16.1 अनुनाद की तीक्ष्णता अथवा अनुनाद पर मन्दन का प्रभाव (Sharpness of Resonance or Effect of Damping on Resonance)

अनुनाद की तीक्ष्णता इस बात पर निर्भर करती है कि अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर आरोपित वि. वा. बल की आवृत्ति के साथ धारा किस दर से घटती है। यदि आरोपित वि. वा. बल की आवृत्ति में अनुनादी आवृत्ति से थोड़ा ही परिवर्तन करने से धारा तेज़ी से घटती है तो अनुनाद तीक्ष्ण (sharp) कहलाता है और यदि आवृत्ति में उतने ही परिवर्तन से धारा धीरे-धीरे घटती है तो अनुनाद सपाट (flat)

टिप्पणी

कहतलाता है। कम प्रतिरोध (अर्थात् अल्प अवमन्दन) के लिए अनुनाद तीक्ष्ण होता है तथा अधिक प्रतिरोध (या उच्च अवमन्दन) के लिए अनुनाद सपाट होता है।

बैंड चौड़ाई – अनुनादी आवृत्ति f_0 के दोनों ओर f_1 व f_2 ऐसी आवृत्तियाँ हैं जिन पर परिपथ में धारा अपने अधिकतम मान (= अनुनादी आवृत्ति पर धारा के मान) की $1/\sqrt{2}$ गुनी होती है। इन आवृत्तियों को **अर्द्ध सामर्थ्य आवृत्तियाँ** (half power frequencies) कहते हैं, क्योंकि इन आवृत्तियों पर परिपथ की सामर्थ्य अपने अधिकतम मान की आधी होती है (सामर्थ्य \propto धारा²)। इन आवृत्तियों के अन्तर ($f_2 - f_1$) को **बैंड चौड़ाई** (band width) कहते हैं। स्पष्टतः बैंड चौड़ाई जितनी कम होती है, अनुनाद की तीक्ष्णता उतनी ही अधिक होती है।

चूँकि अनुनादी आवृत्ति $f = f_0$ पर $Z = R$ तथा $I = V/R$, अतः $f = f_1$ व $f = f_2$ पर I का मान अधिकतम मान का $1/\sqrt{2}$ गुना होने के लिए परिपथ की प्रतिबाधा Z का मान $R\sqrt{2}$ होना चाहिए।

$$\text{अर्थात्} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R$$

$$\text{या} \quad R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

$$\text{या} \quad \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$

$$\text{या} \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R^2$$

अर्थात्

$$f = f_1 \text{ (या } \omega = \omega_1) \text{ पर जबकि } f_1 < f_0, \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R \quad \dots (1)$$

तथा

$$f = f_2 \text{ (या } \omega = \omega_2) \text{ पर जबकि } f_2 > f_0, \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \quad \dots (2)$$

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर

$$(\omega_2 - \omega_1)L + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} \right) = 2R$$

$$\text{या} \quad (\omega_2 - \omega_1) \left(L + \frac{1}{C\omega_1\omega_2} \right) = 2R$$

लेकिन $\omega_1\omega_2 \approx \omega^2 = 1/LC$

$$\therefore (\omega_2 - \omega_1)[L + L] = 2R \text{ या } \omega_2 - \omega_1 = R/L$$

... (3)

या
$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

उपर्युक्त समीकरण बैंड-चौड़ाई का व्यंजक है। स्पष्ट है कि $L-C-R$ परिपथ की बैंड-चौड़ाई जितनी कम होती है, परिपथ की वरणक्षमता (Selectivity) उतनी ही अधिक होती है (अर्थात् अनुनाद उतना ही तीक्ष्ण होता है)।

3.16.2 विशेषता गुणांक (Quality Factor)

विशेषता गुणांक या गुणता कारक (quality factor) की परिभाषा निम्न प्रकार से की जाती है—

$$\text{विशेषता गुणांक } Q = 2\pi \times \frac{\text{परिपथ में संचित कुल ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र परिपथ में क्षय ऊर्जा}}$$

लेकिन परिपथ के संचित कुल ऊर्जा = प्रेरकत्व में संचित अधिकतम ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} LI_0^2 = LI_{rms}^2$$

तथा परिपथ से प्रति सेकण्ड ऊष्मीय ऊर्जा के रूप में क्षय ऊर्जा = $I_{rms}^2 R$

अतः प्रति चक्र परिपथ में क्षय ऊर्जा = $(I_{rms}^2 R) / f$

$$\text{अतः विशेषता गुणांक } Q = 2\pi \times \frac{LI_{rms}^2}{(I_{rms}^2 R) / f} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad \dots (4)$$

अनुनाद की स्थिति में $\omega = \omega_0$ पर $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$

$$\left(\text{क्योंकि } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \right)$$

समीकरण (3) तथा (4) से बैंड चौड़ाई

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega}{Q}$$

या
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} = \frac{1}{Q} \text{ या } Q = \frac{\omega}{\omega_2 - \omega_1} \quad \dots (5)$$

स्पष्ट है कि बैंड चौड़ाई, परिपथ के विशेषता गुणांक Q के व्युत्क्रमानुपाती है, अर्थात् परिपथ का विशेषता गुणांक Q सीधे अनुनाद की तीक्ष्णता नापता है।

टिप्पणी

3.16.3 वोल्टेज प्रवर्धन (Voltage Magnification)

अनुनाद की स्थिति में (अर्थात् $\omega = \omega_0$ पर) परिपथ में अधिकतम धारा

$$I = \frac{V}{R} \quad (\text{क्योंकि } X_L = X_C)$$

अतः प्रेरकत्व के सिरों पर विभवान्तर

$$V_L = IX_L = \frac{V}{R} \times \omega_0 L = \frac{\omega_0 L}{R} V = Q_0 V$$

संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर

$$V_C = IX_C = \frac{V}{R} \times \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 CR} \times V = Q_0 V$$

तथा प्रतिरोध के सिरों पर विभवान्तर

$$V_R = IR = V \quad (\text{आरोपित विभवान्तर})$$

(V_L तथा V_C परस्पर विपरीत कला में हैं, अतः V_L व V_C का वेक्टर योग शून्य होता है)

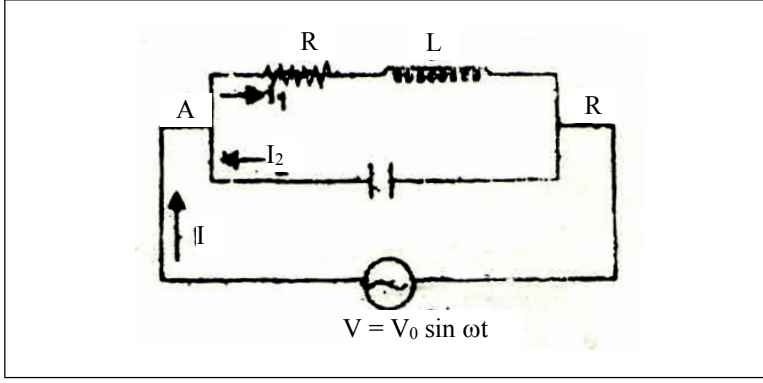
अर्थात् अनुनाद की स्थिति में प्रेरकत्व L या धारिता C के सिरों पर विभवान्तर ($V_L = V_C$), आरोपित वि. वा. बल का Q_0 गुना होता है। अतः श्रेणी अनुनादी परिपथ का वोल्टेज प्रवर्धन अभिलाक्षणिक गुण है।

$$\text{वोल्टेज प्रवर्धन } m = \frac{V_L}{V} = \frac{V_C}{V} = Q_0 \quad \dots (6)$$

समीकरण (4) तथा समी. (6) से स्पष्ट है कि R , L व C के उपयुक्त मान लेकर परिपथ का विशेषता गुणांक बहुत अधिक बढ़ाया जा सकता है जिससे परिपथ की अनुनाद की तीक्ष्णता तथा वोल्टेज प्रवर्धन बढ़ाया जा सकता है।

3.17 समान्तर अनुनादी परिपथ (Parallel Resonant Circuit)

चित्र 3.42 में प्रतिरोध R व प्रेरकत्व L श्रेणीक्रम में जोड़कर धारिता C के संधारित्र के साथ समान्तर क्रम में जोड़ा गया है। इस परिपथ के बिन्दुओं A व B के बीच प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $V = V_0 \sin \omega t$ लगाया गया है। माना किसी क्षण स्रोत से ली गयी धारा I है जिसके फलस्वरूप प्रेरकत्व वाली शाखा में धारा I_1 तथा संधारित्र वाली शाखा में धारा I_2 प्रवाहित होती है। चूँकि दोनों समान्तर शाखाओं पर विभवान्तर समान ($= V$) होगा, अतः प्रेरकत्व व प्रतिरोध में से होकर प्रवाहित होने वाली धारा



चित्र क्र. 3.42: समान्तर अनुनादी परिपथ

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \text{ जहाँ } X_L = \omega L \quad \dots (1)$$

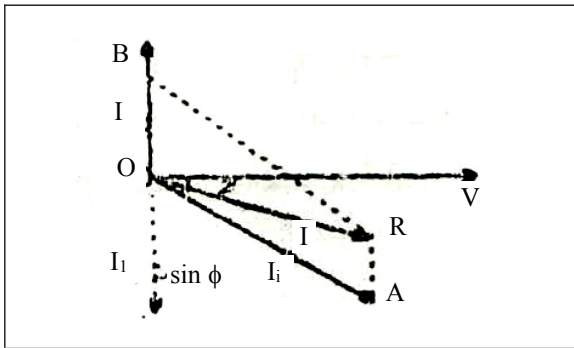
तथा संधारित्र में से होकर प्रवाहित होने वाली धारा

$$I_2 = \frac{V}{X_C} \text{ जहाँ } X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \dots (2)$$

धारा I_1 , आरोपित विभवान्तर से कला में ϕ कोण पश्चगामी है (जहाँ $\tan \phi = X_L / R$)।

इसके विपरीत धारा I_2 आरोपित विभवान्तर से कला में 90° अग्रगामी है।

परिपथ में परिणामी धारा I का मान I_1 व I_2 के वेक्टर योग के बराबर होगा। चित्र 3.43 में OA व OB वेक्टर क्रमशः I_1 व I_2 धारा प्रदर्शित करते हैं जिनका परिणामी वेक्टर OR , परिपथ की धारा I बताता है। धारा I_1 को दो घटकों में विभाजित किया जा सकता है – (i) विभवान्तर V के अनुदिश $I_1 \cos \phi$, तथा (ii) विभवान्तर V के लम्बवत् $I_1 \sin \phi$.



चित्र क्र. 3.43: समान्तर अनुनादी परिपथ के प्रत्यावर्ती LCR परिपथ में कला आरेख

अनुनाद की स्थिति में, परिपथ में परिणामी धारा I तथा आरोपित वि. वा. बल समान कला में होने चाहिए, अर्थात् परिपथ को एक शुद्ध प्रतिरोध की भाँति व्यवहार करना चाहिए। इसके लिए आवश्यक है कि I_1 का विभवान्तर V के लम्बवत् घटक ($= I_1 \sin \phi$), I_2 के बराबर व विपरीत होना चाहिए, अर्थात्

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

$I_2 = I_1 \sin \phi$, तब परिपथ में परिणामी धारा $I = I_1 \cos \phi$ (आरोपित विभवान्तर V की दिशा में) होगी। अर्थात् अनुनाद की स्थिति में,

$$I_2 = I_1 \sin \phi \quad \dots (3)$$

टिप्पणी

I_1 व I_2 के मान समीकरण (1) व (2) में रखने पर

$$\frac{V}{X_C} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \sin \phi$$

या $\frac{V}{X_C} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \times \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$ (क्योंकि $\tan \phi = \frac{X_L}{R}$)

या $\frac{1}{X_C} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}$ या $X_L X_C = R^2 + X_L^2$

यदि अनुनादी कोणीय आवृत्ति ω_0 है तो अनुनाद पर $X_L = \omega_0 L$ तथा $X_C = \frac{1}{\omega_0 C}$

$$\therefore \omega_0 L \times \frac{1}{\omega_0 C} = R^2 + (\omega_0 L)^2,$$

या $\frac{L}{C} = R^2 + \omega_0^2 L^2$

दोनों ओर L^2 का भाग देने पर,

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{L^2} + \omega_0^2$$

या $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}$

\therefore अनुनादी आवृत्ति

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad \dots (4)$$

उपर्युक्त समीकरण समान्तर LCR परिपथ की अनुनादी आवृत्ति व्यक्त करता है। स्पष्टतः f_0 का मान वास्तविक होने के लिए

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{L^2} \text{ या } R^2 < \frac{L}{C} \text{ या } R < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

यदि R का मान X_L की तुलना में नगण्य है तो अनुनादी आवृत्ति

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ जो कि श्रेणी अनुनाद परिपथ की आवृत्ति के बराबर है।}$$

अनुनाद की स्थिति में, परिपथ में परिणामी धारा $I = I_1 \cos \phi$ (आरोपित विभवान्तर V की कला में)

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

$$\text{या } I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cos \phi$$

$$\text{या } I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (\text{क्योंकि } \tan \phi = \frac{X_L}{R})$$

$$\text{या } I = \frac{V}{(R^2 + X_L^2)} R \quad \text{लेकिन } R^2 + X_L^2 = X_L X_C$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{VR}{X_L X_C} = \frac{VR}{\omega_0 L \times (1/\omega_0 C)} \\ &= V \times \frac{R}{L/C} = \frac{V_C}{L} R. \quad \dots (5) \end{aligned}$$

स्पष्ट है कि $I \propto R$, अर्थात् समान्तर अनुनादी परिपथ में परिपथ का प्रतिरोध R बढ़ने पर परिपथ में अनुनादी धारा का आयाम बढ़ता है तथा प्रतिरोध R घटने पर परिपथ में अनुनादी धारा का आयाम घटता है। प्रतिरोध शून्य होने पर (या $R = 0$), अनुनादी धारा का आयाम शून्य होता है (अर्थात् $I = 0$)।

अनुनाद की स्थिति में,

परिपथ की प्रतिबाधा

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{L}{RC} \quad \dots (6)$$

अनुनादी स्थिति में परिपथ की प्रतिबाधा अधिकतम तथा शुद्ध प्रतिरोधीय (क्योंकि L/RC की विमायें, प्रतिरोध की विमाओं के समान हैं) होती है। इस स्थिति में परिपथ की धारा न्यूनतम होती है। इस प्रकार, यह परिपथ उस प्रत्यावर्ती धारा को नहीं गुजरने देता है जिसकी आवृत्ति $f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ होती है। इसीलिए इस परिपथ को **अस्वीकारी परिपथ (Rejector circuit)** या **प्रति अनुनादी परिपथ (Anti-resonant circuit)** भी कहते हैं।

प्रेरकत्व L में धारा, आरोपित विभवान्तर से 90° पश्चगामी होती है तथा संधारित्र C में धारा, आरोपित विभवान्तर से 90° अग्रगामी होती है, अर्थात् प्रेरकत्व व संधारित्र में धारा परस्पर विपरीत कला में होती है। परिपथ का ओह्मीय प्रतिरोध का मान शून्य होने पर, प्रेरकत्व व संधारित्र दोनों में धारा बराबर होगी, सभी परिपथ में परिणामी धारा शून्य होगी। इस प्रकार, प्रत्येक शाखा में धारा का मान परिपथ की परिणामी धारा की अपेक्षा बहुत अधिक होती है, अर्थात् समान्तर अनुनादी परिपथ का एक अभिलाक्षणिक गुण धारा प्रवर्धन (Current magnification) है।

टिप्पणी

अनुनाद की स्थिति में संधारित्र से प्रवाहित धारा

$$I_2 = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{(1/\omega_0 C)} = \omega_0 VC$$

लेकिन समीकरण (1) से परिपथ में परिणामी धारा

$$I = \frac{VC}{L} R$$

$$I_2 = \frac{\omega_0 L}{R} I = Q_0 I$$

जहाँ $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$ परिपथ का विशेषता गुणांक (Quality factor) है। इस प्रकार, अनुनाद की स्थिति में संधारित्र से बहने वाली धारा, स्रोत से ली गई धारा की Q_0 गुनी होती है। अर्थात्

$$\text{धारा प्रवर्धन} = Q_0$$

स्पष्टतः समान्तर अनुनादी परिपथ में धारा प्रवर्धन ठीक उतना ही होता है जितना श्रेणी अनुनाद परिपथ में वोल्टेज प्रवर्धन होता है।

समान्तर अनुनादी परिपथ का उपयोग किसी परिपथ में किसी नियत आवृत्ति के सिग्नल को अन्य आवृत्तियों से अलग करने के लिए किया जाता है।

3.18 श्रेणी तथा समान्तर अनुनादी परिपथों में अन्तर (Difference between Series or Parallel Resonant Circuit)

श्रेणी तथा समान्तर परिपथों में निम्नलिखित अन्तर हैं –

क्र. सं.	श्रेणी अनुनादी परिपथ	समान्तर अनुनादी परिपथ
1.	इसमें प्रत्यावर्ती धारा स्रोत के साथ श्रेणीक्रम में प्रेरकत्व L , धारिता C तथा प्रतिरोध R जुड़े होते हैं।	इसमें प्रतिरोध R युक्त कुण्डली L , संधारित्र (धारिता C) के साथ समान्तर क्रम में प्रत्यावर्ती धारा स्रोत से जुड़ी होती है।
2.	अनुनादी आवृत्ति $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$	अनुनादी आवृत्ति $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$
3.	अनुनाद की स्थिति में प्रतिबाधा $Z = R$ (ओह्मीय) होती है जो अन्य सभी आवृत्तियों पर प्रतिबाधाओं की तुलना में न्यूनतम होती है।	अनुनाद की स्थिति में प्रतिबाधा $Z = \frac{L}{CR}$ (ओह्मीय) होती है जोकि अन्य सभी आवृत्तियों पर प्रतिबाधाओं की तुलना में अधिकतम होती है।

4.	प्रेरकत्व व संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर परस्पर विपरीत कला में तथा बराबर होते हैं।	प्रेरकत्व व संधारित्र में धारायें परस्पर विपरीत कला में होती हैं।
5.	अनुनाद की स्थिति में परिपथ में धारा अधिकतम होती है।	अनुनाद की स्थिति में परिपथ में धारा न्यूनतम होती है।
6.	केवल $f_0 = (1/2\pi\sqrt{LC})$ आवृत्ति की धारा को ग्रहण करता है, अन्य सभी आवृत्तियों की धारा को अस्वीकृत कर देता है।	केवल $f_0 = \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \right)$ आवृत्ति की धारा को अस्वीकृत करता है तथा शेष आवृत्तियों की धारा को ग्रहण करता है।
7.	विशेषता गुणांक $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	विशेषता गुणांक $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{L^2}}$
8.	धारा प्रवर्धन = Q_0 , अर्थात् प्रेरकत्व व संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर, आरोपित विभवान्तर का Q_0 गुना होता है।	धारा प्रवर्धन = Q_0 , अर्थात् प्रेरकत्व व संधारित्र में धारा, स्रोत से ली गई धारा की Q_0 गुनी होती है।

3.19 A.C. परिपथ में शक्ति (Power in A.C. Circuit)

कार्य करने की दर को शक्ति कहते हैं। A.C. परिपथ में आरोपित वि. वा. बल तथा धारा दोनों का मान निरन्तर समय के साथ परिवर्तित होता है अतः किसी A.C. परिपथ में शक्ति, एक पूर्ण चक्कर पर वि. वा. बल तथा धारा के तात्क्षणिक मानों के गुणनफल के बराबर होती है।

तात्क्षणिक आरोपित वि. वा. बल तथा धारा के वास्तविक मान

$$E = E_0 \sin \omega t \text{ तथा } I = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \dots (1)$$

जहाँ ϕ , आरोपित वि. वा. बल के ऊपर कला अग्रता को निरूपित करता है तथा इसका मान परिपथ की प्रकृति के अनुसार धनात्मक, ऋणात्मक अथवा शून्य होता है।

$$\text{किसी परिपथ में } \phi = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad \dots (2)$$

जहाँ X तथा R परिपथ में क्रमशः प्रतिघात (reactance) तथा प्रतिरोध (resistance) है। तब प्रतिबाधा $Z = \sqrt{(R^2 + X^2)}$. $\dots (3)$

परिपथ में तात्क्षणिक शक्ति क्षय

$$\begin{aligned} P_t &= E \cdot I = E_0 \sin \omega t I_0 \sin(\omega t + \phi) \\ &= E_0 I_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

टिप्पणी

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} E_0 I_0 2 \sin \omega t \sin (\omega t + \phi) \\
 &= \frac{1}{2} E_0 I_0 [\cos (\omega t + \phi - \omega t) - \cos (\omega t + \phi + \omega t)] \\
 &= \frac{1}{2} E_0 I_0 [\cos \omega t - \cos (2\omega t + \phi)] \quad \dots (4)
 \end{aligned}$$

एक सम्पूर्ण चक्कर पर माध्य शक्ति क्षय होगा

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\int_0^T p_t dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T \frac{1}{2} E_0 I_0 [\cos \phi - \cos (2\omega t + \phi)] dt}{\int_0^T dt} \\
 &= \frac{1}{2} E_0 I_0 [\cos \omega t - \overline{\{\cos (2\omega t + \phi)\}}]
 \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ } \overline{\cos (2\omega t + \phi)} = \frac{\int_0^T \cos (2\omega t + \phi) dt}{\int_0^T dt}$$

$\cos (2\omega t + \phi)$ का एक सम्पूर्ण चक्कर पर माध्य मान है तथा इसका मान शून्य होगा।

$$\therefore P = \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos \phi = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \phi$$

$$\text{अर्थात् } P = E_{r.m.s.} I_{r.m.s.} \cos \phi \quad \dots (5)$$

यह व्यंजक अभीष्ट मध्यमान शक्ति को निरूपित करता है। यहाँ $\cos \phi = \frac{R}{Z}$

शक्ति गुणांक (Power factor) कहलाता है।

अतः माध्य शक्ति = आभासी वोल्ट × आभासी धारा × शक्ति गुणांक

आभासी वोल्टता तथा आभासी धारा का गुणनफल आभासी शक्ति होता है जिसे शक्ति मीटर (Power meter) से मापा जाता है।

∴ वास्तविक वाट = आभासी वाट × शक्ति गुणांक

शक्ति के लिए व्यंजक $= \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos (2\omega t + \phi)$ अक्रिय (idle) अथवा वाटहीन (wattless) घटक कहलाता है क्योंकि यह माध्य शक्ति क्षय में कोई अंशदान नहीं करता।

अब हम कुछ विशिष्ट स्थितियों का अध्ययन करेंगे –

(i) शुद्ध प्रतिरोध (Purely resistive circuit) – एक शुद्ध प्रतिरोधक में धारा तथा वि. वा. बल सदा समान कला में होते हैं, अर्थात्

$$\phi = 0$$

$$\therefore \text{माध्य शक्ति} = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} \cdot \cos 0^\circ = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.}$$

स्पष्टतया किसी शुद्ध प्रतिरोधक परिपथ में शक्ति क्षय महत्तम होता है।

टिप्पणी

(ii) शुद्ध प्रेरण-परिपथ (Purely inductive circuit) – किसी शुद्ध प्रेरण-परिपथ में धारा आरोपित वि. वा. बल से $\frac{\pi}{2}$ कोण से पश्चगामी होती है, अर्थात् $\phi = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \cos \phi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\therefore \text{माध्य शक्ति} = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

अतः किसी शुद्ध प्रेरण-परिपथ में शक्ति का क्षय शून्य होता है, इस प्रकार के परिपथ में धारा अक्रिय अथवा वाटहीन धारा कहलाती है। चोक कुण्डली इसी सिद्धान्त पर कार्य करती है, एक चोक कुण्डली नगण्य प्रतिरोध तथा उच्च प्रेरकत्व की एक कुण्डली होती है। प्रतिदीप्ति ट्यूबों (fluorescent tubes) तथा मर्करी वाष्प लैम्पों में हम परिपथ में धारा नियन्त्रित करने के लिए चोक कुण्डली का उपयोग करते हैं। A.C. परिपथों में चोक कुण्डली का उपयोग करने से शक्ति का क्षय काफी कम हो जाता है।

(iii) शुद्ध धारितीय-परिपथ (Purely capacitive circuit) – एक शुद्ध धारितीय परिपथ में धारा आरोपित वि. वा. बल से $\frac{\pi}{2}$ कोण से अग्रगामी होती है, अर्थात् $\phi = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \text{माध्य शक्ति} = E_{r.m.s.} \times I_{r.m.s.} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

अर्थात् शुद्ध धारितीय परिपथ में माध्य-शक्ति क्षय शून्य होता है। अतः इस प्रकार के परिपथ में प्रवाहित धारा वाटहीन धारा कहलाती है।

(iv) LCR-परिपथ – किसी LCR परिपथ में मध्यमान शक्ति

$$P = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} \cdot \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \text{जहाँ } \cos \phi &= \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{\left\{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2\right\}}} \\ &= \frac{R}{\sqrt{\left\{R^2 + (X_C - X_L)^2\right\}}} \end{aligned}$$

टिप्पणी

विशेष स्थिति : जब $X_C = X_L$, अर्थात्

$$\text{जब } \frac{1}{\omega C} = \omega L, \text{ तो } Z = R$$

$$\therefore \cos \phi = \frac{R}{R} = 1$$

अर्थात् अनुनाद की स्थिति में LCR परिपथ में शक्ति में गुणांक एकांक होता है तथा माध्य शक्ति $P = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} =$ महत्तम।

(v) **RL परिपथ** – एक RL परिपथ में माध्य शक्ति

$$P = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} \cos \phi$$

$$\text{जहाँ } \cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

(vi) **RC परिपथ** – किसी RC परिपथ में माध्य शक्ति

$$P = E_{r.m.s.} \cdot I_{r.m.s.} \cos \phi$$

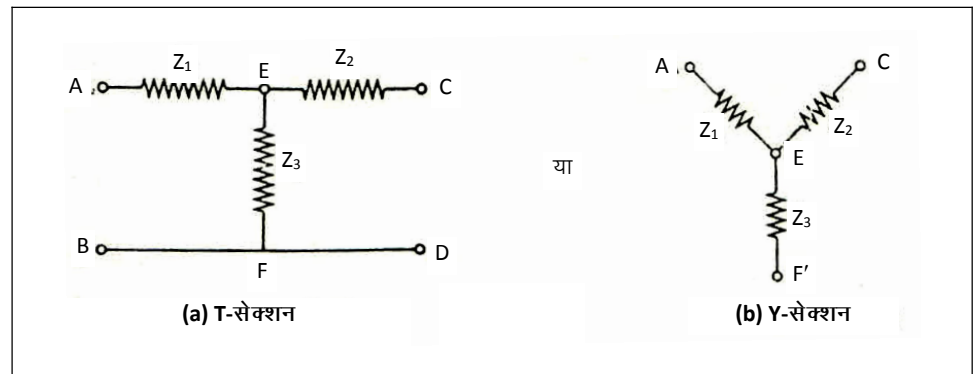
$$\text{जहाँ } \cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

3.20 Y तथा Δ नेटवर्क (Y and Δ Network)

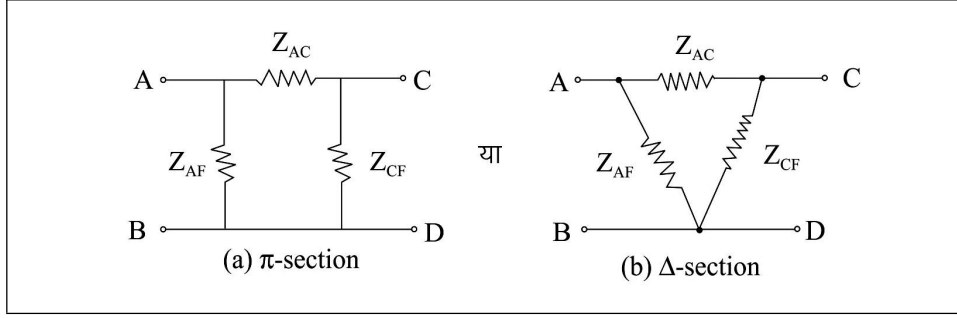
किसी नेटवर्क के तीन अवयव (या प्रतिबाधाएँ) निम्नलिखित दो प्रकार से जोड़ी जा सकती हैं—

(i) T या Y सेक्शन तथा (ii) π या Δ सेक्शन।

(ii) T या Y सेक्शन – चित्र 3.44 (a, b) में T या Y सेक्शन प्रदर्शित है जिसमें दो प्रतिबाधाएँ Z_1 व Z_2 श्रेणी भुजा में जुड़ी हैं तथा एक प्रतिबाधा Z_3 शण्ट भुजा में जुड़ी है।



चित्र क्र. 3.44(A): T या Y सेक्शन



चित्र क्र. 3.44(B): π या ∇ सेक्शन

किसी भी आवृत्ति पर Y सेक्शन को Δ सेक्शन में अथवा Δ सेक्शन को Y सेक्शन में बदला जा सकता है, बशर्ते कि इनके अवयवों (अर्थात् प्रतिबाधाओं) में कुछ सम्बन्धों का पालन हो। अब हम (a) Δ सेक्शन से Y सेक्शन में (b) Y सेक्शन से Δ सेक्शन में परिवर्तन के लिए इनकी प्रतिबाधाओं में सम्बन्ध स्थापित करेंगे।

(a) Δ सेक्शन से Y सेक्शन में परिवर्तन (Conversion of Δ section into Y section)

चित्र 3.44 (a, b) से Y सेक्शन में A तथा C के बीच प्रतिबाधा

$$Z_{AC} = Z_1 + Z_2 \quad \dots (1)$$

$$\frac{1}{Z_{AC}} = \frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b + Z_c}$$

या
$$Z_{AC} = \frac{Z_a(Z_b + Z_c)}{Z_b + Z_c + Z_a} \quad \dots (2)$$

दोनों सेक्शनों में A तथा C के बीच की प्रतिबाधाओं को बराबर करने पर समीकरण (1) तथा (2) से,

$$Z_1 + Z_2 = \frac{Z_a(Z_b + Z_c)}{Z_b + Z_c + Z_a} \quad \dots (3)$$

इसी प्रकार, दोनों सेक्शनों में C तथा F के बीच प्रतिबाधाओं को बराबर करने पर,

$$Z_2 + Z_3 = \frac{Z_c(Z_a + Z_b)}{Z_c + Z_a + Z_b} \quad \dots (4)$$

तथा दोनों सेक्शनों में A तथा F के बीच की प्रतिबाधाओं को बराबर करने पर,

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_b(Z_a + Z_c)}{Z_b + Z_a + Z_c} \quad \dots (5)$$

टिप्पणी

समीकरण (3) व समीकरण (5) को जोड़कर समीकरण (4) घटाने पर,

$$2Z_1 = \frac{Z_a(Z_b + Z_c) + Z_b(Z_a + Z_c) - Z_c(Z_a + Z_b)}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$= \frac{2Z_a Z_b}{Z}$$

जहाँ $Z = Z_a + Z_b + Z_c$

या $Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{Z} \quad \dots (6)$

इसी प्रकार, समीकरण (3) व समीकरण (4) को जोड़कर समीकरण (5) घटाने पर,

$$2Z_2 = \frac{2Z_a Z_c}{Z} \quad \text{या} \quad Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z} \quad \dots (7)$$

तथा समीकरण (4) व समीकरण (5) को जोड़कर समीकरण (3) घटाने पर,

$$2Z_3 = \frac{2Z_b Z_c}{Z} \quad \text{या} \quad Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{Z} \quad \dots (8)$$

इस प्रकार Δ सेक्शन की प्रतिबाधाएँ Z_a, Z_b तथा Z_c ज्ञात होने पर Y सेक्शन की प्रतिबाधाएँ Z_1, Z_2 तथा Z_3 समीकरण (6), (7) तथा (8) से ज्ञात की जा सकती है।

(b) Y सेक्शन से Δ सेक्शन में परिवर्तन (Conversion of Y section into Δ section)

उपर्युक्त समीकरणों (6), (7) तथा (8) से Z_1, Z_2 तथा Z_3 के मान रखने पर,

$$\Sigma Z_1 Z_2 = Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1$$

$$= \frac{Z_a Z_b}{Z} \times \frac{Z_a Z_c}{Z} + \frac{Z_a Z_c}{Z} \times \frac{Z_b Z_c}{Z} + \frac{Z_b Z_c}{Z} \times \frac{Z_a Z_b}{Z}$$

या $\Sigma Z_1 Z_2 = \frac{Z_a Z_b Z_c}{Z^2} (Z_a + Z_c + Z_b)$

$$= \frac{Z_a Z_b Z_c}{Z} \quad (\text{क्योंकि } Z_a + Z_b + Z_c = Z)$$

अब चूँकि $\frac{Z_a Z_b}{Z} = Z_1$

$\therefore \Sigma Z_1 Z_2 = Z_1 Z_c$

या $Z_c = \frac{\Sigma Z_1 Z_2}{Z_1} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad \dots (9)$

$$\text{इसी प्रकार, } Z_b = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_2} \quad \dots (10)$$

$$\text{तथा } Z_a = \frac{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1}{Z_3} \quad \dots (11)$$

इसी प्रकार, Y सेक्शन की प्रतिबाधाएँ Z_1, Z_2 तथा Z_3 ज्ञात होने पर समीकरण (9), (10) तथा (11) से Δ सेक्शन की प्रतिबाधाएँ ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी

3.21 विद्युत पावर का संचरण (Transmission of Electric Power)

प्रत्यावर्ती धारा पावर या विद्युत पावर (माना 22,000 वॉट) को दूरस्थ स्थानों पर उपयोग कर्ता के पास उसी वोल्टेज अर्थात् जिस वोल्टेज पर उपयोग कर्ता को चाहिए अर्थात् 220 या 230 वोल्ट पर प्रेषित किया जाये तब निम्न दोष उत्पन्न होते हैं—

(i) प्रेषक लाइनों में प्रवाहित धारा बहुत अधिक $\left(\frac{22000}{220} = 100 \text{ एम्पियर}\right)$

होगी। अतः लाइन तारों में बहुत अधिक ऊष्मा (I^2R) उत्पन्न हो जायेगी।

(ii) लाइन तारों के मध्य विभव पतन (IR) का मान काफी अधिक होगा जिसके कारण ग्राही स्टेशन (Receiving station) पर वोल्टेज का मान जनित्र स्टेशन (Generation station) पर विभव की तुलना में काफी कम हो जाता है।

(iii) प्रेषक लाइन के तारों को, जिनमें उच्च धारा प्रवाहित करनी है, काफी मोटा लेना होगा। इस प्रकार तारों की लाइन डालने के लिए खर्च बढ़ जायेगा साथ ही खम्बों की लम्बाई भी अधिक लेनी होगी।

अतः दूरस्थ स्थानों के बीच निम्न विभव व उच्च धारा पर पावर का संचरण न तो दक्ष होता है और न किफायती। इसके विपरीत यदि पावर संचरण उच्च वोल्टता (22000 वोल्ट) पर हो, तो उपर्युक्त दोष लगभग दूर हो जाते हैं। इस अवस्था में लाइन तारों में बहने वाली धारा $\frac{22000}{22000} = 1$ ऐम्पियर है। इससे अपेक्षाकृत कम ऊष्मीय क्षय तथा वोल्टेज पतन कम होता है तथा पतले तार प्रयुक्त किये जा सकते हैं।

अतः दक्षता तथा किफायत दोनों की दृष्टि से वैद्युत पावर का संचरण उच्च वोल्टेज पर किया जाना चाहिए। अतः जनित्र स्टेशन पर प्राप्त प्रत्यावर्ती धारा का वोल्टेज बढ़ाने के लिए यंत्र लगाये जाते हैं। पुनः घरेलू या उद्योगों में क्रमशः 220 से 400 वोल्टेज की आवश्यकता होती है। अतः ग्राही स्टेशनों पर ऐसे यंत्र लगाये जाते हैं जो लाइन से प्राप्त उच्च वोल्टेज को घटा देते हैं। दिष्ट धारा (D.C.) में इस प्रकार का वोल्टेज परिवर्तन सम्भव नहीं है। इसके विपरीत प्रत्यावर्ती धारा

(A.C.) के वोल्टेज में परिवर्तन ट्रांसफॉर्मर के द्वारा किया जा सकता है। अतः प्रत्यावर्ती धारा के संचरण को दिष्ट धारा पर प्राथमिकता दी जाती है।

टिप्पणी

3.22 जैव विद्युत् की उत्पत्ति (Origin of Bio-electricity)

अठारहवीं सदी में बोलोग्ना नामक शहर में **प्रोफेसर लुईगी गैलवैनी** ने सर्वप्रथम अपने प्रयोग द्वारा जैविक विद्युत् का प्रदर्शन तथा अध्ययन किया। मेंढक के विच्छेदन के अध्ययन से उन्होंने यह पाया कि बिजली से मेंढक के विच्छेदित पैर की नस एक चिकोटी जैसा अनुभव करती थी। इस आधार पर **गैलवैनी** ने निष्कर्ष निकाला कि जीवों में कुछ आन्तरिक वैद्युत ऊर्जा मौजूद होती है। हृदय, दिमाग तथा अन्य अंगों के कार्यों के परिणामस्वरूप नसों तथा माँसपेशियों के बीच दोलन उत्पन्न होते हैं तथा आंतरिक बिजली प्रवाहित होती है।

हालाँकि बिजली के बारे में हमारी वैज्ञानिक समझ कुछ ही वर्षों पुरानी है, किन्तु जीवों में विद्युत् की उपस्थिति या अस्तित्व हजारों साल पहले, अटलांटिक तथा भू-मध्य सागर के मछुआरों द्वारा नोटिस किया गया जबकि उन्होंने पाया कि कुछ मछलियाँ बिजली के रूप में मनुष्यों पर आघात कर सकती हैं। दरअसल जीवों की कोशिकाएँ तथा ऊतक लगातार बल तथा तनाव के अधीन होते हैं। जिससे आण्विक क्रिया के समय विद्युत् चुम्बकीय क्षेत्र तथा विद्युत् चुम्बकीय तरंगों का निर्माण होता है।

3.23 जैव विद्युत् (Bio Electricity)

एक जीव के भीतर, पेशीय या तांत्रिका तंत्र द्वारा बिजली का उत्पन्न होना जैव विद्युत् कहलाता है। दरअसल यह एक विद्युत् धारा है जो कि जीवित ऊतकों के नसों और माँसपेशियों द्वारा उत्पन्न होती है। हृदय के ई.सी.जी. सिग्नल इस आन्तरिक बिजली की वजह से ही मिलते हैं।

प्राणी शरीर में समन्वय एवं समाकलन को बनाये रखने के लिए दूरसंचार तारों की तरह पूर्ण शरीर में महीन धागों के जैसे तन्त्रिकाएँ (Nerves) फैली रहती हैं। ये वातारणीय उद्दीपनों (Stimuli) को संवेदी अंगों से ग्रहण कर विद्युत-आवेगों या प्रेरणाओं (Electrical impulses) के रूप में तीव्रता के साथ इनका प्रसारण (Conduction) करके शरीर के विभिन्न अंगों भागों एवं ग्रन्थियों आदि के बीच समन्वय स्थापित करती है।

प्राणियों के शरीर में तन्त्रिका आवेगों को एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने का कार्य तन्त्रिका ऊतक (Nervous tissue) द्वारा किया जाता है। तन्त्रिका ऊतक भ्रूण की एक्टोडर्म (Ectoderm) से विकसित होती है और शरीर के सम्पूर्ण भागों में फैला रहता है। तन्त्रिका ऊतक तन्त्रिका कोशिकाओं या न्यूरॉन्स (Neurons) तन्त्रिका तन्तुओं (Nerve fibres) और न्यूरोग्लिया (Neuroglia) से निर्मित होता है।

3.24 तन्त्रिका आवेग (Nerve Impulse)

टिप्पणी

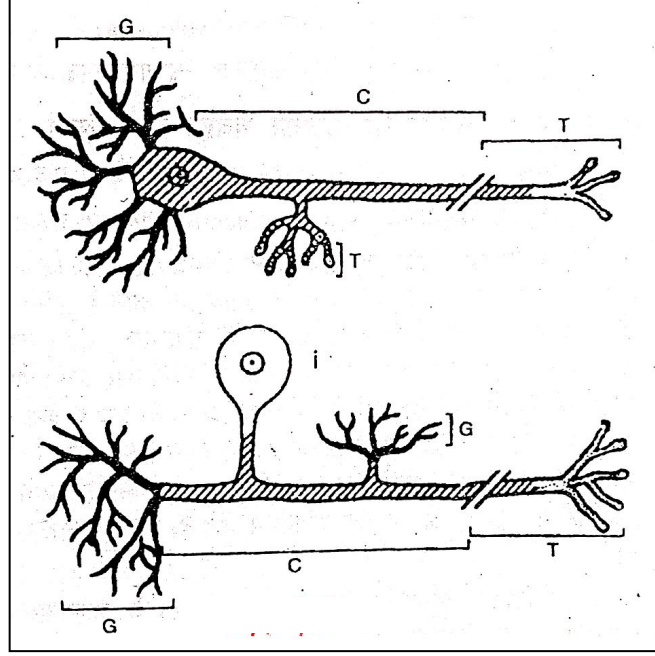
तन्त्रिका आवेग (Nerve impulse) किसी एक तन्त्रिका तन्तु (Nerve fibre) पर संचरित कार्यकारी क्रिया (Physiological activity) की एक तरंग की तरह होता है, जिसमें रासायनिक (Chemical) और भौतिक (Physical) घटनाएँ सम्मिलित होती हैं, अर्थात्

तन्त्रिका आवेग (Nerve impulse) एक रासायनिक और भौतिक परिवर्तनों का जोड़ है जो किसी उद्दीपन के कारण न्यूरोन्स (Neurons) में एक लहर के समान संवाहित होने वाली कार्यात्मिक क्रिया के रूप में होता है।

तन्त्रिका तन्तुओं में आवेग का संवहन एक **विद्युत-रासायनिक प्रेरणा** (Electrochemical impulse) के रूप में होता है। तन्त्रिका आवेग का आधार **सभी या कोई नहीं सिद्धान्त** है अर्थात् एक उद्दीपन, यदि एक उत्तेजन (Response) उत्पन्न करने की क्षमता रखता है, तब यह सारी उत्तेजनाएँ उत्पन्न कर सकता है। **गोथलीन** (Gothlin) ने बहुत पहले यह प्रदर्शित किया था कि एक तन्त्रिका आवेग एक भौतिक और रासायनिक क्रियाओं द्वारा सम्पन्न होने वाली प्रक्रिया है। **फॉस्टर** (Foster) के अनुसार तन्त्रिका आवेग के प्रमुख लक्षण निम्नानुसार होते हैं –

- (i) जब किसी तन्त्रिका को कोई बाह्य उद्दीपन मिलता है तब तन्त्रिका उत्तेजित हो उठती है। तन्त्रिका उत्तेजित हो जाने के पश्चात् तन्त्रिका में आवेगों की तरंग उठती है और तन्त्रिका में संवाहित होने लगती है।
- (ii) तन्त्रिका तन्तु में आवेग केवल एक ही दिशा में संवाहित होता है। संवेदी तन्त्रिका (Sensory nerve) में केवल मस्तिष्क (Brain) की ओर एवं चालक तन्त्रिका (Motor nerve) में प्रभावी अंग (Effector organs) की ओर संवाहित होती है।
- (iii) सामान्य रूप से एक आवेग समीप की अन्य तन्त्रिका तन्तुओं में नहीं फैल पाता, क्योंकि इन तन्त्रिका तन्तुओं में मेडूलेटेड आवरण (Medullated sheath) चढ़ा रहता है।
- (iv) एक उद्दीपन के दिये जाने के पश्चात् तन्त्रिका तन्तुओं में एक अनुत्तेजन अवधि या रिफ्रेक्टरी पीरियड (Refractory period) होता है।
- (v) निरन्तर ऑक्सीजन की सप्लाई मिलते रहने पर तन्त्रिका आवेग को अधिक समय तक ले जा सकती है। यद्यपि तन्त्रिकाओं में अधिकतर थकावट नहीं पायी जाती है।
- (vi) शरीर के अन्दर तन्त्रिका तन्तु कई आवेगों का संवहन कर सकते हैं।
- (vii) तन्त्रिका आवेग का संवहन '**सभी या कोई नहीं सिद्धान्त**' का पालन करते हैं।

टिप्पणी



चित्र क्र. 3.45: तन्त्रिका कोशिका

तन्त्रिका कोशिकाओं (Nerve cells) की आकार (size), स्थिति (Position) एवं संरचना (Structure) में अत्यधिक विभिन्नता होने पर भी कार्यात्मक (Functionally) रूप से तन्त्रिका कोशिका की निम्नलिखित तीन क्षेत्रों (Regions) चित्र 3.45 में विभाजित किया जाता है :

- (i) उत्पादनीय क्षेत्र (Generator region) – उत्पादनीय (Generator) क्षेत्र केवल डेन्डाइट्स (Dendrites), सोमा (Soma) और कोलेट्रल्स (Collateral) क्षेत्र तक ही सीमित रहता है।
- (ii) संवाहकीय क्षेत्र (Conductile region) – संवाहकीय/संवहनीय क्षेत्र (Conductive region) एकसमान/तन्त्रिकाक्ष (Axon) होता है।
- (iii) पारगमनीय क्षेत्र (Transmissional region) – पारगमनीय क्षेत्र (Transmissional region) के अन्तर्गत तन्त्रिका का अन्तस्थ (Ending) या अन्तिम (Terminal) भाग होता है।

3.25 विश्राम विभव (Resting Potential)

यदि सुप्त तन्त्रिका कोशिका (Resiting nerve cell) में एक इलेक्ट्रोड (Electrode) को रखा जाता और दूसरा इलेक्ट्रोड तन्त्रिका कोशिका की सतह पर रखा जाये, तो धारा प्रवाहित होती है। दो इलेक्ट्रोड्स (Electrode) के बीच को विश्राम विभव कहते हैं और जब यह अन्तर रहता है तब तन्त्रिका कोशिका की ध्रुवित (Polarised) कहते हैं। दो इलेक्ट्रोड्स के बीच विभव का अन्तर समाप्त हो जाता है तब उस अवरण को विध्रुवीय (Depolarisation) कहते हैं। विश्राम विभव को तन्त्रिका कोशिका के अन्दर एवं बाहर पोटैशियम आयन्स की सान्द्रता के द्वारा

निर्धारित किया जाता है या मापा जाता है। विश्राम अवस्था में **पोटैशियम आयन्स** अपनी अत्यधिक सान्द्रता के कारण तन्त्रिका कोशिका के बाहर की ओर विसरित होते हैं। इसके कारण कोशिका के अन्दर ऋणात्मक (Negative) अवस्था विकसित होती है। आन्तरिक ऋणात्मक अवस्था इतनी अधिक होती है कि पोटैशियम आयन्स के विसरण को आगे रोकती है। इस प्रकार सन्तुलन विकसित होता है। इसको **विश्राम विभव (Resting potential)** कहते हैं। **प्लाज्मा मेम्ब्रेन (Plasma membrane)** की विश्राम अवस्था में **विश्राम विभव 60-70 μ V** होता है। तन्त्रिकाओं का **विश्राम विभव** उन दीर्घ **तन्त्रिकाक्ष/एक्सॉन (Axon)** तथा **केन्द्रीय तन्त्रिका (Central nervous)** काय में मापा जाता है, जो कि सूक्ष्म इलेक्ट्रोड (Microelectrode) का समायोजन कर सके, किंतु नोड्स (Nodes) एवं अध्रुवीय सिरों (Depolarised ends) पर मापने पर ज्ञात होता है कि छोटी **माइलीनेटेड (Myelinated)** एवं **नॉन-मायलीनेटेड (Non-myelinated)** तन्तुओं में **विश्राम विभव** बराबर होती है।

तन्त्रिका तन्तु प्रेरणा-प्रसारण (Impulse transmission) की विद्युत प्रक्रिया तीन बातों पर आधारित होती है –

- (i) एकसोप्लाज्म या ऐक्सॉन के कोशिकाद्रव्य का रासायनिक संयोजन (Chemical composition)।
- (ii) ऐक्सॉन की कला (एक्सोलिमा-Axolemma) की पारगम्यता (Permeability)।
- (iii) ऐक्सॉन के बाहर तरल वातावरण का रासायनिक संयोजन।

3.26 प्रेरणा संवहन या तन्त्रिका संवहन की प्रक्रिया (Process of Action Transmission or Nerve Transmission)

प्रेरणा संवहन या तन्त्रिका संवहन की प्रक्रिया को दो प्रावस्थाओं में बाँटा जाता है।

(1) **विश्राम-विभव (Resting potential)** तथा (2) **प्रेरणा-विभव (Action potential)**।

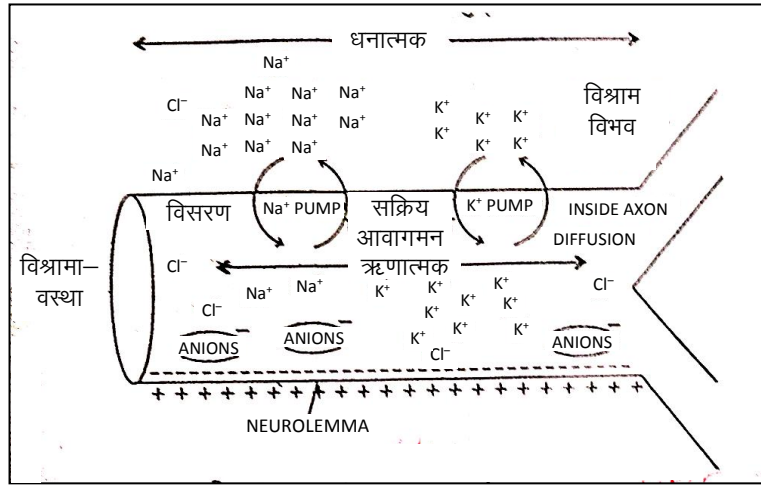
(1) **विश्राम-विभव या सुप्त कला विभव (Resting Membrane Potential - RMP)** – प्राणी शरीर में बाह्य कोशिकीय वातावरण में रक्त एवं ऊतक द्रव तन्त्रिका कोशिकाओं के बाहर भी होता है। इस वातावरण में मुख्य रूप से सोडियम (Na^+), क्लोराइड (Cl^-) और बाइकार्बोनेट आयनों (HCO_3^-) की संख्या अधिक होती है। इसके अतिरिक्त ऑक्सीजन पोषक पदार्थ भी पाये जाते हैं, जो कोशिका के अन्दर पहुँचते रहते हैं। साथ ही अपशिष्ट पदार्थ के रूप में बनी कार्बन डाइ-ऑक्साइड भी इस वातावरण में पायी जाती है। एकसोप्लाज्म ऊतक द्रव से बहुत भिन्न होता है। इसमें प्रोटीन एवं अन्य कार्बनिक पदार्थों के जटिल अणुओं के अतिरिक्त (Na^+) और (Cl^-) आयनों के बजाय पोटैशियम (K^+), मैग्नीशियम

टिप्पणी

(Mg⁺⁺) और फॉस्फेट (PO₄) आयन बड़ी संख्या में होते हैं। साथ ही प्रोटीन एवं जटिल कार्बनिक अणु भी पाये जाते हैं।

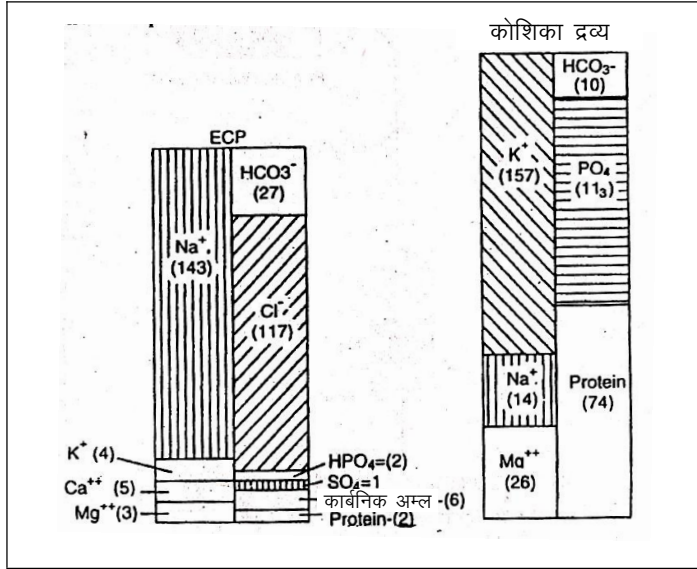
कोशिका कला (Cellular membrane) के आस-पास पदार्थों के विनिमय (Exchange) में निम्नलिखित दो प्रक्रियाएँ होती हैं – (i) विसरण (Diffusion) और (ii) सक्रिय आवागमन (Active transport)।

(i) विसरण : विसरण क्रिया में कोशिका कला जिन पदार्थों के लिए पारगम्य होती है, उनके अणु या आयन कोशिका कला के आर-पार अधिक संख्या वाले तरल की ओर अर्थात् कोशिकाद्रव्य से ऊतक द्रव्य से कोशिकाद्रव्य में आते-जाते हैं।



चित्र क्र. 3.46: R.M.P. की तन्त्रिका छिद्र के चरण

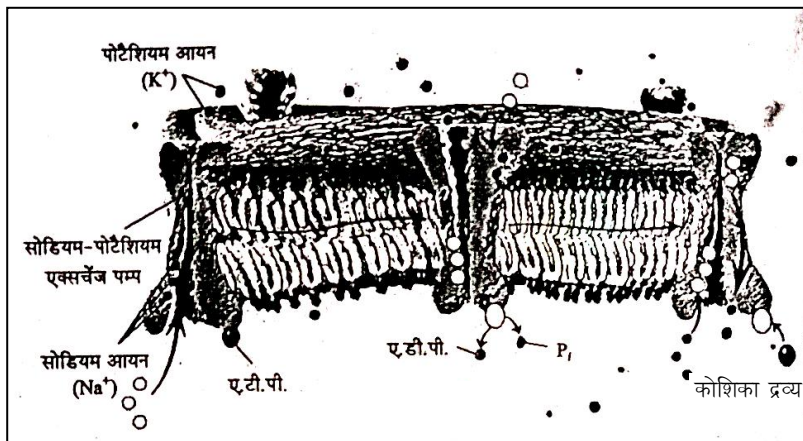
(ii) सक्रिय गमन : यहाँ पर एक अन्य क्रिया सक्रिय गमन (चित्र 3.47) भी होती है जिसमें विसरण प्रवणता के विपरीत ATP की ऊर्जा व्यय की जाती है। इस क्रिया में पदार्थों को ऊतक द्रव्य में भी पहुँचाया जा सकता है एवं यहाँ से लिया भी जा सकता है। बाह्य कोशिकाद्रव्य एवं ऊतक द्रव्य का रासायनिक संगठन (Chemical composition) भिन्न होता है, किन्तु इसके बीच परासरणी सन्तुलन (Osmotic balance) बनाये रखने के लिए दोनों माध्यम समपरासरणी (Isotonic) हो जाते हैं, क्योंकि अर्धपारगम्य झिल्ली में होकर जल तनू घोल से गाढ़े घोल की ओर तब तक जाता है जब तक दोनों समान न हो जायें। इसी प्रकार, यदि कोशिका कला के आर-पार विद्युत-विभव (Electric potential) में अन्तर हो तो ऋणात्मक (Negative) और धनात्मक (Positive) विद्युतावेशी आयन-विभव के अनुसार कोशिका कला के आरपार आते-जाते हैं। इसी को सक्रिय आवागमन (Active transport) कहते हैं।



चित्र क्र. 3.47: RMP सक्रिय आवागमन

3.27 जैव विद्युत् की उत्पत्ति से सोडियम तथा पोटैशियम परिवहन (Sodium and Potassium Transport by Origin of Bio electricity)

कोशिका झिल्ली से सोडियम तथा पोटैशियम आयनों का परिवहन एक सक्रिय प्रक्रिया है, जिसमें ATP का हाइड्रोलिसिस होता है। जिससे आवश्यक ऊर्जा प्राप्त होती है। इस प्रक्रिया में Na^+/K^+ -ATP-ase नामक एन्जाइम शामिल होता है। यह प्रक्रिया, सेल के बाहर अत्यधिक Na^+ आयनों की मौजूदगी तथा सेल के अन्दर अत्यधिक मात्रा में K^+ आयनों की मौजूदगी के लिए जिम्मेदार है। यह परिवहन प्रक्रिया निम्न चित्र में दर्शायी गई है। यह प्रक्रिया तीन Na^+ आयनों को सेल के बाहर तथा दो K^+ आयनों को सेल के अन्दर भेजती है। इस असंतुलित आवेश हस्तांतरण से कोशिका झिल्ली में आवेश अलग-अलग हो जाते हैं।



चित्र क्र. 3.48: सोडियम-पोटैशियम एक्सचेंज पम्प

टिप्पणी

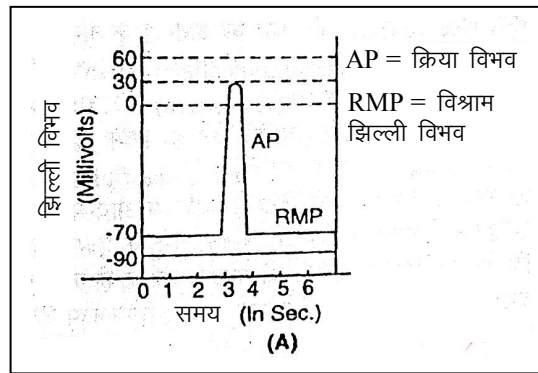
इस परिवहन में ATP-ase नाम वाहक कार्य करता है। यह सोडियम-पोटैशियम पम्प डैनिस वैज्ञानिक जेन्स क्रिश्यचन द्वारा खोजा गया था। उनकी इस खोज के लिए उन्हें सन् 1997 में नोबेल पुरस्कार से नवाजा गया था।

जैव शरीर में रासायनिक क्रियाओं के लिए आयनिक प्रवणता का संतुलन सोडियम तथा पोटैशियम आयनों ($\text{Na}^+ - \text{K}^+$) के परिवहन द्वारा बनाये रखा जाता है। यह कार्य ट्रांस झिल्ली पम्प द्वारा किया जाता है। इस क्रिया में सोडियम आयनों (Na^+) को पोटैशियम आयनों (K^+) द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। झिल्ली सोडियम-पोटैशियम आयन परिवहन के लिए ATP के रूप में ऊर्जा आवश्यक होती है जो प्रत्येक कोशिका में उपलब्ध $\text{Na}^+ - \text{K}^+ \text{ATP}$ एन्जाइम द्वारा प्राप्त होती है।

प्रेरणा क्रियात्मक कला विभव (Action membrane potential : AMP)

— विश्राम झिल्ली विभव तो शरीर की अधिकांश कोशिकाओं में होता है, लेकिन तन्त्रिका कोशिका का यह विशिष्ट लक्षण है कि कोई भी बाहरी उद्दीपन इसकी झिल्ली की सोडियम आयनों के प्रति पारगम्यता को बढ़ा देता है। इसी प्रकार प्रेरणा प्रसारण का कार्य तन्त्रिकाएँ कोशिकाएँ ही करती है।

यदि एक्सॉन (Axon) को हम किसी बिन्दु पर दबाएँ या किसी अन्य प्रकार से उद्दीप्त करें तो इसकी कला के प्रतिरोध के कारण कोई प्रतिक्रिया नहीं होगी। जैसे ही प्रतिरोध समाप्त होगा, उद्दीप्त की प्रेरणा एक्सॉन की पूर्ण लम्बाई में फैल जायेगी। रासायनिक स्तर पर एक्सॉन की झिल्ली किसी बिन्दु पर उद्दीप्त होते ही केवल इसी बिन्दु पर कोशिका झिल्ली आयन Na^+ आयन के लिए अधिक पारगम्य हो जाती है। अतः Na^+ आयन बड़ी संख्या में भीतर पहुँचकर विश्राम क्षमता को समाप्त ही नहीं कर देते वरन् इस क्षमता को उल्टा कर देते हैं। इसलिए झिल्ली के बाहर की तुलना में क्षण भर के लिए, भीतर 45 मिली वोल्ट का धनात्मक विद्युतावेश (+45 mV) हो जाता है। इसी से उद्दीपन की प्रेरणा स्थापित होकर तन्त्रिका कोशिका की झिल्ली में प्रसारित होने लगती है।



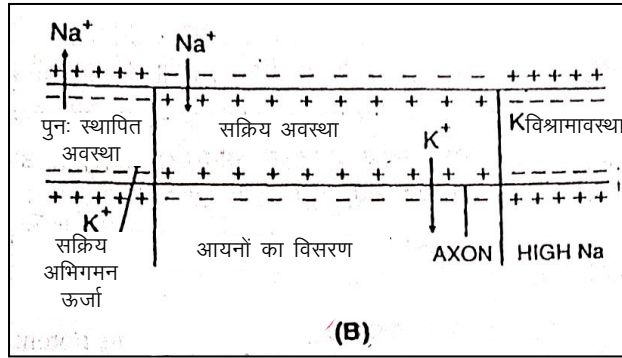
चित्र क्र. 3.49

जिस बिन्दु पर प्रेरणा-विभव स्थापित होती है, उसके समीपी भागों में विश्रामावस्था होने के कारण झिल्ली के आर-पार भीतर की ओर ऋणात्मक आवेग होता है। इसलिए धनात्मक भाग से विद्युत प्रेरणा झिल्ली के भीतर ही भीतर ऋणात्मक भागों की ओर बहती है तथा बाहर की ओर वापस लौटकर विद्युत पथ

स्थापित करती है। नए भाग में पहुँचते ही यह विद्युत झिल्ली को उद्दीप्त कर Na^+ आयनों के प्रति पारगम्य बना देता है और यहाँ भी पिछले बिन्दु की तरह प्रेरणा-विभव स्थापित हो जाती है। इसी तरह बिन्दु पर बिन्दु बहते हुए प्रेरणा की बाह्य एक्सॉन के छोर तक स्वयंचालित हो जाती है।

पुनः ध्रुवण (Repolarization)

प्रत्येक बिन्दु पर प्रेरणा-विभव केवल 1 मिली सेकण्ड के लिए ही सम्बोधित (Generate) होती है, क्योंकि बाहर की तुलना में भीतर +45 mV का धनात्मक विद्युतावेश होते ही इस बिन्दु पर झिल्ली की पारगम्यता बदल जाती है अर्थात् इसके सोडियम द्वार बन्द तथा पोटैशियम द्वार खुल जाते हैं जिससे अनेक K^+ आयन वेगपूर्वक बाहर निकलकर विश्राम विभव को पुनः स्थापित करते हैं। इस समय 2.3 मिली सेकण्ड तक इस बिन्दु पर नई प्रेरणा-क्षमता तब तक स्थापित नहीं हो जाती जब तक कि कला की पारगम्यता तथा सोडियम-पोटैशियम परिवहन द्वारा इसके दोनों ओर के द्रव्यों के रासायनिक संयोजन में सामान्य संतुलन स्थापित नहीं हो जाता है। इस अवधि को दुर्जय अनुत्तेजन अवधि (Refractory period) कहते हैं। इससे प्रेरणा सदैव एक ओर साइटॉन से ऐक्सॉन के छोर की ओर प्रसारित होती है।



चित्र क्र. 3.50: तन्त्रिका आवेग के दौरान विद्युवण एवं पुनःध्रुवण की अभिक्रिया

3.28 तन्त्रिका आवेग संवहन की क्रिया-विधि

(Mechanism of Nerve Impulse Transmission)

तन्त्रिका आवेग के संवहन की क्रिया निम्नलिखित विधियाँ हैं –

- (i) तन्त्रिका तन्तु (Nerve fibre) द्वारा
- (ii) उच्छलन प्रसारण (Saltatory transmission)
- (iii) युग्मानुबंधन द्वारा (Through Synapse)

(i) तन्त्रिका तन्तु (Nerve fibre) के द्वारा – तन्त्रिका तन्तु (Nerve fibre) या ऐक्सॉन (Axon) एक सिलिन्डर (Cylinder) या एक केबल (Cable) के समान होती है। इसके अन्दर ऐक्सोप्लाज्म (Axoplasm) भरा रहता है तथा

टिप्पणी

तन्त्रिका तन्तु के बाहर की ओर एक पतली झिल्ली के द्वारा आच्छादित रहता है। इस झिल्ली को **एक्सॉन झिल्ली (Axon membrane)** कहते हैं। **एक्सॉन झिल्ली (Axon membrane)** लाइपो प्रोटीन (lipoprotein) की बनी होती है। इसकी मोटाई 100 Å होती है। इस झिल्ली में कुछ सूक्ष्म छिद्र (pores) होते हैं। इन छिद्रों का व्यास 7 से 10 Å तक होता है। इन छिद्रों में से जल और छिद्रों के व्यास के अनुसार अन्य पदार्थ अन्दर और बाहर होते रहते हैं। इसका तात्पर्य होता है कि एक्सॉन झिल्ली, अर्धपारगम्य (Semi-permeable) होती है। एक्सॉन झिल्ली एक **जैवविद्युतीय विभव (Bioelectrical potential)** या **झिल्ली विभव (membrane potential)** को प्रदर्शित करती है जो कि **बर्नस्टेन्स (Bernsteins)** के आयनिक सिद्धान्त के अनुसार (जिसको 1952 में **होजकिन एवं हक्सले (Hodgkin and Huxley)** वैज्ञानिकों ने रूपांतरित किया) कोशिका के बाहर एवं अन्दर एक्सॉन झिल्ली की अर्धपारगम्य (Semipermeable) स्वभाव के कारण विभिन्न आयन्स की असमान सान्द्रता के कारण होता है। विभिन्न आयन्स की झिल्ली पारगम्यता भिन्न होती है और तन्त्रिका तन्तु (Nerve fibre) की कार्य की अवस्था के अनुसार निरन्तर परिवर्तित होती रहती है। सामान्य अवस्था में झिल्ली विभव (Membrane potential) = 80 mV होती है। एक्सॉन झिल्ली के अर्धपारगम्य स्वभाव के कारण कुछ आयन्स, एक्सोप्लाज्म (Axoplasm) से अंतराली द्रव (Interstitial fluid) में तथा कुछ आयन्स अंतराली द्रव एक्सोप्लाज्म में संवाहित होते हैं। इसके कारण आन्तरिक एक्सोप्लाज्म (Axoplasm) में आयन्स की सान्द्रता बाहरी अन्तराली द्रव (Interstitial fluid) से भिन्न होती है। तन्त्रिका की आराम/विश्राम अवस्था में तन्त्रिका जब उद्दीप्त नहीं होती है सोडियम आयन्स अन्दर से बाहर की ओर संचारित होते हैं। जिसके कारण सोडियम आयन्स की सान्द्रता तन्त्रिका तन्तु के एक्सोप्लाज्म (Axoplasm) में नगण्य/शून्य हो जाती है। इसके विपरीत पोटैशियम आयन्स की सान्द्रता अधिक हो जाती है। सामान्यतः सोडियम आयन्स की सान्द्रता अन्तराली द्रव (Interstitial fluid) में आन्तरिक एक्सोप्लाज्म की अपेक्षा 100 गुना अधिक होती है।

जब एक्सॉन (Axon) एक उपयुक्त उद्दीपन यांत्रिक (mechanical), रासायनिक या विद्युतीय (Electrical) आवेग से उत्तेजित होती है, तब तन्त्रिका आवेग का संवहन निम्न प्रकार से होता है –

- (i) तन्त्रिका आवेग का संचालन झिल्ली में होने वाले अध्रुवित (Depolarised) का तरंग के रूप में आगे बढ़ता है। विश्रामावस्था में झिल्ली ध्रुवित (Polarised) अवस्था में रहती है। सोडियम पम्प के कारण अन्दर से अत्यधिक ऋणात्मक (Negative) हो जाती है।
- (ii) जब किसी स्थान पर तन्त्रिका तन्तु को उद्दीपन प्रदान करने पर वहाँ पर झिल्ली की ध्रुवता बिल्कुल विपरीत हो जाती है।
 - (a) विश्रामावस्था पर **विश्राम विभव (Resting potential)** – 70 millivolts (mV) होता है। इस अवस्था में Ca^{++} आयन्स बाँधने वाले आयन्स के रूप में कार्य करते हैं।

- (b) उत्तेजित हो जाने पर कैल्शियम आयन पृथक् हो जाते हैं। सोडियम की पारगम्यता में वृद्धि होती है। विद्युवीय तरंग (Depolarisation wave) उत्पन्न हो जाती है। सोडियम आयन कोशिकाद्रव्य के अन्दर संवाहित होते हैं और पोटैशियम आयन के बाहर की ओर संवाहित होते हैं।

इस समय झिल्ली -70 mV से शून्य (Zero) में परिवर्तित हो जाती है। इस समय झिल्ली अध्रुवीय (Depolarised) हो जाती है।

- (c) सोडियम आयन्स के अन्दर की ओर संवहन से विभव (Potential) में अन्तर होता है। अन्दर की ओर धनात्मक (Positive) एवं बाहर की ओर ऋणात्मक (Negative) होता है।

विभव मान -70 mV से शून्य (Zero) में परिवर्तित होता है और फिर $+30$ mV। जैसे ही क्रियाशील विभव $+30$ mV तक होता है K^{++} आयन अन्दर से झिल्ली के बाहर जाते हैं।

- (d) यह विद्युवीय तरंग विश्रामवस्था वाले भाग को उद्दीप्त (Stimulate) करती हुई आगे बढ़ती जाती है।

- (e) जिस स्थान पर उद्दीपन प्रारम्भ होता है वहाँ कुछ ही देर पश्चात् (कुछ मिली सेकण्ड) पुनर्ध्रुवण (Repolarisation) प्रारम्भ हो जाता है। विद्युवण तरंग के पीछे-पीछे दिशा में फैलती जाती है। इस समय

$+30$ mV \rightarrow शून्य (Zero) में $\rightarrow -70$ mV

में परिवर्तित हो जाता है। इस प्रकार का संवहन आवेग माइलिन आवरण विहीन तन्त्रिका में होता है। अब तन्त्रिका आवेग को पुनः ग्रहण करने के लिए तैयार होती है।

3.29 नर्नस्ट समीकरण (Nernst's Equation)

सेल के वि. वा. ब. का व्युत्पन्न (Derivation of Cell e.m.f.)

