बी.एस.सी., तृतीय वर्ष

गणित, तृतीय प्रश्नपत्र

(ऐच्छिक–B)

विविक्त गणित

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

COURSE WRITERS

N Ch S N Iyengar, Professor, Deptt of Computer Applications, Vellore Institute of Technology, Vellore
V M Chandrasekaran, Asstt Professor, Deptt of Mathematics, Vellore Institute of Technology, Vellore
K A Venkatesh, Head Deptt of Computer Applications, Alliance Business Academy, Bangalore
P S Arunachalam, Senior Lecturer, Department of Mathematics, SRM Engineering College, Chennai
Units (1-5)

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

विविक्त गणित

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 बूलीयन फलन–वियोजनीय एवं संयोजनीय प्रसामान्य रूप (केनोनिकल एवं डूअल केनोनिकल), बूले का विस्तार प्रमेय। संबंध–द्विचर संबंध, प्रतिलोम संबंध, संयोजित संबंध, तुल्यता संबंध, तुल्यता वर्ग एवं उसके गुण, समुच्चय का विभाजन।	**इकाई 1** : बूलियन फलन **(पृष्ठ 3–64)**
इकाई–2 आंशिकः क्रम संबंध, आंशिक क्रमित समुच्चय, पूर्णतः क्रमित समुच्चय, हैसे आरेख, उच्चिष्ठ एवं निमनिष्ठ अवयव, प्रथम एवं अन्तिम अवयव, जालक–परिभाषा एवं उदाहरण, द्वैत जालक, परिबद्ध जालक, वितरणीय जालक, पूरक जालक।	**इकाई 2** : आंशिक क्रम संबंध और जालक **(पृष्ठ 65–84)**
इकाई–3 आलेख–परिभाषा एवं प्रकार, उप आलेख, गमन, पथ एवं परिपथ, संबद्ध एवं असंबद्ध ग्राफ, यूलर ग्राफ, हेमिल्टोनियन पथ और परिपथ, भारित आलेख में लघुत्तम पथ हेतु डिजक्सत्रा एल्गोरीथम।	**इकाई 3** : आलेख **(पृष्ठ 85–116)**
इकाई–4 वृक्ष एवं उसके गुण, नियत वृक्ष, द्विवचर वृक्ष, जनक वृक्ष, आलेख की रैंक या स्थिति एवं शून्यता, कुस्कल एवं प्राइम की एल्गोरीथम।	**इकाई 4** : वृक्ष (ट्री) एवं उनके गुण **(पृष्ठ 117–140)**
इकाई–5 आलेख का आव्यूह निरूपण, इन्सीडेंस एवं एडजेन्सी आव्यूह, कटसेट्स एवं उसके प्रगुण, प्लानर आलेख (परिभाषा), कुर्टोवस्की के द्विआलेख।	**इकाई 5** : आलेख का आव्यूह निरुपण **(पृष्ठ 141–162)**

विषय–सूची

परिचय

टिप्पणी

विविक्त या असतत गणित (Discrete Mathematics) उन गणितीय संरचनाओं का अध्ययन है जो निरंतर होने के बजाय मौलिक रूप से विविक्त या असतत हैं। वास्तविक संख्याओं के विपरीत, जिसमें सुचारू रूप से भिन्न होने का गुण होता है, विविक्त या असतत गणित में अध्ययन की जाने वाले विषय – जैसे पूर्णांक, रेखांकन और तर्क में कथन – इस तरह से सुचारू रूप से नहीं बदलती हैं, बल्कि अलग, अलग मान रखती हैं। विविक्त या असतत गणित इसलिए निरंतर गणित जैसे कलन (Calculus) या यूक्लिडियन ज्यामिति (Euclidean Geometry) में विषयों को शामिल नहीं करता है। विविक्त या असतत वस्तुओं को अक्सर पूर्णांकों द्वारा गणना की जा सकती है। औपचारिक रूप से, विविक्त या असतत गणित को गणनीय सेट या समुच्चय (प्राकृतिक संख्याओं के समान कार्डिनैलिटी के साथ परिमित सेट या समुच्चय) से गणित के समाधान की शाखा के रूप में चित्रित किया गया है। हालांकि, विविक्त गणित शब्द की कोई सटीक परिभाषा नहीं है। दरअसल, विविक्त गणित को इस बात से कम वर्णित किया जाता है कि इसमें क्या शामिल है, निरंतर मात्रा और संबंधित धारणा।

विविक्त गणित में अध्ययन की गई वस्तुओं का समूह परिमित या अनंत हो सकता है। शब्द परिमित गणित को कभी–कभी विविक्त गणित के क्षेत्र में उन भागों पर प्रयोग किया जाता है जो परिमित सेटों या समुच्चयों से संबंधित होते हैं, विशेष रूप से व्यवसाय के लिए प्रासंगिक क्षेत्र। हालांकि विविक्त गणित में अध्ययन के मुख्य विषय विविक्त या असतत वस्तुएं हैं, लेकिन निरंतर गणित की विश्लेषणात्मक विधियों को भी अक्सर नियोजित किया जाता है।

विविक्त गणित के कई क्षेत्र, विशेष रूप से सैद्धांतिक कंप्यूटर विज्ञान, आलेख या ग्राफ सिद्धांत और कॉम्बिनेटोरिक्स (Combinatorics) जीवन वृक्ष को समझने के साथ जुड़े चुनौतीपूर्ण जैव सूचना विज्ञान समस्याओं को संबोधित करने में महत्वपूर्ण हैं। सेट या समुच्चय सिद्धांत गणित की वह शाखा है जिसका अध्ययन सेट या समुच्चय करता है, जो वस्तुओं का संग्रह है, जैसे कि {नीला, सफेद, लाल} या (प्राइमरी) सभी अभाज्य संख्याओं का सेट या समुच्चय। आंशिक रूप से आदेशित सेट या समुच्चय और अन्य संबंधों के साथ सेट या समुच्चय के कई क्षेत्रों में अनुप्रयोग हैं।

विविक्त गणित में, गणनीय सेट या समुच्चय (परिमित सेट या समुच्चय सहित) मुख्य केंद्र बिंदु हैं। गणित की एक शाखा के रूप में सेट या समुच्चय सिद्धांत की शुरुआत आमतौर पर जॉर्ज कैंटर (Georg Cantor) के काम को विभिन्न प्रकार के अनंत सेटों या समुच्चयों के बीच भेद करके चिह्नित किया जाता है, जो त्रिकोणमितीय श्रृंखला (Trigonometric Series) के अध्ययन से प्रेरित है, और अनंत सेटों या समुच्चयों के सिद्धांत का आगे का विकास विविक्त गणित के दायरे से बाहर है। वास्तव में, वर्णनात्मक सेट या समुच्चय सिद्धांत में समकालीन तथा पारंपरिक निरंतर गणित का व्यापक उपयोग करता है।

टिप्पणी

आलेख या ग्राफ सिद्धांत, ग्राफ और नेटवर्क का अध्ययन, अक्सर कॉम्बीनेटोरिक्स का भाग माना जाता है जो रेखांकन असतत गणित में अध्ययन की प्रमुख शाखाओं में से एक है। वे प्राकृतिक और मानव निर्मित दोनों संरचनाओं के सबसे सर्वव्यापी मॉडल में से हैं। वे कई प्रकार के संबंधों को मॉडल कर सकते हैं और भौतिक, जैविक और सामाजिक प्रणालियों में गतिशीलता की प्रक्रिया का वर्णन कर सकते हैं। कंप्यूटर विज्ञान में, वे संचार, डेटा संगठन, कम्प्यूटेशनल उपकरणों, कम्प्यूटेशन के प्रवाह आदि के नेटवर्क का प्रतिनिधित्व कर सकते हैं। गणित में, वे ज्यामिति और टोपोलॉजी के कुछ विषयों में उपयोगी हैं, उदाहरण के लिए गाँठ (Knot) सिद्धांत। बीजगणितीय ग्राफ सिद्धांत में समूह सिद्धांत के साथ घनिष्ठ संबंध हैं। लगातार ग्राफ भी हैं; हालांकि, अधिकांश भाग के लिए, आलेख या ग्राफ सिद्धांत में अनुसंधान विविक्त गणित के क्षेत्र में आता है।

इकाई एक में बूलियन फलन का उदाहरण सहित विश्लेषण किया गया है।

इकाई दो में आंशिक क्रम संबंध और जालक का विस्तार से वर्णन है।

इकाई तीन में आलेख के विषय में वर्णन किया गया है।

इकाई चार में वृक्ष (ट्री) एवं उनके गुणों को उदाहरण सहित समझाया गया है।

इकाई पांच में आलेख के आव्यूह निरुपण के विषय में विस्तार से वर्णन किया गया है।

इस पुस्तक 'विविक्त गणित' को एक सरल पुस्तक के रूप में व्यवस्थित किया गया है जिसमें विविक्त गणित की मूल अवधारणाओं का विस्तार से वर्णन किया गया है। पुस्तक में स्वाध्याय प्रणाली का प्रयोग किया गया है, जिसमें प्रत्येक इकाई का आरंभ उस इकाई के परिचय से होता है, तत्पश्चात इकाई के उद्देश्य आते हैं। पाठ के बीच–बीच में अपनी प्रगति जांचिए के प्रश्न समाविष्ट किये गए हैं। प्रभावी पुनर्कथन के लिये प्रत्येक पाठ के अंत में सारांश, मुख्य शब्दावली और स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास दिए गए हैं।

हमें विश्वास है कि यह पुस्तक विषय के सांगोपांग अध्ययन में विद्यार्थियों के लिये उपयोगी साबित होगी।

टिप्पणी

इकाई 1 बूलियन फलन

संरचना

1.0 परिचय

गणित और तर्क में, बूलियन फंक्शन या फलन एक फंक्शन है जिसके तर्क, साथ ही फंक्शन या फलन स्वयं दो–तत्व सेट (समुच्चय) (आमतौर पर {0, 1} से मान लेते हैं परिणामस्वरूप, इसे कभी–कभी 'स्विचिंग फंक्शन' के रूप में संदर्भित किया जाता है। बूलियन बीजगणित द्विआधारी चर और तर्क संचालन से संबंधित है। बूलियन फलन का वर्णन एक बीजीय अभिव्यक्ति द्वारा किया जाता है जिसे बूलियन अभिव्यक्ति कहा जाता है। जिसमें द्विआधारी चर होते हैं सेट X और Y के बीच एक द्विआधारी संबंध कार्टेशियन गुणन $X\times Y$ का सबसेट (उपसमुच्चय) है, अर्थात, X में x और Y में y तत्व x से मिलकर क्रमबद्ध युग्म या जोड़े (x, y) का एक सेट है। यह संबंध की जानकारी को एन्कोड करता है। यदि और केवल यदि युग्म या जोड़ी (x, y) सेट के अंतर्गत आता है तो एक तत्व x एक तत्व y से संबंधित होता है। एक सेट का एक विभाजन इसके तत्वों का एक समूह है जो गैर–रिक्त उपसमुच्चय में है, इस तरह से कि प्रत्येक तत्व वास्तव में उपसमुच्चय में उवस्थित है। एक सेट पर प्रत्येक समानता संबंध इस सेट के एक विभाजन को परिभाषित करता है, और प्रत्येक विभाजन एक समानता संबंध को परिभाषित करता है।

इस इकाई में आप बूलियन फलन, वियोजनीय एवं संयोजनीय सामान्य रूप, संबंध द्विआधारी संबंध, द्विआधारी संबंधों के गुण, संबंधों का समापन तथा व्युत्क्रम संबंध और संयुक्त संबंध का अध्ययन करेंगे।

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

टिप्पणी

- बूलियन फलन का वर्णन कर पाएंगे;
- वियोजनीय और संयोजनीय सामान्य रूपों की व्यवस्था कर पाएंगे;
- संबंध की व्याख्या कर पाएंगे;
- द्विआधारी संबंधी एवं गुणों का वर्णन कर पाएंगे;
- व्युत्क्रम संबंध और संयुक्त संबंध को समझ पाएंगे।

1.2 बूलियन फलन

मान लीजिए कि एक अरिक्त समुच्चय B में दो द्विआधारी या द्विआधारी (Binary) संक्रिया (Opertions) + (या $\vee$) और, (या $\wedge$), एकल (Unary) संक्रिया और दो अलग–अलग अवयवों 0 और 1 है, तब B को बूलियन बीजगणित कहा जाता है। यदि निम्नलिखित सिद्धांत का पालन किया जाता है जहां, B में a, b, c कोई अवयव हैं।

(*i*) $a + b = b + a$; $a \,.\, b = b \,.\, a$ (क्रम विनिमय नियम) (Commutative Laws)

(*ii*) $a + (b \,.\, c) = (a + b).(a + c)$; $a.(b + c) = (a \,.\, b)\,(a \,.\, c)$ (वितरक नियम) (Distributive Laws)

(*iii*) $a + 0 = a$; $a \,.1 = a$ (ततस्मक नियम) (Identity Laws)

(*iv*) $a + a' = 1$; $a \,.\, a' = 0$ (पूरक नियम) (Complement Laws)

नोट्स

1. बूलियन बीजगणित एक जालक है जिसमें सबसे छोटा और सबसे बड़ा अवयव (Element) होते है और दोनों एक दुसरे के पूरक और वितरक (साहचर्य) होते हैं।
2. हम बूलियन बीजगणित B को $(B, +, ., ', 0, 1)$ से दर्शाते हैं। यहां हम 0 को शून्य अवयव कहते हैं, 1 को इकाई अवयव, और a' को a का पूरक और, + और . को योग और गुणन कहते हैं।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $B = \{0,1\}$ है, और द्विआधारी अंकों के समुच्चय को द्विआधारी संक्रियों + और . और एक एकल संक्रिया ′ से निम्नलिखित तलिकाओं के अनुसार परिभाषित किया गया है।

+	1	0
1	1	1
0	1	0

.	1	0
1	1	0
0	0	0

′	1	0
	0	1

तब B एक बूलियन बीजगणित होता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ अर्थात 70 के धनात्मक पूर्णांक भाजकों का समुच्चय है। +,. को परिभाषित करें और B को $a + b = \text{lcm}\,(a, b)$, $a\,.b = \text{gcd}\,(a, b), a', b', 1, 70$.

तब B, 1 शून्य अवयव और 70 इकाई (Unit) अवयव के साथ एक बूलियन बीजगणित होता है।

उदाहरण के लिए,मान लीजिए कि B एक संघ, (*Union*) सर्वनिष्ठ और पूरक के समुच्चय संक्रिया के तहत बंद समुच्चय का एक संग्रह है। तब B एक बुलियन बीजगणित होगा जिसमें रिक्त समुच्चय ϕ शून्य अवयव और सार्वभौमिक समुच्चय U में यूनिट या इकाई अवयव होगा।

उप बीजगणित (Sub Algebra): मान लीजिए कि C बूलियन बीजगणित B का एक गैर–रिक्त उप समुच्चय है। तब हम कह सकते हैं कि C, B का उप बीजगणित होगा, अगर B की संक्रियों के सापेक्ष में C भी अपने आप मे बूलियन बीजगणित हो।

नोट : यहाँ C, B का उप बीजगणित होगा यदि और केवल यदि जब C, B की तीनों संक्रियों $+, ., '$, के अंतर्गत बंद हो।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $C = \{1, 2, 3, 35, 70\}$ है। तब C, $B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$, अर्थात 70 के धनात्मक पूर्णांक भाजकों (Divisions) का समुच्चय, का उप बीजगणित होगा।

समतुल्य (Isomorphic) : दो बूलियन बीजगणित B और $\bar{\mathrm{B}}$ को समतुल्य कहा जाता है यदि $f: B \to \bar{\mathrm{B}}$ होता है–

(*i*) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(*ii*) $f(a.\, b) = f(a)\, .\, f(b)$

(*iii*) $f(a') = f(a))'$ कोई भी $a, b, \in B$ के लिए

द्वैतता (Duality) : बूलियन बीजगणित B में कोई भी कथन द्वैत कथन होता है अगर संक्रियों $+, ., '$, और मूल कथन में उनके ततस्मक अवयवों 0 और 1 को आपस में बदलकर प्राप्त किया गया हो।

उदाहरण 1.1: निम्नलिखित कथनों का द्वैतता या दोहराव (Dual) लिखें।

(*i*) $(0.\, a) + (b\, .\, 1) = b$

(*ii*) $(a + 0) + (1 + a') = 1$

(*iii*) $a.(a' + b) = a.b$

हल :

(*i*) $(1 + a)\, .\, (b + 0) = b$

(*ii*) $(a + 1) + (0 + a') = 0$

(*iii*) $a + (a'.b) = a + b.$

मूल बूलियन बीजगणित नियम (Basic Boolean Algebra Laws)

मन लीजिए कि बीजगणित B में कोई a, b, c अवयवों हैं।

(*i*) $a + b = b + a$; $a\, .\, b = b\, .\, a$ (क्रम विनिमय नियम या Commutative Law)

(*ii*) $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a\, .\, (b\, .\, c) = (a\, .\, b)\, .c$ (साहचर्य नियम या Associative Law)

टिप्पणी

(*iii*) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c); a+(b.c) = (a+b).(a+c)$ (वितरक नियम या Distributive law)

(*iv*) $a + 0 = 0 + a = a$; $a . 1 = 1 . a = a$ (ततस्मक नियम या Identity Law)

(*v*) $a + \bar{a} = 1$; $\bar{a} . \bar{a} = 0$ (पूरक नियम या Complement Law)

(*vi*) $a + a = a$; $a . a = a$ (वर्गसम नियम या Idempotent Law)

(*vii*) $a + 1 = 1$; $a . 0 = 0$ (शून्य नियम या Null Law)

(*viii*) $a + (a . b) = a$; $a . (a + b) = a$ (अवशोषण नियम या Absorption Law)

(*ix*) $(a+b)' = a'.b'$; $(a+b)' = a' + b'$ (डी मॉर्गन नियम या De Morgan's Law)

(*x*) $(a')' = a$ (अन्तवर्लन नियम या Involution law)

नोट: यदि $a + x = 1$ और $a . x = 0$ तो $x = a'$ होगा। इसलिए, $0' = 1$ और $1' = 0$ होगा।

अणु (Atom) : बीजगणित $(B,+,.,')$ में एक शून्येतर अवयव '*a*' को अणु (Atom) कहा जाता है। अगर प्रत्येक $x \in B$ के लिए, $x \wedge a = a$ या $x \wedge a = 0$ होता है।

नोट: यहाँ $x \wedge a = a$ का अर्थ है कि a के बाद x आएगा और $x \wedge a = 0$ केवल तभी सत्य होगा जब x और a जुड़े हुए नहीं होंगे'। तो, किसी भी बूलियन बीजगणित में, 0–अवयव के तत्काल बाद के अवयव को अणु (Atom) कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, A कोई भी अरिक्त समुच्चय और $P(A)$ A का घात (पावर) समुच्चय है। बूलियन बीजगणित मे $\subseteq$ के उपर $(p(A), \cup, \cap, ')$, सिंगलटन समुच्चय अणु (Atom) होते हैं क्योंकि प्रत्येक अवयव $p(A)$ को सिंगलटन (Singleton) समुच्चयों के संघ के रूप मे पूरी तरह और विशिष्ट रूप से वर्णित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ और मान लीजिए कि संबंध $\leq$ विभाज्य है। संक्रिया $\wedge$ जीसीडी (GCD) होता है और संक्रिया V एलसीएम (LCM) होता है। 0–अवयव 1 है। तब बूलियन बीजगणित के अणु (Atom) का समुच्चय $\{2,3,5\}$ होगा।

नोट्स

1. मान लीजिए कि $(B,+,.,',)$ कोई परिमित बूलियन बीजगणित है और मान लीजिए कि A सभी अणु (Atoms) का समुच्चय है। तब $(B,+,.,',)$ $(p(A),\cup,\cap,')$ से समतुल्य (Isomorphic) होगा।
2. प्रत्येक परिमित बूलियन बीजगणित $(B,+,.,',)$ में कुछ घनात्मक पूर्णांक n के लिए 2^n अवयवों होगे।
3. क्रम 2^n के सभी बूलियन बीजगणित एक दूसरे से समतुल्य (Isomorphic) होते है। 0′ और 1′ के n ट्यूपलों (Tuples) के रूप में परिमित बूलियन बीजगणित होते है।

   सबसे सरल गैर तुच्छ (Nontrivial) बूलियन बीजगणित $B = \{0,1\}$ होता है, तो द्विआधारी अंकों के समुच्चय को द्विआधारी संक्रियों + और . और यूनिरी संक्रिया ′ को निम्नलिखित तरह से परिभाषित किया जाता है।

+	1	0
1	1	1
0	1	0

.	1	0
1	1	0
0	0	0

′	1
1	0
0	1

टिप्पणी

यदि हम $B^2 = B \times B$ बनाते हैं, तो हम समुच्चय $B^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ प्राप्त करते हैं।

+,. और ′ को परिभाषित करें।

$(0,1) + (1,1) = (0 + 1, 1+ 1) = (1,1)$

$(0,1).(1,1) = (0.1, 1.1) = (0,1)$

और $(0,1)' = (0',1') = (1,0)$

तब B^2 एक बूलियन बीजगणित होगा।

नोट : यहां B^2 एक बूलियन बीजगणित क्रम 4 में घटक संक्रिया के तहत है। चूंकि सभी बूलियन बीजगणित क्रम 4 में एक दूसरे से समतुल्य (Isomorphic) होते है, यह बूलियन बीजगणित में क्रम 4 को वर्णन करने का सबसे सरल तरीका है। सामान्य तौर पर, क्रम 2^n का कोई भी बूलियन बीजगणित B^n से समतुल्य (Isomorphic) होते है।

उदाहरण 1.2 : बूलियन बीजगणित के अणुओं (Atoms) का पता लगाएं, यहाँ $n \geq 1$ है। (*i*) B^2 (*ii*) B^4 (*iii*) B^n

हल :

(*i*) (0,1) और (1,0)

(*ii*) (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) और (0,0,0,1)

(*iii*) *n*-टुपलेस (Tuples) में 1 है।

बूलियन अभिव्यक्तियों

इस खंड में हम बूलियन अभिव्यक्तियों को सरल बनाने की प्रक्रिया विकसित करेंगे। मान लीजिए कि $(B,+,.,')$ कोई भी बूलियन बीजगणित है। मान लीजिए कि $x_1,x_2...,x_n$, B में चर हैं। इन चर में एक बूलियन अभिव्यक्ति E के लिए, बूलियन संक्रिया E_1 और E_2 का उपयोग करें।

उदाहरण के लिए, x,y, z में निम्नलिखित बूलियन अभिव्यक्तियों होगी।

(*i*) $E_1 = (x + y'z)' + (xyz' + x'y)'$

(*ii*) $E_2 = (x'z + (y + xy'z'))'$

मूलाक्षर (Literal) : मूलाक्षर (Literal) एक चर या पूरक चर या मौलिक गुणन होता है। एक मौलिक गुणन मूलाक्षर (Literal) दो या दो से अधिक का मूलाक्षरों (Literal) का गुणन होता है, जिसमें मे एक ही चर के कोई भी दो मूलाक्षर (Literal) शामिल या उपस्थित नहीं होने चाहिए।

उदाहरण के लिए, निम्नलिखित मौलिक गुणन हैं।

$x, y', xyz', x'yz, xz'$

निम्नलिखित मौलिक गुणन नहीं हैं।

$xyx'z$, $xyzy$, $xyzx'$.

टिप्पणी

नोटः मूलाक्षर (Literals) के कोई भी गुणन को 0 या एक मौलिक गुणन में बदला जा सकता है।

उदाहरण के लिए, $xyx'z = 0 = xyzx'$, $xx' = 0$ और $xyzy = xyz$ क्योंकि $yy = y$ है।

कन्टैन (Contain) : एक मौलिक गुणन p_1 को दूसरे मौलिक गुणन p_2 में सम्मिलित या Contain होना कहा जाता है जब p_1 का मूलाक्षर स्पजमतंस p_2 का भी मूलाक्षर (Literal) होता है।

गुणन का योग (Sum of Products) : एक बूलियन अभिव्यक्ति $E = E(x_1, x_2, ..., x_n)$ को गुणनों का योग कहा जाता है जोकि निमनिष्ठ पद (Minterm) रूपी होते है, यदि E एक मौलिक गुणन है या दो या दो से अधिक मौलिक गुणन का योग है। जिनमें से कोई भी दूसरे में शामिल नहीं होते है।

निमनिष्ठ पद रूपी के लिए एल्गोरिथम या कलन विधि (E का गुणनों के योग में रूपांतरण)

चरण 1. किसी भी कोष्ठक में पूरक ऑपरेशन को स्थानांतरित करने के लिए डी मॉर्गन के नियमों (De Morgan's Rules) और अन्तवर्लन (Involution) का उपयोग करें।

चरण 2. E को गुणनों का योग में बदलने के लिए वितरक नियम का उपयोग करें।

चरण 3. E के प्रत्येक गुणनों को 0 या एक मूल गुणनों में बदलने के लिए क्रम विनिमय नियम (Commutative), वर्गसम (Idempotent) और पूरक नियमों (Complement Laws) का उपयोग करें।

चरण 4. E को गुणनों का योग में बदलने के लिए अवशोषण (Absorption) और ततस्मक नियमों (Identity Laws) का उपयोग करें।

उदाहरण 1.3 : $((a' + c)(b' + c'))'$ को गुणनों का योग में रूपांतरण करें।

हलः $((a'+c)(b'+c'))' = (a'+c)' + (b'+c') = ac' + bc$

एक बूलियन अभिव्यक्ति $E = E(x_1, x_2, ..., x_n)$ को पूर्ण गुणनों का योग (या) निमनिष्ठ पद सामान्य रूप (Minterm Normal Form) (या) वियोजनीय सामान्य रूप या निमनिष्ठ पद रूप (Minterm Form) कहा जाता है। E एक मूलभूत गुणन या दो या दो से अधिक मौलिक गुणनों का योग है जिनमें कोई भी दूसरे में शामिल नहीं होते है और प्रत्येक गुणनों में सभी n चर शामिल होते हैं।

नोटः हम आमतौर पर प्रतीक और जक्स्टपोज (Juxtapose) को छोड़ देते हैं।

उदाहरण के लिए, $a.(b + c) = a(b + c)$ और $a + (b * c) = a + bc$ आदि।

पूर्ण गुणनों के योग को खोजने के लिए एल्गोरिथम

चरण 1. डी मॉर्गन के नियमों (De Morgan's Laws) और अन्तवर्लन (Involution) का उपयोग करके किसी भी कोष्ठक में पूरक संक्रिया को स्थानांतरित करें ताकि केवल पूरक संक्रिया चरों पर लागू हो। तब E केवल मुलाक्षर (Literals) के रूप और गुणन से युक्त होंगा।

चरण 2. E को गुणनों के योग में बदलने के लिए वितरक नियम का उपयोग करें।

चरण 3. E के प्रत्येक गुणनों को 0 या मूल गुणन में बदलने के लिए क्रम विनिमय नियम (Commutative Law), वर्गसम नियम (Idempotent Law) और पूरक नियमों (Complement Laws) का उपयोग करें।

टिप्पणी

चरण 4. E को गुणनों के योग में बदलने के लिए अवशोषण (Absorption) और ततस्मक नियमों (Identity Laws) का उपयोग करें।

चरण 5. E में एक गुणन p को ढूंढें या जांच करें जिसमें चर x_i शामिल नहीं हो और फिर किसी भी दोहराये गए गुणनों को हटाते हुए, p को $x_i + x_i'$ से गुणा करें।

उदाहरण 1.4 : $E = x(y'z)'$ को उसके वियोजनीय सामान्य के रूप में लिखे।

हलः $E = x(y'z)'$

$= x(y + z')$ डी मॉर्गन नियम के द्वारा

$= xy + xz'$ डी मॉर्गन के नियम के द्वारा

$= xy(z + z') + xz'(y + y')$ लुप्त चर का उपयोग करने पर

$= xyz + xyz' + xyz' + xy'z'$ वितरक और क्रम विनिमय नियम से

$= xyz + xyz' + xy'z$ तत्स्मक नियमों द्वारा

उदाहरण 1.5: E को पूर्ण गुणनों के योग के रूप में लिखे।

(*i*) $E = x(xy' + x'y + y'z)$

(*ii*) $E = z(x' + y) + y'$

(*iii*) $E = (x' + y)' + x'y$

(*iv*) $E = y(x + yz)'$

(*v*) $E = x(xy + y' + x'yx).$

हलः

(*i*)
$$\begin{aligned} E &= x\,(xy' + x'y + y'z) \\ &= xxy' + xx'y + xy'z \qquad \because xx' = 0 \\ &= xy' + xy'z \\ &= xy'(z + z') + xy'z \\ &= xy'z + xy'z' + xy'z \\ &= xy'z + xy'z'. \end{aligned}$$

(*ii*)
$$\begin{aligned} E &= z\,(x' + y) + y' \\ &= x'z + yz + y' \\ &= x'z\,(y + y') + yz\,(x + x') + y'\,(x + x')(z + z') \\ &= x'yz + x'y'z + xyz + x'yz + xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z \\ &= xyz + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'. \end{aligned}$$

टिप्पणी

(*iii*) $E = (x' + y)' + x'y$

$= xy' + x'y$ डी मॉर्गन नियम (De Morgan's Law)

$= xy'(z + z') + x'y\,(z + z')$

$= xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz'$

(*iv*) $E = y\,(x + yz)'$

$= y\,(x'(yz)')$ डी मॉर्गन नियम (De Morgan's Law)

$= yx'(y' + z')$ डी मॉर्गन नियम (De Morgan's Law)

$= yx'y' + yx'z'$

$= x'yz'$ (चूंकि $yy^1 = 0$)

(*v*) $E = x(xy + y' + x'y)$

$= xxy + xy' + xx'y$

$= xy + xy'$

$= xy\,(z + z') + xy'(z + z')$

$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'.$

उदाहरण 1.6: निम्नलिखित बूलियन अभिव्यक्तिों E को उसके निमनिष्ठ पद के रूप में लिखेः

(*i*) $E = x(xy' + x'y + y'z)$ (*ii*) $E = (x + y'z)(y + z')$

(*iii*) $E = (x' + y)' + y'z$ (*iv*) $E = (x'y)'(x' + xyz')$

(*v*) $E = (x + y')(xy')'$ (*vi*) $E = y(x + yz)'$

हलः

(*i*) $E = x\,(xy + x'y + y'z)$

$= xy' + xy'z$

$= xy'(z + z') + xy'z$

$= xy'z + xy'z'.$

(*ii*) $E = (x + y'z)(y + z')$

$= xy + xz'$

$= xy\,(z + z') + xz'(y + y')$

$= xyz + xyz' + xy'z'.$

(*iii*) $E = (x' + y)' + y'z$

$= xy' + y'z$

$= xy'(z + z') + y'z\,(x + x')$

$= xy'z + xy'z' + x'y'z.$

(*iv*) $E = (x'y)'\,(x' + xyz')$

$= (x + y')\,(x' + xyz')$

$= xyz' + x'y'$

$= xyz' + x'y'(z + z')$

$= xyz' + x'y'z + x'y'z'.$

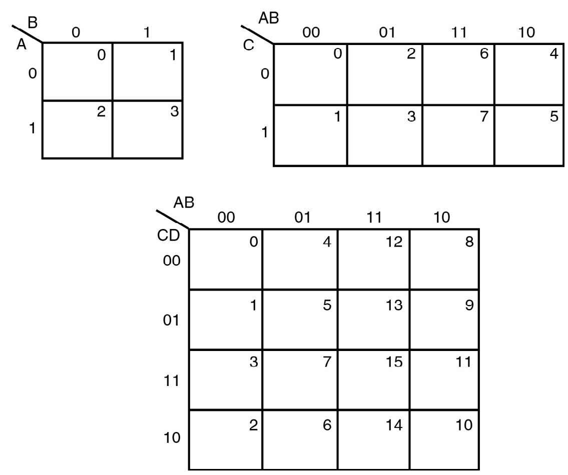
$$
\begin{aligned}
(v)\quad E &= (x+y)'(xy')' \\
&= x'y'\,(x'+y) \\
&= x'y' \\
&= x'y'\,(z+z') \\
&= x'y'z + x'y'z'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(vi)\quad E &= y(x+y+z)' \\
&= y\,(x'(yz)') \\
&= y\,(x'(y'+z')) \\
&= y(x'y'+x'z') \\
&= x'yz'.
\end{aligned}
$$

तार्किक फलनों का कार्नो मानचित्र (Karnaugh Map *t* K-Map) of Logial Functions या मैप द्वारा निरूपण

परिचय

कार्नो मानचित्र उन तकनीकों में से एक है जो तार्किक फलनों के बूलियन आलेखों के निरूपण को नियोजित करता है। यह तकनीक बूलियन व्यंजकों को सरल बनाने में बहुत उपयोगी सिद्ध होता है। इस पद्धति में, एक सत्य तालिका में निहित सूचना पीओएस या एसओपी रूप (POS या SOP) में उपलब्ध होती है और फिर उसे, कार्नो मानचित्र (K–मैप) में दर्शाया जाता है। निम्नलिखित चित्र में दो, तीन और चार चरों को K–मैप में दिखाया गया है।



चित्र 1.1 *कार्नो मैप*

K–मैप में प्रत्येक ब्लॉक को कोष्ठक के रूप में संदर्भित किया जाता है।

एक n – चर K–मैप में 2^n कोष्ठक होते हैं। प्रत्येक कोष्ठक n 'चर के संयोजन में से किसी एक से संबंधित होता है। जैसा कि प्रत्येक चर 2 संभावित मान ले सकता है, इसलिए 'n' चरों के लिए 2^n संयोजन होते हैं। इसलिए तालिका में प्रत्येक निमनिष्ठ पद/उच्चिष्ट पद (Minterms या Maxterms) के लिए एक कोष्ठक नामित होता है।

उपरोक्त चित्रण में, चरों को 'A', 'B', 'C' और 'D' के रूप में नामित किया गया है और उनके द्वारा गठित द्विआधारी संख्या AB, ABC और ABCD को क्रमशः 2, 3 और 4 चर के रूप में लिया गया है।

प्रत्येक मानचित्र में, प्रत्येक कोष्ठक को सभी मानों को ध्यान में रखते हुए मान दिया जाता हैं। यह माना गया है कि पहला बिट (Bit) पहले चर से संबंधित है और दूसरा बिट (Bit) दूसरे चर से संबंधित है।

A \ B	0	1
0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}\,B$
1	$A\,\overline{B}$	$A\,B$

A \ B	0	1
0	$A+B$	$A+\overline{B}$
1	$\overline{A}+B$	$\overline{A}+\overline{B}$

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	$A\,B\,\overline{C}$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$
1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	$\overline{A}\,B\,C$	$A\,B\,C$	$A\,\overline{B}\,C$

C \ AB	00	01	11	10
0	$A+B+C$	$A+\overline{B}+C$	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$\overline{A}+B+C$
1	$A+B+\overline{C}$	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+B+\overline{C}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$
01	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$	$A\,B\,\overline{C}\,D$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$
11	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D$	$\overline{A}\,B\,C\,D$	$A\,B\,C\,D$	$A\,\overline{B}\,C\,D$
10	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$	$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}$	$A\,B\,C\,\overline{D}$	$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	$A+B+C+D$	$A+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+B+C+D$
01	$A+B+C+\overline{D}$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$
11	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$
10	$A+B+\overline{C}+D$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$

चित्र 1.2 *K–मैप में संभव मान*

उपरोक्त प्रक्रिया को दिए गए K–मैप की सत्य तालिका का उपयोग करके उलटा किया जा सकता है।

K–मैप का उपयोग करके तार्किक फलनों का सरलीकरण

K–मैप का व्यापक रूप से बूलियन अभिव्यक्तियों के लिए विशुद्ध रूप से गणना को आसान बनाकर इस्तेमाल किया जाता है। निम्न सूची एक अभिव्यक्ति (Expression) को ज्ञात करने के लिए शामिल चरणों का वर्णन करती है।

1. दिए गए अभिव्यक्ति के आधार पर रूपरेखा (खाली) (Skeleton) के–मैप बनाए। रूपरेखा (खाली) (Skeleton) *n*–चर मान के 'K–मैप' किसी भी अभिव्यक्ति के लिए बिना भरे K–मैप को संदर्भित करता है।
2. दिए गए बूलियन अभिव्यक्ति की सत्य तालिका तैयार करें।
3. सत्य तालिका से प्राप्त मानों के आधार पर K–मैप के कोष्ठकों को भरें।
4. K–मैप में निकटवर्ती का समूह बनाएं और चरों जो परिवर्तन से गुजरते हैं उन को रद्द करें।

निकटवर्ती को समूहीकृत करते समय यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि वे तिरछे नहीं, केवल क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दिशाओं में बनाए जाए।

निकटवर्ती के समूह को आसानी से समझने के लिए सारणीबद्ध किया जाता है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.7: दिए गए K–मैप के लिए सत्यमान तालिका को समझें।

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12 1	8
01	1	5 1	13	9 1
11	3 1	7	15 1	11
10	2	6	14	10

हलः

***तालिका 1.1** निकटवर्ती का समूह*

	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

(i)

तालिका 1.2

Cell with Decimal No.	Decimal Number of Adjacent Cells		
	2 – Variable	3 – Variable	4 – Variable
0	1,2	1,2,4	1,2,4,8
1	0,3	0,3,5	0,3,5,9
2	0,3	0,3,6	0,3,6,10
3	1,2	1,2,7	1,2,7,11
4		0,5,6	0,5,6,12
5		1,4,7	1,4,7,13
6		2,4,7	2,4,7,14
7		3,5,6	3,5,6,15
8			0,9,10,12

(ii)

टिप्पणी

Cell with Decimal No.	Decimal Number of Adjacent Cells		
	2 – Variable	3 – Variable	4 – Variable
9			1,8,11,13
10			2,8,11,14
11			3,9,10,15
12			4,8,13,14
13			5,9,12,15
14			6,10,12,15
15			7,11,13,14

(iii)

नोट : '1's' के समूह से SOP रूप मिलता है जबकि '0's' से POS रूप मिलता है।

चार निकटवर्ती का समूहनः 4 चर K–मैप के केस या प्रकरण में, किसी भी कोष्ठक से जुड़े 4 चर के लिए 6 संभावित समूह होते हैं।

तालिका 1.3

Cell with Decimal No.	Decimal Number of Cells Forming Groups of Adjacent Fours		
0	(0,2,6,4)	(0,1,2,3)	(0,1,4,5)
1	(1,0,2,3)	(1,3,7,5)	(1,0,4,5)
2	(2,0,6,4)	(2,3,1,0)	(2,3,6,7)
3	(3,1,7,5)	(3,2,1,0)	(3,2,6,7)
4	(4,6,2,0)	(4,5,6,7)	(4,5,0,1)
5	(5,1,3,7)	(5,4,6,7)	(5,4,0,1)
6	(6,0,2,4)	(6,7,4,5)	(6,7,2,3)
7	(7,1,3,5)	(7,6,4,5)	(7,6,2,3)

आठ निकटवर्ती लोगों का समूहः 4–चर K–मैप में निकटवर्ती आठ के समूहों को बनाने वाली कोष्ठक की दशमलव संख्या निम्नलिखित होती है।

0, 4, 12, 8, 1, 5, 13, 9

0, 4, 12, 8, 2, 6, 14, 10

0, 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6

0, 1, 3, 2, 8, 9, 11, 10

1, 5, 13, 9, 3, 7, 5, 11

4, 5, 7, 6, 12, 13, 15, 14

12, 13, 15, 14, 8 9 11 10

3, 7, 15, 11, 2, 6, 14, 10

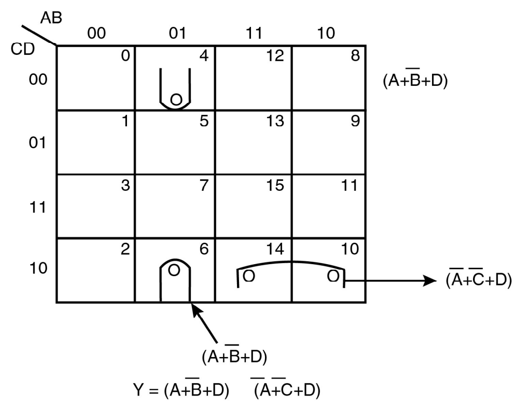
निकटवर्ती शून्य का समूहः 1's के समूहीकरण करने की पूर्व प्रक्रिया की तरह, K–मैप में 0's को भी समूहीकृत किया जा सकता है। ऐसे केसों या प्रकरणों में, दो

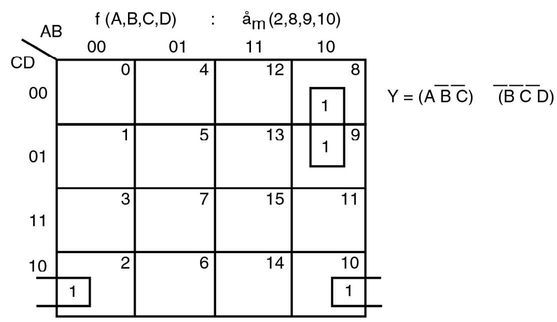
निकटवर्ती 0's के समूह के कारण मूलाक्षर (Literal) प्राप्त होता है जो दो उच्चिष्ट पद (Maxterm Term) को हटाने के समान होता है। यही प्रक्रिया n–चर K–मैप में 4, 8 या 2^n शून्य के समूह में भी लागू की जा सकती है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.8: तार्किक फलन को पीओएस from रूप (POS) में छोटा करें।

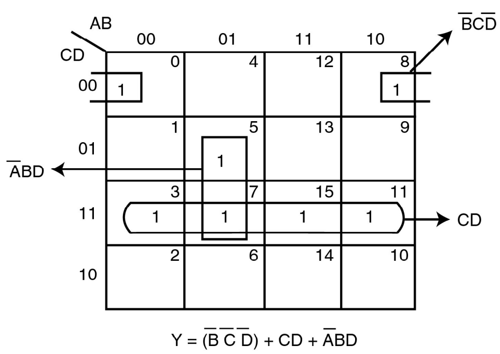
हलः





उदाहरण 1.9: तार्किक फलन को एसओपी रूप (SOP Form) निमनिष्ठ रूप (Minterm Form) में छोटा करें। ($f(A, B, C, D) = \Sigma\, m$ (0, 3, 5, 7, 8, 11, 15).

हलः



निमनिष्ठ पद / उच्चिष्ट पद में निर्दिष्ट नहीं तार्किक फलनों का न्यूनतमीकरणः ऐसे केसों में जहां दिए गए तार्किक अभिव्यक्ति मानक एसओपी या पीओएस रूप (SOP या POS Form) में नहीं होते है, हम दिए गए K–मैप का उपयोग करके अभिव्यक्तिों को मानक रूप में परिवर्तित करते हैं और उसके बाद आगे बढ़ते हैं या सीधे प्लॉटिंग या आलेखन (Plotting) करके K–मैप बनाते है। एक बार जब मानों या वैल्यु को दर्ज

कर दिया जाता है, तो इसे पहले बताई गई तकनीक का उपयोग करके आसानी से हल किया जा सकता है।

1. $f(A, B, C, D) = AB\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{B}$

तालिका

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1 1
01	1			1
11	1			1
10	1			1

$$f(A, B, C, D) = AB\overline{C}\overline{D} + A\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{B}$$
$$Y = f(A, B, C, D) = \overline{B} + ACD$$

2. $f(A, B, C, D) = (A + \overline{B} + C + \overline{D}).(A + \overline{D}).(A + \overline{B} + \overline{C})$

तालिका

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01	0	0		
11	0	0		
10		0		

$$Y = (A + \overline{D})\ (A + \overline{B} + C)$$

3. $f(A, B, C, D) = \Sigma\ \pi\ m\ (2, 3, 8, 9, 10, 14)$

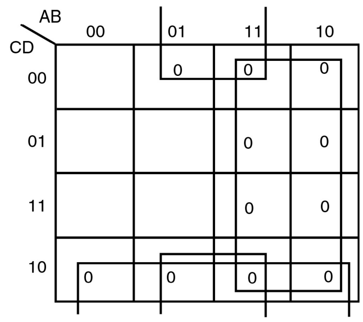
तालिका

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	0 8
01	1	5	13	0 9
11	0 3	7	15	11
10	0 2	6	0 14	0 10

$$Y = (\overline{A} + B + C)\ (\overline{A} + \overline{C} + D)\ (A + B + \overline{C})$$

4. $f(A, B, C, D) = \overline{A} + (C + \overline{B} + D) \cdot (\overline{C} + D)$

तालिका



$$Y = (\overline{C} + D).(\overline{B} + D).(\overline{A}) = \overline{A}(\overline{B} + D)(\overline{C} + D)$$

नोट: इम्प्लिकेंट पद निकटवर्ती निमनिष्ठ पद का समुच्चय या निमनिष्ठ पद के समुच्चय से प्राप्त सरलीकृत गुणन पद को दर्शाता है।

मुख्य इम्प्लिकेंट (Prime Implicant) : एक इम्प्लिकेंट को मुख्य इम्प्लिकेंट कहा जाता है जब यह किसी अन्य इम्प्लिकेंट के फलन का उप–समुच्चय नहीं होता है।

आवश्यक इम्प्लिकेंट (Essential Implicant) : एक मुख्य इम्प्लिकेंट जिसमें '1' कोष्ठक शामिल होता है जो किसी भी अन्य मुख्य इम्प्लिकेंट में शामिल नहीं होता है, वह आवश्यक इम्प्लिकेंट कहलाता है।

डोनट केयर की शर्तों (Do Not Care Conditions) : आम तौर पर, ऐसे कुछ केस होते हैं जिनमें फलन का आउटपुट (Outputs) कुछ निश्चित इनपुट (Inputs) के संयोजन के लिए मायने नहीं रखते हैं।

ऐसे केसों में, डिजाइनर इनपुट के किसी भी विशेष संयोजन के लिए '0' या '1' में से किसी को भी लेने के लिए स्वतंत्र होता है। यह आमतौर पर X द्वारा दर्शाया जाता है और इसे डोनर केयर की शर्तों के रूप में संदर्भित किया जाता है।

इस स्थिति के कारण समूहीकृत निकटवर्ती '0' और निकटवर्ती '1' का उपयोग करके K–मैप में फायदा मिलता है। 2, 4 या 8 ब्लॉक को पूरा करने के दौरान, ये दोनों SOP के साथ–साथ POS रूप में समूहीकृत करते समय संबंधित मान को ले सकते हैं।

K–मैप का दोष (Drawback of K-Map): अगर चर का आकार 4 से अधिक होता है तो यह अधिक आसान दिखने वाला K–मैप जटिल और शुष्क हो जाता है। इसलिए चर की संख्या बड़ी होने पर इस पद्धति पर अन्य विधियों को प्राथमिकता दी जाती है।

क्विन–मैक्लुस्की एल्गोरिथम (Quine - Mcclusky Algorithm)

कार्नो मानचित्र पद्धति का उपयोग करके चार चर तक के बूलियन फलन को आसानी से हल किया जा सकता है। लेकिन इस विधि से अधिक चर वाले फलनों को हल करना बहुत मुश्किल होता है। इसका कारण, जैसे ही चरों की संख्या में वृद्धि होती है, वैसे ही K–मैप के कोष्ठकों की संख्या में भी 2 की घात से वृद्धि होती है।

टिप्पणी

क्विन – मैक्लुस्की (Quine-Mcclusky) पद्धति का उपयोग n–चरों के बूलियन को हल करने के लिए किया जाता है। इस विधि में प्रत्येक निमनिष्ठ पद और 2k निमनिष्ठ पद ($k < n$) का समुच्चय, निकटवर्ती निमनिष्ठ पद के समुच्चय के साथ सरलीकृत गुणन बनाते हैं, जो कि निमनिष्ठ पद के समुच्चय द्वारा प्राप्त किया जाता है

क्विन–मैक्लुस्की न्यूनीकरण प्रक्रिया (Quine - Mcclusky Minimization Procedure)

1. फलन के मुख्य इम्प्लिकेंट का पता लगाएं।
2. मुख्य इम्पिकेंट की तालिका का निर्माण करें और फलन के आवश्यक मुख्य इम्पिकेंट (यानी संभावित पंक्तियों) को ज्ञात करें।
3. न्यूनतम योग में आवश्यक मुख्य इम्प्लिकेंट को शामिल करें
4. सभी मुख्य इम्पिकेंट को मुख्य इम्प्लिकेंट तालिका से हटा दिए जाने के बाद, तालिका में डोमीनेट पंक्तियों और स्तंभों को निर्धारित करें। उन्हें हटाएं और द्वितीयक आवश्यक मुख्य इप्लिकेंट या आवेदक (Applicants) को ढूंढें।
5. चरण 3 और 4 को कई बार दोहराएं जब तक तक वे लागू होते हैं यानि फलन का न्यूनतम आवृत (कवर) नहीं मिलता है।

निमनिष्ठ पद का इंडेक्स नंबर निरूपण

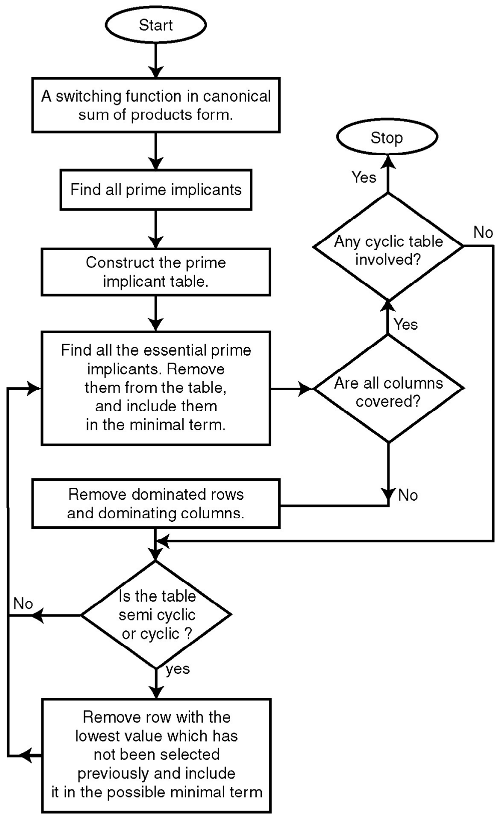
$0000 \to 0$	$0011 \to 2$	$0111 \to 3$	$1011 \to 3$
$0001 \to 1$	$0100 \to 1$	$1000 \to 1$	$1100 \to 2$
$0010 \to 1$	$0101 \to 2$	$1010 \to 2$	$1110 \to 3$

मुख्य इम्पिकेंट तालिका की दो पंक्तियाँ (या स्तंभों) i और j जिनमें एक ही पंक्तियों (या स्तंभों) में x's हो, को तुल्य (बराबर) (Equal) कहा जाता है, और $i = T$ के रूप में लिखा जाता है अगर स्तंभ i प्रमुख इम्पिकेंट तालिका में दो स्तंभों में हो। स्तंभ i को स्तंभ j पर डोमिनैट कहा जाता है (यानी, $i > j$), यदि स्तंभ i की उन सभी पंक्तियों में x's है जिनके स्तंभ j में x's है, तो i और j को क्रमशः डोमिनेटिंग (Dominating) और डोमिनेटेड (Dominated) स्तंभ कहा जाता है। इसी प्रकार, यदि पंक्तियों i और j मुख्य इम्पिकेंट तालिका में हैं, तो पंक्ति i को पंक्ति j पर डोमिनैट कहा जाता है। यदि पंक्ति i के में उन सभी स्तंभों में x's है जिनमें पंक्ति j में x's है, तो i और j को क्रमशः डोमिनेटिंग (Dominating) और डोमिनेटेड (Dominated) पंक्तियाँ कहा जाता है।

तालिका को प्रभावित किए बिना न्यूनतम योग को प्राप्त करने के लिए मुख्य इम्पिकेंट में से सभी डोमिनेटिंग पंक्तियों और स्तंभों को हटाया जाता है।

न्यूनतम योग में, हम डोमिनेटिंग पंक्तियों और डोमिनेटेड स्तंभों को शामिल करते हैं और डोमिनेटेड पंक्तियों और डोमिनेटिंग स्तंभों को बाहर करते हैं।

टिप्पणी



चित्र 1.3: फ्लोचार्ट क्विन–मैक्लुस्की न्यूनतमकरण प्रक्रिया दिखा रहा है

उदाहरण 1.10 : पाँच चरों के एक फलन पर विचार करें, जिसका गुणन के रूप का कैनॉनिकल योग (Canonical Sum of Products Form) है–

$$f(x_1, x_2, ..., x_5) = \sum(0, 1, 2, 8, 9, 15, 17, 21, 24, 25, 27, 31)$$

हलः हमें मुख्य और आवश्यक इम्पिकेंट (Implicants) का पता लगाना होगा। हमे 11 प्रमुख इम्पिकेंट प्राप्त होंगे जिन्हें $A, B, ..., K$ के नाम से नामित किया गया हैं। मुख्य इम्पिकेंट तालिका में, स्तंभों 2, 15 और 4 को पंक्तियों $J, E,$ और H से आवृत (कवर) है; इसलिए वे आवश्यक मुख्य इम्पिकेंट (Implicants) है (* द्वारा इंगित किया गया है) जिन्हें न्यूनतम योग में शामिल करने के लिए चुना जाता है। तीन आवश्यक प्रमुख इम्पिकेंट को हटाने के बाद, संबंध होगे

स्तंभों की प्रभावित (Column Dominance)

$9 > 8$

$25 > 24$

पंक्तियों की प्रभावित (Row Dominance)

$A > G$

$F > D$

$B > I$

$B > K$

स्तंभों 9 और 25 को हटाया जा सकता है। चूंकि सभी डोमिनेटेड (Dominated) पंक्तियों में G, D, I और K की लागत है जो उनकी संबंधित डोमिनेटिंग (Dominating)