नर्नस्ट समीकरण सेल के विद्युत् वाहक बल (e.m.f.) को मानक विभव E° और सेल अभिक्रिया में प्रयुक्त पदार्थों की सक्रियता से सम्बन्धित है।

मान लिया कि किसी उत्क्रमणीय गैल्वनी सेल में होने वाली पूर्ण सेल अभिक्रिया



है। इस अभिक्रिया की मुक्त ऊर्जा में परिवर्तन $-\Delta G$, वाण्ट हॉफ समतापी निम्नानुसार व्यक्त किया गया है -

$$-\Delta G = -\Delta G^\circ - RT \ln \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

जहाँ अभिकारक और उत्पाद के इकाई सक्रियताओं के लिए ΔG° अभिक्रिया की मानक मुक्त ऊर्जा में कमी है। a_A^a, a_B^b, a_C^c और a_D^d अभिकारकों एवं उत्पादों की किसी दी हुई अवस्था में सक्रियताएँ हैं।

किसी विद्युत् रासायनिक सेल (electro-chemical cell) की सेल अभिक्रिया की मुक्त ऊर्जा में कमी सेल द्वारा किये गये अधिकतम विद्युतीय कार्य nFE के बराबर होती है अर्थात्

$$-\Delta G = nFE \quad \dots (3)$$

जहाँ E = सेल का वि. वा. बल है और n इलेक्ट्रॉनों की संख्या है जो किसी इलेक्ट्रोड पर उत्पन्न होते हैं या दूसरे इलेक्ट्रोड पर लिए जाते हैं। इसलिए पूर्ण सेल में n फैराडे या nF कूलॉम विद्युत् धारा की मात्रा (quantity) उत्पन्न होती है। अतः उत्क्रमणीय सेल द्वारा किया गया विद्युतीय कार्य = nFE हैं।

समीकरण (2) से समीकरण (3) में $-\Delta G$ का मान रखने पर,

$$nFE = -\Delta G^\circ - RT \ln \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b}$$

$$\Rightarrow nFE = nFE^\circ - RT \ln \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b} \quad \dots (4)$$

$$\therefore \Delta G = nFE$$

इसलिए $-\Delta G^\circ = nFE^\circ$, जहाँ E° सेल का मानक वि. वा. बल है।

समीकरण (4) में दोनों ओर nF का भाग लगाने पर,

$$E = E^\circ - \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b} \quad \dots (5)$$

$$\Rightarrow E = E^\circ - \frac{2.303RT}{nF} \log \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b} \quad \dots (6)$$

जब अधिकारकों एवं क्रियाफलों की सक्रियताएँ इकाई होती हैं तो सेल या इलेक्ट्रोड का वि. वा. बल सेल या इलेक्ट्रोड का मानक वि. वा. बल E° होता है क्योंकि $\ln 1 = 0$ होता है। यह किसी निश्चित तापमान पर स्थित रहता है। उपर्युक्त समीकरण (5) तथा (6) नर्नस्ट समीकरण है। इसकी सहायता से किसी भी सेल का वि. वा. बल या इलेक्ट्रोड विभव ज्ञात किया जा सकता है। यदि अधिकारकों एवं क्रियाफलों की सक्रियताएँ, तापमान और E° का मान ज्ञात हो E° का मान $\Delta G^\circ / nF$ से प्राप्त किया जा सकता है।

समीकरण (6) में राशि $2.303 RT/F$ किसी स्थिर तापमान पर एक स्थिरांक है। इसका संख्यात्मक मान प्राप्त करने के लिए R को जूल में लिया जाता है।

$$\therefore \frac{2.303RT}{F} = \frac{2.303 \times 8.134 \times T}{96500}$$

$$= 0.0001984 \times T$$

$$= 0.591 \text{ (25°C पर)}$$

अन्य तापमानों पर भी इस राशि का मान ज्ञात किया जा सकता है।
अब समीकरण (6) से,

$$E = E^\circ - \frac{0.0591}{n} \log \frac{a_C^c \times a_D^d}{a_A^a \times a_B^b} \quad \dots (7)$$

समीकरण (7) भी नर्नस्ट समीकरण का एक रूप है।

टिप्पणी

3.30 तन्त्रिका ऊतक : संरचना एवं कार्य (Nervous Tissue : Structure and Function)

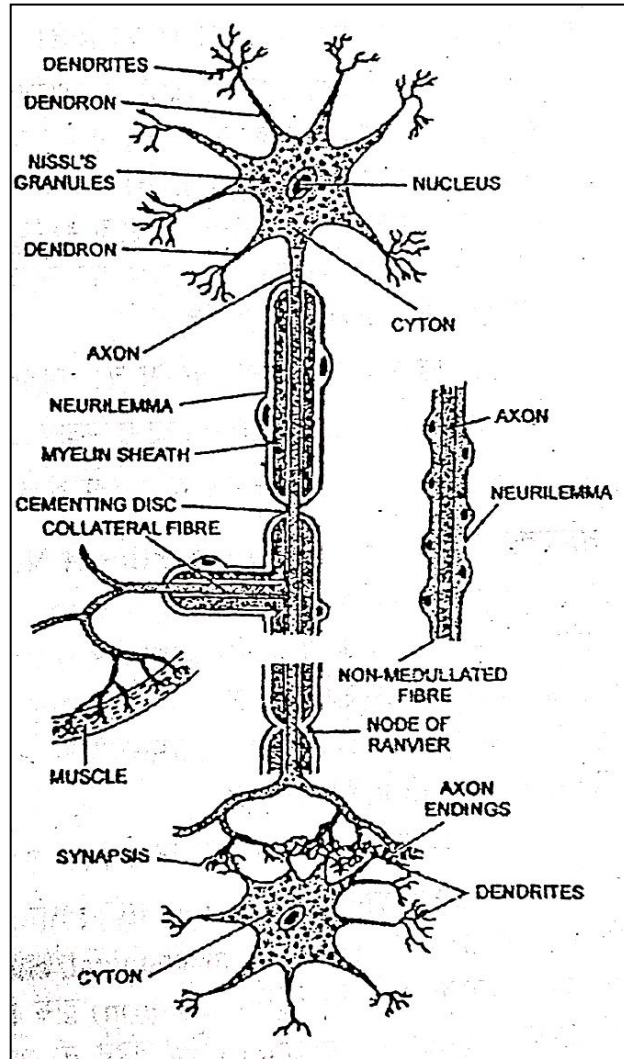
मेटाजोआ (Metazoa) अथवा बहुकोशिकीय प्राणियों की विभिन्न जैविक क्रियाओं (Bio-activities) का नियमन और नियन्त्रण तन्त्रिका तंत्र तथा अन्तःस्त्रावी तंत्र (Nervous system and Endocrine system) के द्वारा होता है। अन्तःस्त्रावी तंत्र के अन्तर्गत अन्तःस्त्रावी ग्रन्थियाँ आती हैं जो हॉर्मोन्स का स्त्रावण करके शरीर की विभिन्न जैविक क्रियाओं का नियमन और नियन्त्रण करती हैं। तन्त्रिका तंत्र के अन्तर्गत मस्तिष्क, तंत्रिका रज्जु तथा तन्त्रिकाएँ (Brain, nerve cord and nerves) आती हैं। मस्तिष्क और तन्त्रिका रज्जु दोनों मिलकर केन्द्रीय तन्त्रिका तंत्र (Central nervous system) बनाती हैं, जबकि इनमें निकलने वाली तन्त्रिकाएँ परिधीय तन्त्रिका तंत्र (Peripheral nervous system) का निर्माण करती हैं। केन्द्रीय तन्त्रिका तंत्र शरीर के विभिन्न भागों में स्थित संवेदी अंगों (Sense organs) से संवेदी तन्त्रिकाओं (Sensory nerves) द्वारा सूचनाएँ प्राप्त करता है। विभिन्न अंगों से आई सूचनाओं की केन्द्रीय तन्त्रिका तंत्र पहले पहचान करता है। उसके बाद इन सूचनाओं के अनुसार प्रेरक तन्त्रिकाओं (Motor nerves) तथा कार्यकर अंगों (Effector organs) जैसे शरीर की मांसपेशियों तथा ग्रन्थियों आदि को उचित सूचना भेजता है, जो फिर इन सूचनाओं के अनुसार प्रतिक्रियाएँ (Reactions) करते हैं। वास्तव में, शरीर की विभिन्न जैविक क्रियाओं के नियमन और नियन्त्रण में तन्त्रिका तंत्र के तन्त्रिकीय अवयव (Nervous elements) मुख्य भाग होते हैं जिनको तन्त्रिका कोशिका या न्यूरॉन (Nerve cell or Neuron) कहते हैं, अर्थात् सम्पूर्ण तन्त्रिका तंत्र इन न्यूरॉन्स से मिलकर बना होता है। अतः तन्त्रिका तंत्र की कार्यिकी को समझने से पहले हमें इसकी संरचनात्मक एवं क्रियात्मक इकाई अर्थात् न्यूरॉन की रचना का पूर्ण ज्ञान होना चाहिये।

3.31 तन्त्रिका कोशिका या न्यूरॉन की रचना (Structure of a Nerve Cell or Neuron)

टिप्पणी

न्यूरॉन तन्त्रिका तंत्र की संरचनात्मक एवं क्रियात्मक इकाई होता है। प्रत्येक न्यूरॉन के दो भाग होते हैं— (i) साइटॉन (Cyton) और (ii) प्रवर्ध (Process)।

(i) साइटॉन (Cyton) : यह न्यूरॉन का मुख्य भाग होता है जिसे सेल बॉडी या पेरिकैरियोन (Cell body or Perikaryon) कहते हैं। यह अनियमित आकार की होती है जिसके अन्दर कोशाद्रव्य से घिरा हुआ एक केन्द्रक (Nucleus) होता है। केन्द्रक के अतिरिक्त कोशाद्रव्य में एण्डोप्लाज्मिक रेटिकुलम, गॉल्जीकाय, माइटोकॉण्ड्रिया, राइबोसोम तथा अनेक निसल के कण (Nissl's granules) पाये जाते हैं। न्यूरॉन में सेण्ट्रोसोम (Centrosome) नहीं पाया जाता। परिणामतः ये कभी विभाजन नहीं करते।



चित्र क्र. 3.51: तन्त्रिका कोशिका या न्यूरॉन

(ii) प्रवर्ध (Process) : साइटॉन से दो प्रकार के प्रवर्ध निकलते हैं जिन्हें डेन्ड्राइट (Dendrite) और ऐक्सॉन (Axon) कहते हैं। डेन्ड्राइट अपेक्षाकृत छोटे, संख्या में एक या एक से अधिक एवं शाखान्वित होते हैं। इनके अन्दर निसल के कण पाये जाते हैं। ऐक्सॉन संख्या में केवल एक ही पाया जाता है। यह लम्बा होता है और इसके अन्दर निसल के कण नहीं पाये जाते। ऐक्सॉन अन्तिम सिरे पर शाखान्वित होता है। इसकी शाखाओं को टेलोडेन्ड्रिया (Telodendria) कहते हैं। प्रत्येक टेलोडेन्ड्रिया अन्तिम सिरे पर एक बटन के रूप में फूला रहता है जिसे टर्मिनल बटन (Terminal button) कहते हैं। एक न्यूरॉन के ऐक्सॉन की टर्मिनल बटन दूसरे न्यूरॉन के डेन्ड्राइट के सिरो के साथ सटकर एक विशेष प्रकार का क्रियात्मक सम्बन्ध स्थापित करती है जिसे सिनैप्स (Synapse) कहते हैं। डेन्ड्राइट हमेशा आवेग (Impulse) को साइटॉन की तरफ ले जाता है, जबकि ऐक्सॉन हमेशा आवेग को साइटॉन से दूर लेकर जाता है। अतः उद्दीपनों का गुजराना केवल एक ही दिशा में सम्भव होता है।

ऐक्सॉन बाहर की ओर एक पतली झिल्ली द्वारा ढँका होता है जिसे न्यूरिलेमा (neurilemma) कहते हैं। न्यूरिलेमा लम्बी और चपटी श्वान कोशिकाओं (Schwann cells) की बनी होती है। ऐक्सॉन के अन्दर कोशाद्रव्य भरा होता है जिसे ऐक्सोप्लाज्म (axoplasm) कहते हैं। कुछ न्यूरॉन में ऐक्सॉन की न्यूरिलेमा की श्वान कोशिकाएँ फैटी लेयर (Fatty layer) का स्त्रावण ऐक्सॉन के ऊपर करती हैं जिसे मेड्यूलरी या माइलिन शीथ (medullary or myelin sheath) कहते हैं। यह स्तर चमकीले सफेद रंग का होता है एवं थोड़ी-थोड़ी दूर पर टूटा रहता है जिन्हें नोड्स ऑफ रैनवियर (nodes of Ranvier) कहते हैं तथा इनके बीच के भाग को इण्टरनोड (internode) कहते हैं। न्यूरॉन के ऐक्सॉन को न्यूरिलेमा के साथ तन्त्रिका फाइबर्स (nerve fiber) कहते हैं। इस प्रकार के अनेक तन्त्रिका-फाइबर्स मिलकर तन्त्रिकाओं (nerves) का निर्माण करते हैं। ऐक्सॉन तन्त्रिका-फाइबर की दीवार को सतह झिल्ली (surface membrane) कहते हैं। इस सतह झिल्ली और न्यूरिलेमा के मध्य में एक और तरल पदार्थ भरा होता है जिसे इण्टरस्टीशियल द्रव (interstitial fluid) कहते हैं।

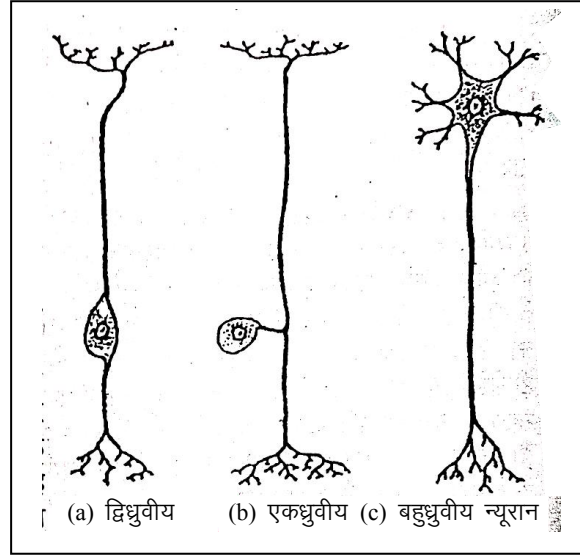
3.32 तन्त्रिका तंतुओं के प्रकार (Kinds of Nerve Fibres)

तन्त्रिका फाइबर्स का मुख्य कार्य संवेदनाओं (sensation) को एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाना होता है। जो तन्त्रिका तंतुओं किसी संवेदी अंग (sense organ) से उद्दीपनों को मस्तिष्क तक ले जाते हैं, उन्हें सैन्सरी या एफ़ैरेण्ट तन्त्रिका फाइबर (sensory or afferent nerve fibre) कहते हैं। इसी प्रकार जो तन्त्रिका तंतुओं मस्तिष्क या स्पाइनल कॉर्ड के उद्दीपनों को इफ़ैक्टर ऑर्गन (effector organ) तक ले जाते हैं, उन्हें मोटर या इफ़ैरेण्ट तन्त्रिका तंतुओं (motor of efferent nerve fibres) कहते हैं।

कुछ तन्त्रिका तंतुओं केन्द्रीय तन्त्रिका तंत्र (मस्तिष्क तथा मेरुरज्जु) में उपस्थित होते हैं और संवेदी आवेगों को दिशा प्रदान कर चालक तन्त्रिका

कोशिकाओं तक पहुँचाते हैं। इन फाइबर्स को समयोजी या साहचर्य तन्त्रिका कोशिका (Adjustor or associated neurons) कहते हैं।

टिप्पणी



चित्र क्र 3.52: तीन रूपात्मक न्यूरॉन के प्रकार

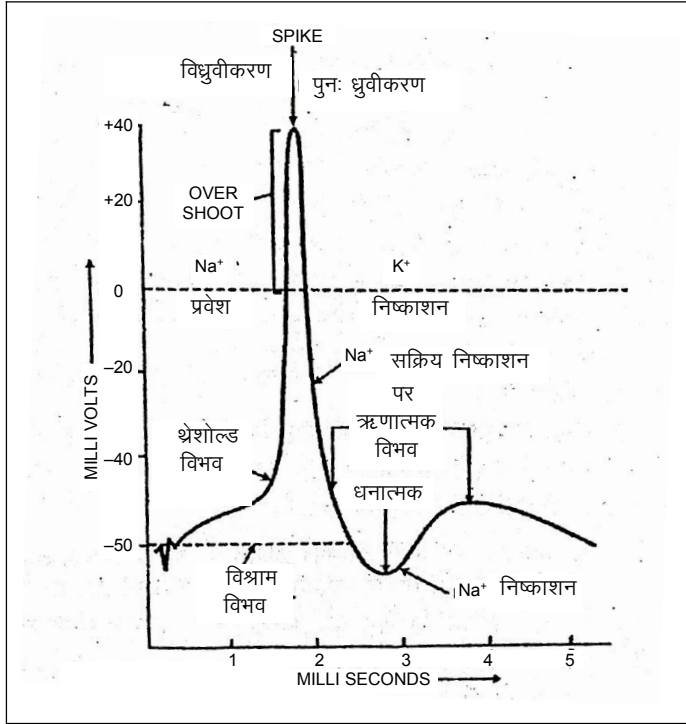
उपरोक्त वर्णित तंतुओं, जो आवेगों के संवहन में मदद करते हैं, के अतिरिक्त ग्राहक तन्त्रिका कोशिकाएँ भी पायी जाती हैं। ये कोशिकाएँ बाह्य वातावरण में होने वाले परिवर्तनों से उद्दीपनों को ग्रहण करती हैं।

तन्त्रिका कोशिकाओं को प्रवर्धों के आधार पर भी वर्गीकृत करते हैं। तन्त्रिका कोशिका, न्यूरॉन, एक कोशिका पिण्ड या साइटॉन (Cyton) का बना होता है जिससे शाखानुमा तन्तुओं का तन्त्र निकलता है। न्यूरॉन से निकले प्रवर्धों की संख्या के आधार पर न्यूरॉन्स निम्नलिखित तीन प्रकार के होते हैं –

- कई प्रवर्धों से युक्त न्यूरॉन्स को बहुध्रुवीय (multipolar) न्यूरॉन कहते हैं।
- कोशिकाओं के विपरीत ध्रुवों से निकले दो प्रवर्ध वाले न्यूरॉन्स को द्विध्रुवीय (Bipolar) न्यूरॉन कहते हैं।
- पास-पास से निकले दो प्रवर्धों वाले न्यूरॉन्स को एक ध्रुवीय (Unipolar) न्यूरॉन कहते हैं।

3.33 तन्त्रिका ऊतक के गुण (Properties of Nervous Tissues)

तन्त्रिका ऊतक शरीर के विभिन्न भागों में स्थित संवेदी अंगों से उद्दीपनों को संवाहित करके केन्द्रीय तन्त्रिका तन्त्र तक ले जाती है और सम्बन्धित सूचना ग्रहण करती है। माँसपेशियाँ और कार्यकर अंग (Effector organs) उसी के अनुरूप प्रतिक्रिया करते हैं। शरीर की यह उत्तेजनशीलता तन्त्रिका ऊतकों के कारण ही सम्भव हो पाती है। तन्त्रिका ऊतक अपने विभिन्न गुणों के कारण ही उद्दीपनों को एक सिरे से दूसरे सिरे तक संवाहित करने में सक्षम होती है।



चित्र क्र. 3.53: तन्त्रिका आवेग संगठन के सक्रिय विभव के स्थाईक का गठन

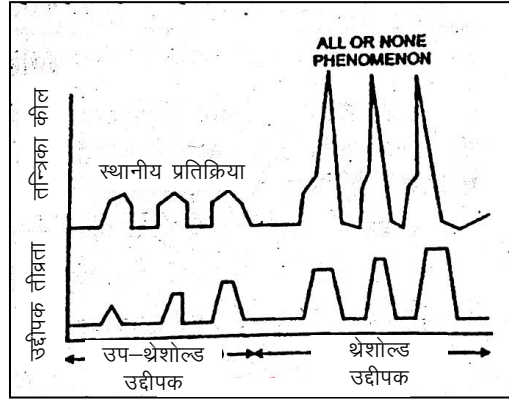
तन्त्रिका ऊतकों के विभिन्न कार्य निम्नलिखित हैं :

(i) **उत्तेजनशीलता (Excitability)** : तन्त्रिका तंतु (Nerve fibre) में ऊष्मीय, यान्त्रिक, रासायनिक और वैद्युत उद्दीपनों (Thermal, mechanical, chemical and electrical stimuli) के अनुसार प्रतिक्रियाएँ करने की क्षमता होती है। न्यूरॉन (Neuron) द्वारा किसी भी उद्दीपन की प्रतिक्रिया के परिणामस्वरूप ऐक्शन पोटेन्शियल (Action potential) पैदा करने की क्षमता को उत्तेजनशीलता (Excitability) कहते हैं।

(ii) **किसी भी तन्त्रिका (Nerve) को उत्तेजित करने के लिये एक निश्चित बल के उद्दीपन की आवश्यकता होती है जिसे थ्रेशोल्ड बल (Threshold strength) कहते हैं। यह थ्रेशोल्ड बल जितना कम होता है, उत्तेजनशीलता उतनी ही अधिक होती है।**

थ्रेशोल्ड बल से कम तीव्रता का उद्दीपन तन्त्रिका कोशिका में आवेग उत्पन्न नहीं कर सकता है। ऐसे उद्दीपन को **सब-थ्रेशोल्ड उद्दीपन (subthreshold stimulus)** कहते हैं।

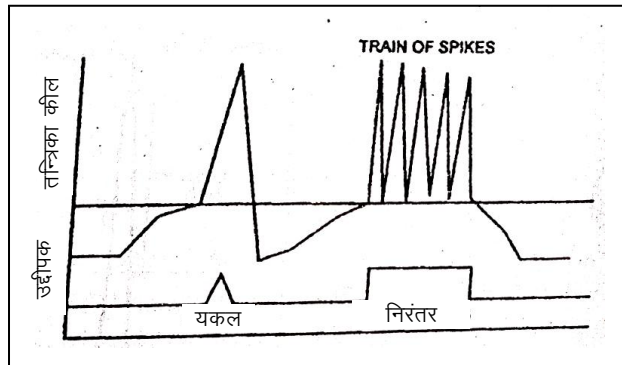
टिप्पणी



चित्र क्र. 3.54: सबथ्रेशोल्ड और थ्रेशोल्ड उद्दीपन

(iii) सब या कुछ नहीं का नियम (All or none law) : ऐक्सॉन के किसी भी भाग में आवेग (Impulse) की उत्पत्ति तब तक नहीं होती जब तक उद्दीपन का बल इतना नहीं होता कि वह एक्सोलीमा (Axolemma) के -70 mV रैस्टिंग पोटेन्शियल (Resting potential) में 15 mV की गिरावट न ला दे। एक्सोलीमा के रैस्टिंग मेम्ब्रेन पोटेन्शियल (Resting membrane potential) में 15 mV की गिरावट आते ही उद्दीपन एक आवेग के रूप में ऐक्सॉन की पूरी लम्बाई में प्रसारित हो जाता है। इसके बाद उद्दीपन का बल बढ़ने पर भी उत्तेजनशीलता निष्प्रभावी रहती है। इस प्रकार आवेग या तो पूरी सामर्थ्य के साथ प्रसारित होता है या बिल्कुल ही नहीं होता। अतः ऐक्शन पोटेन्शियल सब या कुछ नहीं के नियम (All or none law) को मानता है। दूसरे शब्दों में, आवेग का संवहन ऐसी प्रेरित (Triggered) प्रक्रिया होती है जो 'इग्नीशन पॉइंट या फायरिंग लेवल' (Ignition point or firing level) पर पहुँचने पर ही क्षण भर में अचानक विस्फोट की तरह हो जाती है।

(iv) दुर्जेय काल (Refractory Period) : एक बार ऐक्सॉन के डीपोलराइज हो जाने पर ऐक्सॉन के उस स्थान पर नया आवेग तब तक स्थापित नहीं होता जब तक N^+ आयन्स बाहर जाकर एवं K^+ आयन्स भीतर आकर एक्सोलीमा को रैस्टिंग मेम्ब्रेन पोटेन्शियल (RMP) अवस्था में नहीं बदल देते। इस अवधि को दुर्जेय काल (Refractory period) कहते हैं।



चित्र क्र. 3.55: आवेग का योग

(v) **मर्म चालक (Core conductor)** : ऐक्सॉन की प्लाज्मा मेम्ब्रेन या एक्सोलीमा (Plasma membrane or axolemma) में वैद्युत धारिता (Electrical capacity) पायी जाती है अर्थात् यह एक संधारित्र (capacitor) का काम करती है। किसी भी आवेग (Impulse) के संवहन के दौरान इसकी धारिता (Capacity) में कोई फर्क नहीं पड़ता परन्तु प्रतिरोध (Resistance) बदल जाता है। ऐसा संधारित्र (Capacitor) जिसमें एक दुर्बल विद्युत चालक (एक्सोलीमा) के दोनों तरफ उत्तम चालक पदार्थ (एक्सोलीमा के बाहर का इण्टरस्टीशियल द्रव व अन्दर का एक्सोप्लाज्म) पाया जाये, मर्म चालक (Core conductor) कहलाता है। इसी मर्म चालक आचरण के कारण इसमें विभवान्तर (Potential difference) विकसित होता है।

(vi) **संकलन (Summation)** : जब किसी तन्त्रिका फाइबर को बारम्बार (Repeatedly) अधोउच्चिष्ठ उद्दीपन (Sub-maximal stimuli) दिये जायें तो उन उद्दीपनों के संकलन से तन्त्रिका फाइबर उत्तेजित हो जाते हैं। ऐसी दशा में लगातार दिये गये उद्दीपनों के बीच का अन्तराल एक निश्चित सीमा से कम होना चाहिये।

लगातार दिये गये उद्दीपनों से आवेग की एक रेल (a train of spikes) शुरू हो जाती है जिसकी आवृत्ति उद्दीपनों के समयान्तराल पर निर्भर करती है।

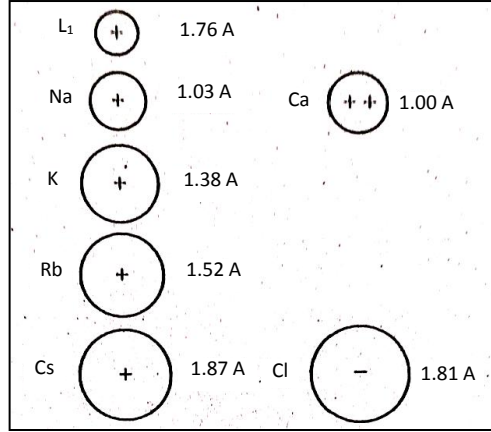
(vii) **अक्लान्तत (Indifatigability)** : तन्त्रिका को थकान (Fatigue) नहीं होती। यदि किसी तन्त्रिका-पेशी उपक्रम (Nerve-muscle preparation) में तन्त्रिका को बारम्बार उत्तेजित किया जाये तो कुछ समय बाद पेशी प्रतिक्रिया करना बन्द कर देती है। अब इस तन्त्रिका को इस पेशी से हटाकर नई पेशी से जोड़ते हैं तो यह नई पेशी को उत्तेजित करने लगती है अर्थात् तन्त्रिका को थकान (Fatigue) नहीं होती।

3.34 झिल्ली क्षमता (Membrane Potential)

प्रत्येक न्यूरॉन एक कोशिका झिल्ली में लिपटा होता है जो एक फॉस्फोलिपिड बाइलेयर से बनी होती है। यह झिल्ली आयन के लिए लगभग अभेद्य होती है। आयनों को न्यूरॉन के बाहर और अन्दर अंतरण के लिए, झिल्ली दो संरचनाओं को प्रदान करती है। आयन पंप, आयनों को लगातार अन्दर और बाहर करने के लिए कोशिका की ऊर्जा का उपयोग करते हैं। वे आयनों को अपने संकेन्द्रण प्रवणता के खिलाफ भेजकर (न्यून संकेन्द्रण के क्षेत्रों से उच्च संकेन्द्रण के क्षेत्रों के लिए), संकेन्द्रण भिन्नता का निर्माण करते हैं। (न्यूरॉन के अन्दर और बाहर), आयन चैनल तब इस संकेन्द्रण भिन्नता का उपयोग आयनों को अपने संकेन्द्रण प्रवणता के नीचे भेजने के लिए करते हैं। (उच्च संकेन्द्रण के क्षेत्रों से न्यून संकेन्द्रण के क्षेत्रों की तरफ), हालाँकि, आयन पंपों द्वारा सतत परिवहन के विपरीत, आयन चैनलों द्वारा परिवहन असतत है। वे सिर्फ अपने परिवेश के संकेतों की प्रतिक्रिया में खुलते हैं और बंद होते हैं। आयन चैनलों के माध्यम से आयनों का यह परिवहन तब कोशिका झिल्ली के वोल्टेज को बदलता है। यही परिवर्तन है जो एक ऐक्शन

टिप्पणी

पोटैशियम को लाते हैं। एक सादृश्य के रूप में, आयन पंप उस बैटरी की भूमिका निभाते हैं जो एक रेडियो सर्किट (आयन चैनलों) को एक संकेत (एक्शन पोटैशियल) संचारित करने के लिए अनुमति देते हैं।



alt = सात क्षेत्र जिनकी त्रिज्या मोनो वोल्ट लीथियम, सोडियम, पोटैशियम, रूबिडियम, सीजियम (0-76, 1-02, 1.38, 1.52 और 1.67 क्रमशः) कैटायनों की त्रिज्या के अनुपातिक है, कैल्शियम द्विसंयोजक कैटायन (1.00 Å) और मोनो अंसमदज.क्लोराइड (1.81 Å)।

कोशिका झिल्ली उस बाधा के रूप में कार्य करती है जो अन्दर के विलय (अन्तरकोशिकीय द्रव) को बाहर के विलय (बाह्यकोशिकीय द्रव) से मिश्रित होने से रोकती है। इन दो विलयों में उनके आयनों का भिन्न संकेन्द्रण है। इसके अलावा, संकेन्द्रण में यह अन्तर, विलय के चार्ज में भिन्नता को फलित करता है। इससे एक ऐसी परिस्थिति पनपती है जहाँ एक विलय दूसरे विलय से अधिक धनात्मक होता है। इसलिए, धनात्मक आयन, ऋणात्मक विलय की दिशा में खिंचने लगते हैं। इस गुण के मापन के लिए, एक व्यक्ति किसी भी तरह इस सापेक्ष धनात्मकता (या ऋणात्मकता) को पकड़ना चाहेगा, यह करने के लिए, बाहर के विलय को शून्य वोल्टेज के रूप में सेट किया जाता है। तब अंदरूनी वोल्टेज और शून्य वोल्टेज के बीच अन्तर निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए, यदि बाहरी वोल्टेज 100 mV है और उन्दरूनी वोल्टेज 30 mV है, तो अन्तर-70 mV है।

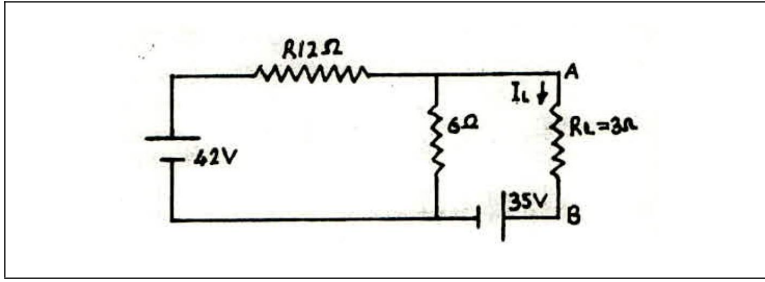
इस प्रकार स्पष्ट है कि झिल्ली का प्रतिरोध व धारिता बहुत अधिक होने के कारण सिग्नल का चालन बहुत अधिक दूर तक नहीं हो पाता है।

3.35 आंकिक उदाहरण (Numerical Examples)

उदाहरण 1 – चित्र 3.56(a) में प्रदर्शित परिपथ में थैवनिन प्रमेय के द्वारा $R_L = 3\Omega$ प्रतिरोध में प्रवाहित धारा ज्ञात करो।

हल – (i) सर्वप्रथम खुले परिपथ में, अर्थात् लोड को परिपथ में न मानते हुए, A व B के बीच समतुल्य वोल्टेज V_T ज्ञात करते हैं।

टिप्पणी

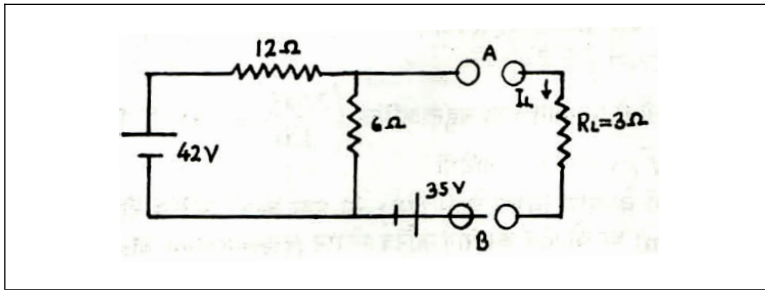


चित्र क्र. 3.56(a)

चित्र 3.56(b) के अनुसार,

$V_T = 6\Omega$ के सिरों पर विभवान्तर -35 वोल्ट

$$\begin{aligned} &= \frac{42}{12+6} \times 6 - 35 \\ &= 14 - 35 \\ &= -21 \text{ वोल्ट।} \end{aligned}$$

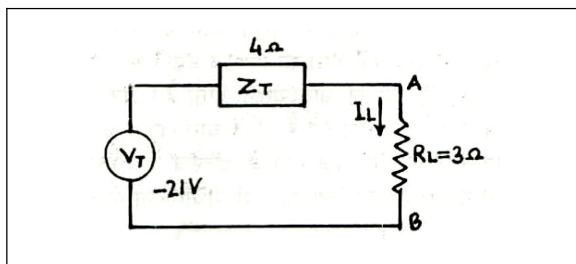


चित्र क्र. 3.56(b)

(ii) चित्र 3.56(b) से समतुल्य प्रतिबाधा Z_T ज्ञात करने के लिए वि. वा. बल स्रोतों को लघुपथित करते हैं, तब सिरों A व B के बीच प्रतिबाधा

$$Z_T = \frac{12 \times 6}{12+6} = 4\Omega$$

(iii) अतः चित्र 3.56(c) थैवनिन समतुल्य परिपथ होगा



चित्र क्र. 3.56(c)

लोड प्रतिरोध $R_L = 3\Omega$ में धारा

$$I_L = \frac{V_T}{Z_L + Z_T} = \frac{-21}{4+3}$$

$$= -3 \text{ ऐम्पियर।}$$

उदाहरण 2 – यदि A/C. में सप्लाई 220 V हो तो एक धनात्मक अर्द्ध-चक्र के लिए माध्य वि. वा. बल क्या होगा?

हल – $E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad \therefore E_0 = E_{rms} \sqrt{2} = 220\sqrt{2} = 311 \text{ वोल्ट}$

\therefore अर्द्ध चक्र के लिए माध्य वि. वा. बल

$$E_{av} = \frac{2E_0}{\pi} = \frac{2 \times 311}{3.14} = 198 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 3 – $E = 8\sin \omega t + 6\sin 2\omega t$ वोल्ट से निरूपित वि. वा. बल के r.ms. मान का परिकलन कीजिए।

हल – एक सम्पूर्ण चक्र पर E का वर्ग माध्य मान (अर्थात् E^2) होगा

$$\overline{E^2} = \frac{\int_0^T E^2 dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T (8\sin \omega t + 6\sin 2\omega t)^2}{\int_0^T dt}$$

$$= \frac{\int_0^T (64\sin^2 \omega t + 36\sin^2 2\omega t + 96\sin \omega t \sin 2\omega t) dt}{\int_0^T dt}$$

$$= \overline{64\sin^2 \omega t} + \overline{36\sin^2 2\omega t} + \overline{96\sin \omega t \sin 2\omega t}$$

जहाँ बार (bars) एक सम्पूर्ण चक्र पर माध्य मानों को निरूपित करता है।

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{\int_0^T \sin^2 \omega t dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\sin^2 2\omega t} = \frac{\int_0^T \sin^2 2\omega t dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{2}$$

तथा

$$\overline{\sin \omega t \sin 2\omega t} = \frac{\int_0^T \sin \omega t \sin 2\omega t dt}{\int_0^T dt} = 0$$

$$\therefore E^2 = 64 \times 1/2 + 36 \times 1/2 + 0 = 32 + 18 = 50$$

$$\therefore E_{rms} = \sqrt{E} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 4 – एक धारा दो घटकों से मिलकर बनी है, जिनमें एक 3 ऐम्पियर का d.c. घटक तथा दूसरा $i = 4 \sin \omega t$ ऐम्पियर का a.c. घटक है। परिणामी धारा के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए तथा इसके प्रभावी मान का परिकलन कीजिए।

हल – परिणामी धारा $I = i_{de} + i_{ae} = (3 + 4 \sin \omega t)$ ऐम्पियर

सम्पूर्ण चक्र के ऊपर I^2 का माध्य प्रभावी मान होगा

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \frac{\int_0^T I^2 dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T (3 + 4 \sin \omega t)^2 dt}{\int_0^T dt} \\ &= \frac{\int_0^T (9 + 16 \sin^2 \omega t + 24 \sin \omega t) dt}{\int_0^T dt} \\ &= 9 + 16 \overline{\sin^2 \omega t} + 24 \overline{\sin \omega t} \\ &= 9 + 16 \times 1/2 + 0 = 17 \end{aligned}$$

$$\therefore I_{\text{प्रभावी}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \sqrt{17} \text{ ऐम्पियर।}$$

उदाहरण 5 – एक नियोन गैस विसर्जन नलिका में $2.9 \times 10^{18} \text{ Ne}^+$ आयत प्रति सेकण्ड नलिका के एक अनुप्रस्थ परिच्छेद से होकर दाहिनी ओर गति करते हैं जबकि इस समय में 1.2×10^{19} इलेक्ट्रॉन बायीं ओर गति करते हैं। विद्युत धारा का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए।

हल – प्रत्येक नियोन आयन पर आवेश

$$\begin{aligned} q_1 &= e \\ &= 1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलॉम} \end{aligned}$$

माना कि धन दिशा बायें से दायें तथा ऋण दिशा दायें से बायें की ओर है।

$$\begin{aligned} \text{Ne}^+ \text{ आयनों के कारण धारा} &= \frac{N_1 q_1}{t_1} \\ &= \frac{2.9 \times 10^{18} \times 1.6 \times 10^{-19}}{1} \text{ कूलॉम/से.} \\ &= 0.464 \text{ ऐम्पियर} \end{aligned}$$

प्रत्येक इलेक्ट्रॉन पर आवेश,

$$q_2 = -1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलॉम}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

इलेक्ट्रॉन के कारण धारा

$$= \frac{n_2 q_2}{t_2} = \frac{(1.2 \times 10^{19}) \times (-1.6 \times 10^{-19})}{1}$$

$$= 1.94 \text{ कूलॉम/सेकण्ड} = 1.92 \text{ ऐम्पियर}$$

अतः विसर्जन नलिका से होकर नेट धारा

$$= 0.464 + 1.92 = 2.384 \text{ ऐम्पियर।}$$

अतः विद्युत धारा का परिमाण 2.384 ऐम्पियर तथा इसकी दिशा बाँयें से दाँयीं ओर है।

उदाहरण 6 – ऐम्पियर की धारा, 10 मीटर लम्बे तथा 0.08 मिमी व्यास के एक कॉपर के तार से होकर प्रवाहित हो रही है। यदि कॉपर की प्रतिरोधकता 1.65×10^{-8} ओह्म-मीटर हो, तो परिकलन कीजिए –

(i) कॉपर के तार का प्रतिरोध, तथा

(ii) तार के सिरों के बीच विभवान्तर।

हल – (i) कॉपर के तार का प्रतिरोध,

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$$

$$= \frac{(1.65 \times 10^{-8} \text{ ओह्म-मीटर}) \times (10 \text{ मीटर})}{3.14 \times (0.04 \times 10^{-3} \text{ मीटर})^2}$$

$$= 32.85 \text{ ओह्म}$$

(ii) तार के सिरों के बीच विभवान्तर

$$V = RI = (32.85 \text{ ओह्म}) \times (1 \text{ ऐम्पियर})$$

$$= 32.85 \text{ वोल्ट}$$

उदाहरण 7 – एक ताँबे के तार में 100 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है तथा इसके अनुप्रस्थ-परिच्छेद का क्षेत्रफल 1.0 सेमी² है। परिकलन कीजिए –

(a) ताँबे में वैद्युत क्षेत्र सामर्थ्य,

(b) इस चालक की लम्बाई के अनुदिश परस्पर 10 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दुओं के बीच विभवान्तर।

दिया गया क्षेत्रफल एकसमान तथा E के अभिलम्बवत् है तथा ताँबे की प्रतिरोधकता 1.7×10^{-8} ओह्म-मीटर।

हल (a) – हमें ज्ञात है कि

$$J = \sigma E$$

अथवा

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I/A}{I/\sigma} = \frac{\rho I}{A}$$

यहाँ $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ ओह्म-मीटर,
 $I = 100$ ऐम्पियर

तथा $A = 1$ सेमी² = 10^{-4} मीटर²

$\therefore E = \frac{\rho I}{A} = \frac{1.7 \times 10^{-8} \times 100}{10^{-4}} = 1.7 \times 10^{-2}$ वोल्ट/मीटर

(b) अभीष्ट विभवान्तर,

$$V = El$$

$$= 1.7 \times 10^{-2} \times 10 = 0.17 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 8 – 5.0 हेनरी प्रेरकत्व तथा 50 ओह्म प्रतिरोध का एक कुण्डली का 100 वोल्ट वि. वा. बल की एक प्रतिरोधहीन बैटरी से जोड़ा जाता है। ज्ञात करो – (i) परिपथ का कालांक, (ii) बैटरी जोड़ने के 0.1 सेकण्ड बाद धारा, (iii) परिपथ में स्थापित अधिकतम स्थायी धारा, (iv) कुण्डली में संचित चुम्बकीय ऊर्जा जब परिपथ में धारा स्थायी है, (v) धारा वृद्धि की दर (a) जैसे ही बैटरी परिपथ में जोड़ी जाती है तथा (b) 0.1 सेकण्ड बाद।

हल – प्रश्नानुसार, $L = 5.0$ हेनरी, $R = 50$ ओह्म, $E = 100$ वोल्ट।

(i) परिपथ का कालांक $\lambda = \frac{L}{R} = \frac{5.0}{50} = 0.1$ सेकण्ड।

(ii) बैटरी जोड़ने के $t (= 0.1$ सेकण्ड) समय बाद परिपथ में धारा

$$I = I_0(I - e^{-Rt/L}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

या $I = \frac{100}{50}(1 - e^{-50 \times 0.1/50}) = 2(1 - e^{-1.0})$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2.718}\right)$$

$$= 2 \times 0.632 = 1.264 \text{ ऐम्पियर।}$$

(iii) परिपथ में स्थायी धारा

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{100}{50} = 2.0 \text{ ऐम्पियर।}$$

(iv) परिपथ में स्थायी धारा होने पर कुण्डली में संचित ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} LI_0^2 = \frac{1}{2} \times 5.0 \times (2.0)^2 = 10 \text{ जूल।}$$

(v) धारा वृद्धि की दर

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} e^{-Rt/L}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

(a) $t = 0$ पर

$$\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{100}{5.0} = 20 \text{ ऐम्पियर/सेकण्ड।}$$

(b) $t = 0.1$ सेकण्ड पर,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{E}{L} e^{-Rt/L} = \frac{100}{5.0} \times e^{-50 \times 0.1/5.0} \\ &= 20 \times e^{-1} = 20 \times 0.368 = 7.36 \text{ ऐम्पियर/सेकण्ड।} \end{aligned}$$

उदाहरण 9 – हेनरी स्व-प्रेरकत्व तथा 10 ओम प्रतिरोध की एक कुण्डली को नगण्य आन्तरिक प्रतिरोध तथा 3 वोल्ट वि. वा. बल की एक बैटरी से जोड़ा जाता है। ज्ञात करो : (i) बैटरी जोड़ने के 1 सेकण्ड उपरान्त (a) बैटरी द्वारा प्रदान की गई ऊर्जा की दर, (b) प्रतिरोध में ऊष्मा उत्पन्न होने पर दर, (c) कुण्डली में चुम्बकीय ऊर्जा संचित होने की दर, (ii) धारा द्वारा स्थायी अवस्था का आधा मान प्राप्त करने में लगा समय।

यदि 1 सेकण्ड उपरान्त बैटरी का सम्बन्ध कुण्डली से तोड़ दिया जाये तो 1 सेकण्ड बाद परिपथ में धारा क्या होगी?

हल – प्रश्नानुसार, $L = 10$ हेनरी, $R = 10$ ओह्म, $E = 3$ वोल्ट।

(i) किसी क्षण t पर परिपथ में धारा $I_0(I - e^{-Rt/L})$

धारा वृद्धि की दर $\frac{dI}{dt} = \frac{E}{L} e^{-Rt/L}$

(a) बैटरी द्वारा प्रदान की गई ऊर्जा की दर

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= EI = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{(3)^2}{10} (1 - e^{-10 \times 1/10}) \\ &= 0.9 \times (1 - e^{-1}) = 0.9 \times 0.632 = 0.5688 \text{ वाट।} \end{aligned}$$

(b) प्रतिरोध में ऊष्मा उत्पन्न होने की दर

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= I^2 R = \frac{E^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 = \frac{(3)^2}{10} (1 - e^{-10 \times 1/10})^2 \\ &= 0.9 \times (1 - e^{-1})^2 = 0.9 \times (0.632)^2 = 0.3595 \text{ वाट।} \end{aligned}$$

(c) कुण्डली में चुम्बकीय ऊर्जा संचित होने की दर

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = LI \frac{dI}{dt} = \frac{E^2}{R} e^{-Rt/L} (1 - e^{-Rt/L})$$

या
$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{(3)^2}{10} \times e^{-1} (1 - e^{-1}) = 0.9 \times 0.368 \times 0.632 \\ &= 0.2093 \text{ वाट।} \end{aligned}$$

(ii) धारा का स्थायी मान

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{3}{10} = 0.3 \text{ ऐम्पियर।}$$

समीकरण $I = I_0(1 - e^{-Rt/L})$ से $I = \frac{1}{2}I_0$ के लिए

$$\frac{1}{2}I_0 = I_0(1 - e^{-Rt/L}) \text{ या } \frac{1}{2} = 1 - e^{-Rt/L}$$

$$e^{-Rt/L} = \frac{1}{2} \text{ या } e^{Rt/L} = 2 \text{ या } \frac{Rt}{L} = \log_e 2$$

या $t = \frac{L}{R} \times \log_e 2 = \frac{L}{R} \times 2.3026 \times 0.3010 = 0.693 \frac{L}{R}$

या $t = 0.693 \times \frac{10}{10} = 0.693 \text{ सेकण्ड।}$

1 सेकण्ड उपरान्त बैटरी का सम्बन्ध कुण्डली से तोड़ने पर उस क्षण परिपथ में धारा

$$\begin{aligned} I &= I_0(1 - e^{-Rt/L}) = 0.3 \times (1 - e^{-10 \times 1/10}) \\ &= 0.3 \times (1 - e^{-1}) \\ &= 0.3 \times 0.632 = 0.1896 \text{ ऐम्पियर।} \end{aligned}$$

तोड़ने के उपरान्त परिपथ में धारा-क्षय होते समय $I = I_0 - e^{-Rt/L}$

जहाँ $I_0 = 0.1896$ ऐम्पियर (परिपथ में उस क्षण धारा जब बैटरी का सम्बन्ध तोड़ा जाता है)। अतः परिपथ तोड़ने के $t = 1$ सेकण्ड पश्चात् धारा

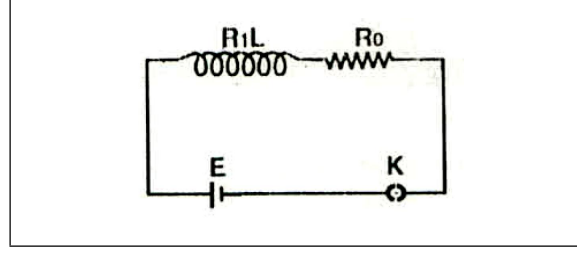
$$\begin{aligned} I &= 0.1896 \times e^{-10 \times 1/10} = 0.1896 e^{-1} \\ &= 0.1896 \times 0.368 = 0.06977 \text{ ऐम्पियर।} \end{aligned}$$

उदाहरण 10 – R प्रतिरोध तथा L स्व-प्रेरकत्व की कुण्डली का श्रेणीक्रम में एक शुद्ध प्रतिरोध R_0 तथा एक कुंजी K के साथ नगण्य आन्तरिक प्रतिरोध तथा E वि. वा. बल की बैटरी के साथ जोड़ा जाता है। कुंजी K में प्लग लगाने के t सेकण्ड बाद कुण्डली के सिरों पर विभवान्तर ज्ञात कीजिए।

हल – विद्युत परिपथ चित्र 3.57 में प्रदर्शित है। परिपथ का कुल प्रतिरोध $R' = R + R_0$ धारा वृद्धि के दौरान कुण्डली में किसी क्षण धारा

$$\begin{aligned} I &= I_0(1 - e^{-Rt/L}) \\ &= \frac{E}{(R + R_0)} [1 - e^{-(R+R_0)t/L}] \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dI}{dt} = \frac{E}{(R + R_0)} [1 - e^{-(R+R_0)t/L} \left(\frac{-(R+R_0)}{L} \right)]$$



चित्र क्र. 3.57

अतः क्षण t पर कुण्डली के सिरों पर विभवान्तर

$$V = RI + L \frac{dI}{dt}$$

या

$$V = \frac{RE}{(R + R_0)} [-e^{-(R+R_0)t/L}] + \frac{LE}{(R + R_0)} \left[-e^{-(R+R_0)t/L} \left\{ \frac{-(R + R_0)}{L} \right\} \right]$$

$$= E \left[\frac{R}{(R + R_0)} + e^{-(R+R_0)t/L} \left(1 - \frac{R}{(R + R_0)} \right) \right]$$

$$= \frac{E}{(R + R_0)} [R + R_0 e^{-(R+R_0)t/L}].$$

उदाहरण 11 – एक संधारित्र को 2 मेगा ओह्म प्रतिरोध के द्वारा डी. सी. विभव स्रोत (वि. वा. बल = 2 वोल्ट) से आवेशित किया जाता है। यदि संधारित्र द्वारा अधिकतम आवेश $3/4$ मान प्राप्त करने में 0.5 सेकण्ड समय लगता है, तो ज्ञात करो – (i) संधारित्र की धारिता, (ii) परिपथ का कालांक, तथा (iii) संधारित्र पर अधिकतम स्थायी आवेश।

हल – (i) प्रश्नानुसार, $q = \frac{3}{4} q_0, t = 0.5$ सेकण्ड, $R = 2$ मेगा-ओह्म
 $= 2 \times 10^6$ ओह्म।

संधारित्र को आवेशित करते समय किसी भी क्षण t पर संधारित्र का आवेश

$$q = q_0(1 - e^{-t/CR})$$

$$\therefore \frac{3}{4} q_0 = q_0(1 - e^{-t/CR}) \text{ या } -e^{-t/CR} = \frac{1}{4} \text{ या } e^{t/CR} = 4$$

$$\frac{t}{CR} = \log_e 4$$

या $t = CR \log_e 4 = CR \times 2.3026 \times \log_{10} 4$

$$\therefore C = \frac{t}{R \times 2.3026 \times \log_{10} 4}$$

$$= \frac{0.5}{2 \times 10^6 \times 2.3026 \times 0.6021}$$

या $C = 0.18 \times 10^{-6}$ फैरड (या $0.18 \mu F$)

(ii) परिपथ का कालांक

$$\lambda = CR = (0.18 \times 10^{-6}) \times (2 \times 10^6) = 0.36 \text{ सेकण्ड।}$$

(iii) अधिकतम स्थायी आवेश

$$q_0 = EC = 2 \times (0.18 \times 10^{-6})$$

$$= 0.36 \times 10^{-6} \text{ कूलॉम (या 0.36 माइक्रो-कूलॉम)।}$$

उदाहरण 12 – $0.5 \mu F$ धारिता के एक संधारित्र को 100 मेगा-ओह्म वाले एक प्रतिरोध के साथ निरावेशित किया जाता है। संधारित्र के आधा आवेश कितने समय में निकल जायेगा? ($\log_e 2 = 0.6931$)

हल – प्रश्नानुसार, $q = \frac{1}{2} q_0$, $C = 0.5 \mu F = 0.5 \times 10^{-6} F$,

$$R = 10 \text{ मेगा-ओह्म}$$

$$= 100 \times 10^6 \text{ ओह्म।}$$

विसर्जन प्रारम्भ होने के t सेकण्ड बाद संधारित्र पर आवेश

$$q = q_0 e^{-t/CR}$$

$$\therefore \frac{q_0}{2} = q_0 e^{-t/CR} \text{ या } \frac{1}{2} = e^{-t/CR} \text{ या } e^{t/CR} = 2$$

$$\text{या } \frac{t}{CR} = \log_e 2 \text{ या } t = CR \log_e 2$$

$$\text{या } t = (0.5 \times 10^{-6}) \times (100 \times 10^6) \times 0.6931$$

$$= 34.655 \text{ सेकण्ड।}$$

उदाहरण 13 – एक प्रतिरोध R तथा $2 \mu F$ धारिता का एक संधारित्र, 200 वोल्ट वि. वा. बल के डी. सी. स्रोत से एक स्विच द्वारा श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। संधारित्र के सिरों पर एक नियॉन बल्ब लगा है जो 120 वोल्ट पर जलता है। R का मान ज्ञात करो जिससे कि स्विच दबाने के 5 सेकण्ड उपरान्त बल्ब जल जावे।

हल – संधारित्र के आवेशन के समय, किसी क्षण t पर संधारित्र का आवेश

$$q = q_0(1 - e^{-t/CR})$$

लेकिन $q = CV$ \therefore किसी क्षण t पर संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर

$$V = V_0(1 - e^{-t/CR})$$

टिप्पणी

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

प्रश्नानुसार, $V_0 = 200$ वोल्ट, $V = 120$ वोल्ट, $t = 5$ सेकण्ड, $C = 2\mu F$
 $= 2 \times 10^{-6}$ फ़ैरड, $R = ?$

टिप्पणी

$$\therefore 120 = 200(1 - e^{-t/CR}) \text{ या } e^{-t/CR} = 1 - \frac{120}{200} = \frac{2}{5}$$

$$\text{या } e^{t/CR} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ या } \frac{t}{CR} = \log_e(2.5)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{t}{C \log_e(2.5)} = \frac{t}{C \times 2.3026 [\log_{10} 10 - \log_{10} 4]} \\ &= \frac{5}{2 \times 10^{-6} \times 2.3026 \times (1 - 0.6021)} \\ &= \frac{5}{2 \times 10^{-6} \times 2.3026 \times 0.3979} \\ &= 2.7286 \times 10^6 \text{ ओह्म (या 2.7286 मेगा-ओह्म)} \end{aligned}$$

उदाहरण 14 – 1.0 माइक्रो-फ़ैरड धारिता के एक संधारित्र को 3 मेगा-ओह्म प्रतिरोध के साथ 4 वोल्ट वि.वा. बल वाली बैटरी द्वारा आवेशित किया जाता है। 1 सेकण्ड बाद (i) संधारित्र पर आवेश वृद्धि की (ii) बैटरी द्वारा प्रदान की गई ऊर्जा की दर, (iii) प्रतिरोध में ऊष्मा उत्पन्न होने की दर तथा संधारित्र में ऊर्जा संचित होने की दर ज्ञात करो। ($e^{-1/3} = 0.72$)

हल – प्रश्नानुसार, $C = 1.0\mu F = 1.0 \times 10^{-6}$ फ़ैरड, $E = 4$ वोल्ट, $t = 1$ सेकण्ड, $R = 3$ मेगा-ओह्म $= 3 \times 10^6$ ओह्म।

(i) संधारित्र पर आवेश वृद्धि की दर

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{d}{dt} [q_0(1 - e^{-t/CR})] = \frac{E}{R} e^{-t/CR} \\ &= \frac{4}{3 \times 10^6} - e^{-1.0/(1.0 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^6)} \\ &= \frac{4}{3 \times 10^6} - e^{-1/3} = \frac{4}{3 \times 10^6} \times 0.72 \\ &= 9.6 \times 10^{-7} \text{ कूलॉम/सेकण्ड।} \end{aligned}$$

(ii) बैटरी द्वारा प्रदान की गयी ऊर्जा की दर $\frac{d\epsilon}{dt} = EI = \frac{E^2}{R} e^{-t/CR}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(4)^2}{3 \times 10^6} e^{-1/3} = \frac{16}{3 \times 10^6} \times 0.72 \\ &= 3.84 \times 10^{-6} \text{ वाट।} \end{aligned}$$

(iii) प्रतिरोध में ऊष्मा उत्पन्न होने की दर $\frac{dH}{dt} = I^2 R = \frac{E^2}{R} e^{-t/CR}$

$$= \frac{(4)^2}{3 \times 10^6} e^{-2/3} = \frac{16}{3 \times 10^6} \times (0.72)^2$$

$$= 2.76 \times 10^{-6} \text{ वाट।}$$

(iv) संधारित्र में संचित ऊर्जा की दर

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right) = \frac{q dq}{C dt} = \frac{E^2}{R} e^{-t/CR} (1 - e^{-t/CR})$$

$$= \frac{(4)^2}{3 \times 10^6} e^{-1/3} (1 - e^{-1/3})$$

$$= \frac{16}{3 \times 10^6} \times 0.716 (1 - 0.716) = 1.08 \times 10^{-6} \text{ वाट}$$

उदाहरण 15 – ज्ञात करो कि निम्न LCR परिपथ द्वारा संधारित्र का विसर्जन दोलनी है? $C = 0.1$ माइक्रो-फैरड, $L = 10$ मिली-हेनरी, $R = 200$ ओह्म

यदि विसर्जन दोलनी है तो इसकी आवृत्ति ज्ञात करो।

हल – LCR परिपथ में संधारित्र का विसर्जन दोलनी होने के लिए आवश्यक शर्त है कि

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \text{ या } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

प्रश्नानुसार, $C = 0.1 \mu F = 0.1 \times 10^{-6} F$, $L = 10$ मिली-हेनरी $= 10 \times 10^{-3}$ हेनरी।

$$\therefore 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10^{-6}}} = 2\sqrt{10^5} = 316.2 \text{ ओह्म}$$

चूँकि परिपथ का प्रतिरोध $R = 200$ ओह्म है जोकि $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ के मान से कम है, अतः संधारित्र का विसर्जन दोलनी है।

दोलनी विसर्जन की आवृत्ति

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14}$$

$$\sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(0.1 \times 10^{-6})} - \frac{(200)^2}{4 \times (10 \times 10^{-3})^2}}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$= \frac{1}{6.28} \sqrt{10^9 - 10^8} = \frac{1}{6.28} \times 10^4 \times \sqrt{10-1}$$

$$= \frac{3 \times 10^4}{6.28} = 4.777 \text{ हर्ट्ज।}$$

उदाहरण 16 – किसी LCR परिपथ में $C = 2 \mu F, L = 2$ हेनरी तथा $R = 1$ ओह्म है। ज्ञात करो – (i) इस परिपथ का Q फेक्टर या विशेषता गुणांक, (ii) विद्युत दोलनों की आवृत्ति, (iii) वह समय जबकि विसर्जन दोलनों का आयाम गिरकर 1% रह जाता है।

हल – (i) LCR परिपथ का विशेषता गुणांक (quality factor) $Q = \frac{\omega L}{R}$

जहाँ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{2 \times 2 \times 10^{-6}} - \frac{(1)^2}{4 \times (2)^2}} \approx \frac{10^3}{2} \approx 500$

$\therefore Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{500 \times 2}{1} = 1000$

(ii) विद्युत दोलनों की आवृत्ति $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times 500 = 79.6$ हर्ट्ज।

(iii) दोलनी विसर्जन में संधारित्र का किसी क्षण t पर शेष आवेश

$$q = q_0 \frac{n}{m} e^{-bt}$$

जहाँ $n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, m = \sqrt{n^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

तथा $b = \frac{R}{2L}$

प्रारम्भ में $t = 0$ पर आवेश का आयाम $= q_0 \frac{n}{m}$

लेकिन प्रश्नानुसार, किसी क्षण t पर आवेश का आयाम $q = \frac{1}{100} \times q_0 \frac{n}{m}$

$\therefore \frac{1}{100} q_0 \frac{n}{m} = q_0 \frac{n}{m} e^{-bt}$ या $e^{-bt} = \frac{1}{100}$ या $e^{bt} = 100$

$bt = \log_e 100$ या

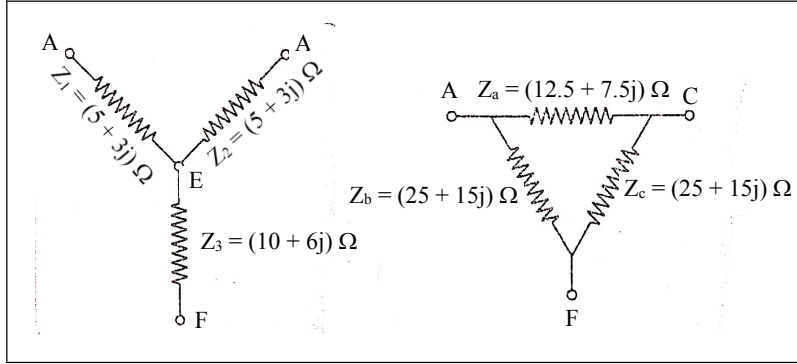
$$t = \frac{\log_e 100}{b} = \frac{2.3026 \log_{10} 100}{R/2L}$$

या $t = 2.3026 \times \frac{2L}{R} \times 2.000$

या $t = \frac{2.3026 \times 2 \times 2 \times 2.000}{1} = 18.42$ सेकण्ड।

उदाहरण 17 – चित्र में प्रदर्शित Y नेटवर्क के समतुल्य Δ नेटवर्क की रचना कीजिए।

विद्युत धारा व
जैव विद्युत



टिप्पणी

हल – प्रश्नानुसार, $Z_1 = (5 + 3j)\Omega$, $Z_2 = (5 + 3j)\Omega$ तथा

$$Z_3 = (10 + 6j)\Omega$$

$$\begin{aligned} \therefore Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 &= (5 + 3j)(5 + 3j) + (5 + 3j)(10 + 6j) \\ &\quad + (10 + 6j)(5 + 3j) \\ &= (16 + 30j) + (32 + 60j) + (32 + 60j) \\ &= 80 + 150j \end{aligned}$$

अतः Δ नेटवर्क की अवयवी प्रतिबाधाएँ

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \\ &= \frac{80 + 150j}{5 + 3j} \end{aligned}$$

या

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{(80 + 150j)(5 - 3j)}{(5 + 3j)(5 - 3j)} \\ &= 25 + 15j \end{aligned}$$

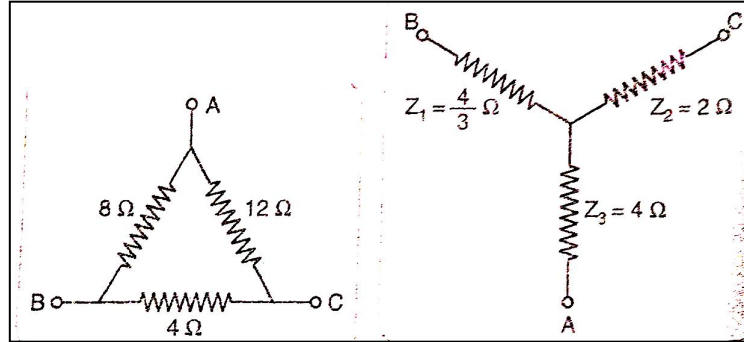
$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \\ &= \frac{80 + 150j}{5 + 3j} = 25 + 15j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \\ &= \frac{80 + 150j}{10 + 6j} \\ &= \frac{(80 + 150j)(10 - 6j)}{(10 + 6j)(10 - 6j)} = 12.5 + 7.5j \end{aligned}$$

उदाहरण 18 – चित्र में प्रदर्शित Δ नेटवर्क के समतुल्य Y नेटवर्क की रचना कीजिए।

हल – प्रश्नानुसार, $Z_a = 4\Omega$, $Z_b = 8\Omega$ तथा $Z_c = 12\Omega$

टिप्पणी



$$\begin{aligned} \therefore Z &= Z_a + Z_b + Z_c \\ &= 4 + 8 + 12 = 24\Omega \end{aligned}$$

अतः Y नेटवर्क की अवयवी प्रतिबाधाएँ

$$Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{Z} = \frac{4 \times 8}{24} = \frac{4}{3}\Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z} = \frac{4 \times 12}{24} = 2\Omega$$

तथा
$$Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{Z} = \frac{8 \times 12}{24} = 4\Omega$$

उदाहरण 19 – नर्नस्ट समीकरण द्वारा कैल्शियम आयन (Ca^{2+}) के लिए सन्तुलन झिल्ली विभव ज्ञात कीजिए जबकि कोशिका के अन्दर व बाहर आयन सान्द्रता क्रमशः 0.2 मोल/लिटर तथा 2.0 मोल/लिटर है।

हल – प्रश्नानुसार, $x_1 = 0.2$ मोल/लिटर, $x_0 = 2.0$ मोल/लिटर तथा $n = 2$

नर्नस्ट समीकरण
$$e = \frac{59}{n} \log_{10} \frac{x_0}{x_1} \text{ मिली-वोल्ट से,}$$

$$e = \frac{59}{2} \log_{10} \frac{2.0}{0.2} = 29.5 \log_{10}$$

$$= 29.5 \times 1 = 29.5 \text{ मिली-वोल्ट।}$$

उदाहरण 20 – यदि कैल्शियम आयन (Ca^{2+}) की कोशिका के अन्दर व बाहर सान्द्रता क्रमशः 0.2 मोल/लिटर तथा 2.0 मोल/लिटर है तथा झिल्ली का स्थिर विभव – 60 mV है तो बताइए कि कोशिका में आयनों का प्रवाह किस ओर होगा : अन्दर की ओर अथवा बाहर की ओर?

हल - प्रश्नानुसार, $n = 2$, $x_0 = 2.0$ मोल/लिटर, $x_1 = 0.2$ मोल/लिटर।

∴ नर्नस्ट समीकरण से झिल्ली का सन्तुलन विभव

$$e = \frac{59}{2} \log_{10} \frac{2.0}{0.2} = 29.5 \text{ mV}$$

स्पष्ट है कि विभव 29.5 mV से घटकर - 60 mV होने का अर्थ है कि x_0/x_1 घटता है अर्थात् आयन बाहर से अन्दर की ओर प्रवाहित होंगे।

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. किसी परिपथ जाल के दो टर्मिनल के बीच थैवनिन तुल्य वोल्टता –
 - (क) परिपथ की कुल प्राप्य वोल्टता के समान होती है।
 - (ख) इन दोनों टर्मिनल के सबसे नजदीक के बैटरी के वि. वा. बल के समान होती है।
 - (ग) खुले परिपथ टर्मिनल वोल्टता के समान होती है।
 - (घ) लघुपथित टर्मिनल वोल्टता के समान होती है।
2. किसी जाल के दो टर्मिनलों के बीच थैवनिन तुल्य प्रतिरोध –
 - (क) उन दोनों टर्मिनलों के खुले रहने पर एवं सारे स्रोत को उनके तुल्य आन्तरिक प्रतिरोध द्वारा प्रतिस्थापित करके प्राप्त प्रतिरोध के समान होता है।
 - (ख) दो टर्मिनल को लघुपथित कर प्राप्त प्रतिरोध के समान होता है।
 - (ग) किन्ही भी दो खुले टर्मिनल के मध्य प्राप्य वोल्टता के समान होता है।
 - (घ) इनमें से कोई भी नहीं।
3. थैवनिन तुल्य परिपथ में –
 - (क) एक वोल्टता स्रोत एवं एक तुल्य प्रतिबाधा समान्तर क्रम में होते हैं।
 - (ख) एक वोल्टता स्रोत एवं एक प्रतिबाधा श्रेणी क्रम में होते हैं।
 - (ग) एक धारा स्रोत एवं एक प्रतिबाधा समान्तर क्रम में होते हैं।
 - (घ) एक धारा स्रोत एवं एक प्रतिबाधा श्रेणी क्रम में होते हैं।

टिप्पणी

4. नोर्टन तुल्य परिपथ के लिए सत्य है –
- (क) एक वोल्टता स्रोत एवं एक तुल्य प्रतिबाधा समान्तर क्रम में होते हैं।
- (ख) एक वोल्टता स्रोत एवं एक प्रतिबाधा श्रेणी क्रम में होते हैं।
- (ग) एक धारा स्रोत एवं प्रतिबाधा समान्तर क्रम में होते हैं।
- (घ) एक धारा स्रोत एवं एक प्रतिबाधा श्रेणी क्रम में होते हैं।
5. नोर्टन तुल्य परिपथ में –
- (क) एक स्थिर धारा स्रोत के साथ चालकता समान्तर क्रम में होती है।
- (ख) एक स्थिर धारा स्रोत के साथ अनन्त प्रतिरोध श्रेणी क्रम में होता है।
- (ग) स्थिर वोल्टता स्रोत एक उच्च प्रतिरोध के साथ समान्तर क्रम में होता है।
- (घ) स्थिर वोल्टता स्रोत तथा स्थिर धारा स्रोत समान्तर क्रम में होते हैं।
6. थैवनिन तुल्य प्रतिबाधा ज्ञात करने में पूरे धारा स्रोत को –
- (क) लघुपथित कर देते हैं।
- (ख) दूसरे वोल्टता स्रोत के समान्तर क्रम में लेकर गणना करनी पड़ती है।
- (ग) तुल्य वोल्टता स्रोत में बदलना पड़ता है।
- (घ) खुले परिपथ द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं।
7. किसी सक्रिय जाल के दो टर्मिनलों से अधिकतम शक्ति तब प्राप्त कर सकते हैं जब लोड प्रतिबाधा, उन दो टर्मिनलों के बीच प्रतिबाधा के –
- (क) समान हो
- (ख) विपरीत हो।
- (ग) संयुग्मी हो।
- (घ) उपर्युक्त पर निर्भर नहीं करता हो।
8. सक्रिय जाल से निष्क्रिय जाल में संचरित होने वाली अधिकतम शक्ति –
- (क) $E_0^2 / 2R_0$ (ख) $E_0^2 / 4R_0$
- (ग) $R_0^2 / 2E_0$ (घ) $R_0^2 / 4E_0$
- जहाँ E_0 सक्रिय जाल में उपयुक्त वि. वा. बल तथा R_0 परिपथ का तुल्य प्रतिरोध है।

टिप्पणी

9. क्षीणन का अर्थ है –
- (क) प्रवर्धन (ख) संचरण
(ग) रोक देना (घ) कमजोर बना देना।
10. $C-R$ परिपथ का समय नियतांक होता है –
- (क) CR (ख) $\frac{1}{CR}$
(ग) R/C (घ) C/R .
11. एक प्रतिरोध युक्त प्रेरकत्व के परिपथ में 10 ओम प्रतिरोध तथा 10 मिली हेनरी प्रेरकत्व है। धारा के महत्तम मान का 63% मान प्राप्त करने में लगा समय –
- (क) 10^{-6} सेकण्ड (ख) 10^{-4} सेकण्ड
(ग) 10^6 सेकण्ड (घ) 10^{-8} सेकण्ड।
12. प्रतिरोध युक्त संधारित्र के निरावेशन में परिपथ का समय नियतांक (कालांक) वह समय है, जिसमें संधारित्र पर किसी क्षण आवेश q का सम्बन्ध अधिकतम आवेश q_0 से होता है –
- (क) $q = 3.68 q_0$ (ख) $q = 0.0368 q_0$
(ग) $q = 0.368 q_0$ (घ) इनमें से कोई नहीं।
13. 1 माइक्रो फ़ैरड धारिता का संधारित्र 2 मेगा ओह्म के प्रतिरोध द्वारा विसर्जित किया जाता है। समय नियतांक होगा –
- (क) 6 सेकण्ड (ख) 1.5 सेकण्ड
(ग) 2 सेकण्ड (घ) 3 सेकण्ड।
14. 10 हेनरी प्रेरकत्व तथा 10 ओम प्रतिरोध की कुण्डली 100 वोल्ट की बैटरी से जोड़ी जाती है। 1 सेकण्ड बाद धारा होगी –
- (क) 10 ऐम्पियर (ख) 5 ऐम्पियर
(ग) 9.07 ऐम्पियर (घ) 6.3 ऐम्पियर।
15. प्रत्यावर्ती धारा का $r.m.s.$ मान तथा शिखर मान में सम्बन्ध है –
- (क) $I_0 = \frac{I_{rms}}{\sqrt{2}}$ (ख) $I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$
(ग) $I_{rms} = 2I_0$ (घ) $I_0 = 2I_{rms}$.

टिप्पणी

16. शक्तिहीन धारा और आरोपित विद्युत् वाहक बल में कलान्तर होता है –
- (क) $\pm \frac{\pi}{2}$ (ख) $\pm \frac{\pi}{3}$
- (ग) शून्य (घ) $\pm \frac{\pi}{4}$
17. एक LCR परिपथ में $L = 8$ हेनरी तथा $C = 2$ माइक्रो फ़ैरड है। R का वह न्यूनतम मान जिस पर दोलन पूर्ण रूप से अवमन्दित हो जाता है, होगा –
- (क) 8×10^3 ओह्म (ख) 6×10^3 ओह्म
- (ग) 4×10^3 ओह्म (घ) 1×10^3 ओह्म
18. संधारित्र के दोलनी विसर्जनों में परिपथ का प्रतिरोध बढ़ाने से दोलनों की आवृत्ति –
- (क) बढ़ जाती है
- (ख) घट जाती है
- (ग) अपरिवर्तित रहती है
- (घ) घट जाती है तथा प्रतिरोध एक सीमा से अधिक होने पर दोलन समाप्त हो जाता है।
19. 10 हेनरी प्रेरकत्व तथा 10 ओम प्रतिरोध की कुण्डली को 100 वोल्ट तथा 50 हर्ट्ज के प्रत्यावर्ती विद्युत् वाहक बल से जोड़ा जाता है। प्रत्यावर्ती धारा होगी –
- (क) 1 A (ख) 0.03 A
- (ग) 5 A (घ) 10 A.
20. शक्ति गुणांक का मान –
- (क) शुद्ध प्रेरकत्व में एक होता है
- (ख) शुद्ध संधारित्र में एक होता है
- (ग) LCR परिपथ में विशेष स्थिति में एक होता है
- (घ) कभी एक नहीं होता है।
21. श्रेणी युक्त LCR प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में यदि $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ हो, तो –
- (क) धारा का मान अधिकतम होगा
- (ख) धारा का मान न्यूनतम होगा

टिप्पणी

- (ग) धारा तथा विभवान्तर के बीच कलान्तर 90° होगा
(घ) धारा तथा विभवान्तर के बीच कलान्तर 180° होगा।
22. LCR परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा का प्रेरण प्रतिघात $X_L (= \omega L)$ तथा धारितीय प्रतिघात X_C है अनुनाद की स्थिति होगी, जबकि –
- (क) $X_L = X_C$ (ख) $X_L + X_C = 0$
(ग) $\frac{1}{X_L} = X_C$ (घ) इनमें से कोई नहीं।
23. एक श्रेणी परिपथ में दो विशुद्ध अवयव जुड़े हुए हैं तथा इनमें बहने वाली धारा तथा लगाया गया विद्युत वाहक बल क्रमशः हैं $I = 13.43 \sin(500t - 53.4^\circ)$ ऐम्पियर, $E = 150 \sin(500t + 10^\circ)$ वोल्ट तो परिपथ के अवयव हैं –
- (क) प्रतिरोध व संधारित्र (ख) प्रतिरोध व प्रेरकत्व
(ग) प्रेरकत्व व संधारित्र (घ) केवल दो प्रतिरोध।
24. यदि एक LCR परिपथ प्रत्यावर्ती धारा से अनुनादी अवस्था में हो, तो अनुनादी आवृत्ति निर्भर करती है –
- (क) R पर (ख) R व L पर
(ग) C व R पर (घ) L व C पर।
25. समान्तर अनुनादी परिपथ में –
- (क) धारा अनुनादी आवृत्ति पर अधिकतम होती है
(ख) प्रतिबाधा अनुनादी आवृत्ति पर अधिकतम होती है
(ग) प्रतिबाधा अनुनादी आवृत्ति पर न्यूनतम होती है
(घ) प्रतिबाधा अनुनादी आवृत्ति पर शून्य होती है।
26. दोलनी LCR परिपथ में दोलनी के लिए प्रतिरोध R का मान –
- (क) $R < 2\sqrt{\frac{C}{L}}$ (ख) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
(ग) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (घ) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.
27. $L-R$ परिपथ में –
- (क) धारा वृद्धि की दर सदैव समान रहती है
(ख) धारा वृद्धि की दर धारा बढ़ने के साथ रेखीय रूप में बढ़ती है

टिप्पणी

- (ग) धारा वृद्धि की दर धारा बढ़ने पर घटती है
(घ) किसी क्षण धारा वृद्धि की दर कालांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है।
28. LCR परिपथ में अनुनाद की तीक्ष्णता –
(क) विशेषता गुणांक के अनुक्रमानुपाती होती है
(ख) विशेषता गुणांक के व्युत्क्रमानुपाती होती है
(ग) विशेषता गुणांक पर निर्भर नहीं करती है
(घ) इनमें से कोई नहीं।
29. प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में अनुनादी अवस्था में आरोपित विभवान्तर तथा धारा के मध्य कलान्तर –
(क) $+90^\circ$ (ख) 0°
(ग) -90° (घ) $+180^\circ$
30. LCR परिपथ में यदि Z परिपथ की प्रतिबाधा है, तो शक्ति गुणांक होगा –
(क) $\frac{\omega L}{Z}$ (ख) $\frac{\omega C}{R}$
(ग) $\frac{R}{Z}$ (घ) R .
31. जैव विद्युत् का आविष्कार किया था –
(क) गैल्वानी ने (ख) न्यूटन ने
(ग) आइन्स्टीन ने (घ) वोल्टा ने।
32. जैव शरीर में वोल्टेज के गिराव-चढ़ाव का समंजन होता है –
(क) बाह्य स्रोत द्वारा (ख) बाह्य रेगुलेटर द्वारा
(ग) स्वतः (घ) माँसपेशियाँ चलाकर।
33. स्थिर तन्त्रिका तन्तु का विभव होता है –
(क) -60 mV (ख) $+60 \text{ mV}$
(ग) शून्य (घ) 10 mV ।
34. तन्त्रिका तन्तु से आवेग प्रवाह की दर होती है लगभग –
(क) 1 (ख) 0.1
(ग) 10 (घ) 1000.

टिप्पणी

35. किसी आयन के लिए नर्नस्ट विभव 5 mV है तथा स्थिर -60 mV है। कोशिका से आयन प्रवाह की दिशा होगी –
- (क) अन्दर की ओर
(ख) बाहर की ओर
(ग) पहले बाहर की ओर तथा फिर अन्दर की ओर
(घ) कुछ नहीं कहा जा सकता है।
36. यदि कोशिका के अन्दर व बाहर Na आयन की सान्द्रता क्रमशः x_i तथा x_o है, तो इनमें सम्बन्ध है –
- (क) $x_o = x_i$ (ख) $x_o > x_i$
(ग) $x_o < x_i$ (घ) $x_o = 2x_i$ ।
37. एक्सोन का आवरण होता है –
- (क) पूर्ण कुचालक (ख) अल्प सुचालक
(ग) पूर्ण सुचालक (घ) कुछ नहीं कहा जा सकता है।
38. दिल की धड़कन से सम्बन्धित विद्युतीय क्रिया-कलापों का अभिलेखन कहलाता है –
- (क) कम्पनदर्शी (ख) इलेक्ट्रोकार्डियोग्राम
(ग) स्टेथोस्कोप (घ) लेपरोस्कोप।

3.36 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. (ग) | 14. (घ) | 27. (ग) |
| 2. (क) | 15. (ख) | 28. (क) |
| 3. (ख) | 16. (क) | 29. (ख) |
| 4. (ग) | 17. (ग) | 30. (ग) |
| 5. (क) | 18. (घ) | 31. (क) |
| 6. (घ) | 19. (ख) | 32. (ग) |
| 7. (ग) | 20. (ग) | 33. (क) |
| 8. (ख) | 21. (क) | 34. (घ) |
| 9. (घ) | 22. (क) | 35. (क) |
| 10. (क) | 23. (ख) | 36. (ख) |
| 11. (ख) | 24. (घ) | 37. (ख) |
| 12. (ग) | 25. (ख) | 38. (ख) |
| 13. (घ) | 26. (ग) | |

टिप्पणी

3.37 सारांश (Summary)

इस इकाई के माध्यम से हमने स्थायी धारा, धारा घनत्व \vec{J} , अस्थायी धारा एवं सातत्य समीकरण का निगमन करा है। किरचॉफ के नियम व मल्टीलूप परिपथ का विश्लेषण किया है। $L-R$ तथा $C-R$ परिपथ में धारा की वृद्धि व क्षय, नियतांक, LCR परिपथ, AC परिपथ और उनके हल में अनुप्रयोग को समझाया। सम्मिश्र संख्याएँ, प्रतिबाधा व प्रतिघात को समझाया गया है। श्रेणी एवं समान्तर अनुनाद, Q गुणांक, शक्ति गुणांक की व्याख्या। y व Δ नेटवर्क व विद्युत् शक्ति का प्रेषण। जैविक निकायों में विद्युत् का अवलोकन, तथा जैव विद्युत् की उत्पत्ति की व्याख्या की गई है।

3.38 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- धारा विद्युत्
- धारा घनत्व
- बहुलूप परिपथ
- किरचॉफ के नियम
- प्रेरकत्व
- प्रतिरोध
- संधारित्र
- प्रत्यावर्ती धारा
- श्रेणी अनुनादी परिपथ
- समान्तर अनुनादी परिपथ
- नेटवर्क
- जैव विद्युत्

3.39 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. स्थायी धारा के लिए सातत्य समीकरण लिखिए।
2. वैद्युत नेटवर्क से क्या अभिप्राय है?
3. किसी वैद्युत नेटवर्क के सक्रिय अवयवों से आप क्या समझते हो?
4. किसी वैद्युत नेटवर्क के निष्क्रिय अवयवों से क्या तात्पर्य है?

टिप्पणी

5. एक विद्युत् परिपथ की प्रतिबाधा से क्या तात्पर्य है? रेखिक प्रतिबाधा किसे कहते हैं?
6. प्रवेश्यता (admittance) से आप क्या समझते हो? इसका मात्रक लिखिए।
7. (i) वोल्टेज स्रोत, (ii) धारा स्रोत, का उपयोग करना कब लाभप्रद होता है?
8. थैवनिन प्रमेय लिखिए।
9. नोर्टन प्रमेय लिखिए।
10. थैवनिन तथा नोर्टन प्रमेय में क्या अन्तर है? किन दशाओं में किसी नेटवर्क का थैवनिन तुल्य उपयोगी होता है एवं किन दशाओं में नोर्टन तुल्य?
11. अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरण प्रमेय का कथन लिखिए।
12. अध्यारोपण की प्रमेय लिखिए।
13. L-R परिपथ में धारा की वृद्धि तथा क्षय के ग्राफ दर्शाइए।
14. प्रतिरोध युक्त संधारित्र परिपथ के समय नियतांक से क्या तात्पर्य है? इसका सूत्र लिखिए।
15. किसी प्रतिरोध व प्रेरकत्व युक्त परिपथ के समय नियतांक से क्या तात्पर्य है?
16. C-R परिपथ में संधारित्र पर आवेश की वृद्धि तथा क्षय को ग्राफ द्वारा दर्शाइए।
17. "प्रेरकत्व L के द्वारा किसी संधारित्र C का विसर्जन कराने पर विद्युत दोलन होते हैं।" इस कथन का क्या तात्पर्य है? इन दोलनों की आवृत्ति का व्यंजक लिखिए।
18. LCR परिपथ का गुणता कारक (quality factor) से आप क्या समझते हैं?
19. यदि श्रेणीबद्ध LCR परिपथ में संधारित्र की प्लेटों के बीच परावैद्युत माध्यम भर दिया जाये तो संधारित्र के दोलनी विसर्जन की आवृत्ति पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
20. (i) शुद्ध प्रेरकत्व (ii) शुद्ध धारिता वाले प्रत्यावर्ती परिपथ में प्रतिघात का क्या मान होगा?
21. प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति (i) दो गुना (ii) शून्य होने पर प्रेरकत्व प्रतिघात X_L व धारिता प्रतिघात X_C पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
22. एक दोलनकारी $L - C$ परिपथ जिसका प्रतिरोध नगण्य है, की कोणीय आवृत्ति का सूत्र लिखो।
23. दिष्ट धारा के लिए एक कुण्डली का प्रतिरोध R ओह्म है। यदि प्रत्यावर्ती धारा प्रयुक्त की जाये तो कुण्डली का प्रतिरोध क्या होगा, R , से कम, R या R से अधिक?

टिप्पणी

24. शुद्ध प्रेरकत्व अपने में से दिष्ट धारा को आसानी से गुजरने देता है परन्तु प्रत्यावर्ती धारा को नहीं, क्यों?
25. ए. सी. तथा डी. सी. परिपथों में संधारित्र के व्यवहार की व्याख्या कीजिए।
26. प्रत्यावर्ती धारा के एक पूर्ण चक्र के लिए औसत सामर्थ्य के लिए सूत्र लिखिए।
27. श्रेणी और समान्तर अनुनादी परिपथ को समझाइए।
28. Y तथा Δ नेटवर्क में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
29. विद्युत पावर का संचरण उच्च वोल्टेज पर किया जाता है, क्यों?
30. जैव विद्युत् का आविष्कार किसने किया था?
31. ट्रान्स झिल्ली पम्प क्या है? इसका क्या कार्य है?
32. स्थिर विभव का माध्य मान लिखिए।
33. सोते समय प्लाज्मा झिल्ली के अन्दर व बाहर आवेश की प्रकृति लिखिए।?
34. क्रियात्मक विभव लगभग कितना होता है?
35. नर्नस्ट समीकरण लिखिए। यह क्या बताता है?
36. एक्सोन क्या है? इसका क्या अर्थ है?
37. तन्त्रिका कोशिका क्या है। इसका क्या अर्थ है?
38. किसका प्रतिरोध अधिक होता है : प्लाज्मा झिल्ली अथवा केबिल?
39. किसकी धारिता अधिक होती है : प्लाज्मा झिल्ली अथवा केबिल?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. वैद्युत धारा तथा घनत्व की परिभाषाएँ दीजिये। एक ही प्रकार के आवेश वाहकों की गति के पदों में धारा घनत्व के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।
2. स्थिर धारा के लिए अविरतता का समीकरण ज्ञात करो।
3. अस्थायी धारा वितरण के लिए सांतत्य समीकरण $div \vec{J} = \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$ निगमित कीजिए।
4. चालकों के नेटवर्क में धारा के वितरण के लिए किरचौफ के नियमों का वर्णन कीजिए तथा इनकी व्याख्या कीजिए।
5. किरचौफ के नियमों की सहायता से व्हीटिस्टोन सेतु के सन्तुलन के लिए प्रतिबंध व्युत्पन्न कीजिए।
6. वोल्टता जनित्रों तथा प्रतिरोधों से बने किसी नेटवर्क के लिए थैवनिन की प्रमेय का वर्णन कीजिए तथा इसे सिद्ध कीजिए।
7. नोर्टन की प्रमेय लिखिए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

टिप्पणी

8. थैवनिन और नोर्टन प्रमेय में क्या अन्तर है? एक साधारण व्हीटस्टोन ब्रिज का नोर्टन तुल्य परिपथ ज्ञात कीजिये। निर्गत धारा का मान ज्ञात कीजिये। थैवनिन प्रमेय से प्राप्त मान से इसकी तुलना कीजिये।
9. अधिकतम शक्ति स्थान्तरण प्रमेय लिखो और सिद्ध करो कि एक सक्रिय नेटवर्क से निष्क्रिय नेटवर्क में अधिकतम सामर्थ्य स्थान्तरण के लिये लोड प्रतिबाधा आन्तरिक प्रतिबाधा की संयुग्मी होनी चाहिये।
10. अध्यारोपण प्रमेय लिखो और उसे सिद्ध करो।
11. मिलमैन प्रमेय क्या है? इसे सिद्ध करो तथा उदाहरण द्वारा इसकी व्याख्या करो।
12. व्युत्क्रमण प्रमेय क्या है? लिखो और इसे सिद्ध करो।
13. किसी प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि तथा धारा के क्षय के लिए समीकरणों को स्थापित करके उन्हें हल कीजिए। समय नियतांक की व्याख्या कीजिए तथा इसका मान ज्ञात कीजिए।
14. सिद्ध कीजिए कि प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में धारा की वृद्धि के दौरान बैटरी द्वारा दी गई कुल सामर्थ्य, प्रतिरोध में ऊष्मा के रूप में व्यय सामर्थ्य तथा प्रेरकत्व में चुम्बकीय ऊर्जा के रूप में संचित सामर्थ्य के योग के बराबर होती है।
15. किसी संधारित्र को प्रतिरोध के द्वारा आवेशित तथा अनावेशित करने की प्रक्रिया समझाइये। आवेशन व निरावेशन के दौरान संधारित्र पर आवेश का मान समय के फलन के रूप में प्राप्त कीजिए। इस सन्दर्भ में समय नियतांक की व्याख्या कीजिए।
16. सिद्ध कीजिए कि एक संधारित्र को प्रतिरोध के द्वारा आवेशित करने में बैटरी द्वारा ऊर्जा प्रदान करने की दर, ऊष्मीय ऊर्जा उत्पन्न होने की दर तथा संधारित्र की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि की दर के योग के बराबर होती है।
17. LCR परिपथ में डी.सी. स्रोत जोड़ने पर धारा वृद्धि की गणितीय व्याख्या कीजिए तथा इससे सम्बन्धित विभिन्न स्थितियों को समझाइये।
18. प्रतिरोध तथा प्रेरकत्व युक्त परिपथ में संधारित्र के विसर्जन की प्रकृति की विवेचना कीजिए। इस विसर्जन के दोलनी होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध ज्ञात कीजिए। दोलनी विसर्जन के आवृत्ति तथा गुणता गुणांक (Quality factor) के लिए सूत्र स्थापित कीजिए।
19. श्रेणीक्रम में जुड़े धारिता और प्रतिरोध युक्त परिपथ में एक प्रत्यावर्ती वि. वा. बल लगाया जाता है। परिपथ में धारा का प्रभावी मान एवं धारा व विभवान्तर के बीच कलान्तर ज्ञात कीजिए तथा प्रतिघात व प्रतिबाधा पदों की व्याख्या कीजिए।

टिप्पणी

20. श्रेणीबद्ध जुड़े प्रतिरोध R , प्रेरकत्व L तथा धारिता C के परिपथ में प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $V = V_0 \sin \omega t$ आरोपित किया जाता है। ज्ञात कीजिए—
- (i) परिपथ में धारा, (ii) धारा व आरोपित वि. वा. बल में कलान्तर, (iii) प्रतिरोध, प्रेरकत्व व धारिता के सिरों पर विभवान्तर, (iv) परिपथ में औसत व्यय शक्ति, (v) अनुनाद के लिए आवश्यक शर्त तथा अनुनादी आवृत्ति।
21. श्रेणी अनुनादी परिपथ क्या है? परिपथ में धारा, आरोपित विभवान्तर की आवृत्ति पर किस प्रकार निर्भर करती है? आवश्यक आरेख खींचिए। अनुनादी आवृत्ति का सूत्र प्राप्त कीजिए। बैंड चौड़ाई तथा विशेषता गुणांक में सम्बन्ध स्थापित कीजिए। इस परिपथ में वोल्टेज प्रवर्धन कितना होता है? अनुनाद की तीक्ष्णता, परिपथ के विशेषता गुणांक पर किस प्रकार निर्भर करता है?
22. LCR श्रेणी परिपथ में विशेषता गुणांक की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि इस परिपथ का Q गुणांक परिपथ के वोल्टता प्रवर्धन के बराबर होता है।
23. समान्तर अनुनादी परिपथ क्या है? इस परिपथ की अनुनादी आवृत्ति, प्रतिबाधा तथा धारा प्रवर्धन के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। इस परिपथ को अस्वीकारी परिपथ क्यों कहते हैं?
24. प्रत्यावर्ती वि. वा. बल के स्रोत से C धारिता का संधारित्र तथा L प्रेरकत्व की कुण्डली समान्तर क्रम में जुड़े हैं। परिपथ की अनुनादी आवृत्ति प्रतिबाधा तथा धारा प्रवर्धन के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।
25. श्रेणी अनुनाद तथा समान्तर अनुनाद की तुलना करो।
26. प्रतिबाधा, प्रतिघात तथा प्रवेश्यता को परिभाषित करो।
27. विभिन्न A.C. परिपथों के लिए शक्ति (Power) का मान ज्ञात कीजिए।
28. Y तथा Δ नेटवर्क से क्या अभिप्राय है? Y नेटवर्क से Δ नेटवर्क एवं Δ नेटवर्क से Y नेटवर्क कैसे प्राप्त करेंगे?
29. किसी पावर स्टेशन से विद्युत् पावर का घरों में प्रेषण किस प्रकार किया जाता है? समझाइए।
30. संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए :
- (i) वाटहीन धारा
(ii) चोक कुण्डली
(iii) अनुनाद
(iv) प्रतिबाधा तथा प्रवेश्यता
(v) विशेषता गुणांक

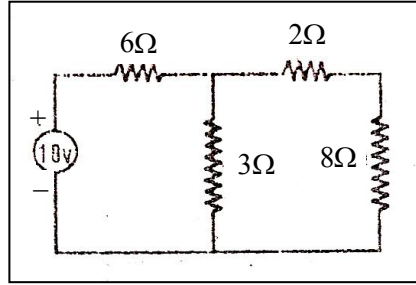
- (vi) संयुग्मी संख्या एवं अनुप्रयोग
(vii) प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में व्यय औसत शक्ति।

31. जैव विद्युत् से क्या अभिप्राय है? इसकी उत्पत्ति किस प्रकार हुई?
32. सोडियम-पोटैशियम आयन परिवहन की व्याख्या कीजिए तथा स्थिर विभव व क्रियात्मक विभव समझाइए।
33. नर्नस्ट समीकरण क्या है? इसका उपयोग समझाइए।
34. तन्त्रिका कोशिका की संरचना एवं कार्य समझाते हुए एकसोन द्वारा धारा प्रवाह की व्याख्या कीजिए।
35. साधारण केबिल से प्रवाहित धारा तथा एकसोन से प्रवाहित धारा में अन्तर समझाइए।

टिप्पणी

आंकिक प्रश्न (Numerical Problems)

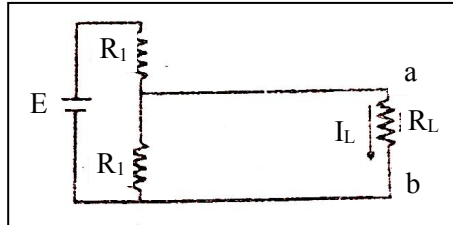
1. थैवनिन प्रमेय का उपयोग करके निम्न परिपथ चित्र में 8Ω प्रतिरोध में से बहने वाली धारा का मान प्राप्त कीजिए।



[उत्तर – 0.5 A]

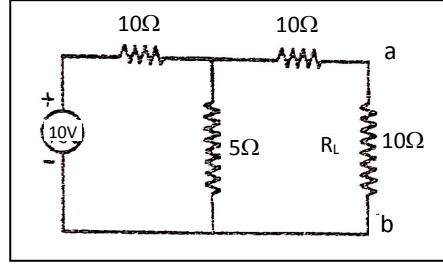
2. थैवनिन प्रमेय द्वारा सिद्ध करो कि चित्र में लोड प्रतिरोध R_L में प्रवाहित धारा निम्न होगी—

$$I_L = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_L + R_2R_L}$$



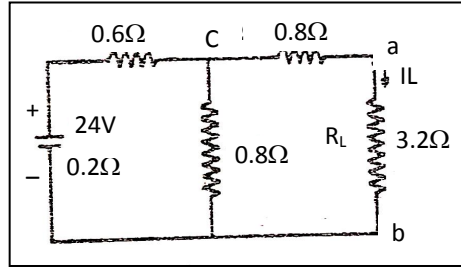
3. चित्र में प्रदर्शित परिपथ का थैवनिन तथा नोर्टन समतुल्य परिपथ खींचिये तथा लोड प्रतिरोध $R_L = 100$ ओह्म में बहने वाली धारा की गणना कीजिये।

टिप्पणी



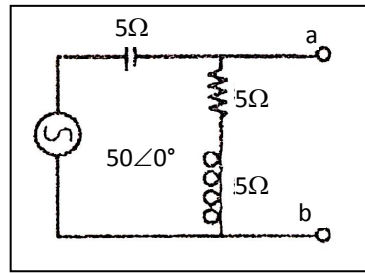
[उत्तर - 1/34 ऐम्पियर]

4. चित्र में प्रदर्शित परिपथ के लिये समतुल्य थेविनिन विद्युत परिपथ आरेख प्रदर्शित कीजिये तथा I_L का मान ज्ञात कीजिये।



[उत्तर - $I_L = 2.73$ ऐम्पियर]

5. थेविनिन प्रमेय के अनुसार ज्ञात कीजिये कि संलग्न चित्र में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में a व b सिरो के बीच लोड प्रतिबाधा $Z_L = 5 - 5j$ जोड़ने पर लोड से प्रवाहित होने वाली धारा का मान क्या होगा?



$$[\text{संकेत:}] = \frac{50}{-5j + (5+5j)} \times (5 \times 5j) = 50(1+5j) = 50\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ वोल्ट}$$

$$Z_T = \frac{(5+5j)(-5j)}{(5+5j)+(-5j)} = \frac{-25j+25}{5} = 5(1-j) \text{ ओह्म}$$

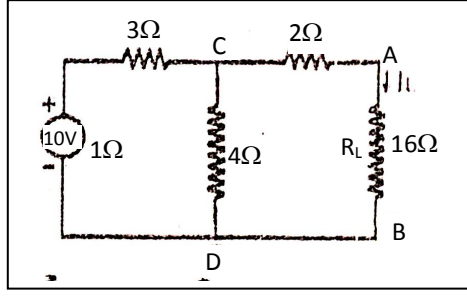
$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} = \frac{50(1+j)}{5(1-j) + (5-5j)}$$

$$= \frac{5(1+j)}{(1-j)} = 5j = 5\angle 90^\circ \text{ ऐम्पियर}$$

[उत्तर - 5 ऐम्पियर, आरोपित विभवान्तर से कला में 90° पश्चगामी]

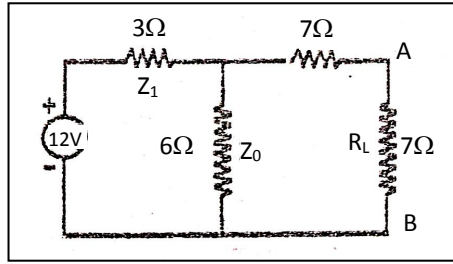
6. नोर्टन प्रमेय का उपयोग करके संलग्न चित्र में प्रदर्शित विद्युत परिपथ में लोड धारा I_L का मान ज्ञात कीजिये।

टिप्पणी



[उत्तर – 0.25 ऐम्पियर]

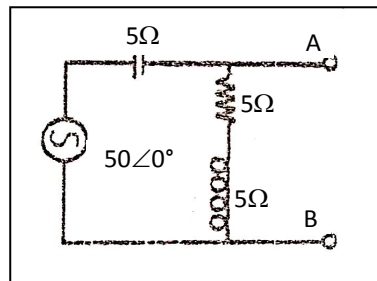
7. संलग्न चित्र में प्रदर्शित विद्युत परिपथ को समतुल्य (i) थेवनिन परिपथ तथा (ii) नोर्टन परिपथ से प्रतिस्थापित कीजिये तथा दर्शाइये कि दोनों दशाओं में लोड R_L पर प्राप्त सामर्थ्य बराबर है। इस सामर्थ्य का मान ज्ञात कीजिये।



[उत्तर – $\frac{7}{4}$ वाट]

8. संलग्न चित्र में प्रदर्शित परिपथ के समतुल्य नोर्टन परिपथ बनाइये तथा A तथा B टर्मिनलों से जुड़ी प्रतिबाधा $Z_L = (5 - 5j)$ ओह्म से प्रवाहित धारा की गणना कीजिये।

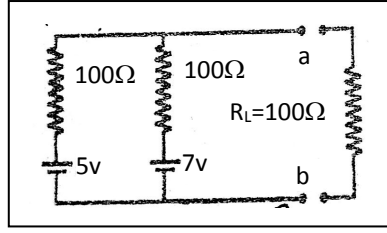
[संकेत: A व B सिरों के बीच मोटा तार लगाकर लघुपथित करने पर नोर्टन धारा $I_N = \frac{50}{-5j} = 10j$ ऐम्पियर]



[उत्तर – नोर्टन धारा 10 ऐम्पियर (आरोपित विभवान्तर से 90° कला कोण पश्चगामी), शण्ट प्रतिबाधा = $5(1 - j)$ ओह्म, लोड में धारा = 5 ऐम्पियर (आरोपित विभवान्तर से 90° कोण पश्चगामी)]

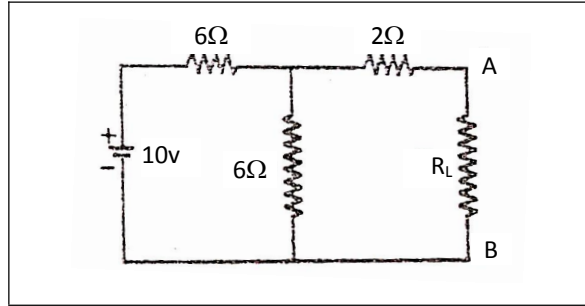
टिप्पणी

9. चित्र में प्रदर्शित परिपथ में a तथा b बिन्दुओं के बीच मिलमैन प्रमेय का उपयोग करके 100 ओह्म लोड प्रतिरोध से प्रवाहित धारा तथा इसके सिरो पर वोल्टेज की गणना कीजिए।



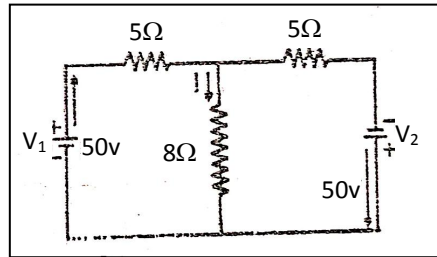
[उत्तर – 0.04 ऐम्पियर, 4 वोल्ट]

10. विद्युत परिपथ (चित्र में लोड प्रतिरोध R_L के किस मान के लिये अधिकतम सामर्थ्य अवशोषित होगी तथा इस अधिकतम सामर्थ्य का मान ज्ञात करो।)



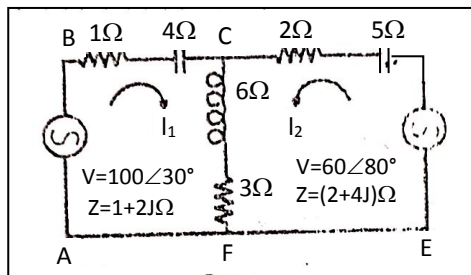
[उत्तर – 5 ओह्म, 1.25 वाट]

11. संलग्न चित्र में I की गणना कीजिये।



[उत्तर – शून्य]

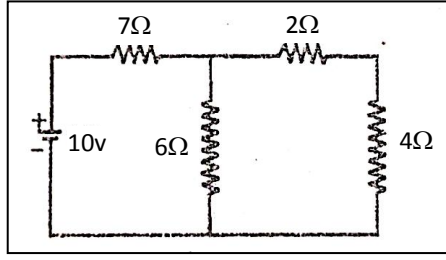
12. अध्यारोपण प्रमेय का उपयोग करके चित्र में प्रदर्शित नेटवर्क की BC शाखा में धारा की गणना करो।



[उत्तर – $(15.3 + 5.8j)$]

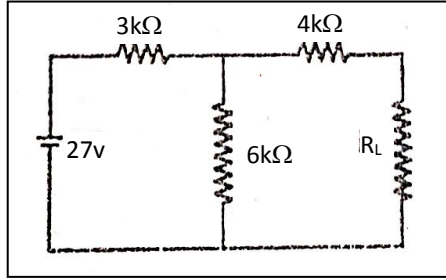
13. चित्र में प्रदर्शित परिपथ के लिये व्युत्क्रम प्रमेय सिद्ध करो।

विद्युत धारा व
जैव विद्युत



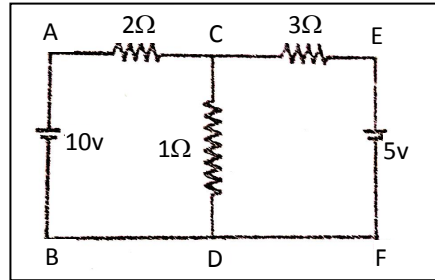
टिप्पणी

14. चित्र में प्रदर्शित परिपथ में R_L का वह मान ज्ञात करो जबकि अधिकतम सामर्थ्य स्थानान्तरित होती है। अधिकतम सामर्थ्य का मान भी ज्ञात करो।



[उत्तर – $6\text{ k}\Omega$, 0.0135 वाट]

15. चित्र में प्रदर्शित परिपथ में अध्यारोपण प्रमेय का उपयोग करके CD शाखा में धारा की गणना करो।



[उत्तर – 3.635 ऐम्पियर]

16. 5.0 हेनरी प्रेरकत्व तथा 1.0 ओह्म प्रतिरोध का 2 वोल्ट की बैटरी के साथ जोड़ा जाता है। गणना कीजिए—

- (i) परिपथ का समय नियतांक, (ii) परिपथ में स्थापित होने वाली अधिकतम धारा, (iii) बैटरी जोड़ने के 5.0 सेकण्ड बाद परिपथ में धारा, (iv) बैटरी जोड़ने के 5.0 सेकण्ड बाद परिपथ में धारा वृद्धि की दर तथा (v) अधिकतम धारा स्थापित होने पर कुण्डली में संचित चुम्बकीय ऊर्जा।

[उत्तर – (i) 5.0 सेकण्ड, (ii) 2.0 ऐम्पियर, (iii) 1.264 ऐम्पियर,
(iv) 0.147 ऐम्पियर/सेकण्ड, (v) 10 जूल]

टिप्पणी

17. 120 वोल्ट का डी. सी. स्रोत उस परिपथ में लगाया जाता है जिसमें 10 हेनरी प्रेरकत्व व 5 ओह्म प्रतिरोध की एक कुण्डली तथा 5 ओह्म ओह्मीय प्रतिरोध जुड़ा है। धारा प्रवाहित करने के 1 सेकण्ड बाद परिपथ में धारा तथा उस क्षण कुण्डली के सिरों पर विभवान्तर ज्ञात कीजिए।
[उत्तर – (i) 7.584 एम्पियर, (ii) 82.08 वोल्ट]
18. 0.1 μF धारिता के संधारित्र को 20 वोल्ट विभव से आवेशित किया गया है। यदि इसे 10 मेगा ओह्म प्रतिरोध से निरावेशित किया जाता है, तो कितने समय बाद इसका विभव 10 वोल्ट होगा?
[उत्तर – 0.693 सेकण्ड]
19. 1 μF धारिता के एक आवेशित संधारित्र को एक उच्च प्रतिरोध के साथ विसर्जित किया जाता है। यदि संधारित्र के आधे आवेश के क्षरण में 10 सेकण्ड का समय लगता है तो प्रतिरोध के मान की गणना करो।
[उत्तर – 14.43 मेगा-ओह्म]
20. 0.1 माइक्रो फ़ैरड धारिता संधारित्र को आवेशित करके 10 मेगा-ओह्म प्रतिरोध के द्वारा अनावेशित किया जाता है। कितने समय में संधारित्र का विभव, प्रारम्भिक विभव का आधा हो जायेगा? [उत्तर – 0.693 सेकण्ड]
21. 2 μF धारिता के एक संधारित्र को 4 मेगा-ओह्म प्रतिरोध के साथ आवेशित किया जाता है। कितने समय पश्चात् संधारित्र की ऊर्जा अधिकतम ऊर्जा की आधी हो जावेगी?
[उत्तर – 9.82 सेकण्ड]
22. किसी दोलनी विद्युत परिपथ में $L = 0.3$ हेनरी एवं $C = 30$ माइक्रो फ़ैरड। प्रतिरोध के कितने अधिकतम मान के लिए परिपथ दोलनी होगा?
[उत्तर – 200 ओह्म]
23. एक LCR परिपथ में 25 μF का संधारित्र, 1 μH का प्रेरकत्व तथा 2.0 ओम का प्रतिरोध जोड़े गये हैं। परिपथ की दोलनी आवृत्ति तथा गुणता कारक Q की गणना कीजिए। [उत्तर – 31.8 हर्ट्ज, 100]
24. एक परिपथ में 2.0 माइक्रो फ़ैरड को संधारित्र 110 वोल्ट तथा 50 हर्ट्ज आवृत्ति के प्रत्यावर्ती स्रोत से जुड़ा है। ज्ञात करो – (i) धारिता प्रतिघात, (ii) परिपथ में धारा का मान, (iii) वोल्टेज व धारा के मध्य कलान्तर, (iv) परिपथ में औसत व्यय सामर्थ्य।
[उत्तर – (i) 1592.4 ओह्म, (ii) 0.069 एम्पियर, (iii) धारा, वोल्टेज से 90° अग्रगामी, (iv) शून्य]
25. यदि K^+ आयनों की सान्द्रता कोशिका के अन्दर व बाहर क्रमशः 300 मोल/लिटर तथा 20 मोल/लिटर है तो K^+ आयन के लिए क्रियात्मक विभव की गणना कीजिए। ($\log_{10} 15 = 1.761$) [उत्तर – 10.39 mV]

26. यदि K^+ आयनों की कोशिका के अन्दर व बाहर सान्द्रता क्रमशः 300 मोल/लिटर तथा 20 मोल/लिटर है तथा स्थिर विभव -60 mV है तो आयनों का प्रवाह किस दिशा में होगा : अन्दर की ओर अथवा बाहर की ओर ?
[उत्तर – अन्दर की ओर]

विद्युत धारा व
जैव विद्युत

टिप्पणी

3.40 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. Berkley Physics Course, Electricity and Magnetism Ed. E. M. Purcell McGraw Hill.
2. Physics Volume 2, D. Halliday and R. Resnick
3. Introduction to Electrodynamics: D.J. Griffiths, 4th Edition, Printice Hall.
4. Electricity and Magnetism: S.S. Atwood Dover.
5. Electrodynamics: Emi Cossor and Bassin Lorraine, Asahi Shimbunsha Publishing Ltd.
6. From Neuron to Brain: Kuffler and Nicholas, Sinauer Associates, Inc Pub. Sunderlan Massachusetts.
7. Schaums Outline of Beginners Physics-II: Electricity and Magnetism.

इकाई 4 विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति (Motion of Charged Particles in Electric and Magnetic Fields)

संरचना (Structure)

- 4.0 परिचय
- 4.1 उद्देश्य
- 4.2 गुरुत्वीय, वैद्युत तथा चुम्बकीय बल
- 4.3 त्वरक क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र एवम् एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण
 - 4.3.1 प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण
- 4.4 इलेक्ट्रॉन गन
- 4.5 विसर्जन नलिका
- 4.6 रैखिक त्वरित्र
- 4.7 विक्षेपण क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र
- 4.8 कैथोड किरण नलिका तथा दोलनलेखी
- 4.9(a) CRO की सुग्राहिता
- 4.9(b) तीव्र संग्राही कम्पनदर्शी
 - 4.10 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण
 - 4.11 180° चुम्बकीय फोकसन या 180° चुम्बकीय विक्षेपण या संवेग वरणक
 - 4.12 नाभिकीय कणों के ऊर्जा मापन में नाभिकीय कणों की वक्रता
 - 4.13 साइक्लोट्रॉन का सिद्धान्त
 - 4.14 परस्पर लम्बवत् वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में आवेशित कण
 - 4.15 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों का प्रभाव
 - 4.16 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण : धन किरणें तथा थॉमसन परवलय विधि तथा आइसोटोप की खोज
 - 4.17 द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफी के तत्व
 - 4.18 इलेक्ट्रॉन का विशिष्ट आवेश $\frac{e}{m}$ ज्ञात करने की थॉमसन विधि
 - 4.19 वेग वरणक
 - 4.20 चुम्बकीय फोकसिंग (लेंस) का सिद्धान्त
 - 4.21 आंकिक उदाहरण
 - 4.22 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 4.23 सारांश
 - 4.24 मुख्य शब्दावली
 - 4.25 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 4.26 सहायक पाठ्य सामग्री

4.0 परिचय (Introduction)

इस इकाई में हम विद्युत् एवं चुम्बकीय क्षेत्रों में आवेशित कणों की गति का अध्ययन करेंगे। साथ ही कैथोड किरण कम्पनदर्शी और द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफी के अवयवों का भी अध्ययन करेंगे तथा इनके उपयोगों का विश्लेषण करेंगे। किसी आवेश के कारण वह क्षेत्र जिसमें किसी बिन्दु पर कोई अन्य आवेश एक बल का अनुभव करता है, विद्युत् क्षेत्र कहलाता है। इस इकाई में उपकरणों के वर्णन की अपेक्षा उनके यान्त्रिकीय पक्ष पर अधिक ध्यान दिया गया है।

टिप्पणी

4.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- त्वरक क्षेत्र के रूप में विद्युत् क्षेत्र, इलेक्ट्रॉन गन, विसर्जन नलिका, रेखीय त्वरक, विद्युत् क्षेत्र विक्षेपक क्षेत्र के रूप में व्याख्या की गई है।
- CRO, CRO की सुग्राहिता, अनुप्रस्थ \vec{B} क्षेत्र 180° विचलन, द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ तथा वेग वरणक को समझाया है।
- नाभिकीय कणों की ऊर्जा मापन हेतु कणों के पथों की वक्रता पर प्रकाश किया है।
- साइक्लोट्रॉन का सिद्धान्त तथा कार्यविधि को समझाया गया है।
- द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ के मूल तत्व तथा चुम्बकीय फोकस का सिद्धान्त की व्याख्या की गई है यह समझ पाएंगे।

4.2 गुरुत्वीय, वैद्युत तथा चुम्बकीय बल (Gravitational, Electric and Magnetic Forces)

न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार बल को रेखीय संवेग में परिवर्तन की दर से परिभाषित किया जाता है, अर्थात् $F = \frac{dp}{dt}$, बहुत से ज्ञात बलों में गुरुत्वीय बल, वैद्युत बल तथा चुम्बकीय बल मूल तथा अत्यन्त प्रचलित बल हैं।

गुरुत्वीय बल (Gravitational Force) – न्यूटन के गुरुत्वीय नियम के अनुसार, “ब्रह्माण्ड का प्रत्येक कण प्रत्येक अन्य कण को आकर्षित करता है।” इसके अनुसार, यदि r दूरी पर रखे दो कणों के द्रव्यमान m_1 तथा m_2 हों, तो

$$\text{गुरुत्वीय बल } F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \text{ (आकर्षण बल)}$$

जहाँ G एक सार्वत्रिक नियतांक (universal constant) है तथा इसका मान $G = 6.67 \times 10^{-11}$ न्यूटन/मी²/किग्रा² होता है। वेक्टर रूप में यदि m_1 के सापेक्ष m_2 का स्थिति वेक्टर \vec{r} हो, तो

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

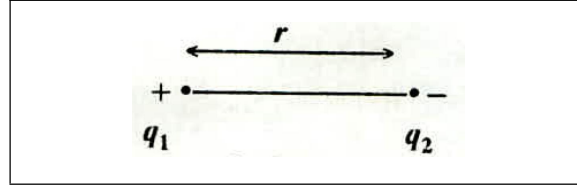
टिप्पणी

जहाँ $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, r के अनुदिश एकांक वेक्टर है। गुरुत्वीय बल मूलतः अत्यन्त मुख्य बल है जैसा निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट है

(i) हम पृथ्वी पर केवल गुरुत्वीय बल के कारण ही रह रहे हैं। पृथ्वी पर वायुमण्डल की उपस्थिति भी गुरुत्वीय बल के कारण है। वायुमण्डल की अनुपस्थिति में पृथ्वी पर कोई जीवन सम्भव नहीं है।

(ii) पृथ्वी तथा अन्य ग्रह, सूर्य के चारों ओर गुरुत्वीय बल के कारण ही घूमते हैं। इस बन्धन के कारण ही पृथ्वी को सूर्य से ऊष्मा तथा प्रकाश प्राप्त होता है।

वैद्युत बल (Electric Force) – कूलम्ब के नियम के अनुसार आवेशों q_1 तथा q_2 के बीच r दूरी पर स्थित वैद्युत बल



चित्र क्र. 4.1: कूलम्ब का नियम

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

जहाँ k एक समानुपातिक नियतांक है। इस परिणाम को वेक्टर के रूप में व्यक्त करने पर

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \quad \dots (1)$$

यहाँ F_{21} , आवेश q_1 के कारण q_2 पर बल तथा \hat{r}_{21} आवेश q_1 से आवेश q_2 की दिशा के अनुदिश एकांक वेक्टर है।

MKS (SI) पद्धति में, आवेश का मात्रक कूलम्ब (संकेत C) तथा नियतांक $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ होता है जहाँ ϵ_0 निर्वात विद्युतशीलता (permittivity of free space) कहलाती है तथा इसका मान

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{12} C^2 / Nm^2 = 8.85 \text{ फैरड/मी}$$

$$\text{तथा } k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 \text{ न्यूटन मीटर}^2 / \text{कूलम्ब}^2$$

$$1 \text{ कूलम्ब} = \frac{1}{100} e.m.u. = 3 \times 10^9 e.s.u. \text{ अथवा स्थैत कूलम्ब}$$

चुम्बकीय बल (Magnetic Force) - चुम्बकीय क्षेत्र B में v वेग से गतिमान q आवेश के कण पर आरोपित चुम्बकीय बल का मान लॉरेन्ज बल कहलाता है।

$$F_m = q(\vec{v} \times B)$$

जहाँ q कूलम्ब में, वेग \vec{v} मीटर/से में तथा चुम्बकीय क्षेत्र B वेबर/मी² अथवा टेस्ला में मापा गया है।

वैद्युत तथा चुम्बकीय बल सम्मिलित रूप में वैद्युत-चुम्बकीय बल (electromagnetic forces) कहलाते हैं।

टिप्पणी

4.3 त्वरक क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र एवम् एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण (Electric Field as Uniform Accelerating Field and Charged Particle in Uniform Constant Electric Field)

माना एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता E है तथा माना यह q आवेश के आवेशित कण पर क्रिया करता है। चूँकि किसी वैद्युत क्षेत्र में एकांक आवेश पर बल का मान उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को प्रदर्शित करता है अतः F तीव्रता के वैद्युत क्षेत्र में q आवेश द्वारा अनुभव किया गया बल

$$F = q \cdot E \quad \dots (1)$$

यदि इस बल द्वारा उत्पादित त्वरण a तथा आवेशित कण का द्रव्यमान m हो तो, न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\text{बल} = \text{द्रव्यमान} \times \text{त्वरण}$$

$$F = ma \quad \dots (2)$$

(एक समान से तात्पर्य है कि स्थिति से स्वतन्त्र तथा स्थिर से तात्पर्य है समय से स्वतन्त्र)

$$F = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad \dots (3)$$

जहाँ r किसी समय t पर कण का विस्थापन है।

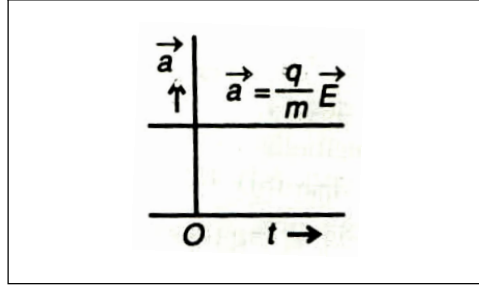
समीकरणों (1), (2) तथा (3) से

$$q \cdot E = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{qE}{m} \quad \dots (4)$$

यह E क्षेत्र में q आवेश का त्वरण है तथा एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण का त्वरण भी a होगा, जैसा चित्र 4.2 में प्रदर्शित है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.2: स्थिर वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण का त्वरण

समीकरण (4) को समाकलित करने पर

$$\int \frac{d^2r}{dt^2} dt = \int \frac{qE}{m} dt$$

कण का वेग $\frac{dr}{dt} = \vec{v} = \frac{qE}{m} \cdot t + C_1$

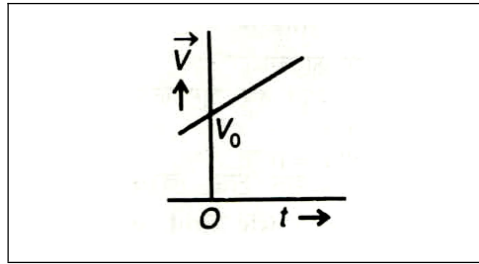
जहाँ C_1 समाकलन का नियतांक है तथा प्रारम्भिक प्रतिबन्धों (initial conditions) से इसका मान प्राप्त किया जा सकता है।

माना प्रारम्भ में, $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$; उपर्युक्त समीकरण में रखने पर

$$C_1 = \vec{v}_0$$

अतः $\frac{dr}{dt} = \vec{v} = \frac{qE}{m} t + \vec{v}_0$... (5)

अतः आवेशित कण का वेग समय का रैखिक फलन है, अथवा दूसरे शब्दों में, वेग, समय के सापेक्ष रैखिक रूप में बढ़ता है, जैसा चित्र 4.3 में प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 4.3: स्थिर विद्युत क्षेत्र में वेग, समय ग्राफ

कण का विस्थापन प्राप्त करने के लिए समीकरण (5) को पुनः समाकलित किया जाता है। अतः

$$\int \frac{dr}{dt} \cdot dt = \int \frac{qE}{m} t \cdot dt + \int \vec{v}_0 dt$$

अथवा कण का विस्थापन

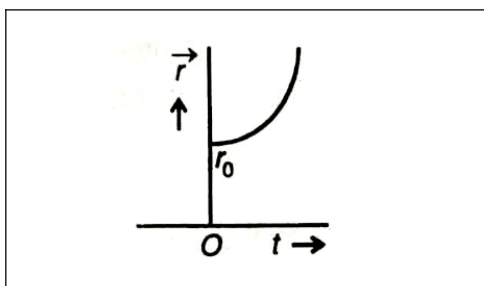
$$r = \frac{qE}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + C_2$$

जहाँ C_2 एक अन्य समाकलन नियतांक है। इसका मान परिकलित करने के लिए, माना $t=0$ पर प्रारम्भिक स्थिति $r=r_0$, विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

अतः $C_2 = r_0$

अतः $r = \frac{qE \cdot t^2}{2m} + \vec{v}_0 t + r_0 \quad \dots (6)$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि विस्थापन समय के सापेक्ष परवलायाकार रूप में परिवर्तित होता है। यह चित्र 4.4 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र क्र. 4.4: स्थिर विद्युत क्षेत्र में विस्थापन-समय का ग्राफ

परन्तु, यदि कण निर्देशांकों के मूल बिन्दु से विराम अवस्था में हो तो

$$\vec{v}_0 = r_0 = 0$$

तथा समीकरण (6) से

$$r = \frac{qE}{2m} t^2 \quad \dots (7)$$

अब दो मुख्य स्थितियाँ होंगी,

स्थिति I. यदि वैद्युत क्षेत्र कणों की गति की दिशा के अनुदिश आरोपित हो (अनुदैर्घ्य वैद्युत क्षेत्र) (Longitudinal Electric Field) :

माना वैद्युत क्षेत्र x -अक्ष के अनुदिश कार्य करता है तथा आवेशित कण भी इसी दिशा में गतिशील है। अतः समय $t=0$ पर

$$v_0 = v_x \text{ तथा } x = x_0$$

अब चूँकि बल केवल x -अक्ष के अनुदिश कार्य करता है अतः न्यूटन के द्वितीय नियम से त्वरण भी केवल x -अक्ष की दिशा में ही होगा तथा y व z -अक्षों के

अनुदिश कोई त्वरण नहीं होगा। अतः समी. (4) $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{qE}{m}$ के कार्तीय अवयव

होंगे

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{qE_x}{m} && \dots(a) \\ a_y &= 0 && \dots(b) \\ a_z &= 0 && \dots(c) \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

समीकरण 8(a) को समाकलित कर $t = 0$ पर $v = v_{0x}$ का उपयोग करने पर, x -अक्ष के अनुदिश कण का वेग होगा

टिप्पणी

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t \quad \dots (9)$$

तथा $t = 0$ पर $x = x_0$ प्रतिबन्ध सहित समीकरण (9) का समाकलन करने पर विस्थापन

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \dots (10)$$

$$\text{जहाँ } a_x = \frac{qE_x}{m}$$

[समीकरण 8(a)]

स्थिति II. यदि वैद्युत क्षेत्र कणों की गति की लम्बवत् दिशा में आरोपित हो (अनुप्रस्थ वैद्युत-क्षेत्र) (Transverse Electric Field) :

माना एक आवेशित कण x -अक्ष की दिशा में प्रारम्भिक एकसमान v_{0x} से गति कर रहा है तथा एक निश्चित वैद्युत क्षेत्र y -अक्ष की दिशा में आरोपित है। अतः समय $t = 0$ पर

$$v_x = v_{0x}, v_y = v_z = 0 \text{ तथा } x = y = z = 0.$$

$$\text{पुनः } E_x = E_z = 0 \text{ तथा } E_y = E.$$

चूँकि x तथा z दिशाओं के अनुदिश कोई बल कार्य नहीं कर रहा है अतः इन दिशाओं में कोई त्वरण नहीं होगा। अतः त्वरण के कार्तीय अवयव होंगे,

$$a_x = a_z = 0 \text{ तथा } a_y = \frac{qE_y}{m} = \frac{qE}{m}.$$

परन्तु x -अक्ष की दिशा में कण के प्रारम्भिक वेग का एक परिमित मान है अतः यह x -दिशा में समान वेग से गति करता रहेगा। अतः वेग घटक निम्न होंगे —

$$v_x = v_{0x}, v_y = \frac{qE}{m} t \text{ तथा } v_z = 0.$$

तथा विस्थापनों के मान होंगे—

$$x = v_{0x} t, y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \text{ तथा } z = 0.$$

x तथा y के समीकरणों से t का विलोपन करने पर कण द्वारा प्रदर्शित, वास्तविक पथ का समीकरण

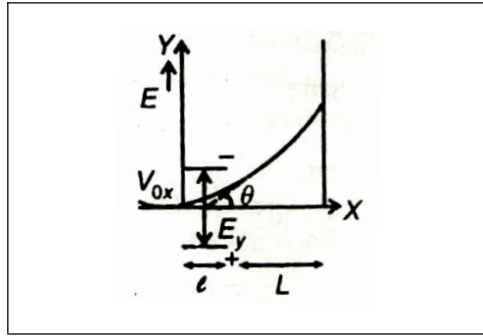
$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

$$= \frac{qE}{2mv_{0x}^2} \cdot x^2$$

अथवा $x^2 = \frac{2mv_{0x}^2}{qE} \cdot y = Ky$

जहाँ $K = \frac{2mv_{0x}^2}{qE}$ एक नियतांक है क्योंकि m, v_{0x}, q तथा E सभी नियतांक हैं। यह समीकरण एक परवलय (parabola) को निरूपित करता है।

अतः एकसमान आरम्भिक वेग से तथा एक स्थिर अनुप्रस्थ वैद्युत क्षेत्र के अन्तर्गत गति कर रहे आवेशित कण द्वारा चलित पथ परवलय होता है, जैसा चित्र 4.5 में प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 4.5: स्थिर विद्युत क्षेत्र एवं अनुप्रस्थ वैद्युत क्षेत्र की स्थिति

4.3.1 प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण (Charged Particle in Alternating Electric Field)

प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र की स्थिति में वैद्युत क्षेत्र E समय के सापेक्ष सरल आवर्ती रूप में परिवर्तित होता है।

अतः $E = E_0 \sin \omega t$... (1)

जहाँ E_0, E का महत्तम अथवा शिखर (peak) मान तथा $\omega = 2\pi f$, वैद्युत क्षेत्र वेक्टर की कोणीय आवृत्ति है तथा f , प्रत्यावर्ती धारा में प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या अथवा इसकी आवृत्ति है।

विद्युत क्षेत्र E में q आवेश का त्वरण

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{qE}{m}$$

अतः आवेशित कण की गति के समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = qE = qE_0 \sin \omega t$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\text{अथवा} \quad a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{qE_0 \sin \omega t}{m} \quad \dots (2)$$

स्पष्ट है कि आवेशित कण का त्वरण a भी वैद्युत क्षेत्र की तरह ज्यावक्रीय (sinusoidal) रूप में परिवर्तित होता है।

समीकरण (2) का समाकलन करने पर

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 r}{dt^2} dt &= \int \frac{qE_0 \sin \omega t}{m} dt \\ &= \frac{qE_0}{m} \int \sin \omega t dt \\ &= \frac{qE_0}{m} \left(-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right) + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{या} \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{qE_0}{m\omega} \cos \omega t + C_1$$

जहाँ C_1 समाकलन नियतांक है। इसका मान ज्ञात करने के लिए माना कि आरम्भ में $t=0$ पर कण विराम में है,

$$\text{अर्थात्} \quad \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\text{अतः} \quad C_1 = \frac{qE_0}{m\omega}$$

अतः किसी क्षण t पर कण का वेग

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{qE_0}{m\omega} \cos \omega t + \frac{qE_0}{m\omega}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{dr}{dt} = \vec{v} = \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) \quad \dots (3)$$

समीकरण (3) प्रदर्शित करता है कि वेग समय का आवर्ती फलन है

$$\text{अतः} \quad 1 - \cos \omega t = 0$$

$$\cos \omega t = 1$$

$$\omega t = \pm 2n\pi \quad (\text{जहाँ } n = 0, 1, 2, \dots)$$

वेग का मान महत्तम होगा, जबकि

$$\cos \omega t = -1$$

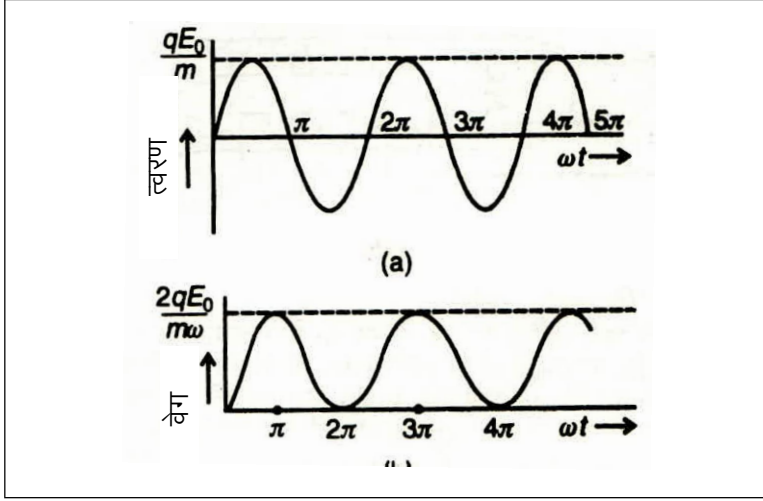
$$\text{अर्थात्} \quad \omega t = (2n+1)\pi \quad (\text{जहाँ } n = 0, 1, 2, \dots)$$

अब समीकरण (3) का समाकलन करने पर

$$\int dr = \int \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t) dt$$

$$r = \frac{qE_0}{m\omega} t - \frac{qE_0}{m\omega^2} \sin \omega t + C_2$$

टिप्पणी

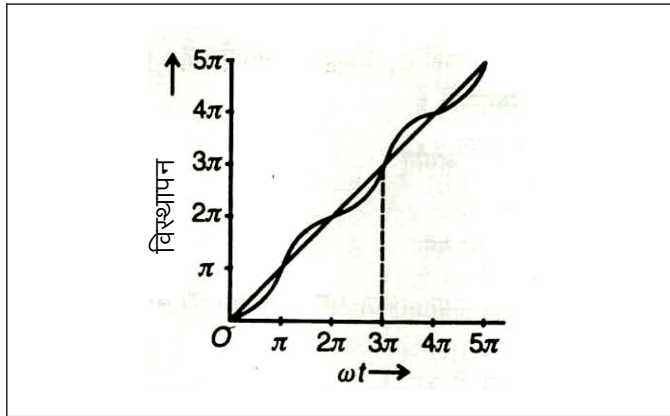


चित्र क्र. 4.6: त्वरण का ωt के सापेक्ष परिवर्तन

जहाँ C_2 एक अन्य समाकलन नियतांक है। यदि प्रारम्भ में $t=0$ पर $r=0$ तो $C_2=0$, अतः

$$\begin{aligned} r &= \frac{qE_0}{m\omega} t - \frac{qE_0}{m\omega^2} \sin \omega t \\ &= \frac{-qE_0}{m\omega^2} (\sin \omega t - \omega t) \end{aligned} \quad \dots (4)$$

समीकरण (4) में प्रथम पद का परिणाम ज्यावक्रीय रूप में परिबद्ध होता है।



चित्र क्र. 4.7: वेग का ωt के सापेक्ष परिवर्तन

इसका कार्य सिद्धान्त दो तथ्यों पर आधारित है—

(1) खोखले आवेशित चालक के अन्दर वैद्युत क्षेत्र शून्य होता है अर्थात् आवेशित कण की गति एक समान होती है।

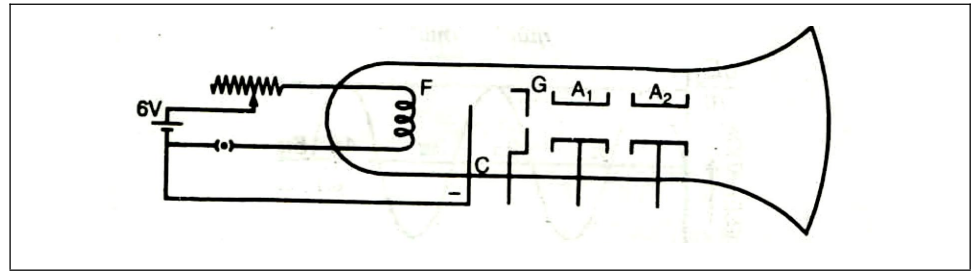
(2) प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र के अर्द्ध चक्र में आवेशित कण त्वरित होता है तथा शेष अर्द्ध चक्र में मन्दित होता है।

टिप्पणी

अतः यदि आवेशित कण को धनात्मक अर्द्ध चक्र में जबकि वह त्वरित होता है विद्युत क्षेत्र से गुजारा जाता है तथा शेष ऋणात्मक अर्द्ध चक्र में खोखले बेलनाकार खलक से गुजारा जाये तो केवल कण की गति त्वरित होगी। अतः अनेक बार गुजारकर अपेक्षाकृत कम विभवान्तर का उपयोग करके इसकी ऊर्जा बहुत अधिक बढ़ायी जा सकती है।

4.4 इलेक्ट्रॉन गन (Electron Gun)

इलेक्ट्रॉन गन एक ऐसी युक्ति है जिसमें एक पतला तथा तीव्रगामी इलेक्ट्रॉन पुंज प्राप्त किया जा सकता है। इलेक्ट्रॉन गन की संरचना में थोरियम ऑक्साइड लेपित टंगस्टन का एक तन्तु F होता है जिसमें बैटरी से धारा प्रवाहित करके टंगस्टन धातु के कैथोड C को गर्म किया जाता है। तापयनिक उत्सर्जन के कारण कैथोड C से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित होते हैं। इन इलेक्ट्रॉनों को एक पतले किरण पुंज के रूप में प्राप्त करने के लिये कैथोड C एक सिलिंडर G द्वारा घिरा रहता है जिसे ग्रिड कहते हैं। ग्रिड G को कैथोड के सापेक्ष ऋणात्मक विभव पर रखते हैं जिससे कैथोड से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन ग्रिड से प्रतिकर्षित होकर एक पतले किरण पुंज के रूप में प्राप्त होते हैं। ग्रिड G पर विभव बदलकर इससे निकलने वाले इलेक्ट्रॉनों की संख्या बदली जा सकती है। ग्रिड से निकलकर इलेक्ट्रॉन पुंज बेलनाकार ऐनोडों A_1 , व A_2 के बीच से होकर गुजरते हैं जिनकी अक्ष के अनुदिश छिद्र होता है। दोनों ऐनोड A_1 , A_2 कैथोड के सापेक्ष धनात्मक विभव पर रखे जाते हैं जिससे इलेक्ट्रॉन त्वरित हो जाते हैं तथा तीव्र व पतला इलेक्ट्रॉन पुंज प्राप्त होता है।



चित्र क्र. 4.8: इलेक्ट्रॉन गन का
उपयोग तीव्रगामी एवं पतला इलेक्ट्रॉन पुंज प्राप्त करने के लिये

4.5 विसर्जन नलिका (Discharge Tube)

चित्र 4.9 में विसर्जन नली प्रदर्शित है। यह लगभग 50 सेमी लम्बी तथा 5 सेमी व्यास की काँच की एक बेलनाकार नली है जिसके दोनों सिरों पर ऐल्युमिनियम की वृत्ताकार प्लेटों के रूप में दो इलेक्ट्रोड C (कैथोड) तथा A (ऐनोड) लगे हैं। इन इलेक्ट्रोडों के बीच प्रेरण कुण्डली की सहायता से लगभग 10,000 वोल्ट का

विभवान्तर लगाया जाता है। इस नली के बगल में लगी एक पतली नली का सम्बन्ध एक वायु चूषक पम्प (vacuum pump) से कर देते हैं जिसकी सहायता से नली में भरी वायु (या गैस) का दाब घटाया जाता है।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में
आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

नली के अन्दर की गैस का दाब धीरे-धीरे कम करने पर उसमें निम्नलिखित परिवर्तन दिखायी देते हैं –

(i) जब नली में भरी गैस सामान्य वायु-दाब पर होती है तो नली से विद्युत विसर्जन नहीं होता है।

(ii) जब नली के अन्दर गैस का दाब पारे के 10 मिमी से कम (लगभग 4 मिमी) हो जाता है तो दोनों इलेक्ट्रोडों के समीप थोड़ी-सी चमक दिखायी देती है, किन्तु नली के मध्य के सम्पूर्ण भाग में अन्धकार होता है [चित्र 4.9(a)]। इस विसर्जन को 'अदीप्त अथवा अन्धकारमय विसर्जन' (dark discharge) कहते हैं।

(iii) जब गैस का दाब लगभग 1 मिमी होता है तो नली की लगभग पूर्ण लम्बाई में प्रकाश की एक अविच्छिन्न पट्टी दिखायी देती है जिसको धन-स्तम्भ (positive column) कहते हैं [चित्र 4.9(b)]। धन स्तम्भ का रंग नली में भरी गैस की प्रकृति पर निर्भर करता है। धन स्तम्भ का रंग नाइट्रोजन के लिए लाल हाइड्रोजन के लिए नीला, कार्बन डाइऑक्साइड के लिए श्वेत, क्लोरीन के लिए हरा, निऑन के लिए गहरा लाल होता है। इसी सिद्धान्त पर भिन्न-भिन्न रंगों में विज्ञापन देने के लिए नलियाँ बनायी जाती हैं।

(iv) जब गैस का दाब लगभग 0.1 मिमी होता है तो (a) धन स्तम्भ एनोड की ओर खिसककर कुछ छोटा हो जाता है तथा अनेक धारियों (striations) में विभक्त हो जाता है। धारियाँ प्रकाश की चकतियों जैसी दिखायी देती हैं। इन चकतियों के बीच अन्धकार रहता है। (b) कैथोड पर अब हल्का-सा नीला प्रकाश दिखायी देता है जिसको कैथोड दीप्ति (cathode glow) कहते हैं। (c) कैथोड दीप्ति तथा धन स्तम्भ की प्रथम चकती के बीच एक अन्धकारमय स्थान रहता है जिसे फ़ैराडे का अदीप्त भाग (Faraday's dark space) कहते हैं [चित्र 4.9(c)]।

(v) जब गैस का दाब 0.1 मिमी से कम हो जाता है तो कैथोड दीप्ति, कैथोड को छोड़कर आगे बढ़ जाती है तथा कैथोड व कैथोड दीप्ति के बीच एक अन्य अन्धकारमय क्षेत्र दिखायी देता है जिसको 'क्रुक का अदीप्त भाग' (Crooke's dark space) कहते हैं। कैथोड दीप्ति तथा धन-स्तम्भ के बीच में फ़ैराडे का अन्धकारमय क्षेत्र बना रहता है, किन्तु इसकी लम्बाई अब कुछ अधिक हो जाती है [चित्र 4.9(d)]।

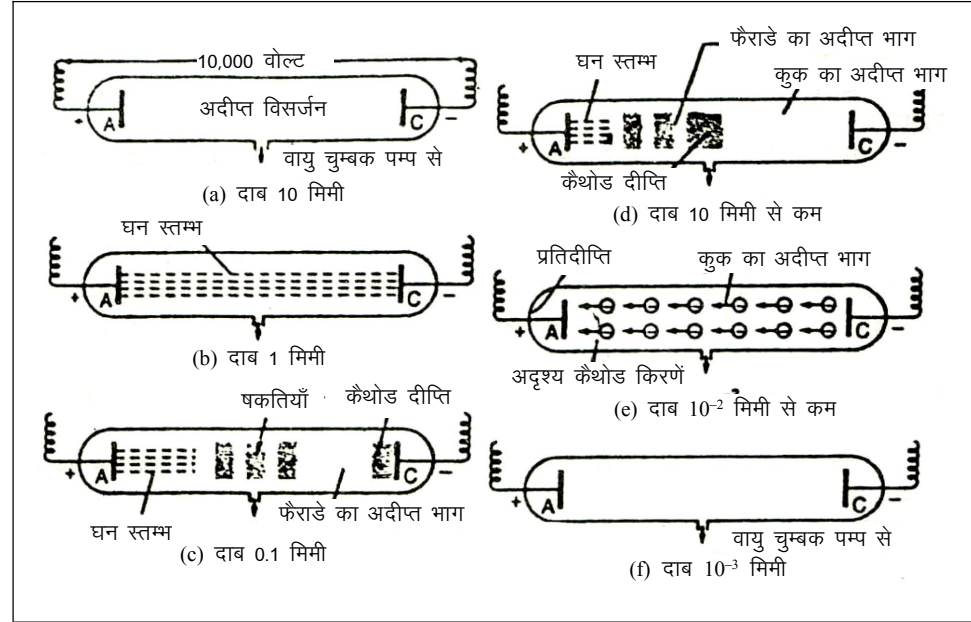
(vi) जब गैस का दाब 10^{-2} मिमी होता है [चित्र 4.9(e)], तो सम्पूर्ण नली में क्रुक का अदीप्त भाग ही फैल जाता है तथा फ़ैराडे का अन्धकारमय भाग व चकतियाँ, एनोड की ओर चलकर अदृश्य हो जाती हैं। इस स्थिति में एनोड के पीछे का नली का भाग प्रकाश से चमकने लगता है। इस प्रकाश का रंग, नली के काँच की प्रकृति पर निर्भर करता है जैसे सोडा-काँच की नली में पीला-हरा, सीसा-काँच की नली में हल्का नीला। वास्तव में, इस स्थिति में नली के अन्दर कैथोड से इसके तल के लम्बवत् कुछ अदृश्य किरणें निकलती हैं जो एनोड के

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

पीछे के काँच से टकराकर प्रतिदीप्ति उत्पन्न करती हैं। चूँकि यह किरणें कैथोड के तल से निकलती हैं, अतः इन अदृश्य किरणों को **कैथोड किरणें** (cathode rays) कहते हैं।

(vii) जब गैस का दाब 10^{-3} मिमी से कम होता है तो नली में विद्युत विसर्जन समाप्त हो जाता है [चित्र 4.9(f)]।



चित्र क्र. 4.9: विद्युत विसर्जन नली

4.6 रैखिक त्वरित्र (Linear Accelerator)

वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों के व्यवहार पर आधारित मुख्य अनुप्रयोग, उच्च ऊर्जा के कणों को उत्पन्न करने के लिये त्वरकों के निर्माण में है। त्वरित्र वह उपकरण है जो आवेशित कणों की ऊर्जा में वृद्धि करते हैं। त्वरित्र दो प्रकार के होते हैं –

- (1) रैखिक त्वरित्र
- (2) चक्रीय त्वरित्र

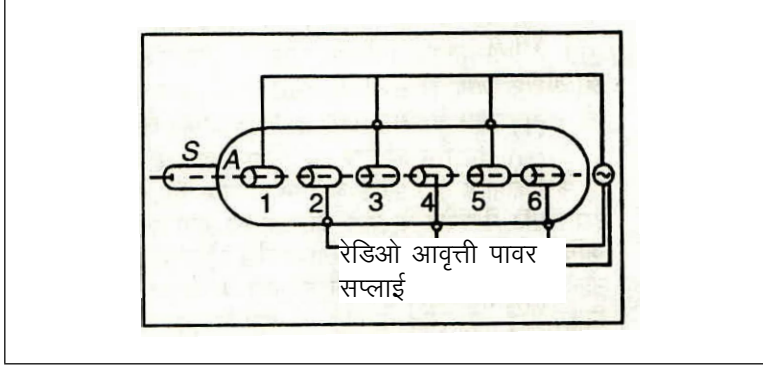
रैखिक त्वरित्र में यदि निर्वात नलिका में आवेशित कण को क्रमिक रूप से त्वरक विभवान्तर से होकर गुजारा जायें तो आवेशित कण की ऊर्जा बढ़ जाती है।

चक्रीय त्वरित्र में आवेशित कण को त्वरक विभवान्तर से गुजारकर चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा वृत्तीय पथ से घुमाकर पुनः उसी त्वरक विभवान्तर से गुजारा जाता है अतः त्वरक विभवान्तर से आवेशित कण की ऊर्जा बढ़ जाती है।

संरचना – रैखिक त्वरित्र की सैद्धान्तिक संरचना चित्र 4.10 के अनुसार है इसमें निर्वात नली के अन्दर एक रेखा में अनेक खोखले बेलनाकार चालक प्रयुक्त किये जाते हैं जिनकी लम्बाई क्रमिक रूप से बढ़ती जाती है। एकान्तर क्रम में सभी

टिप्पणी

बेलनों (1, 3, 5, ...) को रेडियो आवृत्ति पावर सप्लाई के एक सिरे से तथा शेष बेलनों को (2, 4, 6, ...) दूसरे सिरे से जोड़ा जाता है। S धन आवेशित कणों का स्रोत व A ऐनोड है। स्पष्ट है कि यदि आवेशित कण को धनात्मक अर्द्ध-चक्र में जबकि वह त्वरित होता है विद्युत क्षेत्र से गुजारा जाये तथा शेष ऋणात्मक अर्द्ध चक्र में खोखले बेलनाकार चालक से गुजारा जाये तो कण की गति त्वरित होगी। इसी प्रकार अनेक बार गुजारकर अपेक्षाकृत कम विभवान्तर का उपयोग करके भी इससे बहुत अधिक ऊर्जा बढ़ायी जा सकती है।



चित्र क्र. 4.10: रैखिक त्वरित्र

कार्य विधि – रैखिक त्वरित्र की कार्य प्रणाली निम्न दो तथ्यों पर आधारित है –

- (1) खोखले चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है अतः चालकों के अन्दर आवेशित कण एकसमान वेग से गति करते हैं।
- (2) प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र के आधे चक्कर में आवेशित कण त्वरित होते हैं तथा शेष आधे चक्कर में बेलन के अन्दर से गुजरते हैं।

जब स्रोत S से उत्सर्जित धनावेशित कण ऐनोड A द्वारा त्वरित होकर बेलन 1 में प्रवेश करता है तब वह कण बेलन के अन्दर एकसमान वेग से गति करता है। जब बेलन 1 से कण बाहर निकलता है तो बेलन 1 धनात्मक विभव पर बेलन 2 ऋणात्मक विभव पर आ जाते हैं जिससे दोनों बेलनों के बीच उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E द्वारा कण की ऊर्जा बढ़ती है। इसी प्रकार आवेशित कण पुनः बेलन 2 में एकसमान वेग से गति कर जब बाहर निकलता है तो बेलन 2 धनात्मक विभव पर तथा बेलन 3 ऋणात्मक विभव पर हो जाते हैं एवं कण की ऊर्जा पुनः बढ़ती है। इस प्रकार क्रिया चलती रहती है तथा अन्त में ऊर्जा बहुत अधिक बढ़ जाती है।

सिद्धान्त (Theory) – इस उपकरण में आरोपित विभव क्षेत्र के एक अर्द्ध चक्र में कण द्वारा तय की गई दूरी, बेलन की लम्बाई तथा दो क्रमागत बेलनों के बीच की दूरी के तुल्य होना चाहिये। यदि n वें बेलन की लम्बाई l_n बेलन में कण का वेग v_n तथा दौलित्र का आवर्तकाल T हो, तो

$$l_n = \frac{v_n T}{2} = \frac{v_n}{2f} \quad \dots (1)$$

टिप्पणी

जहाँ f दौलित्र की आवृत्ति है। यदि दो क्रमागत बेलनों के बीच लगाया गया विभवान्तर का शिखर मान V वोल्ट हो, तो कण की ऊर्जा में वृद्धि qV होगी अतः बेलनों के मध्य n रिक्त स्थानों से गुजरने पर कण की ऊर्जा में परिणामी वृद्धि nqV होगी।

$$\text{अतः कण की अन्तिम ऊर्जा } \frac{1}{2}mV_n^2 = nqV + k \quad \dots (2)$$

जहाँ m कण का द्रव्यमान तथा k प्रथम बेलन में प्रवेश करते समय गतिज ऊर्जा है।

$$v_n^2 = \frac{2(nqV + k)}{m}$$

$$\text{अतः } v_n = \sqrt{\frac{2(nqV + k)}{m}}$$

v_n का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$l_n = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{2(nqV + k)}{m}}$$

इस सूत्र की सहायता से n वें बेलन की लम्बाई ज्ञात की जा सकती है जिससे यह स्पष्ट है कि त्वरित्र से अधिक ऊर्जा प्राप्त करने के लिए—

- (1) आरोपित प्रत्यावर्ती विभव का शिखर मान V अधिकतम होना चाहिए।
- (2) बेलनों की संख्या अधिक होनी चाहिये।
- (3) बेलनों की लम्बाई कम करने के लिये आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर की आवृत्ति अधिक से अधिक होनी चाहिये।
- (4) यदि त्वरित्र में प्रवेश करने से पूर्व कण को वान डी ग्राफ जनित्र अथवा अन्य किसी उत्पादक द्वारा त्वरित करा लिया जाये तो अधिक ऊर्जा के कण प्राप्त किये जा सकते हैं।

सीमा — चूँकि क्रमागत बेलनों की लम्बाई में वृद्धि होती है अतः बेलनों की संख्या में अत्यधिक वृद्धि नहीं की जा सकती है। इस कारण त्वरित्र द्वारा केवल एक सीमा तक कणों की ऊर्जा बढ़ाई जा सकती है। इस त्वरित्र के साथ मुख्य कठिनाई यह है कि अधिक ऊर्जा वृद्धि के लिये इसकी लम्बाई बहुत अधिक लेनी पड़ती है इस कठिनाई को चक्रीय त्वरित्र कहते हैं।

4.7 विक्षेपण क्षेत्र की भाँति विद्युत क्षेत्र (Electrostatic Field as Deflecting Field)

माना m द्रव्यमान तथा q आवेश से आवेशित कण X -दिशा में प्रारम्भिक वेग v से गतिमान एक ऐसे क्षेत्र में प्रवेश करता है जहाँ विद्युत क्षेत्र E , कण की गति की दिशा के लम्बवत् है। यह वैद्युत क्षेत्र दो प्लेटों के मध्य V विभवान्तर लगाकर

उत्पन्न किया गया है। माना वैद्युत क्षेत्र की लम्बाई l है तथा प्लेटों की पर्दे से दूरी L है, तो

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E_y = \frac{E_d}{d}$$

इलेक्ट्रॉन पर इस आवेश के कारण लगने वाला बल

$$\begin{aligned} F_y &= qE_y \\ &= q \frac{E_d}{d} \end{aligned}$$

∴ इलेक्ट्रॉन की y -दिशा में त्वरण

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{qE_y}{m}$$

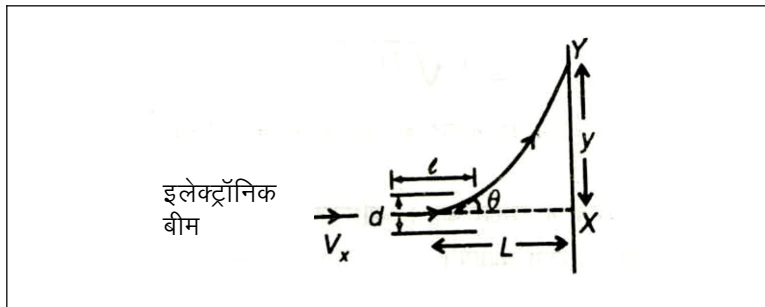
क्योंकि इलेक्ट्रॉन का y -दिशा में कोई प्रारम्भिक वेग नहीं है अतः इलेक्ट्रॉन का किसी समय t पर y दिशा में विक्षेप सूत्र

$$y = ut + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y = 0 + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

द्वारा प्रदर्शित होगा।



चित्र क्र. 4.11: एकसमान विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण का विक्षेपण

जब इलेक्ट्रॉन कैथोड से त्वरक के मध्य गतिमान है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में कमी होती है अर्थात् $\Delta U = qV_a$ इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा में यह कमी उसकी गतिज ऊर्जा में वृद्धि करती है अतः इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा में

$$\text{वृद्धि } \Delta k = \frac{1}{2} mv^2.$$

टिप्पणी

टिप्पणी

ऊर्जा संरक्षण के नियम के अनुसार,

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = qV_a, \text{ अर्थात् } v_x^2 = \frac{2qV_a}{m} \quad \dots (1)$$

l लम्बाई की प्लेटों से होकर जाने में आवेशित कण द्वारा y -अक्ष में प्राप्त अनुप्रस्थ विक्षेपण

$$y_1 = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{l}{v_x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{qEl^2}{mv_x^2}$$

$y_1 = a_y t^2$ जो कि एक परवलय का समीकरण है। वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर प्रणवता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qEl}{mv_x^2}$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{qEl}{mv_x^2}$$

यदि प्लेटों से पर्दे की दूरी L हो तो प्लेटों से पर्दे तक आने में इलेक्ट्रॉन का अनुप्रस्थ विक्षेपण

$$y_2 = L \tan \theta = L \frac{qEl}{mv_x^2}$$

अतः पर्दे पर कुल अनुप्रस्थ विस्थापन

$$y = y_1 + y_2 = \frac{qEl^2}{2mv_x^2} + L \cdot \frac{qEl}{mv_x^2} = \frac{qE}{mv_x^2} \left[\frac{l^2}{2} + Ll \right] \dots (2)$$

उपर्युक्त समीकरण से स्पष्ट है कि विद्युत क्षेत्र विक्षेप क्षेत्र की तीव्रता के समानुपाती होता है इस सिद्धान्त का उपयोग कैथोड किरण कम्पनदर्शी में किया जाता है।

4.8 कैथोड किरण नलिका तथा दोलनलेखी (Cathode Ray Tube and Oscillograph)

कैथोड किरण नलिका वह इलेक्ट्रॉनिक युक्ति है जो विद्युतीय सिग्नल को दृश्य सिग्नल में स्थान्तरित करती है जिससे एक इलेक्ट्रॉनों के पुंज का संघट्ट बिन्दु दृश्य बनाया जा सकता है तथा धाराओं के तरंग रूपों का अध्ययन किया जा सकता है।

कैथोड किरण नलिका में एक इलेक्ट्रॉनों की धारा उत्पन्न की जाती है, इसे एक संकीर्ण पुंज में फोकसित किया जाता है तथा इसे एक प्रतिदीप्त पर्दे पर संघात (impinge) कराया जाता है। जिस स्थान पर इलेक्ट्रॉन धारा संघात करती है, पर्दा चमकने लगता है तथा एक प्रकाशित धब्बा प्राप्त होता है इस इलेक्ट्रॉन

पुंज तथा इसके द्वारा पर्दे पर प्राप्त धब्बे को दो स्वतन्त्र विक्षेपक निकायों (deflector systems) की सहायता से क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशाओं में विक्षेपित किया जा सकता है तथा उत्पन्न विक्षेपण, निकाय पर आरोपित वोल्टता (अथवा धारा) के समानुपाती होता है।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

कैथोड-किरण नलिका में चार मूल अवयव होते हैं –

- (1) **इलेक्ट्रॉन गन (electron gun)** जो कि इलेक्ट्रॉनों का उत्पादन, त्वरण तथा उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों का संकीर्ण पुंज में फोकसन करती है।
- (2) **एक विक्षेपण निकाय (deflection system)** जोकि इलेक्ट्रॉन पुंज को वोल्टता अथवा धारा तरंग रूप के अनुसार **वैद्युतस्थैतिक (electrostatically)** अथवा चुम्बकीय रूप में विक्षेपित करता है।
- (3) **एक प्रतिदीप्त पर्दा (Fluorescent screen)** जिस पर इलेक्ट्रॉन पुंज संघात कर दृश्य प्रकाश का धब्बा उत्पन्न करता है।

कैथोड किरण नलिका के ये मूल भाग, एक उच्च निर्वातित, काँच के कीपाकार (funnel shaped) आवरण में आरोपित किये जाते हैं जिसके चौड़े भाग के आन्तरिक पृष्ठ पर एक प्रतिदीप्त पर्दा लेपित (coated) होता है।

- (4) **प्रसर्प जनित्र तथा समयाधार परिपथ (Sweep Generator and Time-base Circuit)**

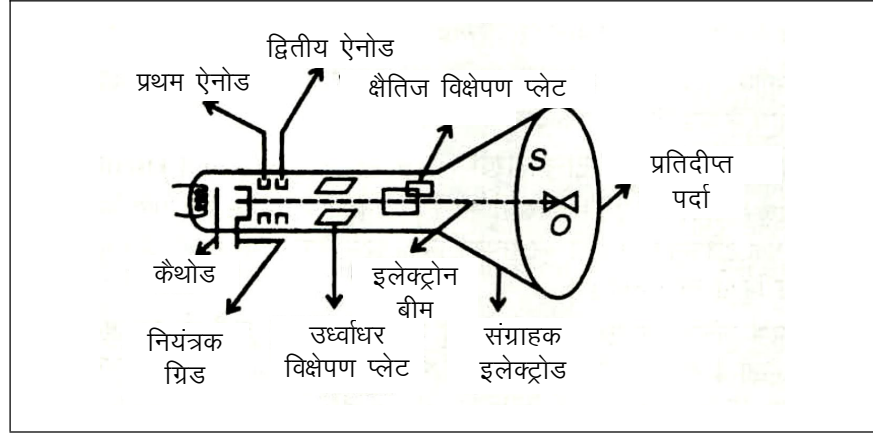
(i) **इलेक्ट्रॉन गन (The electron gun)** – कैथोड किरण नलिका में इलेक्ट्रॉन गन का उद्देश्य, पर्दे पर एक उचित घनत्व का फोकसित इलेक्ट्रॉन पुंज उत्पन्न करना है। इलेक्ट्रॉन गन में एक कैथोड, नियन्त्रक ग्रिड (control grid), त्वरक ऐनोड (accelerating anode) तथा फोकसन ऐनोड अथवा फोकसन चुम्बकीय क्षेत्र होता है। कैथोड परोक्ष तापित (indirectly heated) प्रकार का होता है तथा प्रायः एक ऐसे बेलनाकार रूप में बनाया जाता है जिसके एक सिरे पर ढक्कन लगा होता है, कैथोड के लिए उष्मक को बेलन के अन्दर रखा जाता है तथा उत्सर्जक ऑक्साइड लेपन को सिरे के ढक्कन के केवल बाह्य पृष्ठ पर रखा जाता है। नियन्त्रक ग्रिड एक अन्य बेलन होता है जो कि कैथोड बेलन से थोड़ा सा बड़ा होता है। इसके सिरे के ढक्कन के केन्द्र पर एक द्वारक होता है जैसा कि चित्र 4.12(a) में प्रदर्शित है। नियन्त्रक ग्रिड में इस द्वारक के सम्मुख एक त्वरक इलेक्ट्रोड अथवा द्वितीय ग्रिड होता है जिसमें एक या अधिक द्वारक होते हैं। त्वरक इलेक्ट्रोड को कैथोड के सापेक्ष 100 से 2000 वोल्ट तक धनात्मक विभव प्रदान किया जाता है तथा नियन्त्रक ग्रिड को कैथोड के सापेक्ष थोड़ा ऋणात्मक बनाया जाता है।

इलेक्ट्रॉन गन में कैथोड नियन्त्रक ग्रिड तथा त्वरक इलेक्ट्रोड वही कार्य करते हैं जोकि टेट्रोड (tetrode) अथवा पेन्टोड (pentode) में क्रमशः कैथोड, नियन्त्रक ग्रिड तथा स्क्रीन ग्रिड (screen grid) करते हैं। कैथोड से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित होते हैं, नियन्त्रक ग्रिड इस पर स्थित ऋणात्मक बायस (bias) की सहायता से इलेक्ट्रॉन प्रवाह की मात्रा को निश्चित करता है तथा त्वरक इलेक्ट्रोड,