पंक्तियों से कम नहीं है, इसलिए उन्हें भी तालिका से हटाया जा सकता है। इसलिए स्तंभों 24 और 27 को केवल क्रमशः पंक्तियों A और F द्वारा आवृत (कवर) किया गया हैं। इस प्रकार उन्हें न्यूनतम योग में शामिल किया जाना चाहिए।

टिप्पणी

पंक्तों A और F को कभी–कभी द्वितीयक आवश्यक मुख्य इम्पिकेंट स्तंभों के रूप में संदर्भित किया जाता है (संकेतक * द्वारा)। पंक्तियों A और F को हटा देने के बाद सभी निमनिष्ठ पद 1 आवृत (कवर) नहीं है। हालाँकि, इन्हें पंक्ति B या पंक्ति C द्वारा आवृत (कवर) किया जा सकता है। मान लीजिए कि पंक्ति B को चयनित किया जाता है, तो फलन का न्यूनतम योग $E + H + J + A + F + B$ होगा।

सभी मुख्य इम्पिकेंट को प्राप्त करने के लिए, नीचे दी गई तालिका देखें

तालिका 1.4

Index	*Decimal Number*	*Binary Representation of each Mintern*	*Decimal Numbers*	*1st Reduction*	*Decimal Numbers*	*2nd Reduction*
0	0	00000 ✓	0,1	0000 – K	0,8,1,9	0 – 00 – C
1	1	00001 ✓	0,2	000 – 0 J	1,9,17,25	– 001 – B
	2	00010 ✓	0,8	0 – 000 ✓	8,9,24,25	– 100 – A
2	8	01000 ✓	1,9	0 – 001 ✓		
3	9	01001 ✓	1,17	– 0001 ✓		
	17	10001 ✓	8,9	0100 – ✓		
	24	11000 ✓	8,24	– 1000 ✓		
4	21	10101 ✓	9,25	– 1001 ✓		
	25	11001 ✓	17,21	10 – 01 H		
5	15	01111 ✓	17,25	1–001 L		
	27	11011 ✓	24,25	11 00 – G		
	31	11111 ✓	25,27	110 – 1 F		
			15,31	– 1111 E		
			27,31	11 –11 D		

प्रमुख इम्प्लिकेंट तालिका आवश्यक प्रमुख इम्प्लिकेंट E, H, J के साथ * द्वारा इंगित

प्रमुख इम्प्लिकेंट तालिका (प्रमुख इम्प्लिकेंट्स (Implicants) E, H, J के साथ * द्वारा इंगित)

तालिका 1.5

	0	1	2	8	9	15	17	21	24	25	27	31
A				×	×				×	×		
B		×			×		×			×		
C	×	×		×	×						×	×
D											*	*
* E						*						×
F										*	*	
G								*	*			
* H							*	*				
I		×					*					
* J	×		*									
K	×	×										

1.3 वियोजनीय और संयोजनीय सामान्य रूप

टिप्पणी

सामान्य रूप (Normal Forms)

एक कथन सूत्र को सामान्य रूप (या विहित रूप) में कहा जाता है। यदि

(*i*) केवल तीन संक्रियों $\sim, \wedge, \vee$ का उपयोग किया गया हो।

(*ii*) अक्षरों के समूह के साथ निषेधन (Negation) का उपयोग नहीं किया गया हो।

(*iii*) वितरक नियम (Distributive Law) का इस्तेमाल (लागू) किया गया हो।

(*iv*) एक ही संयोजी के लिए कोष्टक का उपयोग नहीं किया गया हो (जैसे, $p \wedge (q \wedge r)$ $p \wedge q \wedge r$ होगा)।

नोट: इस खंड में हम 'संयोजन' के स्थान पर 'गुणन' और 'वियोजन' के स्थान पर 'योग' का उपयोग करते हैं।

प्राथमिक गुणन और योग (Elementary Product and Sum): एक सूत्र में चर के गुणन और उनके निषेधन (Negation) को चर का प्राथमिक गुणन य और चर के योग और उनके निषेधन (Negation) को प्राथमिक योग कहा जाता है। प्राथमिक गुणन या योग (Elementary Product and Sum) का कोई भी हिस्सा जो खुद एक प्राथमिक गुणन या योग है, उसे प्राथमिक गुणन या योग का घटक कहा जाता है।

कुछ उदाहरण निम्न हैं।

1. $p, \sim p, \sim p \wedge q, \sim q \wedge p \wedge \sim p, p \wedge \sim p$ दो चर p और q के कुछ प्राथमिक गुणन हैं।
2. $p, \sim p, \sim p \vee q, \sim q \vee p \vee \sim p, p \vee \sim q$ कुछ प्राथमिक योग हैं।
3. $(\sim p, q \wedge \sim q, \sim p \wedge q, \sim p)$ $(\sim p \wedge q \wedge \sim q)$ के कुछ घटक है।

प्रमेय 1.1: एक प्राथमिक योग के लिए पुनरुक्ति (Tautology) होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त स्थिति यह है (या वास्तव में सत्य होने के लिए) कि इसमें कम से कम एक घटक या करक जोड़ी होनी चाहिए, जो एक दूसरे के निषेधन हो।

हल : मान लीजिए कि किसी भी प्राथमिक योग में किसी भी चर p के लिए एक जोड़ी $p\, v \sim p$ है। चूँकि $p \vee \sim p \Leftrightarrow 1$ और $1 \vee p \Leftrightarrow 1$ है इसलिए योग पुनरुक्ति (Tautology Sum) होगा। इसके विपरीत, यदि एक प्राथमिक योग पुनरुक्ति (Elementary Tautology Sum) है और इसमें कम से कम एक घटक जोड़ी $p \vee \sim p$ प्रकार की नहीं है, तो हम सत्य मान चर को 1 और नकारात्मक चर को 0 निदिर्ष्ट करेगें जो योग में दिखाई देते हैं। इसका अर्थ है कि प्राथमिक योग का सत्य मान 0 है, लेकिन यह हमारी धारणा के विपरीत है। इसलिए यह सिद्ध होता है।

हम इसी तरह निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 1.2: एक प्राथमिक गुणन के लिए एक व्याघात (Contradiction) (या असत्य) होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त यह है कि इसमें कम से कम एक जोड़ी घटक (Factors) ऐसे शामिल हो जो एक दूसरे के निषेधन हो।

वियोजनीय सामान्य रूप (Disjunction Normal) : एक सूत्र जो किसी दिए गए सूत्र के तुल्य (बराबर) होता है और जो प्राथमिक गुणनों का योग होता है, उस दिए गए सूत्र को वियोजनीय सामान्य रूप कहा जाता है।

टिप्पणी

संयोजनीय सामान्य रूप (Conjunctive Normal) : एक सूत्र जो किसी दिए गए सूत्र के तुल्य (बराबर) होता है और जो प्राथमिक योगों का गुणन होता है, उसे दिए गए सूत्र का संयोजनीय सामान्य रूप कहा जाता है।

नोटः किसी दिए गए सूत्र का वियोजनीय सामान्य या संयोजनीय सामान्य अद्वितीय नहीं होता है। वास्तव में, हम किसी दिए गए सूत्र के लिए अलग–अलग वियोजनीय सामान्य या संयोजनीय सामान्य रूप प्राप्त कर सकते हैं यदि हम वितरक नियमों (Distributive Laws) को अलग–अलग विधियों से लागू करते हैं। उदाहरण के लिये, सूत्र $p \vee (q \wedge r)$ वियोजनीय सामान्य रूप में है। तथापि,

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \end{aligned}$$

उदाहरण 1.11 : निम्नलिखित सूत्रों के वियोजनीय सामान्य या संयोजनीय सामान्य रूप प्राप्त करें–

(*i*) $p \wedge (p \rightarrow q)$ (*ii*) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

हल : वियोजनीय सामान्य रूप

(*i*) $p \wedge (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q)$

(*ii*) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\sim(p \vee q) \wedge (p \wedge q) \vee ((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q))$ चूंकि $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge (p \wedge q)) \vee ((p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q))$ डी मॉर्गन के नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge p \wedge q) ((p \vee q) \wedge \sim p)) \vee ((p \vee q) \vee \sim q)$ वितरक नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)$

संयोजनीय सामान्य रूप

(*i*) $p \wedge (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q)$

(*ii*) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\sim (p \vee q) \rightarrow (p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \sim (p \wedge q))$ चूंकि $p \leftrightarrow \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \wedge q) \wedge (\sim (p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q))$ चूंकि $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee q) \wedge (\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q))$ वितरक नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee q \vee q) \wedge (\sim (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q))$ डी मॉर्गन के नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

नोटः एक सूत्र एक पुनरुक्ति (Tautology) होता है यदि प्रत्येक प्रारंभिक योग अपने संयोजनीय सामान्य रूप (Conjunctive Normal Form) में सत्य या पुनरुक्ति (Tautology) हो। धारणा को सत्य होंने के लिए, प्रत्येक प्राथमिक योग में कम से कम दो घटक होने चाहिए, और दोनों को एक दूसरा का निषेधन होने चाहिए।

उदाहरण 1.12: यह दिखाएं कि सूत्र $q \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ एक पुनरुक्ति (Tautology) है।

हल : सबसे पहले हमें दिए गए फॉर्मूले को संयोजनीय सामान्य रूप (Conjunctive Normal Form) में बदलना चाहिए।

$$q \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$\Leftrightarrow q \vee ((p \vee \sim p) \wedge \sim q)$ वितरक नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (q \vee (p \vee \sim p)) \wedge (q \vee \sim q)$

$\Leftrightarrow (q \vee p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$

चूँकि दोनों ही प्रारंभिक योग पुनरुक्ति (Tautology) है, इसलिए दिया गया सूत्र एक पुनरुक्ति है।

निमनिष्ठ पद (Minterm Term) : किसी दिए गए चरों के लिए, निमनिष्ठ पद (Minterm Term) संयोजन (Conjunctions) से युक्त होते है जिनमें प्रत्येक चर या उसका निषेधन, लेकिन दोनों नहीं, केवल एक ही बार आते हो।

उदाहरण के लिए, दो चरों p और q के लिए, $p \wedge q, p \wedge \sim q, \sim p \wedge q$ को निमनिष्ठ पद कहा जाता है। इन निमनिष्ठ पदों की सत्य मान तालिका से, यह स्पष्ट होता है कि कोई भी दो निमनिष्ठ पद समतुल्य नहीं होते हैं। प्रत्येक निमनिष्ठ पद में p और q के सत्य मानो के संयोजन पर ठीक एक सत्य मान 1 होता है।

तालिका 1.6

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge \sim q$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप (Principal Disjunctive Normal Form): अगर किसी दिए गए सूत्र में, समतुल्य सूत्र केवल निमनिष्ठ पद के वियोजन से युक्त होते है, उन्हें प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य के रूप (Principal Disjunctive Normal Form) में जाना जाता है। इन्हें गुणनों के योग के रूप में भी जाना जाता है।

नोट : किसी दिए गए सूत्र की सत्य तालिका में से प्रत्येक सत्य मान 1 के लिए, उस निमनिष्ठ पद (Minterm Term) का चयन करें जिसमें p और q के समान संयोजन पर सत्य तालिका में भी मान 1 हो। तब इन निमनिष्ठ पदों का वियोजन भी दिए गए सूत्र के तुल्य होगे।

उदाहरण 1.13: निम्नलिखित सूत्रों से प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य प्राप्त करें।

(*i*) $p \rightarrow q$ (*ii*) $p \vee q$ (*iii*) $\sim (p \wedge q)$

हल: $p \rightarrow q$ (ii) $p \vee q$ (iii) $\sim (p \wedge q)$ के लिए सत्य तालिका 1.13 में दी गई है।

तालिका 1.7

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$\sim (p \wedge q)$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

टिप्पणी

तालिका 1.7 के इस्तेमाल करने पर

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$$
$$p \vee q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$
$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

नोटः यदि कोई सूत्र पुनरुक्ति (Tautology) है, तो स्पष्ट रूप से सभी निमनिष्ठ पद (Minterm Term) इसके प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य रूप में ही होंगे।

किसी दिए गए सूत्र की सत्य तालिका का निर्माण किए बिना प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य रूप को प्राप्त करने की विधि नीचे दी गई है।

1. $\leftrightarrow$ और $\to$ को $\wedge, \vee$ और $\sim$ से बदलें।
2. डी मॉर्गन नियम और वितरक नियम (Distributive Law) का उपयोग करें।
3. किसी भी प्राथमिक गुणन को हटाएँ जो विरोधाभास हो।
4. लुप्त घटकों का इस्तेमाल करके निमनिष्ठ (Minterm) पद को प्राप्त करें।
5. समरूपी (एक जैसे) निमनिष्ठ (Minterm) पदों को हटाएं।

उदाहरण 1.14: निम्नलिखित सूत्रों से प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य रूप को प्राप्त करें।
$(i) \sim p \vee q$ (ii) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

हलः

$(i) \sim p \vee q \Leftrightarrow (\sim p \wedge (q \wedge \sim q)) \vee (q \wedge (p \vee \sim p))$ (चूंकि $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$.)
$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim p)$ वितरक नियम द्वारा
$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ क्रम विनिमय नियम और $p \vee p \Leftrightarrow p$

(ii) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ तीन चरों

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee \sim r)) \vee (\sim p \wedge r \wedge (q \vee \sim q)) \vee (q \wedge r \wedge (p \vee \sim p))$ क्योंकि $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$
$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r \wedge q)$
$\vee (\sim p \wedge r \wedge r \wedge \sim q) \vee (q \wedge r \wedge p) \vee (q \wedge r \wedge \sim p)$ वितरक नियम द्वारा
$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge r \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r), p \vee p \Leftrightarrow p$ के द्वारा

उदाहरण 1.15 : दिखाएँ कि निम्न तुल्य सूत्र (Equivalent Formulae) हैं–
(i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

हल : हम प्रत्येक सूत्र का प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य रूप लिखेंगे और फिर इन सूत्रों की तुलना करेंगे।

(i)
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \qquad \text{(i)}$$

$$p \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \sim q)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \vee \sim q) \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) और (ii) से, $p \vee (p \wedge 1) \Leftrightarrow p$

(ii)
$$p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (\sim p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \qquad \text{(iii)}$$

$$\begin{aligned} p \vee q &\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (q \wedge (p \vee \sim p)) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p) \vee (q \vee \sim q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \qquad \text{(iv)} \end{aligned}$$

टिप्पणी

समीकरणों (iii) और (iv), $p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

उदाहरण 1.16: $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim(\sim q \vee \sim p))$ का प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य प्राप्त करें।

हल : $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge \sim(\sim q \vee \sim p))$

$\Leftrightarrow \sim p \vee ((\sim p \vee q) \wedge \sim(\sim q \vee \sim p))$ क्योंकि $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

$\Leftrightarrow \sim p \vee ((\sim p \wedge q) \wedge (q \wedge p))$ डी मॉर्गन के नियम द्वारा

$\Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \wedge q \wedge p) \vee (q \wedge q \wedge p))$ वितरक नियम द्वारा

$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge p)$ क्योंकि $p \wedge \sim p \Leftrightarrow 0$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$ वितरक नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ क्रम विनिमय नियम से

उच्चिष्ठ पद (Maxterm Term) : किसी दिए गए चरों की संख्या के लिए, उच्चिष्ठ पद वियोजन से युक्त होता हैं जिनमें प्रत्येक चर या उसका निषेधन, लेकिन दोनों नहीं, केवल एक बार ही दिखाई देते हैं।

नोट: उच्चिष्ठ पद (Maxterm Term) निमनिष्ठ पद (Minterm Term) का दोहरा (Duals) होता हैं। द्वैत सिद्धांत से या सीधे सत्य तालिकाओं से, यह पता लगाया जा सकता है कि चरों के सत्य मानों के ठीक एक संयोजन के लिए प्रत्येक उच्चिष्ठ पद का एक सत्य मान 0 होता है।

प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप (Principle Conjunctive Normal Term) : किसी दिए गए सूत्र के लिए, यदि समतुल्य सूत्र केवल उच्चिष्ठ पद के संयोजन से युक्त होता हो, तो उसे प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य के रूप से जाना जाता है। इसे योग का गुणन भी कहा जाता है।

नोट्स :

1. किसी दिए गए सूत्र के लिए प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप को प्राप्त करने का तरीका प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप के समान होता है।
2. यदि किसी दिए गए सूत्र A के n चरों से युक्त प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप ज्ञात है तो प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप $\sim A$ बाकी बचे हुए निमनिष्ठ पद के वियोजन (Disjunction) से मिलकर बने होंगे जो कि प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप के A में दिखे नहीं थे। $A \Leftrightarrow \sim\sim A$ से, प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप। को प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप $\sim A$ पर डी मॉर्गन नियमों (De Morgan's Laws) का बार– बार इस्तेमाल करके प्राप्त किया जा सकता हैं।

टिप्पणी

उदाहरण 1.17 : दिए गए सूत्र S से प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप (Principal Conjunctive Normal Form) और प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप (Principal Disjunctive Normal Form) प्राप्त करें,

$$(\sim p \rightarrow r) \wedge (q \leftrightarrow \mathrm{p})$$

हल :

$S = (\sim p \rightarrow r) \vee (q \leftrightarrow p)$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge ((q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q))$

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge ((\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q))$

$\Leftrightarrow (p \vee r \vee (q \wedge \sim q)) \wedge (\sim q \vee p \vee (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim p \vee q \vee (r \wedge \sim r))$ क्योंकि $p \vee 0 \Leftrightarrow p.$

$\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p \vee r) \wedge (\sim q \vee p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$

जो कि वांछित प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप है।

अब $\sim S \Leftrightarrow (p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$ (शेष उच्चिष्ठ पद) भी प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप $\sim S$ का रूप है,

$$\begin{aligned} S \Leftrightarrow \sim\sim S &\Leftrightarrow \sim((p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)) \\ &\Leftrightarrow \sim(p \vee q \vee \sim r) \vee (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge \sim(\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \\ &\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

डी मॉर्गन के नियम द्वारा

जो कि S का प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप (Principal Disjunctive Normal Form) है।

उदाहरण 1.18 : निम्नलिखित सूत्रों से प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप (Principal Conjunctive) और प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप (Disjunctive Normal) प्राप्त करें।

(*i*) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge r \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

(*ii*) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

(*iii*) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q \wedge \mathrm{r})$

हल :

(*i*) मान लीजिए कि $A = (p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge r \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

$$\sim A \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$$

$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$ (बची हुई निमनिष्ठ पद)

अब,

$A \Leftrightarrow \sim\sim A \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q \wedge r) \wedge \sim(p \wedge q \wedge \sim r) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

$\wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ डी मॉर्गन के नियम द्वारा

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \vee)$

$\wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r)$ डी मॉर्गन के नियम द्वारा

(ii) मान लीजिए कि $A = (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

$\sim A \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (बचा हुआ निमनिष्ठ पद)

अब, $A \Leftrightarrow \sim\sim A \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

(iii) मान लीजिए कि

$$A = (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \quad p \wedge 1 \Leftrightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$

$\sim A \Leftrightarrow (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \vee \sim r)$

क्योंकि $A \Leftrightarrow \sim\sim A$,

$A \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q \wedge r) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge r) \wedge \sim(\sim p \wedge q \wedge \sim r) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

$\Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

उदाहरण 1.19 : निम्नलिखित सूत्र से प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप (Principal Conjunctive) और प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप प्राप्त करें–

(i) $q \wedge (p \vee \sim q)$

(ii) $p \to (p \wedge (q \to p))$

(iii) $(q \to p) \wedge (\sim p \wedge q)$

(iv) $p \vee (\sim p \to (q \vee (\sim q \to p)))$

(v) $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge r)$

उपर्युक्त सूत्र में से कौन सा सूत्र पुनरुक्ति है?

हल :

(i) माना कि $A = q \wedge (p \vee \sim q)$

$$\Leftrightarrow (q \vee (p \wedge \sim p)) \wedge (p \vee \sim q) \text{ क्योंकि } p \vee 0 \Leftrightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$$

जो कि वांछित प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप है। किन्तु$\sim A \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

$A \Leftrightarrow \sim\sim A \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

जो कि प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप है। स्पष्ट रूप से A पुनरुक्ति (Tautology) नहीं है।

(ii) $A = p \to (p \wedge (q \to p))$

$\Leftrightarrow \sim p \vee (p \wedge (\sim q \vee p))$

$\Leftrightarrow \sim (p \vee ((p \wedge \sim q) \vee (p \wedge p))$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (q \vee \sim q))$ क्योंकि $p \wedge T \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

जो कि प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप है। चूँकि सूत्र में सभी निमनिष्ठ पद हैं, इसलिए सूत्र एक पुनरूक्ति (Tautology) है। इसके अलावा प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप मौजूद या उपस्थित नहीं है।

टिप्पणी

(iii) माना कि $A = (q \to p) \wedge (\sim p \wedge q)$

$$\Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee (q \wedge \sim q)) \wedge (q \vee (p \wedge \sim p)) \text{ क्योंकि } p \vee 0 \Leftrightarrow p$$
$$\Leftrightarrow (\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee \sim p)$$
$$\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$$

जो कि प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप है। चूँकि सूत्र में सभी निमनिष्ठ पद मौजूद हैं, यह एक विरोधाभास है। इसके अलावा प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप मौजूद नहीं है।

(iv) माना कि $A = p \vee (\sim p \to (q \vee (\sim q \to r)))$

$$\Leftrightarrow p \vee (p \vee (q \vee (q \vee r))) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$$

जो कि प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप है।

$$\sim A \Leftrightarrow (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

इस तरह,

$$A \Leftrightarrow \sim\sim A \Leftrightarrow \wedge (p \vee q \vee \sim r) \vee \sim (p \vee \sim q \vee r) \vee \sim (p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\vee \sim (\sim p \vee q \vee r) \vee \sim (\sim p \vee q \vee \sim r)$$
$$\vee \sim (\sim p \vee \sim q \vee r) \vee \sim (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$$
$$\vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

जो कि प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप है। इसके अलावा, सूत्र पुनरुक्ति (Tautology) नहीं है।

(v) माना कि

$$A = (p \vee q) \vee (\sim p \wedge r)$$
$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \sim p) \wedge ((p \wedge q) \vee r)$$
$$\Leftrightarrow (p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$
$$\Leftrightarrow (q \vee \sim p \vee (r \wedge \sim r)) \wedge (p \vee r \vee (q \wedge \sim q))$$
$$\Leftrightarrow (q \vee \sim p \vee (r \wedge \sim r)) \wedge (p \vee r \vee (q \wedge \sim q))$$
$$\wedge (q \vee r \vee (p \wedge \sim p)) \text{ क्योंकि } p \wedge 0 \Leftrightarrow p$$
$$\Leftrightarrow (q \vee \sim p \vee r) \wedge (q \vee \sim p \vee \sim r) \wedge (p \vee r \vee q)$$
$$\wedge (p \vee r \vee \sim q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee \sim p)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee r)$$

जो कि प्रिंसिपल संयोजनी सामान्य रूप है। किन्तु,

$$\sim A \Leftrightarrow (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$A \Leftrightarrow \sim\sim A \Leftrightarrow \sim (p \vee q \vee \sim r) \vee \sim (p \vee \sim q \vee \sim r) \vee \sim (\sim p \vee \sim q \vee r) \vee \sim (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$
$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

जो कि प्रिंसिपल वियोजनीय सामान्य रूप है। इसके अलावा, सूत्र पुनरुक्ति (Tautology) नहीं है।

टिप्पणी

1.4 संबंध

संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या युग्म जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है। निम्नलिखित समुच्चय संबंधों के कुछ उदाहरण हैं:

- {(0,1), (55,22), (3,–50)}
- {(0, 1), (5, 2), (–3, 9)}
- {(–1,7), (1, 7), (33, 7), (32, 7)}

माना लीजिए कि A और B कोई दो समुच्चय है। A और B के कार्टिजीयन (Cartesian) गुणन या समुच्चय गुणन को निम्नानुसार परिभाषित किया गया है:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A; b \in B\}$$

अतः, सभी $a_i \in A$; $b_j \in B$ के लिए सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय (a_i, b_j) होगा

उदाहरण के लिए, $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$

$$A \times B = \{ (1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

यह स्पष्ट रूप से दर्शाता है कि $A \times B \neq B \times A$.

नोट: हम कार्तीयन गुणन को n पंक्तियों और m कॉलम वाले एक आयताकार सरणी क्रम में $a_1, a_2, ..., a_n$ और $b_1, b_2, ..., b_n$ के रूप को क्रमबद्ध रूप में दर्शा सकते हैं।

1.4.1 द्विआधारी संबंध

एक द्विआधारी संबंध R समुच्चय A से B के बीच क्रमित युग्मों $A \times B$ का उप –समुच्चय होता है।

उदाहरण के लिए,

1. मान लीजिए कि $A = B = N$, प्राकृत संख्याओं का समूह है
   (i) संबंध R का '=' के रूप में परिभाषित करें

   अब, $R = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3),....\} \subseteq N \times N$

   इसलिए R एक द्विआधारी संबंध है।

   (ii) R का '<' के रूप में परिभाषित करें

   $R = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4),..... (1, 3), (2, 4), (3, 5), ...\} \subseteq N \times N$

इसलिए R एक द्विआधारी संबंध है।

2. मान लीजिए कि A पृथ्वी पर सभी लोगों के समूह का समुच्चय है और $a, b \in A$, और $a\,R\,b$, अगर a और b उसी वर्ष एक ही जन्म लेते हैं।

टिप्पणी

संबंध का रेंग और परिसर या डोमेन

मान लीजिए कि R एक द्विआधारी संबंध है। सभी अवयवों x के समुच्चय $D(R)$ को, सभी y के लिए, $(x, y) \in R$ को डोमेन कहा जाता है।

अतः $D\,(R) = \{\, x : (x, y) \in R$ सभी y के लिए$\}$

इसी तरह, सभी अवयवों y के $Rg(R)$ को, सभी x के लिए, $(x, y) \in R$ को परिसर कहा जाता है।

अतः $Rg(R) = \{y : (x, y) \in R$ सभी x के लिए$\}$

संबंधों पर संक्रियाएं

मान लीजिए कि R और S का समुच्चय A से समुच्चय B के संबंध हैं तो R और S के सर्वनिष्ठ और सम्मिलन को निम्नानुसार परिभाषित किया गया है–

(i) $R \cup S = \{\, (a, b) : (a, b) \in R$ या $(a, b) \in S\}$

(ii) $R \cap S = \{(a,b) : (a, b) \in R$ और $(a, b) \in S\}$

उदाहरण 1.20: मान लीजिए कि $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

मान लीजिए कि X से X तक R और S संबंध में हैं,

$R = \{\, (x, y) : (x + y)$ संख्या 2 का गुणन है$\}$

$S = \{\, (x, y) : (x + y)$ संख्या 3 का गुणन है$\}$

$R \cup S$ और $R \cap S$ ज्ञात कीजिए।

हल: $R = \{(1, 3), (1, 5)\}$ और $S = \{(2, 4), (1, 5)\}$

$R \cup S = \{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$R \cap S = \{(1, 5)\}$

***R* का व्युत्क्रम**: समुच्चय A के समुच्चय B के बीच,एक संबंध R है। R का व्युत्क्रम B से A तक का संबंध है और इसे $R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

समाधानों का निरूपण

(i) एक द्विआधारी संबंधों वाले n अवयवों के एक समुच्चय A को m अवयवों के एक समुच्चय B के साथ M_R में पदों को चिह्नित करने $n \times m$ सरणी के रूप में दर्शाया जाता है। जो स्थितियां जोड़ों के अनुरूप होती हैं, वे सभी जगह 1 और 0 के रूप मे R मे होती हैं।

अर्थात, $M_R = [a_{ij}]\begin{cases} 1 \text{ अगर } A \text{ का } i \text{ अवयव } B \text{ के } j \text{ अवयव से संबंधित हो} \\ 0, \text{ अन्यथा} \end{cases}$

उदाहरण 1.21: मान लीजिए कि $A = B = X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तो R को X पर ‘<’ के रूप में परिभाषित करें

हलः $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

टिप्पणी

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

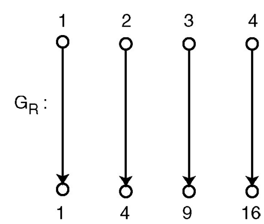
(ii) संबंध सरणी को आलेखों के रूप में मॉडल द्वारा दर्शाए गए अवयवों के समुच्चयों के रूप में देखा जा सकता है और एक क्रमिक युग्म को अवयवों के जोड़ों के दो शीर्षों के बीच कोरे से दर्शाया जाता है, जिसमें एक तीर दूसरी जोड़ी के अवयवों की ओर संकेत करता है।

उदाहरण 1.22: माना कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$ और संबंध $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$। संबंध आलेख को बनाएँ।

हलः पहले हम संबंध आव्यूह M_R लिखेंगे–

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब हम संबंध आलेख G_R तैयार करेंगे।

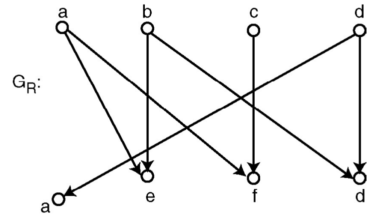


उदाहरण 1.23 : माना कि $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, e, f, d\}$ और $R = \{(a, e), (a, f), (b, e), (c, f), (b, d), (d, d), (d, a)\}$ संबंध आलेख को बनाएँ।

हलः पहले हम संबंध आव्यूह M_R लिखेंगे–

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

संबंध ग्राफ G_R निम्नानुसार दिया गया है–



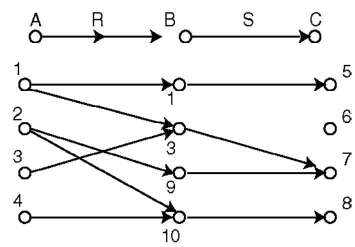
टिप्पणी

दो संबंधों का संयोजन

मान लीजिए कि एक द्विआधारी संबंध R का समुच्चय A से समुच्चय B तक संबंध हैं और द्विआधारी संबंध S का समुच्चय B से समुच्चय C तक संबंध हैं, तब क्रमित युग्मों (R, S) को संयोजित (Composable) कहा जा सकता है। यदि द्विआधारी संबंधों की एक युग्म या जोड़ी (R, S) संयोजित (Composable) है, तब संयुक्त ROS और R और S, समुच्चय A से समुच्चय C तक द्विआधारी संबंधों में होगे इस तरह कि $a \in A$ और $c \in C$ $a\,(R\,o\,S)c$ होगा अगर कुछ $b \in B$ है, तो aRb और bSc दोनों द्विआधारी संबंध होंगे।

उदाहरण 1.24 : मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 9, 10\}$ $C = \{5, 6, 7, 8\}$, $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 9), (2, 10), (3, 3), (4, 10)\}$ $S = \{(1, 5), (3, 7), (9, 7), (10, 8)\}$ $R\,o\,S$ निकले और संबंध आलेख बनाएँ।

हल:

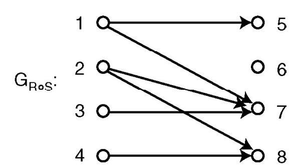


$R \circ S = \{(1, 5), (1, 7), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (4, 8)\}$

संबंधित आव्यूह इस प्रकार होगा–

$$M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

और संबंधित संबंध ग्राफ $G_{R \circ S}$ इस प्रकार होगा–



1.4.2 द्विआधारी संबंधों के गुण

गणित में, द्विआधारी संबंधों को समुच्चय A पर एक संबंध के रूप में परिभाषित किया जाता है जो कि समुच्चय A के अवयकों के क्रमित युग्मों का संग्रह है। इसे कार्टेशियन उत्पाद $A^2 = A \times A$ के उप– समुच्चय के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है। मूल रूप से, एक द्विआधारी संबंध दो समुच्चयों A और B के बीच $A \times B$ का उप– समुच्चय होता है। 2–स्थान संबंध द्विआधारी संबंधों का पर्याय है। एक द्विआधारी संबंध

टिप्पणी

एक n–Ary संबंध $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ का $n = 2$ पर एक असाधारण प्रकरण है जोकि n-टुपल्स (Tuples) का एक समुच्चय है जहाँ रजी घटक संबंध के प्रत्येक n-टुपल्स (Tuple) को jवे डोमेन (Domain) A_j से लिया जाता है। स्वयंसिद्ध समुच्चय सिद्धांत की कुछ विशिष्ट प्रणालियों में, संबंधों को उन वर्गों तक बढ़ाया जा सकता है जो समुच्चय से सामान्यीकृत हैं। समुच्चय सिद्धांत में, इस विस्तार की 'का अवयव या का उप समुच्चय ' की अवधारणाओं को प्रतिरूप करने की आवश्यकता होती है। निम्नलिखित द्विआधारी संबंधों के गुण हैं।

मान लीजिए कि R समुच्चय A से एक संबंध हैं (अर्थात् $R \subseteq \mathrm{A} \times A$)। तो R को निम्नलिखित विधि से परिभाषित किया जा सकता है–

(i) स्वतुल्यता / प्रतिवर्त (Reflexive) यदि aRa, तो $\forall\, a \in A$

(ii) सममित (Symmetric) : यदि aRb तो $bRa\ \forall\, a, b \in A$

(iii) सकर्मक (Transitive) : यदि aRb और bRc तो $aRc\ \forall\, a, b, c \in A$

(iv) अप्रतिवर्त (Irreflexive) : यदि $a \not R a$ और $a \in A$

(v) प्रतिसममित (Antisymmetric): यदि aRb तो $b \not R a$, और $a = b$, $a, b \in A$ के लिए

(vi) कनेक्टेड (Connected) : A में एक संबंध कनेक्टेड होता है अगर A में दो अलग– अलग अवयवों x और y के लिए $<x,y> \in R$ या $<y,x> \in R$ दोनों होता है।

इन गुणों के आधार पर, अन्य संयोजनों को संबंधों के कुछ वर्गों जैसे कि समतुल्यता, सहिष्णुता या आदेश का उपयोग करके परिभाषित किया जा सकता है।

- **समतुल्यता (Equivalence)** : एक समुच्चय A पर एक संबंध R को समतुल्य संबंध कहा जाता है। यदि R प्रतिवर्ती, सममित और सकर्मक हो। तुल्यता संबंधों के उदाहरण मे एक सतह में समांतर रेखाओं का एक समुच्चय है।
- **सहिष्णुता (Tolerance)** : $A \times A$ में एक संबंध R को सहिष्णुता या सहिष्णुता संबंध कहा जाता है यदि यह प्रतिवर्त और सममित हो। सहिष्णुता समतुल्यता से कमजोर या दुर्बल होता है। सहिष्णुता संबंध की धारणा समानता या निकटता की व्याख्या करना है।
- **ऑडरिंग (Ordering)** : एक द्विआधारी संबंध जो मूल रूप से सकर्मक है और आगे यह या तो प्रतिवर्ती, और प्रतिसममित या अप्रतिवर्त और असममित हो सकता है।

1.4.3 संबंधों का समापन या क्लोजर

मान लीजिए कि R समुच्चय A पर कोई भी संबंध है। R सममित, प्रतिवर्त और सकर्मक हो सकता है या नहीं। मान लीजिए कि S, A पर कोई अन्य संबंध इस तरह है कि S में R है, और S, R से युक्त प्रत्येक संबंध का उप–समुच्चय हो। तब S को R का समापन कहा जाता है।

टिप्पणी

प्रतिवर्त समापन या क्लोजर (Reflexive Closure)

मान लीजिए कि R समुच्चय X पर कोई भी संबंध है। R के प्रतिवर्त समापन S को फॉर्म (a, a) के सभी जोड़ों को R में जोड़कर प्राप्त किया जाता है, जो R में नहीं हैं, $a \in A$ अब S प्रतिवर्त होगा, जिसमें R है और किसी भी प्रतिवर्त संबंध में R युक्त होगा।

उदाहरण 1.25 : समुच्चय $A = \{a, b, c\}$ पर $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b)\}$ है। R का प्रतिवर्त समापन ज्ञात कीजिए।

हल : निरीक्षण से, हम देख सकते हैं कि R में $(b, b), (c, c)$ नहीं हैं।

$\therefore S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, b), (b, b), (c, c)\}$

अब, S, R का प्रतिवर्त समापन है।

नोटः किसी संबंध R का एक प्रतिवर्त समापन प्राप्त करने के लिए, विकर्ण अवयवों को R में जोड़ें, अर्थात, $D = \{(a,c) / a \in A\}$ विकर्ण संबंध S, R का प्रतिवर्तनात्मक समापन होता है तब $S = R \cup D$।

सममित समापन (Symmetric Closure)

मान लीजिए कि R समुच्चय A पर एक संबंध है। तो R का सममितीय समापन S को R में फॉर्म (b, a) के सभी युग्मों को जोड़कर प्राप्त किया जाता है अगर $(a, b) \in R$ और $(b, a) \notin R$ हो।

दूसरे शब्दों में, R का सममित समापन $S = R \cup R^{-1}$ के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 1.26: मान लीजिए कि समुच्चय $A =(a, b, c)$ पर $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, b)\}$ संबंध है। R के सममितीय समापन का पता लगाएं।

हल : स्पष्ट रूप से R सममित नहीं है।

अब $S = R \cup R^{-1} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, a), (c, b), (b, a), (a, c), (b, c)\}$

स्पष्ट रूप से अब S सममित है और यह R से समाहित है और यह R युक्त किसी भी सममित संबंध में होगा।

कनेक्टिविटी संबंध (Connectivity Relation)

मान लीजिए कि R समुच्चय A पर एक संबंध है। तो कनेक्टिविटी संबंध R^* में जोड़ी (a, b) इस तरह होगी कि R में A और B के बीच का एक रास्ता हो।

प्रमाणः कोई भी संबंध R का सकर्मक समापन कनेक्टिविटी (Connectivity) संबंध R^* के तुल्य (बराबर) होता है।

मान लीजिए कि R समुच्चय। पर एक संबंध है।

दावाः R^*, R का सकर्मक समापन है। यह सिद्ध करने के लिए,

(i) R^* सकर्मक है और

(ii) $R \subseteq S$ के साथ, S, A पर एक सकर्मक संबंध है। तब $R^* \subseteq S$ होगा

परिभाषा के अनुसार, $R^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

अर्थात R^* में R होता है।

(i) यदि $(a,b) \in R^*$ और $(b,c) \in R^*$ है, तो R में a से b और b से c तक एक पथ होगा। इस प्रकार, हम a से b शुरू करके और इसका अनुसरण b से c तक करते हुए, a से c तक का मार्ग प्राप्त करते हैं।

$\therefore (b,c) \in R^*$.

अर्थात, R^* सकर्मक है।

(ii) मान लीजिए कि S, R युक्त एक सकर्मक संबंध है।

चूंकि S सकर्मक है, S^n भी सकर्मक होगा।

आगे $S^n \subseteq S$ चूंकि, $S^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i$, और $S^i \subseteq S, S^* \subseteq S.$

चूँकि R में कोई भी पथ S में भी एक पथ होगा, $R^* \subseteq S^*$, अगर $R \subseteq S$

अब हमारे पास $R^* \subseteq S^*$ और $S^* \subseteq S$ है।

$\Rightarrow R^* \subseteq S^*$

अर्थात, किसी भी सकर्मक संबंध जिसमें R होता है, उसमें R^* भी होगा।

इस प्रकार, R^*, R का सकर्मक समापन है।

सकर्मक समापन (Transitive Closure)

मान लीजिए कि M_R संबंध R के द तत्वों के समुच्चय A पर एक आव्यूह संबंध है। तो सकर्मक समापन आव्यूह M_{R^*} को निम्न रूप से लिखा जाता है–

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \ldots \vee M_{R^n}$$

उदाहरण 1.27

(i) समुच्चय $\{a,b,c\}$ पर किसी संबंध R का सकर्मक समापन ज्ञात करें, जिसका संबंध आव्यूह M_R निम्नानुसार है :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

हल : मान लीजिए कि R^*, R का सकर्मक समापन है। तब R^* का संबंध आव्यूह M_{R^*} इस प्रकार होगा–

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R_2} \vee M_{R_3}$$

अब,

$$M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{R3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी

(ii) संबंध R के सकर्मक समापन आव्यूह का पता लगाएं, जिसका संबंध आव्यूह निम्नानुसार हैः

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

हल : मान लीजिए कि R^*, R का सकर्मक समापन मानते हैं और $M_R{}^*$ संबंधित संबंध आव्यूह है।

हमारे पास है : $M_{R^*} = M_R \vee M_{R_2} \vee M_{R_3}$

अब,

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} v \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

नोट : सकर्मक समापन को निम्नलिखित एल्गोरिथम द्वारा प्राप्त किया जा सकता है–

सकर्मक समापन (M_R; $0-1$ $n \times n$ आव्यूह (Matrix)

$A \leftarrow M_R$

$B \leftarrow A$

i के लिए $\leftarrow 2$ to n

प्रारंभ करें,

$A \leftarrow A \,.\, M_R$

$B \leftarrow B \vee A$

समाप्त (B, R^* का आव्यूह है)

1.4.4 समतुल्यता संबंध

एक समुच्चय A पर संबंध R को समतुल्यता संबंध कहा जाता है यदि R, प्रतिवर्ती, सममित और सकर्मक है।

उदाहरण 1.28: मान लीजिए कि N प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय हैं। N पर R को परिभाषित करें :

$$R = \{(x,y) : x + y \text{ सम है}, x, y \in N\}$$

हल : मान लीजिए कि $x \in N$। अब $x + x = 2x$

स्पष्ट रूप से $2x$ सम है। इसलिए R प्रतिवर्त है। मान लीजिए कि $x, y \in N$ और $x + y$ सम (Even) है।

स्पष्ट रूप से $y + x$ भी सम होगा और इसलिए R सममित है।

अब, यदि $x+y$ सम है और $y+z$ भी सम है तो हमें यह सिद्ध करना होगा कि $x+z$ भी सम होगा।

चूंकि, $x+y$ और $y+z$ सम हैं, दोनों $(x+y)$ और $(y+z)$, 2 से विभाज्य हैं।

इसलिए $(x+y)+(y+z)$ भी 2 से विभाज्य होगा, अर्थात, $x+(y+y)+z$, 2 से विभाज्य है।

$(x+z)$, 2 से विभाज्य है।

R सकर्मक है। इसलिए, एक समतुल्य संबंध है।

नोटः संबंध आलेख या संबंध आव्यूह से, संबंध के प्रकार की पहचान की जा सकती है।

उदाहरण 1.29: एक समुच्चय पर संबंध R निम्नलिखित द्वारा दर्शाया गया है–

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

क्या R प्रतिवर्त (Reflexive), सममित (Symmetric) या प्रतिसममित (Antisymmetric) है?

हल : आव्यूह M_R में, विकर्ण अवयवों 1 हैं, इसलिए R प्रतिवर्त (Reflexive) है।

चूंकि R सममित है, इसलिए संबंध R भी सममित होगा।

उदाहरण 1.30 : संबंध R और R_1 एक सेट निम्नलिखित द्वारा दर्शाया गया है–

(i) $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

क्या संबंध R और R_1 प्रतिवर्त (Reflexive), सममित (Symmetric), प्रतिसममित (Antisymmetric) या सकर्मक हैं ?

हल :

(i) चूँकि, आव्यूह M_R सममित और इसकी विकर्ण प्रविष्टियाँ 1 हैं, इसलिए संबंध R सममित और प्रतिवर्त है। चूँकि R प्रतिसममित नहीं है, इसलिए R सकर्मक है।

(ii) संबंध R_1 प्रतिवर्ती नहीं है।

R_1 सममित है।

इसलिए M_{R_1} सममित होगा।

और R_1 सकर्मक है।

उदाहरण 1.31 : निम्नलिखित संबंधों के लिए संबंध आलेख बनाएँ।

(i) समुच्चय $X = \{1, 2, 3, 4\}$ पर $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

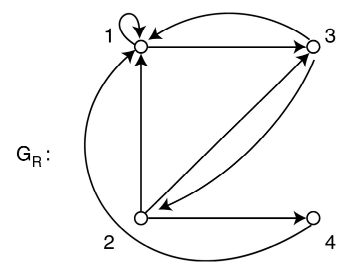
(ii) समुच्चय $Y = \{1, 2, 3\}$ पर $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

हल :

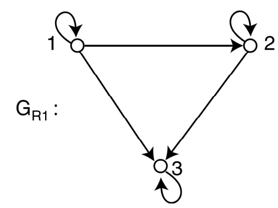
टिप्पणी

(i) R का संबंध आलेख G_R निम्नानुसार है:

G_R के शीर्षों 1, 2, 3, 4 हैं।



(ii) R_1 का संबंध आलेख G_{R_1} निम्नानुसार है:



उदाहरण 1.32 : मान लीजिए कि एक संबंध R को निम्नानुसार दर्शाया गया है:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(i)\ R^{-1}$ $(ii)\ R^c$ $(iii)\ R^2$ का निरूपण करने वाले संबंध आव्यूह का पता लगाएं।

हल :

(i) संबंध R का व्युत्क्रम संबंध आव्यूह $(M_{R^{-1}})$ प्राप्त करने के लिए सिर्फ (M_R) का मैट्रिक्स परिवर्तन या ट्रैन्स्पोज (Transpose) लिखना होता है।

$$\therefore \qquad M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) पूरक संबंध आव्यूह को प्राप्त करने के लिए, दिए गए संबंध आव्यूह में 0 को 1 और 1 को 0 से बदलें।

$$\therefore \qquad M_{R^c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

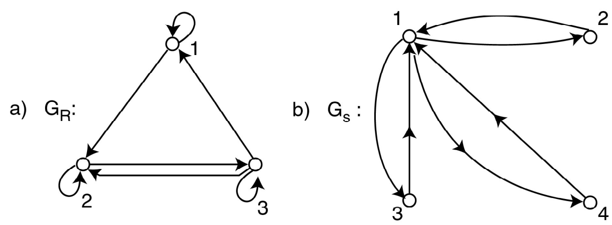
(iii) R^2 का संबंध आव्यूह को प्राप्त करना जब $R^2 = R\ o\ R$ हो।

टिप्पणी

यदि संबंध आव्यूह M_R ज्ञात है, तो $M_{R^2} = M_R . M_R$ (आव्यूह गुणन)

$$\therefore \qquad M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 1.33 : पता करें कि निम्नलिखित आलेखों में दिखाए गए निर्देशित दिष्ट के संबंध प्रतिवर्ती, सममितीय, प्रतिसममितीय और/या सकर्मक हैं।



हलः

(i) G_R में, संबंध आलेखों के प्रत्येक शीर्ष पर लूप होते हैं और इसलिए यह प्रतिवर्ती होते है।

यह न तो सममित है और न ही प्रतिसममितीय है क्योंकि 1 और 2 के बीच कोर है लेकिन 2 से 1 के बीच नहीं है, लेकिन 2 और 3 के बीच दोनों तरह कोरे हैं।

इसके अलावा, संबंध सकर्मक नहीं है, क्योंकि 1 से 2 और 2 से 3 तक कोरे है, लेकिन 1 से 3 तक कोई कोरे नहीं है।

(ii) चूंकि G_S में लूप मौजूद नहीं हैं, इसलिए यह संबंध प्रतिवर्ती नहीं है। इसके अलावा, यह सममित है और प्रतिसममितीय नहीं है।

इसके अलावा, संबंध सकर्मक नहीं है।

1.4.5 समतुल्यता वर्ग और विभाजन

मान लीजिए कि एक संबंध R का समुच्चय A के साथ समतुल्य संबंध है। यदि $x \in A$ तो तुल्यता वर्ग a को निम्न विधि से दर्शाया जाता है,

$$[a]_R = \{x \in A: (a, x) \in R\}$$

नोट : $[a]_R \neq \phi$, क्योंकि $a \in [a]$।

उदाहरण 1.34: सिद्ध कीजिए कि कोई दो समतुल्य वर्ग समरूप या असंयुक्त होते हैं।

हल : पहले हम यह सिद्ध करेंगे कि $(a,b) \in R$ । इसका मतलब है कि $[a]_R = [b]_R$

मान लीजिए कि $(a, b) \in R$

केस I: $[a] = [b]$

यदि $x \in [a] \Rightarrow (x, a) \in R$

$\Rightarrow (x,b) \in R$ [$\because$ $(x,a) \in R$ और $(a,b) \in R$ और R सकर्मक है]

$\Rightarrow x \in [b]$

$\Rightarrow [a] = [b]$

$\therefore \quad [a] = [b]$

अब मान लीजिए कि $[a], [b]$ दो समतुल्य वर्ग हैं।

टिप्पणी

केस II: $[a] = [b]$ or $[a] \cap [b] = \phi$

अगर $[a] \cap [b] = \phi$ तो सिद्ध करने के लिए कुछ नहीं होगा।

मान लीजिए कि $[a] \cap [b] \neq \phi$, तब $x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow x \in [a]$ और $x \in [b]$

$\Rightarrow (x, a) \in R$ और $(x, b) \in R$

$\Rightarrow [x] = [a]$ और $[x] = [b]$

$\Rightarrow [a] = [b]$

$\therefore \quad [a] \cap [b] = \phi$ या $[a] = [b]$

अर्थात, कोई दो समतुल्य वर्ग समरूप या असंयुक्त होते हैं।

उदाहरण 1.35: सिद्ध करें कि एक समतुल्य संबंध एक विभाजन के लिए प्रेरित करता है और एक विभाजन एक समतुल्य संबंध को प्रेरित करता है।

हल : मान लीजिए कि $\{A_i : i \in Z\}$ एक समुच्चय A का एक विभाजन है। A पर एक संबंध R को $(a,b) \in R$ से परिभाषित करें। अगर कुछ i के लिए $a, b \in A_i$ है।

केस I : R, A पर एक समतुल्य संबंध है।

जब $a \in A$

$\Rightarrow a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow a, a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow (a, a) \in R.$

R, A पर एक प्रतिवर्ती संबंध है।

यदि $(a, b) \in R$, R की परिभाषा के अनुसार,

$a, b \in A_i$ कुछ i के लिए

$\therefore \quad b, a \in A_i$ कुछ i के लिए

$\Rightarrow \quad (b, a) \in R.$

$\therefore \quad R, A$ पर एक सममित संबंध है।

यदि $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R$ तब $a, b \in A_i$ और $b, c \in A_j$ कुछ i और j के लिए

यहाँ, $b \in A_i$ और $b \in A_j$

$\therefore A_i \cap A_j \neq \phi \Rightarrow A_i = A_j$, अन्यथा $\{A_i\}_{i \in I}$ एक विभाजन नहीं है और इसलिए $a, b, c \in A_i$

टिप्पणी

$\therefore (a, c) \in R$

$\therefore R, A$ पर एक सकर्मक संबंध है।

R, A पर एक समतुल्य संबंध भी है।

इसके अलावा, हम यह भी दिखा सकते हैं कि $A_i = [a]_{a \in A}$

इसके विपरीत, हम मान सकते हैं कि R, समुच्चय A पर एक समतुल्य संबंध है।

केस *II*: R, A के लिए एक विभाजन को प्रेरित करता है।

यदि, $x \in A$, $[x] = \{y \in A$ è $(y, x) \in R\}$ और किसी भी $x, y \in A$ के लिए हमारे पास,

$$[x] \cap [y] = \phi \text{ or } [x] = [y]$$

$\therefore A = \cup_{x \in A} [x]$ है

अर्थात् $\{[x] : x \in A\}$, A का एक विभाजन है।

1.5 व्युत्क्रम संबंध और संयुक्त संबंध

फलन

समुच्चय A से समुच्चय B के बीच फलन या मैपिंग एक 'विधि' है जो समुच्चय A के अवयवों को समुच्चय B के युग्म अवयवों से जोड़ता है और हम $f: A \to B$ को यह इंगित करने के लिए दर्शाते हैं कि समुच्चय A से समुच्चय B तक f एक फलन है।

B को फलन f का सह–डोमेन (Co-Domain) कहा जाता है और A को उसका डोमेन (Domain) कहा जाता है। इसके अलावा, A के प्रत्येक अवयव a के लिए, f, B के अवयव b को परिभाषित करता है। हम $a \xrightarrow{f} f(a)$ या $a \xrightarrow{f} b$, $a \in A$, $b \in B$ लिखते हैं।

उदाहरण के लिए,

(*i*) संबंध $f = \{(1, d), (2, c), (3, a)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ से $B = \{a, c, d\}$ तक A से B के बीच फलन हैं। f का डोमेन (Domain) A है और f का सह–डोमेन (Co-Domain) B है।

(*ii*) संबंध $f = \{(a, b), (a, c), (b, d),\}$, $A = \{a, b\}$ से $B = \{b, c, d\}$ तक के बीच फलन नहीं है।

फलन का परास (Range of Function): मान लीजिए कि $f: A \to B$ एक फलन है। फलन की परास,

$R(f) = \{ f(a) \mid a \in A\}$ (ध्यान दें कि $R(f) \leq B$)

नोट्स

(*i*) ऊपर के उदाहरण से: $R(f)$, $\{d,c,a\}$ है।

टिप्पणी

(*ii*) मान लीजिए कि $f: IR^+ \to IR, f(x) = x^2$ (R^+, धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है)। स्पष्ट रूप से f एक फलन है, जिसका डोमेन धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और सह–डोमेन वास्तविक संख्या है।

$$R(f) = \{x^2 \mid x \in R^+\} = \{1, 4, 9, ...\}$$

माना कि $f: A \to B$ एक फलन है, तो f के निम्नलिखित रूप हो सकते है :

(*i*) **एकैकी फलन** : अगर $x_1 \neq x_2$ तो $f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

या

जब भी $f(x_1) = f(x_2), x_1 = x_2$ इस फलन को अंतःक्षेपक (Injective) एकैक फलन के रूप में भी जाना जाता है।

(*ii*) **आच्छादक फलनः** यदि सह–डोमेन B में प्रत्येक अवयव y को डोमेन A के कम से कम एक अवयव x के साथ मैप किया गया हो, इस तरह कि $f(x) = Y$ हो

या

अगर $R(f) = B$ का सह–डोमेन हो।

(*iii*) **एकैकी–आच्छादक फलन** : यदि f एकैकी और आच्छादक दोनों फलन हो।

(*iv*) **अचर फलन** : यदि डोमेन के प्रत्येक अवयव को डोमेन के अद्वितीय अवयव के लिए मैप किया जाता है या डोमेन में केवल एक अवयव होता है।

(*v*) **गुणित फलन** : यदि कम से कम सह–डोमेन के एक अवयव को डोमेन के किसी भी एक अवयव द्वारा मैप नहीं किया गया है।

(*vi*) **तत्समक फलन** : यदि $f(x) = x, \forall x \in B$, इस केस में $A \leq B$

(कई बार इसे $f: A \to A$ और $f(x) = x, \forall x \in A$ के रूप में परिभाषित किया जाता है

उदाहरण के लिए,

(*i*) $f: R^+ \to R$ एक फलन है जिसे $f(x) = 2(x + 2)$ के रूप में परिभाषित किया गया है, स्पष्ट रूप से f एकैकी (1–1) है, क्योंकि अगर $2(x + 2) = 2(y + 2)$

$\Rightarrow 2x + 4 = 2y + 4$

$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी (1–1) है।

(*ii*) $f: R \to R^+$ को $f(x) = e^x, \forall x \in R$ से परिभाषित करें। स्पष्ट रूप f एकैकी (1–1) है। क्योंकि अगर $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$

$\Rightarrow e^{x_1 - x_2} = 1$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f$ एकैकी (1–1) है।

(*iii*) माना कि $A = \{5, 6, 7\}$ और $B = \{a, b\}$ । तब मैपिंग $f : A \to B$ को इस तरह परिभाषित किया जाता है कि $f(5) = a; f(6) = b; f(7) = a$ होगा। स्पष्ट रूप से f एकैकी (1–1) नहीं है। लेकिन f आच्छादक (Onto) है।

टिप्पणी

(*iv*) उदाहरण (*ii*) पर विचार करें। यदि $f : R \to R$ को $f(x) = e^x$ द्वारा परिभाषित किया जाता है तो यह आच्छादक (Onto) होगा। माना कि x कोई भी अवयव IR^+ में है तो $\log y \in IR$ इस तरह कि $f(\log y) = e^{\log y} = y$ है।

(*v*) $f: Z_+ \to Z_+$ क्योंकि $f(n) = n^2$, $\forall\, n \in Z_+$ के रूप में परिभाषित करें। स्पष्ट रूप से f गुणित फलन (Into Function) है (क्योंकि 3 को Z_+ में किसी भी अवयव द्वारा मैप नहीं किया गया है) और किन्तु एकैकी (1–1) मैपिंग है, लेकिन f आच्छादक (Onto) नहीं है।

(*vi*) $f : Z \to Z$ को $f(n) = n + 1, \forall\, n \in z$ से परिभाषित करें। स्पष्ट रूप से f एकैकी (1–1) और आच्छादक (Onto) है।

(*i*) $f(n) = f(m) \Rightarrow n + 1, = m + 1 \Rightarrow n = m$

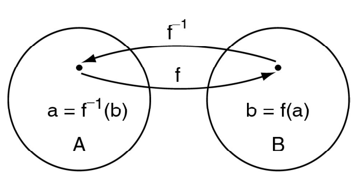
इसलिए f एकैकी (1–1) है।

(*vii*) यदि Z मे कोई अवयव n है तब $n - 1 \in Z$ इस तरह कि $f(n - 1) = n - 1 + 1 = n$ तब f आच्छादक (Onto) होगा।

नोट : कभी–कभी एकैकी (One-One या 1–1) समुच्चय S के आच्छादक (Onto) को समुच्चय S का क्रमचय (Permutation) भी कहा जाता है।

1.5.1 व्युत्क्रम फलन और फलनों का संयोजन

माना कि समुच्चय A से समुच्चय B तक के लिए f एक एकैकी–आच्छादक फलन (Bijective Function) है। f का व्युत्क्रम फलन वह फलन होता है जो किसी अवयव $b \in B$ को एक अद्वितीय अवयव a से इस प्रकार जोड़ता है कि $f(a) = b$ हो। f का व्युत्क्रम फलन f^{-1} द्वारा निरूपित किया जाता है। इसलिए $f^{-1}(b) = a$ जब $f(a) = b$ होता है।



f^{-1} फलन f का व्युत्क्रम फलन है।

नोट: एक एकैकी–आच्छादक फलन (Bijective Function) को व्युत्क्रमणीय कहा जाता है क्योंकि हम इस फलन के व्युत्क्रम को परिभाषित कर सकते हैं।

उदाहरण 1.36

(*i*) $f : Z \to Z$ को $f(n) = n + 1$ से परिभाषित करें। क्या f व्युत्क्रमणीय है, और यदि है, तो इसका व्युत्क्रम क्या होगा ?