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

कैथोड के सापेक्ष अति उच्च धनात्मक होने के कारण इससे होकर जाने वाले इलेक्ट्रॉनों को त्वरित करता है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.12(a): कैथोड किरण नली

विद्युत स्थैतिक फोकसन (Electrostatic focussing) – त्वरक इलेक्ट्रोडों में स्थित द्वारकों (Openings) से होकर जाने वाले इलेक्ट्रॉन, फोकसन एनोड तथा अन्तिम त्वरक एनोड के संयुक्त प्रभाव के कारण एक तीव्र इलेक्ट्रॉन पुंज में फोकसित हो जाते हैं, जोकि बहुलित इलेक्ट्रॉनिक लेंस निकाय (multiple electronic lens system) के रूप में प्रभावी होता है। स्क्रीन पर इलेक्ट्रॉन पुंज का फोकसन दो चरणों में होता है – (1) कैथोड से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों को नियन्त्रक ग्रिड के द्वारक से इस प्रकार गुजारा जाता है कि नियन्त्रक ग्रिड के द्वारक के निकट एक तल में अल्प व्यास का पुंज प्राप्त हो। (2) स्क्रीन पर, उस इलेक्ट्रॉन पुंज की जोकि अल्पतम पुंज व्यास के तल पर स्थित है प्रतिबिम्ब प्राप्त की जाती है।

आरम्भिक फोकसन चरण कैथोड, नियन्त्रक ग्रिड तथा ग्रिड की आपेक्षिक स्थितियों, आकारों तथा विभवों से प्राप्त किया जाता है। द्वितीय फोकसन चरण त्वरक इलेक्ट्रोड तथा प्रथम व द्वितीय ऐनोडों से प्राप्त होता है।

विद्युत स्थैतिक लेंसों में बहुत से दोष होते हैं जिनमें प्रकाशित लेंसों में पाये जाने वाले दोष जैसे कि गोलीय विपथन (spherical aberration), दृष्टिवैषम्य (astigmatism), भैज्य दूरी पर आश्रित आवर्धन (magnification) आदि सम्मिलित हैं।

(ii) प्रतिदीप्त पर्दा (The Fluorescent Screen) – यदि इलेक्ट्रॉन गन से निकलने वाले इलेक्ट्रॉन विक्षेपित न हों तो ये प्रतिदीप्त पर्दे के केन्द्र पर एक दीप्त बिन्दु (धब्बा) बनाते हैं। इस बिन्दु की तीव्रता नियन्त्रक ग्रिड बायस को समंजित कर नियंत्रित की जा सकती है, परन्तु यह तीव्रता, प्रतिदीप्त पदार्थ जिसे फोस्फर (phosphor) कहते हैं तथा जो नलिका के भीतरी भाग पर लेपित होता है, पर भी निर्भर करती है। सामान्यतया उपयोग में आने वाले फॉस्फरों में, विलैमाइट (willemite) (जिन्क सिलिकेट) जोकि प्रधानता से हरा प्रकाश देता है, जिंक ऑक्साइड जोकि नीला रंग देता है, जिंक बैरीलियम सिलिकेट अथवा जिंक

सल्फाइड जोकि पीले रंग से दीप्त होता है तथा मिश्र फॉस्फर जोकि श्वेत प्रकाश के लिए चयनित किये जा सकते हैं।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

स्फुरदीप्त (phosphorescence) की पश्च दीप्ति कुछ माइक्रोसेकण्ड से कई सेकण्ड तक परिवर्तित होती है तथा यह पर्दे पर लेपित पदार्थ पर निर्भर करती है। यदि दीप्ति 0.1 सेकण्ड से कम हो तो पर्दे की पश्चदीप्ति अल्प पश्च दीप्ति तथा यदि यह 1 सेकण्ड अथवा अधिक हो तो दीर्घ पश्चदीप्ति कहलाती है तथा इन सीमाओं के बीच पश्च दीप्ति मध्यम होती है। विलैमाइट की पश्चदीप्ति अल्प होती है अल्प पश्चदीप्ति टेलीविजन आदि यन्त्रों के लिए आवश्यक होती है जिनमें प्रतिबिम्बें तेजी से बदलती हैं। रेडार, तरंग रूपों की तुलना आदि में दीर्घ पश्चदीप्ति उपयोगी होती है।

चूँकि इलेक्ट्रॉन पुंज जो कि पर्दे से टकराता है अपने साथ ऋण आवेश को कम करता है तथा पर्दा काँच की सहायता से विद्युतरोधी होता है, अतः इस आवेश को हटाना आवश्यक होता है, अन्यथा पर्दे का विभव इतना अधिक ऋणात्मक हो जायेगा कि यह पुंज को प्रतिकर्षित (repel) करने लगेगा। किन्तु जब इलेक्ट्रॉन पर्दे से टकराते हैं तो न केवल प्रकाश बल्कि द्वितीयक इलेक्ट्रॉन भी प्राप्त होते हैं। इस प्रभाव के कारण पुंज के एक इलेक्ट्रॉन के कारण औसतन एक से अधिक द्वितीयक इलेक्ट्रॉन प्राप्त होते हैं। ये द्वितीयक इलेक्ट्रॉन, नलिका की दीवारों की आन्तरिक सतह पर रखे तथा द्वितीय एनोड से सम्बद्ध ग्रेफाइट लेपन द्वारा आकर्षित होते हैं जिसके परिणामस्वरूप, पर्दे पर ऋणात्मक विभव के स्थान पर द्वितीय एनोड की तुलना में कुछ वोल्ट का धनात्मक विभव उत्पन्न हो जाता है।

(iii) विक्षेपण प्लेटें (Deflection Plates) – निर्वात् नलिका में एनोड से आगे $Y_1 Y_2$ तथा $X_1 X_2$ समान्तर प्लेटें लगी होती हैं जो कि परस्पर लम्बवत् तल में लगाये जाते हैं, इन्हें विक्षेपण प्लेटें कहते हैं। इसके मध्य विभवान्तर लगाकर विद्युत क्षेत्र उत्पन्न किया जाता है। ऊर्ध्व तल के प्लेटों $X_1 X_2$ के मध्य उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र कैथोड किरण को क्षैतिज दिशा में विक्षेपित करता है। अतः ये X प्लेटें कहलाती हैं। क्षैतिज तल की प्लेटें $Y_1 Y_2$ के मध्य उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र कैथोड किरण को ऊर्ध्व दिशा में विक्षेपित करता है अतः ये Y प्लेटें कहलाती हैं। इलेक्ट्रॉन पुंज का विस्थापन प्लेटों पर आरोपित विभवान्तर के समानुपाती होता है अतः यदि प्लेटों पर उच्च आवृत्ति का प्रत्यावर्ती विभव आरोपित किया जाये तो इनका जड़त्व नगण्य होने के कारण इलेक्ट्रॉन पुंज भी प्रत्यावर्ती कम्पन करने लगते हैं।

$Y_1 Y_2$ प्लेटों पर प्रत्यावर्ती विभव लगाने पर इलेक्ट्रॉन पुंज ऊपर-नीचे कम्पन करते हैं जबकि $X_1 X_2$ प्लेटों पर प्रत्यावर्ती विभव आरोपित करने पर इलेक्ट्रॉन पुंज क्षैतिज दोलन करते हैं।

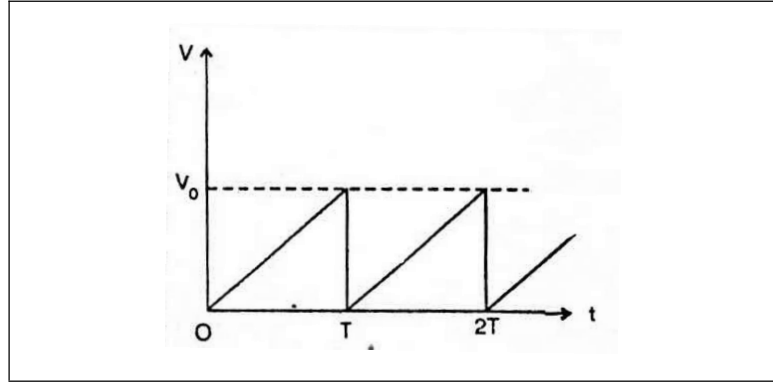
(iv) प्रसर्प जनित्र तथा समयाधार परिपथ (Sweep Generator and Time Base Circuit) – किसी भी विद्युत तरंग को प्रति-दीप्तिशील पर्दे पर देखने के लिए उसे $Y_1 Y_2$ प्लेटों पर लगाते हैं। लेकिन केवल $Y_1 Y_2$ प्लेटों पर तरंग को लगाने पर दीप्तिमान बिन्दु केवल Y -अक्ष पर ऊपर-नीचे होता रहेगा। सम्पूर्ण दोलन को हम तब तक नहीं देख सकेंगे जब तक ऊपर-नीचे जाने वाले बिन्दु किसी निश्चित समय-अन्तराल के साथ क्षैतिज में बायें से दायें न खिसके।

टिप्पणी

स्व-अधिगम
पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

इस कार्य के लिए उपकरण के अन्दर एक प्रसरण जनित्र (sweep generator) लगाया जाता है जिसका सीधा सम्पर्क $X_1 X_2$ प्लेटों से सम्पर्कित पिनों के साथ होता है। इसके लिए एक इलेक्ट्रॉनिक परिपथ ऐसा उपयोग में लाया जाता है जो अपने निर्गम पर आरादती तरंग (sawtooth wave) की विभव उत्पन्न करे। आरादती वोल्टता तरंग का रूप चित्र 4.12(b) में दिखाया गया है। यह विभव एक निश्चित आवर्तकाल में शून्य से किसी निश्चित मान V_a तक रैखिक (linear) रूप से बढ़ती है तथा अचानक बिना कोई समय लिए शून्य मान तक कम होती है अर्थात् विभव का उत्थान काल (rise time) पूरे तरंग के आवर्तकाल T के लगभग समान होता है, जबकि पतन काल (fall time) नगण्य अथवा शून्य होता है।



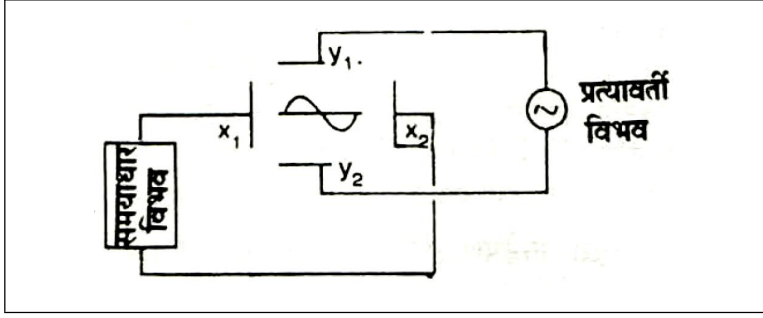
चित्र क्र. 4.12(b): समयाधार वोल्टेज

समयाधार परिपथ से निर्गत तरंग पर्दे के X -अक्ष (आधार) को समय अक्ष में बदल देती है इस कारण उपकरण के इस भाग का नाम समयाधार परिपथ रखा गया है।

(v) अन्य अवयवी परिपथ (Other Component Circuits) — इसमें कैथोड किरण नली तथा प्रसरण जनित्र के अतिरिक्त उच्च आवृत्ति प्रवर्धक, पावर सप्लाय आदि अन्य विद्युत् परिपथ लगे होते हैं।

कार्य प्रणाली — उस प्रत्यावर्ती विभव को जिसका तरंग रूप देखना होता है उसे $Y_1 Y_2$ प्लेटों पर लगाते हैं जिससे प्रतिदीप्ति बिन्दु O ऊर्ध्वाधर दिशा में कम्पन करने लगता है। दृष्टि निर्बंध के कारण पर्दे पर एक ऊर्ध्वाधर रेखा दिखाई देती है अब $X_1 X_2$ प्लेट पर समयाधार विभव लगाते हैं जिससे पर्दे पर चित्र 4.12(c) के अनुसार एक क्षैतिज रेखा प्राप्त होती है जिसे समयाधार रेखा कहते हैं।

इस प्रकार, Y -प्लेटों पर प्रत्यावर्ती विभव के कारण पर्दे पर प्रतिदीप्ति बिन्दु O ऊपर नीचे गति करता है तथा X -प्लेटों पर समयाधार विभव के कारण क्षैतिज दिशा में गति करता है। अतः पर्दे पर दिये गये प्रत्यावर्ती विभव का तरंग रूप दिखायी देने लगता है। Y -प्लेटों पर लगाये गये प्रत्यावर्ती विभव के कुछ भाग को X -प्लेटों पर लगाये गये समयाधार वोल्टेज के साथ मिलाकर पर्दे पर प्राप्त प्रतिदीप्ति बिन्दु की ऊर्ध्वाधर व क्षैतिज गतियों को तुल्यकालित किया जा सकता है जिससे पर्दे पर स्थायी चित्र प्राप्त किया जा सकता है।



चित्र क्र. 4.12(c): प्रत्यावर्ती विभव की तरंग प्रकृति

उपयोग (Uses) – (i) प्रत्यावर्ती विभव के तरंग प्रतिरूप के अध्ययन में, (ii) लिसाजू आकृतियाँ प्राप्त करने में, (iii) विभव तथा आवृत्ति मापन में, (iv) प्रेरकत्व, शक्ति गुणांक, परावैद्युत हानि, शैथिल्य हानि आदि के मापन में, (v) चिकित्सा विज्ञान में हृदय की धड़कन का अध्ययन करने में, (vi) रेडार तथा टेलीविजन में, (vii) औद्योगिक क्षेत्र में दहन सूचक आदि के रूप में (viii) रेडियो अभिग्राही, प्रेषित्र तथा अन्य संचार उपकरणों में इसका उपयोग किया जाता है।

4.9(a) CRO की सुग्राहिता (Sensitivity of CRO)

कैथोड किरण कम्पनदर्शी की सुग्राहिता, कैथोड किरण नली के पर्दे पर इकाई विस्थापन के लिये आवश्यक विभव को प्रदर्शित करती है।

यदि विक्षेपण प्लेटों के बीच विभवान्तर V_d तथा प्लेटों के बीच की दूरी d है इनके सिरो से पर्दे तक की दूरी L है

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{V_d}{d}, \text{ तथा क्षेत्र की दिशा के लंबवत प्रवेश करते}$$

समय प्रारंभिक वेग $V = \sqrt{\frac{2eV_a}{m}}$ होगा

अतः पर्दे पर प्राप्त कुल विक्षेप

$$y = \frac{eE}{mV_x^2} \left[\frac{l^2}{2} + lL \right]$$

इस समीकरण में $E = \frac{V_d}{d}$ तथा $V_x^2 = \frac{2eV_a}{m}$ रखने पर

$$y = \frac{1}{4} \frac{V_d l^2}{V_a d} + \frac{V_d l L}{2V_a d}$$

$$= \frac{V_d}{V_a} \left[\frac{l^2}{4d} + \frac{lL}{2d} \right] = \frac{lV_d}{2dV_a} \left[\frac{l}{2} + L \right]$$

टिप्पणी

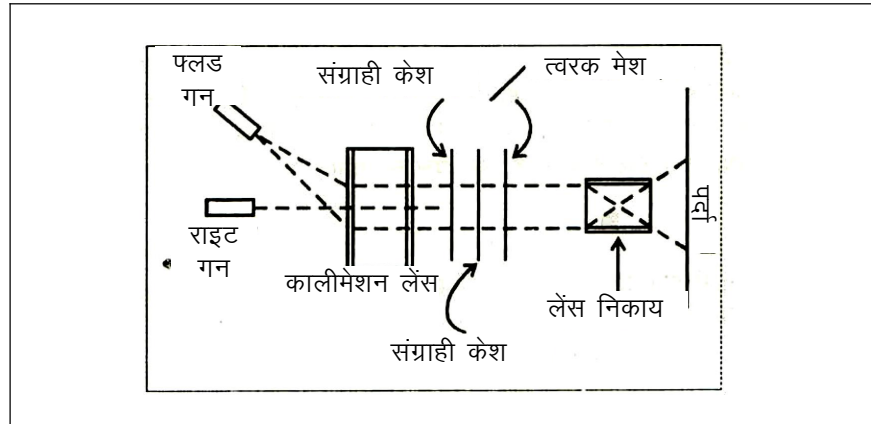
$$\begin{aligned} \text{अतः विक्षेप सुग्राहिता} &= \frac{y}{V_d} \\ &= \frac{lV/d(l/2+L)}{2dV_a} \\ &= \frac{l(l/2+L)}{2dV_a} \end{aligned} \quad \dots (A)$$

अतः समीकरण से स्पष्ट है कि

- (1) विक्षेप सुग्राहिता प्लेटों की लम्बाई l के समानुपाती होती है।
- (2) विक्षेप सुग्राहिता प्लेटों के बीच की दूरी d के व्युत्क्रमानुपाती होती है।
- (3) विक्षेप सुग्राहिता $\left(\frac{l}{2}+L\right)$ के समानुपाती होती है।
- (4) विक्षेप सुग्राहिता त्वरक विभव V_a के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

4.9(b) तीव्र संग्राही कम्पनदर्शी (Fast CRO)

सामान्य कैथोड किरण कम्पनदर्शी में दो संशोधन करके उसकी स्पीड में वृद्धि की जाती है जिससे कि वे क्षणिक सूचनाओं का भी अभिग्रहण कर सकें इसके लिए प्रयुक्त विधियों को प्रसार संग्रहण तथा स्थानांतरण संग्रहण कहते हैं।



चित्र क्र. 4.13: तीव्र संग्राही मापनदर्शी

प्रसार संग्रहण – इसकी सैद्धान्तिक संरचना चित्र 4.13 के अनुसार होती है –

इसमें दृश्य पर्दे के आकार का इण्टरमीडियेट मेश होता है। इसे संग्राही और त्वरक मेश के मध्य लगाया जाता है। संग्रहण मेश में प्रतिबिम्ब स्थैतिक इलेक्ट्रॉन लेंस निकाय (Static electron lens system) द्वारा आवर्धित होकर पर्दे पर पूरे आकार में फैल जाता है।

स्थानान्तरण संग्रहण में एक इण्टरमीडियेट मेश टारगेट का उपयोग किया जाता है जिसकी सहायता से स्पीड बढ़ायी जाती है। सर्वप्रथम तरंग प्रतिरूप को इस मेश में आरोपित किया जाता है। फिर इससे प्राप्त निम्न स्पीड के तरंग प्रतिरूप को द्वितीय मेश में भेजा जाता है जिससे स्पीड में वृद्धि हो जाती है।

4.10 एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण (Charged Particle in Uniform Constant Magnetic Field)

विद्युत धारा आवेश प्रवाह की दर है तथा चूँकि विद्युत धारा प्रवाहित करने वाले एक चालक को चुम्बकीय क्षेत्र में रखने पर वह बल का अनुभव करता है अतः एक आवेशित कण को चुम्बकीय क्षेत्र में गति करने पर बल का अनुभव करना चाहिए। इस बल को प्रायः लॉरेन्ज बल (Lorentz force) कहते हैं।

q (कूलम्ब) आवेश के एक कण द्वारा B (वेबर प्रति वर्ग मीटर अथवा टेस्ला) शक्ति के चुम्बकीय क्षेत्र में \vec{v} (मीटर/से.) वेग से गति करने पर आरोपित बल का मान होता है

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \dots (1)$$

इस समीकरण से यह स्पष्ट है कि यदि आवेशित कण चुम्बकीय क्षेत्र में विराम ($v=0$) में हैं, तो इस पर कोई बल कार्य नहीं करेगा तथा यह विराम में रहेगा परन्तु यदि कण चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर गतिमान है तो भी कण द्वारा अनुभव किये गये बल का मान शून्य होगा क्योंकि इस स्थिति में $|\vec{v} \times \vec{B}| (= \vec{v}B \sin \theta) = 0$ होगा क्योंकि वेग \vec{v} तथा चुम्बकीय क्षेत्र B के बीच कोण θ का मान शून्य है। अतः प्रारम्भ में चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर गति करने वाला आवेशित कण समान्तर पथ पर प्रारम्भिक निश्चित चाल से गति करता रहेगा।

हम तीन स्थितियों की विवेचना करेंगे।

स्थिति I : जब कण चुम्बकीय क्षेत्र में क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् प्रवेश करता है।

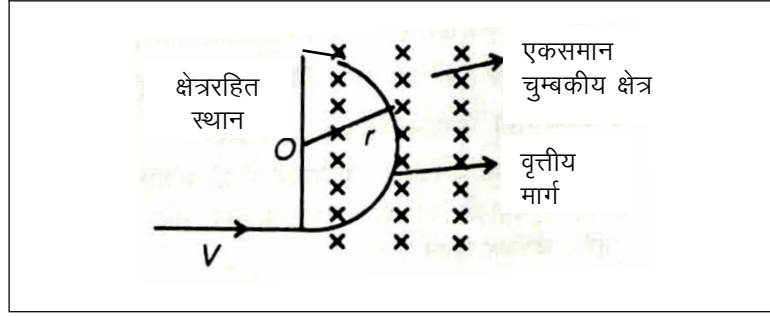
माना चुम्बकीय क्षेत्र के अभिलम्बवत् दिशा में कण का प्रारम्भिक वेग \vec{v} है। फ्लेमिंग के बाँये हाथ के नियम (Fleming's Left Hand Rule) के अनुसार आवेशित कण पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला बल सदैव कण की गति की दिशा तथा चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा दोनों के लम्बवत् होगा तथा चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा आवेशित कण पर कोई कार्य नहीं किया जायेगा अतः कण की गतिज ऊर्जा में कोई वृद्धि नहीं होगी तथा इसका वेग अपरिवर्तित रहेगा।

अब चूँकि \vec{v} तथा B नियतांक हैं अतः F भी नियतांक होना चाहिए। यह निश्चित बल प्रत्येक स्थिति में गति के लम्बवत् होता है तथा आवश्यक अभिकेन्द्र

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

बल (centripetal force) प्रदान करता है जिसके कारण कण द्वारा चलित पथ r त्रिज्या का वृत्त बन जाता है, जैसा कि चित्र 4.14 में प्रदर्शित है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.14: अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति

अब चूँकि \vec{v} तथा B परस्पर लम्बवत् हैं, अतः बल का समीकरण (1) निम्न रूप में परिवर्तित किया जा सकता है

$$F = qvB \quad \dots (2)$$

इस वृत्ताकार मार्ग में गति करने के लिये आवश्यक शर्त यह है कि कण पर चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा लगने वाला लारेंज बल वृत्तीय गति के लिये आवश्यक अभिकेन्द्री बल है –

अतः लारेंज बल = अभिकेन्द्री बल

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \dots (3)$$

$$\text{अतः } mv = qBr \quad \dots (4)$$

तथा

वृत्ताकार मार्ग की त्रिज्या

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \dots (5)$$

इस त्रिज्या r को कभी-कभी **परिभ्रमण त्रिज्या** (gyro-radius) अथवा **साइक्लोट्रॉन त्रिज्या** (cyclotron radius) कहते हैं।

कोणीय वेग ω का मान v/r होता है, अतः समीकरण (5) से

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad \dots (6)$$

यदि कण का आवर्तकाल T है तो

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \dots (7)$$

अतः आवृत्ति n का मान

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \dots (8)$$

टिप्पणी

चूँकि इस समी. (7) व (8) में v नहीं है, अतः आवृत्ति n , कण की चाल पर निर्भर नहीं करती। तथा वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या पर भी निर्भर नहीं करते अपेक्षाकृत तीव्र कण बड़े वृत्तों में [समीकरण (5)] तथा धीमे कण छोटे वृत्तों में इस प्रकार घूमते हैं कि उन्हें चुम्बकीय क्षेत्र में एक चक्र घूमने में समान समय T लगे।

आवृत्ति n , चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की अभिलाक्षणिक (characteristic) आवृत्ति है तथा परिभ्रमण-आवृत्ति (gyro-frequency) अथवा साइक्लोट्रॉन आवृत्ति (cyclotron frequency) कहलाती है, क्योंकि कण साइक्लोट्रॉन में इसी आवृत्ति से चक्रण करते हैं।

स्थिति II : जब कण चुम्बकीय क्षेत्र में किसी भी दिशा में प्रवेश करते हैं।

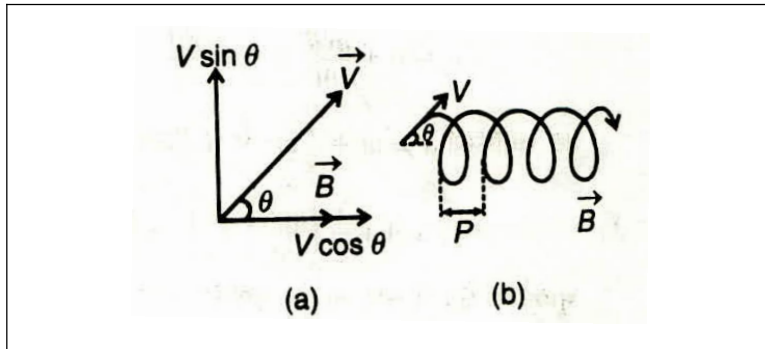
यदि आवेशित कण चुम्बकीय क्षेत्र में ऐसे v वेग से प्रवेश करते हैं जोकि चुम्बकीय क्षेत्र के अभिलम्बवत् नहीं हैं बल्कि इससे θ कोण बनाता है तो इसे आरोपित क्षेत्र के अनुदिश तथा लम्बवत् दिशाओं में क्रमशः $v \cos \theta$ तथा $v \sin \theta$ घटकों में वियोजित कर सकते हैं। (1) आरोपित क्षेत्र के अनुदिश घटक $v \cos \theta$ चुम्बकीय क्षेत्र से अप्रभावित रहता है, अतः कण क्षेत्र के अनुदिश घटक $v \cos \theta$ चाल से गतिमान रहता है, परन्तु (2) घटक $v \sin \theta$ चूँकि चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् दिशा में है अतः चुम्बकीय क्षेत्र इस पर एक बल F इस प्रकार आरोपित करता है कि यह इस तल में निश्चित वेग $v \sin \theta$ से एक वृत्ताकार पथ के अनुदिश चलने लगता है। वृत्तीय मार्ग के लिये

$$q(v \sin \theta)B = \frac{m(v \sin \theta)}{r}$$

अतः इस वृत्ताकार पथ की त्रिज्या

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad \dots (8)$$

अतः आवेशित कण में दो संगामी गतियाँ होती हैं—एक, चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् तल में निश्चित चाल $v \sin \theta$ की वृत्ताकार गति तथा दूसरी क्षेत्र के अनुदिश निश्चित चाल $v \cos \theta$ की रेखीय गति। इन संगामी गतियों के कारण आवेशित कण का परिणामी पथ एक हेलिक्स (helix) हो जायेगा जैसा चित्र 4.15 में प्रदर्शित है।



चित्र क्र. 4.15: कोण θ पर प्रवेश करने पर चुम्बकीय क्षेत्र में कण का मार्ग

टिप्पणी

कण द्वारा एक चक्कर पूरा करने में लिया गया समय होगा

$$T = \frac{2\pi r}{v \sin \theta} = \frac{2\pi}{v \sin \theta} \left(\frac{mv \sin \theta}{qB} \right)$$

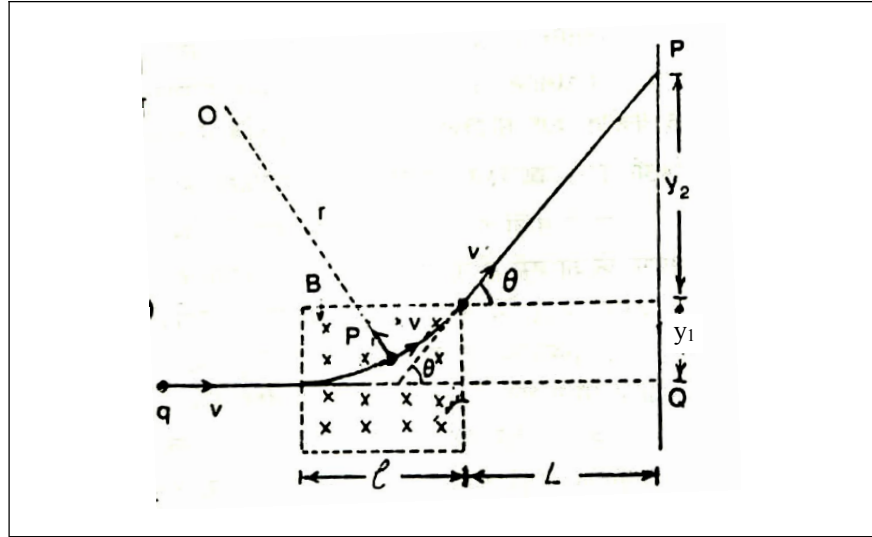
$$= \frac{2\pi m}{qB} \quad \dots (9)$$

एक चक्र में, अर्थात् T समय में, कण द्वारा चुम्बकीय क्षेत्र के अनुदिश चली गई दूरी हैलिक्स का पिच (pitch) कहलाती है तथा इसका मान

$$p = v \cos \theta \cdot T$$

$$= \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \theta \quad \dots (10)$$

आवेशित कण द्वारा चुम्बकीय क्षेत्र में हैलिक्स के आकार के पथ का उपयोग कैथोड किरण नलिका तथा इलेक्ट्रॉन माइक्रोस्कोप आदि में कण पुंजों के फोकसन में किया जाता है।



चित्र क्र. 4.16: अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र के कारण विक्षेपण

(iii) अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र के कारण कण का विक्षेपण – माना चुम्बकीय क्षेत्र की लम्बाई l है तथा पर्दे की दूरी, चुम्बकीय क्षेत्र के अंतिम सिरे से L है (चित्र 4.16)। चुम्बकीय क्षेत्र की अनुप्रस्थिति में कण, पर्दे के बिन्दु Q पर टकराता है, लेकिन चुम्बकीय क्षेत्र आरोपित करने पर कण विक्षेपित होकर पर्दे के बिन्दु P पर टकराता है। हमें विक्षेप QP की गणना करनी है।

कण का Y -दिशा में प्रारम्भिक वेग शून्य है। कण पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण Y -दिशा में बल $F = qvB$

$$\therefore \text{त्वरण} = \frac{\text{बल}}{\text{द्रव्यमान}} = \frac{qvB}{m} \quad (Y\text{-दिशा में})$$

l दूरी चलने में कण द्वारा लिया गया समय

$$t = \frac{l}{v}$$

अतः समीकरण $v = u + at$ से Y -दिशा में कण द्वारा प्राप्त अन्तिम वेग

$$v_y = 0 + \frac{qvB}{m} \times \frac{l}{v} = \frac{qlB}{m} \quad \dots (11)$$

तब समीकरण $S = ut + \frac{1}{2}at^2$ से Y -दिशा में विक्षेप

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{qvB}{m} \right) \left(\frac{l}{v} \right)^2 = \frac{qBl^2}{2mv} \quad \dots (12)$$

चुम्बकीय क्षेत्र में कण का पथ वृत्ताकार होगा, लेकिन जैसे ही कण चुम्बकीय क्षेत्र से बाहर आता है, कण पर लगने वाला चुम्बकीय बल समाप्त हो जाता है, जिससे यह सीधी रेखा में चलता है। यदि कण की प्रारम्भिक गति की दिशा तथा चुम्बकीय क्षेत्र में कण की गति की दिशा के बीच कोण θ है, तो

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v} = \frac{qBl}{m} \quad (\text{समीकरण 11 से})$$

तथा पर्दे पर अतिरिक्त विक्षेप

$$y_2 = L \tan \theta = \frac{qBLl}{mv} \quad \dots (13)$$

\therefore पर्देपर प्राप्त परिणामी विक्षेप

$$QP = y = y_1 + y_2 = \frac{qBl^2}{2mv} + \frac{qBLl}{mv} = \frac{qB}{mv} \left(\frac{l^2}{2} + lL \right) \quad \dots (14)$$

उपर्युक्त समीकरण (14) से स्पष्ट है कि चुम्बकीय क्षेत्र में विक्षेप, क्षेत्र की तीव्रता के अनुक्रमानुपाती होता है। इस सिद्धान्त का उपयोग कैथोड किरण कम्पनदर्शी में किया जाता है।

4.11 180° चुम्बकीय फोकसन या 180° चुम्बकीय विक्षेपण या संवेग वरणक (180° Magnetic Deflection or 180° Magnetic Focussing or Momentum Selector)

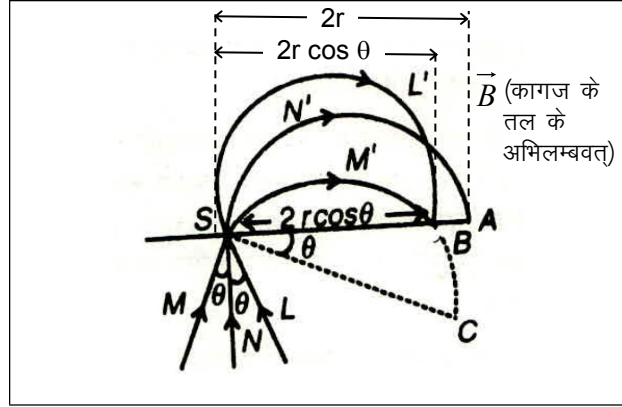
किसी एक बिन्दु से समान वेग परन्तु विभिन्न दिशाओं में उत्सर्जित आवेशित कणों को, विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के उचित समंजन से, 180° कोणीय गति के बाद, लगभग एक उभयनिष्ठ बिन्दु पर फोकस किया जा सकता है। इस प्रकार के फोकसन को 180° चुम्बकीय फोकसन अथवा संवेग वरणक कहते हैं (चूँकि स्रोत

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

तथा प्रतिबिम्ब बिन्दु एक ही रेखा पर होते हैं) तथा इनका उपयोग द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ (Mass spectograph) में विभिन्न प्रकार के आयनों को पृथक् करने में किया जाता है।

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.17: 180° चुम्बकीय फोकसन

माना S एक स्लिट है जिससे होकर आवेशित कण, कागज के तल के लम्बवत् तल में कार्यरत B चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करते हैं। कण $r = \frac{mv}{qB}$ वक्रता त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में गति करेंगे। पर्दे SA के लम्बवत् समान वेग v से चलने वाले समस्त समान कण जो SN' पथ के अनुदिश गति कर रहे हैं, बिन्दु A पर टकरायेंगे जहाँ $SA = 2r$ वृत्त का व्यास है। परन्तु, यदि प्रारम्भिक दिशा MS , अभिलम्ब NS से θ कोण पर स्थित हो, तो कण वृत्त $SM'B$ के अनुदिश गति करेगा जिसका व्यास SC , SB से कोण θ पर स्थित है। यदि आरम्भिक दिशा LS (कोण θ) हो तो कण $SL'B$ के अनुदिश गति कर अर्द्धवृत्त से अधिक दूरी चलेगा तथा पर्दे पर B बिन्दु पर टकरायेगा फोकसित प्रतिबिम्ब की चौड़ाई होगी—

$$\begin{aligned} AB &= SA - SB = 2r - 2r \cos \theta \\ &= 2r(1 - \cos \theta) \\ &= 2r \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots \right) \right] \\ &= 2r \frac{\theta^2}{2} = r\theta^2 \end{aligned} \quad \dots (1)$$

(θ^4 तथा अन्य उच्च घातों को नगण्य मानकर)

तथा कोणीय फोकसन शक्ति (angular focussing power) = $\frac{AB}{2r}$

$$= \frac{r\theta^2}{2r} = \frac{\theta^2}{2} \quad \dots (2)$$

स्पष्ट है कि अल्प कोण पर प्रवेश करते पुंज के लिये फोकसित प्रतिबिम्ब की चॉइस PQ कम होगी। अतः पर्दे पर प्रतिबिम्ब एक छोटी रेखा के रूप में प्राप्त होंगे।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ में एक दूसरी स्लिट B के पास रख दी जाती है और इसमें होकर जाने वाले आयन एक सुग्राही गैल्वेनोमीटर में होकर धारा भेजते हैं। आयनों का एक मिश्रण, जिसे समायोज्य (Adjustable) विभवान्तर द्वारा त्वरित किया जाता है, स्लिट S में भेजा जाता है। स्लिट B से होकर केवल वे ही आयन जायेंगे जिनके लिए,

$$\frac{mv}{q} = \frac{Br}{c} \quad \dots (3)$$

चूँकि त्वरित विभवान्तर (Accelerating potential difference) धीरे-धीरे परिवर्तित किया जाता है अतः विभिन्न $\frac{m}{q}$ वाले आयन संग्राही स्लिट (Receiving slit) में होकर क्रमवार (Succession) में गुजरेंगे और उनका पता गैल्वनोमीटर के विक्षेप द्वारा लगाया जा सकता है। यह विक्षेप प्रत्येक प्रकार के आयनों के लिए आपेक्षिक संख्या (Relative number) के समानुपाती होगा। इस प्रकार, एक तत्व (Element) के समस्थानिकों (Isotopes) की आपेक्षिक अधिकता (Relative abundances) और उनके परमाणु भार ज्ञात किये जा सकते हैं।

4.12 नाभिकीय कणों के ऊर्जा मापन में नाभिकीय कणों की वक्रता (Curvature of Tracks for energy Determination of Nuclear Particles)

नाभिकीय कणों का ऊर्जा एवं संवेग ज्ञात करने के लिये अभ्र कोष्ठ (Cloud chamber) तीव्र चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} में इस प्रकार रखा जाता है कि \vec{B} की दिशा नाभिकीय कणों, की दिशा के लम्बवत् हो। यदि नाभिकीय कणों का द्रव्यमान m , आवेश q तथा वेग v हो, तो आवेशित नाभिकीय कण पर लगने वाला लॉरेंज बल (Lorentz's force) qvB होगा, जिससे इसका पथ वृत्तीय होगा। वृत्तीय पथ के लिये आवश्यक अभिकेन्द्र बल, लॉरेंज बल प्रदान करता है। अतः

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

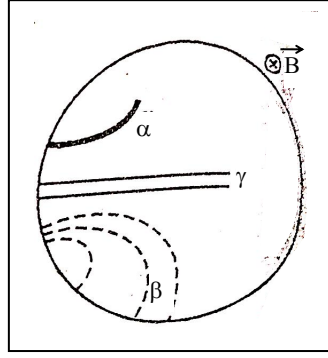
$$\therefore \text{कण का संवेग } mv = qBr \quad \dots (1)$$

इस प्रकार कण के पथ की त्रिज्या r को नापकर कण का संवेग ज्ञात किया जा सकता है। अब यदि कण का संवेग बहुत अधिक हो, तो कण की गतिज ऊर्जा

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

की सहायता से ज्ञात की जा सकती है। अभ्र कोष्ठ में नाभिकीय कणों के पथ चित्र 4.18 के अनुसार होते हैं।

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.18: अन्न कोष्ठ

चुम्बकीय क्षेत्र में कण के विक्षेपण की दिशा देखकर फ्लेमिंग के बाँये हाथ के नियमानुसार कण के आवेश का चिन्ह भी ज्ञात किया जा सकता है। चित्र 4.18 में चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} की दिशा कागज के तल के लम्बवत् अन्दर की ओर है। अतः नीचे की ओर विस्थापित होने वाले कण ऋणावेशित हैं। जबकि ऊपर की दिशा में विस्थापित होने वाले कण धनावेशित होंगे। उदासीन कणों पर चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव नहीं होता, अतः वे (γ कण) सीधी होती हैं।

4.13 साइक्लोट्रॉन का सिद्धान्त (Principle of Cyclotron)

किसी आवेशित कण को चुम्बकीय क्षेत्र में गति कराने पर वह एक हेलिकल या वृत्तीय पथ में घूमने लगता है। इसी सिद्धान्त का उपयोग एक ऐसी मशीन बनाने में किया जाता है जिसके द्वारा आवेशित कणों को त्वरित करके उनकी ऊर्जा बढ़ायी जा सकती है।

यह यन्त्र धन आवेशित कणों (जैसे α -कण, प्रोटॉन तथा ड्यूट्रॉन) को त्वरित करने अर्थात् उनका वेग बढ़ाने के काम आता है। यह एक चक्रीय त्वरक है।

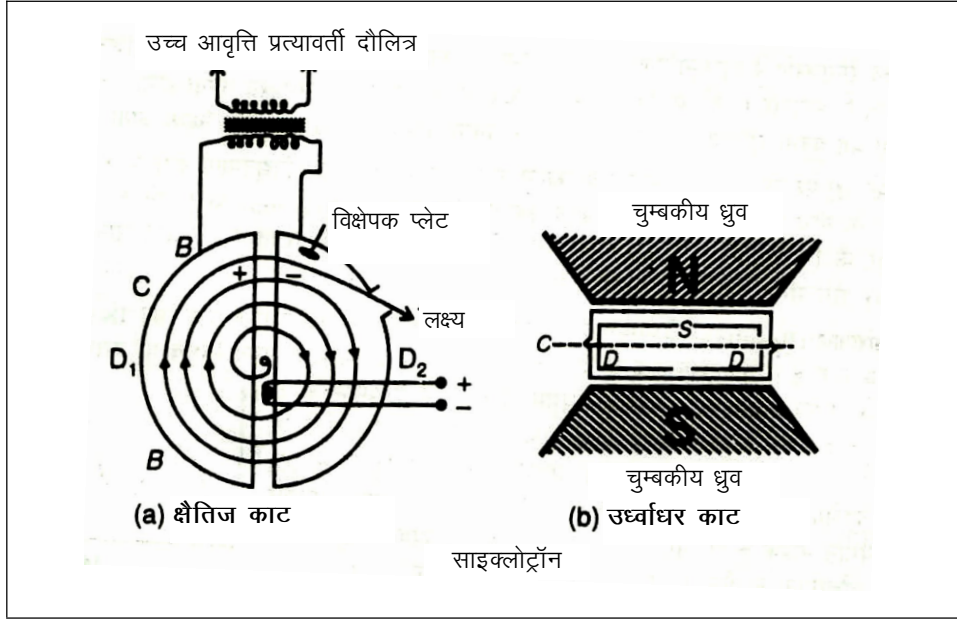
(1) रचना (Construction) – साइक्लोट्रॉन के रेखिक चित्र 4.19 के अनुसार इसमें अंग्रेजी के अक्षर D के आकार के दो अर्द्ध बेलनाकार खोखले ताँबे के बक्से D_1 व D_2 होते हैं जिन्हें 'डी' कहते हैं। ये दोनों D एक धातु के बक्से C में क्षैतिज स्थिति में इस प्रकार हैं कि उनकी व्यास सतहों के बीच कुछ खाली स्थान रहता है। दोनों D , बक्से C से पृथक्कृत (Insulated) रहते हैं। डी का सम्बन्ध उच्च प्रत्यावर्ती आवृत्ति (10^7 साइकिल/सेकण्ड) के दोलित्र से होता है, जिससे डी के बीच 10^4 वोल्ट के क्रम का प्रत्यावर्ती विभवान्तर लगाया जाता है। D_1 व D_2 के बीच के अल्प अन्तराल में एक स्थायी और शक्तिशाली चुम्बक NS के द्वारा बहुत तीव्र क्षेत्र (लगभग 15000 ओस्टेड) से ऊर्ध्व दिशा में D_1 व D_2 की समतल सतहों के लम्बवत् लगाया जाता है। डी (D_1 व D_2) के अन्दर के सारे स्थान में 10^{-6} मिमी पारे के क्रम का निर्वात कर देते हैं।

जिन धनावेशित कणों को साइक्लोट्रॉन द्वारा त्वरित करना होता है उन्हें एक विशेष विधि द्वारा उत्पन्न किया जाता है। इसके लिये कोष्ठ C में 10^{-2} मिमी (पारे) के दाब पर हाइड्रोजन (प्रोटॉनों के लिये), ड्यूट्रियम (ड्यूट्रॉनों के लिये) या

हीलियम (α -कणों के लिये) भर देते हैं। रिक्त स्थान के केन्द्र S पर तथा D_1 व D_2 के तलों से कुछ नीचे एक इलेक्ट्रॉन गन (Electron gun) F होती है जिसे गर्म करके उसमें से एक संकीर्ण इलेक्ट्रॉन किरण पुंज उत्सर्जित करते हैं। ये इलेक्ट्रॉन अपने मार्ग में आने वाले प्रायोगिक गैस के परमाणुओं से टक्कर करके उन्हें आयनित कर देते हैं। इस प्रकार गैस के केन्द्र पर धन आयन अर्थात् प्रोटॉन, या ड्यूटॉन या α -कण उत्पन्न हो जाते हैं।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी



चित्र क्र. 4.19: साइक्लोट्रॉन

सिद्धान्त (Theory) – माना किसी क्षण जब अल्प अन्तराल के केन्द्र पर धन आयन उत्पन्न होता है, उस स्थिति में डी D_2 ऋणात्मक विभव पर है अतः आयन D_2 की ओर त्वरित होकर उसमें प्रवेश कर जाता है। D_2 के अन्दर आयन पर कोई विद्युतीय बल नहीं लगता अतः आयन क्षैतिज तल में नियत वेग से चलता है। क्योंकि चुम्बकीय क्षेत्र डी के तल के लम्बवत् ऊर्ध्व दिशा में कार्य करता है, जिसके कारण धन आयन अर्द्ध वृत्ताकार गति में चलने लगता है और अन्त में डी के बीच अल्प अन्तराल में आ जाता है। धन-आयन के वृत्तीय पथ की त्रिज्या निम्न प्रकार प्राप्त होगी—

धन आयन पर अभिकेन्द्रीय बल = उस पर चुम्बकीय बल

$$\text{या } \frac{mv^2}{r} = Bqv$$

$$\text{या } v = \frac{qB}{m} r \quad \dots (1)$$

वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या

$$r = \frac{mv}{qB}$$

टिप्पणी

जहाँ आयन का द्रव्यमान m किग्रा में, वेग v मीटर/से. आवेश q कूलम्ब के चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B वेबर/मीटर² तथा आयन के वृत्तीय पथ की त्रिज्या r मीटर है।

आयन का कोणीय वेग

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{Bq}{m} \quad \dots (2)$$

अतः आयन द्वारा अर्द्ध वृत्तीय चक्कर लगाने में लगा समय

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{Bq/m} = \frac{\pi m}{Bq} \quad \dots (3)$$

इस समय का मान उन आयनों के लिये नियत है जिनके लिए q/m का मान नियत है परन्तु इसका मान लगाये गये चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B पर निर्भर करता है। अतः वे सभी आयन जिनके लिये q/m बराबर है समान समय में D_1 अथवा D_2 के भीतर अपना अर्द्धवृत्त पूरा करके पुनः D_1 व D_2 के बीच अल्प अन्तराल में वापस आ जाते हैं।

यदि D_1 व D_2 पर आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर की आवृत्ति और उसके मान को इस प्रकार समंजित करें कि इसका अर्द्ध आवर्तकाल ($T/2$) उतना ही हो जितना कि आयन द्वारा वृत्त को पूरा करने में लगा समय

$$T = \frac{2\pi m}{Bq} \quad \dots (4)$$

जिस क्षण आयन D_1 के भीतर अर्द्धवृत्त पूरा करके अल्प अन्तराल में वापस आता है, ठीक उसी क्षण D_2 का विभव D_1 के सापेक्ष ऋणात्मक हो जाता है अतः आयन और अधिक त्वरित होकर D_2 में प्रवेश करता है। क्योंकि अब इसका वेग पहले से अधिक हो गया है अतः यह D_2 में अधिक वृत्त की त्रिज्या में घूमकर जब पुनः अल्प अन्तराल में आता है तो D_1, D_2 के सापेक्ष ऋणात्मक हो जाता है और यह D_1 में प्रवेश करता है यह प्रक्रिया बार-बार दोहराई जाती है। इस प्रकार जब धन आयन एक डी से दूसरी डी में जाता है तो उसकी गति त्वरित हो जाती है अर्थात् उसकी ऊर्जा और वृत्तीय पथ की त्रिज्या बढ़ जाती है। अन्त में जब धन आयन के पथ की त्रिज्या डी की त्रिज्या के बराबर हो जाती है तो आयन एक ऋण आवेशित विक्षेपक प्लेट से विक्षेपित होकर डी से बाहर निकल जाता है। इस प्रकार साइक्लोट्रॉन से त्वरित धन आयनों की ऊर्जा कई meV होती है।

अतः दोलनी आवृत्ति

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} \\ &= \frac{qB}{2\pi m} \\ &= \frac{B}{2\pi} \left(\frac{q}{m} \right) \end{aligned}$$

यही साइक्लोट्रॉन के कार्य करने के लिये आवश्यक आवृत्ति का सूत्र है जिसे साइक्लोट्रॉन आवृत्ति कहते हैं। इसका मान आवेशित कण के $\frac{q}{m}$ पर निर्भर करता है तथा किसी निश्चित कण के लिये दोलन की आवृत्ति n का मान आरोपित क्षेत्र B के सामनुपाती होता है।

(3) साइक्लोट्रान से निर्मित आवेशित कण की अधिकतम गतिज ऊर्जा

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{q B r_{\max}}{m} \right)^2 \\ E_{\max} &= \frac{q^2 B^2 r_{\max}^2}{2m} \end{aligned}$$

अतः साइक्लोट्रान से उत्सर्जित आयन की अधिकतम ऊर्जा के लिए

(1) आरोपित चुम्बकीय क्षेत्र B अधिकतम होनी चाहिए।

(2) D की त्रिज्या (r) अधिकतम होनी चाहिये।

(4) सीमा बन्धन (Limitation) – साइक्लोट्रॉन द्वारा किसी धन आयन को प्रकाश के वेग के बराबर या उससे अधिक वेग तक त्वरित नहीं किया जा सकता है क्योंकि उन वेगों पर कण का द्रव्यमान वेग के साथ निम्न सूत्र के अनुसार बढ़ने लगता है।

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

जहाँ m_0 कण का विराम द्रव्यमान, v कण का वेग और c प्रकाश का वेग है। कण का द्रव्यमान बढ़ने से उत्तरोत्तर अर्द्ध वृत्ताकार पथ पूरा करने का समय $t = \frac{\pi m}{Bq}$ बढ़ने लगता है जिसके परिणामस्वरूप कण तथा उस पर आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर में असंगति (Out of Step) हो जाती है तथा एक स्थिति ऐसी आ जाती है जब उस कण को और त्वरित नहीं किया जा सकता है।

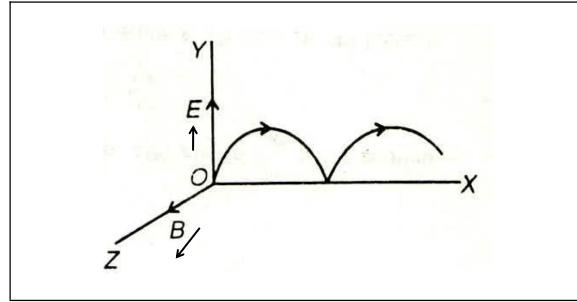
इस नियत ऊर्जा के संगत इलेक्ट्रॉन का वेग अपेक्षाकृत भारी कणों (प्रोटॉन, ड्यूटेरियम आदि) की तुलना में अधिक होता है अतः इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान में आपेक्षिक वृद्धि अधिक होती है। अतः साइक्लोट्रॉन में इलेक्ट्रॉन शीघ्र ही आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर के साथ असंगति में हो जाते हैं। अतः साइक्लोट्रॉन द्वारा इलेक्ट्रॉनों को त्वरित नहीं किया जा सकता है।

आजकल साइक्लोट्रॉन का एक संशोधित रूप 'सिन्को साइक्लोट्रॉन' (Synco Cyclotron) है।

उपयोग – इसके द्वारा भारी आवेशित कणों (जैसे α कणों, ड्यूटीरियम कणों तथा प्रोट्रॉनों आदि) को उच्च ऊर्जा तक त्वरित किया जा सकता है इन त्वरित कणों को कृत्रिम नाभिकीय विखण्डन के कार्य में प्रयुक्त किया जा सकता है।

4.14 परस्पर लम्बवत् वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों में आवेशित कण (Charged Particle in Mutually Perpendicular Electric and Magnetic Fields)

माना m द्रव्यमान तथा q आवेश का एक आवेशित कण, Y -अक्ष के अनुदिश वैद्युत क्षेत्र (अर्थात् $E = E_j$) तथा इसके लम्बवत् Z -अक्ष के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र (अर्थात् $B = B_k$) में स्थित है। यदि इस प्रकार के क्रसित वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में कण विराम है तो प्रारम्भ में यह वैद्युत क्षेत्र के अनुदिश त्वरित होगा। जैसे-जैसे कण का वेग बढ़ेगा, यह चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल का अनुभव करेगा तथा इसका पथ ऊर्ध्वाधर से वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टरों के तल की लम्बवत् दिशा में विचलित होगा। आवेशित कण के पथ में यह झुकाव निरन्तर बढ़ता जायेगा, जब तक कि यह X -अक्ष पर न पहुँच जाये, जहाँ इसका वेग पुनः शून्य हो जायेगा तथा यह पुनः Y -अक्ष की ओर ऊपर की ओर उठने लगेगा एवं गति की पुनरावृत्ति करेगा। अतः अर्द्ध लूपों (half loops) की श्रेणी के रूप में कण का पथ चित्र 4.20 के अनुसार होगा। क्रसित क्षेत्र वे क्षेत्र होते हैं जो परस्पर अभिलम्बवत् होते हैं।



चित्र क्र. 4.20: परस्पर लम्बवत् E तथा B क्षेत्रों में कण की गति का साइक्लोइडल मार्ग

माना किसी क्षण आवेशित कण का वेग $\vec{v}(iv_x + pv_y + kv_z)$ है। अतः कण पर आरोपित कुल बल का मान विद्युत क्षेत्र E तथा चुम्बकीय क्षेत्र B के द्वारा स्वतन्त्रतापूर्वक आरोपित बलों के क्षेत्रों के बराबर होगा। अतः कण पर लगने वाला बल

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

अतः $F = q[E + (\vec{v} \times B)] \dots(1)$ [E वोल्ट/मी तथा B वेबर/मी² में है]

चूँकि विद्युत क्षेत्र Y की दिशा में तथा चुम्बकीय क्षेत्र Z दिशा में क्रियाशील है अतः विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

$$\vec{E} = E \hat{j} \text{ तथा } \vec{B} = B \hat{k} \quad \dots (1)$$

अतः समीकरण (1) से

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q[E\hat{j} + (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z) \times B\hat{k}] \\ &= \hat{j}qE - \hat{j}v_xqB + \hat{i}v_yqB \\ &= qE\hat{j} + qB(v_y\hat{i} - v_x\hat{j}) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

न्यूटन के गति के नियम के अनुसार

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ &= m[a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}] \\ &= m\left[\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right] \end{aligned}$$

समीकरण (2) व (3) की तुलना करने पर

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= qBv_y \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} &= \frac{qB}{m}v_y \end{aligned} \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} m\frac{dv_y}{dt} &= qE - qBv_x \\ \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} &= \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}v_x \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$\begin{aligned} m\frac{dv_z}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

समीकरण (4) को समय (t) के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = 0 - \frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt}$$

समीकरण (5) से $\frac{dv_x}{dt}$ का मान रखने पर.

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \left(\frac{qB}{m} \right) v_y$$

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में
आवेशित कणों की गति

$$= -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

टिप्पणी

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y$$

जहाँ $\left(\frac{qB}{m}\right) = \omega$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \quad \dots (6)$$

इस समीकरण का हल निम्न होगा

$$v_y = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad \dots (7)$$

माना कण प्रारम्भ में $t = 0$ पर विरामावस्था में है

अतः $v_y = 0$ पर $A_1 = 0$

इसी प्रकार $t = 0$ पर $v_x = v_y = 0$

अतः समीकरण (4) से

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} \quad \dots (8)$$

समीकरण (7) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dv_y}{dt} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t$$

सीमा प्रतिबन्ध $t = 0$ के लिये

$$\frac{dv_y}{dt} = A_2 \omega \quad \dots (9)$$

समीकरण (8) व (9) से

$$\frac{qE}{m} = A_2 \omega$$

माना $\frac{qE}{m} = K$

$$A_2 \omega = K$$

$$A_2 = \frac{K}{\omega}$$

समीकरण (7) में $A_1 = 0$ तथा

$$A_2 = \frac{K}{\omega} \text{ लेने पर}$$

$$v_y = \frac{K}{\omega} \sin \omega t \quad \dots (10)$$

समीकरण (4) से

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{qE}{m} - \frac{Bq}{m} v_x \\ &= K - \omega v_x \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad v_x = \frac{K}{\omega} - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dv_y}{dt}$$

किन्तु समीकरण (10) से

$$\frac{dv_y}{dt} = K \cos \omega t$$

$$\therefore v_x = \frac{K}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad \dots (11)$$

$$\text{चूँकि} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, \text{ तथा } v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \quad \dots (12)$$

अतः x तथा y का मान समीकरण (10), (11) तथा (12) का समाकलन कर प्राप्त किया जा सकता है, अतः

$$x = \frac{K}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) + k_1$$

$$y = -\frac{K}{\omega^2} \cos \omega t + k_2$$

$$\text{तथा} \quad z = k_3$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्धों $t = 0$ पर $x = y = 0$ से $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{K}{\omega^2}$ तथा $k_3 = 0$

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad x &= \frac{K}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) \quad \left(\because K = \frac{qE}{m} \text{ और } \omega = \frac{qB}{m} \right) \\ &= \frac{mE}{qB^2} (\omega t - \sin \omega t) \quad \dots (13) \end{aligned}$$

$$y = \frac{K}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{mE}{qB^2} (1 - \cos \omega t) \quad \dots (14)$$

$$\text{तथा} \quad z = 0 \quad \dots (15)$$

ये समीकरण (13) तथा (14) एक साइक्लाइड (cycloid) को निरूपित करते हैं जो एक सरल रेखा के अनुदिश वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दु के द्वारा प्रदर्शित वक्र है तथा चित्र 4.20 में प्रदर्शित है। Y -दिशा में महत्तम विस्थापन

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

$(y_{\max}), \cos \omega t = -1$ (अर्थात् $\omega t = \pi$) के लिए प्राप्त होगा तथा यह महत्तम मान होगा

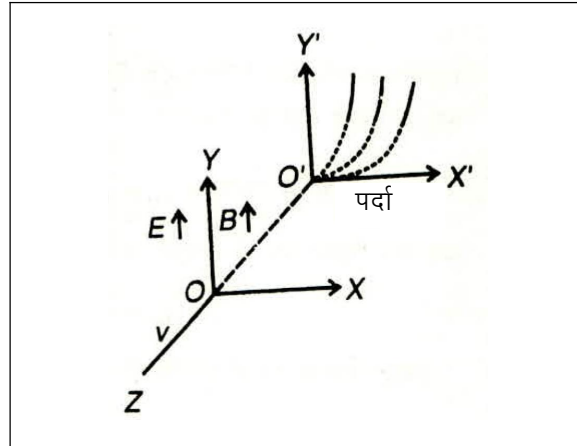
टिप्पणी

$$y_{\max} = \frac{2mE}{qB^2} \quad \dots (16)$$

क्रासित वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों की इस परिघटना का उपयोग सर जे.जे. थॉमसन ने इलेक्ट्रॉन के लिए q/m का मान ज्ञात करने के लिए किया।

4.15 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों का प्रभाव (Effect of Parallel Electric and Magnetic Fields)

एक गतिशील धन कण पर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के सम्मिलित प्रभाव की विवेचना के लिये माना m द्रव्यमान तथा $+q$ आवेश का एक धन कण v वेग से ऋणात्मक Z -अक्ष के अनुदिश गति कर रहा है। माना यह परस्पर समान्तर अनुप्रस्थ वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के परिक्षेत्र (region) से होकर गुजरता है, माना Y -अक्ष के अनुदिश है (चित्र 4.21)।



चित्र क्र. 4.21: परस्पर समान्तर E तथा B क्षेत्र में आवेशित कण का मार्ग

E वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा B चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता है।

$$\text{अतः } \vec{B} = B\hat{j}, \vec{E} = E\hat{j} \text{ तथा } \vec{v} = -v\hat{k} \quad \dots (1)$$

चुम्बकीय क्षेत्र के कारण – आवेशित कण पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लॉरेज बल

$$\begin{aligned} F &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= q[(-v\hat{k}) \times B\hat{j}] \\ &= (qvB)\hat{i}. \end{aligned} \quad \dots (2)$$

अर्थात् कण X -अक्ष के अनुदिश चुम्बकीय क्षेत्र B तथा v दोनों के लम्बवत् एक बल qvB का अनुभव करता है। विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

$$\therefore \text{कण का त्वरण } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{qvB}{m} \quad \dots (3)$$

चूँकि प्रारम्भ में X -दिशा में वेग शून्य है,
 X -अक्ष के अनुदिश कण का वेग

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at$$

अतः X -अक्ष के अनुदिश विस्थापन

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad \dots (4)$$

यदि चुम्बकीय क्षेत्र के परिक्षेत्र की लम्बाई l हो तो कण द्वारा इस दूरी को चलने में लिया गया समय $t = l/v$ होगा। अतः चुम्बकीय क्षेत्र से निर्गत होने के बाद कण का वेग

$$v_x = a \cdot t = a \cdot \frac{l}{v} = \frac{qvB}{m} \cdot \frac{l}{v} \quad \dots (5)$$

तथा इसका विस्थापन

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{qvB}{m} \cdot \left(\frac{l}{v}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{qBl^2}{mv} \quad \dots (6)$$

अब यदि पर्दा, चुम्बकीय क्षेत्र के अन्तिम बिन्दु से d दूरी पर रखा है तो इसे पार करने में लगा समय $t = \frac{d}{v}$ में पर्दे पर अतिरिक्त विस्थापन

$$x_2 = v_x \times \frac{d}{v} = \frac{qvB}{m} \times \frac{l}{v} \times \frac{d}{v} = \frac{qBld}{mv}$$

\therefore चुम्बकीय क्षेत्र के कारण पर्दे पर कुल विस्थापन $x = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{qBl^2}{2mv} + \frac{qBld}{mv} \\ x &= \frac{qB}{mv} \left(\frac{l^2}{2} + ld \right) \quad \dots (7) \end{aligned}$$

विद्युत क्षेत्र के कारण – विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = \hat{j}E$ के कारण आवेशित कण पर बल

$$\vec{F} = q\vec{E} = qE\hat{j} \quad \dots (8)$$

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

अर्थात् आवेशित कण पर Y -दिशा में बल qE लगता है जिसके कारण कण का त्वरण

टिप्पणी

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{qE}{m} \quad \dots (9)$$

Y -दिशा में कण द्वारा समय $t' (= l'/v)$ में प्राप्त वेग $v_y = a_y t'$

जहाँ l' विद्युत क्षेत्र की लम्बाई है।

$$\therefore Y\text{-दिशा में विस्थापन } y_1 = \frac{1}{2} a_y t'^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{l'}{v} \right)^2 = \frac{qEl'^2}{2mv^2} \quad \dots (10)$$

अब यदि विद्युत क्षेत्र के अन्तिम बिन्दु से पर्दे की दूरी d' हो तो समय t' में अतिरिक्त विस्थापन

$$y_2 = v_y \times \frac{d'}{v} = \frac{qE l'}{m v} \times \frac{d'}{v} = \frac{qEl'd'}{mv^2} \quad \dots (11)$$

\therefore विद्युत क्षेत्र के कारण पर्दे पर कुल विस्थापन $y = y_1 + y_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{qEl'^2}{2mv^2} + \frac{qEl'd'}{mv^2} \\ y &= \frac{qE}{mv^2} \left(\frac{l'}{2} + l'd' \right) \quad \dots (12) \end{aligned}$$

जहाँ l' वैद्युत क्षेत्र के परिक्षेत्र की लम्बाई तथा d' वैद्युत क्षेत्र के अन्तिम बिन्दु से पर्दे की दूरी है।

स्थिति I – जबकि q/m समान है लेकिन वेग v भिन्न-भिन्न हो।

यदि दोनों क्षेत्र समक्षणिक रूप से लिये जायें तो उनका सम्मिलित प्रभाव, समी. (7) तथा (12) से चर राशि v के विलोपन से प्राप्त होगा। अर्थात्

$$\frac{x^2}{y} = \frac{q}{m} \frac{B^2}{E} \left[\frac{\left(\frac{l'^2}{2} + ld' \right)^2}{\left(\frac{l'^2}{2} + l'd' \right)} \right] = A \quad (\text{नियतांक}) \quad \dots (13)$$

अतः $x^2 = Ay$

अतः B तथा E के लिए समी. (13) एक परवलय ($x^2 = Ay$ के रूप का) को निरूपित करती है जिसकी नाभिलम्ब जीवा (latus rectum) $\frac{q}{m}$ के समानुपाती

है। अतः स्थिर $\frac{q}{m}$ (अथवा $\frac{e}{m}$) के समस्त कणों का बिन्दुपथ एक परवलय है,

चूँकि समी (13) v से स्वतन्त्र है अतः समान $\frac{q}{m}$ अनुपात परन्तु विभिन्न वेगों के

कण एक ही परवलय के भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर पड़ेंगे।

टिप्पणी

समीकरण (13) से प्रदर्शित परवलय, प्रायोगिक रूप से सर्वप्रथम सर जे.जे. थॉमसन ने प्राप्त किये थे अतः ये 'थॉमसन परवलय' (Thomson Parabolas) कहलाते हैं। फोटोग्राफी प्लेट पर प्राप्त इन परवल्यों तथा उपकरण के नियतांकों के ज्ञान से विभिन्न रूपों के लिए $\frac{q}{m}$ के मान की गणना की जा सकती है।

स्थिति II – जबकि वेग v समान है किन्तु q/m कुछ भी हो।

यदि $\frac{q}{m}$ का विलोपन करने के लिए समी. (12) को समी. (7) से भाग दें, तो

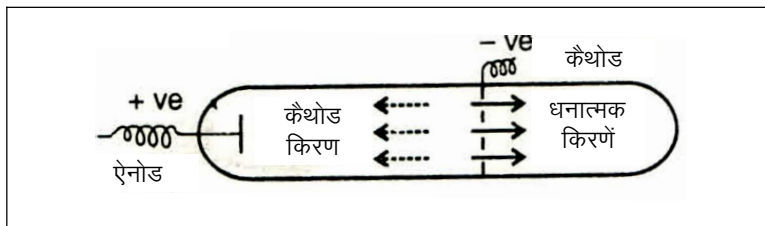
$$\frac{y}{x} = \frac{E}{vB} \cdot \frac{\left(\frac{l'^2}{2} + l'd'\right)}{\left(\frac{l^2}{2} + ld\right)} \quad \dots (14)$$

$$y = mx$$

वेग v के स्थिर मान के लिए समीकरण (14) एक सरल रेखा ($y = mx$ के रूप की) को निरूपित करती है।

4.16 समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण : धन किरणें तथा थॉमसन परवलय विधि तथा आइसोटोप की खोज (Charged Particle in Parallel Electric and Magnetic Fields; Positive Rays and Thomson Parabolas Method and Discovery of Isotopes)

एक कैथोड किरण नलिका जिसमें एक ओर ऐनोड तथा दूसरी ओर छिद्रित कैथोड उपस्थित रहता है में ऐनोड की विपरीत दिशा में अर्थात् कैथोड के पीछे एक ज्योति प्रेक्षित की जाती है। यह ज्योति कैथोड से होकर जाने वाले धनावेशित कणों के पुंज (streamers) के कारण होती है जो स्फुरदीप्ति (phosphorescence) उत्पन्न करती हैं। कणों के इस पुंज को **कैनेल किरणें** (canal rays) अथवा **धन किरणें** (positive rays) कहते हैं।



चित्र क्र. 4.22: कैथोड किरण नलिका

टिप्पणी

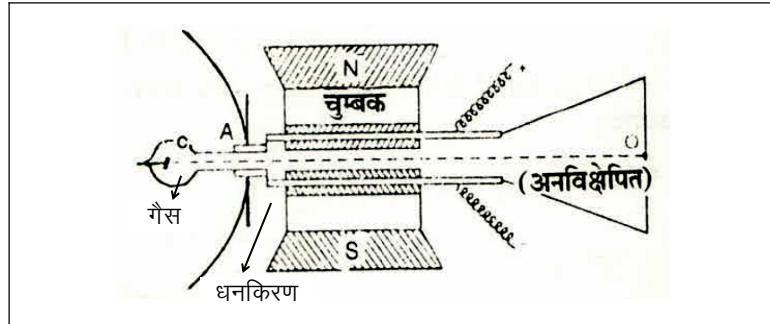
धन किरणों के गुण (Properties of Positive Rays)

- (1) ये किरणें वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों से विक्षेपित होती हैं परन्तु यह विक्षेप कैथोड किरणों के विक्षेप की विपरीत दिशा में होता है तथा इनकी धनात्मक प्रवृत्ति को प्रदर्शित करता है।
- (2) जब ये किरणें फोटोग्राफी प्लेट पर पड़ती हैं तो उसे प्रभावित करती हैं।
- (3) ये किरणें स्फुरदीप्ति उत्पन्न करती हैं।
- (4) ये पदार्थ की अल्प मोटाई का भेदन कर सकती हैं।
- (5) ये धातुओं को विघटित कर सकती हैं।
- (6) इनके परिवर्तनशील वेग होते हैं, अर्थात् धन किरण कणों के वेग समान नहीं होते।

धनात्मक किरणों के लिये q/m ज्ञात करने की थॉमसन की परवलय विधि—द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ (Determination of q/m of positive Rays by Thomson's Parabola Method : Mass Spectrograph)

(a) **उपकरण** — धनावेशित कणों के समूह को धन किरणें कहते हैं, धन कणों का आवेश q तथा द्रव्यमान m के अनुपात $\frac{q}{m}$ ज्ञात करने के लिये सर जे. जे.