हल : फलन f एक व्युत्क्रम है, क्योंकि यह एक एकैकी–आच्छादक फलन (Bijective Function) है।

माना कि x का प्रतीक y है, ताकि $y = x + 1$ हो, तब $x = y - 1$ होगा, अर्थात, Z का $y - 1$ अद्वितीय अवयव है जिसे f द्वारा y को भेजा गया है। इसलिए $f^{-1} = y - 1$ है।

(ii) माना कि $A = \{a, b, c\}$, और $B = \{5, 6, 7\}$ है। $f: A \to B$ को इस तरह परिभाषित करें कि $f(a) = 5; f(b) = 6; f(c) = 7$ हो। क्या f व्युत्क्रमणीय है, और यदि है, तो इसका व्युत्क्रम क्या होगा ?

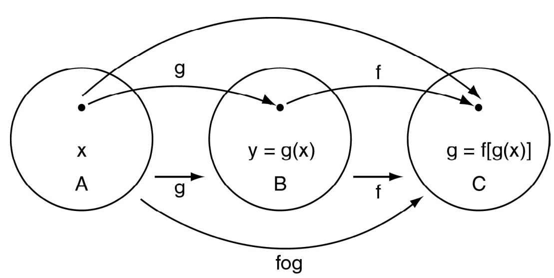
हल : स्पष्ट रूप से दिया गया फलन एकैकी–आच्छादक फलन (Bijective Function) है। f का व्युत्क्रम फलन $f^{-1}(5) = a;\ f^{-1}(6) = b; f^{-1}(7) = c$ होगा।

(iii) $f: Z \to Z$ को $f(x) = x^2$ से परिभाषित करें। क्या f व्युत्क्रमणीय है?

हल: चूंकि $f(-2) = f(2) = 4$, f 1–1 नहीं है। यदि किसी व्युत्क्रम फलन को परिभाषित किया जाता है, तो उसे दो अवयवों को 2 आवंटित करना होगा, इसलिए f व्युत्क्रमणीय नहीं है।

परिभाषा: मान लीजिए कि समुच्चय A से समुच्चय B तक g एक फलन है और इसी प्रकार समुच्चय B से समुच्चय C तक f एक फलन है। फलन f और g के संयोजन को $f \circ g$ द्वारा चिह्नित किया जाता है।

$$(f \circ g)\,(x) = f(g(x)), \forall\, x \in A$$



उदाहरण 1.37: माना लीजिए कि $f: Z \to Z$ एक फलन जिसे $f(x) = 2x + 3$ द्वारा परिभाषित किया गया है। इसी प्रकार, माना कि $g: Z \to Z$ को $g(x) = 3x + 2$ द्वारा परिभाषित किया गया है।

(i) $f \circ g$ (ii) $g \circ f$ को निकले।

हल : $f \circ g$ और $g \circ f$ दोनों को परिभाषित किया गया है। आगे,

(i) $(f \circ g)\,(x) = f(g(x)) = f(3x+2)$

$$= 2(3x+2) + 3 = 6x + 7$$

(ii) $(g \circ f)\,(x) = g(f(x)) = g(2x + 3)$

$$= 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

यद्यपि $f \circ g$ और $g \circ f$ को परिभाषित किया गया हो, लेकिन यह जरूरी नहीं कि $f \circ g$ और $g \circ f$ तुल्य (बराबर) हो, यानी, फलन के संयोजन पर क्रम – विनिमेयता नियम (Commutative Law) लागू नहीं होता है।

उदाहरण 1.38 : मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y\}, C = \{a\}$। मान लीजिए कि $f: A \to B$ को $f(1) = x;\ f(2) = y; f(3) = x$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। इसी प्रकार, माना $g: B \to C$ को $g(x) = a; g(y) = a$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।

(i) $f \circ g$ यदि संभव हो तो (ii) $g \circ f$, यदि संभव हो तो, को ज्ञात कीजिए?

टिप्पणी

हलः

(*i*) $(f\ o\ g)\ (x) = f(g(x))$ (परिभाषा द्वारा)। लेकिन f को C पर लागू नहीं किया जा सकता है, इसलिए $f\ o\ g$ निरर्थक है।

(*ii*) $(g\ o\ f) : A \to C$ सार्थक है। अब $(g\ o\ f)\ (x) = g(f(x)), \forall\ x \in A.$

$$\therefore \quad (g\ o\ f)\ (1) = g(f(1)) = g(x) = a$$
$$(g \circ f)\ (2) = g(f(2)) = g(y) = a$$
$$(g\ o\ f)\ (3) = g(f(3)) = g(x) = a$$

प्रमाण : अगर $f : A \to B, g : B \to C$ और $b : C \to D$ तब $(h\ o\ g)$ of $= h\ o\ (g\ o\ f)$

हल : परिभाषा के अनुसार, $[(h\ o\ g)\ o\ f]\ (x) = (h\ o\ g)\ (f(x))$

$$= h(g(f(x))) \qquad \text{(i)}$$

और $[h\ o\ (g\ o\ f)]\ (x) = h[(g\ o\ f)\ (x)]$

$$= h[g(f(x))] \qquad \text{(ii)}$$

समीकरणों (i) और (ii), से $(h\ o\ g) = h\ o\ (g\ o\ f)$

प्रमाण : मान लीजिए कि $f : A \to B$ और $g : B \to C$ तब,

(*i*) $(g\ o\ f)$ आच्छादक फलन (Onto Function) होगा अगर f और g दोनों आच्छादक फलन (Onto) है।

(*ii*) $(g\ o\ f)$ एकैकी फलन 1–1 होगा अगर f और g दोनों एकैकी (1–1) है।

प्रमाणः

(*i*) मान लीजिए कि $Z \in C$ क्योंकि $g : B \to C$ आच्छादक फलन (Onto) है, अवयव $y \in B$ इस तरह कि $g(y) = Z$

क्योंकि $f: A \to B$ आच्छादक फलन (Onto) है, अवयव $x \in B$ इस तरह कि $f(x) = y$

$$\therefore (g\ o\ f)\ (x) = g(f(x)) = g(y) = Z$$

$\therefore (g\ o\ f)$ आच्छादक (Onto) है।

(*ii*) मान लीजिए कि $x_1 \neq x_2$ दो अवयवों A में है क्योंकि $f : A \to B$ एकैकी फलन (One-One या (1—1)) है, और $f(x_1) \neq f(x_2)$, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. इसलिए $g\ o\ f$ एकैकी (One-One (1—1)) होगा क्योंकि B में, $g : B \to C$ एकैकी (One-One (1—1)) है और $f(x_1) \neq f(x_2)$।

1.5.2 कुछ महत्वपूर्ण फलन

सबसे बड़ा पूर्णांक फलन : सबसे बड़ा फलन वास्तविक संख्या x को सबसे बड़ा पूर्णांक प्रदान करता है जो x से कम या बराबर होता है। और इस फलन का मान $[x]$, (या $\lfloor x \rfloor$) द्वारा निरूपित किया जाता है।

सीलिंग : सीलिंग फलन वास्तविक संख्या x को सबसे छोटा पूर्णांक प्रदान करता है जो x से अधिक या उसके बराबर होता है। इस फलन का मान $\lceil x \rceil$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

टिप्पणी

निम्नलिखित उदाहरण सीलिंग फलन को दर्शाने के लिए हैं।

(*i*) $\lfloor x \rfloor = \lfloor 1/2 \rfloor = 0$; $\lceil x \rceil = \lceil 1/2 \rceil = 1$

(*ii*) $\lfloor 5.6 \rfloor = 5$; $\lceil 5.6 \rceil = 6$

(*iii*) $\lfloor 4.1 \rfloor = 4$; $\lceil 4.1 \rceil = 5$

(*iv*) $\lfloor 3 \rfloor = 3$; $\lceil 3 \rceil = 3$

उदाहरण 1.39: कंप्यूटर डिस्क पर संग्रहीत या डेटा नेटवर्क (Data Network) पर प्रेषित आकड़ों को बाइट्स के स्ट्रिंग (String of Bytes) के रूप में दर्शाया जाता है। 500 बिट्स (Bites) आकड़ों को एनकोड करने के लिए कितने बाइट्स (Bytes) की आवश्यकता होती है?

हल : बाइट्स की आवश्यक संख्या ज्ञात करने के लिए, हम सबसे छोटे पूर्णांक का निर्धारण करते हैं जो कम से कम भागफल (Quotient) जितना बड़ा हो। जब हम 500 को 8 से विभाजित करते है, तो हमें एक बाइट में बिट्स की संख्या मिलती है।

$$\left\lceil \frac{500}{8} \right\rceil = \lceil 62.5 \rceil = 63 \text{ बाइट्स की आवश्यकता होती है।}$$

उदाहरण 1.40: ATM (एसिंक्रोनस ट्रांसफर मोड) में, आकड़ों को 53 बाइट्स के सेल या कोश (Cell) में व्यवस्थित किया जाता हैं। 200 केबी प्रति सेकंड की दर से आकड़े प्रसारित करने वाले संचार माध्यम से 2 मिनट में कितने एटीएम सेल (Cell) प्रसारित किए जा सकते हैं?

हल : 2 मिनट में, यह संचार माध्यम $200000 \times 60 \times 2 = 2{,}40{,}00{,}000$ बिट्स संचारित कर सकता है। चूंकि प्रत्येक ATM सेल 53 बाइट्स का है, इसलिए $53 \times 8 = 424$ बिट्स दीर्घ होगा।

ATM (Cells) की संख्या जो कि दिए गए संचार माध्यम से 2 मिनट में प्रसारित की जा सकती है,

$$\left\lceil \frac{2{,}40{,}00{,}000}{424} \right\rceil = \lceil 56603.77 \rceil = 56604$$

मॉड्यूलस ऑपरेटर: यदि x एक गैर–ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है और y एक धनात्मक पूर्णांक है, जब x को y द्वारा विभाजित किया जाता है, तो हम $x \bmod y$ को शेषफल के रूप में परिभाषित करते हैं।

उदाहरण के लिए, 11 mod 2 = 1; 5 mod 1 = 0; 365 mod 7 = 1.

मॉड (Mod) ऑपरेटर का एक अन्य महत्वपूर्ण उपयोग ISBN (इंटरनेशनल स्टैंडर्ड बुक नंबर) है। ISBN 10 वर्णों का एक सांकेतिक नबंर कोड (Code) है जिसे डैश (Dashes) द्वारा अलग किया गया है जैसे कि 0–333–40733–7, इसमें चार भाग हैं, समूह कोड, प्रकाशक कोड, एक कोड जो विशेष प्रकाशक द्वारा प्रकाशित पुस्तकों के बीच उन पुस्तकों की विशिष्ट रूप से पहचान करता है और चेक करेक्टर (Check Character) है। इस चेक करेक्टर (Check Character) का उपयोग किसी ISBN को मान्य करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण के लिए, 0–333–40736–7, समूह कोड 0 है, जो पुस्तक की अंग्रेजी बोलने वाले देश में से एक के रूप में पहचान कराती है। प्रकाशक कोड 333 मैकमिलन द्वारा प्रकाशित पुस्तक के रूप में पहचान करती है। कोड 40736 मैकमिलन द्वारा प्रकाशित उन में से विशिष्ट रूप से पुस्तक की पहचान कराती है। चेक करेक्टर (Check Character) n मोड 11 है, जहाँ n पहले अंक का योग प्लस दूसरे अंक का 2 गुणन प्लस तीसरे अंक का तीन से गुणन, ... नौवें अंक का नौ से गुणन है। यदि मान 10 है, तो चेक करेक्टर (Check Character) x होगा। हमारे उदाहरण में,

$n = 0 + 2.3 + 3.3 + 4.3 + 5.4 + 6.0 + 7.7 + 8.3 + 9.6 = 0 + 6 + 9 + 12 + 20 + 0 + 49 + 24 + 54 = 174$

इसलिए n मॉड (mod) 11 = 174 मॉड (mod) 11 = 7.

उदाहरण 1.41:

(*i*) सप्ताह का कौन सा दिन शुक्रवार से 365 दिन होगा?

हल :

(*i*) $365 \bmod 7 = 1$. इस प्रकार शुक्रवार से 365 दिन, शनिवार होगा। शुक्रवार से 7 दिनों के बाद शुक्रवार ही आता है। सामान्य तौर पर अगर $K>0, K \in Z$ दिनों के बाद फिर से शुक्रवार ही आएगा।

(*ii*) ISBN 0-07-003575-x में x ज्ञात कीजिए।

हल : आईएसबीएन या ISBN 0-07-003575-x है। यहाँ 0–पुस्तक का मतलब अंग्रेजी बोलने वाले देश से है। प्रकाशक कोड 07 मैकग्रा हिल (McGraw Hill) द्वारा प्रकाशित पुस्तक के रूप में पता चलता है। कोड 003575 विशिष्ट रूप से मैकग्रा हिल (McGraw Hill) द्वारा प्रकाशित पुस्तक के रूप में पता चलता है।

चेक करेक्टर (Check Character) n मॉड 11 है, जहां

$n = 0 + 2.0 + 3.7 + 4.0 + 5.0 + 6.3 + 7.5 + 8.7 + 9.5 = 0 + 0 + 21 + 0 + 0 + 18 + 35 + 56 + 45$

$n = 175$

$\therefore$ n मॉड (Mod) 11 = 175 मॉड (mod) 11 = 10.

चेक करेक्टर (Check Character) 10 है, अर्थात, x का मान 10 है।

1.5.3 समुच्चय, संबंध और फलन

पुनरावर्ती फलन

हम सबसे पहले क्रियात्मक रूप से फलन के एक वर्ग को परिभाषित करेंगे और बताएंगे कि इस तरह के किसी भी फलन का मूल्यांकन पूरी तरह से यांत्रिक विधि से किया जा सकता है। हम स्वयं को केवल उन्हीं फलनों तक सीमित रखेंगे जिनके तर्क और मान प्राकृतक संख्याएँ हैं।

पूर्ण और आंशिक फलन (Total and Partial Functions): कोई भी फलन $f: N^n = N \times N \times \ldots\ldots \rightarrow N$ को पूर्ण कहा जाता है यदि इसे N^n में प्रत्येक n–टुपल (Tuple) के लिए परिभाषित किया गया हो। यदि $f: D \rightarrow N$ परिभाषित किया गया है, जहां $D \leq N^n$, तब f को आंशिक कहा जाता है।

टिप्पणी

उदाहरण के लिए, यदि $f: N \times N \to f(x, y) = x + y$ के द्वारा, तो f पूर्ण फलन होता है। यदि $g: N \times N \to N$ को $g(xy) = x–y$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो g एक आंशिक फलन होता है, क्योंकि इसे केवल x, y के लिए परिभाषित किया गया है जब $x, y \in N$ होता है।

शून्य फलन (Zero Function) : अगर सभी $x \in N$ के लिए, एक फलन $Z: N \to N$ को $Z(x) = 0$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो यह एक शून्य फलन कहलाता है।

उत्तराधिकारी फलन (Successor Function) : एक फलन $S: N \to N$ को $S(x) = x + 1$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो सभी $x \in N$ के लिए, यह उत्तराधिकारी फलन कहलाता है।

प्रोजेक्शन फलन (Projection Function) : एक फलन $U_i^n : N^n \to N$ को U_i^n $(x_1, x_2, ..., x_i, ... x_n) = x_i$, द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो सभी $x_i \in N, i = 1, 2, ... n$, के लिए, इसे प्रोजेक्शन फलन कहा जाता है।

इन तीन फलनों को प्रारंभिक फलनों के रूप में जाना जाता है।

अब हम फलन के संयोजन की परिभाषा का विस्तार एक से अधिक चरों के लिए करते हैं।

मान लीजिए कि $f_1 : N \times N \to N, f_2: N \times N \to N$ और $g: N \times N \to N$ कोई तीन फलन हैं।

अगर $h: N \times N \to N$ है, तब g का f_1 और f_2 के साथ संयोजन निम्न रूप से होगा, $h(x, y) = g(f_1 (x, y), f_2(x, y))$ सभी $x, y \in N$ के लिए

यहाँ हम मानते हैं कि $R_{f1} \times R_{f2} \leq D_g$ और $D_h = D_{f1} \cap D_{f2}$

उदाहरण के लिए, $f_1: N \times N \to N$ को $f_1(x, y) = x + y$ से परिभाषित करें।

$f_2: N \times N \to N$ को $f_2 (x,y) = xy + y^2$ से और $g: N \times N \to N$ को $g(x,y) = xy$ से, तो $h: N \times N \to N$ को

$$h(x, y) = g(f_1(x, y)), (f_2(x, y))$$
$$= g(x + y, x, y + y^2) = (x + y) (x, y + y^2)$$

इसी तरह, हम इसे और अधिक चरों के लिए बढ़ा सकते हैं।

मान लीजिए कि n–चरों का एक फलन $f(x_1, x_2,..., x_n)$ दिया हुआ है, इसमे से $(n – 1)$ चरों को अचर (स्थिर) रखें और केवल N समुच्चय के शेष चरों को बदले। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक फलन $f: N \times N \to N$ को $f(x, y) = x + y$ से परिभाषित किया गया है। $f(x, y)$ की गणना करने के लिए, हम x को अचर (स्थिर) और f को बदलेगे। मान लीजिए $f(2, 0) = 2$ दिया गया है, $f(2, 3)$ की गणना के लिए,

$$f(2, 3) = [(f(2, 0) + 1) + 1] + 1$$
$$= [(2 + 1) + 1] + 1 = [3 + 1] + 1$$
$$= 4 + 1 = 5$$

सामान्य तौर पर, n–चर का एक फलन $f(x_1, x_2,...,x_n)$ दिया होता है, इसमे $(n – 1)$ चरों को अचर (स्थिर) मानिए और केवल N मे से बचे हुए बाकी चरों को बदले। अचर (स्थिर) $n – 1$ चरों को मापदंड (Parameter) कहा जाता है।

पुनरावर्ती फलन (Recursive Function) : n और $n+2$ चरों के ज्ञात फलनों $g(x_1, x_2,...x_n)$ और $h(x_1, x_2,...,x_n, y, z)$ पर विचार करें। $(n+1)$ चरों के एक फलन $f(x_1, x_2,..., x_n, y)$ को $f(x_1, x_2,..., x_n, 0) = g(x_1, x_2,...,x_n)$ और $f(x_1, x_2,..., x_n, y+1) = h(x_1, x_2,..., x_n, y, f(x_1, x_2,..., x_n, y)$ द्वारा परिभाषित करें। तब, f को एक पुनरावर्ती फलन या पुनरावृत्ति कहा जाता है।

टिप्पणी

नोट : यहाँ $y+1$ पर f का मान y पर f के मान के संदर्भ में व्यक्त किया गया है। चरों $x_1, x_2..., x_n$ को मापदंडों (Parameters) के रूप में माना गया है।

प्रीमिटिव पुनरावर्ती (Primitive Recursive) : एक फलन f को प्रीमिटिव पुनरावर्ती कहा जाता है यदि उन्हें प्रारंभिक फलनों के संयोजन और पुनरावृत्ति की संक्रियों की परिमित संख्या द्वारा प्राप्त किया गया हो।

उदाहरण 1.42 : दिखाएँ कि फलन $f(x, y) = x + y$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती (Primitive Recursive) है। इसका उपयोग $f(2, 3)$ की गणना करने के लिए करें।

हल : चूंकि,

$$x + (y + 1) = (x + y) + 1,$$

$$f(x, y+1) = f(x, y) + 1 = S(f(x, y))$$

इसके अलावा, $f(x, 0) = x$.

अब, हम $f(x,y)$ को परिभाषित करते हैं,

$$f(x, 0) = x = \cup_1'(x)$$

$$f(x, y+1) = S(\cup_3{}^3(x, y, f(x, y))$$

इसलिए, f प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। अब,

$$\begin{aligned} f(2, 3) &= S(f(2, 2)) \\ &= S(S(f(2, 1)) \\ &= S(S(S(\mathrm{f}(2, 0)))) \\ &= S(S(S(2))) \quad \text{क्योंकि, } f(2, 0) = 2. \\ &= S(S(3)) \\ &= S(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

उदाहरण 1.43 : पुनरावर्तन (Recursion) का उपयोग करके, दिए गए गुणन फलन '$*$' को परिभाषित करें।

$$g(x, y) = x * y.$$

हल : हमारे पास है,

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= 0 \\ g(x, y+1) &= x * (y + 1) \\ &= (x * y) + x = g(x, y) + x \end{aligned}$$

तो हम परिभाषित करते हैं,

$$g(x, 0) = 0 = z(x)$$

$$g(x, y+1) = f(\cup_3{}^3 (x, y, g(x, y), \cup_1{}^3 (x, y, g(x, y))),$$

जहाँ, $f(x, y) = x + y$ एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। (पिछले उदाहरण देखें)।

उदाहरण 1.44: यह दिखाएँ कि फलन $f(x) = k$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है जहाँ k अचर (स्थिर) है।

टिप्पणी

हल : मान लीजिए कि $k = 0$, तब,

$$f(x) = 0 = z(x)$$

अन्यथा,

$$f(x + 1) = k = f(x)$$
$$= \cup_2^2 (x, f(x))$$

इसलिए $f(x)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.45: सिद्ध कीजिए कि फलन $x!$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है जहाँ $0! = 1$ और $n! = n^* (n - 1)!$ है।

हल : मान लीजिए कि $f(x) = x!$ तब,

$f(0) = 0! = 1 = S(0)$ और $f(x + 1) = (x + 1)!$

$$= (x + 1) * x! = (x + 1) * f(x)$$
$$= (x * f(x) + f(x)$$
$$= \cup_1^2 (x, f(x)) * = \cup_2^2 (x, f(x)) + = \cup_2^2 (x, f(x)$$

क्योंकि योग (+) और गुणन (*) प्रीमिटिव पुनरावर्ती होते है, इसलिए $f(x)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

निम्नलिखित कुछ प्रीमिटिव पुनरावर्ती फलन हैं जो अक्सर या प्रायः उपयोग किए जाते हैं।

संकेत फलन (S_g)

$S_g (0) = 0, \quad S_g(y + 1) = 1$

(क्योंकि $S_g(0) = Z(0), S_g(y + 1) = S(Z \cup_2^2 (y, S_g(4)))$

शून्य परीक्षण फलन ($\overline{S_g}$)

$\overline{S_g}(0) = 1, S_g(y+1) = 0$

(क्योंकि $\overline{S_g}$ $(0) = s(0)$, $\overline{S_g}$ $(y + 1) = Z(\cup_2^2(Sg(y))$

पूर्ववर्ती फलन (*P*)

$P (0) = 0; P (y+1) = y = \cup_1^2 (y,p(y))$

(क्योंकि $P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = 1, P(3) = 2, ...$)

सम और विषम सादृश्य फलन (*Pr*)

$Pr (0) = 0, Pr (y + 1) = \overline{S_g} (\cup_2^2 (y, Pr(y)))$

(क्योंकि $Pr (0) = 0, Pr(1) = 1, Pr (2) = 0, Pr(3) = 1, ...$)

युक्त सब्ट्रैक्शन फलन ($\dot{-}$)

$x \dot{-} 0 = x, x \dot{-} (y + 1) = P(x \dot{-} y)$

(क्योंकि $x \dot{-} y = 0$, $x<y$ के लिए और $x \dot{-} y = x - y$, $x >, y$), के लिए।

टिप्पणी

निरपेक्ष हलन (II)

$$|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

***x* और *y* का न्यूनतम (*Min (x,y)*)**

न्यूनतम (Min) $(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$

***x* और *y* का उच्चतम (*Max (x,y)*)**

उच्चतम (Max) $(x, y) = y + (x \dot{-} y)$

वर्ग फलन (y^2)

$$f(y) = y^2 = \cup_1'(y) * \cup_1'(y)$$

उदाहरण 1.46: सिद्ध कीजिए कि $f(x, y) = x^y$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती फलन है।

हल : ध्यान दे, $x^0 = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \text{ के लिए} \\ 0 & x = 0 \text{ के लिए} \end{cases}$

और, $x^{y+1} = x^y * x$ हम जानते है

$= f(x, y) * x$,

$f(x, 0) = S_g(x)$

$f(x, y + 1) = \cup_3{}^3 (x, y, f(x, y) * \cup_1{}^3 (x, y, f(x,y)))$. इसलिए, $f(x, y)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.47 : दिखाएँ कि फलन $\left[\frac{x}{2}\right]$ जो कि सबसे बड़ा पूर्णांक के तुल्य होकर प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हल : ध्यान दे,

$\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$ जब x सम (Even) हो,

$= \frac{x-1}{2}$ जब x विषम (Odd) हो,

इस तरह, $[0/2] = 0 = z(x)$

$\left[\frac{y+1}{2}\right] = \left[\frac{y}{2}\right] + p_r(y)$ इसलिए $\left[\frac{x}{2}\right]$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.48: दिखाएँ कि फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{जब } x \text{ सम है।} \\ \frac{x-1}{2} & \text{जब } x \text{ विषम है।} \end{cases}$

प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हलः क्योंकि,

$$f(0) = 0 = z(x)$$
$$f(y + 1) = f(y) + P_r(y)$$

टिप्पणी

f प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.49: दिखाएँ कि फलन $f(x, y) = x^y + y^x$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हलः हम जानते हैं कि x^y प्रीमिटिव पुनरावर्ती है (उदाहरण 1.46 देखें)। इसी प्रकार y^x भी प्रीमिटिव पुनरावर्ती होगा, उदाहरण के द्वारा, $x^y + y^x$ का योग भी एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती फलन होगा।

उदाहरण 1.50: दिखाएँ कि यदि x के y से विभाजन पर $f(x + y)$ शेष (Remainder) को परिभाषित करता है, तो यह एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती फलन होगा।

हल : $f(x, y)$ के लिए निम्नलिखित केस पर विचार करें।

$$f(5, 11) = \left(\frac{11}{5}\right) \text{ का शेष } = 1$$

इसी तरह, $f(5,12) = 2$

$$f(5,13) = 3$$
$$f(5,14) = 4$$
$$f(5,15) = 0$$

$y = 0$ के लिए, $f(x,0) = 0$ होगा और $f(x, y)$ का मान 1 से बढ़ जाता है जब y को 1 से बढ़ाया जाता है, जब तक कि मान x के बराबर नहीं हो जाताय उस स्थिति में इसे 0 के बराबर रखा जाता है, और प्रक्रिया शुरू रहती है। इस प्रकार हम एक फलन का निर्माण करते हैं जो हर बार 1 से बढ़ता है जब y को 1 से बढ़ाया जाता है, यानी, $S(f(x,y)$। अब हम इस फलन को एक और पुनरावर्ती फलन से गुणन करते हैं जो 0 हो जाता है जब भी $S(f(x, y))' x$, लेकिन $S(f(x, y))$ हमेशा $\leq x$ होता है और इसलिए, ऐसा फलन होता है :

$$S_g\,(x \dot{-} S(f(x, y))$$

इसलिए, $f(x, 0) = 0$

$$f(x, y + 1) = S(f(x, y) * S_g(x \dot{-} S\,(f(x, y)))$$

इसलिए, $f(x, y)$ एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती फलन है।

अभिलाक्षणिक फलन (Characteristic Function): संबंध R के अभिलाक्षणिक फलन को निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है,

$$X_R(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1 \text{ } if \text{ } (x_1, x_2, ... x_n) \in R \\ 0 \text{ if } (x_1, x_2, ... x_n) \notin R \end{cases}$$

यहां, X_R, R से N तक एक फलन है और $R \leq N^n$ है।

प्रीमिटिव पुनरावर्ती (Primitive Recursive): एक संबंध R को प्रीमिटिव पुनरावर्ती कहा जाता है यदि इसका अभिलाक्षणिक फलन प्रीमिटिव पुनरावर्ती होता है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.51: यह दिखाएं कि $\{x, x)$ è $x \in N\}$ जो यह परिभाषित करता है कि समारूपी संबंध प्रीमिटिव पुनरावर्ती होते है।

हल : मान लीजिए कि $R = \{(x, x)/x \in N\}$। यहां, हमें एक फलन $f(x, y)$ को ढूंढना होगा जो कि $f(x, y) = 1\ y(x, y) \in R$ और 0 यदि $(x, y) \notin R$ है। ऐसा फलन है,

$$f(x, y) = \overline{S_g}\ (|x-y|)$$

$x = y,\ \overline{S_g}\ (|x-x|) = \overline{S_g}\ (0)=1$ और $x \neq y,\ \overline{S_g}(|x-y|)= 0$। इसलिए, $f(x, y)$ वांछित अभिलाक्षणिक फलन है, जो प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। इसलिए, R प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.52: दिखाएँ कि किसी भी अचर k के लिए, संबंध $R = \{(k, y)$è$y>k\}$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती होता है।

हल : हमें एक फलन ज्ञात होगा, जोकि 1 के बराबर होगा यदि $y > k$ और 0 होगा यदि $y \leq k$ है। ऐसा फलन $S_g(y \mathbin{\underline{\cdot}} k)$ है, क्योंकि $y \cdot k = 0,\ \ y \leq k$ के लिए और $y \cdot k = y - k\ (y > k)$ के लिए। इसलिए, $R(x, y) = S_g(y \cdot k)$ एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती है और इसलिए R, प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.53 : दिखाएँ कि फलन $f(x_1, x_2, y)$ को

$$f(x_1, x_2, y) = \begin{cases} x_2 \ \ x_1 > y & \text{के लिए} \\ (x_1 * y) + x \ \ x_1 \leq y & \text{के लिए} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हल : यहां हमें यह दिखाना होगा कि,

$f(x_1, x_2, y) = x_2 + (x_1 * y)$ * (एक फलन)

और वह फलन शून्य होता है जब $x_1 > y$ और 1 जब $x_1 \leq y$। इस तरह के एक फलन $\overline{S_g}\ (x_1 \cdot y)$ है, क्योंकि $x_1 \mathbin{\underline{\cdot}} y = 0,\ x_1 \leq y$ के लिए और $x_1 - y\ \ (x_1 > y \cdot)$ के लिए

इसलिए, $f(x_1, x_2, y) = x_2 + (x_1 * y) * \overline{S_g}\ (x_1 \cdot y)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

नियमित फलन (Regular Function) : मान लीजिए कि $g(x_1, x_2,...,x_n,y)$ एक पूर्ण फलन है। यदि यहाँ कम से कम y का एक मान मौजूद है, माने $\bar{y} \in N$ तब फलन g $(x_1,x_2,...,x_n, \bar{y}) = 0$ सभी $(x_1, x_2,...,x_n)\ \in N^n$ के लिए होगा, तब g को एक नियमित फलन कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, एक पूर्ण फलन $g(x, y) = |y^2 - x|$ पर विचार करें। यहाँ x के केवल उन मानों के लिए $g(x, y) = 0$ होगा जो पूर्ण वर्ग हैं। इसलिए, N में y का कोई भी मान ऐसा नहीं है कि सभी x के लिए $|y^2 - x| = 0$ हो। इसलिए g नियमित नहीं है।

पूर्ण फलन (Total Function) : एक फलन $f(x_1, x_2,...,x_n)$ को परिभाषित पूर्ण फलन $g(x_1,x_2,...,x_n, y)$ कहा जाता है यदि,

$$f(x_1, x_2, ... x_n) = \begin{cases} \mu_y(g(x_1, x_2, ... x_n, y) = 0 \\ \text{अनिश्चित अन्यथा, यदि ऐसा कोई } y \text{ मौजूद है।} \end{cases}$$

जहाँ, μ_y का अर्थ है कम से कम y शून्य के बराबर या अधिक है।

टिप्पणी

पुनरावर्ती फलनः एक फलन को पुनरावर्ती फलन कहा जाता है यदि वह प्रारंभिक फलनों के नियमित फलनों के संयोजन और पुनरावृत्ति की परिमित संख्या द्वारा प्राप्त किया जाता है।

आंशिक पुनरावर्ती फलन : एक फलन को आंशिक पुनरावर्ती कहा जाता है यदि वह प्रारंभिक फलनों के संयोजन और पुनरावृत्ति की परिमित संख्या द्वारा प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 1.54: दिखाएं की फलन $f(x) = \frac{x}{2}$ आंशिक पुनरावर्ती फलन है।

हलः मान लीजिए कि $g(x, y) = |2y - x|$ यह नियमित नहीं है क्योंकि $|2y - x| = 0$ केवल x के सम मान के लिए होता है।

परिभाषित करें, $f(x) = \mu_y(|2y - x| = 0) = \frac{x}{2}$, x सम है।

यहाँ, सबसे छोटा y जिसके लिए $|2y - x| = 0, \frac{x}{2}$ है

इसलिए, g आंशिक पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.55: मान लीजिए $[\sqrt{x}]$, सबसे बड़ा पूर्णांक $\leq \sqrt{x}$ है। दिखाएँ कि $[\sqrt{x}]$, एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हल : हम जानते हैं कि,

$$(y+1)^2 \dot{-} x = \begin{cases} 0, \ (y+1)^2 < x \text{ के लिए} \\ \text{शून्य के } (y+1)^2 \geq x \text{ के लिए} \end{cases}$$

$$\text{इसलिए } \overline{s_g}((y+1)^2 \dot{-} x = \begin{cases} 1 \text{ यदि } \ (y+1)^2 < x \\ 0 \text{ यदि } \ (y+1)^2 \geq x \end{cases}$$

$(y + 1)^2 \geq x$ होने पर y का सबसे छोटा मान $\sqrt{x}$ है।

चूंकि $([\sqrt{x}, +1]^2 > x)$, $[\sqrt{x},] = \mu_y(\overline{S_g}\,(y+1)^2 \dot{-} x) = 0)$

और चूंकि $[\sqrt{x}]$ को सभी x के लिए परिभाषित किया गया है, $[\sqrt{x}]$ एक पुनरावर्ती फलन है।

अभिलाक्षणिक फलन (Characteristic Function): मान लीजिए कि U सार्वभौमिक (Universal) समुच्चय और A, U उप –समुच्चय है। फलन $Y_A : \cup \to [0,1]$ को

$$Y_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ यदि } x \in A \\ 0 \text{ यदि } x \notin A \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित किया गया है, और इसे समुच्चय A का अभिलाक्षणिक फलन कहा जाता है।

टिप्पणी

पुनरावर्ती (Recursive) : किसी भी समुच्चय A को पुनरावर्ती (आंशिक पुनरावर्ती) कहा जाता है यदि उसका अभिलाक्षणिक फलन Y_A पुनरावर्ती (आंशिक पुनरावर्ती) होता है।

नोटः यदि एक समुच्चय A पुनरावर्ती है, तो Y_A भी पुनरावर्ती होंगा। चूंकि $Y_{\overline{A}} = 1 \dot{-} Y_A = \overline{S_g}\,(Y_A)$, $\overline{A}$ भी पुनरावर्ती है। यदि A और B पुनरावर्ती हैं, तो $A \cap B$ और $A \cup B$ भी पुनरावर्ती होंगे,

चूँकि $Y_{A\cap B} = Y_A * Y_B$ और $Y_{A\cup B} = (Y_A + Y_B) \dot{-} Y_{A\cap B}$

उदाहरण 1.56: दिखाएँ कि सम और विषम प्राकृत संख्याओं दोनों के ही समुच्चय प्रीमिटिव पुनरावर्ती होते हैं।

हल : मान लीजिए कि E विषम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हैं।

$$\text{चूँकि } Y_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \in E \\ 0 & \text{यदि } x \notin E \end{cases} = P_r(x)$$

$Y_E(x)$ वांछित अभिलाक्षणिक फलन है जो प्रीमिटिव पुनरावर्ती भी है। इसलिए समुच्चय E प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। चूँकि $\overline{E}$ प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, इसलिए यह भी प्रीमिटिव पुनरावर्ती होगा।

उदाहरण 1.57: दिखाएँ कि धनात्मक पूर्णांक n के विभाजकों का समुच्चय पुनरावर्ती होता है।

हलः यदि x, n को विभाजित करता है तो $\frac{n}{x} = i, 1 \le i \le n.$

यानी, $x*i = n$ तो $x \le n$, n का एक विभाजन होगा यदि $|x*i-n| = 0$, i के एक निश्चित मान के लिए $|x*i-n| \ne 0$ है।

और यदि x एक भाजक नहीं है, तो $|x*i-n| \ne 0$ सभी $1 \le i \le n$ के लिए है। मान लीजिए कि B का n के भाजक का समुच्चय है। विचार करें,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{S_g}\,|x*i-n| = \begin{cases} \overline{S_g}(0) = 1 \text{ यदि } x \text{ एक डिवाइजर है।} \\ \overline{S_g}\ (\text{एक गैर} - \text{शून्य}) = 0, \text{ यदि } x \text{ एक डिवाइजर नहीं है।} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \in B \\ 0 & \text{यदि } x \notin B \end{cases}$$

$$= Y_B(x)$$

जहां, B, n के विभाजकों का समुच्चय है। इसलिए समुच्चय B पुनरावर्ती है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.58: मान लीजिए कि $D(x)$, x के भाजक की संख्या बताता है। तो दिखाएँ कि $D(x)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हल: हम जानते हैं कि, x द्वारा y के विभाजन पर शेष को परिभाषित करने वाला फलन प्रीमिटिव पुनरावर्ती होता है। हम इस तरह के फलन को $rm(x, y)$ द्वारा निरूपित करेंगे। यदि कोई संख्या x को y विभाजित करती है, तो $rm(x, y) = 0$ और $\overline{S_g}\, rm(x, y) = 1$। ताकि y के लिए विभाजकों की संख्या होगी,

$$D(y) = \sum_{x=1}^{y} \overline{S_g}\left(rm(x, y)\right)$$

इसलिए $D(y)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

उदाहरण 1.59: दर्शाएँ कि 'x एक अभाज्य है' एक प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

हल : एक संख्या $x(\neq 0, \neq 1)$ एक अभाज्य है यदि इसमें केवल दो भाजक 1 और x है। मान लीजिए कि $\overline{p_r}$ गैर– अभाज्य का समुच्चय है। क्योंकि

$$S_g\,(D(x)\,\underline{\,.\,}\,2) + \overline{S_g}\,(|x-1|) + \overline{S_g}\,(|x-0|)$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ यदि } x \in \overline{pr} \\ 0 \text{ यदि } x \notin \overline{pr} \end{cases}$$

$$= Y_{\overline{\mathrm{Pr}}}(x)$$

$Y_{\overline{\mathrm{P_r}}}$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। लेकिन $Y_{\overline{\mathrm{P_r}}}(x) = 1 \cdot Y_{\overline{\mathrm{Pr}}}(x)$,

$Y_{\overline{\mathrm{P_r}}}(x)$ भी प्रीमिटिव पुनरावर्ती है। इसलिए, P_r प्रीमिटिव पुनरावर्ती है।

एकरमान फलन (Ackermann's Function) : अगर फलन $A(x, y)$ को निम्नलिखित विधि से परिभाषित किया जाता है तो,

$$A(0, y) = y + 1$$
$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$
$$A(x + 1, y + 1) = A(x)A(x + 1, y))$$

इसे एकरमान फलन कहा जाता है।

नोट: $A(x, y)$ को अच्छी तरह से परिभाषित किया गया है और यह पूर्ण है। इसके अलावा, $A(x, y)$ प्रीमिटिव पुनरावर्ती नहीं बल्कि पुनरावर्ती है।

अब हम प्रदर्शित करेगें कि उपरोक्त परिभाषा का उपयोग $A(3, 3)$ के मान को ज्ञात करने में कैसे किया जा सकता है,

$$\begin{aligned} A(3, 3) &= A(2, A\,(3, 2)) \\ A(3, 2) &= A(2, A\,(3, 1)) \\ A(3, 1) &= A(2, A\,(3, 0)) \\ &= A(2,\; A(2, 1)) = A(2, A(0, 4)) = A(2, 5) \end{aligned}$$

टिप्पणी

क्योंकि, $A(2, 1) = A(1, A(2, 0))$
$= A(1, A(1, 1))$
$A(1, 1) = A(0, A(1, 0))$
$= A(0, A(0, 1)) = A(0, 2) = 3$

इसलिए, $A(2, 1) = A(1, 3)$
$= A(0, A(1, 2))$
$A(1, 2) = A(0, A(1, 1))$
$= A(0, 3) = 4$

इस प्रकार, $A(2, 1) = A(0, 4) = 5$

फिर से, $A(2, 2) = A(1, 5) = A(0, A(1, 4))$
$A(1, 4) = A(0, A(1, 3))$
$A(1, 3) = A(0, A(1,2)) = A(0, 4) = 5$
$A(1, 4) = A(0, 5) = 6$
$A(2, 2) = A(0, 6) = 7$

फिर से, $A(2, 5) = A(1, A(2, 4))$
$A(2, 4) = A(1, A(2, 3))$
$A(2, 3) = A(1, A(2, 2)) = A(1, 7)$
$A(1, 7) = A(0, A(1, 6))$
$A(1, 6) = A(0, A(1, 5))$
$A(1, 5) = A(0, A(1, 4)) = A(0, 6) = 7$
$A(1, 6) = A(0, 7) = 8$
$A(1, 7) = A(0, 8) = 9$

इस तरह, $A(2, 3) = 9$

इसी तरह,
$A(2, 4) = 11$
$A(2, 5) = 13$

इस प्रकार, $A(3, 1) = 13$

अब, $A(3, 2) = A(2,13) = 29$ इसी विधि से

अंत में, $A(3, 3) = A(2, 29) = 61$

क्योंकि, $A(2, n) = 2n + 3$

ध्यान दे कि $A(0, n) = n + 1$
$A(1, n) = n + 2$
$A(2, n) = 2n + 3$

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. उप बीजगणित को परिभाषित कीजिए।
2. द्वैतता की व्याख्या कीजिए।
3. अणु को परिभाषित कीजिए।
4. E का गुणनों के योग में रूपांतरण कीजिए।
5. तार्किक फलनों के कार्नो मानचित्र या मैप की व्याख्या कीजिए।
6. प्राथमिक गुणन और योग का वर्णन कीजिए।
7. निमनिष्ठ पद और उच्चिष्ठ पद को परिभाषित कीजिए।
8. संबंध की व्याख्या कीजिए।
9. समुच्चय A से समुच्चय B के बीच फलन या मैपिंग की विधि का वर्णन कीजिए।
10. पूर्ण और आंशिक फलन की व्याख्या कीजिए।
11. प्रोजेक्शन फलन का वर्णन कीजिए।
12. अभिलाक्षणिक फलन की व्याख्या कीजिए।

1.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. मान लीजिए कि C बूलियन बीजगणित B का एक गैर–रिक्त उप समुच्चय है। तब हम कह सकते हैं कि C, B का उप–बीजगणित होगा, अगर B की संक्रियों के सापेक्ष में C भी अपने आप मे बूलियन बीजगणित हो।
2. बूलियन बीजगणित B में कोई भी कथन द्वैत कथन होता है अगर संक्रियों +, ., ', और मूल कथन में उनके ततस्मक अवयवों 0 और 1 को आपस में बदलकर प्राप्त किया गया हो।
3. बीजगणित $(B,+,.,')$ में एक शून्येतर अवयव 'a' को अणु (Atom) कहा जाता है। अगर प्रत्येक $x \in B$ के लिए, $x \wedge a = a$ या $x \wedge a = 0$ होता है।
4. चरण 1. किसी भी कोष्ठक में पूरक ऑपरेशन को स्थानांतरित करने के लिए डी मॉर्गन (De Morgan's) के नियमों और अन्तवर्लन (Involution) का उपयोग करें।

   चरण 2. E को गुणनों का योग में बदलने के लिए वितरक नियम का उपयोग करें।

   चरण 3. E के प्रत्येक गुणनों को 0 या एक मूल गुणनों में बदलने के लिए क्रम विनिमय नियम (Commutative), वर्गसम (Idempotent) और (Complement Laws) पूरक नियमों का उपयोग करें।

   चरण 4. E को गुणनों का योग में बदलने के लिए अवशोषण (Absorption) और ततस्मक नियमों (Identity Laws) का उपयोग करें।

5.. कार्नो मानचित्र उन तकनीकों में से एक है जो तार्किक फलनों के बूलियन आलेखों के निरूपण को नियोजित करता है। यह तकनीक बूलियन व्यंजकों को सरल बनाने में बहुत उपयोगी साबित होता है। इस पद्धति में, एक सत्य तालिका में निहित सूचना पीओएस या एसओपी रूप (POS या SOP) में उपलब्ध होती है और फिर उसे, कार्नो मानचित्र (K–मैप) में दर्शाया जाता है।

6. एक सूत्र में चर के गुणन और उनके निषेधन (Negation) को चर का प्राथमिक गुणन और चर के योग और उनके निषेधन (Negation) को प्राथमिक योग कहा जाता है। प्राथमिक (Elementary) गुणन या योग का कोई भी हिस्सा जो खुद एक प्राथमिक (Elementary) गुणन या योग है, उसे प्राथमिक गुणन या योग का घटक कहा जाता है।

7. (a) निमनिष्ठ पद (Minterm) : किसी दिए गए चरों के लिए, निमनिष्ठ पद (Minterm) संयोजन (Conjunctions) से युक्त होते है जिनमें प्रत्येक चर या उसका निषेधन, लेकिन दोनों नहीं, केवल एक ही बार आते हो।

   (b) उच्चिष्ठ पद (Maxterm) : किसी दिए गए चरों की संख्या के लिए, उच्चिष्ठ पद वियोजन से युक्त होता हैं जिनमें प्रत्येक चर या उसका निषेधन, लेकिन दोनों नहीं, केवल एक बार ही दिखाई देते हैं।

8. संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है।

9. समुच्चय A से समुच्चय B के बीच फलन या मैपिंग एक 'विधि' है जो समुच्चय A के अवयवों को समुच्चय B के युग्म अवयवों से जोड़ता है और हम $f: A \to B$ को यह इंगित करने के लिए दर्शाते हैं कि समुच्चय A से समुच्चय B तक f एक फलन है।

   B को फलन f का सह–डोमेन (Co-Domain) कहा जाता है और A को उसका डोमेन (Domain) कहा जाता है। इसके अलावा, A के प्रत्येक अवयव a के लिए, f, B के अवयव b को परिभाषित करता है।

10. कोई भी फलन $f: N^n = N \times N \times ...... \to N$ को पूर्ण कहा जाता है यदि इसे N^n में प्रत्येक n–टुपल (Tuple) के लिए परिभाषित किया गया हो। यदि $f: D \to N$ परिभाषित किया गया है, जहां $D \leq N^n$, तब f को आंशिक फलन कहा जाता है।

11. एक फलन $U_i^n : N^n \to N$ को $U_i^n\ (x_1, x_2, ..., x_i, ...\ x_n) = x_i$, द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो सभी $x_i \in N, i = 1, 2, ...\ n$, के लिए, इसे प्रोजेक्शन फलन कहा जाता है।

12. अभिलाक्षणिक फलन (Characteristic Function): मान लीजिए कि U सार्वभौमिक (Universal) समुच्चय और A, U उप –समुच्चय है। फलन $Y_A : \cup \to [0,1]$ को

$$Y_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ यदि } x \in A \\ 0 \text{ यदि } x \notin A \end{cases}$$

टिप्पणी

द्वारा परिभाषित किया गया है, और इसे समुच्चय A का अभिलाक्षणिक फलन कहा जाता है।

1.7 सारांश

- बूलियन बीजगणित एक जालक है जिसमें सबसे छोटा और सबसे बड़ा अवयव (Element) होते है और दोनों एक दुसरे के पूरक और वितरक (साहचर्य) होते हैं।
- मान लीजिए कि C बूलियन बीजगणित B का एक गैर–रिक्त उप समुच्चय है। तब हम कह सकते हैं कि C, B का उप–बीजगणित होगा, अगर B की संक्रियों के सापेक्ष में C भी अपने आप मे बूलियन बीजगणित हो।
- बूलियन बीजगणित में कोई भी कथन द्वैत कथन होता है अगर संक्रियों $+$, ., ′, और मूल कथन में उनके ततस्मक अवयवों 0 और 1 को आपस में बदलकर प्राप्त किया गया हो।
- बीजगणित $(B,+,.,')$ में एक शून्येतर अवयव 'a' को अणु (Atom) कहा जाता है। अगर प्रत्येक $x \in B$ के लिए, $x \wedge a = a$ या $x \wedge a = 0$ होता है।
- मूलाक्षर (Literal) एक चर या पूरक चर या मौलिक उत्पाद होता है। एक मौलिक उत्पाद मूलाक्षर (Literal) दो या दो से अधिक का मूलाक्षरों (Literal) का गुणन होता है, जिसमें मे एक ही चर के कोई भी दो मूलाक्षर (Literal) शामिल नहीं होने चाहिए।
- एक मौलिक गुणन p_1 को दूसरे मौलिक गुणन p_2 में शामिल (Contain) होना कहा जाता है जब p_1 का मूलाक्षर गुणन p_2 का भी मूलाक्षर (Literal) होता है।
- कार्नो मानचित्र उन तकनीकों में से एक है जो तार्किक फलनों के बूलियन आलेखों के निरूपण को नियोजित करता है। यह तकनीक बूलियन व्यंजकों को सरल बनाने में बहुत उपयोगी सिद्ध होता है। इस पद्धति में, एक सत्य तालिका में निहित सूचना पीओएस या एसओपी रूप (POS या SOP) में उपलब्ध होती है और फिर उसे, कार्नो मानचित्र (K–मैप) में दर्शाया जाता है।
- 4 चर K–मैप के केस में, किसी भी कोष्ठक से जुड़े 4 चर के लिए 6 संभावित समूह होते हैं।
- 4–चर K–मैप में निकटवर्ती आठ के समूहों को बनाने वाली कोष्ठक की दशमलव संख्या निम्नलिखित होती है।

  0, 4, 12, 8, 1, 5, 13, 9
  0, 4, 12, 8, 2, 6, 14, 10
  0, 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6
  0, 1, 3, 2, 8, 9, 11, 10

1, 5, 13, 9, 3, 7, 5, 11

4, 5, 7, 6, 12, 13, 15, 14

12, 13, 15, 14, 8 9 11 10

3, 7, 15, 11, 2, 6, 14, 10

- 1's के समूहीकरण करने की पूर्व प्रक्रिया की तरह, K–मैप में 0's को भी समूहीकृत किया जा सकता है। ऐसे केसों में, दो निकटवर्ती 0's के समूह के कारण मूलाक्षर (Literal) प्राप्त होता है जो दो उच्छिष्ट पद (Maxterm) को हटाने के समान होता है। यही प्रक्रिया n–चर K–मैप में 4, 8 या 2^n शून्य के समूह में भी लागू की जा सकती है।
- इम्प्लिकेंट पद निकटवर्ती निमनिष्ठ पद का समुच्चय या निमनिष्ठ पद के समुच्चय से प्राप्त सरलीकृत गुणन पद को दर्शाता है।
- एक इम्प्लिकेंट को मुख्य इम्प्लिकेंट कहा जाता है जब यह किसी अन्य इम्प्लिकेंट के फलन का उप–समुच्चय नहीं होता है।
- एक मुख्य इम्प्लिकेंट जिसमें '1' कोष्ठक शामिल होता है जो किसी भी अन्य मुख्य इम्प्लिकेंट में शामिल नहीं होता है, वह आवश्यक इम्प्लिकेंट कहलाता है।
- एक सूत्र जो किसी दिए गए सूत्र के तुल्य (बराबर) होता है और जो प्राथमिक गुणनों का योग होता है, उस दिए गए सूत्र को वियोजनीय सामान्य रूप कहा जाता है।
- एक सूत्र जो किसी दिए गए सूत्र के तुल्य (बराबर) होता है और जो प्राथमिक योगों का गुणन होता है, उसे दिए गए सूत्र का संयोजनीय सामान्य रूप कहा जाता है।
- यदि कोई सूत्र पुनरुक्ति (Tautology) है, तो स्पष्ट रूप से सभी निमनिष्ठ पद (Minterm) इसके प्रिंसिपल वियोजनी सामान्य रूप में ही होंगे।
- उच्चिष्ठ पद (Maxterm) निमनिष्ठ पद (Minterm) का दोहरा (Duals) होता हैं। द्वैत सिद्धांत से या सीधे सत्य तालिकाओं से, यह पता लगाया जा सकता है कि चरों के सत्य मानों के ठीक एक संयोजन के लिए प्रत्येक उच्चिष्ठ पद का एक सत्य या सही मान 0 होता है।
- संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से, संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या जोड़े में आती है। इस प्रकार, 'संबंध' सूचना के समुच्चय के बीच केवल एक परिभाषित संबंध होता है। गणित में, संबंध केवल क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। यह अंकगणित संबंधों का एक सामान्यीकरण है जिसमें '=' और '<' शामिल हैं। समुच्चय संबंधों के निरूपण में, { } प्रतीक का उपयोग किया जाता है।
- एक फलन $S: N \rightarrow N$ को $S(x) = x + 1$ द्वारा परिभाषित किया जाता है,तो सभी $x \in N$ के लिए, यह उत्तराधिकारी फलन कहलाता है।
- एक फलन को पुनरावर्ती फलन कहा जाता है यदि वह प्रारंभिक फलनों के नियमित फलनों के संयोजन और पुनरावृत्ति की परिमित संख्या द्वारा प्राप्त किया जाता है।

टिप्पणी

1.8 मुख्य शब्दावली

- **अणु** : बीजगणित $(B,+,.,')$ में एक शून्येतर अवयव $\dot{a}'$ को अणु (Atom) कहा जाता है। अगर प्रत्येक $x \in B$ के लिए, $x \wedge a = a$ या $x \wedge a = 0$ होता है।
- **द्वैतता** : बूलियन बीजगणित B में काई भी कथन द्वैत कथन होता है अगर संक्रियों $+, . , '$ और मूल कथन में उनके तवस्मक अवयवों 0 और 1 को आपस में बदलकर प्राप्त किया जाता है।
- **मुख्य इम्प्लिकेंट** : एक इम्प्लिकेंट को मुख्य इम्प्लिकेंट कहा जाता है। जब यह किसी अन्य इम्प्लिकेंट के फलन का उप–समुच्चय नहीं होता है।
- **आवश्यक इम्प्लिकेंट** : एक मुख्य इम्प्लिकेंट जिसमें '1' कोष्ठक शामिल होता है, वह आवश्यक इम्प्लिकेंट कहलाता है।
- **संबंध** : संबंध क्रमित युग्मों का एक समुच्चय है। मूल रूप से संख्याओं का कोई भी समूह एक संबंध है यदि ये संख्या जोड़े या युग्म में आती है।
- **ऑडरिंग** : ऑडरिंग एक द्विआधारी संबंध जो मूल रूप से सकर्मक है और आगे यह या तो प्रतिवर्ती और प्रतिसममित या अप्रतिवर्त और असममित हो सकता है।
- **शून्य फलन** : अगर सभी $x \in N$ के लिए एक फलन $Z: N \to N$ की $Z(x) = 0$ द्वारा परिभाषित किया जाता है, तो यह एक शून्य फलन कहलाता है।
- **अभिलाक्षणिक फलन** : संबंध R के अभिलाक्षणिक फलन को निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है।

  यहां $r \times R$, R से N तक एक फलन है और $R \leq N^n$ है।
- **पुनरावर्ती** – किसी भी समुच्चय। को पुरावर्ती (आंशिक पुनरावर्ती) कहा जाता है यदि उसका अभिलाक्षणिक फलन Y_A पुरावर्ती (आंशिक पुरावर्ती) होता है।

1.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. बूलियन फलन क्या है?
2. मूलाक्षर से आप क्या समझते हैं?
3. K-मैप का उपयोग करके तार्किक फलनों का सरलीकरण कीजिए।
4. क्विन–मैक्लुस्की न्यूनीकरण प्रक्रिया की व्याख्या कीजिए।
5. सामान्य रूप क्या है?
6. वियोजन सामान्य रूप एवं संयोजनीय प्रसामान्य रूप को परिभाषित कीजिए।
7. संबंध क्या है?
8. व्युत्क्रम संबंध और संयुक्त संबंध को परिभाषित कीजिए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

टिप्पणी

1. बूलियन फलन से आप क्या समझते हैं? बूलियन फलन के सिद्धान्तों का संक्षेप में वर्णन कीजिए।
2. पूर्ण गुणनों के योग को खोजने के लिए एल्गोरिथम चरणों की व्याख्या कीजिए।
3. निकटवर्ती का समूहन क्या है? साथ ही निकटवर्ती के प्रकारों का संक्षेप में वर्णन कीजिए।
4. इम्प्लिकेंट पद क्या है? इम्प्लिकेंट के प्रकारों का वर्णन कीजिए। उदाहरण सहित।
5. प्राथमिक गुणन और योग क्या है? उदाहरण देकर संक्षेप में इसकी व्याख्या कीजिए।
6. निमनिष्ठ पद और उच्चिष्ठ पद क्या है? उदाहरण देकर वर्णन कीजिए।
7. संबंध को परिभाषित कीजिए तथा उदाहरण देकर समुच्चय संबंधों के कुछ उदाहरण दीजिए।
8. किसी फलन के व्युत्क्रम संबंध और संयुक्त संबंध को परिभाषित कीजिए तथा फलन की रेंज का उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।

1.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Pathak, Dr. H. K. 2017. विविक्त गणित (Discrete Mathematics). Meerut (UP): Shiksha Sahitya Prakashan.

Liu, C. L. 1977. *Elements of Discrete Mathematics*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Deo, Narsingh. 1999. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall of India.

Mott, J. L. 2007. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 2nd Edition. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.

Rosen, Kenneth. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Tremblay, Jean Paul and R. Manohar. 1975. *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science*. New York: McGraw-Hill Inc.

Singh, Y. N. 2005. *Mathematical Foundation of Computer Science*. New Delhi: New Age International Pvt. Ltd.

Malik, D. S. 2004. *Discrete Mathematical Structures: Theory and Applications*. London: Thomson Learning.

Haggard, Gary, John Schlipf and Sue Whiteside. 2006. *Discrete Mathematics for Computer Science*. California: Thomson Learning.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2008. *A Course in Abstract Algebra*, 3rd Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

टिप्पणी

Grewal, B. S. 1998. *Higher Engineering Mathematics,* 34th Edition. New Delhi: Khanna Publishers.

Narayan, Shanti. 1996. *Differential Calculus,* 14th Edition. New Delhi: S Chand And Company Limited.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics,* 7th Edition. Mumbai: Wiley Eastern Ltd.

Bali, N. P. 2007. *A Textbook of Engineering Mathematics*. New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2009. *Business Mathematics*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

इकाई 2 आंशिक क्रम संबंध और जालक

टिप्पणी

संरचना

2.0 परिचय

गणित में, विशेष रूप से क्रम सिद्धांत, एक आंशिक रूप से क्रमित सेट एक सेट के तत्वों के क्रम, अनुक्रमण या व्यवस्था की सहज अवधारणा को औपचारिक रूप देता है और सामान्य करता है। एक क्रमित सेट या समुच्चय में एक बाइनरी रिलेशन या संबंध के साथ एक सेट होता है, जो यह दर्शाता है कि सेट में तत्वों के कुछ युग्म या जोड़ों के लिए, तत्वों में से एक क्रम में दूसरे से पहले होता है। संबंध को 'आंशिक क्रम' कहा जाता है। 'आंशिक क्रम' और 'आंशिक रूप' से 'क्रमित समुच्चय' नामों में आंशिक शब्द का उपयोग एक संकेत के रूप में किया जाता है कि प्रत्येक युग्म तत्वों की तुलना करने की आवश्यकता नहीं है। यही तत्वों के जोड़े हो सकते हैं जिनके लिए न तो तत्व दूसरे को क्रम में रखता है। आंशिक क्रम इस प्रकार कुल क्रमितों का सामान्यीकरण करते हैं, जिसमें प्रत्येक युग्म तुल्नीय होता है। उच्चिष्ठ मानों को संदर्भित करते हैं, अर्थात, उच्चिष्ठ और निमनिष्ठ का मान जो फलन प्राप्त करते हैं। उच्चिष्ठ का तात्पर्य उपरी बाउंड या उच्चतम संभव मात्रा है। किसी फलन के पूर्ण उच्चिष्ठ फलन की श्रेणी में निहित सबसे उच्चतम संख्या है।

एक जलक को एक गैर–रिक्त समुच्चय पर बीजगणित के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसमें बाइनरी ऑपरेशन उपस्थित होते हैं और मिलते हैं जो कि कम्यूटेटिव और सहयोगी होते हैं और अवशोषण पहचान को संतुष्ट करते हैं। हम जालक में वितरण, मॉड्यूलर, बाउंड (शून्य और यूनिट तत्वों के साथ) पूरक, और बूलियन (पूरक के साथ) इन पर विचार करते हैं।

इस इकाई में आप आंशिक क्रम संबंध और जालक, आंशिक क्रमिक समुच्चय का हैसे आरेख, उच्चिष्ठ और निमनिष्ठ अवयव तथा जालक का अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- आंशिक क्रम संबंध और जालक का वर्णन कर पाएंगे;
- आंशिक क्रमिक समुच्चय का हैसे आरेख को समझ पाएंगे;
- उच्चिष्ठ और निमनिष्ठ अवयव की व्याख्या कर पाएंगे;
- जालक का वर्णन कर पाएंगे।

2.2 आंशिक क्रम संबंध

एक समुच्चय P में एक बाइनरी संबंध (Binary Relation) R को एक आंशिक क्रम संबंध कहा जाता है या P में एक आंशिक क्रम होता है यदि और केवल यदि R स्व्तुल्यता या रफ्लेक्सिव (Reflexive) प्रतिसममित (Antisymmetric) और सक्रमक (Transitive) हो। इसे $\leq$ प्रतीक द्वारा निरूपित किया जाता है। यदि $\leq$ P पर आंशिक क्रम है, तो क्रमिक युग्म $(P, \leq)$ को आंशिक रूप से क्रमबद्ध या आंशिक क्रम समुच्चय कहा जाता है। यदि कोई $x,y \in p$ है, और अगर $x \leq y$ या $y \leq x$, तो $(p, \leq)$ को पूर्ण क्रमिक समुच्चय कहा जाता है।

उदाहरण 2.1 : माना कि R वास्तविक संख्याओं (Real Numbers) का समुच्चय है। तब संबंध 'कम या तुल्य (बराबर)' या 'ज्यादा/अधिक या (तुल्य) बराबर' R पर आंशिक क्रम होता है।

नोट : प्रतीक (Symbol) $\leq$ को वास्तविक संख्याओं के संबंध में 'कम या तुल्य (बराबर)' के साथ भ्रमित या असंगत नहीं होना चाहिए।

उदाहरण 2.2 : सिद्ध करें कि उप–समुच्चय होना 'गैर रिक्त–समुच्चय पर घात–समुच्चय (Power Set) आंशिक क्रम जैसा होता है'।

हल : माना कि $P(A) = 2^A = X$, A की घात–समुच्चय है, अर्थात X, A के सभी उप–समुच्चयों का समुच्चय है। x में किसी भी u,v,w के लिए समुच्चय $U \leq V \Leftrightarrow U \subseteq V$ होगा।

1. स्व्तुलयता (Reflexive) : चूंकि $U \subseteq U$, $U \leq U$ है।
2. प्रतिसममित (Antisymmetric) : मान लीजिए कि $U \leq V$ और $V \leq U$। तब $U \subseteq V$ और $V \subseteq U$।

   इसका तात्पर्य है कि $U = V$ है।
3. सकर्मक (Transistive) : मान लीजिए कि $U \leq V$ और $V \leq W$ है। तब $U \subseteq V$ और $V \subseteq W$ है। इसका अर्थ है कि $U \leq W$ है।

   इसलिए $U \leq W$ है।

   इस प्रकार $(x, \leq)$ एक आंशिक क्रम है।

उदाहरण 2.3 : माना कि X एक घनात्मक पूर्णांकों (Positive Integers) का समुच्चय है। सिद्ध करें कि संबंध 'विभाजित' (Divides) और 'समकल गुणांक' (Intergral Multiples) X पर आंशिक क्रम जैसा होता है।

हल : माना कि a और b दो घनात्मक पूर्णांक हैं, तो हम कहते हैं कि a को b विभाजीत करता है और इसे a/b के रूप में लिखा जाता है, यदि और केवल यदि जब कोई पूर्णांक c इस तरह हो कि $ac = b$ (या b, a का एक समाकल गुणक है)।

टिप्पणी

किसी भी $a,b \in x$, के लिए, $a \leq b \Leftrightarrow a/b$ (=) $ac = b$ होगा।

1. स्वतुलयता (Reflexive) : $a.1= a, a/a$ और इसलिए $a \leq a$।
2. प्रतिसममित (Antisymmetric) : मान लीजिए कि $a \leq b$ और $b \leq a$ है। तब $c, d \in x$ इस तरह उपस्थित होंगे कि $ac = b$ और $bd = a$ होगा। चूँकि $a = bd = acd \Rightarrow cd = 1, c =1$ और $d = 1$ है।

   इसलिए $a = b$ है।
3. सकर्मक (Transitive) : मान लीजिए कि किसी $a,b,c \in x, a \leq b$ और $b \leq c$ है। तब $x, y \in x$ इस तरह उपस्थित होंगे कि $ax = b$ और $by = c$। अब $a\, xy = by = c$ है और $xy \in X, a/c$ है। इसलिए $a \leq c$ होगा। इस प्रकार $(X, \leq)$ एक आंशिक क्रम है।

उदाहरण 2.4: पूर्णांक के समुच्चय Z पर विचार करें। $a \leq b$ को इस तरह परिभाषित करें कि कोई धनात्मक पूर्णांक r है तो $b = a^r$ होगा। सिद्ध करें कि $(z, \leq)$ एक आंशिक क्रमिक समुच्चय है।

हल : माना कि $a,b,c \in Z$

1. स्वतुलयता (Reflexive) : चूंकि $a = a^1$, $a \leq a$ है।
2. प्रतिसममित (Antisymmetric) : मान लीजिए कि $a \leq b$ और $b \leq a$ है और यहाँ धनात्मक पूर्णांक r, s इस तरह उपस्थित है कि $b = a^r$ और $a = b^s$ है। चूंकि $a = b^s = (a^r)^s = a^{rs}$ है इसका मतलब है कि $rs =1$ है लेकिन $rs \in z \Rightarrow r = 1$ और $s = 1$। इसलिए, $a = b$ होगा।
3. सकर्मकता (Transitive) : मान लीजिए कि $a \leq b$ और $b \leq c$ है। तब धनात्मक पूर्णांक r, s इस तरह उपस्थित होंगे कि $b = a^r$ और $c = b^s$ होंगे। अब $c = b^s = (a^r)^s = a^{rs}$ और $rs \in Z$ का अर्थ है कि $a \leq c$ है। इस प्रकार $(Z, \leq)$ एक आंशिक क्रमिक समुच्चय है।

उदाहरण 2.5 : यदि R समुच्चय x और $A \leq x$ से आंशिक क्रमिक रूप से संबंधित है, तो दिखाएँ कि $R \cap (A \times A)$, A पर आंशिक क्रमिक संबंध है।

हल : $R \cap (A \times A)$ को R^1 से निरूपित करें।

1. स्वतुलयता (Reflexive) : माना कि $x \in A$ है। तब $(x, x) \in A \times A$ होगा।

   चूँकि R स्वतुलय है, $(x, x) \in R$ (ध्यान दें कि $x, x) \in R$ का अर्थ है xRx। इसलिये $(x, x) \in R \cap (A \times A) = R^1$ है।
2. प्रतिसममित (Antisymmetric) : मान लीजिए $(x, y) \in R^1$ और $(y, x) \in R^1$ है। इसका तात्पर्य है कि $(x, y) \in R \cap (A \times A)$ और $(y, x) \in R \cap (A \times A)$ है। चूँकि R प्रतिसममित, $(x, y) \in R$ और $(y, x) \in R$ है तो $x = y$ होगा।
3. सकर्मक (Transitive) : मान लीजिए $(x, y) \in R^1 = R \cap (A \times A)$ और

टिप्पणी

$(y, z) \in R^1 = R \cap (A \times A)$। ऐसा R सक्रमक होगा।

$(x, y) \in R$ और $(y,z) \in R$

$\Rightarrow$ स्पष्ट रूप से $(x, z) \in R$ है।

$(x, z) \in A \times A$ और इसलिए $(x, z) \in R \cap (A \times A) = R^1$

इस प्रकार $R^1 = R \cap (A \times A), A$ पर आंशिक क्रमिक संबंध है।

2.3 आंशिक क्रमिक समुच्चय का हैसे आरेख

रूप या हैसे आरेख एक आंशिक क्रम समुच्चय P की एक तस्वीर (Picture) है। इसलिए यह P के अवयवों के प्रकारों का वर्णन करने में बहुत उपयोगी होता है। कई बार हम आंशिक क्रमिक समुच्चय को इसके हैसे आरेख को उपस्थित कर परिभाषित करते हैं।

P पर संबंध < को x < y (=) $x < y$ ढल से परिभाषित करें। लेकिन $x \neq y$ होना चाहिए। माना कि $(p, \leq)$, एक आंशिक क्रमिक समुच्चय है। एक अवयव $y \in p$ एक अन्य अवयव $x \in p$ को आवृत करेगा अगर $x < y$ और कोई अवयव $z \in p$ उपस्थित नहीं हो, इस प्रकार कि $x \leq z$ और $z \leq y$ हो; अर्थात् y, x को आवृत करता है।

$\Leftrightarrow$ ($x < y$ और $x \leq z \leq y \Rightarrow x = z$ या $z = y$)

यहाँ हम कहते हैं कि y, x का तत्काल पूर्ववर्ती (Immediate Predecessor) है या x, y का एक तत्काल पश्चातवर्ती (Immediate Successor) है।

समुच्चय P पर आंशिक क्रमिक संबंध $\leq$ को आरेख के माध्यम से दर्शाया जा सकता है जिसे हैसे आरेख या $(p, \leq)$ का आंशिक क्रमिक समुच्चय आरेख के रूप में जाना जाता है।

प्रक्रिया

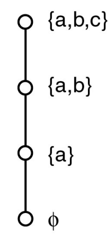
1. p के प्रत्येक अव्यव को एक छोटे वृत्त (Circle) या एक डॉट (Dot) द्वारा दर्शाएँ।
2. $x \in p$ के वृत्त को $y \in p$ के वृत्त के नीचे खींचें यदि $x < y$, और x और y के बीच एक रेखा खींचें यदि y, x को आवृत करता है।
3. यदि $x < y$ और y, x को आवृत नहीं करता है, तो x और y सीधे एक रेखा से जुड़े नहीं होते हैं। बल्कि, यह p के एक या अधिक अवयवों के माध्यम से जुड़े हुए होते हैं।

नोट्स

1. हैसे आरेख का भाग p आवश्यक नहीं जुड़े हुए हो। इसके अलावा, p के आरेख में कोई निर्देशित चक्र (Directed Cycles) नहीं होती है क्योंकि आंशिक क्रम संबंध प्रतिसममित होते है।
2. पूर्ण क्रमिक समुच्चय $(p, \leq)$ में, हैसे आरेख में एक के नीचे दूसरा वृत्त होता हैं।
3. इस तरह के एक हैसे आरेख में $\leq$ के लिए क्रमिक युग्म (Ordered Pairs) के समुच्चय को प्राप्त करना संभव है।

उदाहरण 2.6 : माना कि $p = \{\phi,(a),(a,b),(a,b,c)\}$ और संबंध $\leq$ इस तरह है कि $A \leq B$ होगा यदि । $A \subseteq B, p$ पर समावेश संबंध (Inclusion Relation) है। $(p, \leq)$ का हैसे आरेख बनाएं।

हल :

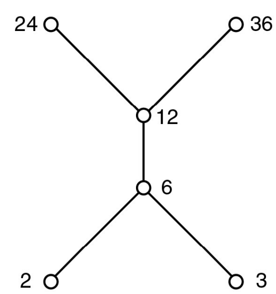


उदाहरण 2.7 : माना कि $x = \{2,3,6,12,24,36\}$ और $\leq$ सम्बन्ध इस तरह है कि $x \leq y$ होगा यदि x, y को विभाजित करता है। $(x, \leq)$ का हैसे आरेख बनाएं।

हल : यहाँ,

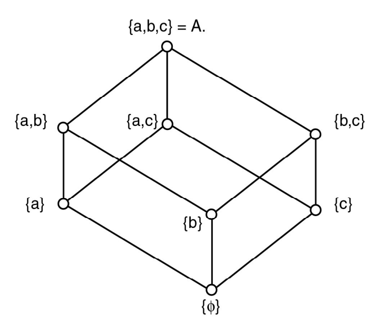
$$\leq = \{(2,2),(2,6),(2,12),(2,24),(2,36),(3,3),(3,6),$$
$$(3,12),(3,24),(3,36),(6,6),(6,12),(6,24),$$
$$(6,36),(12,12),(12,24),(12,36),(24,24),(36,36)\}$$

तो इसी प्रकार हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है :



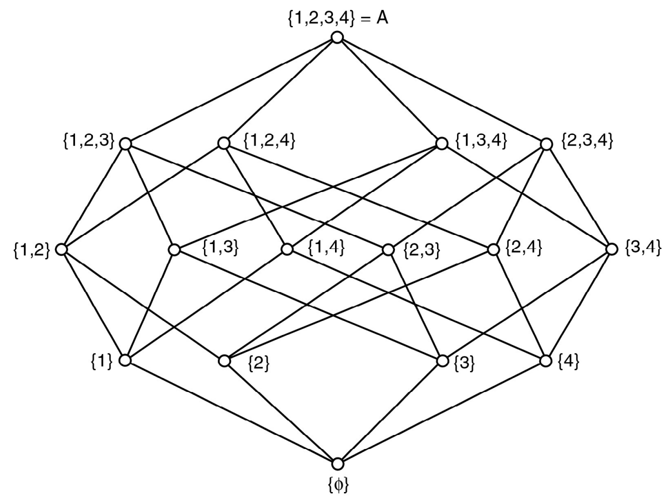
उदाहरण 2.8 : माना कि $A = \{a,b,c\}$ और $p(A)$ इसका घात समुच्चय (Power Set) है। माना कि $\subseteq$, $p(A)$ पर संयुक्त संबंध है। हैसे आरेख बनाएं।

हल : यहाँ $p(A) = \{\phi,(a),(b),(c),(a,b),(a,c),(b,c),(a,b,c)\}$ और अनुकूल हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है:



उदाहरण 2.9 : माना कि $A = \{1,2,3,4\}$ और $p(A)$ इसका घात समुच्चय (Power Set) है। माना कि $\subseteq$, $p(A)$ पर समावेश संबंध है। हैसे आरेख बनाएं।

टिप्पणी



हल : माना कि $(p, \leq)$, एक आंशिक क्रम समुच्चय (Order Set) है और माना कि $A \subseteq P$ है। एक अवयव $x \in p$, A के लिए ऊपरी परिबंध या अपर बाउन्ड है यदि सभी $a \in A, a \leq x$ है। इसी तरह, कोई भी अवयव $x \in p, A$ के लिए निम्न परिबंध है यदि सभी $a \in A, x \leq a$ है।

दूसरे शब्दों में, $x \in p$, a और b का उपरी परिबंध (Upper Bound) होगा यदि $a \leq x$ और $b \leq x$ है। इसी तरह, $x \in p$ को a और b का निम्न परिबंध या लोअर बाउन्ड (Lower Bound) कहा जाता है, अगर $x \leq a$ और $x \leq b$ है।

एक अवयव $x \in p$, A के लिए एक निमनिष्ठ उपरी परिबंध (LUB) होगा, अगर x, (A और $x \leq y$) के लिए एक उपरी परिबंध है, जहाँ y, A के लिए कोई उपरी परिबंध है। दूसरे अर्थों में $x \in p$, a और b का निमनिष्ठ उपरी परिबंध (LUB) होगा अगर $a \leq x$ और $b \leq x$ है और अगर $y \in p$ के लिए, $a \leq y, b \leq y \Rightarrow x \leq y$ है।

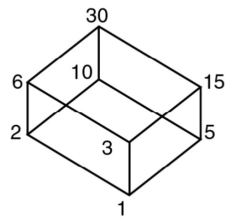
इसी प्रकार A के लिए ग्रैटस्ट या उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) एक अवयव $x \in p$ इस तरह है कि x एक निम्न परिबंध है और y के सभी निम्न परिबंधों के लिए $y \leq x$ है। दूसरे शब्दों में $x \in p$, a और b का GLB होगा, यदि $x \leq a$, $x \leq b$ और यदि $y \in p, y \leq a, y \leq b \Rightarrow y \leq x$ है।

नोटः कुछ लेखक LUB के बजाय उच्चिष्ठ (Supremum) और GLB के बजाय निमनिष्ठ (Infimum) शब्द का उपयोग करते हैं।

उदाहरण 2.10: माना कि $p = \{1, 2, 3,5,6,10,15,30\}$ और $\leq$ p पर एक 'विभाज्य 'संबंध है। तब सिद्ध करें कि $(p, \leq)$, एक आंशिक क्रम समुच्चय है। 2 और 3 के उपरी परिबंध के समुच्चय $\{x \in p : 2 \leq x,\ 3 \leq x\} = \{x \in p : 2/x, 3/x\} = \{6,30\}$ । हैसे आरेख बनाएं।

हल : इस समुच्चय का निम्न अवयव 6 है तो 2 और 3 का LUB = 6 होगा। 6 और 15 के निम्न परिबंध का समुच्चय $\{1, 3\}$ होगा। इस समुच्चय का सबसे बड़ा अवयव 3 है। इसलिए 6 और 15 का GLB = 3 होगा।

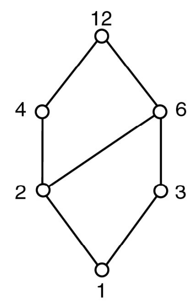
इस उदाहरण के लिए हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है :



टिप्पणी

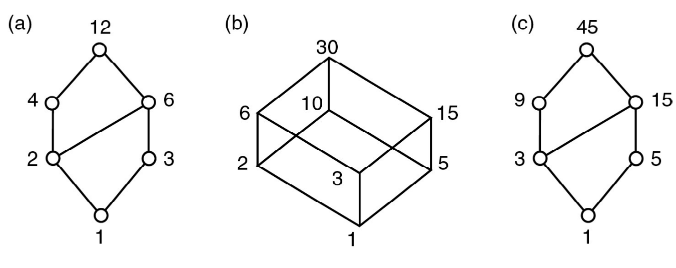
उदाहरण 2.11 : $(N, \leq)$ के लिए हैसे आरेख बनाएं, जहां $A = \{1,2,3,4,12\}$ और $x \leq y$ यदि और केवल यदि x/y हो।

हल : इस उदाहरण के लिए हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है :



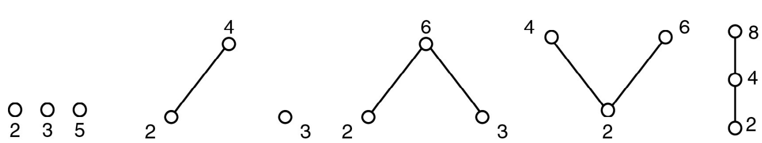
उदाहरण 2.12 : माना कि A किसी विशेष धनात्मक पूर्णांक m और e के कारकों का समुच्चय, $\leq$ एक 'विभाज्य' संबंध, अर्थात, $\leq = \{(x, y) | x \in A$ और $y \in A$ और $(x, y$ को विभाजित करता है$)\}$। (a) $m = 12$, (b) $m = 30$, (c) $m = 45$ के लिए हैसे आरेख बनाएं।

हल : इस उदाहरण के लिए हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है :



उदाहरण 2.13 : दिखाएँ कि तीन अवयवों वाले आंशिक रूप से क्रमिक समुच्चयों के लिए केवल पाँच अलग–अलग हैसे आरेख होते हैं ।

हल : मान लें कि यदि $a \leq b$ अगर a/b है और $A = \{2,3,5\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2,3,6\}$, $D = \{2,4,6\}$, और $E = \{2,4,8\}$ समुच्चयों पर विचार करें। तब इसका हैसे आरेख नीचे दर्शाया गया है :



(A, ≤) (B, ≤) (C, ≤) (D, ≤) (E, ≤)

आंशिक क्रम समुच्चयों के लिए ये एकमात्र विशिष्ट हैसे आरेख हैं जिनमें तीन अवयव हैं।

टिप्पणी

2.4 उच्चिष्ठ और निमनिष्ठ अवयव

एक अवयव $x \in p$ को उच्चिष्ठ (उच्चिष्ठ) अवयव कहा जाता है यदि सभी के लिए $a \in p, a \leq x$ होता है। एक अवयव $x \in p$ को निमनिष्ठ (निमनिष्ठ) अवयव या निमनिष्ठ अवयव कहा जाता है यदि सभी $a \in p, x \leq a$ होता है। उच्चिष्ठ अवयव को 1 और निमनिष्ठ अवयव को 0 के रूप में दर्शाया जाता है।

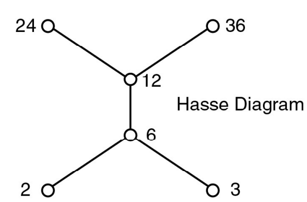
प्रमेय 2.1 : यदि किसी आंशिक क्रम समुच्चय $(p, \leq)$ में निमनिष्ठ अवयव हैं , तो यह अवयव अद्वितीय होगा। इसी प्रकार, यदि किसी आंशिक क्रम समुच्चय $(p, \leq)$ में उच्चिष्ठ अवयव है, तो यह भी अद्वितीय होगा।

प्रमाण : मान लीजिए कि x_1 और x_2 कोई दो निमनिष्ठ अवयवों हैं। चूंकि x_1 एक निमनिष्ठ अवयव है, $x_1 \leq x_2$ और x_2 भी एक निमनिष्ठ अवयव $x_2 \leq x_1$ है। क्योंकि $\leq$ प्रतिसममित है इसलिए हमें $x_1 = x_2$ मिलता है। इस प्रकार, निमनिष्ठ अवयव यदि कोई उपस्थित है, तो वह अद्वितीय होगा। द्वैता से, दूसरे परिणाम प्राप्त होगा।

उदाहरण 2.14 : $(X, \leq)$ के लिए हैसे आरेख बनाएं, जहां $X = \{2,3,6,12,24,36\}$ है और $x \leq y$ यदि x/y है। निम्नलिखित को ज्ञात करें–

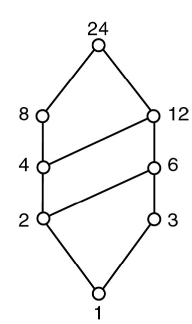
1. $A = \{2,3,6\}$ का LUB और GLB
2. $B = \{2,3\}$ का LUB और GLB
3. $C = \{6,12\}$ का LUB और GLB

हल :



1. A का LUB = 6 है; A का GLB उपस्थित नहीं है।
2. B का LUB = 6 है; लेकिन GLB नहीं है।
3. C का LUB = 12 है; C का GLB = 6 है।

उदाहरण 2.15 : हैसे आरेख से :



टिप्पणी

1. सभी निम्न परिबंध 8 और 12 ज्ञात कीजिए।
2. सभी उपरी परिबंध 8 और 12 ज्ञात कीजिए।
3. 8 और 12 का GLB ज्ञात कीजिए।
4. 8 और 12 का LUB ज्ञात कीजिए।

हल :

1. 8 और 12 का निम्न परिबंध 1,2,4 हैं।
2. 8 और 12 का उपरी परिबंध 24 है।
3. 8 और 12 का GLB 4 है।
4. 8 और 12 का LUB 24 है।

2.5 जालक या लैटिस

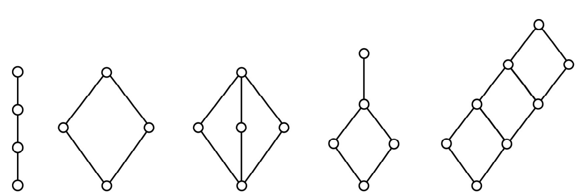
एक जालक या लैटिस एक आंशिक क्रमिक समुच्चय $(L, \leq)$ होता है, जिसमें अवयवों की प्रत्येक जोड़ी या युग्म $a, b \in L$ में उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) और एक निमनिष्ठ उपरी परिबंध (LUB) हो।

उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) के एक उपसमुच्चय $\{a, b\} \subseteq L$ को $a \wedge b$ और निमनिष्ठ निम्न परिबंध (LUB) को $a \vee b$ से दर्शाया जाता है। तो GLB $\{a, b\} = a \wedge b$, को a और b का सम्मिलन (Meet) कहा जाता है और LUB $\{a, b\} = a \vee b$, को a और b का जोड़ना (Join) कहा जाता है।

ध्यान दें कि $\vee$ और $\wedge$ बाइनरी संक्रिया या आपरेशन (Binary Operations) हैं और हम जालक या लैटिस को $(A, \wedge, \vee)$ द्वारा दर्शाते हैं। $\wedge, \vee$ की परिभाषा से, निम्नलिखित को निरूपित किया जाता है :

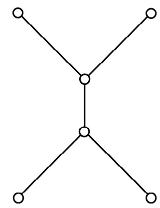
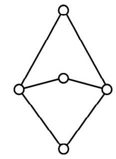
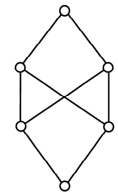
1. $a \leq a \vee b$; $b \leq a \vee b$ (अर्थात., $a \vee b$, a और b का UB है)।
2. $a \wedge b \leq a$; $a \wedge b \leq b$ (यानी, $a \wedge b$, a और b का UB है)।
3. यदि कोई $a \leq c$ और $b \leq c$ है तो $a \vee b \leq c$ (अर्थात्, $a \vee b$, a और b का LUB है)।
4. यदि $c \leq a$ और $c \leq b$ है तो $c \leq a \wedge b$ (अर्थात्, $a \wedge b, a$ और b का GLB है)।

उदाहरण के लिए, निम्नलिखित जालक हैं–



उदाहरण के लिए, निम्नलिखित आंशिक क्रम समुच्चय हैं, लेकिन जालक नहीं हैं–

टिप्पणी

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि A कोई भी समुच्चय है और $L = P(A)$ इसका घात समुच्चय है। आंशिक क्रम समुच्चय $(L, \subseteq)$ एक जालक है जिसमें किसी भी $x, y, \in L$ के लिए, $x \wedge y = x \cap y$ और $x \vee y = x \cup y$ होता है।

इसी तरह मान लीजिए कि I घनात्मक पूर्णांक का समुच्चय है। किसी भी $x, y \in I$, $x \leq y$ के लिए यदि x/y है। $x \vee y = \text{LCM}\,(x, y)$ और $x \wedge y = \text{GCD}_{\in}(x, y)$ को परिभाषित करें। तब $(I, \wedge, \vee)$ एक जालक होगा।

प्रमेय 2.2 : मान लीजिए कि $(L, \leq)$ एक जालक है जिसमें $\wedge$, $\vee$ क्रमशः मिलने और जुड़ने की संक्रियाओं को निरूपित करते हैं। किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए, हमारे पास है,

1. $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$ वर्गसमता (Idempotent)
2. $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$ क्रमविनिमय (Commutative)
3. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \cap c)$; $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ साहचर्य (Associative)
4. $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$ अवशोषण (Absorption)

प्रमाण :

1. चूंकि $a \leq a$, से हम जानते हैं कि $\{a, a\} = \{a\}$ का निम्न परिबंध है। यदि b भी एक निम्न परिबंध है और यदि $a \leq b$ है तो $b \leq a$ और $a \leq b$। प्रतिसममित द्वारा, $a = b$ होगा। अतः $\{a\}$, a का GLB है। इसलिए, $a \wedge a = a$ द्वैता (Dually) से $a \vee a = a$।
2. माना कि $x = a \wedge b = \text{GLB}\,\{a, b\}$। चूंकि

   $\{a, b\} = \{b, a\}$, GLB $\{b, a\} = x$। तो $b \wedge a = x$।

   अतः $x = a \wedge b = b \wedge a$। द्वैता से (Dually), $a \vee b = b \vee a$।
3. माना कि $x = a \wedge (b \wedge c)$ और $y = (a \wedge b) \wedge c$।

   अब $x = a \wedge (b \wedge c) \Rightarrow x \leq a,\ x \leq b \wedge c$

   $\Rightarrow x \leq a, x \leq b, x \leq c$

   $\Rightarrow x \leq a \wedge b, x \leq c$

   $\Rightarrow x \leq (a \wedge b) \wedge c = y$ है।

   इसी प्रकार, $y \leq x$। प्रतिसममित द्वारा, $x = y$ और इसलिए,

   $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

   द्वैता से, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

टिप्पणी

4. परिभाषा के अनुसार, किसी भी $a \in L$ के लिए, $a \leq a$ और $a \leq a \vee b$

इसलिए, $a \leq a \wedge (a \vee b)$। लेकिन $a \wedge (a \vee b) \leq a$। अतः $a \wedge (a \vee b) = a$

द्वैता से, $a \vee (a \wedge b) = a.$

प्रमेय 2.3 : मान लीजिए कि $(L, \leq)$ एक जालक है जिसमें $\wedge$ और $\vee$ क्रमशः मिलने और जुड़ने की सक्रियाओं या आपरेशनस को निरूपित करता है। किसी भी $a, b \in L$ के लिए,

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

$$a \vee b = b$$

प्रमाण : मान लीजिए कि $a \leq a$ चूंकि $a \leq b$, अतः $a \leq a \wedge b$ होगा। लेकिन $\wedge$ की परिभाषा के अनुसार, $a \wedge b \leq a$। इसलिए $a \wedge b = a$। इसके विपरीत, मान लीजिए कि $a \wedge b = a$ है। फिर $a \leq b$, अतः $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$।

इसी प्रकार $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ होगा।

आइसोटोनिसिटी नियम (Isotonicity Law)

प्रमेय 2.4 : मान लीजिए कि $(L, \leq)$ एक जालक है जिसमें क्रमशः $\wedge$ और $\vee$ मिलने और जुड़ने की संक्रियाओं को दर्शाता है। किसी भी $a, b, c, \in L$ के लिए,

$$b \leq c \Rightarrow \begin{cases} a \wedge b \leq a \wedge c \\ a \vee b \leq a \vee c \end{cases}$$

प्रमाण : मान लीजिए कि $b \leq c$। चूँकि $a \wedge b \leq b$, संक्रमकता (Transitivity) द्वारा $a \wedge b \leq c$ क्योंकि $a \wedge b \leq a$ है इसलिए $a \wedge b \leq a \wedge c$

अब, $b \leq c$ और $c \leq a \vee c$ का तात्पर्य है कि $b \leq a \vee c$ होगा।

लेकिन $a \leq a \vee c$ इसलिए $a \vee b \leq a \vee c$।

नोट : किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए, आइसोटोनिसिटी नियम द्वारा,

$$a \leq b \wedge a \leq c \Rightarrow a \leq b \vee c$$

$$a \leq b \wedge a \leq c \Rightarrow a \leq b \vee c$$

$$c \leq b \wedge a \leq a \Rightarrow b \wedge c \leq a$$

$$c \leq b \wedge a \leq a \Rightarrow b \vee c \leq a.$$

वितरक असमानता (Distributive Inequality)

प्रमेय 2.5 : मान लीजिए कि $(L, = \leq)$ एक जालक है। किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए, निम्न असमानता नियमों का पालन होता है–

(i) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(ii) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

प्रमाण : चूँकि $a \leq a \vee b$ और $a \leq a \vee c$, हमारे पास है

$$a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \ldots (1)$$

चूँकि $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ और $b \wedge c \leq c \leq a \vee c$,

$$b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad \ldots (2)$$

समीकरणों (1) और (2) द्वारा हमारे पास होगा,

$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

इसी प्रकार, समीकरण (2) होगा।

टिप्पणी

मॉड्यूलर असमानता (Modular Inequality)

प्रमेय 2.6 : मान लीजिए कि $(L, \leq)$ एक जालक है किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए

$a \leq c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$

प्रमाण : मान लीजिए कि $a \leq c$ तब $a \vee c = c$

वितरक असमानता (Distributive Inequality) द्वारा, $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

चूँकि, $a \vee c = c$,

$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$

विलोमत (Conversely), मान लीजिए कि $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$

चूँकि,

$$\begin{aligned} a &\leq a \vee (b \wedge c) \\ &\leq (a \vee b) \wedge c \\ &\leq c \end{aligned}$$

हमें $a \leq c$ मिला है। इसलिए यह सिद्ध हुआ।

उदाहरण 2.16 : सिद्ध करें कि जालक $(L, \leq)$ में किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए, यदि $a \leq b \leq c$ है तो $a \vee b = bc$ और $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ होगा।

हल : चूँकि $a \leq b$ और $a \leq c, a \leq b \wedge c$ फिर से $b \leq b$ और $b \leq c$ का तात्पर्य है कि $b \leq b \wedge c$ है।

अब $a \leq b \wedge c$ और $b \leq b \wedge c \Rightarrow a \vee b \leq b \wedge c$ ... (i)

फिर से, $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$ ... (ii)

समीकरणों (i) और (ii) से, $a \vee b = b \wedge c$

इसलिए, $a \wedge b \leq b$ और $b \wedge c \leq b$ हो $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \leq b$ प्राप्त होता है। चूँकि $b \leq c$ और $b \leq b$ तात्पर्य है कि $b \leq b \wedge c$। फिर से $b \leq (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$। इसलिए, $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b$। इसी प्रकार, $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 2.17 : सिद्ध करो कि जालक $(L, \leq)$ और किसी भी $a, b, c, d, \in L$ के लिए, यदि $a \leq b$ और $c \leq d$ है तब $a \wedge c \leq b \wedge d$ होगा।

हल : चूँकि $a \wedge c \leq a \leq b$ और $a \wedge c \leq c \leq d, a \wedge c \leq b \wedge d$

वितरक जालक या लैटिस (Distributive Lattice)

एक जालक $(L, \leq)$ को बंटनात्मक या वितरक जालक (Distributive Lattice) कहा जाता है यदि किसी भी $a, b, c, \in L$, के लिए,

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

टिप्पणी

प्रमेय 2.7 : मान लीजिए कि $a, b, c \in L$ है जहाँ $(L, \leq)$ एक बंटनात्मक या वितरक जालक है। तब $a \vee b = a \vee c$ और $a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow b = c$ होगा।

हल : हम जानते हैं,

$b = b \vee (b \wedge a)$ अवशोषण (Absorption)

$= b \vee (a \wedge b)$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= b \vee (a \wedge c)$ $(\because a \wedge b = a \wedge c)$

$= (b \vee a) \wedge (b \vee c)$ वितरक (Distributive)

$= (a \vee b) \wedge (c \vee b)$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= (a \vee c) \wedge (c \vee b)$ $(\because a \vee b = a \vee c)$

$= (c \vee a) \wedge (c \vee b)$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= c \vee (a \wedge b)$ वितरक (Distributive)

$= c \vee (a \wedge c)$ $(\because a \wedge b = a \wedge c)$

$= c \vee (c \wedge a)$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= c$ अवशोषण (Absorption)

इसलिए यह सिद्ध होता है।

मॉड्यूलर जालक

एक जालक $(L, \leq)$ को मॉड्यूलर जालक कहा जाता है अगर $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$

परिबंध जालक

एक जालक $(L, \leq)$ जिसमें दोनों, निमनिष्ठ अवयव, 0 से निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ अवयव 1 द्वारा निरूपित को परिबंध जालक कहा जाता है।

नोट : यदि $L = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}} a_i = 0$ और $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} a_i = 1$ के साथ यह संतुष्ट करता है $a \vee 0 = a, a \vee 1 = 1, a \wedge 1 = a$ और $a \wedge 0 = 0$।

एक अवयव का पूरक

एक परिबंध जालक $(L, \leq)$ में, एक अवयव $b \in L$ को एक अन्य अवयव $a \in L$ का पूरक कहा जाता है यदि $a \wedge b = 0$ और $a \vee b = 1$, हम b को a द्वारा दर्शाते हैं।

पूरक जालक

एक जालक $(L, \leq)$ को पूरक जालक कहा जाता है यदि L के प्रत्येक अवयव में कम से कम एक पूरक हो।

उदाहरण 2.18 : दर्शाएँ कि डी मॉर्गन के नियम (De Morgan's Laws) पूरक वितरक जालक नियमों (Complemented Distributive Lattice) का पालन करता है।

टिप्पणी

हल : यह बताने के लिए कि $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ और $(a \vee b)' = (a' \wedge b')$ होते है, विचार करें

$(a \wedge b)' \wedge (a' \vee b') = ((a \wedge b) \wedge a') \vee ((a \wedge b) \wedge b')$ वितरक (Distributive)

$= ((b \wedge a) \wedge a') \vee ((a \wedge b \wedge \wedge b')$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= (b \wedge (a \wedge a')) \vee (a \wedge (b \wedge b'))$ सहचर्य (Associtative)

$= (b \wedge 0) \vee (a \wedge 0)$

$= 0 \vee 0 = 0$

फिर से, $(a \wedge b)' \wedge (a' \vee b') = (a \vee (a' \vee b') \wedge (b \vee (a' \vee b'))$ वितरक (Distributive)

$= (a \vee (a' \vee b')) \wedge (b \vee (b' \vee a'))$ क्रम विनिमय (Commutative)

$= ((a \vee a') \vee b') \wedge ((b \vee b') \vee a')$ सहचर्य (Associtative)

$= (1 \vee b') \wedge (1 \vee a')$

$= 1 \wedge 1 = 1$

इसलिए, $a' \vee b'$, $(a \wedge b)$ का पूरक है। तो $a' \vee b' = (a \wedge b)'$ इसी तरह, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ होता है।

उदाहरण 2.19 : दिखाएँ कि पूरक जालक $(L, \leq)$ में,

$a \leq b \Leftrightarrow a' \vee b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow b' \leq a'$

हल : $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ पर विचार करें।

$\Leftrightarrow a' \vee a = a' \vee (a \wedge b) = 1$
$\Leftrightarrow (a' \vee a) \wedge (a' \vee b) = 1$
$\Leftrightarrow 1 \wedge (a' \vee b) = 1$
$\Leftrightarrow a' \vee b = 1$

फिर से, $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

$\Leftrightarrow b \wedge b' = (a \vee b) \wedge b' = 0$
$\Leftrightarrow (a \wedge b') \vee (b \wedge b') = 1$
$\Leftrightarrow (a \wedge b') \vee 0 = 0$
$\Leftrightarrow a \wedge b' = 0.$

अंतिम पद को सिद्ध करने के लिए,

$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$
$\Leftrightarrow (a \vee b') = b'$
$\Leftrightarrow a' \wedge b' = b'$
$\Leftrightarrow a' \wedge a' = b'$ क्रम विनिमय (Commutative)
$\Leftrightarrow b' \leq a'.$

टिप्पणी

उदाहरण 2.20 : जालक $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ पर विचार करें, 12 को क्रमिक विभाजन द्वारा विभाजित किया गया है। निम्नलिखित को परिभाषित करे–

(i) L का निम्न परिबंध और उपरी परिबंध

(ii) 4 का पूरक

(iii) क्या L एक पूरक जालक है?