थॉमसन ने सन् 1910 में एक प्रयोग किया जिसमें प्रयुक्त उपकरण को चित्र 4.23 में दिखाया गया है इसे थॉमसन की परवलय विधि कहते हैं। इसी विधि पर ही द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ (Mass Spectrograph) की कार्य-प्रणाली आधारित है, जिसका उपयोग तत्वों के समस्थानिक ज्ञात करने के लिये किया जाता है।



चित्र क्र. 4.23: थॉमसन की परवलय विधि

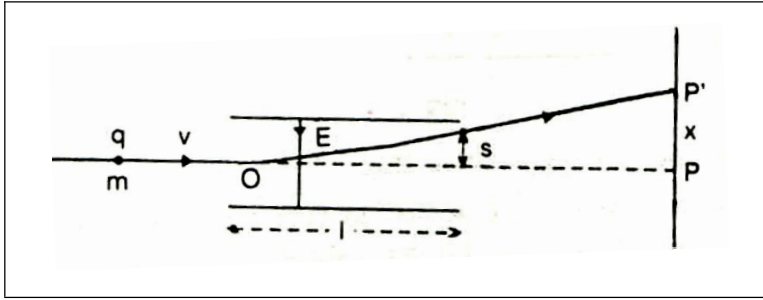
(b) **कार्य-प्रणाली (Working)** — इसमें धनात्मक किरण पुंज को विसर्जन नली से प्राप्त किया जाता है जो कैथोड द्वारा आकर्षित होते हैं, जिससे किरण पुंज तीव्र गति से नली के अक्ष के अनुदिश गति करते हैं इसके लिये उच्च तीव्रता का विद्युत् क्षेत्र उत्पन्न किया जाता है। चुम्बकीय क्षेत्र एवं विद्युत क्षेत्र की दिशाएँ परस्पर समान्तर रखते हुए धन आयन की गति की दिशा दोनों क्षेत्रों की दिशा के लम्बवत् रखी जाती है। अतः धन कणों में उनके पूर्व पथ से विचलन उत्पन्न हो जाता है, जिसे एक फोटोग्राफी प्लेट के पर्दे पर प्राप्त किया जाता है। इसी विचलन के आधार पर समस्थानिकों की पहचान की जाती है।

टिप्पणी

(c) सिद्धान्त (Theory) – माना कण का द्रव्यमान m तथा आवेश q है जो कि v वेग से क्षैतिज दिशा में गतिशील है। विद्युत तथा द्रव्यमान क्षेत्र की अनुपस्थिति में यह सीधे गति करते हुए पर्दे पर फोटोग्राफी प्लेट के केन्द्र P पर टकरायेगा तथा फोटोग्राफी प्लेट पर एक बिन्दु प्राप्त होगा। यदि विद्युत क्षेत्र \vec{E} आयन की गति की दिशा के लम्बवत् बाहर की ओर (अर्थात् z दिशा में) कार्य करता है। अतः विद्युत क्षेत्र के कारण विक्षेप y दिशा में तथा चुम्बकीय क्षेत्र के कारण विशेष z दिशा में होता है जिसमें अनापन का परिणाम मार्ग परवलयाकार होता है। तो विक्षेपक बल के कारण धन कण बिन्दु P से x दूरी पर स्थित बिन्दु P' पर टकराता है। इस विस्थापन x की गणना की जा सकती है।

(i) विद्युत क्षेत्र का प्रभाव – माना l लम्बाई तक धन कण पर विद्युत क्षेत्र E कार्य कर रहा है। अतः इस दूरी को तय करने में लगा समय

$$t = \frac{l}{v}$$



चित्र क्र. 4.24: वैद्युत क्षेत्र के कारण धन कण का विस्थापन

∴ धन कण का उसके प्रारम्भिक पथ से विस्थापन

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \dots (1)$$

जहाँ a विद्युत् क्षेत्र के कारण क्षेत्र की दिशा में लगने वाला त्वरण है।

धनायन पर विद्युत क्षेत्र के कारण बल

$$F = qE$$

अतः $qE = m \cdot a$

या धनायन का त्वरण अतः समीकरण (1) से

$$a = \frac{qE}{m}$$

$$\therefore s = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} \right) \left(\frac{l}{v} \right)^2 \quad \dots (2)$$

अब विद्युत क्षेत्र से निकलने के बाद कण सरल रेखीय गति करता है। अतः पर्दे पर चमकीले बिन्दु का विस्थापन

$$x \propto s$$

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

या $x = cs$

$$= \frac{c qE l^2}{2 m v^2} \quad \dots (3)$$

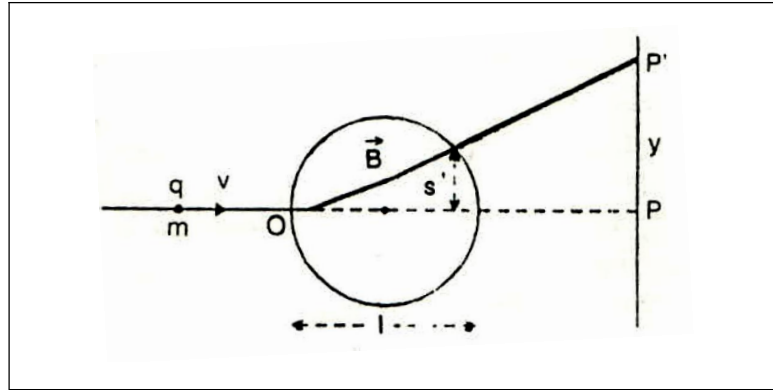
जहाँ c समानुपातिक स्थिरांक है।

(ii) चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव – यदि विद्युत क्षेत्र को हटाकर चुम्बकीय क्षेत्र B लगाया जाये, जिसकी दिशा विद्युत क्षेत्र की दिशा में हो, तो धन कण पर्दे पर बिन्दु P से y दूरी विस्थापित होता है, जो विस्थापन x के लम्बवत् रहेगा। यदि चुम्बकीय क्षेत्र की लम्बाई l' हो, तो इस क्षेत्र को पार करने में लगा समय

$$t' = \frac{l'}{v}$$

∴ क्षेत्र से निकलते समय धन कण का विस्थापन

$$s' = \frac{1}{2} a' t'^2$$



चित्र क्र. 4.25: चुम्बकीय क्षेत्र के कारण धन किरण का विस्थापन

जहाँ a' धन कण पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला त्वरण है तथा चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला बल

$$Bqv = ma'$$

या त्वरण $a' = \frac{Bqv}{m}$

$$s' = \frac{1}{2} \frac{Bqv}{m} \left(\frac{l'}{v} \right)^2 \quad \dots (4)$$

अतः पर्दे पर धन कण का विस्थापन

$$y \propto s'$$

या $y = c's'$

$$= \frac{c'}{2} \cdot \frac{Bqv}{m} \cdot \frac{l'^2}{v^2}$$

$$= \frac{c'Bql'^2}{2mv} \quad \dots (5)$$

जहाँ c' समानुपातिक स्थिरांक है।

(iii) दोनों क्षेत्र का प्रभाव – यदि दोनों क्षेत्र E तथा B एक साथ आरोपित किये जायें तथा क्षेत्रों के प्रारम्भिक को मूलबिन्दु माना जाये, तो पर्दे पर प्राप्त चमकीले बिन्दु का निर्देशांक (x, y) होगा। अतः समीकरण (3) और (5) से,

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x} &= \frac{\frac{c'^2 B^2 q^2 l'^4}{4m^2 v^2}}{\frac{cqEl^2}{2mv^2}} \\ &= \frac{c'^2 B^2 q l'^4}{2mcEl^2} \quad \dots (6) \end{aligned}$$

अब यदि $l' = l$ हो, तो समी. (6) से

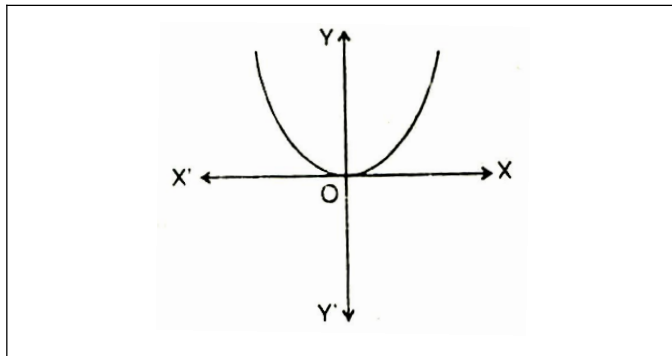
$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x} &= \frac{c'^2 B^2 l^2}{2cE} \left(\frac{q}{m} \right) \\ &= K \cdot \frac{q}{m} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

या $y^2 = K \frac{q}{m} \cdot x \quad \dots (8)$

जहाँ $K = \frac{c'^2 B^2 l^2}{2cE}$ एक स्थिरांक है। अब चूँकि समी. (7) एक परवलय का समीकरण है, अतः पर्दे पर हमें एक परवलय प्राप्त होगा। अब समीकरण (8) से,

$$\frac{q}{m} = \frac{y^2}{Kx} \quad \dots (9)$$

इस समीकरण (8) की सहायता से किसी धन कण के आवेश q तथा द्रव्यमान m का अनुपात ज्ञात किया जा सकता है। फोटोग्राफी प्लेट पर प्राप्त आरेख उपर्युक्त चित्र 4.26 के अनुसार होगा।



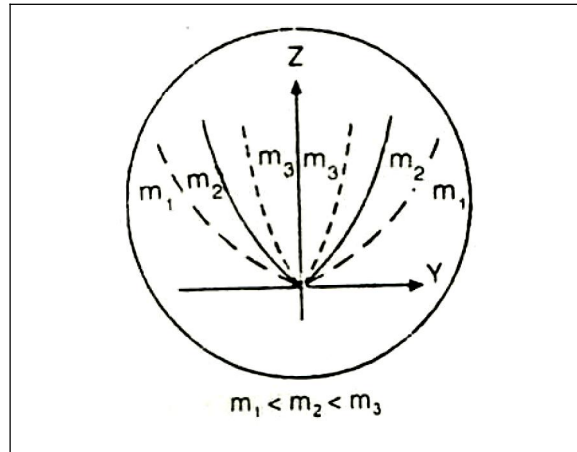
चित्र क्र. 4.26

टिप्पणी

आइसोटोप या समस्थानिक एक ही तत्व के वे परमाणु हैं जिनका परमाणु क्रमांक समान किन्तु परमाणु द्रव्यमान भिन्न-भिन्न होता है।

टिप्पणी

आइसोटोप (समस्थानिक) का परीक्षण – किसी गैस में यदि एक से अधिक समस्थानिक तत्व (Isotopes) उपस्थित हों, तो उपर्युक्त प्रयोग को इस गैस के साथ करने पर अलग-अलग आइसोटोप अलग-अलग परवलय की रचना करेंगे। इसका यह कारण है कि दो आइसोटोपों में प्रोटॉनों की संख्या समान होने के कारण उनके आवेश q के समान होंगे लेकिन न्यूट्रॉनों की संख्या अलग-अलग होने के कारण उनके द्रव्यमान अलग-अलग होंगे। अतः अलग-अलग आइसोटोपों (q/m) के मान अलग-अलग होंगे तथा प्रत्येक के लिये अलग-अलग परवलय प्राप्त होंगे; जैसा पार्श्व चित्र 4.27 में दर्शाया गया है। इस प्रकार विभिन्न द्रव्यमान के कण एक-दूसरे से अलग-अलग हो जायेंगे। सबसे हल्के आयन सबसे बड़े परवलय की रचना करेंगे। इस प्रकार विभिन्न आइसोटोपों के लिए हमें **द्रव्यमान स्पेक्ट्रम** प्राप्त होगा (जैसे अलग-अलग तरंगदैर्घ्य वाली प्रकाश पर्दे पर प्राप्त होने पर उसे हम स्पेक्ट्रम कहते हैं)। पर्दे पर प्राप्त इन विभिन्न परवलयों को हम **द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ** कहेंगे। ऐसे उपकरण जिनमें विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों को उचित रूप से समायोजित (Adjust) कर द्रव्यमान स्पेक्ट्रम प्राप्त करते हैं, **द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमीटर** (Mass spectrometer) कहते हैं। इस स्पेक्ट्रोमीटर की सहायता से किसी तत्व में उपस्थित विभिन्न आइसोटोपों की आपेक्षित बहुलता भी प्राप्त की जा सकती है, क्योंकि जिस आइसोटोप की संख्या अधिक है उसे संगत परवलय की तीव्रता (Intensity) उतनी ही अधिक होगी। इन परवलयों की तीव्रता ज्ञात करके विभिन्न आइसोटोपों का अनुपात भी ज्ञात किया जा सकता है परवलयों के नाभिलंब की लम्बाई ज्ञात करके अलग-अलग आइसोटोप के लिये q/m भी ज्ञात कर सकते हैं तथा q का मान ज्ञात होने पर विभिन्न आइसोटोपों का परमाणु द्रव्यमान m ज्ञात कर सकते हैं।



चित्र क्र. 4.27: निज्ञान के प्रति प्राप्त परवलय

4.17 द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफी के तत्व (Elements of Mass Spectrography)

टिप्पणी

रदरफोर्ड के परमाणु मॉडल के अनुसार प्रत्येक परमाणु का लगभग समस्त द्रव्यमान उसके केन्द्र पर नाभिक में केन्द्रित रहता है। अतः विभिन्न परमाणुओं का परमाणु द्रव्यमान (atomic mass) ज्ञात करके उसमें से इलेक्ट्रॉनों का द्रव्यमान घटाकर नाभिकीय द्रव्यमान (nuclear mass) ज्ञात किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, परमाणु द्रव्यमान ज्ञात करके एक ही तत्व के विभिन्न समस्थानिकों (isotopes) की खोज की जा सकती है तथा उनकी आपेक्षिक अधिकता (relative abundance) ज्ञात कर सकते हैं। परमाणु द्रव्यमान ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त युक्ति (device) को द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ कहते हैं।

द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ में जिस तत्व के परमाणु का द्रव्यमान ज्ञात करना होता है, विसर्जन नली में उस तत्व को गैस के रूप में लेते हैं जिससे कि कैथोड से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की टक्करों के फलस्वरूप नली में उस तत्व के धनायन उत्पन्न हो जाते हैं। इन धनायनों को विद्युत क्षेत्र E तथा चुम्बकीय क्षेत्र B से होकर गुजारते हैं। इन क्षेत्रों की दिशाएँ तथा स्थान इस प्रकार समंजित किये जाते हैं कि समान q/m वाले सभी धनायन एक ही वक्र (या बिन्दु) पर फोकसित हों (चाहे उनके वेग कुछ भी क्यों न हों) तथा विभिन्न q/m वाले धनायन विभिन्न बिन्दुओं पर फोकसित हों। चूँकि एक ही तत्व के सभी धनायनों के लिए आवेश q का मान समान होगा, अतः स्पेक्ट्रोग्राफ के पर्दे पर प्राप्त चित्र से विभिन्न बिन्दुओं (या वक्रों) से उस तत्व के विभिन्न परमाणु द्रव्यमान ज्ञात किये जा सकते हैं जिससे उस तत्व के विभिन्न आइसोटोपों का पता लगाया जा सकता है।

सबसे सरल द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ सन् 1912 में वैज्ञानिक जे. जे. थॉमसन द्वारा दिया गया था। इसमें धनायनों को एक साथ आरोपित परस्पर समान्तर विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्रों से होकर गुजारा जाता है जिससे कि पर्दे पर समान q/m वाले धनायनों से एक परवलय प्राप्त होता है। पर्दे पर प्राप्त विभिन्न परवल्यों की स्थिति का अध्ययन करके विभिन्न आइसोटोपों का द्रव्यमान ज्ञात किया जा सकता है। चूँकि इस विधि की यथार्थता कम थी तथा इससे विभिन्न आइसोटोपों की आपेक्षिक अधिकता नहीं ज्ञात की जा सकती थी, अतः सन् 1919 में वैज्ञानिक ऑस्टन (Aston) ने एक अन्य द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ की रचना की जिसमें विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों को इस प्रकार समंजित किया गया कि किसी एक विशिष्ट आवेश q/m के सभी धनायन (चाहे उनके वेग कुछ भी हों) एक बिन्दु पर फोकस किये गये। इस विधि की यथार्थता तथा सुग्राहिता थॉमसन विधि की अपेक्षा अधिक है। इस विधि द्वारा भी विभिन्न आइसोटोपों की आपेक्षिक अधिकता नहीं ज्ञात की जा सकी। तत्पश्चात् डेम्पस्टर (Dempster) ने एक ऐसे द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ की रचना की जिसमें 180° चुम्बकीय विक्षेपण सिद्धान्त का उपयोग द्वारा समान q/m मान वाले धनायनों को एक स्लिट से गुजारकर एक संसूचक (जैसे, इलेक्ट्रोमीटर) पर डाला जाता है तो उस पर आपतित धनायनों की आपेक्षिक अधिकता के अनुसार आयनन धारा नापता है। इस प्रकार, आयनन धारा

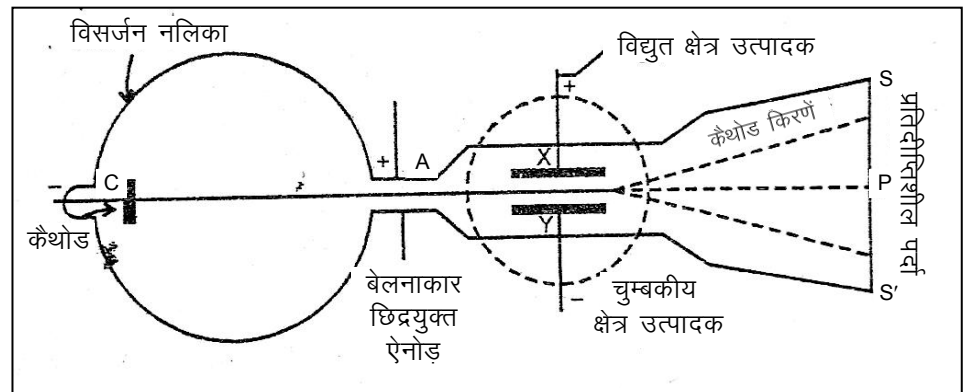
टिप्पणी

4.18 इलेक्ट्रॉन का विशिष्ट आवेश $\frac{e}{m}$ ज्ञात करने की थॉमसन विधि (Determination of Specific Charge $\frac{e}{m}$ of Electron by Thomson's Method)

सर्वप्रथम सन् 1897 में जे.जे. थॉमसन (J.J. Thomson) ने इलेक्ट्रॉन के विशिष्ट आवेश (अर्थात् इलेक्ट्रॉन के आवेश और द्रव्यमान का अनुपात = e/m) का मान ज्ञात किया था। उनका प्रयोग निम्न तथ्यों पर आधारित हैं—

- गतिमान इलेक्ट्रॉन विद्युत् धारा के समतुल्य (Equivalent) होते हैं।
- इलेक्ट्रॉन आवेशित कण होते हैं। अतः विद्युत् क्षेत्र और चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा विक्षेपित किये जा सकते हैं।

प्रायोगिक प्रबन्ध (Experimental Arrangement) – चित्र 4.28 में दर्शाये अनुसार एक विसर्जन नलिका होती है जिसके अन्दर भरी गैस का दाब 0.01 मिमी (पारा) होता है। इसके कैथोड C और ऐनोड A के मध्य उच्च विभवान्तर (10 kV से 15 kV के क्रम का) लगाया जाता है। कैथोड C का तल समतल होता है किन्तु ऐनोड A बेलनाकार होता है जिसके अन्दर बारीक छिद्र बना होता है। इस छिद्र से इलेक्ट्रॉन बारीक पुँज के रूप में बाहर निकलते हैं। यह पुँज एकसमान वेग में सरल रेखा में चलकर प्रतिदीप्तिशील पर्दा SS' पर टकराता है। फलस्वरूप पर्दे के बिन्दु P पर एक चमकीला धब्बा प्राप्त होता है।



चित्र क्र. 4.28: परस्पर लंबवत विद्युत क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन की गति

नलिका के अन्दर धातु की दो समान्तर प्लेटें X और Y होती हैं, जिनके मध्य विद्युत् विभवान्तर लगाकर कागज के तल में विद्युत् क्षेत्र उत्पन्न किया जा सकता है। यह क्षेत्र इलेक्ट्रॉन पुँज के मार्ग के लम्बवत् होता है।

टिप्पणी

एक विद्युत् चुम्बक की सहायता से विद्युत् क्षेत्र और इलेक्ट्रॉन पुँज दोनों के लम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र लगाया जाता है। यह चुम्बकीय क्षेत्र कागज के तल के लम्बवत् होता है। चुम्बकीय क्षेत्र को चित्र में बिन्दुदार वृत्त से प्रदर्शित किया गया है। ध्यान रहे कि विद्युत् बल रेखायें और चुम्बकीय बल रेखायें एक ही क्षेत्र में होती हैं।

सिद्धान्त (Theory) – जब इलेक्ट्रॉन पुँज के मार्ग में कोई भी क्षेत्र उपस्थित नहीं होता तो इलेक्ट्रॉन सरल रेखा में चलकर पर्दा SS' के बिन्दु P पर टकराते हैं।

प्लेटों X और Y के मध्य इलेक्ट्रॉन पुँज की गति के लम्बवत् विद्युत् क्षेत्र लगाने पर इलेक्ट्रॉन धन प्लेट की ओर आकर्षित होकर ऊपर की ओर विक्षेपित होते हैं, किन्तु जब अकेला चुम्बकीय क्षेत्र लगाया जाता है तो इलेक्ट्रॉन नीचे की ओर विक्षेपित होते हैं।

माना कि इलेक्ट्रॉन पुँज का वेग v तथा प्रत्येक इलेक्ट्रॉन पर आवेश की मात्रा e है।

यदि विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता E हो, तो विद्युत् क्षेत्र के कारण एक इलेक्ट्रॉन पर लगने वाला बल $= eE$

यदि चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B हो, तो चुम्बकीय क्षेत्र के कारण उसी इलेक्ट्रॉन पर लगने वाला बल $= evB$

यदि दोनों क्षेत्र एक साथ लगाये जायें तथा उनका समायोजन इस प्रकार किया जाये कि इलेक्ट्रॉन पुँज में कोई विक्षेप न हो, तो

विद्युत् क्षेत्र के कारण लगने वाला बल $=$ चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाला बल

$$\therefore eE = evB$$

$$\text{या } v = \frac{E}{B} \quad \dots (1)$$

अब यदि कैथोड किरण के पथ पर केवल चुम्बकीय क्षेत्र आरोपित करने पर क्षेत्र में किरण का पथ r त्रिज्या का वृत्त हो तो कण पर लगने वाला अभिकेन्द्र और उपकेन्द्र बल समान होता है। अर्थात्

$$Bev = \frac{mv^2}{R}$$

$$\text{या } \frac{e}{m} = \frac{v}{RB} \quad \dots (2)$$

इस सूत्र में यदि v तथा R का मान ज्ञात हो, तो e/m का मान ज्ञात किया जा सकता है। v का मान समीकरण (1) से प्राप्त किया जाता है।

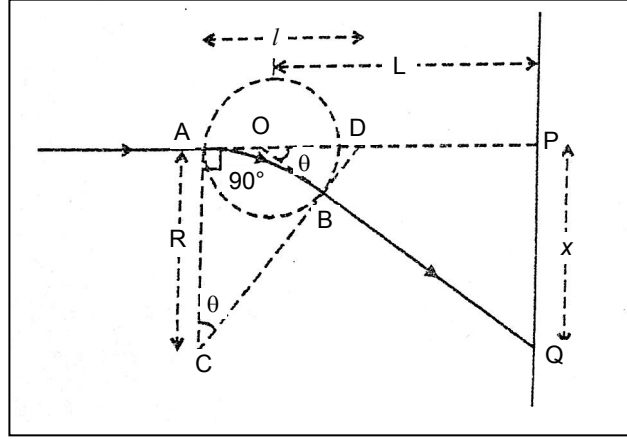
R का मान ज्ञात करने के लिये माना कि चुम्बकीय क्षेत्र से बाहर निकलने के बाद इलेक्ट्रॉन का पथ चित्र 4.29 के अनुसार होता है तथा पर्दे पर बिन्दु Q पर

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

टकराता है। इलेक्ट्रॉन का पथ चुम्बकीय क्षेत्र में वृत्तीय होता है, जबकि इसके बाहर स्पर्श रेखीय दिशा में होता है। यदि बिन्दु A तथा B पर खींची स्पर्श रेखायें बिन्दु O पर θ कोण बनाते हैं, तो $\angle POQ = \angle ACB = \theta$ होगा। यदि इलेक्ट्रॉन का पर्दे पर विस्थापन $PQ = x$, चुम्बकीय क्षेत्र की लम्बाई l एवं O से पर्दे पर दूरी L हो, तो समकोण विद्युत् OPQ से,

$$\tan \theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{x}{L} \quad \dots (3)$$



चित्र क्र. 4.29: चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन का मार्ग

तथा समकोण $\triangle ACD$ से,

$$\tan \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{l}{R} \quad \dots (4)$$

अतः समीकरण (3) तथा (4) से,

$$\frac{x}{L} = \frac{l}{R} \quad \text{या} \quad R = \frac{lL}{x} \quad \dots (5)$$

अतः समी. (1), (2) और (5) से,

$$\frac{e}{m} = \frac{Ex}{B^2 lL} \quad \dots (6)$$

अब यदि प्लेटों के बीच की दूरी d तथा विभवान्तर V हो, तो $E = V/d$ होता है। अतः

$$\frac{e}{m} = \frac{Vx}{B^2 lLd} \quad \dots (7)$$

इस सूत्र की सहायता से इलेक्ट्रॉन का विशिष्ट आवेश e/m ज्ञात किया जाता है।

4.19 वेग वरणक (Velocity Selector)

टिप्पणी

एक दूसरे पर लम्बवत् एकसमान विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के संयोग को वेग वरणक के रूप में उपयोग में लाया जा सकता है। माना कि विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र (E तथा B) क्रमशः Y तथा Z -अक्षों के अनुदिश हैं तथा एक आवेशित कण दोनों के लम्बवत् दिशा में इस क्षेत्र से गुजरता है, अर्थात् मूल बिन्दु पर $v_y = 0$, $v_z = 0$ तथा $v_x \neq 0$ । अतः एक धनावेशित कण के लिये विद्युत क्षेत्र के कारण बल लगने वाला qE धनात्मक Y -अक्ष के अनुदिश तथा चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल qBv_x , ऋणात्मक Y -अक्ष की दिशा में कार्यरत है। यदि $v_y = 0$, अर्थात् यदि दोनों बल एक-दूसरे को ठीक सन्तुलित करेंगे तो

$$qBv_x = qE \quad \dots (1)$$

$$\text{अर्थात्} \quad v_x = \frac{E}{B} \quad \dots (2)$$

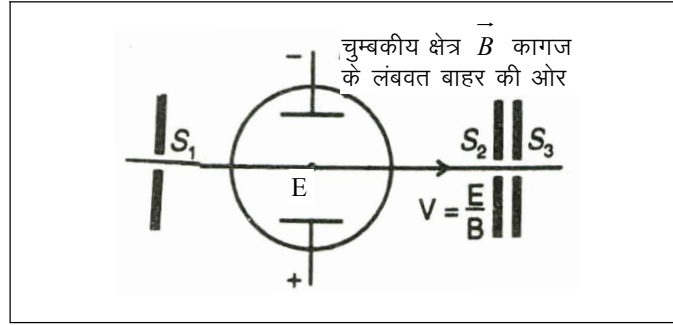
यदि यह प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है तो आवेशित कण किसी बल का अनुभव नहीं करेगा तथा एक सरल रेखा के अनुदिश स्थिर वेग से बिना किसी विक्षेप के चलेगा, अतः B तथा E के निश्चित परिमाणों के लिए v_x का केवल एक ही मान समीकरण (2) को सन्तुष्ट करेगा, v_x के अतिरिक्त किसी अन्य वेग से चलने वाला कण विचलित हो जायेगा। अतः B अथवा E के समंजन से किसी इच्छित वेग के कणों का चयन सम्भव है। अतः यह निकाय, आवेशित कणों के लिए फिल्टर का कार्य करता है क्योंकि यह केवल उन्हीं का चयन करता है जिनका योग $\frac{E}{B}$ के बराबर है। ऐसे निकाय को वेग चयनकारी या वेग वरणक (velocity selector) कहते हैं। यह विधि वेगों के चयन में कणों के आवेश तथा द्रव्यमान से स्वतन्त्र है तथा $v_x = \frac{E}{B}$ वेग के समस्त कण, चाहे इनका द्रव्यमान अथवा आवेश कुछ भी क्यों न हो, अविक्षेपित ही गुजरते हैं।

वेग चयनकारी में प्रयुक्त उपकरण विन्यास चित्र 4.30 में प्रदर्शित है। आवेशित कणों का एक संकीर्ण पुंज एक स्लिट S_1 से निर्गत होकर परस्पर लम्बवत् विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के परिक्षेत्र से होकर गुजरता है। चुम्बकीय क्षेत्र प्रायः एक विद्युत चुम्बक की सहायता से कागज के तल के लम्बवत् आरोपित किया जाता है, विद्युत क्षेत्र के लिए X -अक्ष के समान्तर रखी दो प्लेटों के बीच उच्च विभवान्तर आरोपित किया जाता है। अतः विद्युत क्षेत्र कागज के तल के समान्तर (अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत्) तथा पुंज की दिशा के लम्बवत् होगा। इस स्थिति में दोनों क्षेत्र आवेशित कण पर विपरीत दिशाओं में बल आरोपित करेंगे तथा यदि इन दोनों को इस प्रकार समंजित किया जाये कि दोनों क्षेत्रों द्वारा आरोपित बल बराबर तथा विपरीत होकर निरस्त हो जायें तो वे आवेशित कण जिनकी चाल E/B होगी अविक्षेपित गुजर जायेंगे। यदि इन अविक्षेपित कणों को एकत्रित करने के लिए स्लिटों S_2 तथा S_3 की श्रेणी का उपयोग किया जाये

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

तो हमें समान चाल के कणों के पुंज प्राप्त होंगे। स्लिटों S_2 तथा S_3 की दूसरी ओर केवल वही कण प्राप्त होंगे जिनका वेग E/B होगा तथा अन्य कण विक्षेपित होंगे किन्तु प्लेटों से टकराकर वहीं रुक जायेंगे।



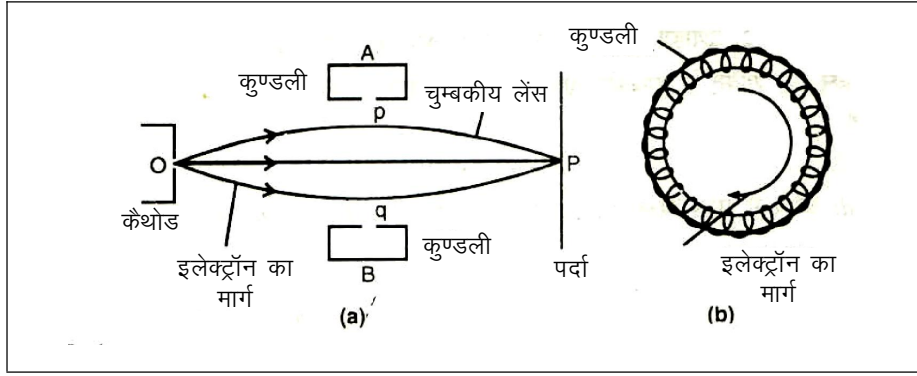
चित्र क्र. 4.30: वेग वरणक

4.20 चुम्बकीय फोकसिंग (लेंस) का सिद्धान्त [Principle of Magnetic Focussing (or Lens)]

कैथोड किरण कम्पनदर्शी (CRO) में इलेक्ट्रॉन गन से निकलने वाला अभिसरित (convergent) इलेक्ट्रॉन पुंज की पारस्परिक प्रतिकर्षण के फलस्वरूप फैलने की प्रवृत्ति होती है, अतः पर्दे पर पुंज का तीव्र फोकस प्राप्त करने के लिए फोकसिंग युक्ति की आवश्यकता होती है। फोकसिंग दो प्रकार से की जा सकती है – (i) विद्युत फोकसिंग तथा (ii) चुम्बकीय फोकसिंग। चुम्बकीय फोकसिंग के लिए यदि कोई इलेक्ट्रॉन v वेग से एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में क्षेत्र की दिशा के साथ θ कोण बनाते हुए प्रवेश करता है तथा आवर्तकाल $T = \frac{2\pi m}{Be}$ होता है।

अतः स्पष्ट है कि आवर्तकाल T कोण θ पर निर्भर नहीं करता तथा पिच p का मान चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता B पर निर्भर करता है।

चुम्बकीय फोकसिंग के लिये कुण्डली की अक्ष को इलेक्ट्रॉन पुंज की अक्ष से संपाती रखकर कुण्डली में धारा प्रवाहित करके चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न किया जाता है। अतः चुम्बकीय फोकसिंग के लिये कैथोड किरण कम्पनदर्शी एक कुण्डली की अक्ष को इलेक्ट्रॉन गन से उत्सर्जित इलेक्ट्रोड की अक्ष से संपाती रखकर कुण्डली में धारा प्रवाहित करके चुम्बकीय क्षेत्र B उत्पन्न किया जाता है। चित्र 4.31 में PQ विद्युत चुम्बक की कुण्डली की काट है। कुण्डली की अक्ष OA इलेक्ट्रॉन पुंज की अक्ष से संपाती है RS गेप में प्रबल चुम्बकीय क्षेत्र है। बिन्दु O से आने वाला इलेक्ट्रॉन पुंज के बिन्दु A पर फोकस होता है इस विधि का उपयोग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में किया जाता है। अतः सभी इलेक्ट्रॉन चाहे जिस दिशा में चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करे एक ही बिन्दु पर फोकस होते हैं तो इसका मार्ग कुण्डलिनीवत होता है तथा कुण्डलिनी की पिच $p = \frac{2\pi m v \cos \theta}{Be}$ होती है।



चित्र क्र. 4.31: चुम्बकीय फोकसिंग

माना इलेक्ट्रॉन पुंज V वेग से चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा से θ कोण बनाते हुए उत्सर्जित होता है। इस वेग के दो घटक हैं $\langle r \rangle$ चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर घटक $V_1 = V \cos \theta$ $\langle r \rangle$ चुम्बकीय क्षेत्र के लंबवत् घटक $V_2 = V \sin \theta$ । अतः ऋण आवेशित कण वेग $V_1 = V \cos \theta$ से चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में चलने की चेष्टा करता है जबकि वेग $V_2 = V \sin \theta$ के कारण चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कण पर लगा बल $F = q (V \sin \theta) B$ है कण को वृत्ताकार मार्ग में चलाने की चेष्टा करता है

अतः

$$q (V \sin \theta) B = \frac{m(V \sin \theta)^2}{r}$$

$$\text{या वृत्तीय मार्ग की त्रिज्या } r = \frac{mV \sin \theta}{qB} \quad \dots (1)$$

$$\text{तथा आवर्तकाल } T = \frac{2\pi r}{V \sin \theta} = \frac{2\pi m}{qB}$$

कण के वेग के दोनों घटकों के कारण कण का परिणामी मार्ग कुण्डलिनीवत् होता है; अतः फोकसन दूरी

$$l = (\text{चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में कण के वेग का घटक}) \\ \times \text{आवर्तकाल} \\ = V \cos \theta \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\text{किन्तु इलेक्ट्रॉन पुंज द्वारा ऊर्जित ऊर्जा } \frac{1}{2} mV^2 = qV$$

$$\text{अतः वेग } V = \frac{\sqrt{2qV}}{m}$$

अतः

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में
आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

$$\begin{aligned} \text{फोकस दूरी } l &= \sqrt{\frac{2qV}{m}} \cos \theta \times \frac{2\pi m}{qB} \\ &= \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}} \cos \theta \end{aligned}$$

इस विधि का मुख्यतः उपयोग इलेक्ट्रॉन सुक्ष्मदर्शी में किया जाता है।

4.21 आंकिक उदाहरण (Numerical Example)

उदाहरण 1 – एक 180° चुम्बकीय फोकस प्रयोग में फोकसित रेखा की चौड़ाई का परिकलन कीजिए, यदि मध्यमान पथ से पुंज का आरम्भिक अपसरण (divergence) 2° तथा वृत्ताकार पथ की वक्रता त्रिज्या 30 सेमी हो।

हल – फोकसित रेखा की चौड़ाई

$$\begin{aligned} &= r\theta^2 \\ &= 30 \left[\frac{2\pi}{180} \right]^2 \quad \left(\because 2^\circ = \frac{2\pi}{180} \text{ रेडियन} \right) \\ &= \frac{30 \times (2 \times 3.14)^2}{(180)^2} \\ &= 0.03 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

उदाहरण 2 – X-दिशा में गतिशिल धन-आयनों का एक पुंज एक ऐसे क्षेत्र में प्रवेश करता है जिसमें एक विद्युत क्षेत्र $E_y = 3000$ वोल्ट/सेमी तथा चुम्बकीय क्षेत्र $B_z = 300$ गॉस है। उन आयनों की चाल का परिकलन कीजिए जो इस क्षेत्र से अविक्षेपित चले जायेंगे। उन आयनों का क्या होगा जो इनकी तुलना में (i) तीव्र (ii) धीमे होंगे?

हल – दिया है –

$$\begin{aligned} E_y &= 3000 \text{ वोल्ट/सेमी} \\ &= 3 \times 10^5 \text{ वोल्ट/सेमी} \end{aligned}$$

$$B_z = 300 \text{ गॉस} = 300 \times 10^{-4} \text{ वेबर/मी}^2 = 3 \times 10^{-2} \text{ वेबर/मी}^2$$

आयन तभी अविक्षेपित रहेगा जबकि विद्युत क्षेत्र के कारण बल, चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल को ठीक सन्तुलित करेगा, अर्थात्

$$qE_y = qB_z v_x$$

$$\text{अथवा} \quad v_x = \frac{E_y}{B_z} = \frac{3 \times 10^5}{3 \times 10^{-2}} = 10^7 \text{ मी/से}$$

(i) 10^7 मी/से. से अधिक वेग वाले कणों के लिए ऋणात्मक Y -अक्ष के अनुदिश चुम्बकीय बल धनात्मक Y -अक्ष के अनुदिश वैद्युत बल से अधिक होगा अतः ऋणात्मक Y -दिशा में एक नैट विक्षेपण प्राप्त होगा।

(ii) 10^7 मी/से. से कम वेग वाले कणों के लिए धनात्मक Y -दिशा के अनुदिश वैद्युत बल ऋणात्मक Y -अक्ष की ओर दृष्ट चुम्बकीय बल से अधिक होगा, जिसके कारण धनात्मक Y -दिशा के अनुदिश विक्षेप प्राप्त होगा।

उदाहरण 3 – $(3i + 2j) \times 10^6$ मी/से वेग का एक प्रोटॉन $(2000j + 3000k)$ गॉस के चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करता है। त्वरण का परिकलन कीजिए। उस समक्षणिक वैद्युत क्षेत्र को भी ज्ञात कीजिए जोकि कण को अविक्षेपित रख सके।

हल – ज्ञात है – $\vec{v} = (3i + 2j) \times 10^6$ मी/से

तथा $B = (2000j + 3000k)$ गॉस = $(0.2j + 0.3k)$ वेबर/मी²

चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल

$$\begin{aligned} F_m &= q(\vec{v} \times B) = (1.6 \times 10^{-19})(3i + 2j) \times 10^6 \\ &\quad \times (0.2j + 0.3k) \\ &= 1.6 \times 10^{-14}(6k - 9j + 6i) \\ &= 4.8 \times 10^{-14}(2i - 3j + 2k) \text{ न्यूटन} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्वरण} = a &= \frac{\text{बल}}{\text{द्रव्यमान}} = \frac{4.8 \times 10^{-14}(2i - 3j + 2k)}{1.6 \times 10^{-27}} \\ &= 3 \times 10^{13}(2i - 3j + 2k) \text{ मी/से}^2 \end{aligned}$$

अब कण को अविक्षेपित रखने के लिए, वैद्युत क्षेत्र के कारण बल, चुम्बकीय क्षेत्र के कारण लगने वाले बल से ठीक सन्तुलित होना चाहिए, अर्थात्

$$qE = q(\vec{v} \times B)$$

$$\begin{aligned} \text{अथवा} \quad E &= \vec{v} \times B = (3i + 2j) \times 10^6 \times (0.2j + 0.3k) \\ &= 10^5(6k - 9j + 6i) \\ &= 3 \times 10^5(2i - 3j + 2k) \text{ वोल्ट/मीटर।} \end{aligned}$$

उदाहरण 4 – 2.5×10^5 मी/से वेग के प्रोटॉनों के एक पुंज को, 2 मिमी अन्तराल की दो समान्तर प्लेटों के बीच के अन्तराल से गुजारा जाता है। प्लेटों को 100 वोल्ट का विभवान्तर देकर एक वैद्युत क्षेत्र आरोपित किया जाता है। इस चुम्बकीय क्षेत्र की सामर्थ्य का परिकलन कीजिए जिसे जब वैद्युत क्षेत्र तथा पुंज

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

दोनों की दिशा के लम्बवत् आरोपित किया जाए तो वैद्युत क्षेत्र के परिक्षेत्र से प्रोटॉन अविक्षेपित गुजर जायें।

टिप्पणी

हल – दिये क्षेत्र में प्रोटॉन पुंज तभी अविक्षेपित गुजरेगा जबकि वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों द्वारा आरोपित बल परस्पर बराबर तथा विपरीत हों, अर्थात्

$$qE = qvB$$

अथवा $B = \frac{E}{v}$

यहाँ $E = \frac{V}{d} = \frac{100 \text{ वोल्ट}}{2 \times 10^{-3} \text{ मीटर}} = 5 \times 10^4 \text{ वोल्ट/मीटर}$

तथा $v = 2.5 \times 10^5 \text{ मी/से}$

आवश्यक चुम्बकीय क्षेत्र,

$$B = \frac{E}{v} = \frac{5 \times 10^4}{2.5 \times 10^5} = 0.2 \text{ वेबर/मी}^2$$

उदाहरण 5 – 1000 गॉस के एक चुम्बकीय क्षेत्र को, परस्पर 2 सेमी दूरी पर रखी 600 वोल्ट विभवान्तर की दो प्लेटों के बीच के विद्युत क्षेत्र से क्रासित किया जाता है। उस आवेशित कण का वेग क्या होना चाहिए जो दोनों क्षेत्रों के लम्बवत् दिशा में अविक्षेपित जा सके?

हल – आवेशित कण तभी अविक्षेपित जा सकेंगे जबकि उनका वेग v निम्न प्रकार होगा –

$$qE = qvB$$

अथवा $v = \frac{E}{B}$

यहाँ $E = \frac{V}{d} = \frac{600 \text{ वोल्ट}}{2 \times 10^{-2} \text{ मीटर}} = 3 \times 10^4 \text{ वोल्ट/मीटर}$

$$B = 100 \text{ गॉस} = 1000 \times 10^{-4} \text{ वेबर/मी}^2 = 0.1 \text{ वेबर/मी}^2 \text{ अथवा टेस्ला}$$

अतः अविक्षेपित जाने के लिये आवेशित कणों का ऊष्मीय वेग

$$V = \frac{E}{B} = \frac{3 \times 10^4}{0.1} = 30 \times 10^5 \text{ मी/से}$$

टिप्पणी

उदाहरण 6 – एक धन आयन पुंज जिसमें विभिन्न वेगों के एकल आयनित हीलियम परमाणु तथा α -कण हैं। ऋणात्मक Z -अक्ष के अनुदिश गति कर रहा है। इसे परस्पर समान्तर परन्तु अनुप्रस्थ वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के परिक्षेत्र से गुजार कर एक पर्दे पर आपतित किया जाता है। पर्दे पर दो परवलयकार वक्र प्राप्त होते हैं। छोटे परवलय में किसी y -विस्थापन के लिए x -विस्थापन 1.5 सेमी है। समान y -विस्थापन से सम्बद्ध बड़े परवलय के लिए x -विस्थापन प्राप्त कीजिए।

हल – पर्दे पर प्राप्त परवलय का रूप निम्न होगा—

$$\frac{x^2}{y} = k \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{B^2}{E} \quad \text{अथवा} \quad x^2 = k' \left(\frac{q}{m} \right) Y$$

जहाँ k', B, E अथवा उपकरण की ज्यामिति पर आधारित नियतांक है।

चूँकि He^+ आयनों के लिए q/m का मान कम होता है अतः उनसे छोटा परवलय प्राप्त होता है जबकि बड़ा परवलय α -कणों से सम्बद्ध होगा। अतः

$$\frac{x_\alpha}{x_{He^+}^+} = \sqrt{\frac{\left(\frac{q}{m} \right)_\alpha}{\left(\frac{q}{m} \right)_{He^+}^+}} \quad (\text{चूँकि } y \text{ विस्थापन समान है})$$

$$= \sqrt{2} \quad \left[\because \left(\frac{q}{m} \right)_\alpha = 2 \left(\frac{q}{m} \right)_{He^+} \quad \text{चूँकि } He^+ \right]$$

तथा α -कण दोनों का द्रव्यमान समान है परन्तु $q_\alpha = 2q_{He^+}$

अथवा $x_\alpha = \sqrt{2} x_{He^+}^+ = \sqrt{2} \times 1.5 = 2.115$ सेमी।

उदाहरण 7 – एक धन किरण उपकरण में एकल आयनित तथा द्वि-आयनित (doubly ionized) कण एकसमान परवलय बनाने हैं जबकि चुम्बकीय क्षेत्र क्रमशः 5000 तथा 7500 गॉस हैं। वैद्युत क्षेत्र को समान मानते हुए दोनों कणों के द्रव्यमानों की तुलना कीजिए।

हल – प्राप्त परवलय का निम्न प्रकार का समीकरण होता है –

$$\frac{x^2}{y} = k \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{B^2}{E} \quad \text{जहाँ } k \text{ उपकरण की ज्यामिति पर आधारित नियतांक}$$

है। एकल आयनित कण के लिए $q = e$, अतः

$$\frac{x^2}{y} = k \cdot \frac{e}{m_1} \cdot \frac{B_1^2}{E} \quad \dots (1)$$

द्वि-आयनित कण के लिए $q = 2e$, अतः

$$\frac{x^2}{y} = k \cdot 2 \frac{e}{m_2} \cdot \frac{B_2^2}{E} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

समीकरण (1) को (2) से भाग देने पर

$$\frac{B_1^2}{m_1} = \frac{2B_2^2}{m_2}$$

अथवा
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{B_1^2}{2B_2^2} = \frac{(5000)^2}{2(7500)^2} = \frac{2}{9}$$

उदाहरण 8 – 10^4 गॉस के चुम्बकीय क्षेत्र में $c/6$ वेग से गति कर रहे प्रोटॉन के लिए साइक्लोट्रॉन कक्षा की त्रिज्या का परिकलन कीजिए। आपेक्षिक सुधार को नगण्य मानिये। c प्रकाश का वेग है।

हल – साइक्लोट्रॉन कक्षा की त्रिज्या, $r = \frac{mv}{qB}$

यहाँ $m = 1.67 \times 10^{-27}$ किग्रा, $v = c/6 = (3 \times 10^8 / 6)$ मी/से²

$q = 1.67 \times 10^{-19}$ कूलम्ब, $B = 10^4$ गॉस = 1 वेबर/मी²

$\therefore r = \frac{1.6 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8 / 6)}{1.67 \times 10^{-19} \times 1} = 0.48$ मीटर।

उदाहरण 9 – एक साइक्लोट्रॉन की प्रत्येक डी की त्रिज्या 50 सेमी है तथा ये 3 वेबर/मी² के चुम्बकीय क्षेत्र में रखी है, उस दोलित्र की आवृत्ति का परिकलन कीजिए जो (i) प्रोटॉन, (ii) α -कण को त्वरित कर सके। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त स्वरूप ऊर्जा का परिकलन भी कीजिए।

हल – साइक्लोट्रॉन में एक आवेशित कण की गति का समीकरण

$$\frac{mv^2}{r} = qvB, \text{ अर्थात् } \frac{v}{r} = \omega = \frac{qB}{m}$$

\therefore दोलित्र की आवृत्ति, $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$

(i) प्रोटॉन के लिए, $q = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलम्ब, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ किग्रा

$\therefore n = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 3}{2 \times 3.14 \times 1.67 \times 10^{-27}} = 4.684 \times 10^7$ चक्कर/सेकण्ड

प्रोटॉन द्वारा प्राप्त महत्तम ऊर्जा

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2(2\pi n)^2 \\ &= 2\pi^2mr^2n^2 \\ &= 2 \times (3.14)^2 \times (1.67 \times 10^{-27}) \times (0.50)^2 \\ &\quad \times (4.684 \times 10^7)^2 \text{ जूल} \end{aligned}$$

टिप्पणी

$$\begin{aligned} & \frac{2 \times (3.14)^2 \times (1.67 \times 10^{-27}) \times (0.50)^2}{1.6 \times 10^{-19}} eV \\ & \times (4.684 \times 10^7) \\ & = 112.8 \times 10^6 eV = 112.8 MeV. \end{aligned}$$

(ii) एक α -कण के लिए,

$$q = 2e = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलम्ब}$$

$$m = 4 \times \text{प्रोटॉन का द्रव्यमान} = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ किग्रा}$$

$$\begin{aligned} \therefore n = \frac{qB}{2\pi m} &= \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3}{2 \times 3.14 \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27}} \\ &= 2.342 \times 10^7 \text{ चक्कर/सेकण्ड} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore E_{\max} &= \frac{1}{2} mv^2 = 2\pi^2 mr^2 n^2 \\ &= 2 \times (3.14)^2 \times (4 \times 1.67 \times 10^{-27}) \times (0.50)^2 \\ &\quad \times (2.342 \times 10^7)^2 \text{ जूल} \\ &= 180.6 \times 10^{-13} \text{ जूल} \\ &= \frac{180.6 \times 10^{-13}}{1.6 \times 10^{-19}} MeV \\ &= 112.8 MeV \end{aligned}$$

स्पष्ट है कि महत्तम प्राप्त ऊर्जा दोनों स्थितियों में समान है।

उदाहरण 10 – यदि रेडियो आवृत्ति का महत्तम मान 20 किलो वोल्ट हो तो दर्शाइये कि एक प्रोटॉन (द्रव्यमान 1.67×10^{-27} किग्रा तथा आवेश 1.67×10^{-19} कूलम्ब) को प्रकाश की चाल की $\frac{1}{5}$ चाल प्राप्त करने के लिए साइक्लोट्रॉन के अन्दर चक्र पूरे करने होंगे।

हल – साइक्लोट्रॉन में, जब कण एक बार अन्तराल को पार करता है तो उसकी ऊर्जा में वृद्धि qV होती है, जहाँ q कण का आवेश तथा V रेडियो आवृत्ति दोलित्र द्वारा आरोपित वोल्टता का मान है।

एक चक्र में कण अन्तराल को दो बार पार करता है अतः एक चक्कर में ऊर्जा में वृद्धि $= 2qV$.

यदि कण, निर्गत होने के पूर्व n चक्र पूरा करता है तो n चक्करों में ऊर्जा में वृद्धि $= 2nqV$.

परन्तु यदि कण v वेग से निर्गत होता है तो उसकी ऊर्जा $= \frac{1}{2} mv^2$ ।

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

टिप्पणी

$$\text{अतः} \quad \frac{1}{2}mv^2 = 2nqV$$

$$\begin{aligned} \text{अथवा} \quad n &= \frac{mv^2}{2 \times 2qV} \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-27} \times (c/5)^2}{4 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 20 \times 10^3} \\ &= \frac{1.6 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}}{25 \times 4 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 20 \times 10^3} \\ &= \frac{2700}{6} = 450 \text{ चक्र।} \end{aligned}$$

उदाहरण 11 – एक इलेक्ट्रॉन 200 गॉस चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में 2.7×10^8 मी/से के वेग से गति कर रहा है। पथ की वक्रता त्रिज्या का परिकलन (i) क्लासिकी रूप में, (ii) आपेक्षिक द्रव्यमान के आधार पर कीजिए।
 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलम्ब।

हल – यहाँ $v = 2.7 \times 10^8$ मी/से

इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा

इलेक्ट्रॉन पर आवेश $q = e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलम्ब

चुम्बकीय क्षेत्र $B = 200$ गॉस $= 200 \times 10^{-4}$ वेबर/मी²
 $= 2 \times 10^{-2}$ वेबर/मी²

(i) पथ की क्लासिकी त्रिज्या,

$$\begin{aligned} r &= \frac{mv}{q \cdot B} = \frac{m_0 v}{qB} \text{ (क्लासिकी रूप में)} \\ &= \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 2.7 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-2}} = 0.768 \times 10^{-1} \text{ मी} \\ &= 7.68 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

(ii) आपेक्षिक द्रव्यमान (Relativistic mass)

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2.7 \times 10^8}{3 \times 10^8}\right)^2}} \\ &= \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0.81}} = \frac{9.1 \times 10^{-31}}{\sqrt{0.19}} \\ &= 2.3 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ किग्रा} = 20.93 \times 10^{-31} \text{ किग्रा} \end{aligned}$$

$$= \frac{mv}{qB} \left[\text{जहाँ } m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \right]$$

$$= \frac{20.93 \times 10^{-31} \times 2.7 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-2}}$$

$$= 1.766 \times 10^{-1} \text{ मीटर}$$

$$= 17.66 \text{ सेमी।}$$

उदाहरण 12 – दर्शाइये कि चुम्बकीय क्षेत्र से कण की गतिज ऊर्जा परिवर्तित नहीं होती

हल – B शक्ति के चुम्बकीय क्षेत्र में v वेग से गति कर रहे आवेशित कण पर कार्यरत चुम्बकीय बल होता है –

$$F = q(\vec{v} \times B)$$

dt समय में सूक्ष्म विस्थापन के दौरान चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कृत कार्य

$$dw = F \cdot ds$$

$$= q(\vec{v} \times B) \cdot ds = q(\vec{v} \times B) \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt$$

$$= q(\vec{v} \times B) \cdot \vec{v} dt \quad \left(\text{चूँकि } \frac{ds}{dt} = \vec{v} \right)$$

∴ चुम्बकीय बल द्वारा कुल कृत कार्य

$$W = \Sigma dW = \Sigma q(\vec{v} \times B) \cdot \vec{v} dt$$

$$= \Sigma q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times B) q dt$$

$$= \text{शून्य}$$

$$\left(\text{चूँकि } \vec{v} \cdot \vec{v} \times B = \text{शून्य} \right)$$

अतः आवेशित कण पर कार्यरत चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा कृत कार्य हमेशा शून्य होगा तथा हम यह कह सकते हैं कि चुम्बकीय क्षेत्र आवेशित कण की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं करता।

उदाहरण 13 – एक कैथोड किरण दोलनलेखी में (CRO) विक्षेप प्लेटों की लम्बाई 2.0 सेमी. तथा उनका पृथक्करण 0.5 सेमी. है। प्लेटों के बीच उस विभवान्तर (वोल्ट में) का परिकलन कीजिए जो 8×10^6 मी/से. के वेग से गतिमान इलेक्ट्रॉन पुंज में 0.04 रेडियन का कोणीय विचलन उत्पन्न कर सके।

$$\left(\frac{e}{m} = 1.67 \times 10^{11} \text{ कूलॉम/किग्रा} \right)$$

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में
आवेशित कणों की गति

हल — विद्युत क्षेत्र में चलने पर कण की दिशा में θ कोण का परिवर्तन होता है जिसका मान है—

टिप्पणी

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{qE}{mv_{ox}^2} \cdot l$$

$$= \frac{qEl}{mv_{ox}^2}$$

यदि θ का मान अल्प हो तो, $\tan \theta \approx \theta$ तथा

$$E = \frac{\theta mv_{ox}^2}{ql}$$

परन्तु $E = \frac{V}{d}$ जहाँ V प्लेटों के बीच विभवान्तर तथा d अन्तराल है।

अतः
$$V = \frac{d \cdot \theta \cdot mv_{ox}^2}{ql}$$

यहाँ
$$\frac{q}{m} = \frac{e}{m} = 1.67 \times 10^{11} \text{ कूलॉम/किग्रा}$$

$$d = 0.5 \text{ सेमी} = 0.005 \text{ मीटर}, \theta = 0.04 \text{ रेडियन}$$

$$l = 0.02 \text{ मीटर}, v_{ox} = 8 \times 10^6 \text{ मी/से}$$

अतः
$$V = \frac{0.005 \times 0.04 \times (8 \times 10^6)^2}{1.67 \times 10^{11} \times 0.02}$$

$$= 3.83 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 14 — एक ज्यावक्रीय (sinusoidal) वोल्टता $e = 1.5 \sin(2\pi \times 60 \times 10^6)t$ को 8 मिमी अन्तराल की दो समान्तर प्लेटों के बीच आरोपित किया गया है। एक इलेक्ट्रॉन, एक प्लेट से उस समय उत्सर्जित होता है जबकि दूसरी की वोल्टता शून्य हो तथा ठीक धनात्मक होने वाली हो। इलेक्ट्रॉन द्वारा प्राप्त महत्तम चाल तथा वह क्षण जिस पर यह चाल प्राप्त होती है, ज्ञात कीजिए।

हल — प्रत्यावर्ती वैद्युत क्षेत्र में आवेशित कण का त्वरण

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{q}{m} E_0 \sin \omega t \quad \dots (1)$$

यहाँ, $E_0 = \frac{1.5}{0.8} \text{ वोल्ट/सेमी} = \frac{1.5 \times 100}{0.8} \text{ वोल्ट/मी}$

(\because प्लेटों के बीच दूरी 0.8 सेमी है)

तथा $\omega = 2\pi \times 60 \times 10^6 \text{ रेडियन/से}$

समीकरण (1) का समाकलन करने पर वेग

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \frac{E_0 \cos \omega t}{\omega} + C_1 \quad (\text{समाकलन नियतांक})$$

चूँकि $t = 0$ पर $\frac{dr}{dt} = 0$

$$\therefore C_1 = \frac{qE_0}{m\omega}$$

अतः वेग $\frac{dr}{dt} = \frac{qE_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t)$.

यह इंगित करता है कि वेग तब महत्तम होगा जबकि $\omega t = \pi$.

उस समय वेग का महत्तम मान होगा

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \frac{2qE_0}{m\omega} \\ &= \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9 \times 10^{-31} \times 2\pi \times 60 \times 10^6} \times \frac{1.5 \times 100}{0.8} \\ &= 1.75 \times 10^5 \text{ मीटर/से.} \end{aligned}$$

उदाहरण 15 – $v_x = 2 \times 10^7$ मी/से चाल का अल्फा कण विद्युत क्षेत्र की 10 सेमी लम्बाई से होकर जाता है, यहाँ एक प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र $E_x = 5 \times 10^3 \sin(\omega t + \phi)$ वोल्ट/सेमी विद्यमान है। विद्युत क्षेत्र से निर्गत होने वाले तीव्रतम तथा मंदतम (fastest and slowest) कणों की चाल में अन्तर का परिकलन कीजिए।

हल – यहाँ विद्युत क्षेत्र E_x, X -अक्ष के अनुदिश विद्यमान है तथा α -कण भी उसी दिशा में एक आरम्भिक वेग $u = v_{ox} = 2 \times 10^7$ मी/से. से गतिशील है।

विद्युत क्षेत्र का मान $\pm 5 \times 10^3$ वोल्ट/सेमी $= \pm 5 \times 10^5$ वोल्ट/मीटर के बीच परिवर्तित होता है।

निर्गत कण तीव्रतम (fastest) होगा जबकि $E_x = +5 \times 10^5$ वोल्ट/मीटर है तथा मंदतम (Slowest) होगा जब $E_x = -5 \times 10^5$ वोल्ट/मीटर है। α -कण द्वारा अनुभव किये जाने वाले महत्तम त्वरण (अथवा मंदन) का मान होगा—

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \frac{qE_x}{m} = \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^5}{4 \times 1.67 \times 10^{-27}} \\ &[\alpha\text{-कण के लिए } q = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ कूलम्ब} \\ & \quad m = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ किग्रा}] \\ &= 2.4 \times 10^{13} \text{ मी/से}^2 \end{aligned}$$

टिप्पणी

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

यदि v_{\max} तथा v_{\min} निर्गत कणों की क्रमशः महत्तम तथा न्यूनतम चाल हों, तो $v^2 = u^2 + 2as$ से

टिप्पणी

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{(u^2 + 2a_{\max} \times s)} \\ &= \sqrt{\left\{ (2 \times 10^7)^2 + 2 \times 2.4 \times 10^{13} \times \frac{10}{100} \right\}} \\ &= \sqrt{(4 \times 10^{14} + 4.8 \times 10^{12})} \approx 20.12 \times 10^6 \text{ मी/से} \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \sqrt{(u^2 - 2a_{\max} s)} \\ &= \sqrt{\left\{ (2 \times 10^7)^2 - 2 \times 2.4 \times 10^{13} \times \frac{10}{100} \right\}} \\ &= \sqrt{(4 \times 10^{14} - 4.8 \times 10^{12})} \approx 19.88 \times 10^6 \text{ मी/से} \end{aligned}$$

अतः तीव्रतम तथा मंदतम कणों की चालों के बीच अन्तर

$$\begin{aligned} v_{\max} - v_{\min} &= (20.12 - 19.88) \times 10^6 \text{ मी/से} \\ &= 2.4 \times 10^5 \text{ मी/से।} \end{aligned}$$

उदाहरण 16 – किसी कैथोड किरण कम्पनदर्शी में प्लेटों के मध्य दूरी 6.25×10^{-3} मीटर एवं उनके मध्य विभवान्तर 3.125×10^3 वोल्ट है तो ज्ञात कीजिए : (i) प्लेटों के बीच किसी इलेक्ट्रॉन का त्वरण, (ii) यदि इलेक्ट्रॉन ऋणात्मक प्लेट से विरामावस्था से चले तो धनात्मक प्लेट पर उसका वेग।

हल – (i) प्लेटों के बीच विद्युत् क्षेत्र

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{d} = \frac{3.125 \times 10^3 \text{ वोल्ट}}{6.25 \times 10^{-3} \text{ मीटर}} \\ &= 5.0 \times 10^5 \text{ वोल्ट/मीटर।} \end{aligned}$$

विद्युत् क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन पर लगने वाला बल $F = eE$

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्वरण } a &= \frac{F}{m} = \frac{eE (1.6 \times 10^{-19}) \times (5.0 \times 10^5)}{(9.0 \times 10^{-31})} \\ &= 8.9 \times 10^{16} \text{ मीटर/सेकण्ड}^2। \end{aligned}$$

(ii) यदि इलेक्ट्रॉन (आवेश e), वोल्ट विभवान्तर V से गुजारा जाता है तो इसकी गतिज ऊर्जा में वृद्धि eV जूल होती है, अर्थात् यदि इलेक्ट्रॉन का धनात्मक प्लेट पर पहुँचने पर वेग v हो जाये तो $\frac{1}{2}mv^2 = eV$

या
$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 3.125 \times 10^3}{9.0 \times 10^{-31}}}$$

$$= 3.33 \times 10^7 \text{ मीटर/सेकण्ड।}$$

टिप्पणी

उदाहरण 17 – एक धनायन (आवेश = q , द्रव्यमान = m) को विभवान्तर V से त्वरित कराके दूरी d पर स्थित दो इलेक्ट्रोडों के बीच से होकर गुजारा जाता है। यदि यह आयन इलेक्ट्रोडों के बीच से एक नियत वेग से गुजरता है, तो गणना कीजिए : (i) आयन का इलेक्ट्रोडों के मध्य वेग, (ii) दूरी d तय करने में लगा समय।

हल – (i) इलेक्ट्रोडों के बीच विभवान्तर V से त्वरित कराने पर धनायन की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

$$\therefore \text{धनायन का इलेक्ट्रोडों के बीच वेग } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

(ii) चूँकि धनायन, दोनों इलेक्ट्रोडों के बीच दूरी d नियत वेग v से तय करता है, अतः दूरी d तय करने में लगा समय

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{2qV/m}}$$

उदाहरण 18 – एक इलेक्ट्रॉन पुंज जिसमें प्रत्येक इलेक्ट्रॉन का वेग 3.0×10^7 मीटर/सेकण्ड है, 1.8×10^3 वोल्ट/मीटर के विद्युत् क्षेत्र की लम्बवत् दिशा में 10 सेमी चलने पर 1.8 मिमी विक्षेपित हो जाता है। इलेक्ट्रॉन के विशिष्ट आवेश e/m की गणना कीजिए।

हल – प्रश्नानुसार, $y = 1.8$ मिमी = 1.8×10^{-3} मीटर,

$$E = 1.8 \times 10^3 \text{ वोल्ट/मीटर,}$$

$$l = 10 \text{ सेमी} = 0.1 \text{ मीटर,}$$

$$v = 3.0 \times 10^7 \text{ मीटर/सेकण्ड।}$$

$$\text{अनुप्रस्थ विद्युत् क्षेत्र में आवेशित कण का विक्षेप } y = \frac{1}{2} \left(\frac{eE}{m} \right) \left(\frac{l}{v} \right)^2$$

$$\therefore \frac{e}{m} = \frac{2yv^2}{El^2} = \frac{2 \times (1.8 \times 10^{-3}) \times (3.0 \times 10^7)^2}{(1.8 \times 10^3) \times (0.1)^2}$$

$$= 1.8 \times 10^{11} \text{ कूलॉम/किग्रा।}$$

उदाहरण 19 – एक इलेक्ट्रॉन पुंज को 100 वोल्ट विभवान्तर पर त्वरित कराके दो विक्षेपक प्लेटों के बीच से होकर गुजारा जाता है। विक्षेपक प्लेटों की लम्बाई 2 सेमी तथा प्लेटों के बीच की दूरी 0.5 सेमी है। इलेक्ट्रॉन पुंज को अपने

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

मार्ग से 5° कोण से विक्षेपित करने के लिये प्लेटों के बीच कितना विभवान्तर लगाना होगा?

टिप्पणी

हल – प्रश्नानुसार, त्वरक विभव $V = 100$ वोल्ट, $\theta = 5^\circ = 5\pi/180$ रेडियन, $l = 2$ सेमी = 0.02 मीटर, प्लेटों के बीच की दूरी $d = 0.5$ सेमी = 0.5×10^{-2} मीटर।

माना इलेक्ट्रॉन (आवेश = q , द्रव्यमान = m) V वोल्ट विभवान्तर पर त्वरित होने से v वेग प्राप्त कर लेता है तो इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा में वृद्धि $\frac{1}{2}mv^2 = eV$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1000}{9.0 \times 10^{-31}}}$$

$$= 1.89 \times 10^7 \text{ मीटर/सेकण्ड।}$$

$$\text{इलेक्ट्रॉन का कोणीय विक्षेप } \theta = \frac{eEl}{mv^2}$$

$$\therefore \frac{5\pi}{180} = \frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times E \times 0.02}{(9.0 \times 10^{-31}) \times (1.89 \times 10^7)^2}$$

$$\text{या } E = \frac{5 \times 3.14 \times 9.0 \times 10^{-31} \times (1.89 \times 10^7)^2}{180 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 0.02}$$

$$= 8.76 \times 10^3 \text{ वोल्ट/मीटर।}$$

$$\text{लेकिन } E = \frac{V}{d}, \therefore V = E \times d = (8.76 \times 10^3) \times (0.5 \times 10^{-2}) = 43.8 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 20 – एक कैथोड किरण कम्पनदर्शी की सुग्राहिता 0.03 मिमी/वोल्ट है। इसकी क्षैतिज प्लेटों पर एक अज्ञात विभवान्तर आरोपित करने पर पर्दे पर प्रतिदीप्ति चिह्न क्षैतिज दिशा में 3 मिमी विस्थापित होता है। अज्ञात विभवान्तर की गणना कीजिए।

हल – प्रश्नानुसार, सुग्राहिता = 0.03 मिमी/वोल्ट, विक्षेप = 3 मिमी

चूँकि विक्षेप = सुग्राहिता \times आरोपित विभवान्तर

$$\therefore \text{आरोपित विभवान्तर} = \frac{\text{विक्षेप}}{\text{सुग्राहिता}} = \frac{3 \text{ मिमी}}{0.03 \text{ मिमी/वोल्ट}}$$

$$= 100 \text{ वोल्ट।}$$

उदाहरण 21 – 10 eV ऊर्जा का एक इलेक्ट्रॉन 1×10^{-4} वेबर/मीटर² के चुम्बकीय क्षेत्र में वृत्ताकार मार्ग में चक्कर लगा रहा है। ज्ञात कीजिए।
(i) इलेक्ट्रॉन की चाल, (ii) वृत्ताकार मार्ग की त्रिज्या, (iii) इलेक्ट्रॉन की आवृत्ति।
($m_e = 9.0 \times 10^{-31}$ किग्रा)

हल – (i) प्रश्नानुसार, इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 10 \text{ eV} = 10 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ जूल}$$

$$\therefore \text{इलेक्ट्रॉन की चाल } v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

$$\begin{aligned} \text{या } v &= \sqrt{\frac{2 \times (10 \times 1.6 \times 10^{-19})}{9.0 \times 10^{-31}}} \\ &= 1.9 \times 10^6 \text{ मीटर/सेकण्ड।} \end{aligned}$$

(ii) चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन की वृत्ताकार गति के लिए

$$Bev = \frac{mv^2}{r}$$

\(\therefore\) वृत्ताकार मार्ग की त्रिज्या

$$\begin{aligned} r &= \frac{mv}{eB} = \frac{(9.0 \times 10^{-31}) \times (1.9 \times 10^6)}{(1.6 \times 10^{-19}) \times (1 \times 10^{-4})} \\ &= 0.11 \text{ मीटर।} \end{aligned}$$

(iii) इलेक्ट्रॉन की आवृत्ति

$$\begin{aligned} f &= \frac{v}{2\pi r} = \frac{1.9 \times 10^6}{2 \times 3.14 \times 0.11} \\ &= 2.75 \times 10^6 \text{ सेकण्ड}^{-1}। \end{aligned}$$

उदाहरण 22 – एक कैथोड किरण कम्पनदर्शी में इलेक्ट्रॉन पुंज ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम तथा $m = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा) को 500 वोल्ट विभवान्तर से त्वरित कराके ऐनोड पर बने संकीर्ण छिद्र से निकाला जाता है। यदि इन्हें इलेक्ट्रॉन पुंज की अक्ष की दिशा में कार्यरत 0.1 वेबर/मीटर² तीव्रता के चुम्बकीय क्षेत्र से गुजारा जाये तो बताइये कि ऐनोड के छिद्र से कितनी दूरी पर अक्ष से 10° कोण पर अपसरित इलेक्ट्रॉन फोकस होंगे। ($\cos 10^\circ = 0.985$)

हल – प्रश्नानुसार, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा, $V = 500$ वोल्ट, $B = 0.1$ वेबर/मीटर², $\theta = 10^\circ$

ऐनोड के छिद्र से फोकस बिन्दु की दूरी $l =$ कुण्डलिनी पथ की पिच
 $= \frac{2\pi m}{qB} \times v \cos \theta$

$$\text{जहाँ } v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$\text{या } l = \frac{2\pi m}{eB} \times \sqrt{\frac{2eV}{m}} \times \cos \theta = \frac{2\pi}{B} \times \sqrt{\frac{2Vm}{e}} \cos \theta$$

टिप्पणी

$$= \frac{2 \times 3.14}{0.14} \times \sqrt{\frac{2 \times 500 \times (9.1 \times 10^{-31})}{1.6 \times 10^{-19}}} \times 0.985$$

$$= 4.67 \times 10^{-3} \text{ मीटर।}$$

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

- v वेग से गति करता हुआ आवेश q , चुम्बकीय क्षेत्र B से गुजरने पर बल F द्वारा आरोपित होता है। निम्नलिखित में से कौनसा कथन गलत है?

(क) F तथा B अवश्य ही एक-दूसरे के लम्बवत् होंगे।

(ख) v तथा F अवश्य ही एक-दूसरे के लम्बवत् होंगे।

(ग) v तथा B किसी भी कोण पर हो सकते हैं।

(घ) v तथा F किसी भी कोण पर हो सकते हैं।
- एक आवेशित कण पर चुम्बकीय क्षेत्र के कारण बल शून्य हो तो –

(क) कण का वेग एवं चुम्बकीय क्षेत्र के बीच कोण शून्य होगा।

(ख) कण का वेग एवं चुम्बकीय क्षेत्र के बीच 60° होगा।

(ग) कण का वेग एवं चुम्बकीय क्षेत्र के बीच 90° होगा।

(घ) कण का वेग एवं चुम्बकीय क्षेत्र के बीच 120° होगा।
- एक आवेशित कण किसी चुम्बकीय क्षेत्र B में v वेग से गतिमान है। इसके कुण्डलिनी पथ का आवर्तकाल T इसके वेग पर किस प्रकार निर्भर होगा ?

(क) $T \propto v$ (ख) $T \propto \frac{1}{v}$

(ग) $T \propto \frac{1}{v^2}$ (घ) $T \neq f(v)$
- आवेशित कण v वेग से उस स्थिर विद्युत क्षेत्र को पार करता है जो इसकी गति के लम्बवत् है। कण के मार्ग में उत्पन्न अनुप्रस्थ विस्थापन z उसके वेग v पर किस प्रकार निर्भर करेगा ?

(क) $z \propto v$ (ख) $z \propto \frac{1}{v}$

(ग) $z \propto \frac{1}{v^2}$ (घ) $z \propto v^2$
- आवेशित कण v वेग से उस चुम्बकीय क्षेत्र को पार करता है जो उसकी गति के लम्बवत् है। कण के मार्ग में उत्पन्न अनुप्रस्थ विस्थापन y उसके वेग v पर निम्न रूप से निर्भर करेगा –

(क) $y \propto v$ (ख) $y \propto \frac{1}{v}$

(ग) $y \propto \frac{1}{v^2}$ (घ) $y \neq f(v)$

6. समान्तर विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्रों से गुजरने पर आवेशित कण अपनी गति के अनुप्रस्थ दिशाओं में निम्न आकार की रचना करेगा –

(क) परवलयाकार (ख) वृत्ताकार

(ग) दीर्घवृत्ताकार (घ) रैखिक।

7. थॉमसन परवलय विधि से हाइड्रोजन, ऑक्सीजन, नाइट्रोजन तथा निऑन के लिए एक ही उपकरण में एक ही विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र लगाकर (e/m) निकाले गये। किन कणों के लिए प्राप्त परवलय सबसे चौड़ा होगा –

(क) नाइट्रोजन (ख) ऑक्सीजन

(ग) हाइड्रोजन (घ) निऑन।

8. कैथोड किरण दोलनलेखी का सबसे मुख्य भाग है –

(क) निम्न तथा उच्च वोल्टता विद्युत प्रदाय

(ख) कैथोड किरण नलिका

(ग) क्षैतिज प्रवर्धक

(घ) प्रसर्प जनित्र।

9. CRO के पर्दे पर जिस तरंग को देखना है उसके तीर पूरी तरंग पर्दे पर होंगे यदि –

(क) प्रसर्प जनित्र का आवर्त काल उस तरंग के आवर्त काल का एक-तिहाई हो।

(ख) प्रसर्प जनित्र का आवर्त काल उस तरंग के आवर्त काल के बराबर हो।

(ग) प्रसर्प जनित्र का आवर्त काल उस तरंग के आवर्त काल का दुगुना हो।

(घ) प्रसर्प जनित्र का आवर्त काल उस तरंग के आवर्त काल का तिगुना हो।

टिप्पणी

टिप्पणी

10. कैथोड किरण दोलनलेखी का मुख्य उद्देश्य है –
 - (क) प्रत्यावर्ती धारा का मापन
 - (ख) प्रत्यावर्ती तथा दिष्ट धारा की तुलना
 - (ग) किसी विद्युत तरंग का चाक्षुष प्रदर्शन
 - (घ) दिष्ट धारा की वोल्टता का मापन।
11. CRO पर्दे पर किसी विद्युत दोलन को देखने के लिए उसे –
 - (क) Y -विक्षेप पट्टिकाओं पर लगाना होता है।
 - (ख) X -विक्षेप पट्टिकाओं पर लगाना होता है।
 - (ग) त्वरक ऐनोड पर लगाना होता है।
 - (घ) फोकसन कैथोड पर लगाना होता है।
12. विद्युत् क्षेत्र को निम्न क्षेत्र भी कहते हैं–
 - (क) चुम्बकीय क्षेत्र
 - (ख) मंदन क्षेत्र
 - (ग) त्वरक क्षेत्र
 - (घ) विद्युत्-चुम्बकीय क्षेत्र।
13. विद्युत् क्षेत्र में गतिशील कण का त्वरण निम्न होता है–
 - (क) $q\vec{E}$
 - (ख) $\frac{q\vec{E}}{v}$
 - (ग) $\frac{q\vec{E}}{m}$
 - (घ) $\frac{q\vec{E}}{B}$
14. कैथोड किरणें निम्न का समूह होती है–
 - (क) धन कणों का
 - (ख) ऋण कणों का
 - (ग) न्यूट्रॉन का
 - (घ) परमाणुओं का।
15. इलेक्ट्रॉन गन से निम्न किरण प्राप्त होती है–
 - (क) कैथोड किरण
 - (ख) ऐनोड किरण
 - (ग) न्यूट्रॉन किरण
 - (घ) पराबैंगनी किरण।
16. त्वरित्र का उपयोग किया जाता है–
 - (क) न्यूट्रॉन का वेग बढ़ाने के लिए
 - (ख) आयनित कणों के संसूचन में
 - (ग) आवेशित कणों की ऊर्जा बढ़ाने हेतु
 - (घ) 100 MeV ऊर्जा के इलेक्ट्रॉन प्राप्त करने में।

टिप्पणी

17. रेखीय त्वरित्र में—
(क) सभी नलियों की लम्बाई व दो क्रमिक नलियों के बीच की दूरी समान रखी जाती है
(ख) आवेशित कणों को त्वरित करते हैं
(ग) दो क्रमिक नलियों के बीच की दूरी व नली की लम्बाई मिलाकर धीरे-धीरे बढ़ती जाती है
(घ) दो क्रमिक नलियों के बीच की दूरी व नली की लम्बाई मिलाकर समान रहती है।
18. CRO में तीव्रगामी इलेक्ट्रॉन पुंज की प्राप्ति निम्न से होती है—
(क) इलेक्ट्रॉन गन (ख) विक्षेपक प्लेटें
(ग) रेखिक त्वरित्र (घ) प्रसर्प जनित्र।
19. रेखीय त्वरित्र से कणों की ऊर्जा कितनी बढ़ायी जा सकती है—
(क) 330 MeV (ख) 500 MeV
(ग) 630 MeV (घ) 350 MeV.
20. CRO के समयाधार परिपथ से निर्गत तरंग पर्दे के किस अक्ष को समय अक्ष में बदल देती है?
(क) X-अक्ष (ख) Y-अक्ष
(ग) Z-अक्ष (घ) xy-जल।
21. e आवेश के कण के v वेग से चुम्बकीय क्षेत्र B में गति करने पर लगने वाले लॉरेन्ज बल का मान होता है—
(क) $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$ (ख) $e\vec{v} \times B = \vec{F}$
(ग) $\vec{F} = m\vec{v}$ (घ) $\vec{v} = \vec{B} \times \vec{F}$.
22. साइक्लोट्रॉन एक त्वरित्र है—
(क) रेखीय त्वरित्र (ख) नाभिकीय त्वरित्र
(ग) चक्रीय त्वरित्र (घ) परमाण्वीय त्वरित्र।
23. साइक्लोट्रॉन में प्रयुक्त धायित्व डिब्बे का आकार होता है—
(क) A आकार (ख) O आकार
(ग) D आकार (घ) B आकार का।

टिप्पणी

24. साइक्लोट्रॉन आवृत्ति का मान कण के किस मान पर निर्भर करता है?

- (क) $\frac{B}{m}$ (ख) $\frac{q}{m}$
(ग) $\frac{E}{m}$ (घ) $\frac{\vec{E}}{m}$

25. साइक्लोट्रॉन में डी के अन्दर वृत्तीय मार्ग में आवेशित कण का कोणीय वेग—

- (क) कण के आवेश व चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता पर निर्भर करता है
(ख) चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता अधिक होने पर घटता है
(ग) कण के वेग तथा मार्ग की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है
(घ) कण द्वारा आपेक्षकीय वेग प्राप्त करने पर घटता जाता है।

26. साइक्लोट्रॉन से प्राप्त किये जा सकते हैं—

- (क) 10 MeV ऊर्जा के इलेक्ट्रॉन (ख) 10 MeV ऊर्जा के α -कण
(ग) 10 MeV ऊर्जा के न्यूट्रॉन (घ) इनमें से कोई नहीं।

27. यदि साइक्लोट्रॉन में डी की त्रिज्या R व आरोपित विभवान्तर की आवृत्ति f है, तो इससे कोई q आवेशित व m द्रव्यमान के कण अधिकतम ऊर्जा प्राप्त करेंगे—

- (क) $2\pi^2 m f^2 R^2$ (ख) $2\pi^2 \frac{m}{fR}$
(ग) $q^2 m^2 R / f$ (घ) $af^2 \frac{mR}{2}$

28. साइक्लोट्रॉन में आरोपित विभवान्तर का शिखर मान V तथा आवृत्ति f है। इसके द्वारा प्राप्त आवेशित कण की अधिकतम गतिज ऊर्जा की आरोपित विभवान्तर V पर निर्भरता है—

- (क) V^0 (ख) V^2
(ग) $\frac{1}{V}$ (घ) $\frac{1}{V^2}$

29. किसी आवेशित कण का अभिलम्बवत् विद्युत् क्षेत्र में पथ होता है—

- (क) सरल रेखीय (ख) वृत्तीय
(ग) परवलयकार (घ) हेलीकल।

30. अभिलम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति का पथ होता है—

- (क) सरल रेखीय (ख) वृत्तीय
(ग) हेलीकल (घ) परवलयकार।

टिप्पणी

31. धन किरण होती है—
(क) धन आयनों का समूह (ख) धनात्मक नाभिक
(ग) इलेक्ट्रॉन का समूह (घ) इनमें से कोई नहीं।
32. किसी तत्व से प्राप्त धन किरण परवलयों की संख्या व्यक्त करती है—
(क) परमाणु भार को (ख) संवेग को
(ग) समस्थानिकों की संख्या को (घ) समायनों की संख्या को।
33. धन किरण परवलय में मुख्य परवलय के विपरीत दिशा में प्राप्त कम तीव्रता के परवलय को कहते हैं—
(क) धनात्मक परवलय (ख) रेखीय परवलय
(ग) ऋणात्मक परवलय (घ) हेलीकल।

4.22 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. (घ) | 12. (ग) | 23. (ग) |
| 2. (क) | 13. (ग) | 24. (ख) |
| 3. (घ) | 14. (ख) | 25. (घ) |
| 4. (ग) | 15. (क) | 26. (ख) |
| 5. (ख) | 16. (ग) | 27. (क) |
| 6. (क) | 17. (घ) | 28. (क) |
| 7. (ग) | 18. (क) | 29. (ग) |
| 8. (ख) | 19. (घ) | 30. (घ) |
| 9. (घ) | 20. (क) | 31. (क) |
| 10. (ग) | 21. (ख) | 32. (ग) |
| 11. (क) | 22. (ग) | 33. (क) |

4.23 सारांश (Summary)

इस इकाई में त्वरक क्षेत्र की भाँति विद्युत् क्षेत्र, विद्युत् क्षेत्र में आवेशित कण द्वारा अर्जित ऊर्जा तथा वेग की विवेचना की गई है। इलेक्ट्रॉन गन, विसर्जन नलिका, रैखिक त्वरित्र को समझाया गया है। कैथोड किरण कम्पनदर्शी, CRO की सुग्राहिता, चुम्बकीय क्षेत्र तथा अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति का निगमन किया है। चुम्बकीय विक्षेपण को समझाया गया है। परस्पर लम्बवत् विद्युत् तथा

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति

चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति का निगमन किया गया है। q/m तथा e/m ज्ञात करने के लिए थॉमसन विधि को समझाया गया है।

टिप्पणी

4.24 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- विद्युत् क्षेत्र
- चुम्बकीय क्षेत्र
- इलेक्ट्रॉन गन
- विसर्जन नलिका
- रैखिक त्वरित्र
- कैथोड किरण कम्पनदर्शी
- साइक्लोट्रॉन
- विशिष्ट आवेश
- वेग वरणक

4.25 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. एक इलेक्ट्रॉन-वोल्ट ऊर्जा से क्या अभिप्राय है? इसका मान जूल में लिखिए।
2. एकसमान विद्युत् क्षेत्र में आवेशित कण के त्वरण का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।
3. इलेक्ट्रॉन गन क्या है?
4. विसर्जन नली का आकार कैसा होता है?
5. विसर्जन नली से कैथोड किरणें कितने मिमी दाब पर प्राप्त होती हैं?
6. रेखीय त्वरित्र के कार्यकारी विभव का मान लिखिए।
7. रैखिक त्वरित्र की संरचना तथा कार्य सिद्धान्त समझाइए।
8. रैखिक त्वरित्र के प्रचालन के लिए आवश्यक शर्त क्या है?
9. रेखीय त्वरित्र की आवश्यक शर्त क्या है?
10. द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमापी किसे कहते हैं?
11. कैथोड किरण कम्पनदर्शी का नामांकित चित्र बनाइए।

12. कैथोड किरण कम्पनदर्शी की सुग्राहिता से आप क्या समझते हैं? विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कणों की गति समझाइए।
13. CRO में प्रयुक्त ऐनोड विभव का मान कितना होता है?
14. अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की गति का मार्ग कैसा होता है?
15. साइक्लोट्रॉन आवृत्ति किसे कहते हैं?
16. समस्थानिक क्या होते हैं?
17. साइक्लोट्रॉन की डीज के अन्दर आवेशित कण किस क्षेत्र में गति करता हैं?
18. साइक्लोट्रॉन से प्राप्त किसी कण की अधिकतम गतिज ऊर्जा आरोपित विभवान्तर पर निर्भर नहीं रिती है। कथन की व्याख्या कीजिए।
19. द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमापी किसे कहते हैं?
20. समस्थानिकों की खोज पर टिप्पणी लिखिए।
21. वेग वरणक क्या है? इसका सिद्धान्त समझाइए।
22. वेग वरणक क्या है? इसका चित्र बनाइए।
23. वेग वरणक का द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ में क्या उपयोग है।
24. चुम्बकीय फोकसिंग (लेंस) का सिद्धान्त समझाइए।

टिप्पणी

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. एक आवेशित कण एक समान अनुप्रस्थ विद्युत स्थैतिक क्षेत्र में गति कर रहा है दर्शाइये कि विद्युत क्षेत्र के अन्दर कण का पथ परवलय होगा।
2. प्रत्यावर्ती विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण की गति की व्याख्या कीजिये।
3. सिद्ध कीजिये कि चुम्बकीय क्षेत्र में एक आवेशित कण का पथा सामान्यता एक हैलिक्स होता है।
4. विसर्जन नलिका में गैस से विद्युत चालन किस प्रकार होता है? आवश्यक चित्र खींचकर समझाइए।
5. यदि एक आवेशित कण अनुप्रस्थ एक समान विद्युत क्षेत्र में प्रवेश करता है हो तो सिद्ध करो कि इस क्षेत्र में कण का पथ परवलय होगा। / लम्बाई के इस विद्युत क्षेत्र में कण का पर्दे पर विस्थापन ज्ञात करो, यदि पर्दे की विद्युत क्षेत्र के अन्तिम सिरे से दूरी L है।
6. रैखिक त्वरक किसे कहते हैं? व्यवस्था चित्र द्वारा प्रक्रिया समझाइये एवं आयन की ऊर्जा किस प्रकार ज्ञात की जाती है?

टिप्पणी

7. कैथोड किरण नलिका तथा दोलनलेखी को निम्न बिन्दुओं के आधार पर समझाइए—
 - (i) इलेक्ट्रॉन गन,
 - (ii) वैद्युत स्थैतिक फोकस,
 - (iii) विद्युत स्थैतिक विक्षेपण।
8. कैथोड किरण कम्पनदर्शी का नामांकित चित्र बनाकर क्रियाविधि समझाइये। इसके उपयोग लिखिये।
9. कैथोड किरण कम्पनदर्शी की सुग्राहिता से क्या तात्पर्य है? इसका व्यंजक निगमित कीजिए तथा बताइए कि यह किन-किन कारकों पर निर्भर करती है।
10. यदि एक आवेशित कण अनुप्रस्थ एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश करता है तो सिद्ध करो कि इस क्षेत्र में कण का पथ वृत्ताकार होता है। / लम्बाई के चुम्बकीय क्षेत्र में कण का पर्दे पर विस्थापन ज्ञात करो, यदि पर्दे की चुम्बकीय क्षेत्र के अन्तिम सिरे से दूरी L है। इसका आवर्तकाल एवं आवृत्ति भी ज्ञात कीजिए।
11. एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र में आवेशित कण की व्याख्या कीजिये। सिद्ध करो कि एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् गति करते आवेशित कण के पथ की त्रिज्या कण के संवेग के अनुक्रमानुपाती होती है।
12. साइक्लोट्रॉन के सिद्धान्त का वर्णन कीजिये एवं इसकी रचना एवं कार्यविधि समझते हुए इससे प्राप्त होने वाले कण की महत्तम ऊर्जा के लिये व्यंजक प्राप्त करो। इसकी सीमायें लिखो।
13. साइक्लोट्रॉन त्वरण सिद्धान्त को समझाइये। इसकी सीमायें क्या हैं तथा इन्हें कैसे दूर किया जा सकता है?
14. कैथोड किरण कम्पनदर्शी का नामांकित चित्र बनाकर इसकी संरचना समझाइए।
15. आवेशित कणों के लिये क्रासित विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों का उपयोग करके वेग चयनकारी का सिद्धान्त समझाइए।
16. दर्शाइये कि जब एक आवेशित कण एक क्रासित वैद्युत क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र में दोनों क्षेत्रों के लम्बवत् गति करता है तो वह अपने पथ पर अविक्षेपित जा सकता है।
17. थॉमसन परवलय द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमापी के सिद्धान्त को एक विस्तृत चित्र खींचकर समझाइये एवं विवरण दीजिये—
 - (i) द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमापी का सिद्धान्त
 - (ii) समस्थानिकों की खोज

18. धन आयनों के विशिष्ट आवेश $\frac{q}{m}$ ज्ञात करने की थॉमसन की परवलय विधि का सचित्र वर्णन कीजिए। प्रयुक्त सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।
19. समस्थानिकों के अध्ययन के लिये थॉमसन की परवलय विधि का वर्णन कीजिये एवं इसके सिद्धान्त की व्याख्या कीजिये।
20. वेग चयनकारी किसे कहते हैं? इसे सचित्र समझाइए।
21. समान्तर विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के प्रभाव के समस्त कणों का बिन्दुपथ एक परवलय होगा।
22. एक इलेक्ट्रॉन-वोल्ट ऊर्जा से क्या अभिप्राय है? इसका मान जूल में लिखिए।
23. एक समान विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण गति की विवेचना कीजिए।
24. इलेक्ट्रॉन के विशिष्ट आवेश का मान ज्ञात करने की थॉमसन विधि का सचित्र वर्णन कीजिए तथा प्रयुक्त सूत्र की स्थापना कीजिए।
25. विद्युत क्षेत्र में किसी आवेशित कण के विक्षेप की व्याख्या कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि यह विक्षेप विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के अनुक्रमानुपाती होता है।
26. टिप्पणी लिखिए –
 - (i) इलेक्ट्रॉन गन
 - (ii) विसर्जन नलिका
 - (iii) कैथोड किरण कम्पनदर्शी
 - (iv) CRO की सुग्राहिता
 - (v) रैखिक त्वरित्र
 - (vi) साइक्लोट्रॉन का सिद्धान्त
 - (vii) 180° चुम्बकीय विक्षेपण
 - (viii) संवेग वरणक
 - (ix) द्रव्यमान स्पेक्ट्रोग्राफ का सिद्धान्त
 - (x) समस्थानिकों (isotopes) की खोज
 - (xi) वेग वरणक
 - (xii) चुम्बकीय लेंस या चुम्बकीय फोकसन।

टिप्पणी

टिप्पणी

आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. उस प्रोटॉन की ऊर्जा का परिकलन कीजिए जब यह 50 चक्करों के बाद साइक्लोट्रॉन से निर्गत होता है। डीज के आर-पार 20 किलो वोल्ट की वोल्टता आरोपित हैं
2. (a) दर्शाइये कि एकसमान स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में गति कर रहे आवेशित कण की गतिज ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है।
(b) 10^6 मी./से. के वेग से 10,000 गौस के चुम्बकीय क्षेत्र के अभिलम्बवत् गति कर रहे प्रोटॉन के लिए परिभ्रमण आवृत्ति (gyro-frequency) तथा परिभ्रमण त्रिज्या (gyroradius) का परिकलन कीजिए।
3. एक साइक्लोट्रॉन में आरोपित वोल्टता की आवृत्ति 1.2×10^7 हर्ट्ज है, ड्यूट्रॉनों से अनुनाद के लिए चुम्बकीय क्षेत्र के मान का परिकलन कीजिए। यदि साइक्लोट्रॉन का व्यास 1 मीटर हो, तो साइक्लोट्रॉन से बाहर आने पर कण की ऊर्जा का मान भी ज्ञात कीजिए।
4. 10 किलो गौस के चुम्बकीय क्षेत्र में प्रोटॉनों की साइक्लोट्रॉन आवृत्ति ज्ञात कीजिए। यदि साइक्लोट्रॉन का अर्द्धव्यास 0.5 मीटर हो, तो निर्गत कणों की ऊर्जा की गणना भी कीजिए। [उत्तर— $10M c/s$, 2.5 जूल]
5. एक छोटे साइक्लोट्रॉन में जिसकी क्षेत्र सामर्थ्य 5000 गौस है, निर्गत प्रोटॉन पुंज की ऊर्जा का eV में परिकलन कीजिए। साइक्लोट्रॉन की महत्तम त्रिज्या 5 सेमी. है। अनुनाद की स्थिति में दोलित्र की आवृत्ति क्या होगी? [उत्तर— $1250 eV$, $7.9M c/s$]
6. एक आयन पुंज चुम्बकीय क्षेत्र में प्रवेश कर 0.5 मीटर त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग में 180 विक्षेपण प्राप्त करता है। यदि आपतित पुंज अर्द्ध कोण 5° का शंकु बनाता है तो फोकस रेखा (Focal line) के रैखिक विचरण (Linear spread) की गणना कीजिए। [उत्तर— 0.35 सेमी. लगभग]
7. क्रासित वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र के उपयोग से बने वेग वरणकारी द्वारा चयनित प्रोटॉनों के मध्यमान वेग की गणना कीजिए जबकि विद्युत क्षेत्र 600 वोल्ट/सेमी तथा चुम्बकीय क्षेत्र 2000 गौस हो। [उत्तर— 3×10^5 मी./से.]
8. आवेशित कणों का एक पुंज अनुप्रस्थ दिशा में 1000 वोल्ट/सेमी. के वैद्युत क्षेत्र से त्वरित होता है। 5000 गौस का एक चुम्बकीय क्षेत्र, वैद्युत क्षेत्र तथा कणों के चलने की दिशा के अभिलम्बवत् कार्य करता है। यदि कण पर आवेश 1.6×10^{-19} कूलम्ब हो, तो अविक्षेपित कणों का वेग ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 2×10^5 मी./से.]

टिप्पणी

9. समान्तर वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों का उपयोग करने वाली थॉमसन की परवलय विधि में कुल कण जिनका g/m अनुपात 3×10^8 कूलम्ब/किग्रा. है क्षैतिजतः तथा ऊर्ध्वाधरतः दोनों दिशा में 4 सेमी. विचलित होते हैं। उन कणों के लिए f/m का मान क्या होगा जो क्षैतिजतः 1 सेमी. तथा ऊर्ध्वाधरतः 8 सेमी. विचलित होंगे? [उत्तर— $9 : 3 \times 10^6$ कूलम्ब/किग्रा.]
10. थॉमसन की विधि से धन किरणों के विश्लेषण के एक प्रयोग में एकल आयनित तथा द्विआयनित कण समान परवलय बनाते हैं जबकि चुम्बकीय क्षेत्र के फ्लक्स घनत्व क्रमशः 0.8 वेबर/मी² तथा 1.2 वेबर/मी.² है। दोनों स्थितियों में विद्युत क्षेत्र का मान समान मानते हुए कणों के द्रव्यमानों की तुलना करो। [उत्तर— 2 : 9]
11. एक धन किरण उपकरण में दो समान परवलय प्राप्त होते हैं जबकि आरोपित वैद्युत क्षेत्र 3000 वोल्ट/मीटर तथा 2000 वोल्ट/मीटर है। कण एकल तथा द्विआयनित है। समान चुम्बकीय क्षेत्रों की कल्पना कर कणों के द्रव्यमानों की तुलना कीजिए। [उत्तर— 1 : 4]
12. 10 eV ऊर्जा का एक इलेक्ट्रॉन 1×10^{-4} वेबर/मीटर² के सम चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् तल में वृत्ताकार मार्ग में गति कर रहा है। ज्ञात कीजिए—
(i) इलेक्ट्रॉन की चाल
(ii) वृत्ताकार मार्ग की त्रिज्या
(iii) इलेक्ट्रॉन की आवृत्ति (आवर्तकाल) ($m_e = 9.0 \times 10^{-31}$ किग्रा.)
13. एक रेखीय त्वरित्र में 30 नलियाँ प्रयुक्त की गई हैं। इससे 0.1 उ। एकल आयनित हाइड्रोजन आयन का पुंज प्राप्त किया गया है। यदि आरोपित प्रत्यावर्ती विभव का शिखर मान 42 किलो वोल्ट तथा आवृत्ति 10 मेगा-हर्ट्ज है, तो त्वरित्र की कुल लम्बाई तथा आयनों की अन्तिम ऊर्जा का मान क्या होगा ?
[$e = 10$ मेगा-हर्ट्ज $m = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा = 0.51 MeV, $e = 1.6 \times 10^{-19}$]
[उत्तर — 15.54 मीटर, 1.26 MeV]
14. 50 डमट रेखीय त्वरित्र में 0.5 MeV ऊर्जा से प्रोट्रॉन पुंज प्रवेश कराया जाता है, जिस पर आरोपित प्रत्यावर्ती विभवान्तर की आवृत्ति 200 मेगा-हर्ट्ज है। यदि त्वरित्र में 25 नलियाँ हैं, तो ज्ञात कीजिए— (i) आरोपित विभव का शिखर मान, (ii) प्रथम व अन्तिम नली की लम्बाई।
[संकेत— अन्तिम ऊर्जा = 50 MeV = nqV × प्राथमिक ऊर्जा; n वीं नली की लम्बाई $L_n = v_n/2f$]
[उत्तर — (i) 1.98×10^6 वोल्ट, (ii) 2.4 सेमी, 24 सेमी]

टिप्पणी

15. 104 गॉस तीव्रता के चुम्बकीय क्षेत्र में $\frac{c}{6}$ वेग के प्रोटॉन का एक किरण पुंज प्राप्त करने के लिए साइक्लोट्रॉन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
[उत्तर – 52-19 सेमी]
16. एक साइक्लोट्रॉन की डी की त्रिज्या 60 सेमी है तथा इस पर आरोपित प्रत्यावर्ती विभव की आवृत्ति 12 मेगा-हर्ट्ज है, तो (i) α -कण द्वारा प्राप्त अधिकतम गतिज ऊर्जा, (ii) आरोपित चुम्बकीय क्षेत्र के परिणाम की गणना कीजिए।
[उत्तर – (i) 42.68 MeV, (ii) 1.573 टेसला]
17. एक प्रोटॉन साइक्लोट्रॉन में डीज के मध्य के स्थान को एक बार पार करने में 1000 eV ऊर्जा प्राप्त करता है। यदि यह प्रोटॉन साइक्लोट्रॉन में 50 चक्कर लगाकर बाहर निकलता है, तो इसकी ऊर्जा क्या होगी? यदि आरोपित चुम्बकीय क्षेत्र 1000 गॉस है, तो डीज की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
[उत्तर – 10^5 eV, 45.7 सेमी]
18. एक साइक्लोट्रॉन की डी की त्रिज्या 0.9 मीटर है तथा यह 0.8 टेसला के चुम्बकीय क्षेत्र में कार्य करता है। प्रोटॉन तथा ड्यूट्रॉन के लिए साइक्लोट्रॉन आवृत्ति तथा इनके द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊर्जा ज्ञात कीजिए।
[उत्तर – (i) 12.2 मेगा-हर्ट्ज, 24.8 MeV, (ii) 6.1 MHz, 12.4 MeV]
19. यदि दो समान्तर प्लेटों के मध्य दूरी 0.5 मीटर तथा विभवान्तर 50 किलो-वोल्ट है, तो (i) इलेक्ट्रॉनों का त्वरण क्या होगा? (ii) धनात्मक प्लेट पर पहुँचने पर इलेक्ट्रॉन का वेग क्या होगा यदि इलेक्ट्रॉन ऋणात्मक प्लेट पर प्रारम्भ में स्थिर अवस्था में है?
[उत्तर – (i) 1.78×10^{16} मीटर/सेकण्ड²,
(ii) 1.33×10^8 मीटर/सेकण्ड]
20. एक कैथोड किरण कम्पनदर्शी की क्षैतिज प्लेटों के बीच 100 वोल्ट विभवान्तर आरोपित करने पर पर्दे पर प्रतिदीप्ति चिह्न 5 मिमी विस्थापित होता है। कम्पनदर्शी की सुग्राहिता ज्ञात कीजिए।
[उत्तर – 0.05 मिमी/वोल्ट]
21. कैथोड किरण कम्पनदर्शी में विक्षेपक प्लेटों की लम्बाई 2 सेमी तथा उनके बीच की दूरी 0.5 मिमी है। एक इलेक्ट्रॉन 1,000 वोल्ट विभवान्तर से त्वरित होकर प्लेटों के बीच के स्थान में प्रवेश करता है। प्लेटों के मध्य विभवान्तर कितना रखा जाये जिससे कि इलेक्ट्रॉन अपने मार्ग के सापेक्ष 0.25 मिमी विक्षेपित हो?
[उत्तर – 1.25 वोल्ट]
22. 1,000 वोल्ट विभवान्तर पर त्वरित एक इलेक्ट्रॉन दो समान्तर प्लेटों के बीच जिनकी लम्बाई 2 सेमी तथा दूरी 0.5 मिमी है, प्रवेश करता है। यदि प्लेटों के बीच विभवान्तर 1 वोल्ट हो तो प्रारम्भिक मार्ग से विक्षेप की गणना कीजिए।
[उत्तर – 0.2 मिमी]

4.26 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में
आवेशित कणों की गति

1. Berkeley Physics Course, Electricity and Magnetism Ed. E. M. Purcell McGraw Hill.
2. Physics Volume 2, D. Halliday and R. Resnick
3. Introduction to Electrodynamics: D.J. Griffiths, 4th Edition, Printice Hall.
4. Electricity and Magnetism: S.S. Atwood Dover.
5. Electrodynamics: Emi Cossor and Bassin Lorraine, Asahi Shimbunsha Publishing Ltd.
6. From Neuron to Brain: Kuffler and Nicholas, Sinauer Associates, Inc Pub. Sunderland Masschusets.
7. Schaums Outline of Beginners Physics II: Electricity and Magnetism.

टिप्पणी

इकाई 5 विद्युत-गतिकी (Electrodynamics)

टिप्पणी

संरचना (Structure)

- 5.0 परिचय
- 5.1 उद्देश्य
- 5.2 चुम्बकीय फ्लक्स
- 5.2(a) विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण
 - 5.3 विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के फ़ैराडे के नियम
 - 5.4 फ़ैराडे के नियम का समाकलन तथा अवकलन स्वरूप
 - 5.5 स्व-प्रेरण
 - 5.6 लम्बी परिनालिका के स्वप्रेरकत्व के लिए व्यंजक
 - 5.7 अन्योन्य प्रेरण
 - 5.8 दो लम्बी परिनालिकाओं के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व के लिए व्यंजक
 - 5.9 स्वप्रेरण तथा अन्योन्य प्रेरण में अन्तर
 - 5.10 दो प्रेरक कुण्डलियों का श्रेणीक्रम तथा समान्तर क्रम में तुल्य स्व-प्रेरकत्व
 - 5.11 दो कुण्डलियों के स्वप्रेरकत्व तथा अन्योन्य प्रेरकत्व में सम्बन्ध
 - 5.12 परिणामित्र या ट्रान्सफॉर्मर
 - 5.13 स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा
 - 5.14 मैक्सवेल की परिकल्पना – विस्थापन धारा
 - 5.15 मैक्सवेल परिकल्पना की भौतिक व्याख्या
 - 5.16 मैक्सवेल के समीकरण
 - 5.17 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा घनत्व, पोयन्टिंग वेक्टर
 - 5.18 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्रों E तथा B द्वारा तरंग समीकरण
 - 5.19 निर्वात या मुक्त आकाश में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें
 - 5.20 अभिलम्बवत् आपतन पर परावर्तन तथा अपवर्तन [परावैद्युत की समतल सतह]
 - 5.21 परावर्तन द्वारा ध्रुवण
 - 5.22 पूर्ण आन्तरिक परावर्तन द्वारा ध्रुवण
 - 5.23 चालक माध्यम में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें या E व B के लिये तरंग समीकरण
 - 5.23.1 परावैद्युत माध्यम में एकविमीय विद्युत-चुम्बकीय तरंग का संचरण
 - 5.23.2 विद्युत-चुम्बकीय तरंग की अनुप्रस्थ प्रकृति
 - 5.23.3 विद्युत-चुम्बकीय तरंग में \vec{E} , \vec{B} तथा संचरण दिशा का परस्पर लम्बवत् होना
 - 5.23.4 \vec{E} तथा \vec{B} के बीच सम्बन्ध
 - 5.24 आयनमण्डल द्वारा परावर्तन व अपवर्तन
 - 5.25 आंकिक उदाहरण
 - 5.26 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
 - 5.27 सारांश
 - 5.28 मुख्य शब्दावली
 - 5.29 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
 - 5.30 सहायक पाठ्य सामग्री

5.0 परिचय (Introduction)

इस इकाई में विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण सम्बन्धी फ़ैराडे का नियम, निष्कर्ष और उपयोग विशेषतः ट्रान्सफॉर्मर का अध्ययन करेंगे। तत्पश्चात् विद्युत् चुम्बकीय तरंगों में निहित ऊर्जा घनत्व अर्थात् पोयंटिंग वेक्टर के लिए व्यंजक निगमित करने के साथ साथ मैक्सवेल समीकरण, निर्वात में संचरित विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का अध्ययन करेंगे। आयन मंडल से इनके परावर्तन एवं अपवर्तन की विस्तृत विवेचना करेंगे।

टिप्पणी

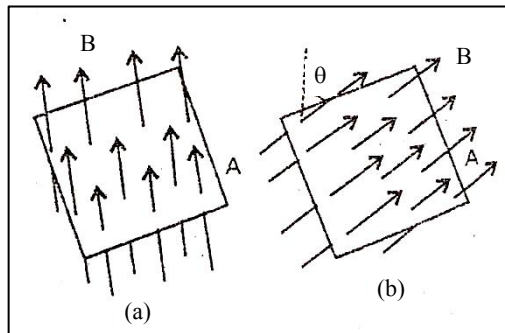
5.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण, फ़ैराडे के नियम, फ़ैराडे नियम के अवकलन व समाकलन रूप कि विवेचना, स्व व अन्योन्य प्रेरण, ट्रान्सफॉर्मर की व्याख्या मैक्सवेल के समीकरणों की स्थापना पोयंटिंग सदिश, विद्युत-चुम्बकीय तरंग समीकरण का निगमन।
- निर्वात एवं परावैद्युत माध्यम में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की व्याख्या फ़्रेनेल के नियम की विवेचना।
- आयनमण्डल के द्वारा परावर्तन एवं अपवर्तन यह समझ पाएंगे।

5.2 चुम्बकीय फ्लक्स (Magnetic Flux)

चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी तल से उसके लम्बवत् गुजरने वाली कुल बल रेखाओं की संख्या को उस तल से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स कहते हैं। इसे ϕ से प्रदर्शित करते हैं। यह एक अदिश राशि है।



चित्र क्र. 5.1: चुम्बकीय फ्लक्स

C.G.S. पद्धति में इसका मात्रक मैक्सवेल (maxwell) तथा M.K.S. पद्धति में वेबर (weber) है।

टिप्पणी

माना एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र B के लम्बवत् कोई तल रखा हुआ है। यदि तल का क्षेत्रफल A हो, तो तल से बद्ध कुल चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi = BA$$

यदि चुम्बकीय क्षेत्र B , तल के अभिलम्ब से θ कोण बनाता हो, तो तल से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi = BA \cos \theta \quad \dots (1)$$

सदिश रूप में $\phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$

समिकरण (1) से स्पष्ट है कि—

(i) यदि $\theta = 0^\circ$ हो अर्थात् तल चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् हो, तो

$$\phi = BA \cos 0^\circ = B.A \text{ (अधिकतम)}$$

इस प्रकार यदि तल चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् हो, तो उससे बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान अधिकतम होता है।

(ii) यदि $\theta = 90^\circ$ हो अर्थात् तल चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर हो, तो

$$\phi = BA \cos 90^\circ = BA \times 0 = 0$$

इस प्रकार यदि तल चुम्बकीय क्षेत्र के समान्तर हो, तो उससे बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान शून्य होता है।

चुम्बकीय फ्लक्स का विमीय सूत्र (Dimensional Formula of Magnetic Flux)

सूत्र : $\phi = BA$ से,

$$\phi \text{ का मात्रक} = B \text{ का मात्रक} \times A \text{ का मात्रक}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन}}{\text{ऐम्पियर} \times \text{मीटर}} \times \text{मीटर}^2 = \frac{\text{न्यूटन} \times \text{मीटर}}{\text{ऐम्पियर}}$$

$$= \frac{(\text{किग्रा} \times \text{मीटर} / \text{सेकण्ड}^2) \times \text{मीटर}}{\text{ऐम्पियर} \times \text{मीटर}} = \frac{\text{किग्रा} \times \text{मीटर}^2}{\text{सेकण्ड}^2 \times \text{ऐम्पियर}}$$

अतः ϕ का विमीय सूत्र $ML^2T^2A^{-1}$ होगा।

पुनः $\phi = BA$ से $B = \frac{\phi}{A}$, अतः चुम्बकीय क्षेत्र B का मात्रक वेबर/मीटर² भी होता है। इसी कारण चुम्बकीय क्षेत्र B को चुम्बकीय फ्लक्स घनत्व (Magnetic flux density) भी कहते हैं।

नोटः(i) यदि n फेरों वाली कुण्डली का तल एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र B के लम्बवत् हो, तो कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स $\phi = nBA$ ।

- (ii) यदि चुम्बकीय क्षेत्र B , n फेरों वाली किसी कुण्डली के तल के अभिलम्ब से θ कोण बनाये तो उस कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स $\phi = nBA \cos \theta$.

5.2(a) विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण (Electro-Magnetic Induction)

टिप्पणी

सन् 1831 में फ़ैराडे ने प्रायोगिक आधार पर स्पष्ट किया कि जब किसी परिपथ से गुजरने वाली प्रेरण रेखाओं या चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन होता है, तो परिपथ में एक विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है और यदि परिपथ बन्द है तो इस विद्युत वाहक बल के कारण परिपथ में एक विद्युत धारा प्रवाहित होने लगती है। किसी परिपथ से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन के कारण परिपथ में उत्पन्न विद्युत वाहक बल को **प्रेरित विद्युत वाहक बल** (induced e.m.f.) तथा इस विद्युत वाहक बल के कारण परिपथ में प्रवाहित धारा को **'प्रेरित धारा'** (Induced Current) कहते हैं। यह विद्युत वाहक बल व धारा तभी तक होती है जब तक कि फ्लक्स में परिवर्तन होता है। इस घटना को **'विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण'** (electro-magnetic induction) कहते हैं।

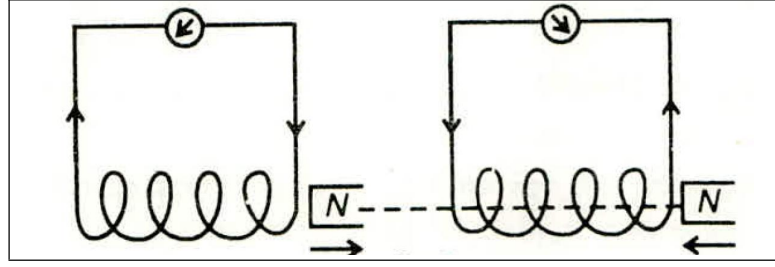
किसी परिपथ से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स को निम्न विधियों द्वारा परिवर्तित किया जा सकता है –

- किसी परिपथ (कुण्डली) के सापेक्ष चुम्बक की गति के कारण।
- किसी समीपवर्ती परिपथ में धारा परिवर्तन के कारण।
- परिपथ में धारा के परिवर्तन के कारण।
- किसी कुण्डली को चुम्बकीय क्षेत्र में घूर्णन कराने से।
- किसी चालक को किसी चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् चलाने से।

विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के प्रायोगिक प्रदर्शन के लिये निम्न प्रयोग समझाये गये हैं—

(i) कुण्डली के सापेक्ष चुम्बक की गति (Motion of the Magnet Relative to Coil) – चित्र 5.2(a) में जब एक चुम्बक को कुण्डली के सापेक्ष चलाया जाता है तथा कुण्डली के साथ एक धारामापी जोड़ा जाता है तो चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को कुण्डली के समीप तेजी से ले जाने पर धारामापी में एक क्षणिक विक्षेप आता है। किन्तु जब चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को कुण्डली से दूर खींचा जाता है तो कुण्डली में धारा विपरीत दिशा में होती है। यदि इसी प्रयोग को चुम्बक के दक्षिणी ध्रुव के साथ किया जाये तो कुण्डली में धाराओं की दिशाएँ विपरीत होती हैं। अतः कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल या प्रेरित धारा चुम्बक की कुण्डली के सापेक्ष गति की दर पर निर्भर करती है। चुम्बक की गति बढ़ाने पर कुण्डली में धारा बढ़ जाती है तथा कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल कुण्डली में फेरों की संख्या के समानुपाती होता है।

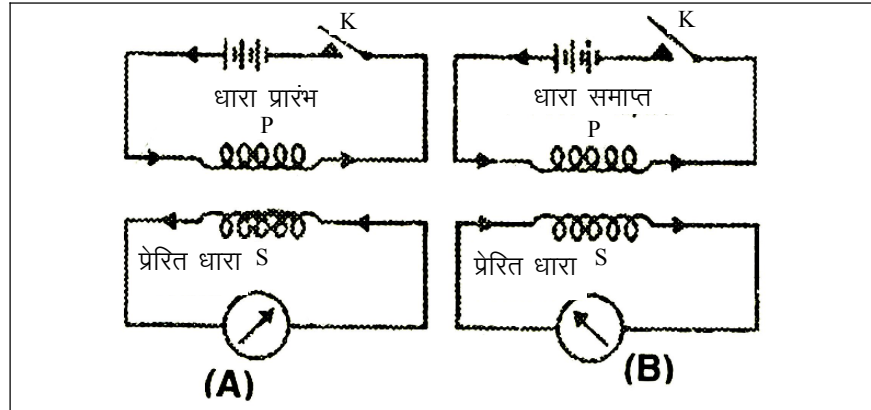
टिप्पणी



चित्र क्र. 5.2(a): फ़ैराडे का प्रयोग

इसी प्रयोग को चुम्बक को स्थिर रखकर कुण्डली को उसके सापेक्ष चलाने पर भी किया जा सकता है, जिससे उन दोनों के बीच सापेक्ष गति से कुण्डली से गुजरने वाले फ्लक्स में परिवर्तन के कारण कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल या धारा उत्पन्न हो जाती है।

(ii) किसी कुण्डली के समीपवर्ती कुण्डली में धारा परिवर्तन या स्वयं उसी कुण्डली में धारा परिवर्तन के कारण विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण – चित्र 5.2(b) में दो कुण्डलियाँ P व S दिखाई गई हैं। कुण्डली P को एक बैटरी तथा कुँजी K से जोड़ा गया है इसे 'प्राइमरी' कहते हैं इसके समीपवर्ती कुण्डली S को एक धारामापी से जोड़ा गया है जिसे 'सेकण्डरी' कहते हैं।



चित्र क्र. 5.2(b): चुम्बक तथा कुण्डली के साथ फ़ैराडे के प्रयोग

जब कुँजी K को दबाकर (चित्र 5.2(b)) प्राइमरी कुण्डली P में धारा प्रारम्भ की जाती है, तो सेकण्डरी में एक क्षणिक धारा प्रेरित होती है, जिसकी दिशा प्राइमरी में धारा की दिशा के विपरीत होती है। इसी प्रकार जब प्राइमरी में धारा बन्द की जाती है (चित्र 5.2(b)) तो भी सेकण्डरी में एक क्षणिक धारा प्रेरित होती है परन्तु इसकी दिशा प्राइमरी में धारा की दिशा के समान होती है। इस प्रयोग में प्राइमरी में धारा को प्रारम्भ करने या बन्द करने पर सेकण्डरी में चुम्बकीय फ्लक्स परिवर्तन के कारण उसमें प्रेरित विद्युत वाहक बल (या धारा) उत्पन्न हो जाता है।

जब प्राइमरी में धारा को प्रारम्भ या बन्द करते हैं या प्रवाहित धारा में परिवर्तन करते हैं तो स्वयं प्राइमरी से गुजरने वाले फ्लक्स में भी परिवर्तन होता है जिससे स्वयं प्राइमरी में भी प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है।

जब कुण्डलियों को एक लोहे के टुकड़े पर लपेटा जाता है, तो प्रेरित धारा का मान बहुत अधिक हो जाता है। प्रेरित धारा के मान में अत्याधिक वृद्धि करने के लिये दोनों कुण्डलियों को एक ही लोहे की रिंग पर लपेटा जाता है।

टिप्पणी

5.3 विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के फ़ैराडे के नियम (Faraday's Laws of Electro-magnetic Induction)

विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के सम्बन्ध में फ़ैराडे द्वारा किये गये अनेक प्रयोगों के परिणामों को जिन नियमों में समावेशित किया गया उन्हें फ़ैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण नियम कहते हैं।

(i) प्रथम नियम – फ़ैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के प्रथम नियम के अनुसार जब किसी बन्द परिपथ (कुण्डली) से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स (या प्रेरण रेखाओं) में परिवर्तन होता है, तो परिपथ में एक प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है। इस प्रेरित विद्युत वाहक बल के कारण परिपथ में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है। यह धारा उतने ही समय तक बहती है जितने समय तक परिपथ में गुजरने वाले फ्लक्स में परिवर्तन होता है।

(ii) द्वितीय नियम – किसी परिपथ से गुजरने वाले फ्लक्स में परिवर्तन के कारण उत्पन्न प्रेरित वि. वा. ब. का परिमाण उससे गुजरने वाले फ्लक्स परिवर्तन की ऋणात्मक दर के अनुक्रमानुपाती होता है। यह न्यूमैन नियम (Newmann Law) भी कहलाता है।

माना किसी क्षण परिपथ से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स ϕ_1 है तथा t सेकण्ड बाद उससे बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान ϕ_2 हो जाता है।

$$\therefore \text{चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन की दर} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t}$$

अतः फ़ैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के द्वितीय नियम से प्रेरित विद्युत वाहक बल

$$e \propto \frac{\phi_2 - \phi_1}{t}$$

$$\text{या } e = -K \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{t} \right)$$

जहाँ K नियतांक है। S. I. पद्धति में इसका मान 1 होता है।

$$e = - \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{t} \quad \dots (1)$$

यदि Δt समय में चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन $\Delta\phi$ हो तो समीकरण (1) को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है –

$$e = - \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

यदि समय अन्तराल बहुत ही कम हो अर्थात् $\Delta t \rightarrow 0$ तो

$$e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right) = - \frac{d\phi}{dt} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

ऋण चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि प्रेरित विद्युत वाहक बल चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन का विरोध करता है स्पष्ट है कि t का मान कम होने पर प्रेरित विद्युत वाहक बल का मान अधिक होगा।

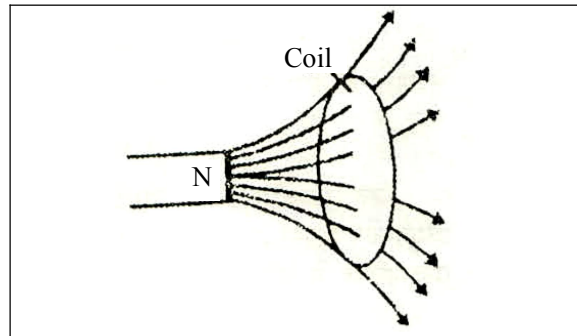
(iii) तृतीय नियम या लेन्ज का नियम (Lenz's Law) – इस नियम से किसी परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल की दिशा का ज्ञान होता है।

इस नियम के अनुसार,

“किसी परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल या प्रेरित धारा की दिशा इस प्रकार होती है कि वह उस परिवर्तन का ही विरोध करती है जिसके कारण वह उत्पन्न हुई है।” किसी परिपथ में प्रेरित धारा फ्लक्स परिवर्तन के कारण उत्पन्न होती है अतः प्रेरित धारा की दिशा इस प्रकार होती है कि वह परिपथ में फ्लक्स परिवर्तन का विरोध करती है।

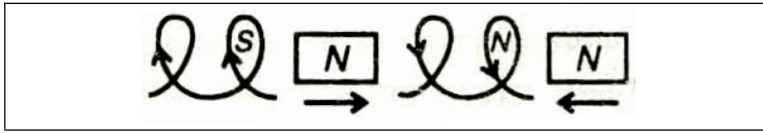
फैराडे के द्वितीय नियम के अनुसार परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल $e = - \frac{d\phi_B}{dt}$ से इस नियम का प्रदर्शन होता है तथा ऋण चिह्न फ्लक्स में परिवर्तन (बढ़ने या घटने) का विरोध करता है।

व्याख्या (Explanation) – चुम्बक व कुण्डली के प्रयोग में जब चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को कुण्डली के समीप रखते हैं तो ध्रुव से प्रारम्भ होकर कुण्डली में से गुजरने वाले फ्लक्स का मान नियत रहता है। यदि चुम्बक को चित्र 5.3 के अनुसार कुण्डली की ओर चलाया जाये तो कुण्डली से गुजरने वाले फ्लक्स में वृद्धि होती है जबकि चुम्बक को कुण्डली से दूर ले जाने पर उससे गुजरने वाले फ्लक्स में कमी होती है। इन दोनों ही अवस्थाओं में कुण्डली में फ्लक्स परिवर्तन के कारण उतने समय तक विद्युत वाहक बल प्रेरित हो जाता है जितने समय तक चुम्बक व कुण्डली के बीच सापेक्ष गति होती है। चुम्बक की गति जितनी अधिक होगी उतनी ही फ्लक्स परिवर्तन की दर अधिक होगी जिसके परिणामस्वरूप कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल उतना ही अधिक होगा। कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल या प्रेरित धारा की दिशा लेन्ज के नियम के अनुसार होगी।



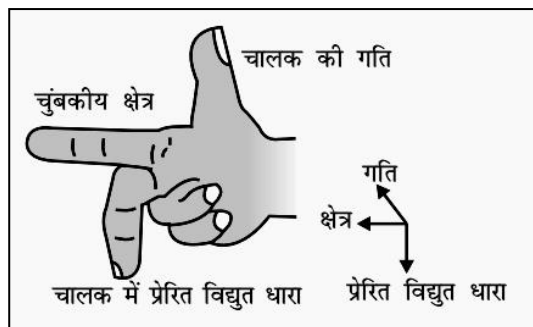
चित्र क्र. 5.3: लेन्ज का नियम

चित्र 5.4(a) के अनुसार जब चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को कुण्डली के समीप लाया जाता है तो कुण्डली में प्रेरित धारा की दिशा इस प्रकार होगी कि कुण्डली का चुम्बक के समीप वाला (बायाँ) सिरा उत्तरी ध्रुव की तरह व्यवहार करेगा और वह चुम्बक के कुण्डली के समीप आने (अर्थात् चुम्बक की कुण्डली के सापेक्ष गति) का विरोध करेगा जिसके कारण प्रेरित धारा फ्लक्स परिवर्तन का विरोध करती है। इसी प्रकार जब चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को कुण्डली से दूर हटाते हैं तो कुण्डली में प्रेरित धारा की दिशा इस प्रकार होगी कि चुम्बक के समीप का कुण्डली का तल दक्षिणी ध्रुव की तरह व्यवहार करेगा जिससे कुण्डली का दक्षिणी ध्रुव दूर जाते चुम्बक के उत्तरी ध्रुव को आकर्षित करने लगे तथा वह चुम्बक के कुण्डली से दूर जाने (या फ्लक्स के घटने) का विरोध कर सके। इस प्रकार दोनों ही अवस्थाओं में प्रेरित धारा चुम्बक की गति का विरोध करती है, अतः चुम्बक को चलाने में कार्य किया जाता है। चुम्बक को चलाने में किया गया यह यांत्रिक कार्य ही कुण्डली में विद्युत ऊर्जा के रूप में प्रकट होता है इस प्रकार कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल ऊर्जा संरक्षण के नियम के अनुसार ही होता है अर्थात् चुम्बकीय प्रेरण की घटना में यांत्रिक ऊर्जा का रूपान्तरण विद्युत ऊर्जा में होता है।



चित्र क्र. 5.4(a): चुम्बक की कुण्डली के सापेक्ष गति

(iv) फ्लेमिंग का दायें हाथ का नियम – यदि किसी सीधे चालक को किसी चुम्बकीय क्षेत्र में उसके लंबवत चलाया जाए तो चालक में उत्पन्न प्रेरित धारा की दिशा फ्लेमिंग के दायें हाथ के नियम की सहायता से ज्ञात की जाती है इस नियम के अनुसार दायें हाथ का अँगूठा तर्जनी और मध्यमा को इस तरह फैलाओं कि वे परस्पर लंबवत हो अब यदि अँगूठा चालक की गति की दिशा को एवं तर्जनी क्षेत्र की दिशा को प्रदर्शित करें तो मध्यमा प्रेरित धारा की दिशा को प्रदर्शित करेगी।



चित्र 5.4(b): फ्लेमिंग के दायें हाथ का नियम

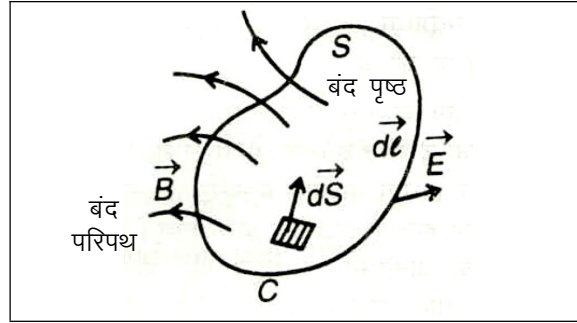
5.4 फ़ैराडे के नियम का समाकलन तथा अवकलन स्वरूप (Vector or Differential Form of Faraday's Law)

फ़ैराडे के नियमानुसार किसी परिपथ में फ्लक्स परिवर्तन होने पर उसमें उत्पन्न प्रेरित विद्युत वाहक बल परिपथ से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स के परिवर्तन की ऋणात्मक समय दर के बराबर होता है। गणितीय रूप से

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \dots (1)$$

यह समीकरण परिपथ की आकृति तथा फ्लक्स परिवर्तन पर निर्भर नहीं करता।

माना चुम्बकीय क्षेत्र एक स्थिर चुम्बक या धारावाही चालक द्वारा उत्पन्न होता है। चित्र 5.5 माना इस चुम्बकीय क्षेत्र में एक बन्द परिपथ c पृष्ठीय सतह S तथा परिपथ के समीपवर्ती क्षेत्र में चुम्बकीय प्रेरण घनत्व \vec{B} है।



चित्र क्र. 5.5

इस बिन्दु परिपथ के सूक्ष्म क्षेत्रफल $d\vec{S}$ से गुजरने वाला चुम्बकीय फ्लक्स \vec{B} व $d\vec{S}$ अदिश गुणनफल के बराबर होगा।

$$\text{अतः} \quad d\phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \dots (2)$$

अतः सम्पूर्ण परिपथ से गुजरने वाला फ्लक्स इस प्रकार के सूक्ष्म क्षेत्रफलों के द्वारा प्राप्त फ्लक्सों के योग के बराबर होगा अर्थात्

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \dots (3)$$

जब चुम्बकीय फ्लक्स परिवर्तित होता है तो परिपथ के चारों ओर विद्युत क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है और इस विद्युत क्षेत्र का रैखिक समाकलन बन्द परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल के बराबर होता है। अतः

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \dots (4)$$

जहाँ \vec{E} , परिपथ के सूक्ष्म भाग $d\vec{l}$ पर विद्युत क्षेत्र हैं।

समीकरण (3) व (4) की सहायता से समीकरण (1) को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है –

$$e = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \dots (5)$$

अतः समीकरण (4) से

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

यह फ़ैराडे के नियम का समाकलन (integral) रूप है। इसके अनुसार

“किसी बन्द परिपथ के अनुदिश विद्युत क्षेत्र का रैखिक समाकलन (line integral) परिपथ से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स के परिवर्तन की ऋणात्मक समय दर के बराबर होता है।”

परिपथ से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स का मान अनेक प्रकार से बदला जा सकता है : चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} को नियत रखकर, परिपथ की स्थिति बदल कर या परिपथ को स्थिर रखकर चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} को बदल कर।

$$\text{अतः} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \dots (6)$$

स्टोक प्रमेय से

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \dots (7)$$

समीकरण (6) तथा (7) से

$$\iint_S \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{अतः} \quad \text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{या} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (8)$$

यह फ़ैराडे के नियम का अवकलन रूप (differential form) है। ऋणात्मक चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि प्रेरित विद्युत वाहक बल की दिशा इस प्रकार होती है कि वह उस परिवर्तन का विरोध करती है जिसके कारण वह उत्पन्न हुई है जो लेन्ज का नियम है।

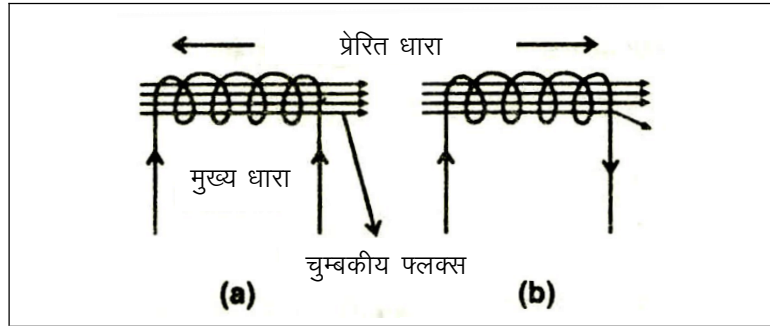
टिप्पणी

5.5 स्व-प्रेरण (Self-Induction)

टिप्पणी

सर्वप्रथम स्व-प्रेरण की घटना अमेरिकी वैज्ञानिक जॉसेफ हैनरी ने सैद्धान्तिक स्वप्रेरण विवेचना के आधार पर की थी।

जब किसी कुण्डली में विद्युत धारा प्रवाहित की जाती है तो उसके चारों ओर एक चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है तथा कुण्डली में से चुम्बकीय बल-रेखाएँ गुजरने पर कुण्डली से चुम्बकीय फ्लक्स सम्बद्ध हो जाता है। धारा के मान में परिवर्तन करने पर प्रेरण रेखाओं की संख्या अर्थात् चुम्बकीय फ्लक्स में भी परिवर्तन होता है तथा एक प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है जिससे कुण्डली में पहले वाली मुख्य धारा के अतिरिक्त एक प्रेरित धारा भी प्रवाहित होती है। लेन्ज के नियमानुसार, प्रेरित विद्युत वाहक बल अथवा धारा सदैव मुख्य धारा में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है। जब मुख्य धारा बढ़ायी जाती है तो प्रेरित धारा मुख्य धारा की विपरीत दिशा में बहती है तथा मुख्य धारा के बढ़ने का विरोध करती है। चित्र 5.6(a) तथा जब मुख्य धारा घटाई जाती है तो प्रेरित धारा, मुख्य धारा की ही दिशा में बहती है और मुख्य धारा के घटने का विरोध करती है। 5.6(b)।



चित्र क्र. 5.6: स्व-प्रेरण की घटना

अतः "विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण की उस घटना को जिसमें किसी कुण्डली से प्रवाहित धारा को परिवर्तित करने पर स्वयं उसी कुण्डली में प्रेरित वि. वा. बल या प्रेरित धारा उत्पन्न होती है स्व-प्रेरण कहते हैं।"

अतः जब किसी कुण्डली में धारा प्रवाहित करने के लिये कुन्जी में प्लग लगाया जाता है तो कुण्डली का स्व-प्रेरण धारा बहने का विरोध करता है अतः धारा शून्य से अपने अधिकतम मान तक पहुँचने में कुछ समय लेती है। इसी प्रकार प्लग को निकालने पर कुण्डली की स्व-प्रेरण धारा के बन्द होने का विरोध करता है तथा धारा अधिकतम मान से शून्य मान प्राप्त करने में भी समय लेती है।

स्व-प्रेरकत्व या स्व-प्रेरण गुणांक (Self-inductance or Co-efficient of Self-induction)

जब किसी कुण्डली में धारा प्रवाहित की जाती है तो कुण्डली के चारों ओर चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है जिससे उसी कुण्डली से होकर बल रेखाएँ

(चुम्बकीय फलक्स) गुजरने लगती हैं। कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फलक्स उसमें प्रवाहित धारा के समानुपाती होता है। यदि किसी कुण्डली में धारा I प्रवाहित करने पर उससे बद्ध चुम्बकीय फलक्स ϕ हो, तो

$$\phi \propto I \text{ या } \phi = LI \quad \dots (1)$$

जहाँ L एक नियतांक है, जिसका मान कुण्डली के आकार, आकृति, माध्यम तथा उसमें फेरों की संख्या पर निर्भर करता है इसे उस कुण्डली का स्वप्रेरकत्व या स्व-प्रेरण गुणांक कहते हैं।

यदि $I=1$ हो तो समीकरण (1) से $\phi = L$

अतः किसी कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व, आंकिक रूप से कुण्डली से बद्ध उस चुम्बकीय फलक्स के बराबर होता है, जो कुण्डली में एकांक धारा प्रवाहित करने पर उत्पन्न होता है।

अब यदि कुण्डली में बहने वाली धारा में परिवर्तन किया जाये तो उससे बद्ध चुम्बकीय फलक्स में भी परिवर्तन होगा।

अतः फेराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के द्वितीय नियम से,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$$

$$\text{या } e = -L\frac{dI}{dt} \quad \dots (2)$$

ऋण चिह्न यह दर्शाता है कि प्रेरित विद्युत वाहक बल सदैव चुम्बकीय फलक्स परिवर्तन का विरोध करता है।

समीकरण (2) में यदि $\frac{dI}{dt}=1$ हो, तो $e = -L$

अतः किसी कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व आंकिक रूप से कुण्डली से सम्बद्ध उस चुम्बकीय फलक्स के बराबर होता है, जबकि कुण्डली में धारा परिवर्तन की दर इकाई हो।

मात्रक – S.I. पद्धति में स्व-प्रेरकत्व का मात्रक हेनरी (henry) है। इसका संकेत H है।

समीकरण (1) से,

$$L = \frac{\phi}{I}$$

इस सूत्र में यदि $\phi=1$ वेबर तथा $I=1$ ऐम्पियर हो, तो

$$L = \frac{1 \text{ वेबर}}{1 \text{ ऐम्पियर}} = 1 \text{ हेनरी}$$

टिप्पणी

अतः यदि किसी कुण्डली में 1 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित करने पर उससे बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान 1 वेबर हो तो उस कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व 1 हेनरी होता है।

$$\text{समीकरण (2) से, } L = \frac{e}{\frac{dI}{dt}} \quad (\text{ऋण चिह्न को छोड़ने पर})$$

इस सूत्र में यदि $e = 1$ वोल्ट तथा $\frac{dI}{dt} = 1$ ऐम्पियर/सेकण्ड हो तो

$$L = \frac{1 \text{ वोल्ट}}{1 \text{ ऐम्पियर/सेकण्ड}} = 1 \text{ हेनरी}$$

अतः यदि किसी कुण्डली में धारा परिवर्तन की दर 1 ऐम्पियर प्रति सेकण्ड होने पर उसमें उत्पन्न विद्युत वाहक बल का मान 1 वोल्ट हो तो उस कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व 1 हेनरी होता है।

हेनरी बड़ा मात्रक है। अतः उसके स्थान पर छोटे मात्रक मिली हेनरी या माइक्रो हेनरी का प्रयोग करते हैं।

$$1 \text{ मिली हेनरी (mH)} = 10^{-3} \text{ हेनरी (H)}$$

$$1 \text{ माइक्रो हेनरी (\mu H)} = 10^{-6} \text{ हेनरी (H)}$$

तथा स्व-प्रेरकत्व की विमाएँ $L = ML^2T^{-2}A^{-2}$ होती है

5.6 लम्बी परिनालिका के स्व-प्रेरकत्व के लिए व्यंजक (Expression for Self-inductance of a Long Solenoid)

माना किसी परिनालिका की लम्बाई l , त्रिज्या r तथा उसकी प्रति एकांक लम्बाई पर फेरों की संख्या n है, अतः परिनालिका में कुल फेरों की संख्या $N = nl$ तथा उसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ होगा।

यदि परिनालिका में धारा I प्रवाहित हो रही हो तो परिनालिका के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता $B = \mu_0 nl$, जहाँ μ_0 निर्वात की चुम्बकशीलता है।

अतः परिनालिका से बद्ध कुल चुम्बकीय फ्लक्स $\phi = NBA$

$$\begin{aligned} \text{या} \quad \phi &= nl \mu_0 nI A \\ &= \mu_0 n^2 l I A \end{aligned}$$

$$\text{परन्तु स्व-प्रेरकत्व } L = \frac{\phi}{I}$$

$$\therefore L = \frac{\mu_0 n^2 l I A}{I} \quad \dots (1)$$

$$\text{या } L = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 lA \text{ या } L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad \dots (2)$$

($\because N = nl$)

यदि परिनालिका के अन्दर क्रोड की चुम्बकशीलता μ हो तो

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} \quad \dots (3)$$

यही लम्बी परिनालिका के स्व-प्रेरकत्व के लिए व्यंजक है।

समी. (3) से स्पष्ट है कि किसी परिनालिका का स्व-प्रेरकत्व निम्न कारकों पर निर्भर करता है—

(i) परिनालिका के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल पर (अर्थात् त्रिज्या पर) — परिनालिका के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल बढ़ाने पर उसका स्व-प्रेरकत्व बढ़ जाता है।

(ii) फेरों की संख्या पर — परिनालिका में फेरों की संख्या बढ़ाने पर उसका स्व-प्रेरकत्व बढ़ जाता है।

(iii) परिनालिका की लम्बाई पर — परिनालिका की लम्बाई बढ़ाने पर उसका स्व-प्रेरकत्व कम हो जाता है।

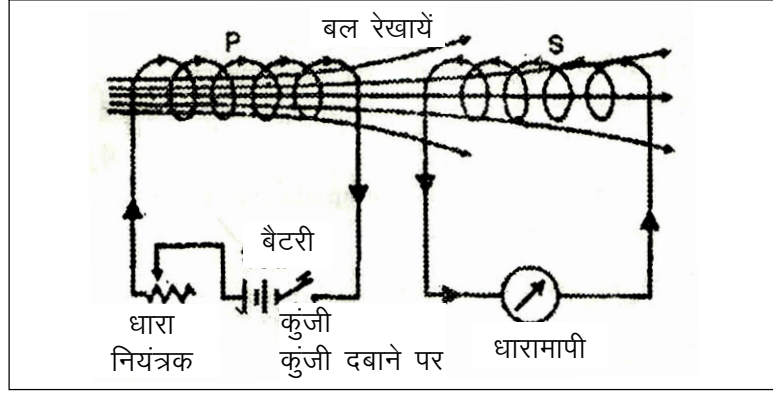
(iv) परिनालिका के क्रोड की चुम्बकशीलता पर — परिनालिका के अन्दर अधिक चुम्बकशीलता का क्रोड रखने पर उसका स्व-प्रेरकत्व बढ़ जाता है।

त्रिज्या के पद में समीकरण (3) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है—

$$L = \frac{\mu N^2 \pi r^2}{l}$$

5.7 अन्योन्य प्रेरण (Mutual Induction)

चित्र 5.7 के अनुसार जब एक प्राथमिक कुण्डली P का परिपथ एक बैटरी और कुंजी से इस प्रकार जोड़ते हैं कि परिपथ को शीघ्रता से जोड़ा और तोड़ा जा सके एवं प्राथमिक कुण्डली P के निकट ही एक द्वितीयक कुण्डली S को एक धारामापी से जोड़ देते हैं। प्राथमिक कुण्डली P में स्थिर प्रबलता की धारा प्रवाहित होती है तो द्वितीयक कुण्डली में कोई धारा उत्पन्न नहीं होती। इसके विपरीत यदि प्राथमिक कुण्डली में धारा की प्रबलता परिवर्तित होती (घटती या बढ़ती) है तो प्राथमिक कुण्डली में उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र परिवर्तित होता है और उस परिवर्तित चुम्बकीय क्षेत्र के कारण द्वितीयक कुण्डली से गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या में परिवर्तन होता है, जिसके फलस्वरूप द्वितीयक कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है। प्राथमिक कुण्डली P में धारा बढ़ने पर द्वितीयक कुण्डली S में प्रेरित विद्युत वाहक बल एक दिशा में और प्राथमिक कुण्डली P में धारा घटने से द्वितीयक कुण्डली S में प्रेरित विद्युत वाहक बल विपरीत दिशा में उत्पन्न होता है।



चित्र क्र. 5.7: अन्योन्य प्रेरण

अतः जब किसी कुण्डली से प्रवाहित होने वाली विद्युत धारा के मान में परिवर्तन किया जाता है तो समीप स्थित दूसरी कुण्डली से गुजरने वाली बल रेखाओं की संख्या में परिवर्तन होता है। अतः उस कुण्डली में प्रेरित धारा उत्पन्न हो जाती है। इस घटना को अन्योन्य प्रेरण कहते हैं। जिस कुण्डली में धारा के मान में परिवर्तन होता है, उसे प्राथमिक कुण्डली कहते हैं और जिस कुण्डली में प्रेरित धारा उत्पन्न होती है उसे द्वितीयक कुण्डली कहते हैं।

अन्योन्य प्रेरकत्व या अन्योन्य प्रेरण गुणांक (Mutual Inductance or Coefficient of Mutual Induction)

यदि प्राथमिक कुण्डली में धारा I प्रवाहित करने से द्वितीयक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स ϕ हो, तो

$$\phi \propto I$$

$$\text{या } \phi = MI \quad \dots (1)$$

जहाँ M एक नियतांक है जो दोनों कुण्डलियों में फेरों की संख्या, द्वितीयक कुण्डली के क्षेत्रफल तथा माध्यम पर निर्भर करता है इसे दोनों कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व या अन्योन्य प्रेरण गुणांक कहते हैं।

यदि $I=1$ हो, तो समीकरण (1) से,

$$\phi = M$$

अतः किन्हीं दो कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व का आंकिक मान द्वितीयक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स के बराबर होता है जो उस समय उत्पन्न होता है जबकि प्राथमिक कुण्डली में एकांक धारा प्रवाहित की जाती है।

यदि प्राथमिक कुण्डली में बहने वाली धारा के मान में परिवर्तन किया जाये तो द्वितीयक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स में भी परिवर्तन होगा। अतः फ़ैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के द्वितीय नियम से,

प्रेरित विद्युत-वाहक बल

$$= -\frac{d\phi}{dt}$$

$$= -\frac{d(MI)}{dt} \quad [\text{समीकरण (1) से मान रखने पर}]$$

या
$$e = -M \frac{dI}{dt} \quad \dots (2)$$

यदि $\frac{dI}{dt} = 1$ हो, तो समीकरण (2) से,

$$e = -M$$

अतः दो कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व आंकिक रूप से द्वितीयक कुण्डली में प्रेरित उस विद्युत वाहक बल के बराबर होता है जो प्राथमिक कुण्डली में धारा परिवर्तन की दर इकाई होने पर उत्पन्न होता है।

मात्रक – S.I. पद्धति में अन्योन्य प्रेरकत्व का मात्रक हेनरी है। इसे H से प्रदर्शित करते हैं।

(i) समीकरण (1) से,

$$M = \frac{\phi}{I}$$

इस सूत्र में यदि $\phi = 1$ वेबर तथा $I = 1$ ऐम्पियर हो, तो

$$M = \frac{1 \text{ वेबर}}{1 \text{ ऐम्पियर}} = 1 \text{ हेनरी}$$

अतः यदि प्राथमिक कुण्डली में 1 ऐम्पियर की धारा प्रवाहित करने पर द्वितीयक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स 1 वेबर हो, तो दोनों कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व 1 हेनरी होता है।

(ii) समीकरण (2) से,

$$M = \frac{-e}{\frac{dI}{dt}}$$

इस सूत्र में यदि $e = 1$ वोल्ट तथा $\frac{dI}{dt} = 1$ ऐम्पियर/सेकण्ड हो, तो

$$M = \frac{1 \text{ वोल्ट}}{1 \text{ ऐम्पियर/सेकण्ड}} = 1 \text{ हेनरी}$$

अतः यदि प्राथमिक कुण्डली में धारा परिवर्तन की दर 1 ऐम्पियर/सेकण्ड होने पर द्वितीयक कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल का मान 1 वोल्ट हो तो दोनों कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व 1 हेनरी होता है।

टिप्पणी

5.8 दो लम्बी परिनालिकाओं के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व के लिए व्यंजक (Expression for Mutual Inductance between two Long Solenoids)

माना S_1 और S_2 दो सम अक्षीय परिनालिकाएँ हैं। परिनालिका S_1 , परिनालिका S_2 से पूर्णतः घिरी है, प्रत्येक की लम्बाई l है। माना S_1 और S_2 की प्रति एकांक लम्बाई में फेरों की संख्या क्रमशः n_1 और n_2 हैं।

यदि परिनालिका S_1 में I_1 धारा प्रवाहित हो रही हो, तो उसके अन्दर चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad \dots (1)$$

\therefore परिनालिका S_2 के प्रत्येक फेरे से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$= B_1 A$$

जहाँ A परिनालिका S_1 का क्षेत्रफल है।

अतः परिनालिका S_2 के सम्पूर्ण फेरे से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi_{21} = B_1 A \cdot n_2 l \quad \dots (2)$$

जहाँ $n_2 l =$ परिनालिका S_2 में कुल फेरों की संख्या

अतः समीकरण (1) से मान रखने पर,

$$\phi_{21} = \mu_0 n_1 I_1 n_2 l A \quad \dots (3)$$

किन्तु $\phi_{21} = M_{21} I_1 \quad \dots (4)$

समीकरण (3) और (4) से,

$$M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 A l \quad \dots (5)$$

अब यदि परिनालिका S_2 में I_2 धारा प्रवाहित हो रही हो, तो उसके केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \quad \dots (6)$$

अतः परिनालिका S_1 के प्रत्येक फेरे से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स $= B_2 A$

\therefore परिनालिका S_1 के प्रत्येक फेरे से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi_{12} = B_2 A n_1 l$$

जहाँ $n_1 l =$ परिनालिका S_1 में कुल फेरों की संख्या

समीकरण (6) से मान रखने पर, $\phi_{12} = \mu_0 n_2 A l n_1 I_2$

या $\phi_{12} = \mu_0 n_1 n_2 A l I_2 \quad \dots (7)$

परन्तु $\phi_{12} = M_{12} I_2 \quad \dots (8)$

$$\text{समीकरण (7) और (8) से, } M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 A l \quad \dots (9)$$

$$\text{समीकरण (5) और (8) से, } M_{21} = M_{12}$$

स्पष्ट है कि दो लम्बी परिनालिकाओं की स्थिति में उनका अन्योन्य प्रेरकत्व परिवर्तित नहीं होता है चाहे विद्युत धारा किसी भी परिनालिका में प्रवाहित हो।

इस प्रकार दो लम्बी परिनालिकाओं का अन्योन्य प्रेरकत्व निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है –

$$M = \mu_0 n_1 n_2 A l \quad \dots (10)$$

यदि परिनालिकाओं के मध्य क्रोड की चुम्बकशीलता μ हो, तो

$$M = \mu n_1 n_2 A l \quad \dots (11)$$

यदि परिनालिका S_1 में फेरों की संख्या N_1 हो, तो $n_1 = \frac{N_1}{l}$ इसी

तरह यदि परिनालिका S_2 में फेरों की संख्या N_2 हो, तो $n_2 = \frac{N_2}{l}$

∴ समीकरण (11) में मान रखने पर,

$$M = \frac{\mu N_1 N_2 A}{l} \quad \dots (12)$$

समीकरण (12) से स्पष्ट है कि दो परिनालिकाओं के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व निम्न कारकों पर निर्भर करता है—

(i) प्रत्येक परिनालिका में फेरों की संख्या पर – परिनालिकाओं में फेरों की संख्या अधिक होने पर अन्योन्य प्रेरकत्व का मान अधिक होता है।

(ii) परिनालिकाओं के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल पर – अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल अधिक होने पर अन्योन्य प्रेरकत्व का मान अधिक होता है।

(iii) परिनालिकाओं की लंबाई पर – लंबाई अधिक होने पर अन्योन्य प्रेरकत्व का मान कम हो जाता है।

(iv) परिनालिकाओं की क्रोड की चुम्बकशीलता पर – परिनालिकाओं के अन्दर अधिक चुम्बकशीलता वाले क्रोड रखने पर उनके मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व का मान बढ़ जाता है।

टिप्पणी

5.9 स्व-प्रेरण तथा अन्योन्य प्रेरण में अन्तर (Difference between Self and Mutual Induction)

	स्व-प्रेरण	अन्योन्य प्रेरण
1.	किसी कुण्डली में बहने वाली धारा में परिवर्तन करने से उसी कुण्डली में प्रेरित धारा उत्पन्न होती है। इस घटना को स्व-प्रेरण कहते हैं।	किसी कुण्डली में बहने वाली धारा में परिवर्तन करने से उसके पास रखी दूसरी कुण्डली में प्रेरित धारा उत्पन्न होती है। इस घटना को अन्योन्य प्रेरण कहते हैं।
2.	प्रेरित धारा कुण्डली की मुख्य धारा को सीधे प्रभावित करती है।	प्रेरित धारा दूसरी कुण्डली में बहती है, अतः प्राथमिक कुण्डली की मुख्य धारा को सीधे प्रभावित नहीं करती है।
3.	इसमें एक कुण्डली होती है।	इसमें दो कुण्डलियाँ होती हैं (एक प्राथमिक तथा दूसरी द्वितीयक)

5.10 दो प्रेरक कुण्डलियों का श्रेणीक्रम तथा समान्तर क्रम में तुल्य स्व-प्रेरकत्व (Equivalent Self-Inductance of Two Inductive Coils in Series and in Parallel)

माना दो प्रेरक कुण्डलियाँ हैं जिनके अलग-अलग स्व-प्रेरकत्व L_1 व L_2 हैं तथा इसके बीच अन्योन्य प्रेरकत्व नगण्य है।

(i) श्रेणीक्रम में जोड़ने पर दो कुण्डलियों में समान धारा I प्रेरित होगी तथा सम्पूर्ण चुम्बकीय फ्लक्स उनसे अलग-अलग सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्सों के योग के बराबर होगा। अर्थात्

$$\phi = L_1 I + L_2 I = (L_1 + L_2) I$$

यदि संयोजन का तुल्य प्रेरकत्व L है, तो $\phi = LI$

$$\text{अतः} \quad L = L_1 + L_2 \quad \dots (1)$$

(ii) समान्तर क्रम में जोड़ने पर यदि कुण्डलियों में प्रेरित धाराएँ क्रमशः I_1 व I_2 हैं, तो सम्पूर्ण प्रेरित धारा

$$I = I_1 + I_2$$

$$\therefore \frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$

लेकिन समान्तर क्रम में प्रत्येक कुण्डली के सिरों पर प्रेरित विद्युत वाहक बल समान होगा, अतः

$$e = -L_1 \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

यदि संयोजन का तुल्य प्रेरकत्व L है, तो $e = -L \frac{dI}{dt}$

$$\text{या } \frac{e}{L} = -\frac{dI}{dt} = -\left(\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}\right) = \frac{e}{L_1} + \frac{e}{L_2}$$

$$\text{या } \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{या } L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

5.11 दो कुण्डलियों के स्व-प्रेरकत्व तथा अन्योन्य प्रेरकत्व में सम्बन्ध (Relationship between the Mutual Inductance of Two Coils and Their Self-Inductances)

माना एक कुण्डली (परिनालिका) P में फेरों की संख्या N_1 है, परिनालिका की लम्बाई l है तथा इसका अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A है। इसमें धारा I प्रवाहित होने पर कुण्डली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi_1 = (\text{चुम्बकीय क्षेत्र}) \times (\text{प्रभावी क्षेत्रफल})$$

$$\text{या } \phi_1 = \frac{\mu_0 N_1 I}{l} \times (N_1 A)$$

∴ कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व

$$L_1 = \frac{\phi_1}{I} = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \quad \dots (1)$$

इसी प्रकार, यदि दूसरी कुण्डली S में फेरों की संख्या N_2 है तथा कुण्डली का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A तथा लम्बाई l है, तो दूसरी कुण्डली S का स्वप्रेरकत्व

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l} \quad \dots (2)$$

प्राथमिक कुण्डली P में धारा I बहाने से द्वितीयक कुण्डली S से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 N_1 I}{l} \times (N_2 A)$$

अतः दोनों कुण्डलियों के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व

$$M = \frac{\phi_2}{I} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad \dots (3)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \times \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l}} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad \dots (4)$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \dots (5)$$

टिप्पणी

ध्यान रहे कि उपर्युक्त गणना में हमने यह माना है कि प्राथमिक कुण्डली P में धारा बहाने से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र पूर्णतः द्वितीयक कुण्डली से सम्बद्ध है। इसे **आदर्श युग्मन (ideal coupling)** कहते हैं। सामान्यतः प्राथमिक कुण्डली से उत्पन्न सम्पूर्ण चुम्बकीय क्षेत्र द्वितीयक कुण्डली से सम्बद्ध नहीं रहता है।

5.12 परिणामित्र या ट्रान्सफॉर्मर (Transformer)

ट्रान्सफॉर्मर अन्योन्य प्रेरण के सिद्धान्त पर आधारित है अतः ट्रान्सफॉर्मर एक ऐसी युक्ति है जो प्रत्यावर्ती वोल्टेज को बिना विद्युत-ऊर्जा नष्ट किये परिवर्तित कर देता है अर्थात् बढ़ा देता है या घटा देता है।

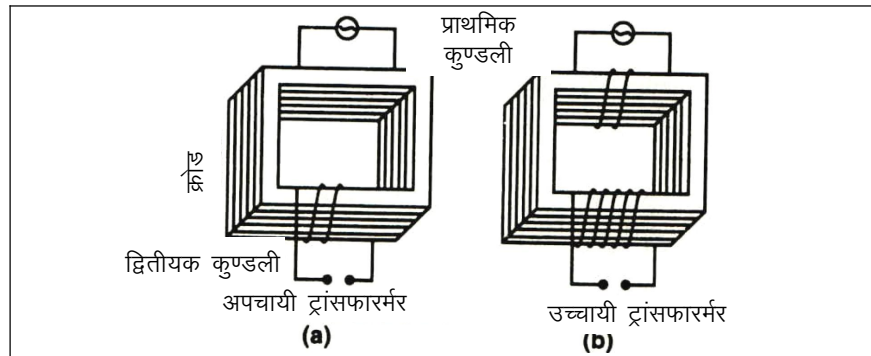
ट्रान्सफॉर्मर दो प्रकार के होते हैं –

(i) **उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर (Step-up Transformer)** – यह ट्रान्सफॉर्मर प्रत्यावर्ती वोल्टेज को बढ़ा देता है।

(ii) **अपचायी ट्रान्सफॉर्मर (Step-down Transformer)** – यह ट्रान्सफॉर्मर प्रत्यावर्ती वोल्टेज को घटा देता है।

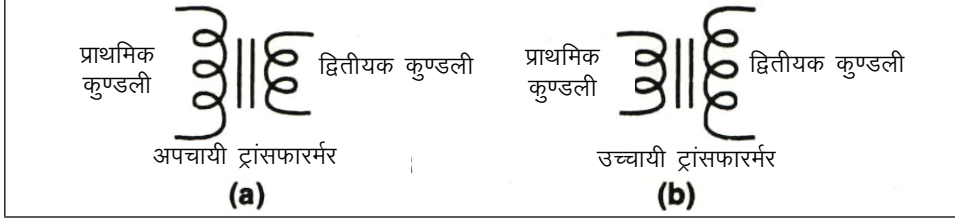
बनावट – ट्रान्सफॉर्मर के मुख्य तीन भाग होते हैं – (1) पटलित क्रोड, (2) प्राथमिक कुण्डली और (3) द्वितीयक कुण्डली। नर्म लोहे की बनी कई आयताकार पट्टियाँ लेते हैं इनके बीच का आयताकार भाग काटकर अलग कर दिया जाता है इन पट्टियों को विद्युतरोधी पदार्थ की तह देकर तथा इन्हें जोड़कर आवश्यक मोटाई का बना लेते हैं यह पटलित क्रोड कहलाता है। क्रोड के पटलित होने से भँवर-धाराओं का मान बहुत ही कम हो जाता है। क्रोड की दो सम्मुख भुजाओं पर ताँबे के विद्युतरोधी तार की एक-एक कुण्डली लिपटी होती है।

इसकी कुण्डली मोटे तार की बनायी जाती है। जिस कुण्डली के सिरों पर प्रत्यावर्ती वोल्टेज लगाया जाता है उसे प्राथमिक कुण्डली तथा दूसरी कुण्डली को द्वितीयक कुण्डली कहते हैं।



चित्र क्र. 5.8: ट्रान्सफॉर्मर

(1) चित्र में अपचायी ट्रान्सफॉर्मर प्रदर्शित किया गया है। इसकी प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या द्वितीयक कुण्डली की तुलना में अधिक होती है।
 (2) चित्र 5.9 में उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर प्रदर्शित किया गया है। इसकी प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या द्वितीयक कुण्डली की तुलना में कम होती है। किसी विद्युत परिपथ में अपचायी और उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर को क्रमशः चित्र 5.9(a) और (b) द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



चित्र क्र. 5.9: अपचायी और उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर का निरूपण

कार्य-विधि एवं सिद्धान्त – जब प्राथमिक कुण्डली के सिरों के बीच प्रत्यावर्ती वोल्टेज लगाया जाता है तो उसमें प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित होने लगती है जिससे धारा के प्रत्येक चक्कर में क्रोड एक दिशा में तथा इसके पश्चात् दूसरी दिशा में चुम्बकित होता है अतः क्रोड में परिवर्ती चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। द्वितीयक कुण्डली उसी क्रोड पर लिपटी रहती है अतः द्वितीयक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स में भी लगातार परिवर्तन होने लगता है जिसके फलस्वरूप विद्युत-चुम्बकीय कुण्डली में उसी आवृत्ति का प्रत्यावर्ती वोल्टेज उत्पन्न हो जाता है।

माना प्राथमिक और द्वितीयक कुण्डलियों में फेरों की संख्या क्रमशः n_p और n_s हैं।

यदि किसी क्षण प्राथमिक कुण्डली से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स ϕ हो तो उसमें प्रेरित वि. वा. बल

$$e_p = -n_p \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad \dots (1)$$

अतः द्वितीयक कुण्डली में प्रेरित वि. वा. बल

$$e_s = -n_s \frac{d\phi}{dt} \quad \dots (2)$$

समी. (2) में समी. (1) का भाग देने पर,

$$\frac{e_s}{e_p} = \frac{n_s}{n_p}$$

यदि प्राथमिक कुण्डली का प्रतिरोध शून्य हो तो उसमें प्रेरित वि. वा. बल e_p उसके सिरों के बीच लगाये गये विभवान्तर V_p के बराबर होता है। इसी प्रकार यदि द्वितीयक कुण्डली का परिपथ खुला हो, तो उसमें प्रेरित विद्युत वाहक बल e_s उसके सिरों के बीच विभवान्तर V_s के बराबर होगा।

$$\therefore \frac{V_s}{V_p} = \frac{n_s}{n_p} \quad \dots (3)$$

टिप्पणी

माना किसी क्षण प्राथमिक और द्वितीयक कुण्डलियों में बहने वाली धाराएँ क्रमशः I_p और I_s हैं। तब आदर्श स्थिति में,

प्राथमिक कुण्डली में शक्ति = द्वितीयक कुण्डली में शक्ति

$$\therefore I_p \times V_p = I_s \times V_s$$

$$\text{या} \quad \frac{V_s}{V_p} = \frac{I_p}{I_s} \quad \dots (4)$$

समी. (3) और (4) से स्पष्ट है कि यदि $V_s < V_p$ तो $n_s < n_p$ तथा

$$I_p < I_s$$

अतः अपचायी ट्रान्सफॉर्मर ($V_s < V_p$) की द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्डली की तुलना में कम होती है। यह ट्रान्सफॉर्मर धारा की प्रबलता को बढ़ा देता है।

पुनः यदि $V_s > V_p$ तो $n_s > n_p$ तथा $I_p > I_s$

अतः उचायी ट्रान्सफॉर्मर ($V_s > V_p$) की द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्डली की तुलना में अधिक होती है। यह ट्रान्सफॉर्मर धारा की प्रबलता को घटा देता है।

समीकरण (3) और (4) से,

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{I_p}{I_s} = \frac{n_s}{n_p} = K \quad (\text{एक नियतांक})$$