हल :

(i) L का निम्न परिबंध 1 है और उपरि परिबंध 12 है।

(ii) चूँकि $4 \wedge 3 = \gcd(4,3) = 1$ और

$4 \vee 3 = \text{lcm}(4,3) = 12$, तब 4 का पूरक 3 होगा।

(iii) चूँकि $6 \wedge x = \gcd(6, x)$

$\neq 1$ के लिए $x \neq 1$ और $6 \vee 1 = \text{lcm}(6,1)$

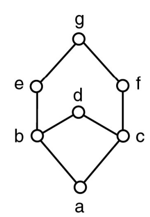
$\neq 12$, 6 में कोई पूरक नहीं है और इसलिए L एक पूरक जालक नहीं है।

उप–जालक

मान लीजिए कि M एक जालक $(L, \leq)$ का अरिक्त उप–समुच्चय है। हम कह सकते हैं कि M, L का एक उप–समुच्चय है यदि M स्वयं L की संक्रियों के तहत एक जालक हो।

नोट : M, L का एक उप–जालक तभी होगा यदि और केवल यदि M, L की $\wedge$ और $\vee$ की संक्रियों के तहत बंद होगा।

उदाहरण 2.21 : निम्नलिखित जालक L पर विचार करें।



ज्ञात करें कि निम्न में से प्रत्येक L के एक उप–जालक है या नहीं।

$M = \{a, b, c, g\}$

$N = \{a, b, f, g\}$

$O = \{b, d, e, g\}$

$P = \{a, d, e, g\}$

हल : चूँकि $b \vee c = d$, और $d \neq M, M$ उप–जालक नहीं है। चूँकि $d \wedge e$ और $b \neq p, p,$ उप–जालक नहीं है। किन्तु N और O उप–जालक है।

उदाहरण 2.22 : मान लीजिए कि M एक वितरक जालक L का उप–जालक है। दिखाएँ कि M भी एक वितरक जालक है।

टिप्पणी

हल : एक वितरक जालक L के लिए, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ और $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ सभी $a, b, c \in L$ के लिए। चूंकि M बंद है, इसलिए M का प्रत्येक अवयव L में होगा। वितरक नियम M के सभी अवयवों के लिए लागू होता हैं। इसलिए M एक वितरक जालक है।

उदाहरण 2.23 : सिद्ध करें कि वितरक जालक $(L, \leq)$ में, यदि कोई अवयव पूरक है तो यह पूरक अद्वितीय या यूनीक होगा।

हल : मान लीजिए कि किसी $a \in L$ के लिए, L में b और c दो घटक हैं तो

$a \vee b = 1; a \wedge b = 0$ और $v\ a \vee c = 1; a \wedge c = 0$

विचार करें कि,

$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c)$

$= (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$ (वितरक)

$= 0 \vee (b \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ (वितरक)

$= (a \vee b) \wedge c$

$= 1 \wedge c = c$

अपनी प्रगति जांचिए

1. पूर्ण क्रमिक समुच्चय को परिभाषित कीजिए।
2. आंशिक क्रमिक समुच्चय का हैसे आरेख की प्रक्रिया का वर्णन कीजिए।
3. उच्चिष्ठ और निमनिष्ठ अवयव की व्याख्या कीजिए।
4. जालक को परिभाषित कीजिए।
5. वितरक जालक की व्याख्या कीजिए।
6. उप–जालक को परिभाषित कीजिए।

2.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. एक समुच्चय P में एक बाइनरी संबंध (Binary Relation) R को एक आंशिक क्रम संबंध कहा जाता है या P में एक आंशिक क्रम होता है यदि और केवल यदि R स्वतुल्यता या रफ्लेक्सिव (Reflexive) प्रतिसममित (Antisymmetric) और सक्रमक (Transitive) हो। इसे $\leq$ प्रतीक द्वारा निरूपित किया जाता है। यदि $\leq P$ पर आंशिक क्रम है, तो क्रमिक युग्म $(P, \leq)$ को आंशिक रूप से क्रमबद्ध या आंशिक क्रम समुच्चय कहा जाता है। यदि कोई $x, y \in p$ है, और अगर $x \leq y$ या $y \leq x$, तो $(p, \leq)$ को पूर्ण क्रमिक समुच्चय कहा जाता है।
2. (a) p के प्रत्येक अव्यव को एक छोटे वृत्त (Circle) या एक डॉट (Dot) द्वारा दर्शाएँ।

   (b) $x \in p$ के वृत्त को $y \in p$ के वृत्त के नीचे खींचें यदि $x < y$, और x और y के बीच एक रेखा खींचें यदि y, x को आवृत करता है।

टिप्पणी

(c) यदि $x < y$ और y, x को आवृत नहीं करता है, तो x और y सीधे एक रेखा से जुड़े नहीं होते हैं। बल्कि , वे च के एक या अधिक अवयवों के माध्यम से जुड़े हुए होते हैं।

3. एक अवयव $x \in p$ को उच्चिष्ठ अवयव कहा जाता है यदि सभी के लिए $a \in p$, $a \leq x$ होता है। एक अवयव $x \in p$ को निमनिष्ठ अवयव या निमनिष्ठ अवयव कहा जाता है यदि सभी $a \in p, x \leq a$ होता है। उच्चिष्ठ अवयव को 1 और निमनिष्ठ अवयव को 0 के रूप में दर्शाया जाता है।

4. एक जालक एक आंशिक क्रमिक समुच्चय $(L, \leq)$ होता है, जिसमें अवयवों की प्रत्येक जोड़ी या युग्म $a, b \in L$ में उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) और एक निमनिष्ठ उपरी परिबंध (LUB) हो।

   उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) के एक उपसमुच्चय $\{a, b\} \subseteq L$ को $a \wedge b$ और निमनिष्ठ निम्न परिबंध (LUB) को $a \vee b$ से दर्शाया जाता है। तो GLB $\{a, b\} = a \wedge b$, को a और b का मिलना (Meet) कहा जाता है और LUB $\{a, b\} = a \vee b$, को a और b का जोड़ना (Join) कहा जाता है।

5. एक जालक $(L, \leq)$ को बंटनात्मक या वितरक जालक कहा जाता है यदि किसी भी $a, b, c, \in L$, के लिए,

   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

   $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

6. मान लीजिए कि M एक जालक $(L, \leq)$ का अरिक्त उप–समुच्चय है। हम कह सकते हैं कि M, L का एक उप–समुच्चय है यदि M स्वयं L की संक्रियों के तहत एक जालक हो।

2.7 सारांश

- एक समुच्चय P में एक बाइनरी संबंध (Binary Relation) R को एक आंशिक क्रम संबंध कहा जाता है या P में एक आंशिक क्रम होता है यदि और केवल यदि R स्वतुल्यता या रफ्लेक्सिव (Reflexive) प्रतिसममित (Antisymmetric) और सक्रमक (Transitive) हो। इसे $\leq$ प्रतीक द्वारा निरूपित किया जाता है। यदि $\leq P$ पर आंशिक क्रम है, तो क्रमिक युग्म $(P, \leq)$ को आंशिक रूप से क्रमबद्ध या आंशिक क्रम समुच्चय कहा जाता है। यदि कोई $x,y \in p$ है, और अगर $x \leq y$ या $y \leq x$, तो $(p, \leq)$ को पूर्ण क्रमिक समुच्चय कहा जाता है।
- रूप या हैसे आरेख एक आंशिक क्रम समुच्चय P की एक तस्वीर (Picture) है। इसलिए यह P के अवयवों के प्रकारों का वर्णन करने में बहुत उपयोगी होता है। कई बार हम आंशिक क्रमिक समुच्चय को इसके हैसे आरेख को उपस्थित कर परिभाषित करते हैं।
- हैसे आरेख का भाग p आवश्यक नहीं जुड़े हुए हो। इसके अलावा, p के आरेख में कोई निर्देशित चक्र (Directed Cycles) नहीं होती है क्योंकि आंशिक क्रम संबंध प्रतिसममित होते है।

टिप्पणी

- एक अवयव $x \in p$ को उच्चिष्ठ अवयव कहा जाता है यदि सभी के लिए $a \in p$, $a \leq x$ होता है। एक अवयव $x \in p$ को निमनिष्ठ अवयव या निमनिष्ठ अवयव कहा जाता है यदि सभी $a \in p, x \leq a$ होता है। उच्चिष्ठ अवयव को 1 और निमनिष्ठ अवयव को 0 के रूप में दर्शाया जाता है।
- यदि किसी आंशिक क्रम समुच्चय $(p, \leq)$ में निमनिष्ठ अवयव हैं , तो यह अवयव अद्वितीय होगा। इसी प्रकार, यदि किसी आंशिक क्रम समुच्चय $(p, \leq)$ में उच्चिष्ठ अवयव है, तो यह भी अद्वितीय होगा।
- एक जालक एक आंशिक क्रमिक समुच्चय $(L, \leq)$ होता है, जिसमें अवयवों की प्रत्येक जोड़ी या युग्म $a, b \in L$ में उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) और एक निमनिष्ठ उपरी परिबंध (LUB) हो।
- उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) के एक उपसमुच्चय $\{a, b\} \subseteq L$ को $a \wedge b$ और निमनिष्ठ निम्न परिबंध (LUB) को $a \vee b$ से दर्शाया जाता है। तो GLB $\{a, b\} = a \wedge b$, को a और b का मिलना (Meet) कहा जाता है और LUB $\{a, b\} = a \vee b$, को a और b का जोड़ना (Join) कहा जाता है।
- एक जालक $(L, \leq)$ को बंटनात्मक या वितरक जालक कहा जाता है यदि किसी भी $a, b, c, \in L$, के लिए,

  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- एक जालक $(L, \leq)$ को मॉड्यूलर जालक कहा जाता है अगर $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$
- एक जालक $(L, \leq)$ जिसमें दोनों, निमनिष्ठ अवयव, 0 से निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ अवयव 1 द्वारा निरूपित को परिबंध जालक कहा जाता है।
- एक परिबंध जालक $(L, \leq)$ में, एक अवयव $b \in L$ को एक अन्य अवयव $a \in L$ का पूरक कहा जाता है यदि $a \wedge b = 0$ और $a \vee b = 1$, हम b को a द्वारा दर्शाते हैं।
- एक जालक $(L, \leq)$ को पूरक जालक कहा जाता है यदि L के प्रत्येक अवयव में कम से कम एक पूरक हो।
- मान लीजिए कि M एक जालक $(L, \leq)$ का अरिक्त उप–समुच्चय है। हम कह सकते हैं कि M, L का एक उप–समुच्चय है यदि M स्वयं L की संक्रियों के तहत एक जालक हो।

2.8 मुख्य शब्दावली

- **जालक या लैटिस** : एक जालक एक आंशिक क्रमिक समुच्चय $(<, \leq)$ होता है, जिसमें अवयवों की प्रत्येक जोड़ी या युग्म $a, b \in L$ में उच्चिष्ठ निम्न परिबंध (GLB) और एक निमनिष्ठ उपरि परिबंध (LUB) हों।
- **वितरण जालक** : एक जालक $(<, \leq)$ को वितरक जालक कहा जाता है यदि किसी भी $a, b, c \in L$ के लिए,

टिप्पणी

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- **मॉड्यूलर जालक** : एक जालक $(<, \leq)$ को मॉड्यूलर जालक कहा जाता है अगर $a \leq c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$
- **परिबंध जालक** : एक जालक $(<, \leq)$ जिसमें दोनों, निमनिष्ठ अवयव, 0 से निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ अवयव 1 द्वारा निरूपित को परिबंध जालक कहा जाता है।
- **पूरक जालक** : एक जालक $(<, \leq)$ को पूरक जालक कहा जाता है यदि L के प्रत्येक अवयक में कम से कम एक पूरक हो।

2.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. पूर्ण क्रमिक समुच्चय क्या है?
2. हैसे आरेख को उपस्थित कर परिभाषित कीजिए।
3. जालक से आप क्या समझते हैं?
4. वितरक जालक से आप क्या समझते हैं?
5. उप–जालक को परिभाषित कीजिए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. पूर्ण क्रमिक समुच्चय के बाइनरी संबंध को परिभाषित कीजिए तथा उदाहरण देकर संक्षेप में इसका वर्णन कीजिए।
2. आंशिक क्रमिक समुच्चय का हैसे आरेख क्या है? साथ ही समुच्चय P पर आंशिक क्रमिक संबंध $\leq$ को आरेख के माध्यम से उदाहरण सहित दर्शाएं।
3. आइसोटोमिसिटी नियम क्या है? एक जालक के मिलने और जुड़ने की संक्रियाओं को दर्शाएं।
4. प्रतिरूपक जालक और परिबंध ज्ञालक को उदाहरण देकर समझाएं।
5. एक अवयव का पूरक एवं पूरक जालक को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

2.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Pathak, Dr. H. K. 2017. विविक्त गणित (Discrete Mathematics). Meerut (UP): Shiksha Sahitya Prakashan.

Liu, C. L. 1977. *Elements of Discrete Mathematics*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Deo, Narsingh. 1999. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall of India.

टिप्पणी

Mott, J. L. 2007. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 2nd Edition. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.

Rosen, Kenneth. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Tremblay, Jean Paul and R. Manohar. 1975. *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science*. New York: McGraw-Hill Inc.

Singh, Y. N. 2005. *Mathematical Foundation of Computer Science*. New Delhi: New Age International Pvt. Ltd.

Malik, D. S. 2004. *Discrete Mathematical Structures: Theory and Applications*. London: Thomson Learning.

Haggard, Gary, John Schlipf and Sue Whiteside. 2006. *Discrete Mathematics for Computer Science*. California: Thomson Learning.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2008. *A Course in Abstract Algebra*, 3rd Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Grewal, B. S. 1998. *Higher Engineering Mathematics,* 34th Edition. New Delhi: Khanna Publishers.

Narayan, Shanti. 1996. *Differential Calculus,* 14th Edition. New Delhi: S Chand And Company Limited.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics,* 7th Edition. Mumbai: Wiley Eastern Ltd.

Bali, N. P. 2007. *A Textbook of Engineering Mathematics*. New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2009. *Business Mathematics*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

इकाई 3 आलेख

टिप्पणी

संरचना

3.0 परिचय

गणित में, और अधिक विशेष रूप से आलेख या ग्राफ सिद्धांत में, आलेख एक ऐसी संरचना है जो अब्जेक्ट के एक समूह के लिए होती है जिसमें कुछ युग्म या जोड़े कुछ अर्थों में 'संबंधित' होते हैं। ऑब्जेक्ट गणितीय संक्षेपण के अनुरूप होते हैं, जिन्हें सीमा या सिरा (जिसे नोड या बिंदु भी कहा जाता है) और संबंधित युग्म या जोड़ी के प्रत्येक युग्म को एक सिरा (इसे लिंक या लाइन भी कहा जाता है) कहा जाता है। सामान्य तौर पर, रेखाचित्रों को रेखाचित्रों या रेखाओं के लिए वृत्त के रूप में आरेख के रूप में चित्रित किया जाता है, जो सिरों के लिए रेखाओं या वक्रों से जुड़ता है। आलेख विविक्त गणित में अध्ययन के अब्जेक्ट में से एक है। आलेख सिद्धांत में यूलर आलेख एक यूलर आरेख से जुड़ा हुआ आलेख या ग्राफ है, जिसके सभी सिरे समान डिग्री के हैं। यूलर पथ या मार्ग जुड़े हुए ग्राफ में एक ट्रेल है जिसमें आलेख के सभी सिरों को उपस्थित किया गया है। एक बंद या क्लोज्ड यूलर ट्रेल को एक यूलर परिपथ सर्किट कहा जाता है।

हैमिल्टोनियन परिपथ या सर्किट एक ऐसा सर्किट है जो प्रत्येक शीर्ष या वर्टेक्स को एक बार रिपीट करता है। परिपथ या सर्किट होने के कारण, यह एक ही शीर्ष पर शुरू और समाप्त होना चाहिए। एक हैमिल्टन पथ या मार्ग भी बिना किसी रिपीट के साथ एक बार एक शीर्ष पर शुरू और अंत नहीं होता है।

इस इकाई में आप आलेखों की परिभाषा, आलेखों के प्रकार, यूलर आलेख हैमिल्टोनियम पथ और परिपथ तथा वैट आलेखों में लघुत्तम दूरी : डिजक्सत्रा एल्गोरिथम का अध्ययन करेंगे।

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

टिप्पणी

- आलेखों की परिभाषा की व्याख्या कर पाएंगे;
- आलेखों के प्रकार को समझ पाएंगे;
- यूलर आलेख का वर्णन कर पाएंगे;
- हैमिल्टोनियम पथ और परिपथ की व्याख्या कर पाएंगे;
- वैट आलेखों में लघुत्तमम दूरी : डिजक्सत्रा एल्गोरिथम को समझ पाएंगे।

3.2 आलेखों की परिभाषा

एक आलेख या ग्राफ G, एक त्रिक या ट्रिप्लिट (Triplet) $(V(G), E(G), \theta_G)$ होकर शीर्षों (Vertices) के अरिक्त समुच्चय $V(G)$, कोरों या सीरो का समुच्चय $E(G)$, और प्रत्येक कोर (Edge) पर नियतन (Assigns) एक फलन θ_G, $V(G)$ का उप–समुच्चय $\{u, v\}$ (जरूरी नहीं u, v अलग–अलग हो) से मिलकर बनता है। यदि e एक कोर है और u, v शीर्षों इस तरह है कि $\theta_G(e) = uv$ है, तो e, (u और v) के बीच एक रेखा (कोर) होती है और शीर्षों u और v के अंतिम बिंदु होते हैं।

उदाहरण के लिए,

(*i*) $$G = (V(G), E(G), \theta_G)$$

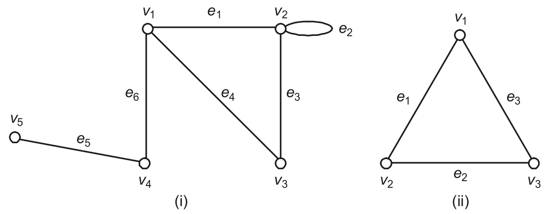
जहां,
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$
$$\theta_G(e_1) = \{v_1v_2\},\ \theta_G(e_2) = \{v_2v_2\},\ \theta_G(e_3) = \{v_2v_3\}$$
$$\theta_G(e_4) = \{v_1v_3\},\ \theta_G(e_5) = \{v_4v_5\},\ \theta_G(e_6) = \{v_1v_4\}$$

(*ii*) $$G = (V(G), E(G), \theta_G)$$

जहां,
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\},\ E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$$
$$\theta_G(e_1) = \{v_1v_2\},\ \theta_G(e_2) = \{v_2v_3\},\ \theta_G(e_3) = \{v_3v_1\}$$

प्रत्येक आलेख में उससे जुड़ा एक आरेख या चित्र (Diagram) होता है। ये आरेख या चित्र (Diagram) इस तरह के आलेख में शामिल समस्याओं को समझने (सुलझाने) में उपयोगी होते हैं। चित्रात्मक निरूपण में, हम शीर्षों को छोटे वृत्तों और कोरों को रेखाओं द्वारा दर्शाते हैं जब भी संगत शीर्षों की जोड़ी एक कोर बनाती है।

उदाहरणों (*i*) और (*ii*) का चित्रात्मक रूपांतरण चित्र 3.1 में दिखाया गया है।



चित्र 3.1 *अलेखों का सचित्र प्रतिनिधित्व*

नोट्स

1. उदाहरण (i) में, e_2 अपने आप में शीर्ष v_2 से जुड़ा हुआ है। इस तरह के कोर को स्व–लूप कहा जाता है।
2. यदि किसी आलेख में शीर्षों की जोड़ी के बीच एक से अधिक कोरें हैं, तो इन कोरों को समानांतर कोरें कहा जाता है।
3. इसके बाद, सरलता के लिए आलेख को $G = (V, E)$ के रूप में दर्शाया जाता है।
4. एक आलेख जिसमें समानांतर कोरें होती है उन्हें बहु–ग्राफ कहा जाता है।

टिप्पणी

सरल आलेख

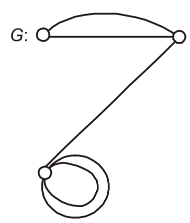
एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें नहीं होती है,उन्हें सरल आलेख कहा जाता है।

छद्मलेख

एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें होती है,उन्हें छद्मलेख कहा जाता है।

नोटः प्रत्येक सरल आलेख और प्रत्येक बहुआलेख एक छद्मलेख होते है, लेकिन विलोमत सही नहीं है।

उदाहरण के लिए,



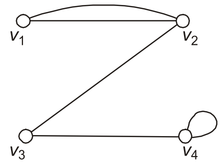
चित्र 3.2 छद्मलेख

चित्र 2.2 में आलेख G न तो एक सरल आलेख है और न ही कोई बहुआलेख है, इसलिए इसे छद्मलेख कहा जाता है।

एक शीर्ष की डिग्री

एक शीर्ष v की डिग्री उस शीर्ष पर संयोग (मिलने वाली) कोरों की संख्या होती है। दूसरे शब्दों में, एक शीर्ष की डिग्री कोरों की संख्या होती है जो उस शीर्ष पर अंतिम बिंदु के रूप में मिलती है और इसे $d(v)$ द्वारा दर्शाया जाता है (चित्र 3.3 देखें)।

उदाहरण के लिए,



जहां, $d(v_1) = 2$
$d(v_2) = 3$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 3$

चित्र 3.3 शीर्ष की डिग्री

एक लूप की शीर्ष की डिग्री 2 होती है।

टिप्पणी

वियुक्त शीर्ष

अगर एक शीर्ष की डिग्री शून्य है तो उसे वियुक्त शीर्ष कहा जाता है।

आलम्ब शीर्ष

अगर एक शीर्ष की डिग्री 'एक' है तो उसे आलम्ब शीर्ष कहा जाता है।

आसन्नता शीर्षों

शीर्षों की जोड़ी जो कोर को निर्धारित करती हैं, उन्हें आसन्नता शीर्षों कहा जाता है।

नोटः शीर्ष के सम या विषम (Even या Odd) का निर्धारण उसकी डिग्री के सम या विषम होने पर निर्भर करता है।

उदाहरण 3.1 : मान लीजिए कि G, एक n शीर्षों वाला सरल आलेख है। सिद्ध करें कि कोरों की संख्या $E(G)$ लगभग ${}^nC_2$, होगी।

हल : मान लीजिए कि $G = (V(G), E(G), \text{q}_G), |V(G)| = n$ के साथ एक सरल आलेख है।

चूंकि, $\theta_{G'}$ $V(G)$ के 2–अवयव उप–समुच्चय $\{u, v\}$ की प्रत्येक कोरों के साथ नियतन है, इसलिए लगभग ${}^nC_2$, 2–अवयव उप–समुच्चय होंगे।

इसलिए, $E(G) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$

प्रमेय 3.1 : मान लीजिए कि G, एक n शीर्षों और e कोरों वाला आलेख है। तब

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$$

प्रमाण : मान लीजिए कि G, एक n शीर्षों और e कोरें वाला है।

चूंकि, प्रत्येक कोर इस योग में डिग्री 2 का योगदान करती है, $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$

प्रमेय 3.2 : एक आलेख G में विषम डिग्री के शीर्ष (विषम शीर्ष) सैदव सम संख्या के होते हैं।

प्रमाण : मान लीजिए कि G, एक n शीर्षों और e कोरों वाला है।

प्रमेय 3.1 द्वारा हमारे पास,

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e = \text{सम संख्या} \qquad ...(1)$$

n शीर्षों में, कुछ सम शीर्षों हैं और कुछ विषम शीर्षों हैं। मान लीजिए कि V_e और V_0 क्रमशः कुछ सम शीर्षों और कुछ विषम शीर्षों है।

अब, समीकरण (1) को निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$\sum_{v \in V_e}^{n} d(v) + \sum_{v \in V_0} d(v) = \text{सम संख्याएं}$$

$$\therefore \qquad \sum_{v \in V_0} d(v) = \text{सम संख्याएं} - \sum_{v \in V_e} d(v) \qquad ...(2)$$

चूंकि समीकरण (2) में दाईं ओर के प्रत्येक पद सम है, इसलिए बाईं ओर के पदों के योग की संख्या भी सम होनी चाहिए, अर्थात G में विषम शीर्षों सम होते हैं।

निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ डिग्री

मान लीजिए कि G एक आलेख है। अगर G की निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ या अधिकतम डिग्री क्रमशः $\delta(G)$ और $\Delta(G)$ हैं तो इसे निम्नानुसार लिखा जाएगा–

$$\delta(G) = \min \{d(v); v \in V(G)\}$$

और, $\Delta(G) = \max \{d(v); v \in V(G)\}$

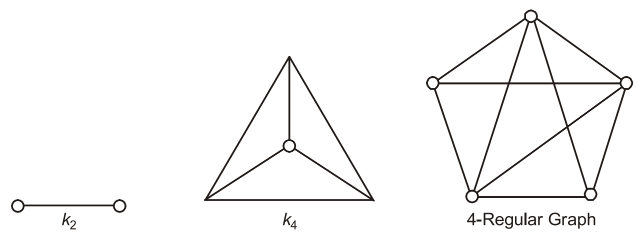
K–नियमित

एक आलेख G, k–नियमित या डिग्री k का नियमित होता है यदि G के प्रत्येक शीर्ष की डिग्री k हो।

पूर्ण आलेख

एक साधारण आलेख जिसमें अलग–अलग शीर्षों के प्रत्येक जोड़ कोर से जुड़े होते हैं, इसे पूर्ण आलेख कहा जाता है। n शीर्षों के पूर्ण आलेख को k_n से निरूपित किया जाता है।

चित्र 3.4 में विभिन्न प्रकार के पूर्ण आलेख दिखाए गए हैं।



चित्र 3.4 पूर्ण आलेख

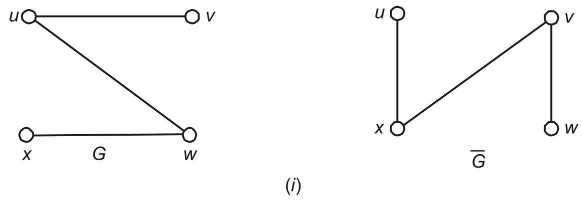
नोट्स

1. प्रत्येक पूर्ण आलेख k_n एक $(n-1)$ नियमित आलेख होता है।
2. 5 शीर्षों के साथ 1–नियमित या 3–नियमित आलेख नहीं होते है, क्योंकि किसी भी आलेख में विषम संख्या के शीर्षों नहीं होते है।

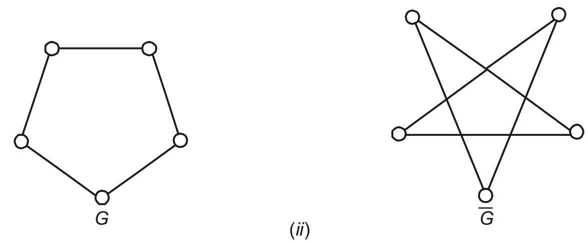
आलेख का पूरक

आलेख G का पूरक $\bar{G}$ वह आलेख होता है जिसमें $V(G) = V(\bar{G})$ हो और इस प्रकार कि uv, $\bar{G}$ की एक कोर हो, यदि और केवल यदि uv, G की एक कोर नहीं हो।

चित्र 3.5 में विभिन्न प्रकारों के पूरक आलेख दर्शाए गए हैं।



टिप्पणी



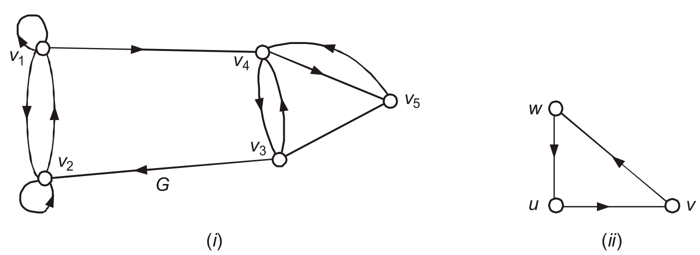
चित्र 3.5 *पूर्ण आलेख*

निर्देशित कोरों के साथ आलेख के लिए कुछ उपयोगी शब्दावली भी हैं।

निर्देशित कोरों के आलेख

जब (u, v) निर्देशित कोरों के आलेख G में एक कोर होता है, तो u को v से आसन्न (Adjacent) कहा जाता है और v को u से आसन्न कहा जाता है। शीर्ष u को (u, v) का प्रारंभिक शीर्ष (Initial Vertex) कहा जाता है और शीर्ष v को (u, v) को टर्मिनल या अंतत (अंतिम) शीर्ष (Terminal or End Vertex) कहा जाता है।

चित्र 3.6 में विभिन्न प्रकार के आलेखों और निर्देशित कोरों को दर्शाया गया है–



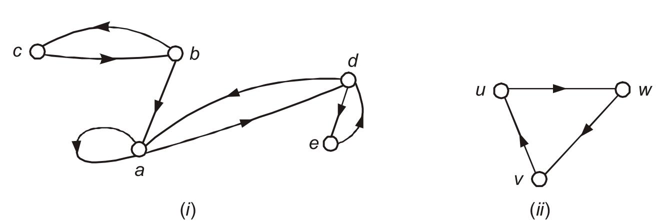
चित्र 3.6 *निर्देशित कोरों के आलेख*

आगमन–डिग्री और बाह्यगमन–डिग्री

निर्देशित कोरों के आलेखों में शीर्षों की आगमन–डिग्री v को $d^{-}(v)$ द्वारा निरूपित किया जाता है जो कि कोरों की संख्या होकर v टर्मिनल या अंतत (अंतिम) शीर्ष होता है। v की बाह्यगमन–डिग्री को $d^{+}(v)$ द्वारा निरूपित किया जाता है जो कि कोरों की संख्या होकर v प्रारंभिक शीर्ष होता है।

नोटः स्व–लूप के शीर्ष पर आगमन–डिग्री और बाह्यगमन–डिग्री, दोनों का 1 का योगदान रहता है।

उदाहरण 3.2 : निम्नलिखित आलेखों की आगमन–डिग्री और बाह्यगमन–डिग्री का ज्ञात करें।



टिप्पणी

हल :

(*i*) $d^-(a) = 3$; $d^-(b) = 1$; $d^-(c) = 1$; $d^-(d) = 2$; और $d^-(e) = 1$

$d^+(a) = 2$; $d^+(b) = 2$; $d^+(c) = 1$; $d^+(d) = 2$; और $d^+(e) = 1$

(*ii*) $d^-(u) = 1$; $d^-(v) = 1$; $d^-(w) = 1$ और

$d^+(u) = 1$; $d^+(v) = 1$; $d^+(w) = 1$

नोट्स

1. मान लीजिए कि $G = (V, E)$ निर्देशित कोरों का एक आलेख है। तब,

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = e.$$

2. निर्देशित कोरों के आलेख में कोरों की दिशाओं की अनदेखी करके, हम अनिर्दिष्ट आलेखों को प्राप्त करेंगे। ऐसे आलेखों को अंतर्निहित अनिनिर्दिष्ट आलेख कहते हैं।

अपनी प्रगति जांचिए

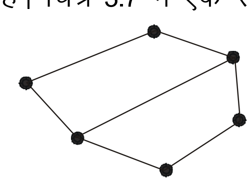
1. सरल आलेख क्या है?
2. छद्मलेख से आपका क्या अभिप्राय है?
3. एक शीर्ष की डिग्री क्या होती है?
4. वियुक्त शीर्ष और आलम्ब शीर्ष को परिभाषित करें।
5. निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ या अधिकतम डिग्री क्या हैं?
6. आलेख के पूरक से आपका क्या अभिप्राय है?
7. आलेख की आगमन–डिग्री और बाह्यगमन–डिग्री क्या होती है?

3.3 आलेखों के प्रकार

आलेख निम्न प्रकार के होते हैं।

सरल आलेख

एक आलेख जिसमें न तो स्व लूप हो और न ही समानांतर कोरें हो, उस आलेख को सरल आलेख के रूप में जाना जाता है। चित्र 3.7 में एक सरल आलेख को दर्शाया गया है।

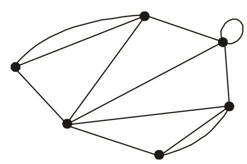


चित्र 3.7 *सरल आलेख*

टिप्पणी

बहु आलेख

एक आलेख जिसमें लूप और समानांतर कोरें होती हैं, उसे बहु आलेख कहा जाता है। चित्र 3.8 में एक बहु आलेख को दर्शाया गया है।



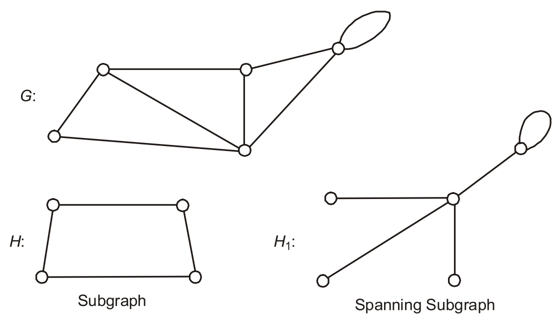
चित्र 3.8 बहु आलेख

उप–आलेख

(i) एक आलेख $H = (V(H), E(H))$ को आलेख G का उप–आलेख कहा जाता है, $G = (V(G), E(G))$ अगर (a) $V(H) \subseteq V(G)$ और (b) $E(H) \subseteq E(G)$ होता है।

(ii) आलेख H के एक उप–आलेख G को जनित उप–आलेख कहा जाता है अगर $V(H) = V(G)$ होता है।

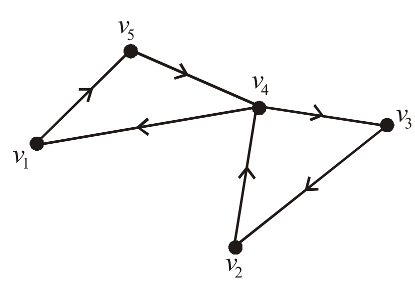
नीचे उप–आलेखों के उदाहरण दिए गए हैं–



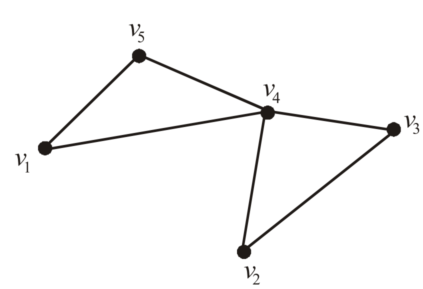
चित्र 3.9 उप–आलेख

निर्देशित और अनिर्दिष्ट आलेख

एक निर्देशित आलेख में प्रत्येक कोर की एक दिशा होती है (चित्र 3.10 देखें)। अगर एक शीर्ष से उसके आसन्न शीर्ष तक मूवमेंट (हलचल) होती है तो दिशा को अधिसूचित किया जाता है। अगर मूवमेंट शीर्ष v_1 से v_2 तक है तो, फिर v_1v_2 और v_2v_1 अलग–अलग होंगे। यहां, मूवमेंट (हलचल) केवल एक दिशा में है। लेकिन अनिर्दिष्ट आलेख में, अगर v_1 और v_2 के बीच में मूवमेंट (हलचल) है, तो फिर दोनों दिशा में मूवमेंट (हलचल) संभव है। इस तरह के आलेखों को अनिर्दिष्ट आलेखों के रूप में जाना जाता है (चित्र 3.11 देखें)।



चित्र 3.10 निर्देशित आलेख

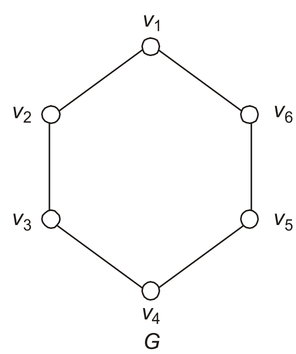


चित्र 3.11 अनिर्दिष्ट आलेख

टिप्पणी

द्विखण्डी आलेख

एक सरल आलेख G को द्विखण्डी कहा जाता है यदि इसके शीर्ष समुच्चय V को दो असंयुक्त अरिक्त समुच्चय (Disjoint Non-Empty Sets) V_1 और V_2 में विभाजित इस तरह किया जाता है कि आलेख के प्रत्येक कोर शीर्ष V_1 और शीर्ष V_2 से जुड़े हो। ध्यान दें कि G का कोई भी कोर V_1 के दो शीर्षों या V_2 के दो शीर्षों से जुड़ना नहीं चाहिए।



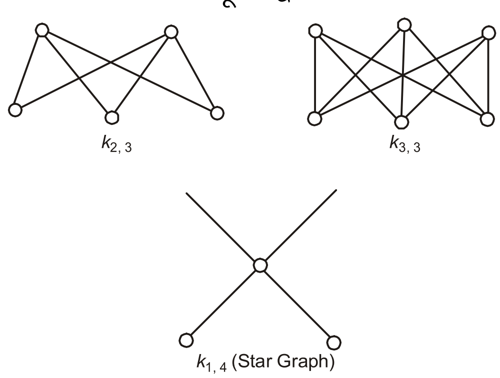
चित्र 3.12 *द्विखण्डी आलेख*

उदाहरण के लिए, G द्विखण्डी है, क्योंकि इसके शीर्ष समुच्चय $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ को दो अरिक्त समुच्चय $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ और $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ में विभाजित किया गया है (चित्र 3.12 देखें)। G के प्रत्येक कोर V_1 के शीर्ष और V_2 के शीर्ष से जुड़े हुए हैं।

पूर्ण द्विखण्डी आलेख

पूर्ण द्विखण्डी आलेख $k_{m,n}$ वह आलेख है जिसके शीर्ष समुच्चय को क्रमशः m और n शीर्ष के अरिक्त उप–समुच्चय में विभाजित किया जाता है। दो शीर्षों के बीच एक कोर होती है, यदि एक शीर्ष पहले उपसमुच्चय में है, तो दूसरा शीर्ष दूसरे उपसमुच्चय में होगा।

चित्र 3.13 में विभिन्न प्रकार के पूर्ण द्विखण्डी आलेखों को दर्शाया गया है–



चित्र 3.13 *पूर्ण द्विखण्डी आलेख*

तुल्याकारी या समरूपी आलेख

दो आलेखों G और H को तुल्याकारीया समरूपी कहा जाता है यदि उनके बीच एकैकी आच्छादन (Bijections) उपस्थित हो।

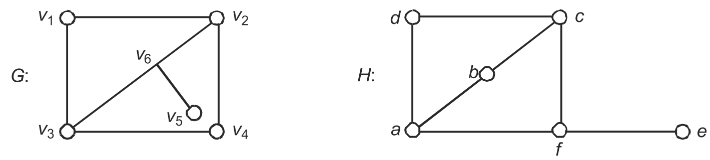
$\psi : V(G) \to V(H)$ और $\phi : E(G) \to E(H)$ इस तरह कि अगर $\theta_G(e) = uv$ और अगर $\theta_H(\phi(e)) = \psi(u)\,\psi(v)$ है।

ऐसी जोड़ी की मैपिंग या मानचित्रण को G और H के बीच (ψ, ϕ) को तुल्याकारी या समरूपता कहा जाता है और इसे $G \cong H$ के रूप में लिखा जाता है।

दूसरे शब्दों में, दो सरल आलेखों G और H तुल्याकारी या समरूपी होंगे यदि उनके बीच एकैकी संगतता (Bijection) उपस्थित हो।

$\psi : V(G) \to V(H)$ इस तरह है कि $uv \in E(G)$ अगर $\psi(u)\,\psi(v) \in E(H)$

चित्र 3.14 में विभिन्न प्रकार के समरूपी आलेखों को दर्शाया गया है :



चित्र 3.14 *समरूपी आलेखों*

यहाँ, G और H समरूपी आलेखों हैं।

G और H के बीच समरूपता प्रदान करने वाले तत्व निम्न हैः

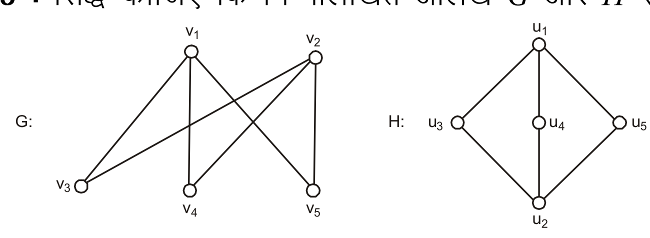
$$v_1 v_2 \in E(G) \Leftrightarrow dc = \psi(v_1)\,\psi(v_2) \in E(H)$$
$$v_1 v_3 \in E(G) \Leftrightarrow da = \psi(v_1)\,\psi(v_3) \in E(H)$$
$$v_3 v_6 \in E(G) \Leftrightarrow ab = \psi(v_3)\,\psi(v_6) \in E(H)$$
$$v_6 v_5 \in E(G) \Leftrightarrow be = \psi(v_6)\,\psi(v_5) \in E(H)$$
$$v_3 v_4 \in E(G) \Leftrightarrow af = \psi(v_3)\,\psi(v_4) \in E(H)$$
$$v_6 v_2 \in E(G) \Leftrightarrow bc = \psi(v_6)\,\psi(v_2) \in E(H)$$
$$v_4 v_2 \in E(G) \Leftrightarrow fc = \psi(v_4)\,\psi(v_2) \in E(H)$$

$\therefore$ $$G \cong H$$

नोट्स

1. दो आलेखों $G_1 = (V_1, E_1)$ और $G_2 = (V_2, E_2)$ को समरूपता कहा जाता है यदि V_1 से V_2 तक एकैकी संगतता इस तरह उपस्थित हो, यदि G_1 में u और v समीप या आसन्न हैं तो G_2 में $\phi(u)$ और $\phi(v)$ भी समीप होते है।
2. यदि $G \cong H$ है, तो संबंधित शीर्षों की डिग्री तुल्य (बराबर) होती है।

उदाहरण 3.3 : सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आलेख G और H समरूपी हैं।



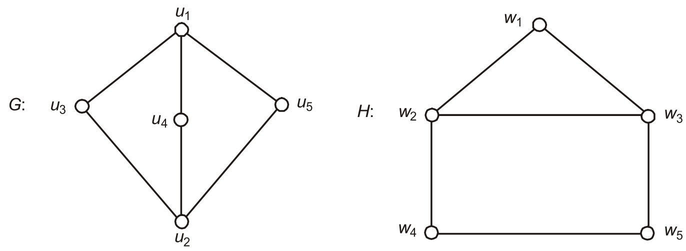
हल : स्पष्ट रूप से, G और H समरूपी हैं।

G में, V_1 (V_3, V_4, V_5) के आसन्न (समीप) है, V_2 (V_3, V_4, V_5) के आसन्न (समीप) है।

H में, u_1, (u_3, u_4, u_5) के आसन्न है और u_2, (u_3, u_4, u_5) के आसन्न या समीप है।

यहाँ, $\phi(v_i) = u_i$, $1 \leq i \leq$ द्वारा परिभाषित फलन समरूपता देता है।

उदाहरण 3.4 : सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आलेख G और H समरूपी नहीं हैं।



हल : स्पष्ट रूप से, G और H समरूपी आलेख नहीं हैं।

G में, ये दो शीर्षों (u_1 और u_2) तीन अन्य शीर्षों (u_3, u_4, u_5) से आसन्न हैं, जबकि H में, शीर्ष w_2 (w_1, w_3, w_4) से आसन्न हैं और शीर्ष w_3 (w_1, w_2, w_5) से आसन्न हैं। w_2 और w_3 एक दूसरे से आसन्न हैं।

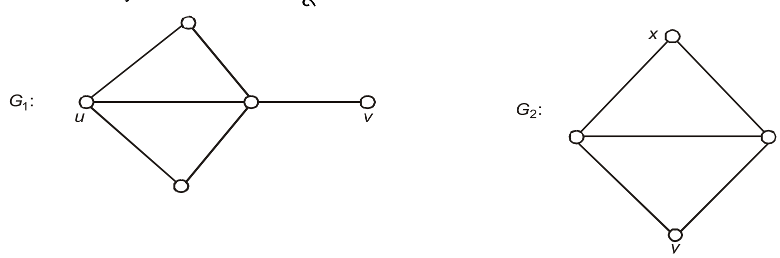
G में, u_1 और u_2 एक दूसरे से आसन्न नहीं हैं। इसलिए, G और H समरूपी आलेख नहीं हैं।

नोट : उपर्युक्त उदाहरण से, यह स्पष्ट है कि दो आलेख समरूपी होते हैं यदि उनमें समान संख्या में शीर्ष और समान संख्या में कोर होते है और संबंधित शीर्ष की डिग्री भी तुल्य (बराबर) होती है, लेकिन विलोमत (Converse) सच नहीं है।

आलेख में दूरी

एक गैर–तुच्छ आलेख (Non-Trivial Graph) G और G के शीर्षों की जोड़ी u, v के लिए, दूरी $d_G(u-v)$ को G में सबसे छोटा पथ $(u-v)$ की लंबाई के रूप में परिभाषित किया गया है (यदि ऐसा कोई पथ उपस्थित है)। यदि G में कोई $(u-v)$ पथ उपस्थित नहीं है, तो हम $d_G(u-v) = \infty$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

चित्र 3.15 एक आलेख में दूरी का वर्णन किया गया है :



(*i*) $d_{G_1}(u, v) = 2$ (*ii*) $d_{G_1}(x, y) = \infty$

***चित्र 3.15** आलेख में दूरी*

यदि G संबद्धता आलेख है और v, G का एक स्वेच्छ शीर्ष है।

(*i*) v की विलक्षणता (Eccentricity) को G में शीर्ष u से शुरू होने वाले सबसे लंबे पथ की लंबाई के रूप में परिभाषित किया गया है और इसे $e(v)$ द्वारा दर्शाया गया है। इसके अलावा, $e(v) = \max \{d(u, v): u \in v(G)\}$

टिप्पणी

(*ii*) G के व्यास को G के सभी शीर्षों के बीच अधिकतम विलक्षणता (Eccentricity) के रूप में परिभाषित किया गया है, अर्थात्, व्यास (Diam) $(G) = \max \{e(v): v \in V(G)\}$

(*iii*) G के त्रिज्या को G के सभी शीर्षों के बीच निमनिष्ठ विलक्षणता के रूप में परिभाषित किया गया है, अर्थात, त्रिज्या (Rad) (G) = निमनिष्ठ (Min) $\{e(v): v \in V(G)\}$

(*iv*) G के केंद्र को G के शीर्षों के समुच्चय में सभी शीर्षों के बीच निमनिष्ठ विलक्षणता के रूप में परिभाषित किया गया है। यानी, केंद्र $(G) = \{v \in V(G): e(v) =$ त्रिज्या (Rad) $(G)\}$

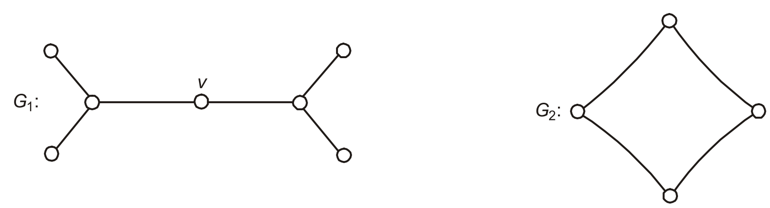
नोट्स

1. त्रिज्या (Rad) $(G) \leq$ व्यास (Diam) $(G) \leq 2$ त्रिज्या (Rad) (G), G एक आलेख है।
2. एक संबद्धता आलेख G के माध्यम (Median) को शीर्षों के समुच्चय के मध्य निमनिष्ठ दूरी के रूप में परिभाषित किया गया है।

कट–शीर्षों और कट–कोरें

कट–शीर्षों: आलेख G में एक शीर्ष v को कट–शीर्ष कहा जाता है यदि $\omega(G - v) > \omega(G)$, जहाँ $\omega(G)$, G का एक घटक होता है और घटक G का एक अधिकतम संबद्ध उप–आलेख होता है, अर्थात, एक संबद्ध आलेख का शीर्ष v एक कट–शीर्षों होता है, यदि $(G - v)$ असंबद्ध होता है।

उदाहरण के लिए, चित्र 3.16 में आलेख G के कट–शीर्षों और कट–कोरों को दिखाया गया है।



चित्र 3.16 *कट–शीर्षों और कट–कोरों*

G_1 में एक कट–शीर्षों v है और G_2 में कोई कट–शीर्षों नहीं है।

प्रमेय 3.3 : संबद्ध आलेख G में एक शीर्ष v एक कट–शीर्ष होता है यदि शीर्षों u और w इस तरह उपस्थित है (दोनों ही v से अलग अलग होते हैं) कि u और w को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ (Path) में v है।

प्रमाण : मान लीजिए कि G एक संबद्ध आलेख और v कट–शीर्ष है।

उपप्रमेय 1 : शीर्षों u और w इस तरह उपस्थित है कि u और v को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ में v होता है।

चूँकि v एक कट–शीर्ष है, $(G - v)$ असंबद्ध है और $(G - v)$ में दो घटक, G_1 और G_2 है। u और w क्रमशः G_1 और G_2 के शीर्षों है। स्पष्ट रूप से, $(G - v)$ में

कोई $(u-w)$ पथ नहीं होगा। इसलिए, u और w को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ में v होना चाहिए।

विलोमत, मान लीजिए कि शीर्षों u और w इस तरह उपस्थित है कि प्रत्येक $(u-w)$ पथ में v उपस्थित हैं।

टिप्पणी

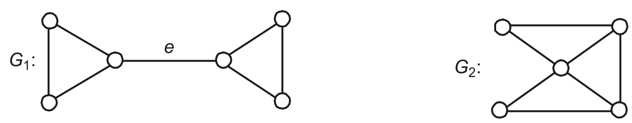
उपप्रमेय 2 : v कट–शीर्ष है।

मान लीजिए कि v कट–शीर्ष नहीं है। तब $(G-v)$ संबद्ध होगा। चूंकि (u और w) $(G-v)$ में शीर्षों हैं, इसलिए $(G-v)$ में u और w के बीच एक मार्ग या पथ है, जिसमें शीर्ष v नहीं है। यह एक विरोधाभास है। इसलिए, v कट–शीर्ष है।

कट–कोर

आलेख G में एक कोर e को कट–कोर कहा जाता है, अगर $(G-e)$ असंबद्ध होता है।

उदाहरण के लिए, चित्र 3.17 में आलेख G_1 में एक कट–कोर है और आलेख G_2 में कोई कट–कोर नहीं है।



चित्र 3.17 G_1 में एक कट–कोर है और G_2 में कोई कट–कोर नहीं है।

कट–शीर्ष की तरह समान परिणाम प्राप्त किए जा सकते हैं।

प्रमेय 3.4 : संबंध आलेख में कोर e एक कट–कोर होता है अगर u और w इस तरह उपस्थित हो कि u और w को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ में 'e' हो।

प्रमाण : मान लीजिए कि G एक संबद्ध आलेख है और एक कट–कोर e है।

उपप्रमेय 1 : शीर्षों u और w इस तरह उपस्थित है कि $(u-w)$ को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ में कोर e है।

चूँकि G में कोर e एक कट–कोर है, $(G-e)$ असंबद्ध होंगा और $(G-e)$ में कम से कम दो घटक, G_1 और G_2 होंगे।

मान लीजिए कि u और w क्रमशः G_1 और G_2 के शीर्षों है। स्पष्ट रूप से, $(G-e)$ में कोई पथ u और w के बीच नहीं होगा। इसलिए, u और w को जोड़ने वाले प्रत्येक पथ में कोर e होगा।

विलोमत , मान लीजिए कि शीर्षों u और w इस तरह उपस्थित है कि प्रत्येक u और w को जोड़ने वाले पथ में कोर e है।

उपप्रमेय 2 : e कट–कोर है।

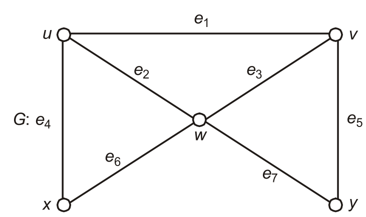
मान लीजिए कि e कट–कोर नहीं है। तब $(G-e)$ संबद्ध है। चूंकि u और w $(G-e)$ में शीर्षों हैं, इसलिए u और w के बीच एक मार्ग है, जिसमें कोर e नहीं है। यह एक विरोधाभास है। इसलिए, e कट–कोर है।

आलेख संबद्धता

इस खंड में, हम आलेख की संरचना का अध्ययन करते हैं। एक आलेख G में गमन या वॉक (Walk) एक वैकल्पिक अनुक्रम होता है।

$W: v_0, e_1, v_1, e_2,..., v_{n-1}, e_n, v_n\ (n \geq 0)$ के शीर्षों और कोरें है, शीर्षो के साथ शुरुआत और अंत इस तरह होगी कि $e_i = v_{i-1} v_i, i = 1, 2,..., n$। इसे $(v_0 - v_n)$ गमन (Walk) द्वारा दर्शाया जाता है। कोरों की संख्याओं (आवश्यक रूप से जरूरी नहीं अलग–अलग हो) को गमन की लंबाई कहा जाता है। आलेख G में, $u, e_1, v, e_2, w, e_6, x, e_4, u$ लंबाई 4 का गमन है (चित्र 3.18 देखें)।

निम्न चित्र में आलेख के पथ और गमन (Walk) का चित्रण किया गया है–



चित्र 3.18 *आलेख में पथ और गमन*

एक ट्रेल (Trail) एक गमन है जिसमें कोई कोर दोहराई नहीं जाती है और एक पथ एक ट्रेल (Trail) है जिसमें कोई शीर्ष दोहराया नहीं जाता है। इस प्रकार, एक पथ एक ट्रेल (Trail) है, लेकिन प्रत्येक ट्रेल (Trail) पथ नहीं होता है। उपरोक्त आलेख G में, $x, e_6, w, e_3, v, e_1, u, e_2, w, e_7, y$ एक ट्रेल (Trail) है जो एक पथ नहीं है, और $u, e_4, x, e_6, w, e_3, v$ एक पथ है।

प्रमेय 3.5 : एक आलेख में प्रत्येक $(u - v)$ गमन में $(u - v)$ पथ होते हैं।

प्रमाण : मान लीजिए कि W एक आलेख G में $(u - v)$ गमन है। यदि $u = v$, तो w ट्रेल (Trail) पथ होगा , अर्थात, गमन की लंबाई शून्य होगी।

मान लीजिए कि $u \neq v$ और $W: u = u_0, u_1, u_2,..., u_n = v$ है। यदि G का कोई भी शीर्ष W में एक से अधिक बार नहीं दिखता है, तो W स्वयं एक $(u - v)$ पथ होगा। अन्यथा, G के शीर्षो होंगे जो w में दो बार या उससे अधिक दिखेगे। माने कि i और j अलग–अलग घननात्मक पूर्णांक इस तरह हैं कि $i < j$ के साथ $u_i = u_j$ है। फिर, $u_i, u_{i+1},...,u_{j-2}, u_{j-1}$ को w से हटा दिया गया जाता है, और परिणामस्वरूप अनुक्रम गमन $(u - v)$ w_1 होगा जिसकी लंबाई w की तुलना में कम होती है। इंडक्शन परिकल्पना द्वारा, इस w_1 में $(u - v)$ पथ होते है और इसलिए, w में $(u - v)$ पथ होंगे। यदि G का कोई शीर्ष w_1 में एक से अधिक बार दिखाई नहीं देता है, तो w_1 एक $(u - v)$ पथ होंगे। अगर नहीं है, तो यह प्रक्रिया चालू रखें जब तक कि हमें एक $(u - v)$ पथ नहीं मिल जाता है।

चक्र

एक चक्र गमन है। $v_0, v_1,..., v_n$ एक गमन है जिसमें $n \geq 3, v_0 = v_n$ और $'n$ शीर्षों $v_1, v_2,..., v_n$ अलग–अलग हैं। हम कह सकते हैं कि $(u - v)$ गमन बंद होगा अगर $u = v$ होगा और खुला होगा अगर $u \neq v$ होगा।

टिप्पणी

संबद्धता

मान लीजिए कि एक आलेख G में u और v शीर्षों हैं। हम कह सकते हैं कि u और v संबद्ध है अगर G में $(u-v)$ पथ होंगे। आलेख G संबद्ध होता है, यदि G के शीर्षों में u, v की प्रत्येक जोड़ी के साथ u और v संबद्ध होते हैं।

असंबद्धता

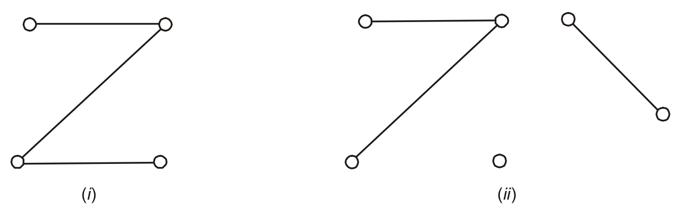
एक आलेख G को असंबद्ध माना जाता है, अगर वहाँ दो शीर्षों u और v उपस्थित हैं और उनके बीच कोई $(u-v)$ पथ नहीं है।

घटक

एक आलेख G का एक उप–आलेख H को G का घटक कहा जाता है यदि H, G का अधिकतम संबद्ध उप–आलेख होता है और घटक को $\omega(G)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

नोट : यदि $\omega(G) > 1$, तो G संबद्ध नहीं होता है।

उदाहरण के लिए,



चित्र 3.19 संबद्ध और असंबद्ध आलेख

आलेख (i) संबद्ध है और (ii) असंबद्ध है (चित्र 3.19 देखें)।

ध्यान दें कि आलेख (ii) के 3 घटक हैं।

निर्देशित आलेख में संबद्धता

दृढ़ संबद्धता

एक निर्देशित आलेख स्ट्रॉंगली से संबद्ध होता है अगर u से v और v से u के बीच एक पथ होता है, अर्थात जब भी u और v आलेख में शीर्षों हो।

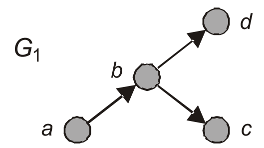
दुर्बल संबद्धता

एक निर्देशित आलेख दुर्बल रूप से संबद्ध होता है अगर किसी भी अनिर्दिष्ट आलेख के दो शीर्षों के बीच एक पथ होता है।

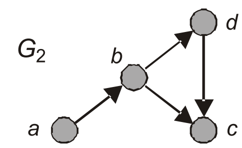
एक तरफा संबद्धता

एक निर्देशित आलेख को एक तरफा संबद्ध कहा जाता है यदि दो शीर्षों u और v के बीच, केवल u से v या v से u के बीच एक निर्देशित पथ उपस्थित होता है।

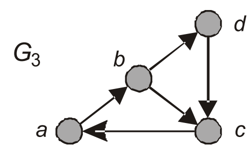
उदाहरण के लिए, चित्र 3.20 में विभिन्न प्रकार के संबद्ध आलेखों को दिखाया गया है।



(*i*) दुर्बल संबद्धता निर्देशित आलेख



(*ii*) एक तरफा संबद्धता निर्देशित आलेख



(*iii*) दृढ़ संबद्धता निर्देशित आलेख

चित्र 3.20 *संबद्धता आलेख*

G_1 दुर्बल रूप से संबद्ध है, G_2 एक तरफा संबद्ध है और G_3 स्ट्रॉंगली से संबद्ध है।

अपनी प्रगति जांचिए

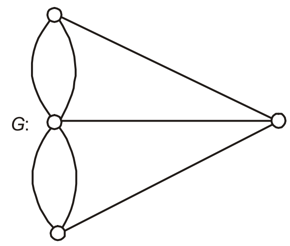
8. बहुआलेख आलेख क्या है?
9. एक उप–आलेख को परिभाषित करें।
10. द्विखण्डी आलेख क्या है?
11. दो आलेखों को कब तुल्याकारी या समरूपी कहा जाता है?
12. एक आलेख में दूरी को कैसे परिभाषित किया जाता है?
13. कट–शीर्ष क्या है?
14. आलेख के संदर्भ में चक्र, संबद्धता, असंबद्धता और घटक को परिभाषित करें।
15. एक निर्देशित आलेख में विभिन्न प्रकार की संबद्धता क्या हैं?