इस नियतांक K को ट्रान्सफॉर्मर का परिणमन अनुपात (Transformation Ratio) कहते हैं। ट्रान्सफॉर्मर की द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या और प्राथमिक कुण्डली में फेरों की संख्या के अनुपात को ट्रान्सफॉर्मर का परिणमन अनुपात कहते हैं। अपचायी ट्रान्सफॉर्मर के लिए K का मान एक से कम तथा उचायी ट्रान्सफॉर्मर के लिए K का मान एक से अधिक होता है।

ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता – द्वितीयक कुण्डली द्वारा प्राप्त ऊर्जा और प्राथमिक कुण्डली को दी गई ऊर्जा को ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता कहते हैं। सूत्र के रूप में,

$$\begin{aligned} \text{ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता} &= \frac{\text{द्वितीयक कुण्डली द्वारा प्राप्त ऊर्जा}}{\text{प्राथमिक कुण्डली को दी गई ऊर्जा}} \\ &= \frac{\text{निर्गत शक्ति}}{\text{निवेशी शक्ति}} \end{aligned}$$

एक आदर्श ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता 100% होती है, किन्तु विभिन्न रूपों में ऊर्जा ह्रास होने के कारण व्यावहारिक ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता सदैव 100% से कम (70% से 90% तक) होती है।

अनुप्रयोग – (i) पावर हाउस में उत्पन्न विद्युत धारा की प्रबलता अधिक होती है। इस धारा को इसी रूप में एक स्थान से दूसरे स्थान तक नहीं पहुँचाया जा सकता क्योंकि धारा की प्रबलता अधिक होने से उत्पन्न ऊष्मा का मान अधिक होगा जिससे विद्युत-ऊर्जा का ऊष्मा-ऊर्जा में अपव्यय होने लगेगा। इसके अतिरिक्त प्रबलधारा को एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने के लिए मोटे तार की आवश्यकता होगी जोकि आर्थिक रूप से खर्चीला होगा। अतः सर्वप्रथम उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर की सहायता से विद्युत धारा के विभवान्तर को बढ़ा दिया जाता है जिससे धारा की प्रबलता कम हो जाती है। इस धारा को कम खर्च में एक स्थान से दूसरे स्थान तक पहुँचाया जा सकता है। घरों में विद्युत धारा देने के पहले अपचायी ट्रान्सफॉर्मर की सहायता से विभवान्तर को साधारण मान पर लाया जाता है।

- (ii) रेडियो सेट, टेलीविजन, टेलीफोन, वायरलैस इत्यादि में।
- (iii) बैटरी ऐलिमिनेटर और पावर सप्लाइ में।
- (iv) वेल्डिंग करने तथा विद्युत् भट्टियों में
- (v) रेफ्रिजरेटर में।

अपचायी और उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर में अन्तर

	अपचायी ट्रान्सफॉर्मर	उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर
(i)	यह ट्रान्सफॉर्मर प्रत्यावर्ती विभवान्तर को घटा देता है।	यह ट्रान्सफॉर्मर प्रत्यावर्ती विभवान्तर को बढ़ा देता है।
(ii)	इसकी द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्डली से कम होती है।	इसकी द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या प्राथमिक कुण्डली से अधिक होती है।
(iii)	यह धारा की प्रबलता को बढ़ा देता है।	यह धारा की प्रबलता को घटा देता है।
(iv)	इसका परिणमन अनुपात एक से कम होता है।	इसका परिणमन अनुपात एक से अधिक होता है।

ट्रान्सफॉर्मर में ऊर्जा ह्रास (Energy Losses in Transformer) – सैद्धान्तिक रूप से हमने माना है कि ट्रान्सफॉर्मर में ऊर्जा का ह्रास नहीं होता किन्तु व्यावहारिक रूप से सदैव कुछ न कुछ ऊर्जा का ह्रास होता रहता है। यह ह्रास निम्नानुसार होता रहता है –

(i) ताम्र ह्रास (Copper losses) – ट्रान्सफॉर्मर की प्राथमिक एवं द्वितीयक कुण्डलियों से विद्युत धारा प्रवाहित होने पर जूल प्रभाव के कारण उनमें ऊष्मा उत्पन्न होती है। इस ऊष्मा का मान I^2R होता है। जहाँ I प्रवाहित होने वाली

टिप्पणी

धारा की प्रबलता तथा R प्रतिरोध है। ऊष्मा के रूप में ऊर्जा के इस ह्रास को ताम्र ह्रास कहते हैं। प्राथमिक एवं द्वितीयक कुण्डली में ताँबे के मोटे तार का उपयोग करके इस ह्रास को कम किया जा सकता है।

(ii) **लौह ह्रास (Iron losses)** – क्रोड में भँवर-धाराएँ उत्पन्न होने के कारण होने वाली ऊर्जा ह्रास को लौह ह्रास कहते हैं। इस ह्रास के मान को कम करने के लिए क्रोड को पटलित (Laminated) बनाया जाता है।

(iii) **चुम्बकीय फ्लक्स क्षरण (Magnetic flux leakage)** – प्राथमिक कुण्डली में विद्युत् धारा प्रवाहित करने पर उत्पन्न समस्त चुम्बकीय फ्लक्स द्वितीयक कुण्डली से बद्ध नहीं हो पाता अतः कुछ ऊर्जा का ह्रास हो जाता है। ऊर्जा के इस ह्रास को चुम्बकीय फ्लक्स क्षरण कहते हैं। इसे कम करने के लिए प्राथमिक कुण्डली के ऊपर ही द्वितीयक कुण्डली के तार को लपेटा जाता है।

(iv) **शैथिल्य ह्रास (Hysteresis losses)** – प्राथमिक कुण्डली में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित करने पर क्रोड बार-बार चुम्बकित और विचुम्बकित होता रहता है जिससे कुछ ऊर्जा का ह्रास होता रहता है। इस ह्रास को शैथिल्य ह्रास कहते हैं। शैथिल्य ह्रास को कम करने के लिए नर्म लोहे का क्रोड प्रयुक्त किया जाता है।

5.13 स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा (Energy in a Static Magnetic Field)

जब स्व-प्रेरकत्व L वाले किसी परिपथ में धारा बढ़ती है तो परिपथ से बद्ध फ्लक्स परिवर्तित होता है जिसके कारण परिपथ में एक विरोधी वि. वा. बल प्रेरित हो जाता है। यदि परिपथ में तात्क्षणिक धारा का मान i है तो प्रेरकत्व में प्रेरित वि. वा. बल

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

इस वि. वा बल के विरुद्ध dq आवेश को परिपथ में ले जाने पर कुल कार्य

$$\begin{aligned} dw &= -edq \\ &= L \frac{di}{dt} dq \\ &= Lidi \end{aligned}$$

$$\left(\text{चूँकि } i = \frac{dq}{dt} \right)$$

अतः परिपथ में धारा का मान शून्य से बढ़कर i तक होने पर कुल कार्य

$$W = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2 \quad \dots (1)$$

यह ऊर्जा प्रेरकत्व के चुम्बकीय क्षेत्र में संचित होती है।

परिनालिका के इस भाग का स्व-प्रेरकत्व $L = \mu_0 n^2 Al$ हेनरी

परिनालिका के इस भाग का आयतन = Al

यदि i परिनालिका में प्रवाहित धारा हो तो परिनालिका के केन्द्रीय भाग में चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \mu_0 n i \text{ अथवा } i = \frac{B}{\mu_0 n} \quad \dots (2)$$

चुम्बकीय ऊर्जा घनत्व

$$u = \frac{W}{Al} = \frac{\frac{1}{2} Li^2}{Al}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (\mu_0 n^2 Al) \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2}{Al} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 n^2 Al B^2}{Al \mu_0^2 n^2} \quad \dots (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

अतः चुम्बकीय क्षेत्र में आयतन V में संचित कुल ऊर्जा

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 dV \quad \dots (4)$$

इसी प्रकार वैद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा के लिये धारा प्रवाह से उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} में संचित ऊर्जा घनत्व $B^2/2\mu_0$ होगा।

अतः वैद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_V E^2 dV \quad \dots (5)$$

5.14 मैक्सवेल की परिकल्पना – विस्थापन धारा (Maxwell's Postulate – Displacement Current)

एम्पियर के परिक्रमी नियम (circuital law) से

$$\oint_C H \cdot dl = I \quad \dots (1)$$

किन्तु $I = \iint_S J \cdot dS \quad \dots (2)$

$\therefore \oint_C H \cdot dl = \iint_S J \cdot dS \quad \dots (3)$

टिप्पणी

स्टोक्स के प्रमेय से

$$\oint_C H \cdot dl = \iint_S \text{curl } H \cdot dS \quad \dots (4)$$

समी. (3) तथा (4) की तुलना करने पर

$$\iint_S \text{curl } H \cdot dS = \iint_S J \cdot dS$$

अर्थात्

$$\iint_S (\text{curl } H - J) \cdot dS = 0 \quad \dots (5)$$

चूँकि पृष्ठ स्वेच्छ है अतः समाकल्य (integrand) का मान शून्य होगा, अर्थात्

$$\text{curl } H - J = 0$$

$$\text{अथवा } \text{curl } H = J \quad \dots (6)$$

चूँकि वेक्टर राशि के curl का div सदैव शून्य होता है।

अतः $\text{div curl } H = 0$ | अतः समीकरण (6) से

$$\text{div } J = 0 \quad \dots (7)$$

यह स्थायी धारा का सातत्य समीकरण है।

परिवर्ती क्षेत्रों के लिये – समय के साथ परिवर्ती क्षेत्र के लिये सातत्य समीकरण से

$$\text{div } J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \dots (8a)$$

$$\text{अर्थात् } \text{div } J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \therefore \text{div } J \neq 0 \quad \dots (8b)$$

अर्थात् ऐम्पियर का समीकरण (1) केवल स्थायी धाराओं के लिये सत्य है समय के साथ परिवर्ती धाराओं के लिये सत्य नहीं है अतः ऐम्पियर के नियम में संशोधन करना होगा। मैक्सवेल ने इस समीकरण में संशोधन किया और मैक्सवेल ने माना धारा घनत्व की परिभाषा अपूर्ण है, अतः एक अन्य पद धारा घनत्व के रूप में ही J_d जोड़ना होगा अतः कुल धारा घनत्व $= J + J_d$

अतः समीकरण (6) से

$$\text{curl } H = J + J_d \quad \dots (9)$$

J_d का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण (9) का डाइवर्जेंस लेने पर

$$\text{div curl } H = \text{div}(J + J_d)$$

किन्तु $\text{div curl } H = 0$, क्योंकि किसी वेक्टर के curl का div सदैव शून्य होता है। अतः

$$\text{div}(J + J_d) = 0$$

$$\text{अथवा } \operatorname{div} J + \operatorname{div} J_d = 0$$

$$\text{अथवा } \operatorname{div} J_d = -\operatorname{div} J \quad \dots (10)$$

किन्तु सातत्य समीकरण से $\operatorname{div} J = -\partial\rho/\partial t$

अतः समीकरण (10) से

$$\operatorname{div} J_d = \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \dots (11)$$

परन्तु अवकलन रूप में गॉस की प्रमेय से

$$\operatorname{div} D = \rho \quad \dots (12)$$

ρ का मान समीकरण (11) में रखने पर

$$\operatorname{div} J_d = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} D) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)$$

$$\text{अतः } J_d = \frac{\partial D}{\partial t} \quad \dots (13)$$

मैक्सवेल द्वारा संशोधित अवकलन रूप में ऐम्पियर के नियम का परिवर्तित रूप होगा

$$\operatorname{curl} H = J + J_d = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad \dots (14)$$

अतः वह पद जो मैक्सवेल ने ऐम्पियर के नियम में समय-परिवर्ती क्षेत्रों के अन्तर्वेशन के लिए जोड़ा वह **विस्थापन धारा** (displacement current) कहलाता है, क्योंकि यह तभी उत्पन्न होता है जब विद्युत विस्थापन वेक्टर D समय के सापेक्ष परिवर्तित होता है। इस पद को जोड़ने से मैक्सवेल ने कल्पना की कि यह पद (विस्थापन धारा) उतना ही प्रभावी होता है जितना कि चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करने के लिए चालन-धारा वेक्टर J होता है।

विस्थापन धारा के अभिलक्षण (Characteristics of Displacement Current)

(i) विस्थापन धारा केवल इसी रूप में धारा है कि यह चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करती है, इसमें धारा का कोई अन्य गुण नहीं होता क्योंकि यह आवेशों की गति से बद्ध नहीं है। उदाहरणार्थ विस्थापन धारा का आदर्श निर्वात में भी, जहाँ कोई आवेश नहीं होता, परिमित मान होता है।

(ii) विस्थापन धारा का परिमाण विद्युत विस्थापन वेक्टर के परिवर्तन की दर के बराबर होता है, अर्थात्

$$J_d = \partial D / \partial t.$$

टिप्पणी

(iii) विस्थापन धारा का कार्य एक चालन धारा में असततता पर कुल धारा को सतत् बनाना है। उदाहरणार्थ, किसी संधारित्र को आवेशित करने वाली बैटरी कुल धारा के पदों में एक बन्द धारा लूप बनाती है,

$$J_{\text{total}} = J + J_d$$

(iv) एक सुचालक में विस्थापन धारा का मान प्रकाशित आवृत्तियों ($\approx 10^{15}$ हर्ट्ज) से कम किसी भी आवृत्ति पर चालन धारा की तुलना में नगण्य होता है।

विस्थापन धारा की परिकल्पना की सहायता से मैक्सवेल को अपने विद्युत चुम्बकीय तरंगों के सिद्धान्त के प्रतिपादन में सफलता प्राप्त हुई। हम इस प्रकार की तरंगों के प्रतिपादित गुणों के प्रायोगिक प्रेक्षण को मैक्सवेल की परिकल्पना के लिए प्रायोगिक आधार मान सकते हैं। इस परिकल्पना के आधार पर मैक्सवेल परिकल्पना की भौतिक व्याख्या सम्भव है।

5.15 मैक्सवेल परिकल्पना की भौतिक व्याख्या (Physical Interpretation of Maxwell's Postulate)

मैक्सवेल की विस्थापन धारा की मूल व्याख्या पूर्णतः स्पष्ट नहीं है अतः इसे स्पष्ट करने के लिये ऐम्पियर के नियम का रूपान्तरित रूप निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है –

$$\int_C H \cdot dl = \iint_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad \dots (1)$$

जिस प्रकार $\oint E \cdot dl$ विद्युत स्थैतिको में विद्युत वाहक बल को निरूपित करता है, उसी प्रकार पथ C पर यह वैद्युत वाहक बल (e.m.f.) का मान होता है

$$\text{e. m. f.} = \int_C H \cdot dl \quad \dots (2)$$

इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$$\text{e.m.f.} = \iint_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad \dots (3)$$

समीकरण (1) तथा (2) निरूपित करती हैं कि चुम्बकीय तीव्रता उत्पन्न करने की दो विधियाँ होती हैं – (1) साधारण चालन धारा घनत्व J से, जिसे ओस्टेड ने प्रेक्षित किया तथा ऐम्पियर द्वारा प्रमाणित किया गया, (2) परिवर्ती विद्युत विस्थापन $\frac{\partial D}{\partial t}$ से जिसे मैक्सवेल ने प्रमाणित किया। चूँकि वायु अथवा निर्वात में $D \propto E$, अतः हम यह कह सकते हैं कि परिवर्तित वैद्युत क्षेत्र चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करता है। यह फ़ैराडे के उस आविष्कार का व्युत्क्रम है जिसके अनुसार परिवर्तित चुम्बकीय क्षेत्र से विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है।

यदि हम सर्वत्र $J=0$ की स्थिति की कल्पना करें तो समीकरण (1) का रूप होगा।

$$\int_C H \cdot dl = \iint_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS, (J=0) \quad \dots (4)$$

टिप्पणी

यह समीकरण यह प्रकट करता है कि समय के साथ परिवर्तित होने वाला विद्युत विस्थापन एक चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करता है अतः मैक्सवेल की परिकल्पना की पुष्टि होती है।

एक परिवर्तित विद्युत क्षेत्र द्वारा उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र का सीधा प्रेक्षण कठिन है। हम एक प्रेरित चुम्बकीय धारा को सीधे नहीं देख सकते क्योंकि चुम्बकीय धाराओं के लिए न तो स्वतन्त्र ध्रुव होते हैं और न ही सुचालक। इसके अतिरिक्त हम परिणामी चुम्बकीय क्षेत्र के मापन के लिए $\frac{\partial D}{\partial t}$ के मान को अधिक समय तक स्थिर बनाये नहीं रख सकते जैसा एक स्थायी धारा की स्थिति में करते हैं। अतः मैक्सवेल की परिकल्पना को फ़ैराडे के नियम की तरह सीधे प्रायोगिक रूप से प्रमाणित नहीं किया जा सकता। इसीलिए यह क्लासिकी विद्युत चुम्बकत्व का अन्तिम आविष्कृत मूल नियम है। यदि मैक्सवेल की परिकल्पना फ़ैराडे के नियम का विलोम है तो प्रश्न उत्पन्न होता है कि यह ऐम्पियर के नियम का विलोम क्यों नहीं होता। या दूसरे शब्दों में, समीकरण (3) में दो पद क्यों होते हैं जबकि सम्बद्ध विद्युत वाहक बल समीकरण

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\iint_S B \cdot dS \quad \dots (5)$$

में एक ही पद क्यों होता है?

इसका उत्तर यह है कि समीकरण (5) में विलुप्त पद चुम्बकीय धारा का धारा घनत्व अथवा एक चिह्न के चुम्बकीय ध्रुवों का प्रवाह है परन्तु चूँकि एक चिह्न के पृथक्कृत ध्रुव तथा उनके कारण चुम्बकीय धाराओं की कोई भौतिक सार्थकता नहीं है अतः J के तुल्य कोई भी पद समीकरण (3) में नहीं होता तथा ऐम्पियर के नियम का विलोम सम्भव नहीं होता। अतः यह स्पष्ट होता है कि विद्युत आवेशों के मूल कार्य के कारण हमारे समीकरणों में कहीं सममिति की कमी है।

5.16 मैक्सवेल के समीकरण (Maxwell's Equations)

विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र के डाइवर्जेंस व कर्ल के सम्बन्धों को मैक्सवेल के समीकरण कहते हैं। ये समीकरण एकसमान, समदैशिक माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र की व्याख्या करते हैं। मैक्सवेल के निम्नलिखित चार समीकरण हैं –

टिप्पणी

मैक्सवेल का प्रथम समीकरण

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{या} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

मैक्सवेल का द्वितीय समीकरण

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

मैक्सवेल का तृतीय समीकरण

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{या} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण

$$\operatorname{curl} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\text{या} \quad \operatorname{curl} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

... (1)

(i) मैक्सवेल का प्रथम समीकरण $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ या $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

माना निर्वात में किसी पृष्ठ S द्वारा घिरा आयतन V है। गॉस के प्रमेय के अनुसार, किसी बन्द पृष्ठ से होकर लम्बवत् गुजरने वाले विद्युत क्षेत्र का कुल फ्लक्स, उस पृष्ठ से घिरे आयतन में निहित कुल आवेश का $1/\epsilon_0$ गुना होता है, जहाँ ϵ_0 निर्वात की विद्युतशीलता ($= 8.86 \times 10^{-12}$ कूलाम²/न्यूटन \times मीटर²) है। अर्थात्

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad \dots (2)$$

यदि आवेश का आयतन घनत्व ρ है, तो कुल आवेश $q = \iiint_V \rho dV$

q का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\therefore \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad \dots (3)$$

गॉस की डाइवर्जेंस प्रमेय से,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V \operatorname{div} E dV \quad \dots (4)$$

$$\text{अतः} \quad \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\text{या} \quad \iiint_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

$$\text{या } \operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ या } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots (5)$$

$$\text{किन्तु निर्वात में, } \epsilon_0 \vec{E} = \vec{D}, \therefore \operatorname{div} \vec{D} = \rho \text{ या } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \dots (6)$$

अर्थात् एकसमान तथा समदैशिक माध्यम में सम्पूर्ण पृष्ठ से होकर गुजरने वाले विद्युत विस्थापन का फ्लक्स घनत्व, उस में निहित आवेश के आयतन घनत्व के बराबर होता है।

(ii) मैक्सवेल का द्वितीय समीकरण $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ या $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

चुम्बकीय बल रेखायें बन्द वक्र में होती हैं अर्थात् किसी चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी पृष्ठ में प्रवेश करने वाली चुम्बकीय बल रेखाओं की संख्या, उस पृष्ठ से बाहर निकलने वाली चुम्बकीय बल रेखाओं की संख्या के बराबर होती है। अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान शून्य होता है।

गणितीय रूप में,

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \quad \dots (7)$$

लेकिन गॉस डाइवर्जेंस प्रमेय से,

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV \quad \dots (8)$$

$$\text{अतः } \Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0, \text{ या } \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ या } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots (9)$$

अर्थात् किसी एकसमान तथा समदैशिक माध्यम में स्थित किसी बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान सदैव शून्य होता है।

(iii) मैक्सवेल का तृतीय समीकरण $\operatorname{curl} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ या $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$

विद्युत चुम्बकीय प्रेरण सम्बन्धी फ़ैराडे के नियमानुसार, जब किसी बन्द परिपथ से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन होता है तो उसमें प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न हो जाता है जिसका मान चुम्बकीय फ्लक्स के परिवर्तन की ऋणात्मक दर के अनुक्रमानुपाती होता है। अर्थात् किसी बन्द परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \dots (10)$$

किन्तु चुम्बकीय फ्लक्स

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

$$\therefore e = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

टिप्पणी

लेकिन यदि चुम्बकीय फ्लक्स में परिवर्तन के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र \vec{E} है तो बन्द परिपथ में प्रेरित वि. वा. बल का मान विद्युत क्षेत्र के रेखीय समाकलन के बराबर होगा। अर्थात्

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{अतः} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \dots (11)$$

किन्तु स्टोक प्रमेय से,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{Curl } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \iint_S \text{curl } \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{या} \quad \iint_S \left(\text{curl } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{या} \quad \text{curl } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{या} \quad \text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (12)$$

(iv) मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ या

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ऐम्पियर के नियमानुसार समय के साथ परिवर्तनीय क्षेत्र में निर्वात (या परावैद्युत माध्यम) में कुल चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} , चालक में प्रवाहित स्वतन्त्र धारा के कारण उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}' , तथा परिवर्ती विद्युत क्षेत्र (या विस्थापन धारा) के कारण उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B}'' के वेक्टर योग के बराबर होता है।

$$\text{अतः} \quad \text{curl } \vec{B} = \text{curl } (\vec{B}' + \vec{B}'') = \text{curl } \vec{B}' + \text{curl } \vec{B}''$$

$$\text{किन्तु} \quad \text{curl } \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{curl } \vec{B}'' = \mu_0 \vec{J}_d$$

$$\text{अतः} \quad \text{curl } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d)$$

दोनों ओर का डाइवर्जेंस लेने पर,

$$\text{div } \text{curl } \vec{B}' = \mu_0 \text{div } (\vec{J} + \vec{J}_d) = \mu_0 (\text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{J}_d)$$

$$\text{किन्तु} \quad \text{div } \text{curl } \vec{B} = 0$$

$$\therefore \quad \text{div } \vec{J} = -\text{div } \vec{J}_d$$

लेकिन समय के साथ परिवर्ती क्षेत्र के सातत्य समीकरण से,

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\partial \rho / \partial t.$$

$$\therefore \operatorname{div} \vec{J}_d = \partial \rho / \partial t$$

अब मैक्सवेल के प्रथम समीकरण से, $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\text{अतः} \quad \operatorname{div} \vec{J}_d = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}) = \operatorname{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{अतः ऐम्पियर के नियमानुसार,} \quad \operatorname{curl} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \dots (14)$$

चूँकि निर्वात में

$$B = \mu_0 H \quad \text{तथा} \quad D = \epsilon_0 E$$

$$\operatorname{curl} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

5.17 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा घनत्व, पोयन्टिंग वेक्टर (Energy Density in Electro-magnetic Field, Poynting Vector)

मैक्सवेल के समीकरणों की सहायता से किसी माध्यम में किसी क्षण विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्रों के संचरण की जानकारी प्राप्त की जा सकती है। इन समीकरणों में विद्युत क्षेत्र \vec{E} का कर्ल, उसके संगत चुम्बकीय क्षेत्र के समय परिवर्तन की दर स्पष्ट करता है तथा चुम्बकीय क्षेत्र \vec{H} का कर्ल उसके संगत विद्युत क्षेत्र के समय परिवर्तन की दर स्पष्ट करता है। जिस प्रकार किसी माध्यम में समतल प्रगामी तरंग के संचरण से माध्यम में ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है, ठीक उसी प्रकार विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में तरंग संचरण के फलस्वरूप ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है। हमें किसी माध्यम में विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा घनत्व की गणना करनी है।

माना माध्यम के किसी क्षेत्र में बन्द पृष्ठ S द्वारा घिरा आयतन V है जिसके अन्तर्गत विद्युत चुम्बकीय तरंग संचरित हो रही है।

मैक्सवेल के तृतीय तथा चतुर्थ समीकरणों से,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (1)$$

टिप्पणी

$$\text{तथा} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

समीकरण (1) का H से स्केलर गुणा करके, समीकरण (2) के E के स्केलर गुणा में से घटाने पर,

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \left(\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - \left(-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= \vec{E} \cdot \vec{J} + \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

लेकिन

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{curl} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{curl} \vec{B}$$

$$\text{अर्थात्} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

अतः समीकरण (3) से,

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \left[\vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \right]$$

$$\text{या} \quad \vec{E} \cdot \vec{J} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mu H^2) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = 0$$

$$\text{या} \quad \vec{E} \cdot \vec{J} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \mu \vec{H}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = 0$$

$$\text{या} \quad \vec{E} \cdot \vec{J} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = 0$$

उपर्युक्त समीकरण का पृष्ठ S द्वारा घिरे आयतन V पर समाकलन करने पर,

$$\iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV + \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV + \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = 0$$

$$\therefore \quad \iiint_V (\vec{E} \cdot \vec{J}) dV + \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV = - \iiint_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV \quad \dots (4)$$

प्रथम पद: $\iiint_V (\vec{J} \cdot \vec{E}) dV$ की व्याख्या : माना q आवेश का एक कण यान्त्रिक, वैद्युत तथा चुम्बकीय बलों के सम्मिलित प्रभाव के अन्तर्गत v वेग से गति कर रहा है।

आवेशित कण पर कार्यरत क्षेत्र वेक्टरों \vec{E} तथा \vec{B} के कारण विद्युत-चुम्बकीय बल

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

चूँकि चुम्बकीय बल $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ सदैव वेग के लम्बवत् होता है अतः चुम्बकीय क्षेत्र कोई कार्य नहीं करता। अतः एक एकल आवेश q के लिए विद्युत चुम्बकीय क्षेत्रों \mathbf{E} तथा \mathbf{B} द्वारा किये गये कार्य की दर

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{v} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{v} = q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

यदि $\vec{\mathbf{F}}_m$ यान्त्रिक बल हो तो विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र वेक्टरों के विरुद्ध यान्त्रिक बल द्वारा किये गये कार्य, अर्थात् कण पर किये गये यान्त्रिक कार्य की दर

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \vec{\mathbf{F}}_m \cdot \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = -q \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad \dots (5)$$

यदि विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में विभिन्न वेगों से गति कर रहे आवेशों का एक समूह हो तो समीकरण (5) से

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\sum n_i q_i v_i \cdot E_i \quad \dots (6)$$

इस स्थिति में धारा घनत्व $\vec{\mathbf{J}} = \sum_j \vec{\mathbf{J}}_j = \sum_i n_i q_i v_i$

यह मान समीकरण (8) में रखने पर

$$\boxed{\frac{\partial W_m}{\partial t} = -\sum_i \vec{\mathbf{J}}_i \cdot \vec{\mathbf{E}}_i = -\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}} \quad \dots (7)$$

यह विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में स्थानान्तरित शक्ति घनत्व (power density) को निरूपित करता है।

अतः व्यंजक $-\int \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} dV$, आयतन V में मुक्त आवेश की गति के कारण विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में स्थानान्तरित ऊर्जा की दर को निरूपित करता है।

यदि आयतन V में वि. वा. बल का कोई स्रोत न हो, तो पद

$$-\int \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{J}} dV = -\int \frac{J^2}{\sigma} dV \quad (\text{चूँकि } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E})$$

ऋणात्मक होगा तथा उत्पन्न ऊष्मीय ऊर्जा की ऋणात्मक दर को निरूपित करता है।

द्वितीय पद : $\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) dV$ की व्याख्या :

हमें ज्ञात है :

$$\iiint_V \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} dV = U_c \text{ आयतन } V \text{ में विद्युत स्थैतिक स्थितिज ऊर्जा}$$

टिप्पणी

$$\iiint_V \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = U_m \text{ आयतन } V \text{ में चुम्बकीय ऊर्जा}$$

टिप्पणी

$$\therefore \text{ स्पष्टतया } U = \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV \quad \dots (8)$$

विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र स्थितिज ऊर्जा के किसी न किसी रूप को निरूपित करता है। आवेशित कणों की इस स्थितिज ऊर्जा को **क्षेत्र ऊर्जा** (field energy) माना जाता है, यह V आयतन में **विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र ऊर्जा** (electromagnetic field energy) कहलाती है। ऊर्जा के कणों के साथ बद्ध होने के स्थान पर स्वयं क्षेत्र में संचित ऊर्जा की अवधारणा विद्युत चुम्बकीय सिद्धान्त की अवधारणा का आधार है। अतः यह पद विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र के ऊर्जा घनत्व को निरूपित करता है, अर्थात्

$$U = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad \dots (9)$$

$$\text{परिणामस्वरूप } \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dV$$

आयतन V में संचित विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा के परिवर्तन की दर को निरूपित करता है।

$$\text{तृतीय पद} = \iint_S (\vec{E} \times \vec{D}) \cdot d\vec{S} \text{ की व्याख्या :}$$

चूँकि इस पद के पृष्ठ समाकलन केवल विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र हैं अतः इस पद की पृष्ठ से होकर ऊर्जा प्रवाह की दर के रूप में व्याख्या करना सम्भव होगा। इसका तात्पर्य यह है कि $(\vec{E} \times \vec{H})$ स्वयं प्रति एकांक क्षेत्रफल प्रति एकांक समय ऊर्जा के प्रवाह को निरूपित करता है। अतः एक बन्द पृष्ठ पर $(\vec{E} \times \vec{H})$ का पृष्ठ समाकलन उस बन्द पृष्ठ को प्रति सेकण्ड पार करने वाली विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा के परिणाम को निरूपित करता है। वेक्टर $(\vec{E} \times \vec{H})$ **पोयन्टिंग वेक्टर** (Poynting vector) कहलाता है तथा प्रायः संकेत S से निरूपित किया जाता है, अर्थात्

$$\text{पोयन्टिंग वेक्टर } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \dots (10)$$

उपर्युक्त व्याख्याओं के अनुसार, समीकरण (4) को निम्न प्रकार से निरूपित किया जा सकता है

$$-\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \quad \dots (11)$$

इस समीकरण का भौतिक अर्थ है कि किसी आयतन के भीतर विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा के परिवर्तन की दर तथा परिसीमा पृष्ठ से होकर प्रवाहित ऊर्जा की समय दर का योग विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र में स्थानान्तरित शक्ति के बराबर होता है।

यह विद्युत चुम्बकत्व में ऊर्जा संरक्षण का कथन है तथा इसे पोयन्टिंग की प्रमेय (Poynting Theorem) कहते हैं।

पोयन्टिंग वेक्टर (Poynting Vector)

वेक्टर

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \text{ या } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B} / \mu \quad \dots (12)$$

यह पोयन्टिंग वेक्टर कहलाता है तथा इसकी व्याख्या, शक्ति फ्लक्स अर्थात् प्रति एकांक समय में वेक्टर के लम्बवत् रखे एकांक क्षेत्रफल को पार करने वाली ऊर्जा के परिमाण के रूप में की जाती है। माध्यम में रहने वाला विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र की अवधारणा अत्यन्त मौलिक अवधारणा है तथा इसका सिद्धान्त के विस्तार में अत्यन्त महत्व है। मैक्सवेल ने माध्यम की एक प्रत्यास्थ ठोस के रूप में कल्पना की जिसमें विद्युत ऊर्जा माध्यम की विकृति की स्थितिज ऊर्जा, गति की गतिज ऊर्जा को प्रदर्शित करती है। एक प्रकाश तरंग में प्रति एकांक आयतन में कुछ ऊर्जा होती है जो आयाम (\vec{E} अथवा \vec{H}) के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। यह ऊर्जा गतिशील है। यह पोयन्टिंग वेक्टर तरंग की तीव्रता अथवा प्रवाह की दर का मापन करने वाला वेक्टर है। एक समतल विद्युत चुम्बकीय तरंग में \vec{E} तथा \vec{H} परस्पर लम्बवत् तथा प्रवाह की दिशा के लम्बवत् होते हैं। अतः $\vec{E} \times \vec{H}$ प्रवाह की दिशा के अनुदिश होना चाहिए अधिक जटिल तरंगों में भी पोयन्टिंग वेक्टर विकिरण के प्रवाह की दिशा को प्रकट करता है। पोयन्टिंग सदिश का विमीय सूत्र ML^2T^{-3} तथा मात्रक वाट/मीटर² होता है।

5.18 विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्रों E तथा B द्वारा तरंग समीकरण (Wave Equation for E and B in Electromagnetic Wave)

विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र \vec{E} तथा \vec{B} द्वारा तरंग परावैद्युत माध्यम में विद्युत चुम्बकीय समीकरण तरंग का संचरण (Propagation of Electro-Magnetic Wave in Dielectric Medium)

(1) परावैद्युत माध्यम में मूल आवेश वाहक नहीं होते हैं अतः परावैद्युत माध्यम में धारा घनत्व $\vec{J} = 0$

(2) समदैशिक परावैद्युत माध्यम में चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B} = \mu \vec{H}$, जहाँ μ माध्यम की निरपेक्ष चुम्बकशीलता है।

(3) यदि परावैद्युत माध्यम समदैशिक है तो माध्यम में आवेश का वितरण नहीं होता है अतः आवेश आयतन घनत्व $\rho = 0$ होगा।

(4) समदैशिक परावैद्युत माध्यम में $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ होता है, जहाँ ϵ माध्यम की निरपेक्ष विद्युतशीलता है।

टिप्पणी

अतः समदैशिक परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल के समीकरण निम्नलिखित होंगे—

टिप्पणी

- (i) $\text{div } \vec{E} = 0$ या $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
(ii) $\text{div } \vec{B} = 0$ या $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
(iii) $\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ या $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
(iv) $\text{curl } \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ या $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

अब मैक्सवेल का तृतीय समीकरण निम्न है—

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

या $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों का कर्ल लेने पर,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\text{या } \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad \dots (1)$$

[क्योंकि सूत्र $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$]

लेकिन मैक्सवेल के प्रथम समीकरण से,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \dots (2)$$

तथा मैक्सवेल के चतुर्थ समीकरण से,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots (3)$$

समीकरण (1), (2) तथा (3) से,

$$0 - \nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{या } \nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{या } \boxed{\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \left[\because v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right]$$

उपर्युक्त समीकरण किसी समदैशिक, समांगी परावैद्युत माध्यम में विद्युत चुम्बकीय तरंग का संचरण व्यक्त करते हैं, जहाँ v विद्युत चुम्बकीय तरंग का संचरण वेग है।

मैक्सवेल का चतुर्थ समीकरण

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों का कर्ल लेने पर,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{या } \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad \dots (4)$$

समीकरण (4) में मैक्सवेल के द्वितीय एवं तृतीय समीकरण का मान रखने पर,

मैक्सवेल के तृतीय समीकरण से,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

तथा मैक्सवेल के द्वितीय समीकरण से,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

अतः समी. (4) से

$$0 - \nabla^2 \vec{B} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \quad \dots (5)$$

जहाँ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

उपर्युक्त समीकरण (5) किसी समदैशिक समांगी परावैद्युत माध्यम में विद्युत चुम्बकीय तरंग के \vec{B} के रूप में विद्युत चुम्बकीय समीकरण को दर्शाता है।

परावैद्युत माध्यम में विद्युत चुम्बकीय तरंग का संचरण

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{किन्तु } \mu = \mu_0 \mu_r, \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \times \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

टिप्पणी

चूँकि निर्वात में विद्युत चुम्बकीय तरंग की चाल

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

अर्थात् परावैद्युत माध्यम में तरंग का संचरण वेग निर्वात या ध्रुवण आकाश में तरंग के संचरण वेग की अपेक्षा कम होता है।

अतः परावैद्युत माध्यम का अपवर्तनांक

$$\eta = \frac{\text{निर्वात में तरंग की चाल}}{\text{माध्यम में तरंग की चाल}}$$

$$\eta = \frac{c}{v} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

यदि माध्यम अनुचुम्बकीय है तो $\mu_r = 1$

$$\text{तो } \eta = \sqrt{\epsilon_r}$$

अर्थात् अनुचुम्बकीय कुचालक माध्यम का अपवर्तनांक उसकी आपेक्षिक विद्युत शीलता के वर्गमूल के बराबर होता है।

5.19 निर्वात या मुक्त आकाश में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें (Plane Electromagnetic Waves in Vacuum or Free Space)

निर्वात या मुक्त आकाश में आवेश घनत्व $\rho = 0$ या धारा घनत्व $\vec{J} = 0$ तथा मैक्सवेल समीकरण निम्न होगी—

$$(i) \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ या } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(ii) \operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ या } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(iii) \operatorname{curl} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(iv) \operatorname{curl} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{एवं } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \text{ तथा } \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

मैक्सवेल के तृतीय समीकरण से

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

दोनों ओर का कर्ल लेने पर

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

लेकिन

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \end{aligned}$$

मैक्सवेल के समीकरण (iv) से,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

समीकरण (1) में $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$ व $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ का मान रखने पर

अतः

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \dots (2)$$

मैक्सवेल के समीकरण (i) से,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{अतः} \quad -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \dots (3)$$

या

$$\boxed{\nabla^2 \cdot \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad \dots (4)$$

उपर्युक्त समीकरण निर्वात में विद्युत् क्षेत्र के संचरण का तरंग समीकरण है।

मैक्सवेल के चतुर्थ समीकरण

$$\text{curl } B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

टिप्पणी

दोनों ओर का कर्ल लेने पर,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \dots (5)$$

या

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \cdot \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

लेकिन मैक्सवेल के समीकरण (ii) तथा (iii) से,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{तथा} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{अतः} \quad 0 - \nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\text{या} \quad -\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\text{या} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \dots (6)$$

उपर्युक्त समीकरण निर्वात में चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} के संचरण का तरंग समीकरण है।

v वेग से संचरित तरंग का समीकरण

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

अतः प्रकाश के तरंग संचरण का समीकरण होगा -

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (7)$$

समीकरण (4), (6) व (7) से स्पष्ट होता है कि परिवर्ती विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र भी आकाश में तरंगों की भाँति संचरण करते हैं।

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

μ_0 और ϵ_0 का मान रखने पर

$$\mu_0 = 12.56 \times 10^{-7} \text{ न्यूटन/ऐम्पियर}^2$$

$$\epsilon_0 = 3.86 \times 10^{-12} \text{ कूलाम}^2 / \text{न्यूटन मीटर}^2$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{(12.56 \times 10^{-7}) \times (3.86 \times 10^{-12})}}$$

$$= 3 \times 10^8 \text{ मी/से}$$

इससे यह सिद्ध होता है कि निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंग प्रकाश के वेग से संचरित होती है।

विद्युत-गतिकी

5.20 अभिलम्बवत् आपतन पर परावर्तन तथा अपवर्तन [परावैद्युत की समतल सतह] (Reflection and Refraction at Normal Incidence) [Plane Surface of Dielectric]

टिप्पणी

माना ω कोणीय आवृत्ति की ज्या वक्रीय समतल विद्युत चुम्बकीय तरंग X -दिशा में गमन करती हुई दो माध्यमों के सीमापृष्ठ (X - Y तल) पर आपतित होती है। माना इसका विद्युत क्षेत्र Y -दिशा में तथा चुम्बकीय क्षेत्र Z -दिशा में है तथा निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है –

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1(n,t) &= E_{OI} e^{-i(\omega t - k_1 x) \hat{j}} \\ \vec{B}_1(n,t) &= B_{OI} e^{-i(\omega t - k_1 x) \hat{k}} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\text{जहाँ } \vec{B}_{OI} = \frac{\vec{E}_{OI}}{v_1}$$

v_1 पहले माध्यम में तरंग का वेग है।

सीमापृष्ठ पर आंशिक परावर्तन तथा आंशिक अपवर्तन के फलस्वरूप प्रथम माध्यम में परावर्तित तरंग प्राप्त होगी जिसके विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र के समीकरण निम्न होंगे –

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_R(n,t) &= \vec{E}_{OR} e^{-i(\omega t - k_1 x) \hat{j}} \\ \vec{B}_R(n,t) &= -\frac{\vec{E}_{OR}}{v_1} e^{-i(\omega t - k_1 x) \hat{k}} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

परावर्तित वैद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र B_R तथा E_R निम्नलिखित शर्त का पालन करते हैं—

$$\vec{B}_R = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_1 + \vec{E}_R)$$

इसी प्रकार सीमापृष्ठ के अपवर्तित तरंग के विद्युत तथा चुम्बकीय क्षेत्र निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त होते हैं—

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_T(n,t) &= \vec{E}_{OT} e^{-i(\omega t - k_2 x) \hat{j}} \\ \vec{B}_T(n,t) &= \frac{\vec{E}_{OT}}{v_2} e^{-i(\omega t - k_2 x) \hat{k}} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

सीमा प्रतिबन्ध $x = 0$ पर,

$$E_{OI} + E_{OR} = E_{OT} \dots (4)$$

स्व-अधिगम
पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

तथा

$$\frac{1}{\mu_1}(\vec{B}_{OI} + \vec{B}_{OR}) = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{OT}$$

या

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\vec{E}_{OI}}{v_1} - \frac{\vec{E}_{OR}}{v_1} \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\vec{E}_{OT}}{v_2}$$

$$\text{या } \vec{E}_{OI} - \vec{E}_{OR} = \alpha \vec{E}_{OT} \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} \text{जहाँ } \alpha &= \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \frac{1/\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}{1/\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \times \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \times \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

$$\text{क्योंकि } \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}}$$

समीकरण (4) व (5) को जोड़ने पर

$$2\vec{E}_{OI} = (1 + \alpha)\vec{E}_{OT}$$

$$\text{या } \vec{E}_{OT} = \frac{1}{1 + \alpha} \vec{E}_{OI} \quad \dots (6)$$

समीकरण (4) में E_{OT} का मान रखने पर

$$\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR} = \frac{2}{1 + \alpha} \vec{E}_{OI}$$

$$\text{या } \vec{E}_{OR} = \left(\frac{2}{1 + \alpha} - 1 \right) \vec{E}_{OI}$$

$$\text{या } \vec{E}_{OR} = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) \vec{E}_{OI} \quad \dots (7)$$

समीकरण (6) व (7) क्रमशः अपवर्तित तथा परावर्तित तरंगों के आयाम, आपतित तरंग के आयाम के पदों में व्यक्त करते हैं।

प्रायः सभी परावैद्युत पदार्थों की चुम्बकशीलता, निर्वात की चुम्बकशीलता के लगभग बराबर होती है (अर्थात् $\mu_1 \approx \mu_0$ तथा $\mu_2 \approx \mu_0$), अतः $\alpha = \frac{v_1}{v_2}$

समीकरण (6) व (7) से

$$\vec{E}_{OR} = \left(\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\vec{v}_2 + \vec{v}_1} \right) \vec{E}_{OI}$$

तथा
$$\vec{E}_{OI} = \frac{2\vec{v}_2}{\vec{v}_2 + \vec{v}_1} \vec{E}_{OR} \quad \dots (8)$$

समीकरण (8) से स्पष्ट है कि—

(i) यदि $\vec{v}_2 > \vec{v}_1$ तो परावर्तित तरंग तथा आपतित तरंग समान कला में होगी,

(ii) यदि $\vec{v}_2 < \vec{v}_1$ तो परावर्तित तरंग, आपतित तरंग से विपरीत कला में होगी।

तरंग की तीव्रता $I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2$ होती है

अतः आपतित तरंग की तीव्रता $I_I = \epsilon_1 v_1 E_{OI}^2$

परावर्तित तरंग की तीव्रता $I_R = \epsilon_1 v_1 E_{OR}^2$

तथा अपवर्तित तरंग की तीव्रता $I_T = \epsilon_1 v_1 E_{OT}^2$

$$\therefore \text{परावर्तकता } R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\epsilon_1 v_1 E_{OR}^2}{\epsilon_2 v_2 E_{OI}^2} = \frac{E_0^2 R}{E_0^2 I} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right)^2$$

तथा पारगम्यता
$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2 E_{OT}^2}{\epsilon_2 v_2 E_{OI}^2} = \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right)^2 \quad \dots (9)$$

क्योंकि
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \quad (\text{यदि } \mu_1 = \mu_0 \text{ तथा } \mu_2 = \mu_0)$$

समीकरण (9) से स्पष्ट है कि $R + T = 1$ अर्थात् कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है।

5.21 परावर्तन द्वारा ध्रुवण (Polarization by Reflection)

परावर्तन द्वारा ध्रुवण — चुम्बकीय क्षेत्र B तथा विद्युत विस्थापन सदिश D के अभिलम्बवत् अवयव द्वारा निम्न सीमा शर्तों को सन्तुष्ट करेंगे —

$$(\vec{E}_I + \vec{E}_R) \times \hat{e}_n = \vec{E}_T \times \hat{e}_n \quad \dots (1)$$

$$(\vec{H}_I + \vec{H}_R) \times \hat{e}_n = \vec{H}_T \times \hat{e}_n \quad \dots (2)$$

जहाँ E_I, E_T तथा E_R क्रमशः विद्युत क्षेत्र के स्पर्शीय अपवर्तित तथा परावर्तित अवयव हैं। इसी प्रकार, H_I, H_R एवं H_T क्रमशः संचरण सदिश के स्पर्शीय, परावर्तित तथा अपवर्तित अवयव हैं।

टिप्पणी

टिप्पणी

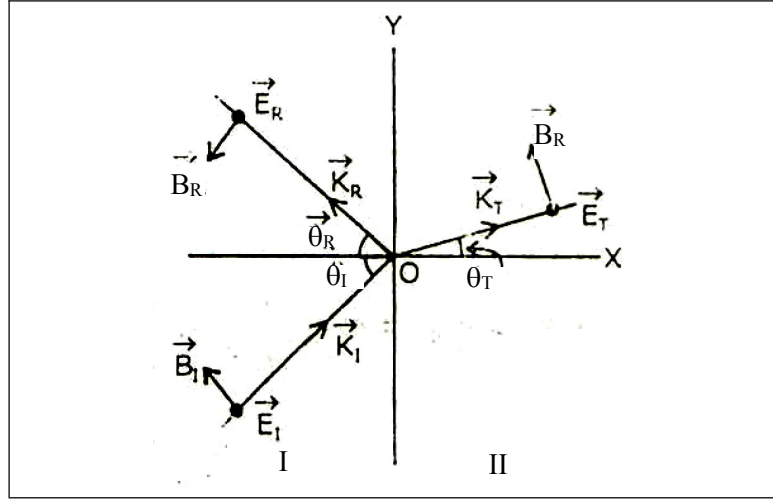
अतः समी. (1) व (2) से,

$$(\vec{K}_I \times \vec{E}_I + \vec{K}_I \times \vec{E}_R) \times \hat{e}_n = (\vec{K}_T \times \vec{E}_T) \times \hat{e}_n \quad \dots (3)$$

जहाँ

$$H_I = \frac{\vec{K}_I \times \vec{E}_I}{\omega_I \mu_1}, \quad \vec{H}_R = \frac{\vec{K}_R \times \vec{E}_R}{\omega_R \mu_1}$$

$$\vec{H}_T = \frac{\vec{K}_T \times \vec{E}_T}{\omega_T \mu_2} \quad \text{तथा} \quad \mu_1 = \mu_2.$$



चित्र क्र. 5.10: चुम्बकीय क्षेत्र B के लिये समान्तर ध्रुवित तरंग का परावर्तन तथा अपवर्तन

\therefore परावर्तित तथा पारगमित तरंग की आवृत्ति अपरिवर्तित रहती है,

$$\text{अतः} \quad \omega_I = \omega_R = \omega_T$$

निम्न दो स्थितियों में इसका मान ज्ञात करेंगे—

(i) यदि \vec{E} आपतन तल के अभिलम्बवत् तल में हो,

(ii) यदि \vec{E} आपतन तल में हो।

स्थिति I – यदि विद्युत् सदिश \vec{E} आपतन तल के अभिलम्बवत् तल में हो

$$\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR} = \vec{E}_{OT} \quad \dots (4)$$

$$\text{तथा} \quad K_I \vec{E}_{OI} \cos \theta_I - K_I \vec{E}_{OR} \cos \theta_R = K_T \vec{E}_{OT} \cos \theta_T$$

$$\text{या} \quad K_I (\vec{E}_{OI} - \vec{E}_{OR}) \cos \theta_I = K_T \vec{E}_{OT} \cos \theta_T \quad \dots (5)$$

जहाँ $\vec{E}_{OI}, \vec{E}_{OR}$ तथा \vec{E}_{OT} क्रमशः आपतित, परावर्तित तथा अपवर्तित तरंग के आयाम हैं। अतः समी. (5) से,

$$(\vec{E}_{OI} - \vec{E}_{OR}) \cos \theta_I = \frac{K_T}{K_I} \vec{E}_{OT} \cos \theta_T \quad \dots (6)$$

अब समी. (4) एवं (6) से,

$$\frac{\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI} - \vec{E}_{OR}} = \frac{K_I \cos \theta_I}{K_T \cos \theta_T}$$

या
$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{K_I \cos \theta_I}{K_T \cos \theta_T}$$

या
$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{K_I \cos \theta_I - K_T \cos \theta_T}{K_I \cos \theta_I - K_T \cos \theta_T}$$

$$= \frac{\cos \theta_I - \frac{K_T}{K_I} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{K_T}{K_I} \cos \theta_T}$$

$$= \frac{\cos \theta_I - \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_T}$$

$$= \frac{\cos \theta_I - \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} \cos \theta_T}{\cos \theta_I + \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} \cos \theta_T} \quad \dots (7)$$

चूँकि स्नैल के नियम (Snell's Law) से $\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_T} = \frac{n_2}{n_1}$ होता है अतः -

$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{\sin \theta_T \cos \theta_I - \cos \theta_T \sin \theta_I}{\sin \theta_T \cos \theta_I + \cos \theta_T \sin \theta_I}$$

या
$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{\sin(\theta_T - \theta_I)}{\sin(\theta_T + \theta_I)} \quad \dots (8)$$

इसी प्रकार
$$\frac{\vec{E}_{OT}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{2 \cos \theta_I \sin \theta_T}{\sin(\theta_I + \theta_T)} \quad \dots (9)$$

समीकरण (8) में यदि $n_2 > n_1$ हो, तो E_{OR}/E_{OI} का मान ऋणात्मक होगा।

परावर्तित ऊर्जा फ्लक्स तथा आपतित ऊर्जा फ्लक्स के अनुपात को तल की परावर्तकता कहते हैं। इसे, R द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः -

टिप्पणी

$$R = \frac{\hat{e}_n \langle N_R \rangle}{\hat{e}_n \langle N_I \rangle} = \frac{E_{OR}^2}{E_{OI}^2} \quad \dots (10)$$

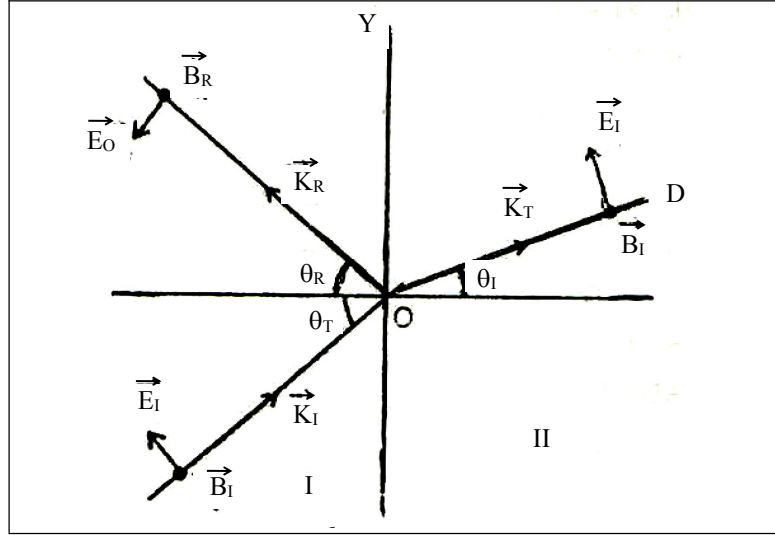
टिप्पणी

इसी प्रकार अपवर्तित ऊर्जा फ्लक्स तथा आपतित ऊर्जा फ्लक्स के अनुपात को पारगमनता कहते हैं। इसे T से व्यक्त करते हैं। अत -

$$T = \frac{\hat{e}_n \langle \vec{N}T \rangle}{\hat{e}_n \langle N_I \rangle} = \frac{E_{OT}^2}{E_{OI}^2} \cdot \frac{n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I} \quad \dots (11)$$

समीकरण (10) तथा (11) से परावर्तकता तथा पारगमनता की गणना की जा सकती है।

स्थिति II - यदि विद्युत क्षेत्र \vec{E} आपतन तल में हो। सीमा शर्तों के अनुसार,



चित्र क्र. 5.11: आपतन तल के समान्तर ध्रुवित तरंग का परावर्तन तथा अपवर्तन

$$\vec{E}_{OI} \cos \theta_I - \vec{E}_{OR} \cos \theta_R = \vec{E}_{OT} \cos \theta_T$$

या $(\vec{E}_{OI} - \vec{E}_{OR}) \cos \theta_I = \vec{E}_{OT} \cos \theta_T \quad \dots (12)$

तथा $K_I \vec{E}_{OI} + K_I \vec{E}_{OR} = K_T \vec{E}_{OT}$

या $K_I (\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR}) = K_T \vec{E}_{OT}$

या $\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR} = \frac{K_T}{K_I} \vec{E}_{OT}$

या $\vec{E}_{OI} + \vec{E}_{OR} = \frac{n_2}{n_1} \vec{E}_{OT} \quad \dots (13)$

समी. (12) एवं (13) से,

$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{\cos\theta_I - \frac{n_1}{n_2} \cos\theta_T}{\cos\theta_I + \frac{n_1}{n_2} \cos\theta_T} = \frac{\tan(\theta_I - \theta_T)}{\tan(\theta_I + \theta_T)}$$

तथा
$$\frac{\vec{E}_{OT}}{\vec{E}_{OI}} = \frac{2 \sin\theta_T \cos\theta_I}{\sin(\theta_I + \theta_T) \cos(\theta_I - \theta_T)} \quad \dots (14)$$

समी. (7), (8), (13) तथा (14) को फ्रेनल सम्बन्ध कहते हैं।

यदि $n_2 = n_1$ हो तो समी. (7) में $\theta_1 = \theta_2$ एवं $\frac{E_{OR}}{E_{OI}} \neq 0$

θ_1 का मान 0 और $\frac{\pi}{2}$ के मध्य हो, अब यदि E आपतन तल में ध्रुवित हो तो समी. (13) से,

$$\frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} = 0 \quad \text{यदि } \theta_1 + \theta_T = \frac{\pi}{2} \quad \text{अर्थात् यदि तरंग का आपतन कोण}$$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_T$ हो तो तरंग बिना परावर्तन को प्रभावित किये उभयनिष्ठ पृष्ठ को पार कर जाता है। इस कोण को ब्रूस्टर कोण (Brewster's angle) θ_B कहते हैं। इसके परिमाण को स्नैल नियम द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$\frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_T} = \frac{\sin\theta_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right)} = \tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

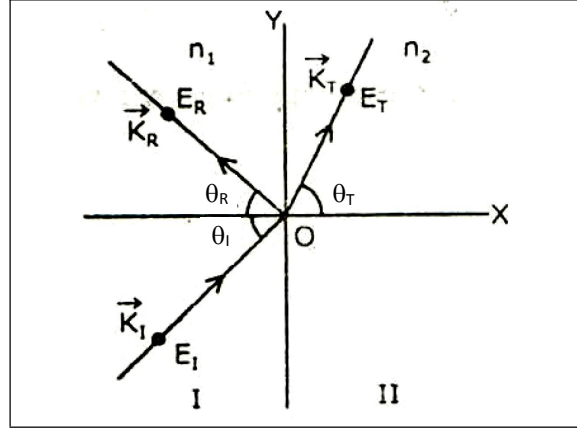
या
$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

अपवर्तित तरंग का ध्रुवण आपतन तल में होता है।

5.22 पूर्ण आन्तरिक परावर्तन द्वारा ध्रुवण (Polarization by Total Internal Reflection)

माना कोई विद्युत-चुम्बकीय तरंग चित्र 5.12 के अनुसार सघन माध्यम (अपवर्तनांक n_1) से विरल माध्यम (अपवर्तनांक n_2) में उभयनिष्ठ पृष्ठ $x=0$ पर अपवर्तित हो रही है। यदि आपतन कोण θ_I , परावर्तन कोण θ_R व अपवर्तन कोण θ_T हो, तो स्नैल के नियमानुसार,

टिप्पणी



चित्र क्र. 5.12: पूर्ण आंतरिक परावर्तन द्वारा ध्रुवण

$$\sin \theta_T = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I \quad \dots (1)$$

अब यदि θ_I के मान में क्रमशः वृद्धि की जाये तो θ_T का मान भी क्रमशः बढ़ता जाता है। यदि θ_T का मान 90° हो जाये तो इसके संगत θ_I के मान को क्रान्तिक कोण (Critical angle) कहते हैं। इसे θ_C से व्यक्त किया जाता है।

अतः समीकरण (1) से,

$$\sin \theta_C = \frac{n_2}{n_1} \quad \dots (2)$$

अब यदि $\theta_I \geq \theta_C$ हो, तो केवल तरंग का परावर्तन होगा अपवर्तन नहीं। इस प्रकार के परावर्तन को पूर्ण आन्तरिक परावर्तन कहते हैं।

अब हमें θ_T को θ_I व θ_C के रूप में व्यक्त करना है।

$$\therefore \cos \theta_T = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}$$

$$\text{परन्तु, } \sin \theta = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_I = \frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_C}$$

$$\therefore \cos \theta_T = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_I}{\sin^2 \theta_C}} \quad \dots (3)$$

समीकरण (3) से यह स्पष्ट है कि θ_I के मान में वृद्धि करने पर $\cos \theta_T$ का मान कम होता है तथा $\theta_I = \theta_C$ होने पर इसका मान शून्य हो जाता है तथा जब θ_I का मान θ_C से बड़ा होता है तो θ_T का मान काल्पनिक हो जाता है। अब $\theta_I > \theta_C$ होने पर परावर्तित विद्युत् सदिश के आयाम की गणना करती है। $\theta_I > \theta_C$ पर,

$$\cos\theta_T = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C}} = iQ.$$

$$\therefore Q = \sqrt{\frac{\sin^2\theta_I}{\sin^2\theta_C - 1}} \quad \dots (4)$$

जब \vec{E} आपतन तल के अभिलम्बवत् ध्रुवित होता है, तो

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} &= \frac{\cos\theta_I - \frac{n_2}{n_1} \cos\theta_T}{\cos\theta_I + \frac{n_2}{n_1} \cos\theta_T} \\ &= \frac{\cos\theta_I - \frac{n_2}{n_1} iQ}{\cos\theta_I + \frac{n_2}{n_1} iQ} \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} \right|^2 = 1$$

या $|\vec{E}_{OR}| = |\vec{E}_{OI}| \quad \dots (5)$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि \vec{E} आपतन तल के समान्तर ध्रुवित हो, तो

$$\left| \frac{\vec{E}_{OR}}{\vec{E}_{OI}} \right|^2 = 1$$

या $|\vec{E}_{OR}| = |\vec{E}_{OI}| \quad \dots (6)$

अर्थात् तरंग पूर्ण परावर्तित हो जायेगी, इस घटना को पूर्ण आन्तरिक परावर्तन कहते हैं।

टिप्पणी

5.23 चालक माध्यम में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंगें या \mathbf{E} व \mathbf{B} के लिये तरंग समीकरण (Plane Electromagnetic Waves in a Conducting Medium or Wave Equation for \mathbf{E} and \mathbf{B})

चालक माध्यम (जैसे धातु समुद्री जल) में धारा घनत्व \mathbf{J} शून्य नहीं होता।

मैक्सवेल समीकरण निम्न हैं –

$$\left. \begin{aligned} \text{प्रथम समीकरण } \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho \\ \text{द्वितीय समीकरण } \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \\ \text{तृतीय समीकरण } \operatorname{curl} \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \text{चतुर्थ समीकरण } \operatorname{curl} \vec{\mathbf{H}} &= \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

रेखीय, समदैशिक तथा समांगी माध्यम के लिए, जिसकी विद्युतशीलता ϵ , चुम्बकशीलता μ तथा वैद्युत चालकता σ है, के लिए निम्न सम्बन्ध प्रयुक्त होता है –

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathbf{D}} &= \epsilon \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{B}} &= \mu \vec{\mathbf{H}} \\ \vec{\mathbf{J}} &= \sigma \vec{\mathbf{E}} \\ \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

इन समीकरणों की सहायता से मैक्सवेल के समीकरणों को \mathbf{E} तथा \mathbf{H} के परिवर्तित रूप निम्न हैं –

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 & \dots (a) \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{H}} = 0 & \dots (b) \\ \operatorname{curl} \vec{\mathbf{E}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} & \dots (c) \\ \operatorname{curl} \vec{\mathbf{H}} &= \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \sigma \vec{\mathbf{E}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} & \dots (d) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

समीकरण [3(c)] का curl लेने पर

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{\mathbf{E}} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{curl} \vec{\mathbf{H}})$$

समीकरण [3(d)] से मान रखने पर

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \vec{\mathbf{E}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$$

$$\therefore \text{curl curl } \vec{E} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \dots (4)$$

$$\text{curl curl } \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\text{किन्तु } \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{curl curl } \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

समीकरण (4) में $\text{curl curl } \vec{E}$ का मान रखने पर

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{या } \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \dots (5)$$

इसी प्रकार समीकरण 3(d) का curl लेने पर

$$\begin{aligned} \text{curl curl } \vec{H} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) \\ &= \nabla \times \left(\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \sigma (\nabla \times \vec{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \end{aligned}$$

curl E का मान समीकरण 3(c) से रखने पर

$$= \sigma \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right)$$

$$\text{curl curl } \vec{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \dots (6)$$

$$\text{किन्तु } \text{curl curl } \vec{H} = (\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$$

$$\text{curl curl } \vec{H} = 0 - \nabla^2 \vec{H}$$

$$\text{क्योंकि } \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\therefore -\nabla^2 \vec{H} = -\sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0} \quad \dots (7)$$

उपर्युक्त समीकरण विद्युत चुम्बकीय क्षेत्र \vec{E} तथा \vec{H} का समघातीय, समदैशिक, चालक माध्यम में जिसकी वैद्युत चालकता σ है में तरंग समीकरणों को व्यक्त करती है।

टिप्पणी

अदिश तरंग समीकरण

$$\nabla^2 \psi - \sigma \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

को \vec{E} व \vec{H} के छः अवयव सन्तुष्ट करते हैं जहाँ ψ एक अदिश फलन है तथा यह \vec{E} व \vec{H} के किसी एक अवयव के लिए समीकरण प्रदान करता है।

5.23.1 परावैद्युत माध्यम में एकविमीय विद्युत्-चुम्बकीय तरंग का संचरण (Propagation of One-Dimensional Electro-Magnetic Waves in a Dielectric Medium)

हम परावैद्युत माध्यम में एकविमीय चुम्बकीय तरंग के संचरण का अध्ययन करेंगे तथा इस परिस्थिति में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के अभिलाक्षणिक गुणों की विवेचना करेंगे।

माना परावैद्युत माध्यम में एकविमीय विद्युत्-चुम्बकीय तरंग धनात्मक X -अक्ष के अनुदिश संचरित हो रही है। अतएव इससे सम्बद्ध विद्युत् क्षेत्र सदिश \vec{E} एवं चुम्बकीय क्षेत्र सदिश \vec{B} के y एवं z घटक y एवं z निर्देशांकों पर निर्भर नहीं होंगे। अतएव ये $\vec{E}(x,t)$ तथा $\vec{H}(x,t)$ द्वारा व्यक्त होंगे। अर्थात्

$$\vec{E}(x,t) = E_x(x,t) \cdot \hat{i} + E_y(x,t) \cdot \hat{j} + E_z(x,t) \cdot \hat{k} \quad \dots (1)$$

$$\vec{B}(x,t) = B_x(x,t) \cdot \hat{i} + B_y(x,t) \cdot \hat{j} + B_z(x,t) \cdot \hat{k} \quad \dots (2)$$

चूँकि E_y तथा E_z क्रमशः y एवं z पर निर्भर नहीं होते, अर्थात्

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \dots (4)$$

इसी प्रकार B_y तथा B_z क्रमशः y एवं z पर निर्भर नहीं होते, अर्थात्

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \dots (6)$$

अब यदि परावैद्युत रेखीय, समदैशिक, समांगी तथा स्थिर हो, तो इस परावैद्युत माध्यम के लिए —

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \dots (7)$$

$$\vec{E} = \mu \vec{H} \quad \dots (8)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \dots (9)$$

चूँकि परावैद्युत माध्यम की चालकता शून्य होती है, अर्थात्

$$\sigma = 0 \quad \dots (10)$$

अतः यदि परावैद्युत माध्यम में कोई आवेश वितरण उपस्थित न हो, तो

$$\rho = 0 \quad \dots (11)$$

मैक्सवेल के चार विद्युत-चुम्बकीय समीकरण निम्नानुसार व्यक्त होते हैं—

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

उपर्युक्त पाँच समीकरणों (7), (8), (9), (10) तथा (11) से परावैद्युत माध्यम के लिये मैक्सवेल के उपर्युक्त समीकरणों को \vec{E} एवं \vec{B} के पदों में निम्नानुसार व्यक्त करते हैं—

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \dots (12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots (13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots (15)$$

उपर्युक्त समीकरणों को घटकों के रूप में व्यक्त करने पर,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \dots (16)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \dots (17)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{k} \right) \quad \dots (18)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mu \epsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right) \quad \dots (19)$$

समी. (18) में \hat{i} , \hat{j} तथा \hat{k} के गुणांकों की (दोनों पक्षों के) तुलना करने पर,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial H_x}{\partial t}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial H_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \dots (20)$$

समी. (19) में दोनों पक्षों \hat{i}, \hat{j} तथा \hat{k} के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \mu\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \dots (21)$$

अब समीकरणों (3), (4), (5) तथा (6) से स्पष्ट है कि जिसमें पद $\frac{\partial}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial}{\partial z}$ हैं, वे सब शून्य होंगे जिससे समी. (16) तथा समी. (17) से,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \dots (22)$$

तथा
$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \dots (23)$$

समी. (20) के तृतीय समीकरण तथा समी. (21) के द्वितीय समीकरण से,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \dots (24)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad \dots (25)$$

इन दोनों समीकरणों से स्पष्ट है कि E_y तथा B_z परस्पर सम्बन्धित रहते हैं। इस गुण को E_y तथा B_z का युग्मन भी कहा जाता है।

समी. (24) का x के सापेक्ष तथा समी. (25) का t के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

तथा
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

उपर्युक्त दोनों समीकरणों से,

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \quad \dots (26)$$

समी. (24) का ज के सापेक्ष तथा समी. (25) का ग के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

तथा
$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}$$

उपर्युक्त दोनों समीकरणों से,

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}} \quad \dots (27)$$

समी. (26) तथा समी. (27) परावैद्युत माध्यम में एकविमीय विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों का समीकरण है। इन समीकरणों को एकविमीय तरंग के मानक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि विद्युत् क्षेत्र के y घटक तथा चुम्बकीय क्षेत्र z घटक दोनों ही समान चाल $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ से संचरित होते हैं।

5.23.2 विद्युत्-चुम्बकीय तरंग की अनुप्रस्थ प्रकृति (Transverse Nature of Electro-Magnetic Wave)

विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के अनुप्रस्थ होने के लिये इसमें निम्नलिखित अभिलाक्षणिक गुण होने चाहिए

- विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के अवयव \vec{E} तथा \vec{B} तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् होने चाहिए।
- तरंग के संचरण की दिशा में \vec{E} तथा \vec{B} के कोई घटक उपस्थित नहीं होना चाहिए।

(i) विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में \vec{E} तथा \vec{B} तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् होता है। इसे सिद्ध करने के लिये मानलो धनात्मक X-अक्ष की दिशा में संचरित विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के समीकरण निम्नानुसार हैं, माना समीकरण (A) के हल निम्न है –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right] \quad \dots (A)$$

$$\vec{E}_y(x, t) = \vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (1)$$

$$\vec{B}_z(x, t) = \vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (2)$$

टिप्पणी

जहाँ k संचरण सदिश का मान है, जो सदिश रूप में निम्नानुसार व्यक्त होता है—

टिप्पणी

$$\vec{k} = k\hat{i} \quad \dots (3)$$

जहाँ \hat{i} , X -अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश है। समी. (1) का डाइवर्जेंस लेने पर,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_y &= \nabla \cdot [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] \\ 0 &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] \end{aligned}$$

$$\text{या } \hat{i}(-ik) \cdot [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] = 0$$

$$\text{चूँकि } \hat{i}k = \vec{k}$$

$$\text{अतः } -i\vec{k} \cdot [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] = 0$$

$$\text{या } \vec{k} \cdot \vec{E}_{oy} = 0$$

अतएव विद्युत् क्षेत्र \vec{E}_y का आयाम \vec{E}_{oy} संचरण सदिश \vec{k} के लम्बवत् है। अर्थात् विद्युत् क्षेत्र, तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् है।

इसी प्रकार समी. (2) का डाइवर्जेंस लेने पर,

$$\nabla \cdot \vec{B}_z = \nabla \cdot [\vec{B}_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)}]$$

$$\begin{aligned} \text{या } 0 &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} [\vec{B}_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)}] \\ &= \hat{i}(-ik) \cdot [\vec{B}_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)}] \end{aligned}$$

$$\text{या } = \hat{i}(-ik) [B_{oz} e^{i(\omega t - kx)}] = 0$$

$$\text{चूँकि } \hat{i}k = \vec{k}$$

$$\text{जिससे } -i\vec{k} \cdot \vec{B}_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

$$\text{या } \vec{k} \cdot \vec{B}_{oz} = 0 \quad \dots (5)$$

अर्थात् चुम्बकीय क्षेत्र, तरंग के संचरण की दिशा के लम्बवत् है।

(ii) विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के संचरण की दिशा में \vec{E} तथा \vec{B} के कोई घटक उपस्थित नहीं रहता।

$$\text{अतः } \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \dots (6)$$

$$\text{तथा } \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad \dots (7)$$

उपर्युक्त समीकरणों से स्पष्ट है कि

(a) $E_x = 0$ या $E_x =$ नियत (X-दिशा के सापेक्ष)।

(b) $B_x = 0$ या $B_x =$ नियत (X-अक्ष के सापेक्ष)।

अतएव E_x तथा B_x के मान X-अक्ष के अनुदिश शून्य होने के लिये $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ तथा $\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$ होना चाहिए,

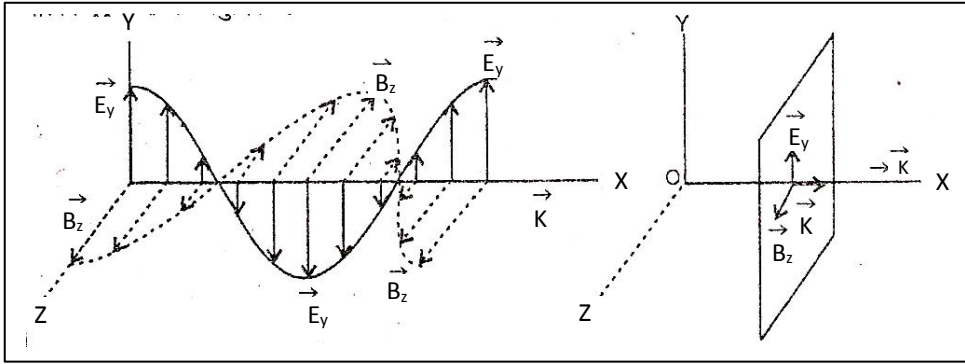
$$-\mu \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \text{ जिससे } \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\text{तथा } \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \text{ जिससे } \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

अतएव उपर्युक्त विश्लेषण से स्पष्ट है कि तरंग के संचरण कि दिशा में विद्युत् क्षेत्र \vec{E} तथा चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} के कोई घटक उपस्थित नहीं रहते।

अतएव विद्युत्-चुम्बकीय तरंग अनुप्रस्थ प्रकृति का होता है।

चित्रानुसार एकविमीय विद्युत्-चुम्बकीय तरंग को प्रदर्शित किया गया है, जिसकी संचरण दिशा धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश है।



चित्र क्र. 5.13: एक विमीय विद्युत-चुम्बकीय तरंग का संचरण

5.23.3 विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में \vec{E} , \vec{B} तथा संचरण दिशा का परस्पर लम्बवत् होना (\vec{E} , \vec{B} and Direction of Propagation being Mutually Perpendicular in an Electromagnetic Wave)

विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में \vec{E} , \vec{B} तथा संचरण की दिशा परस्पर लम्बवत् होते हैं, इसे सिद्ध करने के लिये माना धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश संचरित विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों के समीकरण निम्नानुसार व्यक्त होते हैं—

$$\vec{E}_y(x, t) = \vec{E}_{0y} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (1)$$

$$\vec{B}_z(x, t) = \vec{B}_{0z} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (2)$$

मैक्सवेल के तृतीय विद्युत्-चुम्बकीय समीकरण से,

$$\text{curl } \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

इस समीकरण में समी. (1) तथा (2) के मानों को रखने पर,

$$\nabla \times [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)}]$$

$$\text{या } \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \times [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}] = -i\omega \vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{या } \hat{i} \times (-ik) \vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)} = -i\omega \vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{चूँकि } \hat{i} k = \vec{k}$$

$$\text{अतः } \vec{k} \times \vec{E}_{oy} = (\omega) \vec{B}_{oz} \quad \dots (3)$$

इससे स्पष्ट है कि \vec{B}_{oz}, \vec{k} तथा \vec{E}_{oy} के लम्बवत् है।

अब मैक्सवेल के चतुर्थ विद्युत्-चुम्बकीय समीकरण से,

$$\text{curl } \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

इस समीकरण में समी. (1) तथा (2) के मानों को रखने पर,

$$\nabla \times [\vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)}] = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}]$$

$$\text{या } \hat{i} \times \frac{\partial}{\partial t} \times [\vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)}] = i\omega \epsilon \mu \vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{या } \hat{i} \times (-ik) \vec{B}_{oz} e^{i(\omega t - kx)} = i\omega \epsilon \mu \vec{E}_{oy} e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{चूँकि } \hat{i} k = \vec{k}$$

$$\text{अतः } \vec{k} \times \vec{B}_{oz} = -\omega \epsilon \mu \vec{E}_{oy} \quad \dots (4)$$

इस समीकरण से स्पष्ट है कि \vec{E}_{oy}, \vec{k} तथा \vec{B}_{oz} के लम्बवत् है।

अतएव समी. (3) तथा (4) से स्पष्ट है कि $\vec{E}_{oy}, \vec{B}_{oz}$ तथा \vec{k} परस्पर लम्बवत् हैं।

5.23.4 \vec{E} तथा \vec{B} के बीच सम्बन्ध (Relation between \vec{E} and \vec{B})

मानलो धनात्मक X-अक्ष के अनुदिश संचरित विद्युत-चुम्बकीय तरंग का समीकरण निम्नानुसार व्यक्त होते हैं—

$$E_y(x, t) = E_{oy} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (1)$$

$$B_z(x, t) = E_{oz} e^{i(\omega t - kx)} \quad \dots (2)$$

B_z तथा E_y के युग्मन गुण से,

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{\partial}{\partial x} [E_{oy} \cdot e^{i(\omega t - kx)}] = -\frac{\partial}{\partial t} [B_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)}]$$

$$\text{या} \quad (-ik)E_{oy} \cdot e^{i(\omega t - kx)} = -(i\omega) \cdot B_{oz} \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{या} \quad k \cdot E_{oy} = \mu\omega B_{oz}$$

टिप्पणी

5.24 आयनमण्डल द्वारा परावर्तन व अपवर्तन (Reflection and Refraction by the Ionosphere)

पृथ्वी की सतह से 80 से 300 किमी ऊँचाई पर वायुमण्डल के एक भाग को आयनमण्डल कहा जाता है। आयनमण्डल में उदासीन वायु कणों के साथ-साथ इलेक्ट्रॉन, धनात्मक तथा ऋणात्मक आयन उपस्थित होते हैं। जब कोई रेडियो तरंग आयनमण्डल में संचरित होती है तो आयनमण्डल में उपस्थित आवेशित कण गुजरने वाली रेडियो तरंग को प्रभावित करते हैं। आयनों का द्रव्यमान इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान की तुलना में बहुत अधिक होता है, अतः विद्युतीय रूप से तरंगों पर इनका प्रभाव नगण्य होता है। अतः यह माना जा सकता है कि आयनमण्डल में केवल इलेक्ट्रॉन ही आवेशित कण हैं जिनकी अनियमित गति से रेडियो तरंगों का संचरण प्रभावित होता है।

माना आयनमण्डल की किसी ऊँचाई पर मुक्त इलेक्ट्रॉनों का घनत्व N प्रति घन मीटर है एवं इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान m तथा आवेश $-e$ है। माना आयनमण्डल के इस भाग में संचरित होने वाली रेडियो तरंग (विद्युत-चुम्बकीय तरंग) के विद्युत वेक्टर का मान $E = E_0 \sin \omega t$ है, जहाँ ω तरंग की कोणीय आवृत्ति है। तरंग के इस विद्युत क्षेत्र से इलेक्ट्रॉन पर आवर्ती विद्युत बल $-eE$ आरोपित होगा जिसके कारण इलेक्ट्रॉन तरंग की कोणीय आवृत्ति ω से कम्पन करने लगेगा। यदि इलेक्ट्रॉन का तात्क्षणिक वेग (Instantaneous velocity) v हो, तो

$$m \frac{dv}{dt} = -eE = -eE_0 \sin \omega t \quad \dots (1)$$

उपर्युक्त समीकरण का समाकलन करने पर,

$$mv = \frac{eE_0}{\omega} \cos \omega t \quad (\text{समाकलन नियतांक को शून्य लेने पर})$$

$$\text{या} \quad v = \frac{eE_0}{m\omega} \cos \omega t \quad \dots (2)$$

इलेक्ट्रॉन की गति के कारण माध्यम में उत्पन्न धारा घनत्व

$$J = -Nev = -\frac{Ne^2 E_0}{m\omega} \cos \omega t \quad \dots (3)$$

टिप्पणी

स्पष्ट है कि आरोपित क्षेत्र व इलेक्ट्रॉनिक धारा के मध्य कलान्तर 90° होता है।

इलेक्ट्रॉनों की अनुपस्थिति में आयनमण्डल को मुक्त आकाश (Free space) माना जा सकता है, अतः मुक्त आकाश में विद्युत क्षेत्र E के कारण उत्पन्न विस्थापन धारा घनत्व

$$\begin{aligned} J_D = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (E_0 \sin \omega t) \\ &= \epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \dots (4)$$

जहाँ ϵ_0 मुक्त आकाश की विद्युतशीलता है।

अतः आयनमण्डल में कुल धारा घनत्व

$$\begin{aligned} J_T &= J + J_D \\ &= -Ne^2 \frac{E_0}{m\omega} \cos \omega t + \epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t \\ &= \omega \left(\epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right) E_0 \cos \omega t \\ &= \omega \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} \right) \omega E_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad \dots (5)$$

समीकरण (4) व (5) की तुलना से स्पष्ट है कि मुक्त इलेक्ट्रॉनों की उपस्थिति से माध्यम की विद्युतशीलता ϵ_0 से घटकर $\epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} \right)$ रह जाती है। अर्थात् मुक्त इलेक्ट्रॉनों की उपस्थिति से माध्यम की विद्युतशीलता ϵ_0 में $\frac{Ne^2}{m\omega^2}$ की कमी आ जाती है। अतः मुक्त इलेक्ट्रॉन युक्त आयनित आकाश की विद्युतशीलता

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} \right) \quad \dots (6)$$

उपर्युक्त समीकरण में $e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ किग्रा, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ फ़ैरड प्रति मीटर तथा $\omega = 2\pi f$ ($f =$ तरंग आवृत्ति) रखने पर,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{80.56N}{f^2} \right) \\ &\approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{81N}{f^2} \right) \quad \dots (7)\end{aligned}$$

चूँकि मुक्त आकाश (आवेश मुक्त क्षेत्र) में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का कला वेग

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad \dots (8)$$

जहाँ μ_0 मुक्त आकाश की चुम्बकशीलता है। इसी प्रकार आयनित (मुक्त इलेक्ट्रॉन युक्त) माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का कला वेग

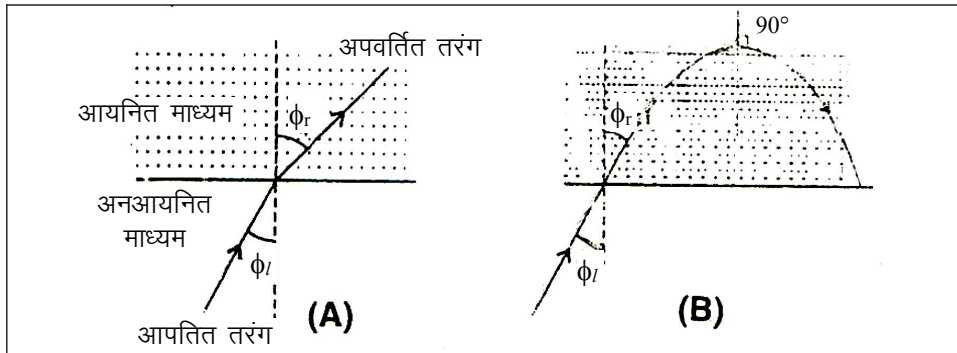
$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \right)}} \quad \dots (9)$$

समीकरण (8) व (9) से स्पष्ट है कि $v_p > c$ अर्थात् आयनमण्डल में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का कला वेग मुक्त आकाश में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के कला वेग (अर्थात् प्रकाश वेग) से अधिक होता है। किन्तु समूह वेग (Group velocity) का मान प्रकाश के वेग से अधिक नहीं हो सकता।

अतः मुक्त इलेक्ट्रॉन युक्त आयनित माध्यम का अपवर्तनांक

$$n = \frac{c}{v_p} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}} = \sqrt{1 - 81 \frac{N}{f^2}} \quad \dots (10)$$

स्पष्ट है कि रेडियो तरंगों के लिये आयनित माध्यम का अपवर्तनांक n , 1 से कम होता है।



चित्र क्र. 5.14(A): आयनमण्डल में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का अपवर्तन
(B) आयनमण्डल से विद्युत-चुम्बकीय तरंग का परावर्तन

टिप्पणी

(अर्थात् $n < 1$)। इस प्रकार, जब रेडियो तरंगे आयनमण्डल के नीचे अनआयनित माध्यम से आयनमण्डल अर्थात् आयनित माध्यम में प्रवेश करती हैं तो आयनमण्डल एक विरल माध्यम की भाँति व्यवहार करता है अर्थात् माध्यम में रेडियो तरंगें अपने मार्ग से विचलित होकर अभिलम्ब से दूर हट जाती है [चित्र 5.14(a)] यदि आपतन व अपवर्तन कोण क्रमशः ϕ_i व ϕ_r हो, तो

$$n = \frac{\sin \phi_i}{\sin \phi_r} = \sqrt{1 - \frac{81N}{f^2}} \quad \dots (11)$$

आयनमण्डल में इलेक्ट्रॉनों का घनत्व सर्वत्र एकसमान नहीं होता है। जैसे-जैसे आयनमण्डल के किसी पर्त की पृथ्वी सतह से ऊँचाई बढ़ती जाती है इलेक्ट्रॉन घनत्व N बढ़ता जाता है जिससे अपवर्तनांक n का मान कम होता जाता है अर्थात् अपवर्तन कोण ϕ_r का मान बढ़ता जाता है अन्ततः किसी बिन्दु पर अपवर्तन कोण r का मान 90° हो जाता है [चित्र 5.14] यदि इस बिन्दु पर इलेक्ट्रॉन घनत्व N_i हो, तो

$$n_i = \sin(\phi_i)_0 = \sqrt{1 - \frac{81N_i}{f^2}} \quad \dots (12)$$

इस बिन्दु पर तरंग का पूर्णआन्तरिक परावर्तन हो जाता है तथा तरंग वापस पृथ्वी की ओर लौट जाती है।

समीकरण (12) से स्पष्ट है कि यदि रेडियो तरंग की आवृत्ति स्थिर रखकर आपतन कोण कम करते जायें तो परावर्तन बिन्दु पर अपवर्तनांक n_i का मान घटता जायेगा अर्थात् अब परावर्तन आयनमण्डल की अधिक ऊँचाई वाली पर्तों से होगा जहाँ इलेक्ट्रॉन घनत्व N_i से अधिक होता है।

यदि तरंग की आवृत्ति अधिक हो तो सम्भव है कि आयनमण्डल के स्तर का इलेक्ट्रॉन घनत्व N_m इतना न हो कि समीकरण (10) का पालन हो सके इस स्थिति में तरंग का पूर्ण आन्तरिक परावर्तन नहीं होगा और वह आयनमण्डल को पार कर जायेगी और स्वतः तरंग पृथ्वी पर वापस नहीं आयेगी।

क्रान्तिक आवृत्ति (Critical Frequency)

यदि रेडियो तरंग आयनमण्डल पर ऊर्ध्वाधर आपतित होती है (अर्थात् आपतन कोण $= 0^\circ$) तो परावर्तन बिन्दु पर माध्यम का अपवर्तनांक $n = 0$ होगा, अतः

$$0 = \sqrt{1 - \frac{81N_m}{f_e^2}} \quad \dots (13)$$

या $f_c = 9\sqrt{N_m}$
(जहाँ N_m पर्त पर अधिकतम इलेक्ट्रॉन घनत्व है)

अर्थात् किसी-पर्त की क्रान्तिक आवृत्ति रेडियो तरंग की वह आवृत्ति है जो आयनित पर्त पर ऊर्ध्वाधर आपतित होने पर, उस पर्त से पूर्ण परावर्तित हो जाती

है। क्रान्तिक आवृत्ति का मान पर्त के इलेक्ट्रॉन घनत्व के वर्गमूल के समानुपाती होता है तथा विभिन्न पर्तों के लिये इसका मान भिन्न-भिन्न होता है।

सीकेन्ट नियम (Second Law)

समीकरण (12) व (13) से

$$n_i = \sin(\theta_i)_c = \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} \quad \dots (14)$$

$$\frac{f_c^2}{f^2} = 1 - \sin^2(\theta_i)_c \quad \dots (15)$$

$$= \cos^2(\theta_i)_c$$

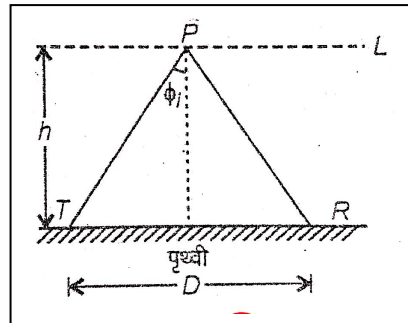
$$f = f_c \sec(\theta_i)_c \quad \dots (16)$$

इसे सीकेन्ट नियम कहते हैं। यह नियम क्रान्तिक कोण $(\theta_i)_c$ के लिये आयनमण्डल के परावर्तित सिद्धान्त की आवृत्ति f तथा क्रान्तिक आवृत्ति f_c में सम्बन्ध प्रदर्शित करता है। आवृत्ति f को अधिकतम उपयोगी आवृत्ति (Maximum Usable Frequency (MUF)) भी कहते हैं।

मुक अन्तराल (Skip Distance)

चित्र क्र 5.15 से स्पष्ट है कि आयनमण्डल में प्रवेश करने वाली तरंग का आपतन कोण जैसे-जैसे घटते जाता है, प्रेषी एण्टीना से पृथ्वी तल के उस बिन्दु की दूरी, जहाँ तरंगें आयनमण्डल से परावर्तन के पश्चात् पहुँचती हैं, कम होती जाती है। यदि आपतन कोण क्रान्तिक कोण $(\phi_i)_c$ से कम होता है तो तरंगें वापस लौटकर पृथ्वी की ओर नहीं आतीं। दूसरे शब्दों में, धरातल के ऊपर प्रेषित से एक न्यूनतम दूरी ऐसी होगी जिस पर कोई विशिष्ट आवृत्ति की तरंगें वापस नहीं लौट सकती है। इससे कम दूरी पर तरंगें वापस नहीं आती हैं। यह न्यूनतम दूरी मुक अन्तराल (skip distance) कहलाती है।

यदि पृथ्वी की वक्रता को नगण्य माना जाये एवं माना कि प्रेषी T से प्रेषित तरंगें आयनमण्डल की पर्त L से पूर्ण आंतरिक परावर्तन के पश्चात् अभिग्राही R तक पहुँचती हैं, तो चित्रानुसार



चित्र क्र. 5.15: मुक अन्तराल

टिप्पणी

$$\tan \phi_i = \frac{D/2}{h} = \frac{D}{2h}$$

टिप्पणी

$$\therefore 1 + \tan^2 \phi_i = 1 + \frac{D^2}{4h^2}$$

$$\text{या } \sec^2 \phi_i = 1 + \frac{D^2}{4h^2}$$

सीकेन्ट नियम से,

$$f = f_c \sec \phi_i$$

$$\text{अतः } \frac{f^2}{f_c^2} = 1 + \frac{D^2}{4h^2}$$

यदि f_{\max} वह अधिकतम उपयोगी आवृत्ति हो जिसे h ऊँचाई की पर्त से परावर्तित कर D दूरी पर पहुँचाया जा सकता हो, तो

$$f_{\max} = f_c \sqrt{1 + \frac{D^2}{4h^2}} \quad \dots (1)$$

इसी प्रकार,

$$D = 2h \sqrt{\frac{f^2}{f_c^2} - 1} \quad \dots (2)$$

उक्त समीकरण में D मूक अन्तराल व्यक्त करता है। स्पष्ट है कि मूक अन्तराल का मान (i) पर्त की ऊँचाई पर, (ii) प्रेषित रेडियो तरंग की आवृत्ति पर तथा (iii) पर्त की क्रान्तिक आवृत्ति पर निर्भर करता है।

5.25 आंकिक उदाहरण (Numerical Example)

उदाहरण 1 – 80 सेमी लम्बाई की एक वायु क्रोडित परिनालिका में 500 फेरे तथा इसके वृत्तीय अनुप्रस्थ परिच्छेद का व्यास 2 सेमी है। परिकलन कीजिए –

- परिनालिका का स्व-प्रेरकत्व।
- जब परिनालिका में 2 ऐम्पियर की धारा हो तो स्व-बद्ध फलक्स।
- परिनालिका में वह धारा परिवर्तन की दर जो 0.3 वोल्ट का स्व-प्रेरित वि. वा. बल उत्पन्न करेगी

हल – (a) कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व

$$L = \mu_0 n^2 Al$$

यहाँ माध्यम की पारगम्यता, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पि-मी

परिनालिका की लम्बाई, $l = 80$ सेमी = 0.80 मी

प्रति मीटर लम्बाई में फेरों की संख्या $n = 500/0.8 = 625$ फेरे/मीटर
परिनालिका का अनुप्रस्थ-परिच्छेद

$$A = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 \text{ मीटर}^2 = \pi \times 10^{-4} \text{ मी}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore L &= \mu_0 n^2 A l \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ (वेबर/ऐम्पियर-मी)} (625 \text{ फेरे-मी})^2 \\ &\quad \times (\pi \times 10^{-4} \text{ मी}^2) \times (0.80 \text{ मी}) \\ &= 125\pi^2 \times 10^{-7} \text{ हेनरी} = 1.232 \times 10^{-4} \text{ हेनरी} \end{aligned}$$

(b) परिनालिका से स्व-बद्ध फ्लक्स

$$\phi = LI = (1.232 \times 10^{-4} \text{ हेनरी}) \times (2 \text{ ऐम्पियर}) = 2.464 \times 10^{-4} \text{ वेबर}$$

(c) परिनालिका में स्व-प्रेरित वि. वा. बल,

$$e = -L \frac{dl}{dt}$$

\therefore परिनालिका में धारा परिवर्तन की दर

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{e}{L} \text{ (ऑकिकतः)} = \frac{0.3}{1.232 \times 10^{-4} \text{ हेनरी}} \\ &= 2.43 \times 10^3 \text{ ऐम्पियर/से।} \end{aligned}$$

उदाहरण 2 – एक परिनालिका की क्रोड से परिच्छेद का क्षेत्रफल 4 वर्ग सेमी है। यह 20 सेमी लम्बाई की तथा आधी वायु ($\mu_{r1} = 1$) तथा आधी लोहे ($I = 500$) की है। यदि इस पर 1000 फेरे हों तो स्व-प्रेरकत्व का परिकलन कीजिए।

हल – इस स्थिति में स्व-प्रेरकत्व

$$L = \mu_0 n^2 I (\mu_{r1} A_1 + \mu_{r2} A_2)$$

यहाँ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मी, $\mu_{r1} = 1$

$$\mu_{r2} = 500, l = 20 \text{ सेमी} = 0.20 \text{ मी}$$

$$A_1 = A_2 = 2 \text{ वर्ग सेमी} = 2 \times 10^{-4} \text{ वर्ग मी}$$

$$n = \frac{1000}{0.20} = 5000 \text{ फेरे/मी}$$

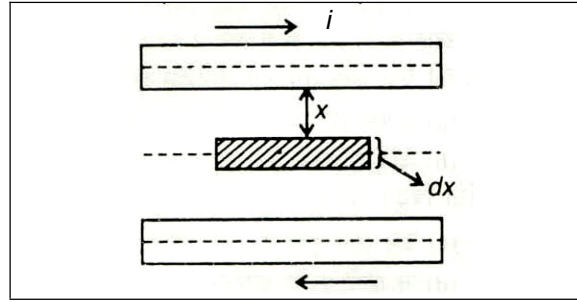
$$\begin{aligned} L &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ (वेबर/ऐम्पियर-मी)} \times (5000 \text{ फेरे/मी})^2 \\ &\quad (0.20 \text{ मी}) \times [(1 \times 2 \times 10^{-4} + 500 \times 2 \times 10^{-4}) \text{ मी}^2] \\ &= 4\pi \times 10^{-7} (5000)^2 \times (0.2) \times (501 \times 2 \times 10^{-4}) \text{ हेनरी} \\ &= 0.6292 \text{ हेनरी} \end{aligned}$$

टिप्पणी

उदाहरण 3 – दो लम्बे समान्तर तारों के स्व-प्रेरकत्व के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

टिप्पणी

हल – माना दो अनन्त लम्बाई के समान्तर तार हैं जिनमें प्रत्येक की त्रिज्या r है। माना कि d उनकी अक्षों के बीच की दूरी है तथा प्रत्येक तार में i ऐम्पियर की धारा विपरीत दिशाओं में प्रवाहित हो रही है। माना कि तारों के बीच में, ऊपरी तार से x दूरी पर dx मोटाई की एक पतली पट्टिका है।



चित्र क्र. 5.16

पट्टिका के किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B = \frac{\mu i}{2\pi x} + \frac{\mu i}{2\pi(d-x)}$$

अतः पट्टिका की एकांक लम्बाई से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$d\phi = B \cdot dx \quad (\text{क्योंकि लम्बाई } l \text{ के लिए } d\phi = Bldx)$$

$$= \left\{ \frac{\mu i}{2\pi x} + \frac{\mu i}{2\pi(d-x)} \right\} dx$$

अतः निकाय की एकांक लम्बाई से बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu i}{2\pi} \int_r^{d-r} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\mu i}{2\pi} [\log x - \log(d-x)]_r^{d-r} \\ &= \frac{\mu i}{2\pi} \left[\log \frac{(d-r)}{r} - \log \frac{r}{d-r} \right] \\ &= \frac{\mu i}{\pi} \log_e \frac{d-r}{r} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\text{परन्तु परिभाषा से } \phi = Li, \quad \dots (2)$$

समीकरणों (1) तथा (2) की तुलना करने पर

$$L = \frac{\mu}{\pi} \log_e \frac{d-r}{r} \quad \dots (3)$$

यह, परम पारगम्यता μ के माध्यम में रखे एक निकाय जिसमें r त्रिज्या के दो लम्बे समान्तर तार हैं जिनकी अक्षों के बीच की दूरी d है, के प्रति एकांक लम्बाई के लिए स्व-प्रेरकत्व के व्यंजक को निरूपित करता है।

उदाहरण 4 – 1 मीटर लम्बाई, 10 सेमी² अनुप्रस्थ परिच्छेद तथा 1000 फेरों की एक लम्बी परिनालिका के केन्द्र पर 20 फेरों की एक छोटी कुण्डली लिपटी है। इस निकाय का अन्योन्य प्रेरकत्व माइक्रो-हेनरी में ज्ञात कीजिए।

हल – निकाय का अन्योन्य प्रेरकत्व

$$M = \mu_0 n_1 n_2 A l$$

यहाँ वायु की परम पारगम्यता $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मी, परिनालिका की प्रति मीटर लम्बाई में फेरों की संख्या $n_1 = 1000$ फेरे/मी, द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या $n_2 = 20$, परिनालिका का अनुप्रस्थ परिच्छेद

$$A = 10 \text{ सेमी}^2 = 10 \times 10^{-4} \text{ मी.}^2 = 10^{-3} \text{ मी.}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मी}) \times (1000 \text{ फेरे/मी.}) \\ &\quad (20) \times (10^{-3} \text{ मी.}^2) \times 1 \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \times 1000 \times 20 \times 10^{-3} \text{ हेनरी} \\ &= 25.12 \times 10^{-6} \text{ हेनरी} = 25.12 \text{ माइक्रो हेनरी} \end{aligned}$$

उदाहरण 5 – 100 फेरों तथा 2 सेमी त्रिज्या की एक वृत्ताकार कुण्डली P , 1000 फेरों तथा 200 सेमी त्रिज्या की एक अन्य वृत्ताकार कुण्डली Q के केन्द्र पर समाक्षीय रूप से रखी है। परिकलन कीजिए –

- कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व।
- यदि कुण्डली Q में धारा 0.04 से में 5 ऐम्पियर से 3 ऐम्पियर तक कम होती हो तो P कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल।
- इस क्षण कुण्डली P से होकर फ्लक्स परिवर्तन की दर, तथा
- कुण्डली P से प्रवाहित आवेश, यदि इसका प्रतिरोध 8 ओम हो।

हल – (a) कुण्डली Q के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र का मान होगा।

$$B = \frac{\mu_0 n_1 i}{2a}$$

यहाँ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ वेबर/ऐम्पियर-मी., $n_1 = 1000$,

$$a = 20 \text{ सेमी} = 0.2 \text{ मी.}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ वेबर/ऐम्पियर-मी.}) \times (1000) \times (i \text{ ऐम्पियर})}{(2 \times 0.2 \text{ मी.})} \\ &= 3.14 \times 10^{-3} i \text{ वेबर/मी.}^2 \end{aligned}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

कुण्डली P से बद्ध फ्लक्स, $\phi = B.A.n_2 = B.\pi a^2.n_2$

$$= (3.14 \times 10^{-3} i \text{ वेबर/मी.}^2) \times 3.14 \times (0.02 \text{ मी.})^2 \times 100$$

$$= 3.944 \times 10^{-4} i \text{ वेबर}$$

परन्तु परिभाषा के अनुसार, $\phi = Mi$

$$\therefore M = 3.944 \times 10^{-4} \text{ हेनरी}$$

(b) कुण्डली P में प्रेरित विद्युत वाहक बल

$$E = M \frac{di}{dt} \text{ (ऑकिकतः)}$$

$$= (3.944 \times 10^{-4} \text{ हेनरी}) \times \left(\frac{5-3}{0.04} \text{ ऐम्पियर/सेकण्ड} \right)$$

$$= 19.72 \times 10^{-3} \text{ वोल्ट} = 19.72 \text{ मिलीवोल्ट}$$

(c) कुण्डली P से होकर फ्लक्स परिवर्तन की दर,

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \text{ (ऑकिकतः)}$$

$$= 19.72 \times 10^{-3} \text{ वेबर/से} = 19.72 \text{ मिली वेबर/से}$$

(d) कुण्डली P से प्रवाहित आवेश

$$q = \int_0^t i dt = \int_0^t \frac{e}{R} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t M \frac{di}{dt} dt \text{ (चूँकि } e = -M \frac{di}{dt} \text{)}$$

$$= -\frac{M}{R} \int_{i_1}^{i_2} di \frac{M}{R} (i_1 - i_2)$$

$$= \frac{3.944 \times 10^{-4}}{8} \times (5-3) \text{ कूलॉम}$$

$$= 9.86 \times 10^{-5} \text{ कूलॉम} = 98.6 \text{ माइक्रो-कूलॉम}$$

उदाहरण 6 – R_1 तथा R_2 त्रिज्याओं के समतलीय तथा संकेन्द्री दो वलयों के बीच अन्योन्य प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए।

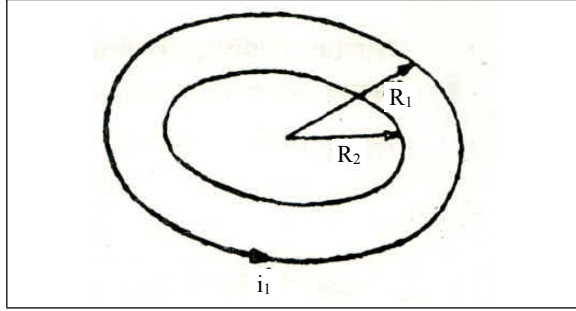
हल – माना R_1 तथा R_2 क्रमशः बाह्य तथा आन्तरिक वलयों की त्रिज्याएँ हैं। यदि बाह्य वलय में प्रवाहित धारा का मान i_1 ऐम्पियर हो, तो इस धारा के कारण वलय के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1}$$

R_2 त्रिज्या के आन्तरिक वलय से होकर फलक्स

विद्युत-गतिकी

$$\phi = \frac{\mu_0 i_1}{2R_1} \cdot \pi R_2^2 \quad \dots (1)$$



चित्र क्र. 5.17

यहाँ हमने कल्पना की है कि $R_2 \ll R_1$ अतः इस क्षेत्रफल पर चुम्बकीय फलक्स लगभग एकसमान रहेगा।

परिभाषा के अनुसार, आन्तरिक वलय से होकर फलक्स

$$\phi = M i_1 \quad \dots (2)$$

जहाँ M दोनों वलयों के बीच अन्योन्य प्रेरकत्व है।

समीकरणों (1) तथा (2) की तुलना करने पर

$$M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \text{ हेनरी}$$

यदि बाह्य वलय में n_1 तथा आन्तरिक वलय में n_2 फेरे हों, तो वलय के केन्द्र पर क्षेत्र $n_1 B_1$ तथा आन्तरिक वलय से होकर फलक्स $n_1 B_1 n_2 \pi R_2^2$ होगा। अतः दोनों वलयों के बीच अन्योन्य प्रेरकत्व का मान

$$M = \frac{\mu_0 n_1 n_2 \pi R_2^2}{2R_1}$$

उदाहरण 7 – 20 सेमी व्यास की एक ऊर्ध्वाधर ताँबे की डिस्क अपने केन्द्र से जाने वाली क्षैतिज अक्ष के परितः 10 चक्र प्रति से. की गति से घूर्णन कर रही है। 100 गॉस का एकसमान चुम्बकीय डिस्क के तल के लम्बवत् कार्य कर रहा है। इसके केन्द्र तथा रिंग के बीच विभवान्तर वोल्ट में परिकलित कीजिए।

हल – डिस्क के बद्ध चुम्बकीय फलक्स

$$\phi = BA.$$

प्रेरित विद्युत वाहक बल अर्थात् रिम तथा केन्द्र के बीच विभवान्तर

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA) = B \frac{dA}{dt} \quad (\text{ऑकिकतः})$$

टिप्पणी

दिया है : $B = 100$ गॉस $= 100 \times 10^{-4}$ वेबर/मी.² $= 10^{-2}$ वेबर/मी.²,
 $R = 10$ सेमी $= 0.1$ मीटर,

टिप्पणी

$$\frac{dA}{dt} = \text{डिस्क द्वारा एकांक समय में घेरा गया क्षेत्रफल}$$

$$= \pi r^2 \times \text{प्रति से. चक्करो की संख्या}$$

$$= (3.14) \times (0.1)^2 \times 10 = 0.314$$

$$\therefore e = B \frac{dA}{dt} = (10^{-2} \text{ वेबर/मी.}^2) \times (0.314 \text{ मी.}^2/\text{से.})$$

$$= 3.14 \times 10^{-3} = 3.14 \text{ मिली-वोल्ट}$$

उदाहरण 8 – 2 मीटर लम्बाई तथा X-Y तल के लम्बवत् एक तार $v = (2i + 3j + k)$ मी./से. के वेग से एकसमान प्रेरण $B = -(i + 2j)$ वेबर/मी.² के क्षेत्र में गति करता है। तार के सिरों के बीच विभवान्तर का परिकलन कीजिए।

हल – तार के भीतर वैद्युत क्षेत्र

$$E = -(v \times B) = -(2i + 3j + k) \times (i + 2j)$$

$$= - \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2i - j - k) \text{ वोल्ट/मी.}$$

$$e = -(v \times B) \cdot i = (2i - j - k) \cdot (2k) = -2 \text{ वोल्ट}$$

उदाहरण 9 – ऐम्पियर की धारा 500 फेरों की एक कुण्डली में 2×10^{-3} का फ्लक्स उत्पन्न करती है। चुम्बकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा का परिकलन कीजिए।

हल – कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{500 \times 2 \times 10^{-3} \text{ वेबर}}{(5 \text{ ऐम्पियर})} = 0.2 \text{ हेनरी}$$

\therefore चुम्बकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 5^2 = 2.5 \text{ जूल।}$$

उदाहरण 10 – सूर्य के पृष्ठ पर पोयन्टिंग वेक्टर के परिमाण का परिकलन कीजिए। दिया है : सूर्य द्वारा विकिरित शक्ति $= 3.8 \times 10^{26}$ वाट तथा सूर्य की त्रिज्या $= 7 \times 10^8$ मीटर।

हल – पोयन्टिंग वेक्टर S की परिभाषा से, इसका मान प्रति एकांक क्षेत्रफल से विकिरित ऊर्जा के बराबर होता है। सूर्य का पृष्ठ क्षेत्रफल $4\pi R^2$ है जहाँ R सूर्य की त्रिज्या है।

∴ यदि सूर्य से विकिरित कुल शक्ति (P) हो, तो

$$P = S \cdot 4\pi R^2$$

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } S &= \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{3.8 \times 10^{26}}{4 \times 3.14 \times (7 \times 10^8)^2} \\ &= 6.175 \times 10^{-7} \text{ वाट/मी.}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 11 – यदि सूर्य तथा पृथ्वी के बीच दूरी 1.5×10^{11} मीटर हो तो दर्शाइये कि पृथ्वी पर आपतित माध्य सौर ऊर्जा = 2 कैलोरी/सेमी²-मिनट (सौर नियतांक) होगी।

हल – यदि r सूर्य तथा पृथ्वी के बीच की दूरी तथा S_e पृथ्वी के पृष्ठ पर पोयन्टिंग वेक्टर का मान हो, तो

$$S_e \cdot 4\pi r^2 = P$$

$$\begin{aligned} \therefore S_e &= \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{3.8 \times 10^{26}}{4 \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{11})^2} \text{ वाट/मी.}^2 \\ &= \frac{3.8 \times 10^{26} \times 60}{4 \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{11})^2 \times 4.2 \times 10^4} \\ &\quad \text{कैलोरी/सेमी}^2\text{-मिनट} \\ &= 2 \text{ कैलोरी/सेमी}^2\text{-मिनट} \end{aligned}$$

उदाहरण 12 – एक कुण्डली, जिसका स्व-प्रेरकत्व 10 हेनरी है, में धारा शून्य से 10 ऐम्पियर तक स्थापित करने में कितना कार्य करना होगा? अब यदि कुण्डली को लघुपथित करके इसका बैटरी से सम्बन्ध तुरन्त ही हटा दिया जाये तो धारा शून्य होने तक कितनी ऊष्मा उत्पन्न होगी?

$$\text{हल} – \text{आवश्यक कार्य } W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (10)^2 = 500 \text{ जूल।}$$

कुण्डली को लघुपथित करके बैटरी से इसका सम्बन्ध हटाने पर इसमें संचित चुम्बकीय ऊर्जा ($U = 500$ जूल) ऊष्मा में परिवर्तित होगी। अतः

$$\text{उत्पन्न ऊष्मा} = 500 \text{ जूल} = \frac{500}{4.18} \text{ कैलोरी} = 119.62 \text{ कैलोरी।}$$

उदाहरण 13 – एक उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर में प्राथमिक तथा द्वितीयक कुण्डलियों में फेरों की संख्या का अनुपात 1 : 20 है। (i) यदि इसे 200 वोल्ट की मेन लाइन से जोड़ दें, तो इससे कितना वोल्टेज प्राप्त होगा? (ii) यदि द्वितीयक कुण्डली में प्राप्त होने वाली धारा 2 ऐम्पियर हो, तो प्राथमिक कुण्डली में बहने वाली धारा ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल} – \text{प्रश्नानुसार, } n_p : n_s = 1 : 20, V_p = 200 \text{ वोल्ट, } I_s = 2 \text{ ऐम्पियर।}$$

टिप्पणी

(i) हम जानते हैं कि

$$\frac{n_p}{n_s} = \frac{V_p}{V_s}$$

$$\therefore V_s = V_p \left(\frac{n_s}{n_p} \right) = 200 \times 20 = 4000 \text{ वोल्ट।}$$

(ii) आदर्श ट्रान्सफॉर्मर के लिए

$$V_p I_p = V_s I_s$$

$$\therefore \frac{I_s}{I_p} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{n_p}{n_s}$$

$$\text{या } I_p = I_s \times \left(\frac{n_s}{n_p} \right) = 2 \times 20 = 40 \text{ ऐम्पियर।}$$

उदाहरण 14 – दो कुण्डलियों के स्व-प्रेरकत्व क्रमशः $L_1 = 0.01$ हेनरी तथा $L_2 = 0.03$ हेनरी हैं। इन्हें श्रेणीक्रम में जोड़ने पर जिससे कि दोनों कुण्डलियों के चुम्बकीय क्षेत्र एक दिशा में हों, परिणामी प्रेरकत्व 0.06 हेनरी होता है। गणना करो : (i) दोनों कुण्डलियों के मध्य अन्योन्य प्रेरकत्व, (ii) दोनों कुण्डलियों का श्रेणीक्रम में कुल प्रेरकत्व जबकि इनके चुम्बकीय क्षेत्र परस्पर विपरीत हों।

हल – (i) एक दिशा में चुम्बकीय क्षेत्र होने पर –

परिणामी स्व-प्रेरकत्व

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

$$M = \frac{L - (L_1 + L_2)}{2} = \frac{0.06 - (0.01 + 0.03)}{2}$$

$$= 0.01 \text{ हेनरी।}$$

(ii) परस्पर विपरीत चुम्बकीय क्षेत्र होने पर–

परिणामी स्व-प्रेरकत्व

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

$$= (0.01 + 0.03) - (2 \times 0.01)$$

$$= 0.02 \text{ हेनरी।}$$

उदाहरण 15 – यदि सूर्य की त्रिज्या 7×10^8 मीटर तथा विकिरित ऊर्जा 38×10^{28} वाट हो तो सूर्य के पृष्ठ पर ऊर्जा संचरण पोयन्टिंग सदिश का मान ज्ञात कीजिये।

हल – पोयन्टिंग सदिश का परिमाण = एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित ऊर्जा

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{प्रति सेकण्ड सूर्य से विकिरित ऊर्जा}}{\text{सूर्य का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{38 \times 10^{28} \text{ वाट}}{4\pi \times (7 \times 10^8)^2 \text{ मीटर}^2} \\ &= 6.17 \times 10^{10} \text{ वाट/मीटर}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 16 – मैक्सवेल के समीकरण $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ की सहायता से स्थैत विद्युत का कूलॉम का नियम निगमित कीजिए।

हल – मैक्सवेल के प्रथम समीकरण से $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

या $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

उपर्युक्त समीकरण को माध्यम में किसी पृष्ठ S द्वारा घिरे आयतन V पर समाकलित करने पर

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \iiint_V (\rho / \epsilon_0) dV$$

लेकिन गॉस-डाइवर्जेंस प्रमेय से

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{da}$$

$$\therefore \iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V (\rho / \epsilon_0) dV$$

या $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$

लेकिन $\iiint_V \rho dV = q$ (कुल आवेश)

$$\therefore \iint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

यदि आवेश के चारों ओर वैद्युत सममित है तो

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

या $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$

टिप्पणी

अतः विद्युत क्षेत्र E में स्थित किसी परीक्षण आवेश (test charge) q_0 पर बल

टिप्पणी

$$F = q_0 E \quad \text{या} \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$$

यही कूलॉम का नियम है।

उदाहरण 17 – मैक्सवेल के समीकरण $\text{curl } \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ की सहायता से सिद्ध करो कि $\text{div } \vec{B} = 0$

हल – मैक्सवेल के समीकरण से

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

दोनों ओर डाइवर्जेंस लेने पर

$$\text{div curl } \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B}$$

लेकिन $\text{div curl } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{या} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

उदाहरण 18 – मैक्सवेल के समीकरणों का उपयोग करके धारा-आवेश के सातत्य समीकरण की स्थापना कीजिये।

$$\text{हल} – \text{मैक्सवेल के चतुर्थ समीकरण से} \quad \text{curl } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{दोनों ओर का डाइवर्जेंस लेने पर,} \quad \text{div curl } \vec{B} = \text{div} \left[\mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \right]$$

$$\text{या} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

लेकिन $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ तथा मैक्सवेल के प्रथम समीकरण से $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0 \quad \text{या} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{यही धारा-आवेश का}$$

सातत्य समीकरण है।

उदाहरण 19 – मैक्सवेल के समीकरण $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t)$ की सहायता से सिद्ध करो कि $\text{div } \vec{D} = \rho$

हल – मैक्सवेल के समीकरण से $\text{curl } \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t)$

दोनों ओर का डाइवर्जेंस लेने पर,

$$\frac{1}{\mu_0} \text{div curl } \vec{B} = \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D}$$

चूँकि $\text{div curl } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$

$$\therefore \text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0$$

सातत्य समीकरण से

$$\text{div } \vec{J} = \partial \rho / \partial t$$

$$\text{अतः } \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ या } \text{div } \vec{D} = \rho.$$

उदाहरण 20 – सिद्ध कीजिये कि किसी विद्युत-चुम्बकीय तरंग में विद्युत सदिश, चुम्बकीय सदिश तथा संचरण सदिश परस्पर लम्बवत् होते हैं।

हल – माना X -दिशा में विद्युत चुम्बकीय तरंग में विद्युत क्षेत्र \vec{E} तथा चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} के निम्नलिखित समीकरण हैं –

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \text{ तथा } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

जहाँ k संचरण नियतांक है।

मैक्सवेल के द्वितीय समीकरण से

$$\text{curl } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ या } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

एकविमीय तरंग के लिये

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \times [\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}]$$

$$\hat{x} \times [-ik \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}] = -i\omega \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

$$\text{या } k\hat{x} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \text{ या } \hat{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

इससे स्पष्ट है कि विद्युत सदिश, चुम्बकीय सदिश तथा संचरण सदिश परस्पर लम्बवत् होते हैं।

उदाहरण 21 – मैक्सवेल के विद्युत् चुम्बकीय सिद्धान्त के आधार पर सिद्ध करो कि λ तरंगदैर्घ्य की तरंग से सम्बद्ध फोटॉन का संवेग h/λ होता है, जहाँ h प्लांक नियतांक है।

टिप्पणी

टिप्पणी

[संकेत : माना किसी माध्यम में λ तरंगदैर्घ्य (या ν आवृत्ति) की विद्युत् चुम्बकीय तरंग संचरित हो रही है तथा प्रति एकांक आयतन में फोटॉनों की संख्या n है।]

हल – एक फोटॉन की ऊर्जा = $h\nu$, जहाँ h प्लांक नियतांक है।

तरंग का ऊर्जा घनत्व = $nh\nu$

यदि तरंग, माध्यम में स्थित एकांक अनुप्रस्थ क्षेत्रफल तथा c लम्बाई (अर्थात् c आयतन) वाले बेलन के पृष्ठ पर प्रति सेकण्ड P दाब आरोपित करती है तो

दाब $P =$ एकांक पृष्ठ क्षेत्रफल पर प्रति सेकण्ड आपतित फोटॉनों की संख्या \times एक फोटॉन का संवेग

$$= nc \times p$$

लेकिन दाब = ऊर्जा घनत्व

$$\therefore ncp = nh\nu$$

$$\text{या } p = \frac{h\nu}{c} = h\lambda \quad (\text{क्योंकि } c = \nu\lambda)$$

उदाहरण 22 – सिद्ध कीजिये किसी एकसमान तथा समांगी विद्युत् एवं चुम्बकीय क्षेत्रों के किसी बिन्दु पर विद्युत् चुम्बकीय विभव A तथा ϕ के निम्नलिखित मान होंगे –

$$(i) \phi = -\vec{E} \cdot \vec{r} \quad (ii) \vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r})$$

जहाँ \vec{r} उस बिन्दु का स्थिति वेक्टर है।

हल – (i) विद्युत् क्षेत्र \vec{E} को इसके अवयवों के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है –

$$\vec{E} = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z = (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{r}, \text{ क्योंकि } \vec{E} \text{ एकसमान क्षेत्र है।}$$

लेकिन वैद्युत स्थैतिकी से, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, जहाँ ϕ एक सदिश विभव है।

$$\therefore -\vec{\nabla}\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{r}$$

$$\text{या } \vec{\nabla}(-\phi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{r}$$

$$\text{या } -\phi = \vec{E} \cdot \vec{r} \text{ या } \phi = -\vec{E} \cdot \vec{r}$$

(ii) हम जानते हैं कि $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

$$\therefore \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\vec{B} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{r}$$

$$= 3\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$$

$$= 3\vec{B} - \vec{B}, \text{ क्योंकि } \vec{B} \text{ एकसमान क्षेत्र है।}$$

$$= 2\vec{B}$$

$$\text{या } \vec{B} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r})$$

लेकिन स्थैत-चुम्बकत्व से

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \text{ जहाँ } \vec{A} \text{ एक सदिश विभव है।}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

$$\text{या } \vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

उदाहरण 23 – आयनमण्डल की किसी पर्त की क्रान्तिक आवृत्ति 9MHz है, तो पर्त का अधिकतम इलेक्ट्रॉन घनत्व कितना होगा?

हल – किसी पर्त की क्रान्तिक आवृत्ति

$$f_c = 9\sqrt{N_m}$$

जहाँ N_m पर्त में इलेक्ट्रॉन का अधिकतम घनत्व है।

$$\text{अतः } f_c^2 = 81N_m$$

$$\begin{aligned} \text{या } N_m &= \frac{f_c^2}{81} \\ &= \frac{9 \times 10^6 \times 9 \times 10^6}{81} \\ &= 10^{12} \text{ इलेक्ट्रॉन प्रति इकाई आयतन।} \end{aligned}$$

उदाहरण 24 – पृथ्वी तल से आयनमण्डल E पर्त की ऊँचाई 120 किमी है तथा इस पर्त के लिये क्रान्तिक आवृत्ति 2.8 मेगा हर्ट्ज है। यदि पृथ्वी की वक्रता को नगण्य माना जाये तो 4.0 मेगा हर्ट्ज आवृत्ति की विद्युत् चुम्बकीय तरंग का पृथ्वी तल पर एकवर्णी के लिये प्रेषित्र और अभिग्राही के बीच की अधिकतम दूरी की गणना कीजिए।

हल – प्रश्नानुसार,

$$f_c = 2.8 \text{ MHz}$$

$$f = 4.0 \text{ MHz}$$

$$h = 120 \text{ किमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अब, } D_{\text{skip}} &= 2h \sqrt{\frac{f^2}{f_c^2} - 1} \\ &= 2 \times 120 \sqrt{\left(\frac{40}{2.8}\right)^2 - 1} \\ &= 249.8 \text{ किमी।} \end{aligned}$$

टिप्पणी

टिप्पणी

उदाहरण 25 – यदि सूर्य की त्रिज्या 7×10^8 मीटर तथा विकिरित ऊर्जा 38×10^{28} वाट हो, तो सूर्य के पृष्ठ पर ऊर्जा संचरण पोयटिंग सदिश का मान ज्ञात कीजिये।

हल – पोयटिंग सदिश का परिमाण

= एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित ऊर्जा

$$= \frac{\text{सूर्य से प्रति सेकण्ड विकिरित ऊर्जा}}{\text{सूर्य का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{38 \times 10^{28} \text{ वाट}}{4\pi(7 \times 10^8)^2 \text{ मीटर}^2}$$

$$= 6.17 \times 10^{10} \text{ वाट/मीटर}^2।$$

उदाहरण 26 – एक लेसर किरण पुंज का ऊर्जा फ्लक्स 10 वाट/सेमी² है यह 1.0 सेमी² के आदर्श समतल दर्पण पर एक घण्टे तक गिरती है। इस समय में दर्पण को प्रदान किया गया संवेग तथा बल ज्ञात कीजिए।

हल – समतल दर्पण पर आपतित कुल ऊर्जा

$$= (10 \text{ वाट/सेमी}^2) \times (1.0 \text{ सेमी}^2) \quad (3600 \text{ सेकण्ड})$$

$$= 3.6 \times 10^4 \text{ जूल}$$

चूँकि समतल दर्पण पूर्णतः परावर्तक है अतः इतनी ही ऊर्जा इससे परावर्तित होगी। अतः दर्पण को प्रदान संवेग

$$P = \frac{2U}{C} = \frac{2 \times 3.6 \times 10^4}{3 \times 10^8}$$

$$= 2.4 \times 10^{-4} \text{ किग्रा-मीटर/सेकण्ड}$$

तथा दर्पण पर बल

$$F = \frac{p}{t} = \frac{2.4 \times 10^{-4}}{3600}$$

$$= 6.67 \times 10^{-8} \text{ न्यूटन।}$$

उदाहरण 27 – एक टेलीविजन मीनार की ऊँचाई 100 मीटर है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 मीटर तथा मीनार के आस-पास के क्षेत्र में औसत जनसंख्या घनत्व 1000 प्रति किमी² है, तो टेलीविजन प्रसारण द्वारा धिरी जनसंख्या की गणना कीजिए।

हल – प्रश्नानुसार, $h = 100$ मीटर, $R = 6.4 \times 10^6$ मीटर

औसत जनसंख्या घनत्व $= 1000 \times (10^{-3})^2$ प्रति मीटर²

$$= 10^{-3} \text{ प्रति मीटर}^2$$

अब, टी.वी. प्रसारण की अधिकतम परास

$$d = \sqrt{2hR}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{टी.वी. प्रसारण द्वारा घिरा क्षेत्रफल} &= \pi d^2 \\
&= \pi(\sqrt{2hR})^2 = 2\pi hR \\
&= 2 \times 3.14 \times 100 \times 6.4 \times 10^6 \\
&= 4.02 \times 10^9 \text{ मीटर}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{टी.वी. प्रसारण द्वारा घिरी जनसंख्या} \\
&= 4.02 \times 10^9 \times 10^{-3} \\
&= 4.02 \times 10^6
\end{aligned}$$

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

- चुम्बकीय फ्लक्स का विमीय सूत्र होता है –

(क) $ML^2T^{-2}A^{-1}$	(ख) $MLT^{-2}A^{-1}$
(ग) $ML^3T^2A^{-1}$	(घ) MLT^3A^{-1}
- फैराडे के विद्युत्-चुम्बकीय प्रेरण सम्बन्धी नियम के अनुसार, किसी कुण्डली में उत्पन्न प्रेरित विद्युत् वाहक बल होगा –

(क) $e = \frac{d\phi}{dt}$	(ख) $e = L \frac{dl}{dt}$
(ग) $e = -\frac{d\phi}{dt}$	(घ) $e = -L \frac{dl}{dt}$
- लेंज के नियम द्वारा ज्ञात किया जाता है –

(क) फ्लक्स	(ख) प्रेरित विद्युत् वाहक बल
(ग) प्रेरित धारा की दिशा	(घ) चुम्बकीय क्षेत्र।
- फैराडे के नियम का अवकल रूप होता है –

(क) उष्मागतिक समीकरण
(ख) विद्युत्-अपघटन का समीकरण
(ग) विद्युत्-ऊर्जा ज्ञात करने का समीकरण
(घ) मैक्सवेल का एक विद्युत्-चुम्बकीय समीकरण।
- किसी लम्बे परिनालिका की लम्बाई l , अनुप्रस्थ काट A , चक्करों की संख्या N तथा क्रोड की चुम्बकशीलता μ हो, तो उसका स्व-प्रेरकत्व होता है –

(क) $L = \frac{\mu NA}{l}$	(ख) $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$
(ग) $L = \frac{N^2 Al}{\mu}$	(घ) $L = \frac{\mu A}{N^2 l}$

टिप्पणी

6. एक अपचायी ट्रान्सफॉर्मर द्वारा होता है –
 (क) वोल्टेज में कमी धारा में वृद्धि
 (ख) वोल्टेज में वृद्धि धारा में कमी
 (ग) वोल्टेज तथा धारा दोनों में कमी
 (घ) वोल्टेज तथा धारा दोनों में वृद्धि।
7. एक आदर्श ट्रान्सफॉर्मर की दक्षता होती है –
 (क) 0% (ख) 50%
 (ग) 100% (घ) उपर्युक्त में कोई नहीं।
8. l लम्बाई के दो लम्बी परिनालिकाओं का अनुप्रस्थ काट A तथा चक्करों की संख्या N_1 व N_2 है, यदि क्रोड की चुम्बकशीलता μ , हो, तो अन्योन्य प्रेरकत्व होगा –
 (क) $\frac{\mu N_1 N_2 A}{l}$ (ख) $\frac{\mu N_1 N_2}{Al}$
 (ग) $\frac{N_1 N_2}{A\mu l}$ (घ) $\frac{\mu N_1 N_2 l}{A}$
9. ऐम्पियर के नियमानुसार –
 (क) $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (ख) $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 I$
 (ग) $\text{div } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (घ) $\text{div } \vec{B} = \mu_0 I$
10. विस्थापन धारा घनत्व \vec{J}_d तथा विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता \vec{E} में सम्बन्ध है –
 (क) $\vec{J}_d = \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (ख) $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 (ग) $\vec{J}_d = \epsilon_0 \vec{E}$ (घ) $\vec{J}_d = \epsilon \vec{E}$
11. समय परिवर्तनीय धारा के लिये ऐम्पियर का नियम है–
 (क) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (ख) $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
 (ग) $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ (घ) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(1 + \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \right)$

12. स्थायी धारा के लिये सातत्य समीकरण है—

(क) $\text{div}\vec{J} = 0$ (ख) $\text{div}\vec{J} = \frac{\partial\rho}{\partial t}$

(ग) $\text{div}\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ (घ) $\text{div}\vec{J} = \rho$.

13. विस्थापन धारा घनत्व के लिये व्यंजक है—

(क) $\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (ख) $\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

(ग) $\vec{J}_d = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (घ) $\vec{J}_d = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

14. निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का वेग v होता है—

(क) $v = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ (ख) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

(ग) $v = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ (घ) $v = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

15. परावैद्युत माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का वेग v होता है—

(क) $v = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (ख) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

(ग) $v = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ (घ) $v = \sqrt{\mu\varepsilon}$.

16. $\text{div}\vec{B} = 0$ का अर्थ है—

(क) $\text{curl}\vec{B} = 0$

(ख) $\vec{B} = 0$

(ग) एकल चुम्बकीय ध्रुव प्राप्त करना सम्भव नहीं

(घ) धारा प्रवाह शून्य।

17. समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंग में होता है—

(क) \vec{E} तथा \vec{H} के बीच कलान्तर 90°

(ख) \vec{E} तथा \vec{H} के बीच कलान्तर 0°

(ग) \vec{E} तथा \vec{H} के बीच कलान्तर 45°

(घ) \vec{E} तथा \vec{H} के बीच कलान्तर 30° ।

टिप्पणी

18. निर्वात में समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंग के लिये E तथा H में सम्बन्ध होता है—

(क) $E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H$ (ख) $E = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} H$

(ग) $E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ (घ) $E = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} H.$

19. विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र में U_E विद्युत् क्षेत्र से सम्बद्ध ऊर्जा घनत्व है तथा U_H चुम्बकीय क्षेत्र से सम्बद्ध ऊर्जा घनत्व है, तो—

(क) $U_E > U_H$ (ख) $U_E < U_H$

(ग) $U_E = U_H$ (घ) $U_E = 2U_H.$

20. विद्युत-चुम्बकीय तरंग के संचरण की दिशा निम्न सदिश के अनुदिश होता है—

(क) \vec{H} (ख) \vec{E}

(ग) $\vec{H} \times \vec{E}$ (घ) $\vec{E} \times \vec{H}.$

21. विस्थापन धारा की धारणा को निम्न वैज्ञानिक ने दिया—

(क) मैक्सवेल (ख) ऐम्पियर

(ग) फ़ैराडे (घ) गॉस।

22. आयनमण्डल में उपस्थित आयन होते हैं—

(क) केवल धन आयन (ख) केवल मुक्त पॉजीट्रॉन

(ग) केवल ऋणायन (घ) केवल मुक्त इलेक्ट्रॉन।

23. आयनमण्डल का व्यवहार रेडियो तरंगों हेतु होता है—

(क) विरल माध्यम (ख) सघन माध्यम

(ग) मुक्त आकाश (घ) परावैद्युत माध्यम।

24. आयनमण्डल की सभी पर्तों में इलेक्ट्रॉन घनत्व—

(क) समान होता है

(ख) ऊँचाई के साथ बढ़ता है

(ग) ऊँचाई के साथ घटता है

(घ) कभी घटता है तो कभी बढ़ता है।

25. मुक्त आकाश में आयन उपस्थित होने के कारण इस माध्यम का अपवर्तनांक होगा—

(क) $\left[1 - \frac{81N_0^2}{f_c^2}\right]$ (ख) $\left[1 - \frac{81N_0}{f_c^2}\right]^2$

(ग) $\left[1 - \frac{81N_0^2}{f_c^2}\right]^{1/2}$ (घ) $\left[1 - \frac{81N_0^2}{f_c^2}\right]^{3/2}$

26. तरंग पथक का उपयोग किया जाता है—

- (क) श्रव्य तरंगों के लिये (ख) रेडियो तरंगों के लिये
(ग) सूक्ष्म तरंगों के लिये (घ) सभी तरंगों के लिये।

27. मैक्सवेल का समीकरण नहीं है—

(क) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ (ख) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \mu_0 \vec{J}$

(ग) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (घ) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

28. विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों की चाल निर्वात में c तथा किसी माध्यम में v है तथा $c/v = n$ (माध्यम का अपवर्तनांक) है, तो सही सम्बन्ध होगा—

(क) $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ (ख) $n = \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}$

(ग) $n = \sqrt{\mu \mu_0 / \epsilon_0}$ (घ) $n = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$

29. विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में ऊर्जा प्रवाह की दिशा होती है—

- (क) \vec{E} की दिशा में
(ख) \vec{B} की दिशा में
(ग) \vec{E} तथा \vec{B} दोनों के लम्बवत
(घ) \vec{E} तथा \vec{B} दोनों से झुकी दिशा में।

30. निर्वात में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के लिये \vec{E} तथा \vec{B} में सम्बन्ध होता है—

(क) $E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} B$ (ख) $E = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} B$

(ग) $E = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} B$ (घ) $E = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} B$

टिप्पणी

31. विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों का वेग होता है—
 (क) परावैद्युत में सर्वाधिक (ख) निर्वात में सर्वाधिक
 (ग) निर्वात में न्यूनतम (घ) सभी माध्यमों में समान।
32. पोयटिंग सदिश की दिशा होती है—
 (क) \vec{E} की दिशा में
 (ख) \vec{B} की दिशा में
 (ग) \vec{E} तथा \vec{B} दोनों के लम्बवत
 (घ) \vec{E} तथा \vec{B} दोनों के समान्तर।
33. निम्न में कौन-सा समीकरण सही तरंग समीकरण को व्यक्त करता है?
 (क) $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ (ख) $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
 (ग) $\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (घ) $\nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

5.26 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. (क) | 12. (क) | 23. (क) |
| 2. (ग) | 13. (क) | 24. (ख) |
| 3. (ग) | 14. (ख) | 25. (ख) |
| 4. (घ) | 15. (ख) | 26. (ग) |
| 5. (ख) | 16. (ग) | 27. (ख) |
| 6. (क) | 17. (ख) | 28. (क) |
| 7. (ग) | 18. (क) | 29. (ग) |
| 8. (क) | 19. (ग) | 30. (क) |
| 9. (क) | 20. (घ) | 31. (ख) |
| 10. (क) | 21. (क) | 32. (ग) |
| 11. (ग) | 22. (क) | 33. (ख) |

5.27 सारांश (Summary)

इस इकाई में विद्युत्-चुम्बकीय जानकारी प्रदान कि गई है। जैसे कि जब आवेश गति की अवस्था में होते हैं तो इस गति से सम्बन्धित विद्युत् और चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न होते हैं, जो स्थान और समय के साथ परिवर्तित होते हैं। इस घटना को विद्युत्-चुम्बकत्व कहते हैं। इस इकाई में समय पर निर्भर करने वाले विद्युत्-चुम्बकीय क्षेत्रों से सम्बन्धित मौलिक नियमों को गणितीय रूप में व्यक्त किया है; जिन्हें मैक्सवेल के समीकरण कहते हैं। विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों में निहित ऊर्जा घनत्व अर्थात् पोयन्टिंग वेक्टर के लिए व्यंजक निगमन किया। अन्त में विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों के परावर्तन, अपवर्तन, ध्रुवण, पूर्ण आन्तरिक परावर्तन, फ़ैराडे प्रभाव तथा आयनमण्डल से इनके परावर्तक एवं अपवर्तन की विस्तृत विवेचना की गई है।

टिप्पणी

5.28 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- विद्युत्-चुम्बकीय प्रेरण
- स्व-प्रेरण
- अन्योन्य प्रेरण
- ट्रान्सफॉर्मर (परिणामित्र)
- विद्युत्-चुम्बकीय तरंग
- परावर्तन
- अपवर्तन
- फ़ैराडे प्रभाव
- क्रांतिक आवृत्ति

5.29 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. विद्युत्-चुम्बकीय प्रेरण सम्बन्धी फ़ैराडे के नियम लिखिये।
2. फ़ैराडे के विद्युत्-चुम्बकीय प्रेरण का समाकल तथा अवकल रूप लिखिये।
3. स्व-प्रेरण क्या है?
4. स्व-प्रेरकत्व क्या है?
5. स्व-प्रेरकत्व तथा अन्योन्य प्रेरकत्व का S.I. मात्रक क्या होता है?
6. अन्योन्य प्रेरण किसे कहते हैं?

टिप्पणी

7. ट्रान्सफॉर्मर क्या है?
8. ट्रान्सफॉर्मर कितने प्रकार के होते हैं?
9. ऑटो-ट्रान्सफॉर्मर किसे कहते हैं?
10. ट्रान्सफॉर्मर में ऊर्जा हानियाँ क्या हैं?
11. ट्रान्सफॉर्मर के तीन उपयोग लिखिये।
12. धारा घनत्व क्या है?
13. आवेश एवं धारा के लिये सातत्य समीकरण क्या है? स्थायी धारा के लिये सातत्य समीकरण क्या होगा?
14. ऐम्पियर का परिपथीय नियम किस परिस्थिति के लिये असंगत होता है? मैक्सवेल ने इसमें क्या संशोधन प्रस्तुत किये?
15. विस्थापन धारा घनत्व क्या है?
16. पोयटिंग सदिश क्या है?
17. निर्वात में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग की चाल के लिये सूत्र क्या है?
18. परावैद्युत माध्यम में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग की चाल के लिए सूत्र क्या है?
19. समतल विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में विद्युत् क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र में क्या सम्बन्ध होता है?
20. मैक्सवेल के चार विद्युत्-चुम्बकीय समीकरणों को लिखिए।
21. परावैद्युत माध्यम में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग का वेग किन-किन कारकों पर निर्भर करता है?
22. निर्वात में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग किस वेग से संचरित होता है?
23. परावैद्युत माध्यम में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के समीकरण लिखिये।
24. विद्युत् सदिश \vec{E} तथा चुम्बकीय सदिश \vec{B} में सम्बन्ध बताइये।
25. विद्युत्-चुम्बकीय तरंग अनुदैर्घ्य होता है या अनुप्रस्थ?
26. पोयटिंग सदिश क्या है?
27. पोयटिंग सदिश का मात्रक तथा विमीय सूत्र क्या है?
28. यदि किसी अपवर्तक पृष्ठ में आपतित, अपवर्तित तथा परावर्तित विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के आयाम क्रमशः E_{OI} , E_{OT} तथा E_{OR} हों, तो उसकी परावर्तकता तथा पारगम्यता का सूत्र बताइये।
29. आयन मण्डल में धारा घनत्व का सूत्र लिखिए।
30. मुक्त इलेक्ट्रॉन युक्त आयनित माध्यम के अपवर्तनांक n तथा विद्युत्-चुम्बकीय तरंग के आवृत्ति f में क्या सम्बन्ध है?
31. सीकेण्ट नियम क्या है?
32. मूक अन्तराल क्या है?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

टिप्पणी

1. विद्युत चुम्बकीय प्रेरण क्या है? विद्युत चुम्बकीय प्रेरण के लिए फ़ैराडे के नियमों का उल्लेख कीजिए तथा उन्हें समझाइये।
2. फ़ैराडे के विद्युत चुम्बकीय प्रेरण का नियम बताइये तथा सिद्ध कीजिए कि—

$$\text{curl } \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad |$$
3. स्व-प्रेरण एवं स्व-प्रेरण गुणांक किसे कहते हैं? किसी परिनालिका के स्वप्रेरण गुणांक के लिए व्यंजक स्थापित कीजिए।
4. अन्योन्य प्रेरण तथा अन्योन्य प्रेरण गुणांक किसे कहते हैं? दो कुण्डलियों के बीच अन्योन्य प्रेरण गुणांक के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिए।
5. ट्रान्सफॉर्मर की कार्य-विधि लिखिए तथा समझाइए कि उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर धारा की प्रबलता को कम कर देता है।
6. उच्चायी तथा अपचायी ट्रान्सफॉर्मर का नामांकित आरेख खींचकर इनकी संरचना में अन्तर लिखिए।
7. ट्रान्सफॉर्मर की कार्य-विधि एवं सिद्धान्त को नामांकित चित्र द्वारा समझाइए। ट्रान्सफॉर्मर में किन-किन कारणों से ऊर्जा क्षय होती है, तथा उन्हें किस प्रकार कम किया जा सकता है?
8. स्थायी धारा के लिए सातत्य समीकरण ज्ञात कीजिए।
9. मैक्सवेल समीकरणों की सहायता से समय के साथ परिवर्ती धारा वितरण के लिए सातत्य समीकरण $\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ सिद्ध कीजिए।
10. सिद्ध कीजिए कि $\text{curl } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ जहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।
11. स्थिर चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} में संचित ऊर्जा का व्यंजक निर्गमित कीजिए।
12. विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र के लिये मैक्सवेल के समीकरणों को लिखिए व सिद्ध कीजिए। विभिन्न पदों की व्याख्या कीजिए तथा इन समीकरणों का तात्पर्य समझाइए।
13. समय के साथ परिवर्तनीय विद्युत व चुम्बकीय क्षेत्र में विस्थापन धारा घनत्व की अभिधारणा समझाइए। सिद्ध कीजिए कि विस्थापन धारा घनत्व $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ।
14. सिद्ध करो कि समय के साथ परिवर्ती विद्युत क्षेत्र \vec{E} में उत्पन्न चुम्बकीय क्षेत्र \vec{B} के लिए $\text{curl } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं।

टिप्पणी

15. फ़ैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण सम्बन्धी नियम लिखिए तथा इस नियम का समाकलन एवं अवकलन रूप ज्ञात कीजिए।
16. मैक्सवेल के समीकरणों को लिखिए तथा निर्गमित कीजिए।
17. सिद्ध कीजिए—
(i) $\text{div} \vec{B} = 0$ (ii) $\text{curl} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
18. निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों में \vec{E} तथा \vec{B} के लिए तरंग समीकरण निर्गमित कीजिए तथा सिद्ध करो कि निर्वात में तरंगों के गमन की चाल $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ होती है।
19. सिद्ध कीजिए कि विद्युत-चुम्बकीय तरंग संचरण में ऊर्जा संरक्षित रहती है।
20. निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करो—
(i) $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
(ii) $\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$
तथा सिद्ध करो कि निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का वेग $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ होता है।
21. समदैशिक परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल के समीकरण लिखिए तथा इन्हें निर्गमित कीजिए।
22. सिद्ध कीजिए कि समदैशिक कुचालक माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंग की चाल, निर्वात में चाल की अपेक्षा कम होती है।
23. विद्युत-चुम्बकीय क्षेत्र में ऊर्जा फ्लक्स के प्रवाह की दर के लिए व्यंजक की स्थापना कीजिए। इस सन्दर्भ में पोयन्टिंग वेक्टर की परिभाषा दीजिए तथा उसकी विमायें ज्ञात कीजिए।
24. पोयन्टिंग वेक्टर की गणितीय परिभाषा दीजिए एवं एक रेखीय समदैशिक तथा समांगी माध्यम में सिद्ध करो कि यह विद्युत् चुम्बकीय तरंग में प्रति एकांक क्षेत्र से प्रवाहित शक्ति के तात्क्षणिक मान के बराबर होता है।
25. पोयन्टिंग वेक्टर क्या है? इसका महत्व समझाइये। यदि \vec{S} पोयन्टिंग वेक्टर है तो सिद्ध करो कि $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$ जहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।
26. आयनमण्डल क्या है? आयनमण्डल की विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों के परावर्तन व अपवर्तन में भूमिका समझाइये।

27. पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र की अनुपस्थिति में विद्युत् चुम्बकीय तरंगों के लिए आयनमण्डल की विद्युतशीलता एवं अपवर्तनांक का व्यंजक स्थापित कीजिए।
28. आयनमण्डल किस प्रकार विद्युत् चुम्बकीय तरंगों के संचरण को प्रभावित करता है? विस्तृत रूप में समझाइए।
29. आयनमण्डल क्या है? यदि पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव तथा क्षेत्र आयनमण्डल में उदासीन कणों से टक्कर नगण्य है, तो सिद्ध कीजिये कि आयनमण्डल एक ऐसे माध्यम की भाँति व्यवहार करता है जिसका अपवर्तनांक n निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है—

$$n = \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{81N}{f^2}\right)^{1/2}$$

जहाँ, N इलेक्ट्रॉन घनत्व तथा f विद्युत्-चुम्बकीय तरंग की आवृत्ति है।

30. चुम्बकीय क्षेत्र की अनुपस्थिति में विद्युत्-चुम्बकीय तरंगों के परावर्तन में आयनमण्डल की भूमिका पर प्रकाश डालिये तथा सिद्ध करो कि मुक्त आकाश में N प्रति मीटर³ आयन समावेशित कराने से माध्यम विद्युतशीलता में $Ne^2/m\omega^2$ की कमी आ जाती है, जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं।
31. विद्युत् चुम्बकीय तरंगों के परावर्तन में आयनमण्डल की भूमिका समझाइये तथा सिद्ध करो कि $f_c = 9\sqrt{N_m}$, जहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।
32. परावर्तन द्वारा ध्रुवण एवं पूर्ण आन्तरिक परावर्तन द्वारा ध्रुवण समझाइये।
33. आयनमण्डल के अपवर्तनांक का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए तथा इसकी सहायता से तरंग प्रसारण की व्याख्या कीजिए।

आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

- 100 सेमी² क्षेत्रफल और 500 फेरों वाली एक कुण्डली 0.1 वेबर/मी² के चुम्बकीय क्षेत्र के लम्बवत् रखी है। यदि चुम्बकीय क्षेत्र का मान 0.1 सेकण्ड में घटकर शून्य हो जाये तो कुण्डली में प्रेरित विद्युत वाहक बल का मान ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 5 वोल्ट]
- एक कुण्डली से गुजरने वाले चुम्बकीय फ्लक्स का मान 0.1 सेकण्ड में 1 वेबर से 0.1 वेबर हो जाता है तो प्रेरित विद्युत वाहक बल का मान बताइए। [उत्तर— 9 वोल्ट]
- 50 फेरों वाली एक कुण्डली से सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स 1 सेकण्ड में 0.3 वेबर से घटकर शून्य रह जाता है। कुण्डली के सिरों पर प्रेरित विभवान्तर का मान ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 15 वोल्ट]
- एक 10 हेनरी के प्रेरकत्व में 2 ऐम्पियर की समान धारा बँटती है। 100 वोल्ट का प्रेरित वि. वा. बल उत्पन्न करने के लिए धारा परिवर्तन की दर क्या होगी?

टिप्पणी

5. एक प्रेरकत्व कुण्डली में 0.3 सेकण्ड में धारा शून्य से बढ़कर 6 ऐम्पियर हो जाती है जिससे उसमें 30 वोल्ट का प्रेरित वि. वा. बल उत्पन्न होता है। कुण्डली के स्वप्रेरण गुणांक की गणना कीजिए। [उत्तर— 1.5 हेनरी]
6. 800 फेरों वाली एक कुण्डली में 1.5 ऐम्पियर धारा प्रवाहित करने पर उससे सम्बद्ध चुम्बकीय फ्लक्स का मान 1.5×10^{-5} वेबर है। कुण्डली का स्व-प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 8 मिली-हेनरी]
7. यदि प्राथमिक कुण्डली में बहने वाली 30 ऐम्पियर धारा को 0.001 सेकण्ड में शून्य कर दिया जाये तो द्वितीयक कुण्डली में उत्पन्न प्रेरित वि. वा. बल 15,000 वोल्ट होता है। इन कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व ज्ञात करो। [उत्तर— 0.5 हेनरी]
8. यदि प्राथमिक कुण्डली में 1.0 ऐम्पियर प्रति सेकण्ड की दर से धारा बदलने पर द्वितीयक कुण्डली में 0.01 वोल्ट वि. वा. बल प्रेरित होता है तो इन कुण्डलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए। [उत्तर— 0.01 हेनरी]
9. ट्रान्सफॉर्मर की द्वितीयक कुण्डली में चक्करों की संख्या, प्राथमिक कुण्डली में चक्करों की संख्या की 200 गुनी है। इस ट्रान्सफॉर्मर का परिणमन अनुपात क्या होगा? [उत्तर— 200]
10. एक ट्रान्सफॉर्मर की प्राथमिक कुण्डली में चक्करों की संख्या, द्वितीयक कुण्डली में चक्करों की संख्या की 50 गुनी है। प्राथमिक कुण्डली पर 300 वोल्ट का प्रत्यावर्ती विभवान्तर आरोपित करने से द्वितीयक कुण्डली में कितना विभवान्तर प्राप्त होगा? [उत्तर— 6 वोल्ट]
11. एक उच्चायी ट्रान्सफॉर्मर की प्राथमिक तथा द्वितीयक कुण्डली में फेरों की संख्या का अनुपात 1 : 10 है। यदि इसे 220 वोल्ट की मेन लाइन से जोड़ दें, जिसमें 5 ऐम्पियर धारा बहती है तो द्वितीयक कुण्डली में प्राप्त वि. वा. बल एवं प्रेरित विद्युत धारा क गणना करो। [उत्तर— 2200 वोल्ट, 0.5 ऐम्पियर]
12. एक रेडियो ट्रान्समीटर द्वारा प्रति सेकण्ड विकिरित ऊर्जा 100 वाट है। 45 किमी. की दूरी पर पोयन्टिंग सदिश के मान की गणना कीजिए। [उत्तर— 3.93×10^{-9} वाट/मीटर²]
13. समान्तर प्लेट संधारित्र पर आवेश $f = f_0 \sin 2\pi nt$ दिया जाता है। विस्थापन धारा की गणना कीजिए। [उत्तर— $2\pi n f_0 \cos 2\pi nt$]
14. 10 सेमी. त्रिज्या की दो प्लेटों को 3.14 सेमी. की दूरी पर रखकर एक संधारित्र बनाया जाता है। 0.2 ऐम्पियर धारा देने वाले स्रोत से संधारित्र को आवेशित किया जाता है।
 - (i) प्लेटों के बीच विभव परिवर्तन की दर क्या होगी?
 - (ii) प्लेटों के बीच विस्थापन धारा क्या होगी?
 [उत्तर— (i) 2.26×10^{10} वोल्ट/सेकण्ड, (ii) 0.2 ऐम्पियर]

15. निर्वात में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग का ऊर्जा घनत्व 6.6×10^{-7} जूल/मीटर³ है, तो विद्युत् क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिये।

$$[\text{उत्तर} - E = 270 \text{ वोल्ट/मीटर}, B = 9 \times 10^{-2} \text{ टेसला}]$$

16. मुक्त आकाश (निर्वात) में संचरित समतल विद्युत्-चुम्बकीय तरंग में चुम्बकीय क्षेत्र का मान। ऐम्पियर/मीटर है, तो विद्युत् क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिये।

$$[\text{उत्तर} - 376.6 \text{ वोल्ट/मीटर}]$$

17. एक रेडियो ट्रान्समीटर द्वारा प्रति सेकण्ड विकिरित ऊर्जा 50 वाट है। 12 किलोमीटर की दूरी पर पोयन्टिंग सदिश के मान की गणना कीजिये।

18. पृथ्वी पर सूर्य के प्रकाश की तीव्रता 2.0 कैलोरी/सेमी²-मिनट है। सूर्य के प्रकाश के लिये \vec{E} तथा \vec{B} के शिखर मान ज्ञात कीजिए।

$$[\text{उत्तर} - E_0 = 1020 \text{ वोल्ट/मीटर}, B_0 = 3.4 \times 10^0 \text{ वेबर/मीटर}^2]$$

19. 103 वाट सामर्थ्य के बिन्दु स्रोत से एक प्रेक्षक की दूरी 1 मीटर है। प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित विद्युत् तथा चुम्बकीय क्षेत्रों की गणना कीजिए।

$$[\text{संकेत} - \text{पोयन्टिंग सदिश का औसत मान} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 C} = \frac{P_0}{4\pi R^2} \text{ तथा}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{C}]$$

$$[\text{उत्तर} - E_0 = 24.95 \text{ वोल्ट/मीटर}, B_0 = 8.16 \times 10^{-7} \text{ वेबर/मीटर}^2]$$

20. एक चालक तार की लम्बाई L व त्रिज्या R है। इसके सिरों पर विभवान्तर V लगाने पर इसमें धारा I प्रवाहित होती है। पोयन्टिंग सदिश का मान ज्ञात कीजिए तथा तार को प्रति सेकण्ड दी गई ऊर्जा की गणना कीजिए।

$$[\text{संकेत} - E = \frac{V}{L}, H = \frac{I}{2\pi R} \therefore \text{पोयन्टिंग सदिश } |\vec{P}| = EH]$$

$$[\text{उत्तर} - \text{पोयन्टिंग सदिश} = \frac{VI}{2\pi RL},$$

$$\text{तार को प्रति सेकण्ड दी गई ऊर्जा} = VI]$$

21. सूर्य से पृथ्वी पर 8 कैलोरी प्रति मिनट प्रति सेमी² ऊर्जा आपतित होती है। विकिरण का विद्युत् क्षेत्र एवं चुम्बकीय क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

$$[\text{उत्तर} - E = 1452.2 \text{ वोल्ट/मीटर}, H = 7.712 \text{ ऐम्पियर-फेरा/मीटर}]$$

22. निर्वात में विद्युत्-चुम्बकीय तरंग का ऊर्जा घनत्व 6.6×10^{-7} जूल/मीटर³ है, तो विद्युत् क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

$$[\text{उत्तर} - E = 270 \text{ वोल्ट/मीटर}, B = 9 \times 10^{-2} \text{ टेसला}]$$

टिप्पणी

टिप्पणी

23. निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंग में चुम्बकीय क्षेत्र का मान 1 ऐम्पियर प्रति मीटर है, तो विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर – 376.6 वोल्ट/मीटर]

24. यदि आयनमण्डल के किसी पर्त का इलेक्ट्रॉन घनत्व 10^{11} इलेक्ट्रॉन प्रति आयतन है तो 8 मेगा हर्ट्ज आवृत्ति की तरंग से आयनमण्डल के परावैद्युतांक में कितनी कमी हो जायेगी? दिया है कि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9×10^{-31} किग्रा, इलेक्ट्रॉन का आवेश 1.6×10^{-19} कूलॉम।

[उत्तर – 1.12×10^{-12}]

25. यदि आयनमण्डल में किसी समय इलेक्ट्रॉन का घनत्व 10^{12} इलेक्ट्रॉन/आयतन है, तो बताइये कि 45° पर आपतित तरंग की आवृत्ति कितनी होनी चाहिए कि वह पूर्ण परिवर्तित हो सके?

[उत्तर – 12.6 मेगा हर्ट्ज]

5.30 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. Berkley Physics Course, Electricity and Magnetism Ed. E. M. Purcell McGraw Hill.
2. Physics Volume 2, D. Halliday and R. Resnick
3. Introduction to Electrodynamics: D.J. Griffiths, 4th Edition, Prentice Hall.
4. Electricity and Magnetism: S.S. Atwood Dover.
5. Electrodynamics: Emi Cossor and Bassin Lorraine, Asahi Shimbunsha Publishing Ltd.
6. From Neuron to Brain: Kuffler and Nicholas, Sinauer Associates, Inc Pub. Sunderlan Massachuestts.
7. Schaums Outline of Begining Physics II: Electricity and Magnetism.