3.4 यूलर आलेख

इस खंड में, हम विशेष आलेख का अध्ययन करेंगे और आलेख सिद्धांत की उत्पत्ति के बारे में भी बात करेंगे।

रूसी गणराज्य में कोएन्सबर्ग शहर (Koingsberg Town) की भूमि को प्रीगेल नदी द्वारा चार भागों में विभाजित किया गया था। ये द्वीप सात पुलों से जुड़ा हुआ था। समस्या यह थी कि क्या लोग एक द्वीप से चलकर सभी सात पुलों पर यात्रा कर सकते हैं और एक से अधिक बार पुल का उपयोग किए बिना उस द्वीप पर वापस लौट सकते हैं जहाँ से उन्होंने यात्रा की शुरुआत की थी? लगभग दो शताब्दियों तक, कोई भी यह बताने की स्थिति में नहीं था कि ऐसी यात्रा (चलना) संभव है या नहीं।

सन् 1736 में, महान गणितज्ञ लियोनहार्ड यूलर ने निष्कर्ष निकाला कि ऐसा यात्रा (चलना) असंभव थी। उन्होंने इस समस्या का अध्ययन करने और हल करने के लिए बहु आलेख का उपयोग किया। यूलर को आज भी आलेख सिद्धांत के जनक के रूप में माना जाता है।



चित्र 3.21 यूलर पथ

G में क्रमशः चार भूमि और सात पुलों को शीर्षों और कोरों द्वारा दर्शाया गया है। इस सूत्र को कोएन्सबर्ग पुल सूत्र कहा जाता है।

यूलर परिपथ

एक ट्रेल (Trail) जिसमें G के प्रत्येक कोर को ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है, उसे G का यूलर ट्रेल (Euler Trail) कहा जाता है। G का एक परिपथ एक बंद गमन होता है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है। एक यूलर दौरा एक ऐसा दौरा है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है। एक आलेख यूलरियन होता है अगर इसमें एक यूलर दौरा होता है।

प्रमेय 3.7 : एक संबद्ध आलेख यूलरियन होता है यदि इसमें विषम डिग्री का कोई शीर्षों नहीं होता है।

प्रमाण : मान लीजिए कि G एक यूलरियन है और मान लीजिए कि C, G का एक यूलर टूर है, जो किसी शीर्ष u पर शुरू और समाप्त होता है।

उपप्रमेय 1 : G में कोई विषम डिग्री शीर्षों नहीं है, अर्थात, यह सिद्ध करना है कि G का प्रत्येक शीर्ष सम है। एक शीर्ष $w \neq u$ पर विचार करें। चूँकि w न तो C का पहला और न ही अंतिम शीर्ष है, प्रत्येक बार जब भी w का संयोग किया जाता है, यह किसी न किसी कोर पर पहुँचता है और दूसरे कोर से निकलता है। इसलिए, C में w का प्रत्येक संयोग (Occurrence) इसकी डिग्री में 2 का योगदान देती है। इस प्रकार, w सम डिग्री का है। यह C के सभी आंतरिक शीर्षों के लिए सच है। C में शीर्ष u का प्रारंभिक संयोग और अंतिम संयोग u की डिग्री में 1 का योगदान देती है। इसलिए, G का प्रत्येक शीर्ष सम डिग्री का होता है।

विलोमत, मान लीजिए कि संबद्ध आलेख G का प्रत्येक शीर्ष सम होता है।

उपप्रमेय 2: G यूलरियन है।

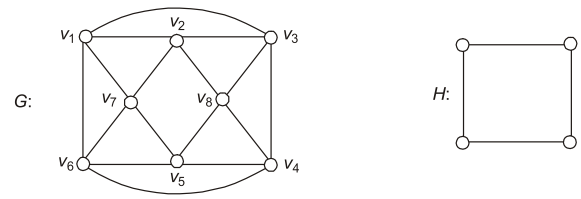
मान लीजिए कि G संबद्ध बिना किसी विषम डिग्री का गैर–युलरियन आलेख है। ऐसे आलेखों में से, किसी एक को चुनें, जिसमें G की कम से कम कोरें संख्या हो। चूंकि G के प्रत्येक शीर्ष में कम से कम दो कोरें होती है, इसलिए G में एक ट्रेल (Trail) होगा। मान लीजिए कि G में C की अधिकतम संभव लंबाई एक बंद ट्रेल (Trail) है। धारणा के अनुसार, C, G का यूलर परिपथ (Euler Circuits) है और इसलिए, $G - E(C)$ में कोरें होगी।

इसलिए, $G - E(C)$ में कोरें के साथ कुछ घटक G' भी होंगे। चूँकि C स्वयं यूलरियन (Eulerian) है, इसलिए C की प्रत्येक शीर्ष डिग्री सम होगी। इसलिए,

$G - E(C)$ के प्रत्येक शीर्ष की डिग्री भी सम होगी। इसलिए, G' में प्रत्येक शीर्ष की डिग्री सम है। चूंकि $E(G') < E(G)$, [(1) में G से], G' यूलरियन (Eulerian) है और इसलिए, G' के पास यूलर परिपथ (Euler Circuit) C' है।

टिप्पणी

चूँकि G संबद्ध है, इसलिए $V(C) \cap V(C')$ में एकशीर्ष v होगा और हम सामान्यता की हानि के बिना मान सकते हैं कि v परिपथ (सर्किट) C और C' दोनों में प्रारंभिक और अंतत (टर्मिनल) शीर्ष होगा। अब, $E(C \cup C') > E(C)$ के साथ $(C \cup C')$, G का एक बंद ट्रेल (Trail) है। यह C की पसंद का खंडन करता है। इसलिए, बिना विषम डिग्री के शीर्ष के साथ प्रत्येक अरिक्त संबंधित आलेख यूलरियन होता है। निम्नलिखित युलरियन (Eulerian) आलेखों के उदाहरण हैं–



चित्र 3.22 यूलरियन आलेखों

G और H यूलरियन आलेखों हैं।

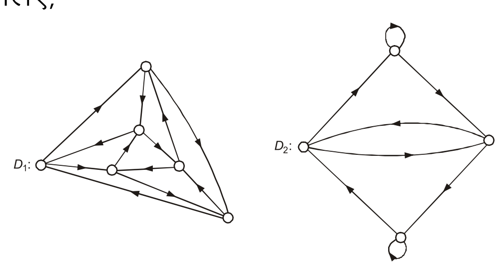
प्रमेय 3.8 : एक संबंधित आलेख में यूलरियन ट्रेल (Trail) होती है अगर G में एकदम दो विषम शीर्षों हो।

प्रमाण : मान लीजिए कि G एक संबंधित आलेख यूलरियन (Eulerian) $(u - v)$ ट्रेल (Trail) है। पिछले प्रमेय में इसी तरह के तर्क से, हमने यह निष्कर्ष निकाला था कि u और v को छोड़कर, ट्रेल (Trail) पर सभी शीर्षों सम होते हैं। विलोमत, G दो विषम शीर्षों u और v के साथ संबंधित आलेख है। G' एक आलेख को G से u और v के बीच एक नया कोर $e = uv$ जोड़कर प्राप्त किया है। पिछले प्रमेय को G' पर लागू करके, हम एक यूलरियन दौरे (टूर) को प्राप्त कर सकते हैं। जिसमें कोर e पहला कोर है। इस प्रकार, G के इस यूलरियन ट्रेल (Ulerian Trail) को प्राप्त किया जा सकता है जो v से शुरू होता है और u पर समाप्त होता है। इसलिए, G एक यूलरियन ट्रेल है।

युलरियन डाईग्राफ (Eulerian Diagraph)

एक संबंधित निर्देशित D यूलरियन ट्रेल (Trail) में एक ट्रेल (Trail) होती है जिसमें D की सभी कोरें उपस्थित होती हैं; जबकि D का एक यूलरियन परिपथ एक परिपथ होता है जिसमें D की सभी कोरें होती हैं। एक निर्देशित आलेख जिसमें एक यूलरियन परिपथ होता है उसे यूलरियन डाईग्राफ (Eulerian Digraph) कहते हैं।

उदाहरण के लिए,



चित्र 3.23 यूलरियन डाईग्राफ

प्रमेय 3.9 : मान लीजिए कि D एक संबद्ध निर्देशित आलेख है। D यूलरियन (Eulerian) होगा अगर $d^+(v) = d^-(v), \forall v \in G$, तो G को संतुलित डाईग्राफ कहा जाता है।

टिप्पणी

प्रमाण : मान लीजिए कि D एक यूलर निर्देशित आलेख है। तब D में सामान्य प्रारंभिक और अंतत (टर्मिनल) शीर्ष के साथ एक यूलर सर्किट C होगा। मान लीजिए कि C में b_u एक आंतरिक शीर्ष u को आपतित करने वाले कोरों की संख्या है।

जब भी C किसी भी कोर के माध्यम से u पर आपतित होगा, तो C एक और कोर के माध्यम से u से बाहर जाएगा। इस प्रकार, u की प्रत्येक घटना आगमन–डिग्री में 1 और बाह्यगमन –डिग्री एक (1) डिग्री में 1 का योगदान देती है। इसके अलावा, C में D की सभी कोरें होती हैं। इस प्रकार

$d^+(u) = d^-(u) = bu$

इसी प्रकार, $d^+(v) = d^-(v)$

इसलिए, $d^+(v) = d^-(v), \forall v \in V(D)$

विलोमत, मान लीजिए कि संबद्धता डाईग्राफ D संतुलित है। तब, प्रत्येक शीर्ष u के लिए, $d^+(u) = d^-(u) \neq 0$। एक स्वेच्छ शीर्ष u_1 से प्रारंभ करें, $d^+(u_1) \neq 0$। अगर u_1 उपस्थित है तो u_1 बाहर जाएगा। मान लीजिए कि u_2 इस कोर का टर्मिनल शीर्ष है, $d^+(u_2) \neq 0$। इसलिए, u_2 से बाहर एक कोर उपस्थित होगी। इस तरह से आगे बढ़ते हुए हम एक शीर्ष पर पहुँच जाएंगे जो सीधे (Traversed) ट्रेस होती है। इस प्रकार, हम D में एक निर्देशित परिपथ C_1 को प्राप्त करते हैं। यदि $E(C_1) = E(D)$ है, तो C_1 आवश्यक यूलर परिपथ होगा। यदि नहीं, यानी $E(C_1) \neq E(D)$ तो एक जनक उप–आलेख D_1 को प्राप्त करने के लिए D से C_1 के सभी कोरों को हटा दें। चूंकि D संतुलित है, D_1 भी संतुलित होगा। उपरोक्त प्रक्रिया को D_1 पर लागू करने पर, हम D_1 में एक परिपथ C_2 प्राप्त करेंगे। यदि $E(D) = E(C_1) \cup E(C_2)$, तो D_1 में C_1 और C_2 को जोड़कर एक यूलर परिपथ को प्राप्त किया जा सकता है। अन्यथा, हम D_1 से C_2 की कोरों को हटाकर जनक उप–आलेख D_2 प्राप्त करेगें। हम उपरोक्त प्रक्रिया को D_2 में दोहराते हैं और एक सीमित चरणों की संख्या के बाद, हम कोर वियुक्त परिपथ $C_1, C_2, ..., C_k$ को प्राप्त करते हैं। इस प्रकार कि $E(D) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup ... \cup E(C_k)$ हो। चूंकि D संबद्ध है, इनमें से किसी भी दो चक्रों में एक सामान्य शीर्ष होगा और D में एक यूलर परिपथ को प्राप्त करने के लिए परिपथ $C_1, C_2, ... ,C_k$ को जोड़ा जाता है। इसलिए D एक यूलर आलेख है।

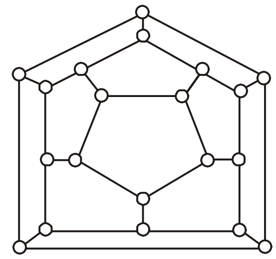
3.5 हैमिल्टोनियम पथ और परिपथ

सन् 1859 में सर विलियम रोवन हैमिल्टन ने 'अराउंड द वर्ल्ड (Around the World)' नामक एक खेल का आविष्कार किया। इस खेल में, एक ठोस नियमित डोडेकाहेड्रोन (Dodecahedron) (20 शीर्षों , 30 कोरें और 12 चेहरे) और स्ट्रिंग (String) की आपूर्ति दी जाती है। प्रत्येक शीर्ष को एक महत्वपूर्ण शहर का नाम दिया गया है। खेल का उद्देश्य डोडेकाहेड्रोन (Dodecahedron) के कोरों के माध्यम से एक मार्ग या पथ को

प्राप्त करना है जिसमें प्रत्येक शहर में केवल एक बार ही चक्कर लगाना है और वापिस वही आना जहां से शुरुआत की थी।

टिप्पणी

D.



चित्र 3.24 हैमिल्टनियन आलेख

आलेख D एक डोडेकाहेड्रोन (Dodecahedron) है।

एक अन्य प्रसिद्ध पहेली 'द नाइट पजल (The Knight's Puzzle)' है। क्या शतरंज के घोड़ों (Knight) के लिए शतरंज बोर्ड में आगे बढ़ना संभव है, यानी, प्रत्येक वर्ग पर एक बार जाना और फिर वापिस प्रारंभिक वर्ग में लौट आना?

इसे आलेख G द्वारा दर्शाया जा सकता है, जहां शीर्षों u_i शतरंज बोर्ड के वर्ग S_i से संबंधित है और u_j, u_i से सन्नता (निकट) में है अगर शतरंज के लिए एक कदम में S_i से S_j तक आगे बढ़ना संभव हो।

'अराउंड द वर्ल्ड (Around The World)' और 'नाइट पजल (Knight's Puzzle)' को हल करने के लिए, हमें यह निर्धारित करना होगा कि क्या दिया गया आलेख हैमिल्टोनियम है।

एक पथ जिसमें G के प्रत्येक शीर्ष होते है उसे G का हैमिल्टन पथ कहा जाता है। इसी प्रकार, G का एक हैमिल्टन चक्र वह चक्र है जिसमें G का प्रत्येक शीर्ष होता है दूसरे शब्दों में जनित चक्र एक आलेख हैमिल्टोनियम होता है यदि उसमें हेमिल्टन चक्र या जनित चक्र होता है।

उदाहरण 3.5 : सिद्ध करें कि k_n के पास हैमिल्टोनियम परिपथ होता है, $\forall n \geq 3$

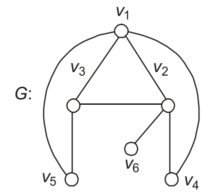
हल : हम $k_n (n \geq 3)$ में हैमिल्टोनियम परिपथ को निम्नानुसार बनाते हैं :

k_n में स्वेच्छ से शीर्ष को चुनें और इस शीर्ष से हैमिल्टोनियम परिपथ शुरू करें। इस तरह के परिपथ को किसी भी क्रम में शीर्ष के ट्रैवर्स (Traverses) द्वारा बनाया जा सकता है, जब तक कि पथ शुरू और समाप्त एक ही शीर्ष पर न हो और ठीक एक बार ही अन्य शीर्षों पर जाता हो। यह k_n में संभव है, क्योंकि प्रत्येक शीर्ष अन्य सभी शीर्षों के समीप हैं। k_1, k_2 परिपथ नहीं होकर, केवल हैमिल्टोनियम मार्ग है।

आलेखिकल

एक अनुक्रम $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ आलेखिकल होता है अगर n शीर्षों वाला क्रमशः $d_1, d_2, ..., d_n$ की डिग्री का सरल अनिर्दिष्ट आलेख उपस्थित हो।

उदाहरण के लिए, शीर्षों v_1 से v_6 के (4, 4, 3, 2, 2, 1) डिग्री अनुक्रम वाला आलेख को निम्नलिखित चित्र में दिखाया गया है।

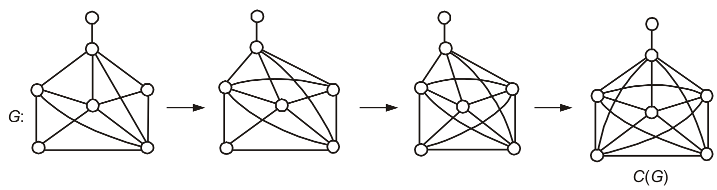


टिप्पणी

समापन

G का एक n शीर्षों वाला आलेख एक समापन आलेख $C(G)$ होता है जो गैर–आसन्न शीर्षों के जोड़े को अनावर्त (बार–बार) (Recursively) सम्मिलित करता है जिनकी डिग्री योग कम से कम n होती है जब तक कि ऐसी कोई जोड़ी (युग्म) लुप्त नहीं हो जाती है।

उदाहरण के लिए,



***चित्र 3.25** एक आलेख के समापन का निर्माण*

उपरोक्त आंकड़े एक आलेख के एक समापन निर्माण का एक तरफा तरीका बताता हैं।

महत्वपूर्ण प्रमेय

प्रमेय 3.10 : मान लीजिए कि G एक n शीर्षों वाला आलेख है। मान लीजिए कि G से प्राप्त G_1 और G_2 दो आलेखों हैं जो गैर–आसन्न शीर्षों के जोड़े को अनावर्त (Recursively) द्वारा जोड़कर प्राप्त किए गए हैं जिनकी डिग्री का योग कम से कम n है। तब, $G_1 = G_2$ होगा। दूसरे शब्दों में, $C(G)$, आलेख G का समापन अद्वितीय होता है।

प्रमाण : मान लीजिए कि $e_1, e_2, ..., e_k$ और $f_1, f_2, f_3, ..., f_e$ क्रमशः G_1 और G_2 प्राप्त करने के लिए G में जोड़े गए कोरें है। हमें यह सिद्ध करना है कि, प्रत्येक $e_i\ (1 \leq i \leq k)\ G_2$ की कोरें है और $f_j\ (1 \leq j \leq l)\ G_1$ की कोरें है। मान लीजिए कि अनुक्रम $e_1, e_2, ..., e_k$ की कुछ कोरें G_2 से संबंधित नहीं है। माने कि p सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक इस तरह है कि $e_{p+1}\ G_2$ का कोर नहीं है। माने कि $e_{p+1} = uv$ और $H = G + \{e_1, e_2, ..., e_p\}$। तब, H, (G_1 और G_2) का उप–आलेख होगा। G_1 के निर्माण से हम प्राप्त करते हैं,

$d_H(u) + d_H(v) \geq n$

इसलिए, $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq d_H(u) + d_H(v) \geq n$

यह एक विरोधाभास है क्योंकि u और v, G_2 में आसन्न नहीं हैं। इसलिए, प्रत्येक e_i, G_2 का एक कोर है।

इसी तरह, प्रत्येक f_j, G_1 से संबंधित है। इसलिए, $G_1 = G_2$ है।

प्रमेय 3.11 : यदि आलेख G हैमिल्टनियन है तो उसका समापन आलेख $C(G)$ भी हैमिल्टनियन होगा।

प्रमाण : मान लीजिए कि $e_1, e_2, ...e_n$ कोरें है जिन्हें G में जोड़कर उसका समापन आलेख $C(G)$ को प्राप्त किया जाता है। माने कि G_i एक आलेख है जिसे G में कोर e_i जोड़कर प्राप्त किया गया है।

टिप्पणी

उदाहरण (3.5) को दोहराने पर हम प्राप्त करेंगे।

G हैमिल्टनियन है $\Leftrightarrow C(G)$ भी हैमिल्टनियन है।

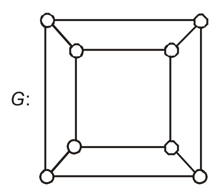
उपप्रमेय 1 : मान लीजिए कि G कम से कम 3 शीर्षों वाला एक आलेख है। यदि $C(G) \cong k_n, (n \geq 3)$ है, तो G हैमिल्टनियन होगा।

प्रमाण : उपप्रमेय–1 द्वारा, k_n हैमिल्टनियन हैं। चूंकि $C(G) \cong k_n, C(G)$ हैमिल्टनियन है और इसलिए, G भी हैमिल्टनियन होगा।

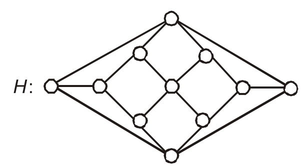
उपप्रमेय 2 : मान लीजिए कि G कम से कम 3 शीर्षों वाला एक आलेख है। यदि G के गैर–आसन्न शीर्षों के सभी जोड़े u और v के लिए, $d(u) + d(v) \geq n(n \geq 3)$ है, तब G हैमिलियन होगा।

प्रमाण : मान लीजिए कि G कम से कम 3 शीर्षों वाला एक आलेख है।। यह देखते हुए कि G के गैर–आसन्न शीर्षों के सभी जोड़े u और v के लिए, $d(u) + d(v) \geq n$ $(n \geq 3)$ है। इसलिए, हम $C(G)$ को प्राप्त करने के लिए शीर्षों के ऐसे जोड़े के बीच कोरें को जोड़ सकते हैं। चूंकि, $C(G)$ उप–प्रमेय द्वारा पूरा होता है, इसलिए G भी हैमिल्टनियन है।

उदाहरण के लिए,



(i) हैमिल्टनियन आलेख



(ii) गैर–हैमिल्टनियन आलेख

चित्र 3.26 हैमिल्टनियन और गैर–हैमिल्टनियन आलेख

G, हैमिल्टन आलेख और H, गैर–हैमिल्टन आलेख है।

प्रमेय 3.12 : यदि G हैमिल्टनियन है, तो V के सभी अरिक्त उचित उप–समुच्चय S के लिए, $w(G - S) \leq |S|$ होगा।

प्रमाण : मान लीजिए कि G एक हैमिल्टनियन आलेख है और S, V का एक उचित उप समुच्चय है। चूंकि G हैमिल्टनियन है, तो G में हैमिल्टनियन चक्र C होगा। मान लीजिए कि $w(G - S) = n$ है। जहाँ $(G_1, G_2, ... G_n)$, $(G - S)$ के घटक हैं। मान लीजिए कि $u_i (1 \leq i \leq v)$, C का अंतिम शीर्ष है जो G_i से संबंधित है और v_i एक शीर्ष है जो C में u_i का तुरंत अनुसरण करता है। स्पष्ट रूप से, प्रत्येक i के लिए, $v_i \in S$ और $j \neq k$ के लिए $v_j \neq v_k$ है। इसलिए, $(G - S)$ में घटकों के जितने S में कम से कम शीर्ष होंगे।

यानी, $w(G - S) \leq |S|$

वैट आलेख

एक आलेख G को एक वैट आलेख कहा जाता है यदि G के प्रत्येक कोर को एक वास्तविक संख्या से निरूपित किया जाता है।

टिप्पणी

चल विक्रेता समस्या

मान लीजिए कि एक चल विक्रेता को चुने हुए n शहरों ($n \geq 3$) में से कुछ में यात्रा करने की उम्मीद है। कुल दूरी को कम करने के लिए उसे क्या पथ अपनाना चाहिए? इसे वैट आलेख के रूप में दर्शाया जा सकता है। मान लीजिए कि G एक संबद्ध वैट आलेख है, जिसके शीर्षों दौरा किए जाने वाले शहरों को दर्शाते हैं और कोरें का वैट $v_i v_j$ शहरों $v_i v_j$ के बीच की दूरी है। अब, चल विक्रेता समस्या एक वैट आलेख में निमनिष्ठ हैमिल्टनियन चक्र को खोजने के बराबर है।

3.6 वैट आलेखों में लघुत्तम दूरी

यह समस्या निमनिष्ठ दूरी का पता लगाने के तरीकों से संबंधित है, जो एक चयनित नोड बनाता है, जिसमें एक नियत या गंतव्य नोड d का स्रोत s होता है। इस तरह की समस्याएं हमारे वास्तविक जीवन में और कंप्यूटर विज्ञान के क्षेत्र में भी उत्पन्न होती हैं। उदाहरण के लिए, वैट आलेख के शीर्ष शहरों को दर्शा सकते हैं और कोरों के भार एक सीधी सड़क या रेल लिंक द्वारा एक शहर से दूसरे शहर तक पहुचने के लिए दोनों के बीच की दूरी की लागत या कॉस्ट्स को दर्शा सकते हैं।

एक डच कंप्यूटर वैज्ञानिक, एडसगेर डाइजक्स्त्रा ने इस समस्या को हल करने के लिए एक एल्गोरिथम तैयार किया और उनके नाम पर, इसे दिक्जस्ट्रा एल्गोरिथम के रूप में जाना जाता है। यह आलेखिकल खोज के लिए एक एल्गोरिथम है जो एक वैट आलेख में एकल–स्रोत लघुत्तम पथ समस्या को हल करती है, जिसमें गैर–नकारात्मक कोर पथ की लागत, एक ट्री का निर्माण करती है जो सबसे लघुत्तम दूरी देती है। यह एल्गोरिथम रूटिंग में बहुत काम आता है। 'पहली लघुत्तम दूरी' की अवधारणा का IS-IS और OSPF (ओपन शॉर्टेस्ट पाथ फर्स्ट) जैसे नेटवर्क रूटिंग प्रोटोकॉल में व्यापक उपयोग होता है।

एल्गोरिथम

हम एक नोड को प्रारंभिक नोड या शुरुआती नोड के रूप में लेते हैं। हम एक गंतव्य X का चयन करते हैं और इसकी प्रारंभिक नोड से दूरी पता करते है। यह एल्गोरिथम कुछ प्रारंभिक दूरी मान निर्दिष्ट करेगा और फिर चरण–दर–चरण जाएगा। ये नीचे दिए गए हैं–

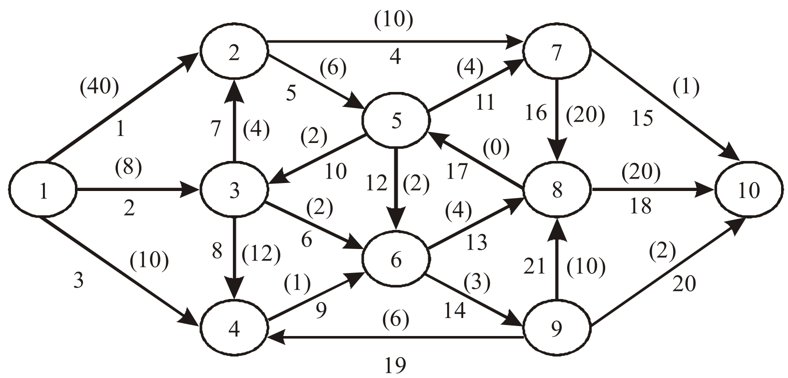
1. प्रत्येक नोड को एक दूरी मान से निर्दिष्ट करें। प्रारंभिक नोड के लिए, यह शून्य होगा और अन्य सभी नोड्स के लिए, यह अनंत है।
2. प्रारंभ में सभी अनवीकृत (न घूमे हुए) नोड्स को चिह्नित करें।प्रारंभिक नोड को शुरुआती नोड के रूप में रखें।
3. शुरुआती नोड के लिए, प्रारंभिक नोड से प्रत्येक अनवीकृत (न घूमे हुए) समीपवर्ती की दूरी की गणना करें। उदाहरण के लिए, यदि शुरुआती नोड (A) की दूरी 7 है, और इसे दूसरे नोड (B) के साथ जोड़ने वाली कोर 3 है, तो A

के माध्यम से B तक की दूरी 7 + 3 = 10 होगी। यदि यह पहले से दर्ज दूरी से कम है जो शुरुआत में अनंत है जैसा कि चरण 1 में है, तब इस दूरी को फिर से अधिलेखित किया जाएगा।

टिप्पणी

4. जब वर्तमान नोड के सभी समीपवर्तियों के निरीक्षण हो जाए, तो इसे निरीक्षण के रूप में चिह्नित किया जाता है ताकि इन नोडों पर फिर से निरीक्षण न लगे और दर्ज की गई दूरी अंतिम और निमनिष्ठ हो।

नीचे दिए गए चित्र में सबसे लघुत्तम दूरी की समस्या को प्रस्तुत किया गया है। 10 नोड हैं और प्रारंभिक नोड 1 है।



इसके लिए उन पथों के समुच्चय को खोजा जाना चाहिए, जो नेटवर्क में स्रोत नोड से दूसरे नोड तक निमनिष्ठ हो। इस सबसे छोटे पथ की समस्या एक ट्री है जिसे नीचे हल किया जा सकता है।

इसमें m संख्याओं के नोड्स हैं, जो केवल स्रोत नोड के साथ शुरू होते हैं, यह प्रक्रिया शीर्षों की संख्या में से एक कम पुनरावृत्तियों का चुनाव करती है, अर्थात्, $m-1$ सबसे कम पथ खोजने के लिए और सबसे छोटे पथ ट्री (Tree) का निर्माण करती है। उपरोक्त उदाहरण में, 10 संख्याओं का नोड्स हैं, इसलिए 9 पुनरावृत्तियों की आवश्यकता होगी।

मान लीजिए कि S पहले से निरीक्षण नोड्स का समुच्चय है। जो नोड हल नहीं होते हैं, वे S में नहीं होते हैं। प्रत्येक पुनरावृत्ति में, प्रत्येक नोड को एक संख्या दी जाती है। नोड d_i स्रोत नोड से $i_{वी}$ नोड तक निमनिष्ठ दूरी या सबसे लघुत्तम दूरी के पथ की लंबाई को दर्शाती है। समापन करने के बाद ट्रैवर्सल d_i उस नोड का सबसे लघुत्तम दूरी का पथ दिखाता है। एल्गोरिथम नेटवर्क में प्रत्येक नोड को एक संख्या (नंबर) नियुक्त करता है, जहां d_i स्रोत नोड से नोड i के बीच सबसे लघुत्तम दूरी के पथ की लंबाई को होती है। एल्गोरिथम के अंत में πi नोड i तक सबसे लघुत्तम दूरी के पथ की लंबाई होती है। मान लीजिए कि $\boldsymbol{M}$ सभी कोरों का समुच्चय है जिसे आर्क्स (Arcs) भी कहा जाता है।

शुरुआत में, स्रोत नोड $S = \{s\}$ और $d_s = 0$ होता है।

यह प्रक्रिया दोहराएं जब तक कि सभी नोड समुच्चय S में न हों।

कोरों $p(i, j)$ को ज्ञात करें, जहां i हल किए गए नोड है और j अनसाल्वड नोड है और आर्क्स (Arcs) पहले से हल किए गए नोड से अनसाल्वड नोड की तरफ चलता है।

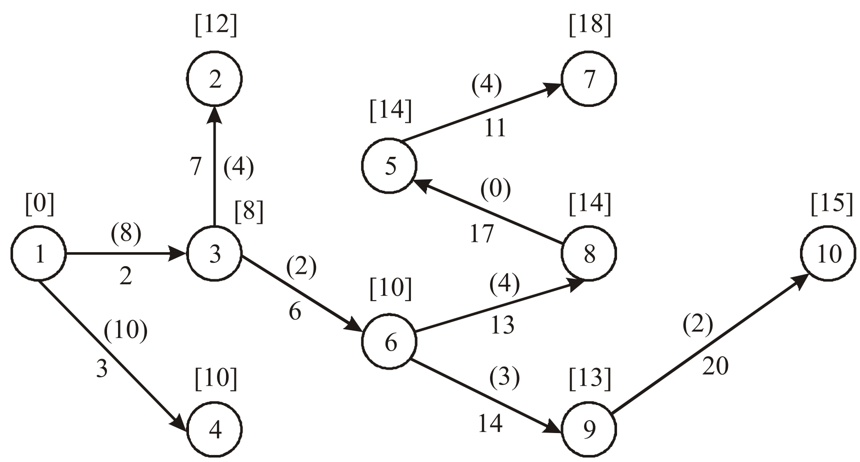
$p(i, j)$ = आर्कमिन $\{di' + cp' : p'(i', j') \in \boldsymbol{M}, i' \in \boldsymbol{S}, j' \in \boldsymbol{S}^c\}$

ट्री (Tree) में नोड j और आर्क्स p को जोड़ें। हल किए गए के समुच्चय $\boldsymbol{S}$ में नोड j को जोड़ें।

मान लीजिए कि $dj = di + cp$

प्रत्येक पुनरावृत्ति में यह एल्गोरिथम हल किए गए नोड से अनसाल्वड नोड्स के लिए पथ की लंबाई, (जो पथ की लंबाई है) की गणना करता है। सबसे कम लंबाई वाले नोड को हल किए गए नोड्स के समुच्चय में शामिल किया जाता है।जैसे ही जनित ट्री उत्पन्न होती है, उसी समय प्रक्रिया समाप्त हो जाती है।

जनित ट्री नीचे दिखाया गया हैः



ब्रैकेट (Brackets) में रखी गई बोल्ड (Bold) लंबाई का मान दर्शाती है जोकि नोड्स के साथ जुड़ी हुई होती है। उदाहरण के लिए नोड 6 का सबसे छोटा पथ 10 है। S_c में नोड्स के लिए ब्रैकेट में संख्या समुच्चय S में हल नोड्स से गुजरने वाले अनसाल्वड नोड्स के लिए सबसे छोटे पथ की लंबाई को इंगित करता है। इसके बाद $\iota \in \boldsymbol{S}^c$ के लिए, आर्क्स को सबसे छोटे कर मान के साथ चुना जाता है। इसलिए, 18, 22, 14, 13 में से निमनिष्ठ का चुनाव किया जाता है और इसे निमनिष्ठ {18, 22, 14, 13} के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस तरह, नोड 9 और आर्क 14 को जनित ट्री में शामिल किया जाता है।

इस एल्गोरिथम की सारणीबद्ध प्रस्तुति

एल्गोरिथम सात स्तंभों की एक तालिका बनाता है जैसा कि यहां दिखाया गया है। कॉलम 1, h का मान दर्शाता है जो समुच्चय में नोड्स की संख्या होती है। दूसरा कॉलम में समुच्चय $\boldsymbol{S}$ के अवयवों को सूचीबद्ध किया गया है, जिसमें हल किए के गए नोड में निमनिष्ठ एक चाप होना चाहिए, जो एक नोड से जुड़ा होता है जो अभी तक ट्रैवर्स नहीं किया गया है और जिसे अनसाल्वड नोड कहा जाता है। तीसरा कॉलम कॉलम 2 में सूचीबद्ध प्रत्येक नोड का निकटतम अनसाल्वड नोड दिखाता है। कॉलम 4 में प्रत्येक i होती है, जो दूसरे कॉलम में सूचीबद्ध नोड्स का सूचकांक है। तीसरा कॉलम j को सूचकांक के रूप में सूचीबद्ध करता है जो तीसरे कॉलम में सूचीबद्ध होता

है। हम d को मार्ग का सूचकांक या चाप के नोड्स i और j और प्रत्येक केस के लिए संगणना करते हैं $dj' = di + pk$।

टिप्पणी

पांचवें कॉलम चौथे कॉलम से सबसे छोटी संख्या का चयन करता है। दूसरे कॉलम में i और j द्वारा निरूपित नोड्स होते हैं जो कि तीसरे कॉलम के नोड होते हैं, जहां से इन संख्याओं की गणना की जाती है। पांचवें कॉलम में नोड j होती है और छठा कॉलम नोड से सबसे छोटे पथ की लंबाई को सूचीबद्ध करता है जिसे जोड़ा जाता है। यह निमनिष्ठ होता है और चौथे कॉलम से प्राप्त किया जाता है। सातवें कॉलम 7 में आर्क $p(i, j)$ होती है। सबसे छोटा पथ ट्री नोड j और चाप p को जोड़कर बनाया जाता है और j को समुच्चय S में जोड़ा जाता है।

h	*Solved Nodes*	*Unsolved Node, Closest to Solved Node*	*Path Length to Unsolved Node*	*Node Added to the Set of Solved Node*	*Shortest Path*	*Arc Added to Tree*
1	1	3	8	3	8	2
2	1	4	10			
	3	6	10	4	10	3
3	1	2	40			
	3	6	10			
	4	6	11	6	10	6
4	1	2	40			
	3	2	12			
	6	9	13	2	12	7
5	2	5	18			
	6	9	13	9	13	14
6	2	5	18			
	6	8	14			
	9	10	15	8	14	13
7	2	5	18			
	8	5	14			
	9	10	15	5	14	17
8	2	7	22			
	5	7	18			
	8	10	34			
	9	10	15	10	15	20
9	2	7	22			
	5	7	18	7	18	11

अपनी प्रगति जांचिए

16. यूलर परिपथ क्या हैं?
17. युलरियन डाईग्राफ क्या है?
18. हैमिल्टनियन पथ और परिपथ को परिभाषित करें।
19. हैमिल्टन आलेख में समापन क्या है?
20. वैट आलेख क्या है?

3.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

टिप्पणी

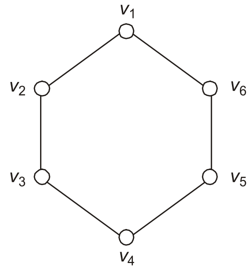
1. एक आलेख जिसमें न तो स्व–लूप हो और न ही समानांतर कोरें हो, उसे सरल आलेख कहा जाता है।
2. एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें हो, उसे छद्मलेख कहा जाता है।
3. एक शीर्ष v की डिग्री उस शीर्ष पर आपतित कोरों की संख्या होती है। दूसरे शब्दों में, एक शीर्ष की डिग्री एक अंतिम बिंदु के रूप में उस शीर्ष पर कोरें की संख्या होती है और इसे $d(v)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
4. डिग्री शून्य वाले शीर्ष को एकवियुक्त शीर्ष कहा जाता है। डिग्री एक के शीर्ष को आलम्ब शीर्ष कहा जाता है।
5. मान लीजिए कि G एक आलेख है। अगर G की निमनिष्ठ और अधिकतम डिग्री क्रमशः $\delta(G)$ और $\Delta(G)$ हैं तो इसे निम्नानुसार लिखा जाता है–

$$\delta(G) = \min \{d(v); v \in V(G)\}$$

और, $$\Delta(G) = \max \{d(v); v \in V(G)\}$$

6. आलेख G का पूरक $\bar{G}$ वह आलेख होता है जिसमें $V(G) = V(\bar{G})$ हो, इस प्रकार कि uv, $\bar{G}$ की एक कोर होती है, यदि और केवल यदि uv, $\bar{G}$ की कोर नहीं हो।
7. निर्देशित कोरों के आलेख में शीर्षों की आगमन–डिग्री v को $d^-(v)$ द्वारा निरूपित किया जाता है जो कि कोरों की संख्या होकर v टर्मिनल या अंतत (अंतिम) शीर्ष होता है। v की बाह्यगमन–डिग्री को $d^+(v)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
8. एक आलेख जिसमें लूप और समानांतर कोरें होती हैं, वह बहु आलेख होता है।
9. (i) एक आलेख $H = (V(H), E(H))$ को आलेख G का उप–आलेख कहा जाता है, $H = (V(G), E(G))$ अगर (a) $V(H) \subseteq V(G)$ और (b) $E(H) \subseteq E(G)$ होता है।

   (ii) आलेख G के एक उप–आलेख H को जनित उप–आलेख भी कहा जाता है अगर $V(H) = V(G)$ होता है।
10. एक सरल आलेख G को द्विखण्डी कहा जाता है यदि इसके शीर्ष समुच्चय V को दो असंयुक्त गैर–अरिक्त समुच्चय (Disjoint Non-Empty Sets) V_1 और V_2 में विभाजित इस तरह किया जाता है कि आलेख के प्रत्येक कोर शीर्ष V_1 और शीर्ष V_2 से जुड़ते हो। ध्यान दें कि G का कोई भी कोर V_1 के दो शीर्षों या V_2 के दो शीर्षों से जुड़ना नहीं चाहिए।



G

टिप्पणी

11. दो आलेखों G और H को तुल्याकारी समरूपी कहा जाता है यदि उनके बीच एकैकी संगतता (Bijections) उपस्थित हो।

$\psi : V(G) \to V(H)$ और $\phi : E(G) \to E(H)$ इस तरह कि अगर $\theta_G(e) = uv$ और अगर $\theta_H(\phi(e)) = \psi(u)\,\psi(v)$।

ऐसी जोड़ी या युग्म (ψ, ϕ) की मैपिंग को G और H के बीच तुल्याकारी या समरूपता कहा जाता है और इसे $G \cong H$ के रूप में लिखा जाता है।

12. एक गैर–तुच्छ आलेख (Non-Trivial Graph) G और G के शीर्षों की जोड़ी u, v के लिए, दूरी $d_G(u-v)$ को G में सबसे छोटा पथ $(u-v)$ की लंबाई के रूप में परिभाषित किया जाता है (यदि ऐसा पथ उपस्थित हो)। यदि G में कोई $(u-v)$ पथ उपस्थित नहीं है, तो हम $d_G(u-v) = \infty$ के रूप में परिभाषित करते हैं।

13. आलेख G में एक शीर्ष v को कट–शीर्ष कहा जाता है यदि $\omega(G-v) > \omega(G)$, जहाँ $\omega(G)$, G का एक घटक होता है और घटक G का एक अधिकतम संबद्ध उप–आलेख होता है, अर्थात, एक संबद्ध आलेख का शीर्ष v एक कट–शीर्षों होता है, यदि $(G-v)$ असंबद्ध होता है।

14. चक्रः एक चक्र गमन है। $v_0, v_1, ..., v_n$ एक गमन है जिसमें $n \geq 3, v_0 = v_n$ और $'n$ शीर्षों $v_1, v_2, ..., v_n$ अलग–अलग हैं। हम कह सकते हैं कि $(u-v)$ गमन बंद होगा अगर $u = v$ होगा और खुला होगा अगर $u \neq v$ होगा।

संबद्धता : मान लीजिए कि एक आलेख G में u और v शीर्षों हैं। हम कह सकते हैं कि u और v संबद्ध है अगर G में $(u-v)$ पथ होंगे। आलेख G संबद्ध होता है, यदि G के शीर्षों के u, v की प्रत्येक जोड़ी के साथ u और v संबद्ध होते हैं।

असंबद्धता : एक आलेख G को असंबद्ध माना जाता है, अगर वहाँ दो शीर्षों u और v उपस्थित हैं और उनके बीच कोई $(u-v)$ पथ नहीं है।

घटक : एक आलेख G का एक उप–आलेख H को G का घटक कहा जाता है यदि H, G का अधिकतम संबद्ध उप–आलेख होता है और घटक को $\omega(G)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

15. दृढ़संबद्धता : एक निर्देशित आलेख स्ट्रॉगली से संबद्ध होता है अगर u से v और v से u के बीच एक पथ होता है, अर्थात जब भी u और v आलेख में शीर्षों हो।

दुर्बल संबद्धता : एक निर्देशित आलेख दुर्बल रूप से संबद्ध होता है अगर किसी भी अनिर्दिष्ट आलेख के दो शीर्षों के बीच एक पथ होता है।

एक तरफा संबद्धताः एक निर्देशित आलेख को एक तरफा संबद्ध कहा जाता है यदि दो शीर्षों u और v के बीच, केवल u से v या v से u के बीच एक निर्देशित पथ उपस्थित होता है।

16. एक ट्रेल (Trail) जिसमें G के प्रत्येक कोर को ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है, उसे G का यूलर ट्रेल कहा जाता है। G का एक परिपथ एक बंद गमन होता है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है। एक यूलर दौरा एक ऐसा दौरा है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक

बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है। एक आलेख यूलरियन होता है अगर इसमें एक यूलर दौरा होता है।

टिप्पणी

17. एक संबंधित निर्देशित D यूलरियन ट्रेल (Trail) में एक ट्रेल (Trail) होती है जिसमें D की सभी कोरें शामिल होती हैं; जबकि D का एक यूलरियन परिपथ एक परिपथ होता है जिसमें D की सभी कोरें होती हैं। एक निर्देशित आलेख जिसमें एक यूलरियन परिपथ होता है उसे यूलरियन डाईग्राफ (Eulerian Digraph) कहते हैं।
18. एक पथ जिसमें G के प्रत्येक शीर्ष होते है उसे G का हैमिल्टन पथ कहा जाता है। इसी प्रकार, G का एक हैमिल्टन चक्र वह चक्र है जिसमें G का प्रत्येक शीर्ष होता है दूसरे शब्दों में जनित चक्र एक आलेख हैमिल्टोनियम होता है यदि उसमें हेमिल्टन चक्र या जनित चक्र होता है।
19. G में एक n शीर्षों वाले आलेख G का एक समापन आलेख $C(G)$ होता है जो गैर–आसन्न शीर्षों के जोड़े को अनावर्त (बार–बार) (Recursively) सम्मिलित करता है जिनकी डिग्री योग कम से कम n होती है जब तक कि ऐसी कोई जोड़ी बननी बंद न हो जाए।
20. एक आलेख G को एक वैट आलेख कहा जाता है यदि G के प्रत्येक कोर को एक वास्तविक संख्या के साथ नियतन (Assigned) किया गया हो।

3.8 सारांश

- यदि किसी आलेख में शीर्षों की जोड़ी के बीच एक से अधिक कोरें हैं, तो इन कोरों को समानांतर कोरें कहा जाता है।
- एक आलेख जिसमें समानांतर कोरें होती है उन्हें बहु–ग्राफ कहा जाता है।
- एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें नहीं होती है, उन्हें सरल आलेख कहा जाता है।
- एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें होती है, उन्हें छद्मलेख कहा जाता है।
- अगर एक शीर्ष की डिग्री शून्य है तो उसे वियुक्त शीर्ष कहा जाता है।
- अगर एक शीर्ष की डिग्री 'एक" है तो उसे आलम्बशीर्ष कहा जाता है।
- शीर्षों की जोड़ी जो कोर को निर्धारित करती हैं, उन्हें आसन्नता शीर्षों कहा जाता है।
- शीर्ष के सम या विषम का निर्धारण उसकी डिग्री के सम या विषम होने पर निर्भर करता है।
- पूर्ण द्विखण्डी आलेख $k_{m,n}$ वह आलेख है जिसके शीर्ष समुच्चय को क्रमशः m और n शीर्ष के अरिक्त उप–समुच्चय में विभाजित किया जाता है। दो शीर्षों के बीच एक कोर होती है, यदि एक शीर्ष पहले उपसमुच्चय में है, तो दूसरा शीर्ष दूसरे उपसमुच्चय में होगा।

टिप्पणी

- दो आलेखों $G_1 = (V_1, E_1)$ और $G_2 = (V_2, E_2)$ को समरूपती कहा जाता है यदि V_1 से V_2 तक एकैकी संगतता इस तरह उपस्थित हो, यदि G_1 में u और v समीप या आसन्न हैं तो G_2 में $\phi(u)$ और $\phi(v)$ भी समीप होते है।
- आलेख G में एक शीर्ष v को कट–शीर्ष कहा जाता है यदि $\omega(G-v) > \omega(G)$, जहाँ $\omega(G)$, G का एक घटक होता है और घटक G का एक अधिकतम संबद्ध उप–आलेख होता है, अर्थात, एक संबद्ध आलेख का शीर्ष v एक कट–शीर्षों होता है, यदि $(G-v)$ असंबद्ध होता है।
- आलेख G में एक कोर e को कट– कोर कहा जाता है, अगर $(G-e)$ असंबद्ध होता है।
- एक आलेख G को असंबद्ध माना जाता है, अगर वहाँ दो शीर्षों u और v उपस्थित हैं और उनके बीच कोई $(u-v)$ पथ नहीं है।
- एक निर्देशित आलेख दुर्बल रूप से संबद्ध होता है अगर किसी भी अनिर्दिष्ट आलेख के दो शीर्षों के बीच एक पथ होता है।
- एक निर्देशित आलेख को एक तरफा संबद्ध कहा जाता है यदि दो शीर्षों u और v के बीच, केवल u से v या v से u के बीच एक निर्देशित पथ उपस्थित होता है।
- एक ट्रेल (Trail) जिसमें G के प्रत्येक कोर को ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है, उसे G का (Euler Trail) यूलर ट्रेल कहा जाता है। G का एक परिपथ एक बंद गमन होता है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है। एक यूलर दौरा एक ऐसा दौरा है जिसमें G के प्रत्येक कोर को ठीक एक बार ट्रैवर्स (Traverses) किया जाता है।
- G का एक n शीर्षों वाला आलेख एक समापन आलेख $C(G)$ होता है जो गैर–आसन्न शीर्षों के जोड़े को अनावर्त (बार–बार) (Recursively) सम्मिलित करता है जिनकी डिग्री योग कम से कम n होती है जब तक कि ऐसी कोई जोड़ी (युग्म) खत्म नहीं हो जाती है।
- एक आलेख G को एक वैट आलेख कहा जाता है यदि G के प्रत्येक कोर को एक वास्तविक संख्या से निरूपित किया जाता है।
- एक संबंधित निर्देशित D यूलरियन ट्रेल (Trail) में एक ट्रेल (Trail) होती है जिसमें D की सभी कोरें शामिल होती हैं; जबकि D का एक यूलरियन परिपथ एक परिपथ होता है जिसमें D की सभी कोरें होती हैं। एक निर्देशित आलेख जिसमें एक यूलरियन परिपथ होता है उसे यूलरियन डाईग्राफ (Eulerian Digraph) कहते हैं।
- एक पथ जिसमें G के प्रत्येक शीर्ष होते है उसे G का हैमिल्टन पथ कहा जाता है। इसी प्रकार, G का एक हैमिल्टन चक्र वह चक्र है जिसमें G का प्रत्येक शीर्ष होता है दूसरे शब्दों में जनित चक्र एक आलेख हैमिल्टोनियम होता है यदि उसमें हेमिल्टन चक्र या जनित चक्र होता है।
- जब वर्तमान नोड के सभी समीपवर्तियों के निरीक्षण हो जाए, तो इसे निरीक्षण के रूप में चिह्नित किया जाता है ताकि इन नोडों पर फिर से निरीक्षण न लगे और दर्ज की गई दूरी अंतिम और निमनिष्ठ हो।

3.9 मुख्य शब्दावली

टिप्पणी

- **सरल आलेख** : एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोई नहीं होती है, उन्हें सरल आलेख कहा जाता है।
- **छद्रलेख** : एक आलेख जिसमें स्व–लूप और समानांतर कोरें होती है, उन्हें छद्रलेख कहा जाता है।
- **वियुक्त शीर्ष** : अगर एक शीर्ष की डिग्री शून्य है तो उसे वियुक्त शीर्ष कहा जाता है।
- **आलम्ब शीर्ष** : अगर एक शीर्ष की डिग्री 'एक' है तो उसे आलम्ब शीर्ष कहा जाता है।
- **आसत्रता शीर्षों** : शीर्षों की जोड़ी को कोर को निर्धारित करती हैं, उन्हें आसत्रता शीर्षों कहा जाता है।
- **K-नियमित** : एक आलेख G, K-नियमित या डिग्री K का नियमित होता है यदि G के प्रत्येक शीर्ष की डिग्री K है।
- **असंबद्धता** : एक आलेख G को असंबद्ध माना जाता है, अगर वहां दो शीर्षों u और v उपस्थित हैं और उनके बीच कोई पथ (u-v) नहीं है।

3.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. आलेखों को परिभाषित कीजिए।
2. निमनिष्ठ और उच्चिष्ठ अधिकतम डिग्री से आप क्या समझते हैं?
3. निर्देशित और अनिर्दिष्ट आलेख क्या है?
4. कट–शीर्षों और कट–कोरें से आप क्या समझते हैं?
5. यूलर आलेख क्या है?
6. वैट आलेखों में लघुत्तम दूरी क्या है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. एक शीर्ष की डिग्री क्या है? उदाहरण सहित इसकी व्याख्या कीजिए।
2. आलेखों के प्रकारों की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए।
3. दो आलेखों के बीच तुल्याकारी या समरूपी आलेख को परिभाषित कीजिए।
4. निर्देशित आलेख में संबद्धता को परिभाषित कीजिए तथा इसके प्रकारों की व्याख्या कीजिए।
5. हैमिल्टोनियम पथ और परिपथ क्या है? साथ ही चल विक्रेता समस्या को परिभाषित कीजिए।
6. वैट आलेखों में लघुत्तम दूरी क्या है? साथ ही डिजक्सत्रा एल्गोरिथम की व्याख्या कीजिए।

3.11 सहायक पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

Pathak, Dr. H. K. 2017. विविक्त गणित (Discrete Mathematics). Meerut (UP): Shiksha Sahitya Prakashan.

Liu, C. L. 1977. *Elements of Discrete Mathematics*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Deo, Narsingh. 1999. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall of India.

Mott, J. L. 2007. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 2nd Edition. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.

Rosen, Kenneth. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Tremblay, Jean Paul and R. Manohar. 1975. *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science*. New York: McGraw-Hill Inc.

Singh, Y. N. 2005. *Mathematical Foundation of Computer Science*. New Delhi: New Age International Pvt. Ltd.

Malik, D. S. 2004. *Discrete Mathematical Structures: Theory and Applications*. London: Thomson Learning.

Haggard, Gary, John Schlipf and Sue Whiteside. 2006. *Discrete Mathematics for Computer Science*. California: Thomson Learning.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2008. *A Course in Abstract Algebra*, 3rd Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Grewal, B. S. 1998. *Higher Engineering Mathematics,* 34th Edition. New Delhi: Khanna Publishers.

Narayan, Shanti. 1996. *Differential Calculus,* 14th Edition. New Delhi: S Chand And Company Limited.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics,* 7th Edition. Mumbai: Wiley Eastern Ltd.

Bali, N. P. 2007. *A Textbook of Engineering Mathematics*. New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2009. *Business Mathematics*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

इकाई 4 वृक्ष (ट्री) एवं उनके गुण

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय

गणित में, वृक्ष (ट्री) एक आसतत संरचना है जो व्यक्तिगत तत्वों या नोड्स के बीच वर्गीकृत संबंधों का प्रतिनिधित्व करता है। एक ट्री जिसमें एक शाखा के दो उप–ट्री से अधिक उप–ट्री नहीं है उन्हें एक द्विआधारी ट्री कहा जाता है। ट्री एक जुड़ा हुआ चक्रीय अप्रत्यक्ष आलेख या ग्राफ है। G में प्रत्येक युग्म के बीच एकमात्र पथ है। N के साथ एक ट्री जिसमें N की संख्या $(N-1)$ होती है। सिरों की संख्या शीर्ष जो 0 डिग्री का होता है उसे ट्री G एक विशेष नोड के साथ एक जुड़ा हुआ चक्रीय ग्राफ है जिसे ट्री का रूट कहा जाता है और प्रत्येक सिरा सीधा या परोक्ष रूप से रूट से निकलता है। एक क्रम किया गया रूट जहां प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के उप–ट्री को क्रमित किया जाता है। एक द्विआधारी ट्री एक ट्री डेटा संरचना है जिसमें प्रत्येक नोड में अधिकतम दो उप–ट्री हैं, जिन्हें बांए उप–ट्री और दाएं उप–ट्री के रूप में संदर्भित किया जाता है। बस समुच्चय सिद्धांत धारणाओं का उपयोग करते हुए एक पुनरावर्ती परिभाषा यह है कि एक (गैर–रिक्त) द्विआधारी ट्री एक टुपल (L, S, R) है, जहां L और R द्विआधारी ट्री या रिक्त समुच्चय हैं और S एक सिंगलटन समुच्चय है जिसमें रूट होते हैं।

क्रुसकल्स की एल्गोरिथम की समय जटिलता (Log V) है, V लंबवत संख्या है। प्रिम्स का एल्गोरिथम जुड़ा हुआ घटक देता है और साथ ही यह केवल जुड़े ग्राफ या आलेख पर काम करता है। प्रिम्स का एल्गोरिथम घने रेखांकन में तेजी से चलता है। क्रुसकल्स का एल्गोरिथम विरल आलेख में तेजी से चलता है।

इस इकाई में आप नियत ट्री, द्विआधारी ट्री, ट्री की परीक्षण, जनक ट्री, आलेख की स्थिति एवं शून्यता तथा क्रुसकल्स कलन विधि और प्रिम्स कलन विधि का अध्ययन करेंगे।

4.1 उद्देश्य

टिप्पणी

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- नियत ट्री की व्याख्या कर पाएंगे;
- द्विआधारी ट्री का वर्णन कर पाएंगे;
- जनक ट्री को समझ पाएंगे;
- आलेख की स्थिति एक शून्यता का वर्णन कर पाएंगे;
- क्रुसकल्स कलन विधि और प्रिम्स कलन विधि को समझ पाएंगे।

4.2 आलेख या ग्राफ सिद्धान्त

गणित तथा संगणक विज्ञान में आलेख या ग्राफ सिद्धांत (Graph Theory) में वस्तुओं की आपसी दूरी का अध्ययन किया जाता है। इस संदर्भ में ग्राफ उन गणितीय संरचनाओं को कहते हैं जो वस्तुओं के बीच जुड़े या युग्मित संबन्धों (Pairwise Relations) को मॉडल करने के काम आती हैं। इसकी तुलना किसी मानचित्र में शहरों के बीच बने सड़कों के ट्रैप से कर सकते हैं। दो शहरों के बीच की दूरी उनके बीच बनी सड़क की लंबाई बताती है। यदि उन शहरों से बीच सीधी सड़क न हो, तो किसी अन्य शहर द्वारा वहाँ तक पहुँचने की दूरी निकाली जा सकती है।

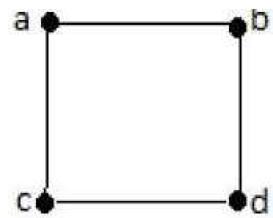
इसके आरेखों और चित्रों में दर्शाने के लिए वस्तुओं को बिन्दु या शीर्ष (Node, Vertex) से दर्शाया जाता है। इनके बीच के जुड़ाव को एक रेखा द्वारा जिसे कोर (Edges) कहते हैं। अतः ग्राफ शीर्षों (Vertices या Nodes) तथा उनको जोड़ने वाली कोरों (Edges) का समुच्चय है। विविक्त गणित (Discrete Mathematics) में आलेख या ग्राफ का अध्ययन एक महत्वपूर्ण विषय है।

ध्यान रहे कि 'आलेख या ग्राफ सिद्धान्त' का 'आलेख या ग्राफ', फलनों के आलेख (ग्राफ) यानि वक्र रेखा द्वारा किसी संबंध को दिखाने से बिलकुल भिन्न है। ग्राफ सिद्धांत का प्रयोग वस्तुओं के विशाल समूह में एक दूसरे से दूरी (या अन्तर) निकालने के लिए किया जाता है। आलेख या ग्राफ सिद्धांत के अनुसार, इसी प्रकार आकड़ों के पुंजीकरण, वस्तुओं की समरूपता इत्यादि जैसे फलनों का हल निकाला जा सकता है।

एक आलेख या ग्राफ बिंदुओं और रेखाओं से जुड़ा हुआ रेखाचित्र है। इसमें कम से कम एक रेखा या लाइन होती है जो दो वर्टीकल के सेट से जुड़ती है जिसमें कोई भी शीर्ष नहीं होता है। ग्राफ सिद्धांत में रेखांकन की अवधारणा कुछ मूल शब्दों पर निर्भर करती है जैसे बिंदु, रेखा, शीर्ष, किनारे, लंबवत डिग्री, रेखांकन के गुण, आदि।

एक आलेख या ग्राफ 'G' को $G = (V, E)$ के रूप में परिभाषित किया गया है, जहां V सभी लंबों का एक सेट है और E आलेख या ग्राफ में सभी किनारों का एक सेट है।

उदाहरण आलेख या ग्राफ,



उपरोक्त उदाहरण में, ab, ac, cd, और bd आलेख या ग्राफ के किनारे (Edges) हैं। इसी तरह, a, b, c, और d आलेख या ग्राफ के शीर्ष (Vertices) हैं।

समानांतर किनारों वाले एक आलेख या ग्राफ को मल्टीग्राफ के रूप में जाना जाता है।

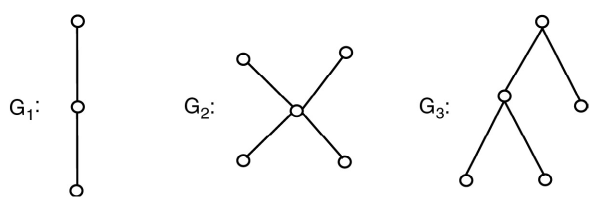
4.3 नियत वृक्ष (ट्री)

इस भाग में हम एक ट्री की विशेषताओं का अध्ययन करेंगे।

अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) : एक आलेख G जिसमें कोई चक्र नहीं होता है, उसे अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) कहा जाता है।

ट्री : संबंधीत अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) G को ट्री कहा जाता है।

उदाहरण के लिए,



नोट्स

(*i*) ट्री को अक्सर खुले (Open) आलेख के रूप में जाना जाता है।

(*ii*) कोई भी ऑर्गनजैशनल या संगठनात्मक अनुक्रम या हाइरार्की भी ट्री का उदाहरण हो सकता है।

प्रमेय 4.1: एक ट्री में प्रत्येक दो शीर्षों अद्वितीय पथ से जुड़े होते हैं।

प्रमाण : विरोधाभास सेः मान लीजिए कि G एक ट्री है और G में दो अलग–अलग (v,w) पथ P_1 और P_2 हैं। चूंकि $P_1 \neq P_2$, वहाँ P_1 का एक कोर $e = V_1V_2$ होगा जो P_2 में नहीं होगा। स्पष्ट रूप से $(P_1 \cup P_2) - e$ जुड़े हुए है। इसलिए, इसमें एक $(V_1 - V_2)$ पथ P है। लेकिन $P + e$ अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) G में एक चक्र है, जो इस तथ्य के विपरीत है कि G एक ट्री है।

प्रमेय 4.2: n शीर्षों वाले एक ट्री G में $(n-1)$ कोरें होती है।

प्रमाण : शीर्षों की संख्याओं पर आगमन विधि का प्रयोग करने पर, हमें मिलेगा

जब $n = 1,\ E(G) = 0 = n-1\ (G \cong K_1)$

जब $n = 2,\ E(G) = 1 = n-1\ (G \cong K_2)$

मान लेते हैं कि यह प्रमेय G की n शीर्षों से कम शीर्षों की सभी ट्री के लिए सत्य है।

टिप्पणी

अब, हम n शीर्षों वाले एक ट्री G पर विचार करते है। मान लीजिए कि $e = uv$, G में एक कोर हैं। तब $G - e$ असम्बद्ध होता है और G के दो घटक, मान लीजिए, $(G - e)$ के G_1 और G_2 हैं। चूंकि G अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) है, इसलिए G_1 और G_2 भी अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) होंगे और इसलिए G_1 और G_2 भी एक ट्री होंगे। लेकिन G_1 और G_2 में n शीर्षों से कम शीर्ष है, मान लीजिए, क्रमशः n_1 और n_2 हैं। इसलिए, आगमन परिकल्पना विधि द्वारा,

G_1 में $(n_1 - 1)$ कोरें और G_2 में $(n_2 - 1)$ कोरें होगी।

$$\therefore E(G) = E(G_1) + (G_2) + 1$$

(यहां, योग में 1, कोर e के लिए है)

$$\begin{aligned} &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 \\ &= n_1 + n_2 - 1 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

इसलिए, n शीर्षों वाले ट्री की $(n - 1)$ कोरें होती है।

प्रमेय 4.3 : प्रत्येक ट्री में कम से एक डिग्री के दो शीर्षों होते हैं या एक ट्री में कम से कम दो आलम्ब शीर्षों (Pendant Vertices) होते हैं।

प्रमाण : माना कि G एक n शीर्षों वाला ट्री है। तब,

$$d(v) \geq 1,\ \forall\, v \in v(G) \tag{1}$$

हमारे पास पहले से ही, $\sum_{v \in v} d(v) = 2.E(G) = 2.e$ (2)

चूंकि G एक n-शीर्षों वाला ट्री है, इसलिए इसमें $(n - 1)$ कोरों होगी।

$$\therefore \qquad \sum_{v \in v(G)} d(v) = (2n - 2) \tag{3}$$

समीकरणों (1) और (3) से, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे है कि $d(v) = 1$ कम से कम दो शीर्षों के लिए होता है।

नोटः एक ट्री में, प्रत्येक कोर एक कट– कोर होता है।

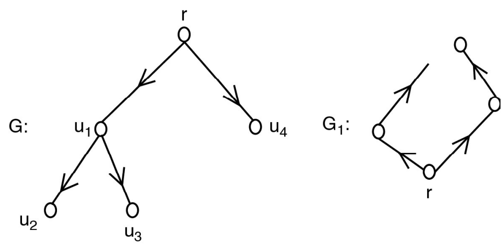
नियत ट्री (Rooted Tree) : एक दिष्ट ट्री (प्रत्येक कोर को एक दिशा द्वारा दर्शाया जाता है) में, एक विशेष शीर्ष को रूट कहा जाता है यदि वह शीर्ष शून्य डिग्री का हो। एक ट्री अपनी रूट के साथ मिलकर एक आलेख बनाता है जिसे नियत ट्री कहा जाता है। (ध्यान दें कि नियत ट्री में, प्रत्येक कोर को रूट से विपरीत दिशा में निर्देशित किया जाता है)

उदाहरण के लिए,

मान लीजिए कि T एक नियत ट्री है। यदि एक शीर्ष u, रूट के अलावा T में एक शीर्ष है, तो इस u के अभिभावक अद्वितीय शीर्ष u_1 इस तरह होंगे कि u_1 से u तक एक दिष्ट (निर्देशित) कोर होगा। यहाँ, u को u_1 का उप–ट्री कहा जाता है। एक

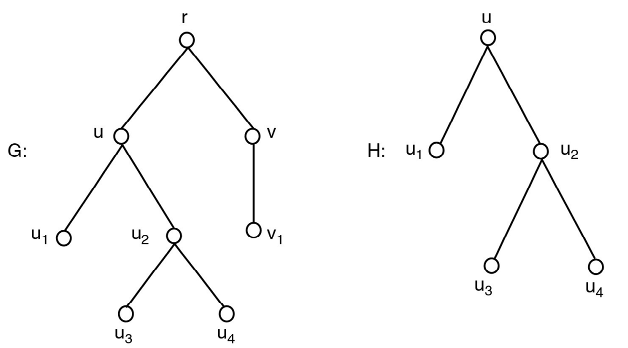
ही अभिभावक के शीर्षों को सहोदर कहा जाता है।नियत ट्री के शीर्ष को शाखा कहा जाता है, अगर इसकी कोई चिल्ड्रन नहीं है और जिन शीर्षों के उप–ट्री होते हैं, उन्हें आंतरिक शीर्षों कहा जाता है।

टिप्पणी



यदि v एक ट्री का एक शीर्ष है, तो v रूट के रूप उप–ट्री का उप–आलेख होगा जोकि v और उसके उप–ट्री और इन उप–ट्रीं पर आपतित (Incident) सभी कोरों से मिलकर बनाता है।

उदाहरण के लिए,

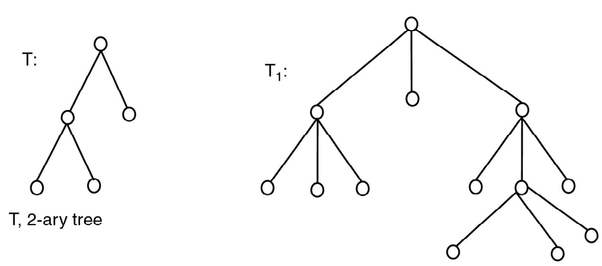


Rooted tree T

Subtree of T with its root u.

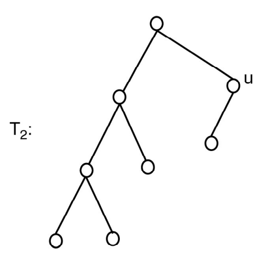
K-ऐरी ट्री (K-Ary Tree): नियत ट्री को k-ऐरी (Ary) ट्री कहा जाता है, यदि प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के k से ज्यादा उप–ट्री नहीं हो। ट्री को पूर्ण k-ऐरी (Ary) ट्री कहा जाता है अगर प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के k–उप–ट्री हों। k-ऐरी (Ary) ट्री में $k = 2$ को द्विआधारी ट्री कहा जाता है।

उदाहरण के लिए,



T, 2-ary tree

T_1, 3-ary tree



T_2 कोई 2-ऐरी ट्री नहीं है। (शीर्ष न का केवल एक उप–ट्री है, जबकि अन्य सभी शीर्षों के दो उप–ट्री हैं)

एक ट्री T को द्विआधारी ट्री कहा जाता है यदि शीर्षों की डिग्री 2 हो और शेष शीर्षों की डिग्री 1 या 2 हो।

उदाहरण 4.1 : साबित या सिद्ध करें कि i–आंतरिक शीर्षों के पूर्ण k-Ary ट्री में k_{i+1} शीर्षों होते हैं।

हलः एक पूर्ण k-ऐरी (Ary) ट्री में, प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के k उप–ट्री होते हैं और इसलिए i–आंतरिक शीर्षों वाले पूर्ण k-ऐरी (Ary) ट्री के ki शीर्षों होंगे। यदि हम रूट को उपस्थित करते हैं, तो ट्री में $ki + 1$ शीर्षों होंगे। पूर्ण k-ऐरी (Ary) ट्री को देखने के बाद, हम पाते हैं।

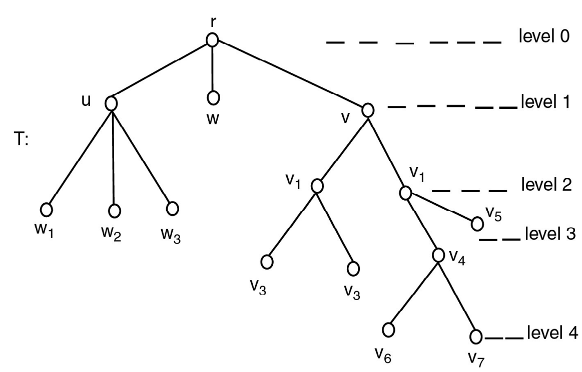
(*i*) n शीर्षों में $i = (n - 1)/k$ आंतरिक शीर्षों और $p = [(k - 1)n + 1]/k$ शाखा (Leaves) होते हैं।

(*ii*) i आंतरिक शीर्षों में $n = ki + 1$ शीर्षों और $p = (m - 1)i + 1$ शाखा (Leaves) होते हैं।

(*iii*) p शाखाओं $n = (kp - 1)/(k - 1)$ शीर्षों और $i = (p - 1)/(k - 1)$ आंतरिक शीर्षों होते हैं।

नियत ट्री का स्तर और ऊँचाई (Level and Height in a Rooted Tree): नियत ट्री में एक शीर्ष v का स्तर रूट से इस शीर्ष तक की पथ की लंबाई होती है। एक नियत ट्री की ऊंचाई रूट से किसी भी शीर्ष तक सबसे लंबे पथ की लंबाई है।

उदाहरण के लिए,



चित्र मे एक रूट वाली ट्री T को उसके विभिन्न स्तरों के साथ दिखाया गया है। T की ऊँचाई 4 है।

संतुलित ट्री (Balanced Tree) : ऊँचाई h की एक नियत k-ऐरी (Ary) ट्री संतुलित होती है यदि सभी शाखाओं या लीवज का स्तर h या $(h - 1)$ होता है।

4.4 द्विआधारी ट्री

टिप्पणी

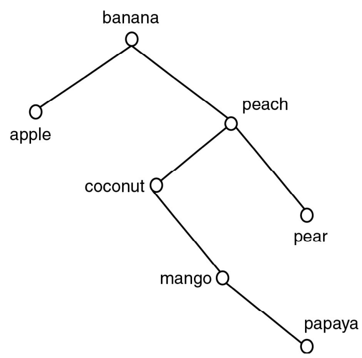
द्विआधारी परीक्षण ट्री (Binary Search Trees)

द्विआधारी परीक्षण ट्री एक द्विआधारी ट्री है जिसमें प्रत्येक उप–ट्री या तो बाएं या दाएं उप–ट्री होता है;

किसी भी शीर्ष में एक से अधिक बायें और दायें उप–ट्री नहीं होते हैं, और आकड़े शीर्षों से जुड़े होते हैं।

उदाहरण 4.3: केला, आलू, सेब, नाशपाती, नारियल, आम और पपीता शब्दों के लिए एक द्विआधारी परीक्षण ट्री बनाएँ।

हलः



यदि सेब < आड़ू, नारियल < नाशपाती है;

आगे, आम नारियल का दाँया उप–ट्री है और पपीता आम का दाँया उप–ट्री है।

निर्णय ट्री (Decision Trees)

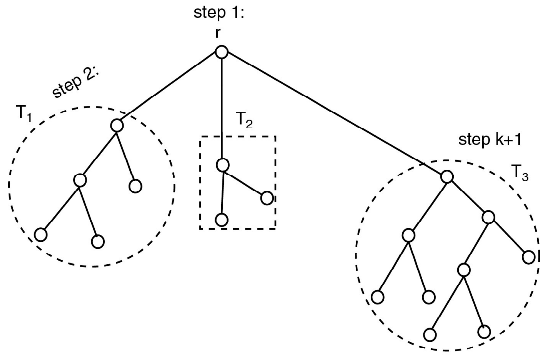
नियत ट्री जिसमें प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के शीर्ष पर एक उप–ट्री होती है और वह एक निर्णय के साथ जुड़ा होता है, तो फिर प्रत्येक संभावित परिणाम को निर्णय ट्री कहा जाता है।

ट्री का त्राटक (Traversal)

क्रमिक नियत ट्री के प्रत्येक शीर्ष पर एक व्यवस्थित विधि से फेरे लगाने को 'त्रावर्सल या चंक्रमण एल्गोरिथम' (Traversal Algorithm) कहा जाता है।

प्री–ऑर्डर (Pre-order) : मान लीजिए कि T रूट त वाला एक क्रमिक नियत ट्री है। मान लीजिए कि T में एक और केवल एक शीर्ष r है, तो r, T का प्री–ऑर्डर त्रावर्सल (Traversal) होगा। मान लीजिए कि $T_1, T_2, ..., T_k$ में बाएं से दाएं तक r पर उप–ट्री हैं, तो r पर फेरे लगाने से प्री–ऑर्डर त्रावर्सल (Traversal) शुरू होता है। यह लगातार आगे बढ़ता रहता है, पहले T_1, फिर T_2 में प्री–ऑर्डर और इसी तरह, जब तक कि T_k नहीं आ जाता है।

टिप्पणी



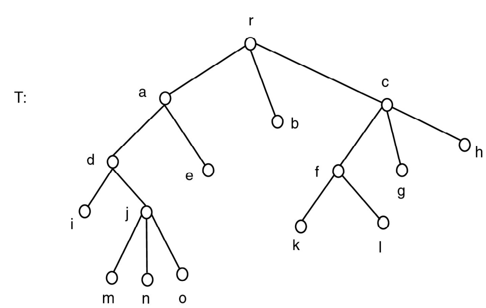
चरण 1. रूट r पर जाएं।

चरण 2. प्री–ऑर्डर में T_1 पर जाए।

चरण 3. प्री–ऑर्डर में T_2 पर जाएं।

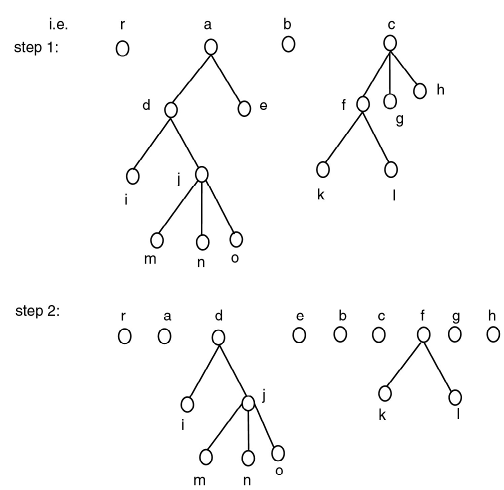
चरण k+1 : प्री–ऑर्डर में T_k पर जाएँ।

आइए एक उदाहरण के साथ उपरोक्त को समझने की कोशिश करते है।



मान लीजिए कि T एक रूट ट्री है। T के प्री–ऑर्डर त्रावर्सल के चरण निम्नानुसार होंगे–

हम रूट T को सूचीबद्ध करके प्री–ऑर्डर में r को चंक्रमण (Traverse) करेगे, इसके बाद रूट a के लिए उप–ट्री के प्री–ऑर्डर को सूचीबद्ध करेगे,फिर रूट b के लिए उप–ट्री के प्री–ऑर्डर को सूचीबद्ध करेगे और आखिर मे रूट c के लिए उप–ट्री के प्री–ऑर्डर को सूचीबद्ध करेगे।



प्री–ऑर्डर त्रावर्सल एल्गोरिथम (Pre-Order Traversal Algorithm)

चरण 1. रूट r पर जाएँ और फिर r को सूचीबद्ध करें।

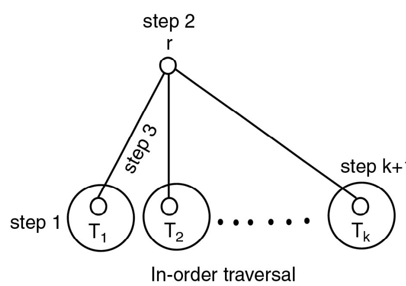
चरण 2. बाएं से दाएं तरफ r के प्रत्येक उप–ट्री के लिए, पहले उप–ट्री की रूट को सूचीबद्ध करें, फिर अगली उप–ट्री और यह आनुक्रमिकता जारी रहेगी, जब तक हम स्तर 1 तक सभी उप–ट्री की रूटों को सूचीबद्ध नहीं कर लेते है।

चरण 3. चरण 2 को दोहराएं, जब तक कि हम दिए गए ट्री की शाखाएं तक न पहुंचें।

चरण 4. रोक दें (समाप्त)।

इन–ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal)

मान लीजिए कि T एक क्रमिक नियत ट्री है जिसकी रूटें शीर्ष r पर हैं। मान लीजिए कि T में केवल रूट r है, तो r, T का इन –ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal) होगा। यदि ऐसा नहीं है, तो, मान लीजिए कि T की बाएं से दाएं तक $T_1, T_2, ..., T_k$ उप–ट्री है। प्री–ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal) T_1 को क्रम अनुसार चंक्रमण (Traverse) करके शुरू होता है, फिर r पर जाएँ। उसके बाद T_2 को चंक्रमण (Traverse) करें। यह क्रम लगातार जारी रहेगा जब तक हम क्रम अनुसार T_k तक नहीं पहुँच जाते और अंत में T_k को किया जाता है।



In-order traversal

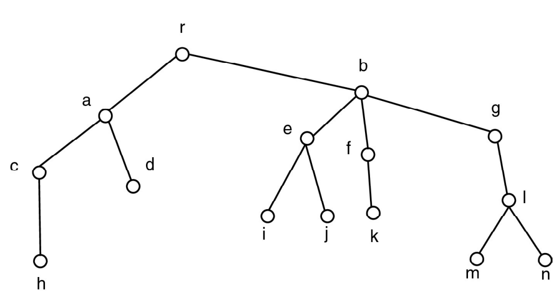
चरण 1. क्रम अनुसार T_1 पर जाएँ।

चरण 2. रूट पर जाएं।

चरण 3. क्रम अनुसार T_2 पर जाएँ।

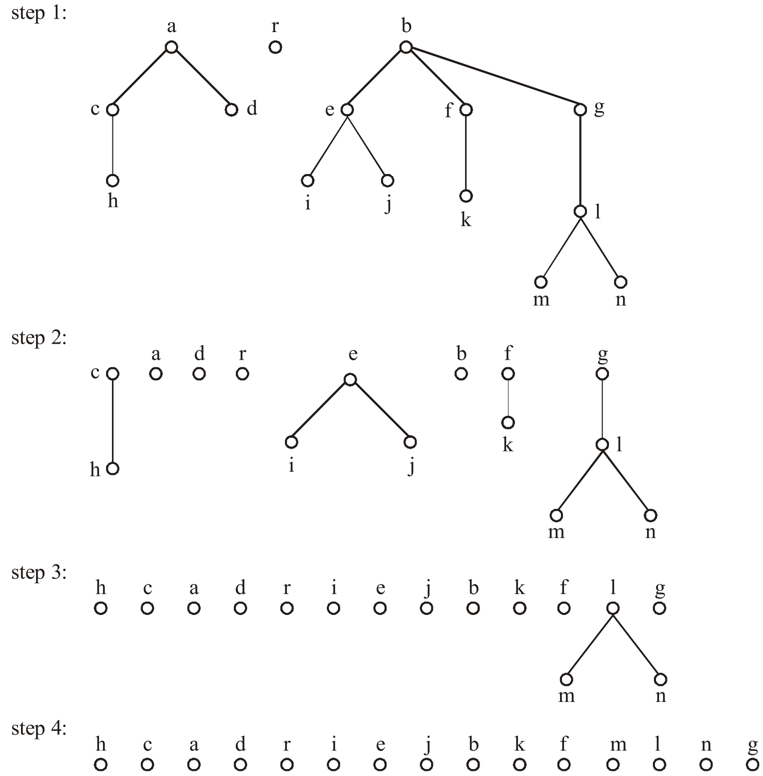
चरण k+1. क्रम अनुसार T_k जाएँ।

उदाहरण 4.4 : इन–ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal) का उपयोग करके उस क्रम को निकले (निर्धारित करें) जिसमें निम्नलिखित रूट ट्री के शीर्ष को देखा जाता है।



हल : इन–ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal) उप–ट्री की रूट a को क्रम अनुसार (In-order Traversal) करके शुरू होता है, इसके बाद रूट r और फिर रूट b के साथ उप–ट्री को क्रम अनुसार इन–ऑर्डर (In-Order) सूचीबद्ध किया जाता है।

टिप्पणी

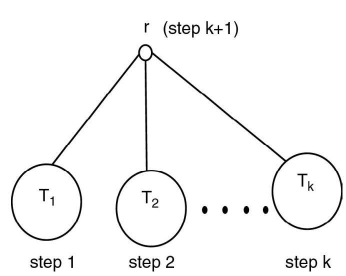


परिभाषा

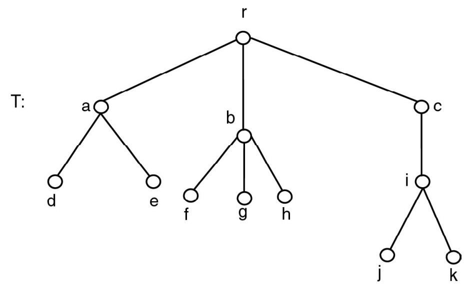
पोस्ट–ऑर्डर त्रावर्सल (Post-Order Traversal)

माना कि T एक रूट r वाला नियत ट्री है। यदि T में केवल एक शीर्ष r है, तो, r, T का पोस्ट–ऑर्डर त्रावर्सल (Post-Order Traversal) होगा। यदि r पर T में बाएं से दाएं r d $T_1, T_2, ..., T_k$ उप–ट्री है, तो T_1 को पोस्ट–ऑर्डर (Post-order) में चंक्रमण (Traverse) करके पोस्ट–ऑर्डर त्रावर्सल (Post-Order Traversal) शुरू होता है, फिर T_2 में क्रम अनुसार और यह क्रम लगातार जारी रहेगा जब तक हम क्रम अनुसार T_k तक पहुँच नहीं जाते और अंत में T_k को किया जाता है और r पर जाकर समाप्त होता है।

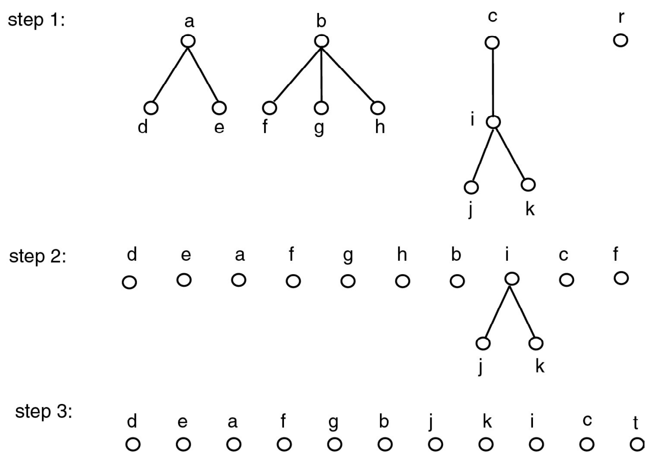
उदाहरण के लिए,



टिप्पणी



पोस्ट–ऑर्डर त्रावर्सल (Post-Order Traversal) उप–ट्री की रूट a पर पोस्ट–ऑर्डर ट्रावर्सल (Post-Order Traversal) करके शुरू होता है, फिर रूट b की उप–ट्री का (Post-Order Traversal) पोस्ट–ऑर्डर ट्रैवर्सल (Post-Order Traversal) और फिर उप–ट्री की रूट c का पोस्ट ऑर्डर ट्रैवर्सल (Post-Order Traversal) करके रूट r को किया जाता हैं।



इन्फिक्स, प्रीफिक्स और पोस्टफिक्स संकेतन (Infix, Prefix और Postfix Notation)

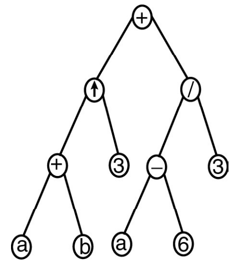
हम क्रमिक नियत ट्री का किसी भी अभिव्यक्ति (जैसे अंकगणित, यौगिक प्रस्ताव) का निरूपण करके उपयोग कर सकते हैं। एक क्रमिक नियत ट्री का उपयोग अभिव्यक्तियों का निरूपण करने के लिए किया जा सकता है, जहां, आंतरिक शीर्ष संक्रियों (Operations) का निरूपण करते हैं और शाखा चर या अंकों का निरूपण करते हैं।

उदाहरण 4.5 : क्रमिक नियत ट्री क्या होगी जो निम्नलिखित अभिव्यक्ति का निरूपण करती है?

$$((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$$

हल : सबसे पहले, $a+b$ के लिए एक उप–ट्री का निर्माण करें। फिर, इस ट्री को $((a+b)\uparrow 3)$ के अगले उप–ट्री के हिस्से के रूप में उपस्थित करें। इसी तरह, $(a-6)$ के लिए एक उप –ट्री का निर्माण करें और फिर, इस ट्री को $(a-6)/3$ के अगले उप –ट्री के हिस्से के रूप में उपस्थित करें। अंत में उप–ट्री $((a+b)\uparrow 3)$ और $(a-6)/3$ को जोड़कर दी हुई अभिव्यक्ति के अनुरूप आवश्यक नियत ट्री का निर्माण करें।

अभिव्यक्ति $((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$ के अनुरूप क्रमिक नियत ट्री



द्विआधारी ट्री का इन–ऑर्डर त्रावर्सल (In-Order Traversal) एक अभिव्यक्ति का निरूपण करते हुए, मूल अभिव्यक्ति को उसी क्रम में अवयवों और संक्रियों (Operations) के साथ उत्पन्न करती है, जैसा कि वे मूल रूप से दिखाई देते हैं (यूनिरी ऑपरेटर को छोड़कर)।

यदि हम कोष्ठक का उपयोग करते हैं, और हम किसी संक्रियों (Operations) का सामना करते हैं, तब भी कोई अस्पष्टता नहीं होती है। इस पूरी तरह से कोष्ठबद्ध अभिव्यक्ति को इन्फिक्स (Infix) रूप कहा जाता है।

उपसर्ग रूप में लिखी गई अभिव्यक्तियों को पोलिश (Polish) संकेतन या नोटेशन कहा जाता है।

उदाहरण 4.6: $((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$? का प्रीफिक्स रूप (Prefix Form) क्या होगा?

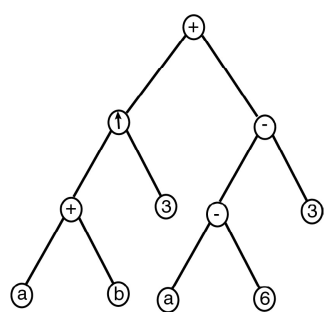
हल: अभिव्यक्ति $((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$ के अनुरूप क्रमिक नियत ट्री उदाहरण 4.5 में दिखाई गई ट्री के समान है।

दी गई अभिव्यक्ति को प्रीफिक्स रूप में प्राप्त करने के लिए, हमें द्विआधारी ट्री को प्री–ऑर्डर (Pre-Order) में चंक्रमण (Traverse) करना होगा। $((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$ अभिव्यक्ति का प्रीफिक्स रूप $+\uparrow ab\ 3/-a\ 63$ है।

हम पोस्ट–ऑर्डर में द्विआधारी ट्री को चंक्रमण करके अभिव्यक्ति का पोस्टफिक्स रूप (Postfix) प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 4.7: $((a+b)\uparrow 3)+((a-6)/3)$ का पोस्टफिक्स (Postfix) रूप क्या होगा?

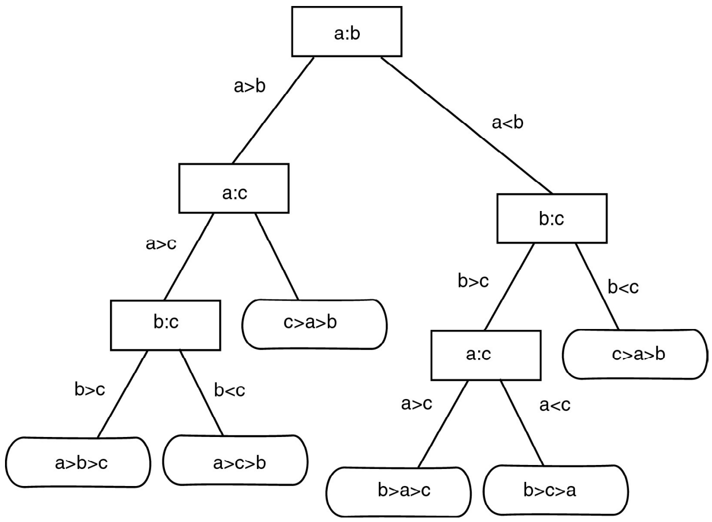
हल: अभिव्यक्ति के अनुसार द्विआधारी ट्री निम्न होगी।



दि गई अभिव्यक्ति का पोस्टफिक्स (Postfix) रूप प्राप्त करने के लिए, हमें द्विआधारी ट्री को पोस्ट–ऑर्डर (Post-Order) में चंक्रमण (Traverse) करना होगा। वांछित पोस्टफिक्स (Postfix) रूप $ab+3\uparrow a6-3/+$ है।

उदाहरण 4.8: एक निर्णय ट्री को रेखांकित करें जो सूची a,b,c के अवयवों को क्रम देती है।

हलः



4.4.1 ट्री की परीक्षण

अवयवों की सूची को हल करने के कई तरीके हैं। यहाँ, हम देखेंगे कि ट्री किस प्रकार मर्ज़ सॉर्ट (Merge Sort) में सहायक होती हैं।

सामान्य तौर पर, मर्ज़ सॉर्ट (Merge Sort) प्रक्रिया में पुनरावर्ती मूलक तरीके से सूचियों को समान आकार (लगभग) की दो उप–सूचियों में विभाजित किया जाता है जब तक कि प्रत्येक उप सूची में केवल एक अवयव न रह जाएँ।

उपसूची के इस अनुक्रम को संतुलित द्विआधारी ट्री द्वारा दर्शाया जा सकता है। जब तक मूल सूची को बढ़ते क्रम में नहीं रखा जाता, तब तक यह प्रक्रिया सूचियों के जोड़े (जहाँ दोनों सूचियाँ बढ़ते क्रम में होती हैं) को बड़ी सूची में अवयवों के साथ विलय करके जारी रहती है। एक विलय सूची के अनुक्रम को एक संतुलित द्विआधारी ट्री द्वारा दर्शाया जा सकता है।

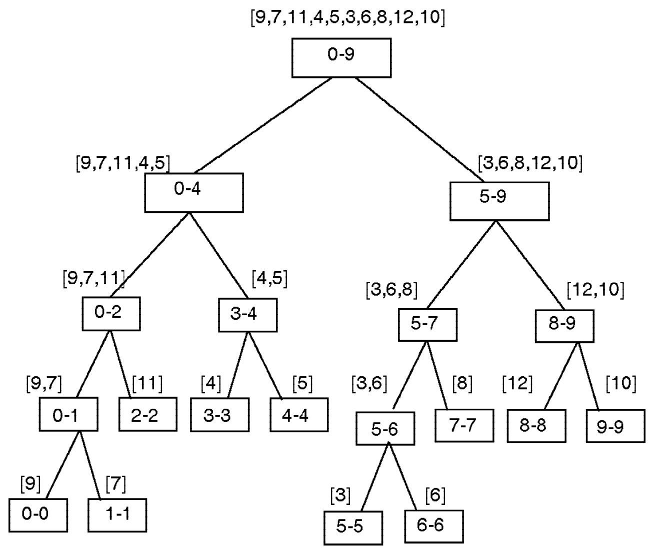
उदाहरण 4.8 : 9, 7, 11, 4, 5, 3, 6, 8, 12, 10. की सूची का मर्ज सॉर्ट (Merge Sort) के लिए पुनरावर्ती ट्री बनाएँ।

हल : अवयवों की सूची को निम्न रूप में दर्शाया जा सकता हैः
$a[0] = 9$; $a[1] = 7$; $a[2] = 11$; $a[3] = 4$; $a[4] = 5$; $a[5] = 3$; $a[6] = 6$; $a[7] = 8$; $a[8] = 12$; $a[9] = 10$.

सबसे पहले, अवयवों की स्थिति को 0-9 द्वारा निरूपित करें। दी गई सूची [9,7,11,4,5,3,6,8,12,10] है।

पहले चरण के रूप में, इस सूची को क्रमशः 0-4 और 5-9 आकार की दो उप–सूचीयों में विभाजित किया जाता है। फिर से, इन दो उप–सूचीयों (Sublists) को दो उप–सूचीयों में विभाजित किया जाता है, जब तक कि प्रत्येक उप–सूची में एक अवयव न रह जाए। वांछित ट्री नीचे दर्शाई गई है,

टिप्पणी

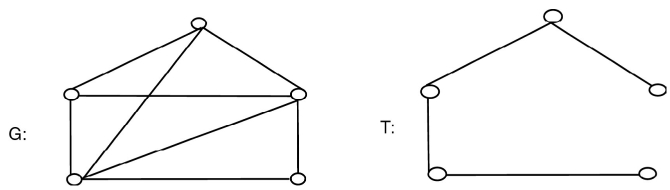


4.5 जनक ट्री

इस खंड में, हम सम्बद्ध उप आलेख के जनक अचक्रीय उप आलेख, और इसकी अधिकतमता का अध्ययन करेंगे।

माना कि G एक साधारण सम्बद्ध आलेख है। G की जनक ट्री, G का उप आलेख होती है, यानी, ट्री में G के प्रत्येक शीर्ष होते है।

उदाहरण के लिए, सरल आलेख G और इसकी जनक ट्री T निम्नलिखित हैं–



प्रमेय 4.4: एक साधारण आलेख सम्बद्ध होता है अगर वहाँ कम से कम एक जनक ट्री मौजूद या उपस्थित हो।

प्रमाण : माना की G एक साधारण सम्बद्ध आलेख है। यदि G के पास कोई परिपथ नहीं है तो G स्वयं एक जनक ट्री होता है। मान लीजिए, G का एक सरल परिपथ (Circuit) है। इन सरल परिपथों में से एक कोर को हटाने के बाद भी, परिणामी उप–आलेख अभी भी सम्बद्ध हो सकता है अगर वह जनक उप–आलेख है। यदि यह उप–आलेख सरल परिपथ हैं, तो, इस सरल परिपथों में से किसी एक कोर को हटा दें। इस प्रक्रिया को तब तक दोहराएं जब तक वहाँ कोई भी साधारण परिपथ नही हो। इस प्रकार, इस तरीके से एक ट्री T को प्राप्त किया जाता है जिसमें $V(T) = V(G)$ होता है। इसलिए, T, G का एक जनक ट्री होता है।

नोटः उपरोक्त प्रमेय का विलोमत स्पष्ट है।

माध्यमार्ग–प्रथम परीक्षण और चौड़ाई–प्रथम परीक्षण (Depth-First Search and Breadth and First Search)

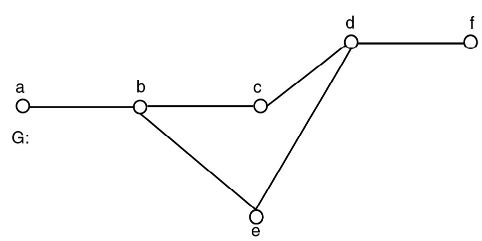
हम DFs और BFs का उपयोग करके सम्बद्ध आलेख से जनक ट्री का निर्माण कर सकते हैं। सबसे पहले, हम देखेंगे कि दिए गए सम्बद्ध आलेख से जनक ट्री के निर्माण में DFs कैसे उपयोगी होता हैं।

माध्यमार्ग–प्रथम परीक्षण (Depth-First Search)

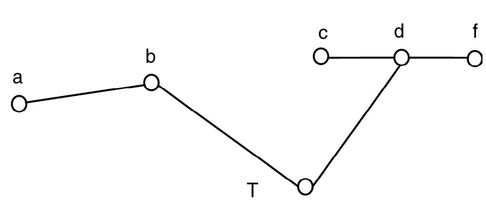
माना कि G दिया हुआ सम्बद्ध आलेख है। स्वेच्छा से किसी भी शीर्ष को रूट के रूप में चुनें। इस चुने हुए शीर्ष से शुरू करके क्रमिक रूप से कोरों को जोड़कर पथ को परीक्षणें, जहां, पथ पर प्रत्येक कोर अंतिम शीर्ष पर आपतित हो और शीर्ष पहले से ही पथ में नहीं हो। जब तक संभव हो, इस पथ पर कोरों को जोड़ना जारी रखें। यदि इस पथ में सभी शीर्ष G में हैं, तो यह पथ वांछित जनक ट्री होगा। यदि नहीं, तो अधिक कोरों को जोड़ा जाना चाहिए। इस पथ में अंतिम शीर्ष के पिछले शीर्ष पर जाएं, और यदि संभव हो तो, इस शीर्ष से एक नए मार्ग को शीर्षों से गुजरते हुए बनाएं जो पहले नहीं थे। यदि यह संभव नहीं है, तो इस पथ में दूसरे शीर्ष पर वापस जाएं (यानी, अंतिम से पिछले 2 शीर्षों के पीछे) और फिर से प्रयास करें। इस प्रक्रिया को दोहराएं, अंतिम शीर्ष पर जाकर शुरुआत करे, एक समय प्रत्येक बार पथ मे एक शीर्ष के पीछे जाए, नए लंबे पथों को बनायें जब तक कि कोर जुड़ने बंद न हो जाए। इस प्रक्रिया से जनक ट्री प्राप्त होती है।

जब यह प्रक्रिया पहले निरीक्षण कर शीर्षों पर लौटती है, तो इसे बैकट्रैकिंग (Backtracking) भी कहा जाता है।

उदाहरण 4.9: निम्नलिखित आलेख G के लिए जनक ट्री का निर्माण करें।



हल : सबसे पहले हम विवेकाधीन रूप से किसी भी शीर्ष, मान लीजिए, e को रूट के रूप में चुनते हैं। e पर एक पथ बनाए, अर्थात् c, d, f पथ का निर्माण करें। d पर वापिस जाए। d से शुरू करके पथ को इस तरह बनाएं कि यह सभी शीर्षों से मिले जो पिछले पथ में नहीं आए थे, d, e, b, a। चूंकि इसमें G के सभी शीर्षों उपस्थित है, इसलिए यह प्रक्रिया जनक ट्री T देती है।

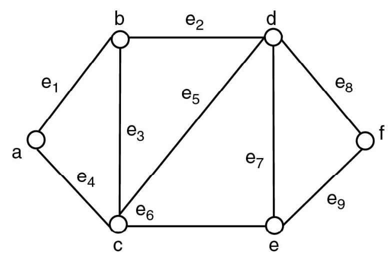


टिप्पणी

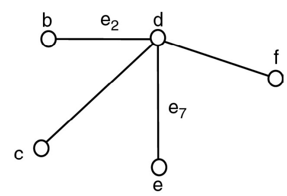
चौड़ाई–प्रथम परीक्षण

सबसे पहले स्वेच्छा से रूट के रूप में एक शीर्ष को चुनें। G के कोरों को जोड़े जो इस शीर्ष पर आपतित है। इस स्तर पर जोड़े गए नए शीर्षों जनक ट्री में स्तर 1 के होते है। स्वेच्छा से इन शीर्षों को क्रम दें। आगे, स्तर 1 पर प्रत्येक शीर्ष को क्रम से मिले, तब ट्री पर इस शीर्ष पर आपतित प्रत्येक कोरों को जोड़ें जब तक कि यह एक सरल परिपथ नहीं बनाए। प्रत्येक शीर्ष के उप–ट्रीं को स्तर 1 पर स्वेच्छा से क्रम दें। यहाँ यह ट्री में स्तर 2 का शीर्ष बनाता है। यह प्रक्रिया जारी रखें जब तक कि G के सभी शीर्ष जुड़ नहीं जाएं। अंततः हमें एक जनक ट्री प्राप्त होती हैं।

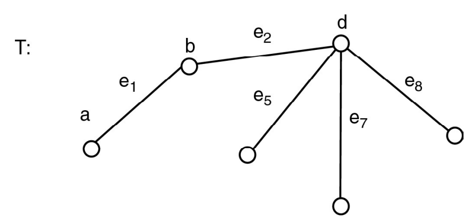
उदाहरण 4.10: निम्नलिखित आलेख G से जनक ट्री का निर्माण करें।



हल : सबसे पहले एक शीर्ष d को (स्वेच्छा से) रूट के रूप में चुनें। शीर्ष d पर आपतित (Incident) सभी कोरों को जोड़े। यहाँ कोरों e_2, e_5, e_7, e_8 शीर्ष d पर आपतित (Incident) है। ये शीर्षों स्तर 1 को बनाती हैं, अर्थात



अब कोरों को मिलाए जो b, c, e, f पर आपतित हैं इस तरह कि परिणामस्वरूप आलेख का कोई परिपथ नहीं हो।



इस प्रकार, इस स्तर पर हमें एक जनक ट्री T मिलती हैं।

नोट: यदि दिए गए आलेख दिष्ट आलेख है, तो हम अंतर्निहित अदिष्ट आलेख का निर्माण करते हैं और जनक आलेख को प्राप्त करने के लिए DF या BF को लागू करते हैं।

4.6 आलेख की स्थिति एवं शून्यता

टिप्पणी

आलेख या ग्राफ सिद्धांत में, एक अप्रत्यक्ष ग्राफ की **रैंक या स्थिति** (Rank) में दो अलग–अलग परिभाषाएं हैं। ग्राफ के शीर्ष की संख्या n के बराबर हैं।

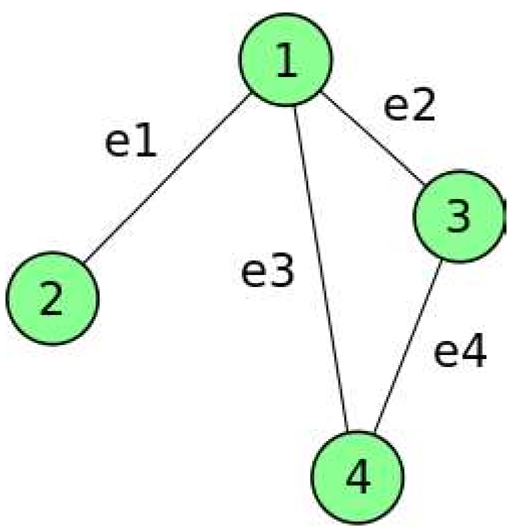
1. आलेख या ग्राफ के मैट्रिक्स सिद्धांत में अप्रत्यक्ष ग्राफ की रैंक r को इसके आसन्न मैट्रिक्स के रैंक या स्थिति के रूप में परिभाषित किया गया है।

   अनुरूपता, ग्राफ की शून्यता इसके आसन्न मैट्रिक्स की शून्यता है, जो $n - r$ के बराबर होती है।

2. आलेख या ग्राफ के सिद्धांत में एक अप्रत्यक्ष ग्राफ के रैंक को $n - c$ के रूप में परिभाषित किया गया है, जहां c ग्राफ के जुड़े हुए घटकों की संख्या है। समान रूप से, एक ग्राफ का रैंक ग्राफ के साथ जुड़े उन्मुख घटना मैट्रिक्स की रैंक है।

मूल रूप से, आलेख या ग्राफ की शून्यता इसके उन्मुख घटना मैट्रिक्स की शून्यता है, जो सूत्र $m - n + c$ द्वारा दी गई है, जहां n और c ऊपर हैं और m ग्राफ में किनारों की संख्या है। पद और शून्य का योग किनारों की संख्या है।

निम्नलिखित उदाहरण अप्रत्यक्ष ग्राफ और मैट्रिक्स का है, जो चार किनारों (Edges), e1–e4 के अनुरूप है।



	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	0	0
3	1	0	0	1
4	1	0	1	0

टिप्पणी

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

इस उदाहरण में, मैट्रिक्स सिद्धांत के अनुसार मैट्रिक्स की रैंक या स्थिति 4 है, क्योंकि इसके कॉलम वैक्टर रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

आलेख या ग्राफ सिद्धांत में, एक ग्राफ की **शून्यता** (Nullity) का मतलब निम्नलिखित दो अलग–अलग संख्याओं में से किसी से भी हो सकता है। यदि ग्राफ में n शीर्ष (Vertices) और m किनारों (Edges) हैं, तो;

1. आलेख या ग्राफ के मैट्रिक्स सिद्धांत में, ग्राफ की शून्यता ग्राफ के आसन्न मैट्रिक्स A की शून्यता है। A की शून्यता $n - r$ द्वारा दी गई है, जहाँ r आसन्न मैट्रिक्स की रैंक या स्थिति है। यह शून्यता समीपवर्ती मैट्रिक्स के स्पेक्ट्रम में आइजेनवेल्यू 0 की बहुलता के बराबर है।
2. मैट्रॉइड सिद्धांत में ग्राफ की अशक्तता ग्राफ के साथ जुड़े उन्मुख घटना मैट्रिक्स M की शून्यता है। M की शून्यता $m - n + c$ द्वारा दी गई है, जहाँ, c ग्राफ के घटकों की संख्या है और $n - c$ उन्मुख घटना मैट्रिक्स की रैंक है। इस नाम का उपयोग शायद ही कभी किया जाता है; संख्या को आमतौर पर चक्र रैंक, साइक्लोमैटिक संख्या, या ग्राफ के सर्किट रैंक के रूप में जाना जाता है। यह ग्राफ के क्रॉनिक मैट्रोइड के रैंक या स्थिति के बराबर है। यह ग्राफ के लाप्लासियन मैट्रिक्स (Laplacian Matrix) की शून्यता के बराबर है, जिसे $L = D - A$ के रूप में परिभाषित किया गया है, जहां D वर्टेक्स डिग्री का विकर्ण मैट्रिक्स है; लाप्लासियन शून्यता चक्र रैंक के बराबर होती है क्योंकि $L = MM^T$ (M का अपना स्वयं का संक्रमण होता है)।

4.7 क्रुसकल्स कलन विधि और प्रिज़्म कलन विधि

माना कि G एक वैट आलेख है। (आलेख का हर कोर वास्तविक संख्या से जुड़ा हुआ है)। हमें आलेख G के न्यूनतम भार वाले जनक ट्री को ज्ञात करना है। ऐसे न्यूनतम भार वाले ट्री को ऑप्टिमल जनक ट्री (Optimal Spanning Tree) कहा जाता है। एक ट्री का वजन एक ट्री में कोरों के वैट का योग होता है और इसे $wt(T)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

यहाँ जनक ट्री को परीक्षणने के लिए तीन कलन विधि (Algorithm) हैं।

(*i*) क्रुसकल्स कलन विधि

(*ii*) प्रिज़्म कलन विधि

(*iii*) बोरुवका कलन विधि

टिप्पणी

क्रुसकल्स कलन विधि

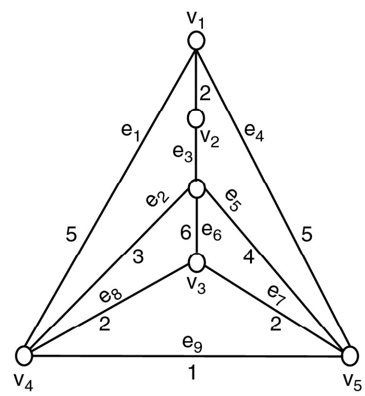
माना कि G, n शीर्षो का सम्बद्ध आलेख है।

चरण 1. कोरों को उनके भार के अनुसार आरोही क्रम में व्यवस्थित करें। कोर के न्यूनतम भार (मान ले) e_1 को चुनें।

चरण 2. $e_1, e_2, \ldots, e_k$ को इस तरह से चयनित करें कि इन कोरों $<e_1, e_2, \ldots, e_k>$ द्वारा गठित उप–आलेख अचक्रीय (Acyclic) हो, शेष कोरों में से e_{k+1} का चयन इस तरह करें कि बाकी सभी कोरों में से e_{k+1} का भार न्यूनतम हो।

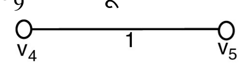
चरण 3. चरण 1 और 2 को दोहराएँ जब तक कि $(n-1)$ कोरों का चयन नहीं हो जाता है।

उदाहरण के लिए,

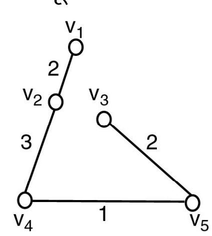


चरण 1. $e_9, e_7, e_8, e_3, e_2, e_5, e_4, e_1, e_6$

इन समीकरणों के बीच e_9 का न्यूनतम भार 1 है।



चरण 2. और चरण 3 को लागू करने के बाद, हमें जनक ट्री मिलती हैं,



जनक ट्री (Optimal Tree) का भार $= 2+3+1+2=8$ है।

प्रिज़्म कलन विधि

माना कि G एक सम्बद्ध आलेख है।

चरण 1. स्वेच्छ से एक शीर्ष v_1 का चुनाव करें और e_1 पर आपतित सभी कोरों में से न्यूनतम भार वाले कोर v_1 का चुनाव करें।

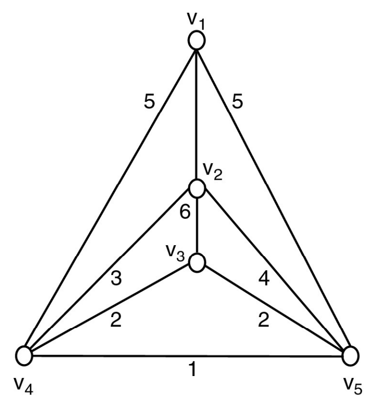
चरण 2. शीर्षों $v_1, v_2, .., v_k$ और कोरों $e_1, e_2, .., e_k$ को चुननें के बाद, कोर e_{k+1} को चुनें। e_{k+1} $\{v_1, v_2, .., v_k\}$ के किसी भी शीर्ष पर आपतित होगा और $v(G)-\{v_1, v_2, .., v_k\}$ से आपतित होगा।

लेकिन $v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}$ और कोरों $e_1, e_2, ..e_k, e_{k+1}$ के साथ बनने वाले उप–आलेख अचक्रीय (Acyclic) होता है और शेष कोरों में से e_{k+1} का भार न्यूनतम होता है।

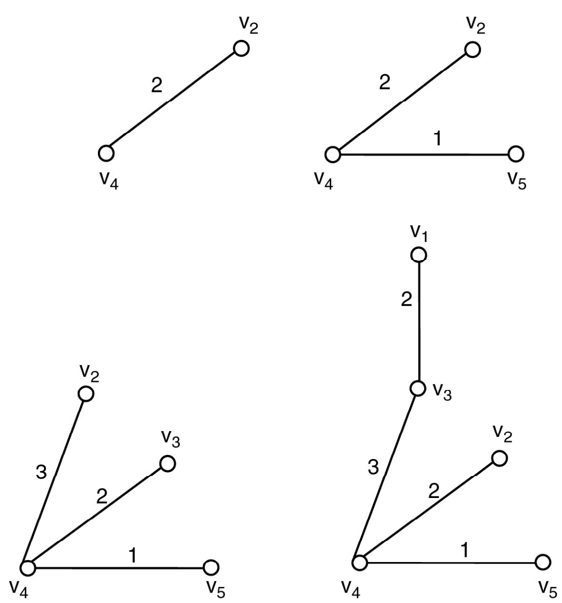
टिप्पणी

चरण 3. चरण 1 और 2 को दोहराएँ जब तक कि $(n-1)$ कोरों का चयन नहीं हो जाता है।

उदाहरण के लिए,



चरण 1. स्वेच्छा से शीर्ष v_3 चुनें और चरण 2 और चरण 3 को लागू करें। इस प्रकार हमें जनक ट्री प्राप्त होगी।



जनक ट्री का भार 8 है।

बोरुवका कलन विधि

बोरुवका कलन विधि एक वैट आलेख में न्यूनतम जनक ट्री ज्ञात करना है। बोरुवका ने इसे एक योग्य विद्युत नेटवर्क के निर्माण के लिए विकसित किया था।

आलेख में प्रत्येक शीर्ष अपनी सबसे हल्की कोर को परीक्षणता है, और फिर शीर्ष के अंत पर प्रत्येक हल्के कोर को अंकित किया जाता हैं। यह प्रक्रिया चलती है और पूरा आलेख एक बिंदु में आकर ढह जाता है। इस तरह, ट्री पाई गई सबसे हल्की कोरों से बनी होती है।

प्रत्येक शीर्ष पर एक–एक करके जांच कर कलन विधि शुरू होती है और पहले से जोड़े गए कोरों पर ध्यान दिए बिना, यह आलेख में एक शीर्ष से दूसरे तक सबसे हल्के कोर का चयन करता है और यह लगातार समूहों में एक तरह से उपस्थित होते रहते है और सभी शीर्षों की एक जनक ट्री प्राप्त होती है। सम्बद्ध शीर्षों के समुच्चय या प्रत्येक शीर्ष को 'घटक' कहा जाता है। इस कलन विधि का छद्मकोड (Pseudocode) नीचे दिया गया है:

1. एक सम्बद्ध आलेख G के साथ शुरू करें जिसमें अलग–अलग वजन के कोरों, और कोरों T का अरिक्त समुच्चय हो।
2. जब (T से सम्बद्ध G के शीर्षों (Disjoint) होते हैं)
   - o कोरों E के अरिक्त समुच्चय के साथ शुरू करें।
   - o (प्रत्येक कोर घटक में है) के लिए
     - कोरों S के अरिक्त समुच्चय के साथ शुरू करें।
     - घटक में प्रत्येक शीर्ष के लिए।
     - घटक में शीर्ष के सबसे हल्के कोर को दूसरे शीर्ष के घटक (Disjoint) S में जोड़ें
     - S से E में सबसे हल्का कोर को जोड़ें।
   - o परिणामी कोरो E के समुच्चय को T में जोड़ें।
3. कोर T का परिणामी समुच्चय, G का न्यूनतम जनक ट्री होता है।

बोरुवका कलन विधि समाप्ति से पहले बाहरी लूप की $O(\log V)$ पुनरावृत्तियों को लेता है, और $O(E\log V)$ समय लेता है, जहां G में E कोरों की संख्या, और V, शीर्षों की संख्या है।

प्रिज़्म की कलन विधि को बोरुवका के साथ जोड़कर तेज कलन विधि को प्राप्त किया जा सकता है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. ट्री को परिभाषित करें।
2. किसी ट्री की 'रूट' से क्या तात्पर्य है? नियत ट्री क्या है?
3. नियत ट्री में स्तर और ऊंचाई क्या होती है?
4. नोड (Node) 5 का स्तर क्या है?
5. निर्णय या डिसिशस ट्री को परिभाषित करें।

4.8 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. एक सम्बद्ध चक्रीय आलेख को ट्री कहा जाता है।
2. एक दिष्ट ट्री में, एक विशेष शीर्ष को रूट कहा जाता है, यदि उसकी घात शून्य होता है। एक ट्री अपनी रूट के साथ मिलकर आलेख बनाता है जिसे नियत ट्री कहा जाता है।

टिप्पणी

3. नियत ट्री में शीर्ष का स्तर रूट से शीर्ष तक की लंबाई होती है। नियत ट्री की ऊंचाई रूट से लेकर किसी भी शीर्ष तक सबसे लंबे पथ की लंबाई होती है।
4. इस शीर्ष के पथ की लंबाई 2 है। इसलिए इसका स्तर 2 है।
5. नियत ट्री जिसमें प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के शीर्ष पर एक उप–ट्री होती है और वह एक निर्णय के साथ जुड़ा होता है, तो फिर प्रत्येक संभावित परिणाम को निर्णय ट्री कहा जाता है।

4.9 सारांश

- एक आलेख G जिसमें कोई चक्र नहीं होता है, उसे अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) कहा जाता है।
- संबंधीत अचक्रीय आलेख (Acyclic Graph) G को ट्री कहा जाता है।
  (*i*) ट्री को अक्सर खुले (Open) आलेख के रूप में जाना जाता है।
  (*ii*) कोई भी ऑर्गनजैशनल या संगठनात्मक अनुक्रम या हाइरार्की भी ट्री का उदाहरण हो सकता है।
- एक दिष्ट ट्री (प्रत्येक कोर को एक दिशा द्वारा दर्शाया जाता है) में, एक विशेष शीर्ष को रूट कहा जाता है यदि वह शीर्ष शून्य डिग्री का हो। एक ट्री अपनी रूट के साथ मिलकर एक आलेख बनाता है जिसे नियत ट्री कहा जाता है। (ध्यान दें कि नियत ट्री में, हर कोर को रूट से विपरीत दिशा में निर्देशित किया जाता है।
- नियत ट्री में एक शीर्ष v का स्तर रूट से इस शीर्ष तक की पथ की लंबाई होती है। एक नियत ट्री की ऊंचाई रूट से किसी भी शीर्ष तक सबसे लंबे पथ की लंबाई है।
- ऊँचाई h की एक नियत k-ऐरी (Ary) ट्री संतुलित होती है यदि सभी शाखाएं का स्तर h या $(h - 1)$ होता है।
- नियत ट्री जिसमें प्रत्येक आंतरिक शीर्ष के शीर्ष पर एक उप–ट्री होती है और वह एक निर्णय के साथ जुड़ा होता है, तो फिर प्रत्येक संभावित परिणाम को निर्णय ट्री कहा जाता है।
- हम क्रमिक नियत ट्री का किसी भी अभिव्यक्ति (जैसे अंकगणित, यौगिक प्रस्ताव) का निरूपण करके उपयोग कर सकते हैं। एक क्रमिक नियत ट्री का उपयोग अभिव्यक्तियों का निरूपण करने के लिए किया जा सकता है, जहां, आंतरिक शीर्ष संक्रियों (Operations) का निरूपण करते हैं और शाखाओं चर या अंकों का निरूपण करते हैं।
- बोरुवका कलन विधि एक वैट आलेख में न्यूनतम जनक ट्री ज्ञात करता है। बोरुवका ने इसे एक योग्य विद्युत नेटवर्क के निर्माण के लिए विकसित किया था।

- बोरुवका कलन विधि समाप्ति से पहले बाहरी लूप की $O(\log V)$ पुनरावृत्तियों को लेता है, और $O(E\log V)$ समय लेता है, जहां G में E कोरों की संख्या, और V, शीर्षों की संख्या है।

4.10 मुख्य शब्दावली

- **अचक्रीय आलेख** : एक आलेख G जिसमें कोई चक्र नहीं है, उसे अचक्रीय आलेख कहा जाता है।
- **ट्री** : संबंधित अचक्रीय आलेख G को ट्री कहा जाता है।
- **त्रावर्सल एल्गोरिथम** : एक दिष्ट ट्री में एक विशेष शीर्ष को घात कहा जाता है यदि वह शीर्ष शून्य डिग्री का हो। एक ट्री अपनी घात के साथ मिलकर एक आलेख बनाता है, जिसे नियत ट्री कहा जाता है।

4.11 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. नियत ट्री क्या है?
2. k-ऐरी ट्री को परिभाषित कीजिए।
3. द्विआधारी ट्री क्या हैं?
4. ट्री के परीक्षण की व्याख्या कीजिए।
6. क्रुसकल्स कलन विधि क्या है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. नियत ट्री क्या है? एक ट्री में प्रत्येक दो शीर्षों अद्वितीय पथ से जुड़े प्रमेय की व्याख्या कीजिए।
2. नियत ट्री का स्तर और ऊंचाई क्या है? उदाहरण देकर इसकी व्याख्या कीजिए।
3. द्विआधारी ट्री क्या है? द्विआधारी की निर्णय ट्री एवं इसके त्राटक को परिभाषित कीजिए।
4. माध्यमार्ग–प्रथम परीक्षण और चौड़ाई–प्रथम परीक्षण क्या है? उदाहरण सहित इसको परिभाषित कीजिए।
5. हैमिल्टोनियम कलन विधि और प्रिम्स कलन विधि क्या है? ट्री को ज्ञात करने के लिए तीन कलन विधि को परिभाषित कीजिए।

4.12 सहायक पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

Pathak, Dr. H. K. 2017. विविक्त गणित (Discrete Mathematics). Meerut (UP): Shiksha Sahitya Prakashan.

Liu, C. L. 1977. *Elements of Discrete Mathematics*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Deo, Narsingh. 1999. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall of India.

Mott, J. L. 2007. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 2nd Edition. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.

Rosen, Kenneth. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Tremblay, Jean Paul and R. Manohar. 1975. *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science*. New York: McGraw-Hill Inc.

Singh, Y. N. 2005. *Mathematical Foundation of Computer Science*. New Delhi: New Age International Pvt. Ltd.

Malik, D. S. 2004. *Discrete Mathematical Structures: Theory and Applications*. London: Thomson Learning.

Haggard, Gary, John Schlipf and Sue Whiteside. 2006. *Discrete Mathematics for Computer Science*. California: Thomson Learning.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2008. *A Course in Abstract Algebra*, 3rd Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Grewal, B. S. 1998. *Higher Engineering Mathematics,* 34th Edition. New Delhi: Khanna Publishers.

Narayan, Shanti. 1996. *Differential Calculus,* 14th Edition. New Delhi: S Chand And Company Limited.

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics,* 7th Edition. Mumbai: Wiley Eastern Ltd.

Bali, N. P. 2007. *A Textbook of Engineering Mathematics*. New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2009. *Business Mathematics*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

टिप्पणी

इकाई 5 आलेख का आव्यूह निरुपण

संरचना

5.0 परिचय

ग्राफ या आलेख सिद्धांत में, एक आसत्रता मैट्रिक्स या आव्यूह एक वर्ग मैट्रिक्स है जिसका उपयोग परिमित आलेख का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है। मैट्रिक्स के तत्व इंगित करते हैं कि क्या युग्म ग्राफ या आलेख में आसत्रता हैं या नहीं। परिमित सरल ग्राफ के विशेष केस या प्रकरण में, आसत्रता मैट्रिक्स एक (0, 1) मैट्रिक्स है जो इसके विकर्ण पर शून्य के साथ है। एक ग्राफ के आसत्रता मैट्रिक्स को उसके भिन्न मैट्रिक्स से आसत्र किया जाना चाहिए, एक अलग मैट्रिक्स प्रतिनिधित्व जिसका तत्व इंगित करता है कि क्या वर्टेक्स (शीर्ष)–एज (सिरों) से जुड़ी घटना है कि नहीं और इसकी डिग्री मैट्रिक्स, जिसमें प्रत्येक शीर्ष की डिग्री के बारे में जानकारी उपलब्ध है। ग्राफ सिद्धांत में, एक प्लैनर ग्राफ एक ग्राफ है जिसे समतल में अतः स्थापित या एम्बेड किया जा सकता है। आलेख सिद्धांत का परिचय दिया गया है।

इस इकाई में आप आपतित आव्यूह, आसत्रता आव्यूह, प्रहार और उनके गुण तथा समतलीय या आयोजन आलेख का अध्ययन करेंगे।

5.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- आपतित आव्यूह की व्याख्या कर पाएंगे;
- आसत्रता आव्यूह का वर्णन कर पाएंगे;
- प्रहार और उनके गुणों को समझ पाएंगे;
- समतलीय या आयोजन आलेख की व्याख्या कर पाएंगे।

टिप्पणी

5.2 आपतित आव्यूह

किसी भी आलेख G के अनुकूल $V \times E$ आव्यूह होती है जिसे G की आपतित या इन्सिडेन्स (Incidence) आव्यूह कहा जाता है और $I(G) = [a_{ij}]_{V \times E}$ से निरूपित किया जाता है, जहां

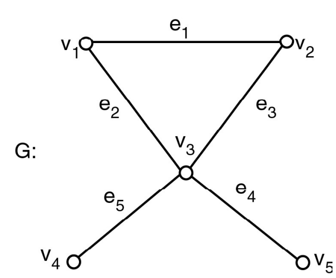
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ यदि } j \text{ कोर पर } i \text{वे शीर्ष पर आपतित होती है।} \\ 0, \text{ अन्यथा}, \end{cases}$$

एक और आव्यूह जो आलेख G के साथ जुड़ी हुई है, उसे आसत्रता आव्यूह कहते हैं, e को $A(G) = [b_{ij}]_{V \times V}$ द्वारा चिह्नित किया जाता है,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ यदि } j \text{ कोर पर } i \text{वे शीर्ष पर आपतित होती है।} \\ 0, \text{ अन्यथा}, \end{cases}$$

कुछ लेखकों ने a_{ij} को (0, 1, और 2) के गुणन के रूप में परिभाषित किया हैं, यानी v_i और e_j आपतित हैं; b_{ij} कोरों की संख्या v_i और v_j है।

उदाहरण के लिए,



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	0	0	0
v_2	1	0	1	0	0
v_3	0	1	1	1	1
v_4	0	0	0	0	1
v_5	0	0	0	1	0

$I(G)$, G का इन्सिडेन्स मैट्रिक्स है।

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0	0
v_3	1	1	0	1	1
v_4	0	0	0	1	0
v_5	0	0	0	1	0

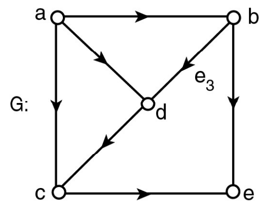
$A(G)$, G का इन्सिडेन्स मैट्रिक्स है।

एक निर्देशित आलेख का आसत्रता आव्यूह $A(G) = [b_{ij}]$, भी एक $V \times V$ आव्यूह होता है,

जहाँ $$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ अगर वहां } v_i \text{ से } v_j \text{ तक एक दिष्ट आलेख है।} \\ 0, \text{ अन्यथा}, \end{cases}$$

(इसी तरह निर्देशित आलेख के आपतित आव्यूह को भी परिभाषित किया जा सकता है)

उदाहरण के लिए,

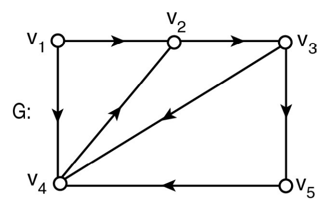


$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

उदाहरण 5.1: आलेख (i), (ii) और (iii) के आसत्रता आव्यूह को लिखिए।

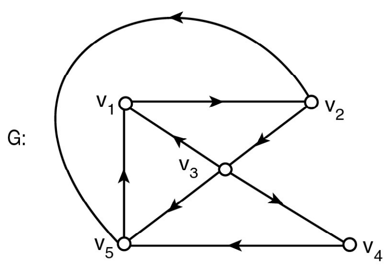
हल : दिए गए आलेखों के आसत्रता आव्यूह नीचे दिए गए हैं:

(i)



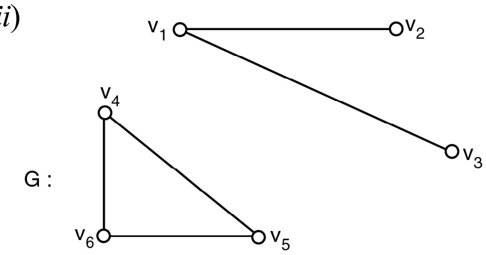
$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(ii)



$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(iii)



$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

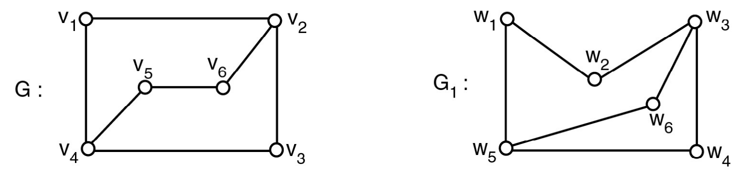
नोट्स : उदाहरण 5.1 से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि–

1. एक आसत्रता आव्यूह की सभी विकर्ण प्रविष्टियां शून्य होती हैं, यदि आलेख में कोई स्व–लूप नहीं होता है।
2. यदि G असंबद्ध है और इसके दो घटक हैं, तो इसके आसत्रता आव्यूह $A(G)$ को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है,

   $A(G)=\begin{bmatrix}A(G_1)&0\\0&A(G_2)\end{bmatrix}$, G_1 और G_2 घटक हैं।

इन आव्यूहों की मदद से, कोई भी यह सत्यापित कर सकता है कि दिए गए आलेख समरूपी हैं या नहीं।

उदाहरण 5.2: सत्यापित या सिद्ध करें कि G और G_1 समरूपी हैं या नहीं।



टिप्पणी

हल : पहले G और G_1 के आसत्रता आव्यूह लिखें।

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A(G_1)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

एक आव्यूह को अचर रखकर और पंक्तियों (Rows) और संबंधित स्तंभों पर क्रमपरिवर्तन को लागू करने से और चर आव्यूह पर भी क्रमपरिवर्तन लागू करने से अचर आव्यूह मिलेगा। तब दिया गया आलेख एक समरूपी होगा ।

यह $A(G)$ को अचर रखता है।

इसके अलावा G और G_1 के 4 शीर्षों की डिग्री 2 और दो शीर्षों की डिग्री 3 हैं। चूँकि $d(v_1)=2$ और v_1 डिग्री 2 के किसी भी अन्य शीर्ष से आसत्रता नहीं हैं, इसलिए G_1 में संगत शीर्ष या तो w_4 या w_6 होगा, यही G_1 में केवल डिग्री 2 का होता है जो डिग्री 2 के किसी अन्य शीर्ष से आसत्रता नहीं होता हैं।

सामान्यता की हानि के बिना, हम $v_1 \to w_6$ लेते हैं। मान लीजिए कि यह $v_1 \to w_6$ समरूपता नहीं लाता है तो हमें, $v_1 \to w_4$ लेना होगा ।

इसी तरह, G के अन्य शीर्षों के लिए, इसे निम्नानुसार रखा जा सकता है–

$v_2 \to w_3; v_3 \to w_4; v_4 \to w_5; v_5 \to v_1;\ v_6 \to v_2$.

इस प्रकार, हम $A(G_1)$ को निम्न रूप में संशोधित कर सकते हैं,

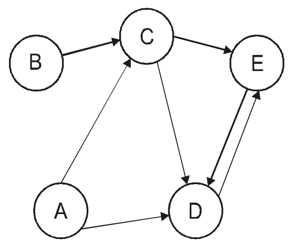
$$A(G_1)=\begin{array}{c|c} & w_6\ \ w_3\ \ w_4\ \ w_5\ \ w_1\ \ w_2 \\ \hline \begin{matrix}w_6\\w_3\\w_4\\w_5\\w_1\\w_2\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$A(G)=A(G_1)$ और $G \cong G_1$

5.3 आसत्रता आव्यूह

कंप्यूटर में, एक आलेख को दो तरीकों से दर्शाया जा सकता है, जैसे, आसत्रता आव्यूह और आसत्रता सूची। आसत्रता आव्यूह सरणी (Arrays) का उपयोग करता है जबकि आसत्रता सूची में आलेख के निरूपण के लिए जुड़ी हुई सूचियों का उपयोग किया जाता है।

आसत्रता को अदिष्ट या अन्डिरेक्टिड आलेख की सहायता से समझाया जा सकता है जैसा कि चित्र 5.1 में दिखाया गया है।



चित्र 5.1 *अदिष्ट आलेख*

अदिष्ट आलेख में, आलेख की कोरें एक शीर्ष से दूसरे शीर्ष तक दिशा का संकेत नहीं देती है ।

आसत्रता आव्यूह

आसत्रता आव्यूह एक आलेख के शीर्षों की सरणी है। निर्देशित आलेख और अदिष्ट आलेख दोनों के लिए आव्यूह को बनाया जा सकता है। अदिष्ट आलेख G के लिए आसत्रता आव्यूह को वर्णित प्रक्रिया के अनुसार बनाया जा सकता है।

यदि G में शीर्ष v_i से v_j तक एक कोर है, तो अवयव a_{ij} को A में 1 के रूप में चिह्नित किया जाता है, अन्यथा इसे शून्य के रूप में चिह्नित किया जाता है। यह भी ध्यान दें कि चूंकि यह एक अदिष्ट आलेख है।

इसलिए a_{ij}, a_{ji} के बराबर होता है। अगर a_{ij},1 है, तो a_{ji} भी 1 होगा और इसके विपरीत। तालिका 5.1 में अदिष्ट आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह को दर्शाता गया है।

तालिका 5.1 *अदिष्ट आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह*

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	0	1
C	1	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1
E	1	1	0	1	0

निर्देशित आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह को उसी तरह से परिभाषित किया गया है जैसे कि यह अदिष्ट आलेख में परिभाषित किया गया है केवल इस तथ्य के अलावा कि a_{ij} और a_{ji} बराबर नहीं होते है। इसका मतलब यह है कि अगर a_{ij} एक है, तो a_{ji} शून्य होगा। तालिका 5.2 में निर्देशित आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह को दर्शाया गया है।

टिप्पणी

तालिका 5.2 *निर्देशित आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह*

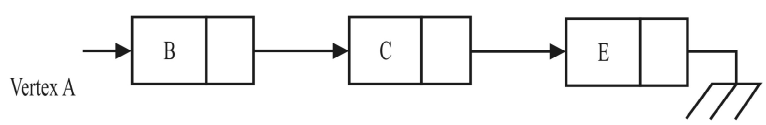
	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	0	0	1	0	1
C	1	0	0	0	0
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	0	0

आसत्रता आव्यूह में इसके साथ जुड़े कई कमियां भी हैं। उनमें से कुछ इस प्रकार हैं:

1. 'n' शीर्षों वाले एक आलेख के लिए, एक आसत्रता आव्यूह को इसे दर्शाने के लिए n^2 अवयवों की आवश्यकता होती है।
2. n शीर्षों के एक निर्देशित आलेख में, $n^2–e$ कोरें शून्य होती हैं। इसी प्रकार, कम कोरों वाले आलेख में, आव्यूह विरल या स्पार्स हो जाता है। इसका मतलब है कि कम कोरों वाले आलेख में आव्यूह में बहुत सारे शून्य होते है।
3. एक आसत्रता आव्यूह समानांतर कोरें का निरूपण नहीं कर सकता है।

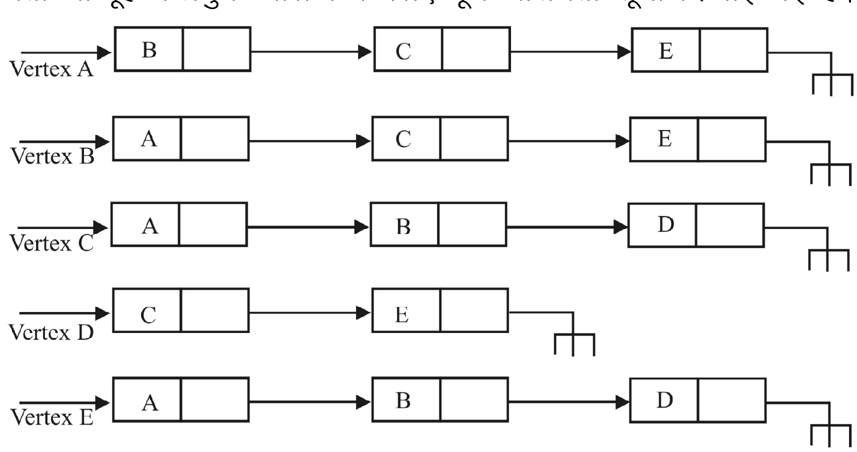
आसत्रता सूची

आसत्रता आव्यूह की हानि से बचने के लिए, आसत्रता सूचियों का उपयोग किया जाता है। ये विशेष रूप से विरल आव्यूह के केस में ज्यादा उपयोगी होते हैं। ये आलेख G के सभी शीर्षों की आसत्रता शीर्षों की लिंक सूची का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 5.1 को अदिष्ट आलेख के लिए दिखाया गया है जबकि चित्र 5.2 में शीर्ष A के लिए आसत्रता सूची दिखाई गई है ।



चित्र 5.2 *में शीर्ष A के लिए आसत्रता सूची*

ऐसा इसलिए है, क्योंकि A के आसत्रता में शीर्षों B, C और E हैं। चित्र 5.3 में आसत्रता आव्यूह में प्रयुक्त आलेख के लिए पूर्ण आसत्रता सूची दिखाई गई है।



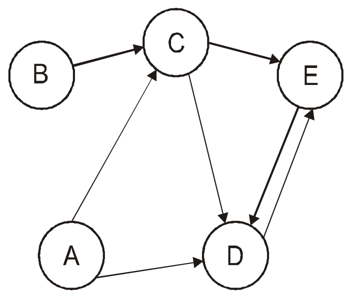
चित्र 5.3 *पूर्ण आसत्रता सूची*

टिप्पणी

यह आसत्रता सूची निरूपण कम मेमोरी या स्मरण का उपयोग करता है। हालांकि, यदि शीर्षों और कोरों की संख्या बढ़ जाती है, तो आसत्रता सूची अक्षम हो जाती है, अर्थात, यह अधिक मेमोरी या स्मरण का उपयोग करने लगती है क्योंकि सूचक को बनाए रखने के लिए खर्चा (ओवरहेड) बढ़ जाता है। C भाषा में, आसत्रता सूची को सूचक (Pointers) की सरणी द्वारा दर्शाया जाता है, जहां प्रत्येक सूचक शीर्षों की लिंक सूची की ओर इंगित करते है जो एक विशेष शीर्ष से आसत्रता होते है।

पथ या मार्ग आव्यूह

पथ या मार्ग आव्यूह एक निश्चित लंबाई के पथ को दर्शाता है। आसत्रता नोड्स को एक सरल निर्देशित आलेख में दिखाने के लिए हम आसत्रता आव्यूह का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, निम्न सरल निर्देशित आलेख G पर विचार करें, जैसा कि चित्र 5.4 में दिखाया गया है।



चित्र 5.4 *सरल निर्देशित आलेख G*

निम्नलिखित तालिका 5.3 द्वारा इस सरल निर्देशित आलेख G के लिए आसत्रता आव्यूह को दर्शाया गया है।

तालिका 5.3 *सरल निर्देशित आलेख G के लिए आसत्रता आव्यूह*

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	1	0
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0

आसत्रता आव्यूह आसत्रता नोड्स के बीच संबंधों का वर्णन करता है। इनके अलावा, अन्य संबंध भी नोड्स के बीच उपस्थित होते हैं। उदाहरण के लिए, यदि हम तीन नोड्स B, C और E पर विचार करते हैं तो हम पाते हैं कि $<B, C> = 1$ और भी $<C, E> = 1$ है। इसलिए एक लिंक C के माध्यम से B, E तक निर्देशित है। इस प्रकार के संबंधों को दिखाने के लिए हम पथ आव्यूह की अवधारणा का उपयोग करते हैं। नोड B, C और E के बीच संबंध स्थापित करने के लिए हम केवल दो नोड्स का उपयोग करेंगे और इसलिए हम कह सकते हैं कि यह लंबाई 2 का एक मार्ग या पथ है। लंबाई 2 के ऐसे सभी मार्गों को ध्यान में रखते हुए हम लंबाई 2 में पथ आव्यूह का उपयोग करके उनको दर्शा सकते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

टिप्पणी

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	0	1	1
C	0	0	0	1	1
D	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1

आगे बढ़ते हुए, हम उपरोक्त आलेख में लंबाई 3 के सभी पथों या मार्गों पर भी विचार कर सकते है ताकि निम्नलिखित लंबाई 3 की पथ या मार्ग आव्यूह को प्राप्त किया जा सकेः

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	0	1	1
C	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0

इस तरह, हम एक आलेख में नोड्स के बीच पथ दिखाने के लिए निश्चित लंबाई के पथ आव्यूह को परिभाषित करते हैं यदि वे उपस्थित हो ।

5.4 प्रहार और उनके गुण

मान लीजिए कि G एक सम्बद्ध आलेख है। आइए पहले हम आलेख G के लिए कट–कोर (Cut-Edge या Bridge) और कट–शीर्ष (Cut-Vertex) की परिभाषा को ध्यान से करें। यदि G में एक कोर e है और G-e असम्बद्ध है, तो e, G का कट–कोर होता है। आगे, यदि G में एक शीर्ष v है, और $G–v$ असम्बद्ध है, तो v, G का कट–शीर्ष होता है।

परिभाषा

कट–कोर समुच्चय : एक सम्बद्ध आलेख G के कोर समुच्चय के कोर उप–समुच्चय S को G का कट–कोर समुच्चय या कट–समुच्चय कहा जाता है, यदि

(*i*) $G - S$ असम्बद्ध हो ।

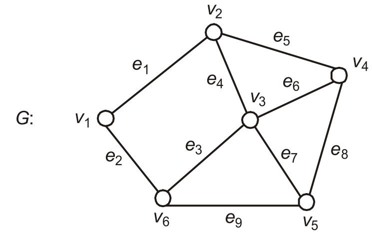
(*ii*) $G - S_1, S$ का प्रत्येक उचित उपसमुच्चय S_1 सम्बद्ध हो।

शीर्ष कट–समुच्चय : G के शीर्ष समुच्चय के एक उपसमुच्चय u को शीर्ष कट–समुच्चय कहा जाता है यदि,

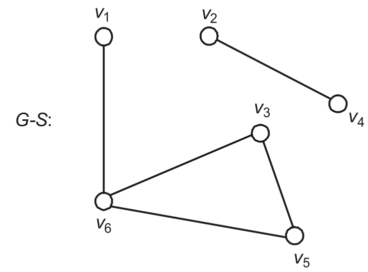
(*i*) $G - u$ असम्बद्ध होता है।

(*ii*) $G - u_1$, u का प्रत्येक उचित उप–समुच्चय u_1 सम्बद्ध हो ।

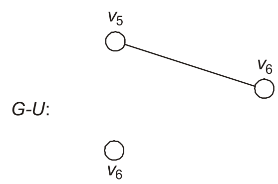
उदाहरण के लिए,



(i) $S = \{e_1, e_4, e_6, e_8\}$ एक कट–समुच्चय है।



(ii) $u = \{v_1, v_3, v_5\}$ एक शीर्ष–कट–समुच्चय है



नोट : सम्बद्ध आलेख के लिए, एक से अधिक कट–समुच्चय हो सकता हैं। उदाहरण के लिए, उपरोक्त आलेख पर विचार करें। G के कुछ कट–समुच्चय हैं,

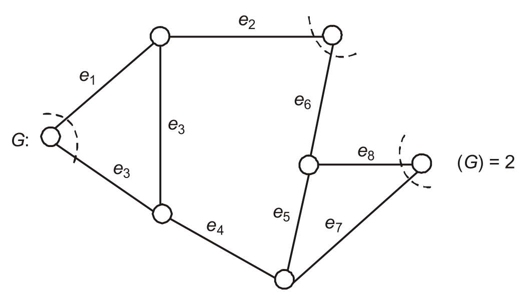
$$S_1 = \{e_1, e_4, e_6, e_8\}$$

$$S_2 = \{e_1, e_2\},\ S_3 = \{e_1, e_3, e_9\}$$

उपरोक्त टिप्पणी से, हम एक आलेख के लिए दो और मापदंडों को प्रयुक्त करने के लिए अनिवार्य हो जाते हैं। कोर–कनेक्टिविटी (Edge-Connectivity) $\lambda(G)$ और शीर्ष कनेक्टिविटी (Vertex Connectivity) $k(G)$ है।

कोर कनेक्टिविटी : आलेख की कोर कनेक्टिविटी $\lambda(G)$, G के कोरों के समुच्चय S की न्यूनतम कार्डिनैलिटी (Cardinality) इस तरह होती है कि $G - S$ असम्बद्ध हो, अर्थात, सम्बद्ध आलेख में कोरें (रेखा) कनेक्टिविटी आलेख में एक न्यूनतम कट–समुच्चय में कोरें की संख्या होती है (चित्र 5.5 देखें)।

उदाहरण के लिए,



चित्र 5.5 *कोर–कनेक्टिविटी*

नोट्स

1. यदि G एक ट्री है, तो $\lambda(G) = 1$ होगा।
2. G के पास $\lambda(G) = 0$ होगा अगर G असम्बद्ध या तुच्छ होगा ।

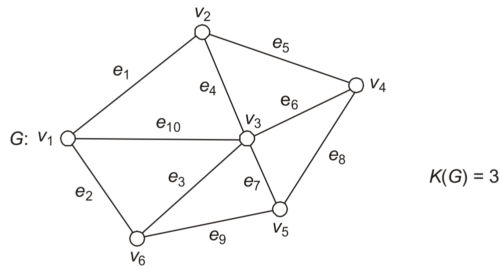
शीर्ष कनेक्टिविटी (Vertex Connectivity) : आलेख G की शीर्ष कनेक्टिविटी $K(G)$, शीर्षों की वह न्यूनतम संख्या है जिनको हटाने से G असम्बद्ध या तुच्छ आलेख

टिप्पणी

बनता है, अर्थात, न्यूनतम शीर्ष कट में शीर्षों की संख्या को आलेख की कनेक्टिविटी कहा जाता है (संदर्भ के लिए चित्र 5.6 देखें)।

टिप्पणी

उदाहरण के लिए,



चित्र 5.6 *शीर्षों कनेक्टिविटी*

प्रमेय 5.1: प्रत्येक आलेख G के लिए, $K(G) \leq \lambda\ (G) \leq \delta(G)$

प्रमाण : मान लीजिए कि G में v एक न्यूनतम डिग्री का शीर्ष है, अर्थात, $d(v) = \delta(G)$.

G में आपतित v से $\delta(G)$ कोरें हटाने से एक आलेख G_1 बनता है, जिसमें v वियुक्त हो जाता है। स्पष्ट रूप से, G असम्बद्ध या तुच्छ हो जाता है।

$\therefore \quad \lambda(G) \leq \delta(G)$ ...(1)

उपप्रमेय : $K(G) \leq \delta(G)$

यदि, $\delta(G) = 0$ है, तो G असम्बद्ध हो जाता है।

$\therefore \quad K(G) = 0.$

यदि $\delta(G) = 1$ है, तो G एक सम्बद्ध आलेख बनता है जिसमें कट–कोर है।

इसलिए, या तो G, K_2 से समरूपी होगा या G सम्बद्ध आलेख होगा जिसमें कम से कम एक कट–शीर्ष है।

दोनों केसों में, $K(G) = 1$ होता है ।

अब, मान लेते हैं कि $\lambda(G) \geq 2$ है। मान लेते हैं कि G में S, $\lambda(G)$ कोरों का कट समुच्चय है और $e = xy$, S में एक कोर है । यदि $S - \{e\}$ कोरों को G से हटा दिया जाता है, तो परिणामस्वरूप उप–आलेख H_1 सम्बद्ध होता है और इसमें e एक कट–कोर के रूप में होता है। अब $S - \{e\}$ में प्रत्येक और प्रत्येक छोर के लिए x और y से भिन्न एक आपतित शीर्ष का चयन करें। इन शीर्षों को H_1 से निकालने पर, परिणामी उप–आलेख H_2 असम्बद्ध होगा।

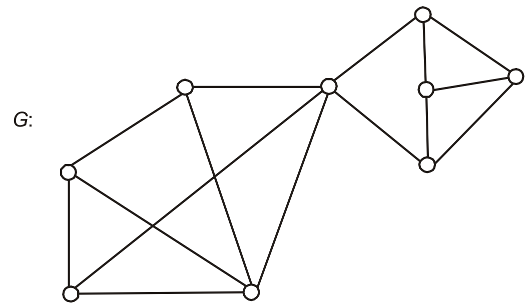
फिर $K(G) \leq \lambda(G) - 1 < \lambda(G)$

मान लीजिए कि उप–आलेख H_2 सम्बद्ध है, तो H_2, K_2 से समरूपी होगा या उप–आलेख H_2 में कट–शीर्ष होगा, क्योंकि H_2, H_1 से जनित एक उप–आलेख है। किसी भी स्थिति में, वहाँ H_2 का एक शीर्ष उपस्थित होगा जिसको हटाने से असम्बद्ध आलेख मिलेगा। इसलिए,

$K(G) \leq \lambda(G)$ ...(2)

टिप्पणी

समीकरणों (1) और (2) से, $K(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$



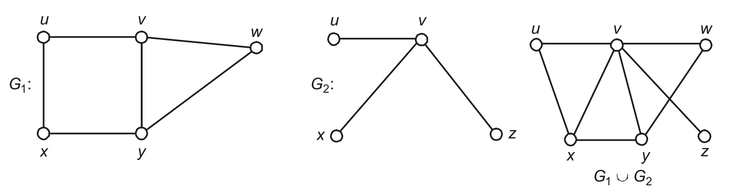
इस चित्र में, $K(G) = 1; \lambda(G) = 3$ और $\delta(G) = 3$ है ।

***n*–कोर सम्बद्धता** : एक आलेख G, n–कोर सम्बद्धता $(n \ge 1)$ होता है अगर यदि $\lambda(G) \ge n$, और G n–सम्बद्ध होता है यदि $K(G) \ge n$ होता है।

आलेख पर संक्रियाएं

(*i*) दो सरल आलेख $G_1 = (V_1, E_1)$ और $G_2 = (V_2, E_2)$ का संघ (Union) एक सरल आलेख होता है जिसका शीर्ष समुच्चय $V_1 \cup V_2$ और कोर समुच्चय $E_1 \cup E_2$ होता है और इसे $G_1 \cup G_2$ द्वारा निरूपित किया जाता है जैसा कि चित्र 5.7 में दिखाया गया है।

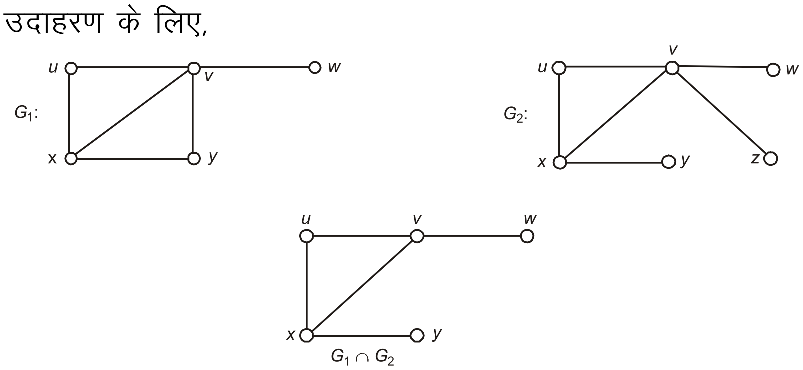
उदाहरण के लिए



चित्र 5.7 *दो सरल आलेखों का संघ*

(*ii*) दो सरल रेखांकन $G_1 = (V_1, E_1)$ और $G_2 = (V_2, E_2)$ का सर्वनिष्ठ (Intersection) एक सरल आलेख होता है जिसका शीर्ष समुच्चय $V_1 \cap V_2$ और कोर समुच्चय $E_1 \cap E_2$ होता है और इसे $G_1 \cap G_2$ द्वारा निरूपित जाता है। याद रखें कि $G_1 \cap G_2, V_1 \cap V_2$ हमेशा गैर–रिक्त होते है (चित्र 5.8 देखें)।

उदाहरण के लिए,



चित्र 5.8 *दो सरल आलेख के लिए प्रतिच्छेदन*

टिप्पणी

(*iii*) दो आलेखों G_1 और G_2 का वलय योग एक आलेख होता है जिसमें शीर्ष समुच्चय $V_1 \cup V_2$ और कोरें या तो G_1 में या G_2 में होती हैं, लेकिन दोनों में नहीं होती है और इसे $G_1 \oplus G_2$ द्वारा निरूपित किया जाता है, अर्थात,

$$G_1 = (V_1, E_1);\ G_2 = (V_2, E_2)$$

तो, $$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \Delta E_2)$$

जहां, Δ सममित अंतर हैः

$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$$

5.5 समतलीय या आयोजन आलेख

परिचय : एक आलेख G को समतलीय कहा जाता है अगर G का कोई ज्यामितीय निरूपण उपस्थित हो, जो एक सतह (Plane) पर इस तरह बनाया जाता है कि इसकी दो कोरें आपस में मिलती नहीं हो (एक शीर्ष पर कोरों का मिलना सर्वनिष्ठ नहीं कहलाता है)। अगर कोरों को आपस में पार किए बिना एक आलेख के सतह (Plane) पर नहीं बनाया जा सकता है, तो उसे असमतलीय कहा जाता है। किसी भी सतह पर एक आलेख के ज्यामितीय निरूपण की एक आलेख इस प्रकार हो कि कोई भी कोरें आपस में काटती नहीं हो, तो उसे एम्बेडिंग (Embedding) कहा जाता है।

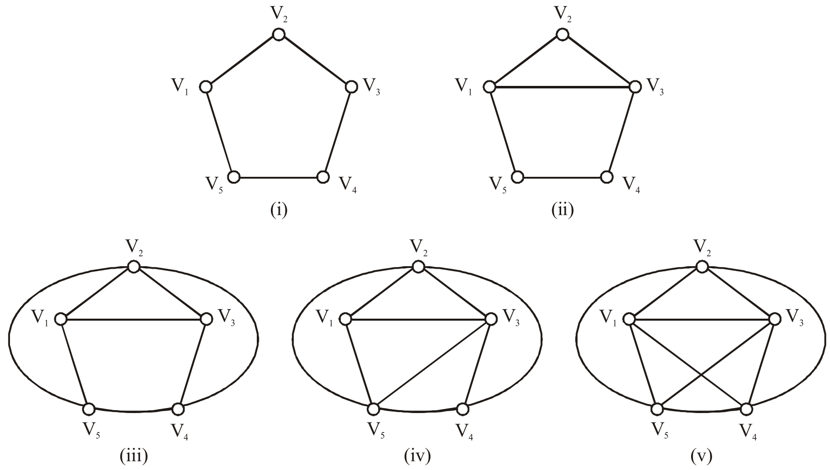
नोटः हमें यह दिखाने के लिए कि G असमतलीय है, यह सिद्ध करना होता है कि G की सभी सकारात्मक ज्यामितीय निरूपण में से किसी को भी सतह पर अतः स्थापित या एम्बेडेड (Embedded) नहीं किया जा सकता है।

प्रमेय 5.2 : सूक्ष्म शीर्षों का पूर्ण आलेख असमतलीय होता है।

प्रमाण : मान लीजिए कि एक पूर्ण आलेख में पाँच शीर्षों v_1, v_2, v_3, v_4 और v_5 है। पूर्ण आलेख की परिभाषा का उपयोग करते हुए, हमारे पास $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$ से v_1, एक परिपथ (सर्किट) होना चाहिए –, यानी, एक या पंचकोण पेंटागन (Pentagon) है। इस पेंटागन (Pentagon) को कागज के समतल को दो क्षेत्रों में विभाजित करना चाहिए, एक अंदर और दूसरा बाहर।

चूंकि v_1, v_3 से कोर के माध्यम जुड़ा हुआ है, इसलिए इस कोर को पेंटागन के अंदर या बाहर खींचा जा सकता है (कोरों को काटे बिना जो पहले खींची गई थी)। मान लीजिए कि, हम पेंटागन के अंदर v_1 से v_3 तक एक रेखा को खींचना चाहते हैं. हमें उसके लिए v_2 से v_4 तक एक कोर और v_2 से v_5 तक दूसरी कोर को खींचना होगा। चूंकि पहले से ही खींचे गए कोर के ऊपर से इन कोर के किसी को भी पार किए बिना पेंटागन के अंदर खींचा जाना संभव नहीं है, इसलिए हम इन दोनों कोरों को पेंटागन के बाहर खींचते हैं। v_2 और v_4 के बीच कोर को पार किए बिना v_3 और v_5 को जोड़ने वाले कोर को पेंटागन के बाहर नहीं खींचा जा सकता है। इसलिए v_3 और v_5 को पेंटागन के अंदर एक कोर के साथ सम्बद्ध करना होगा

टिप्पणी



नोट : पूर्ण आलेख कुछ नहीं केवल एक साधारण आलेख होता है जिसमें प्रत्येक शीर्ष को दूसरे शीर्ष से एक कोर के माध्यम से जोड़ा जाता है ।

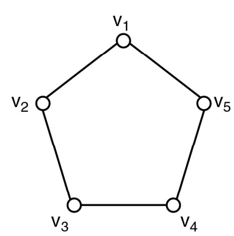
प्रमेय 5.3: कुर्टोवस्की (पोलिश गणितज्ञ) का दूसरा आलेख भी असमतलीय है। ($k_{3,3}$ असमतलीय होता है)

नोट: एक सतह (Plane) में, एक संतत गैर–स्व–प्रतिच्छेदन वक्र जिसकी उत्पत्ति और अंतत एक ही बिंदु पर हो, उसे जॉर्डन वक्र कहा जाता है। यदि j सतह (Plane) π में जॉर्डन वक्र है, तब $\pi - j$ दो असंयुक्त या डिस्जॉइन्ट (Disjoint) सम्बद्ध खुले समुच्चय का एक संघ होता है जिसे j का आंतरिक और बाहरी कहा जाता है।

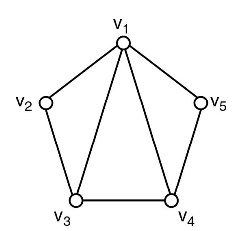
उदाहरण 5.3: सिद्ध कीजिए कि K_5 असमतलीय होता है।

हल:

चरण 1. 5 शीर्षों पर एक परिपथ या सर्किट c बनाएं। यह परिपथ c सतह (Plane) को दो भागों में विभाजित करता है जिन्हें आंतरिक और बाहरी क्षेत्र कहा जाता है।

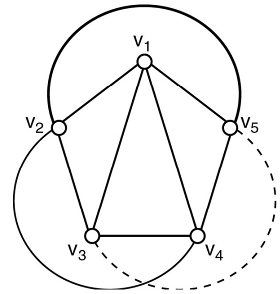


चरण 2. कोरों v_1v_3, v_1v_4 को अंदर बनाएं। हम बिना कोई कोर काटे, c के अंदर कोई अन्य कोरें को नहीं बना सकते हैं।



अब, c के अंदर कोर v_2v_5, v_2v_4 को बनाएं। लेकिन कोर v_3v_5 को c के कोर को काटे बिना, c के आंतरिक या बाहरी हिस्से में नहीं बनाया जा सकता है

टिप्पणी



इस प्रकार, K_5 असमतलीय है।

हम निम्नलिखित तरीके से $K_{3,\,3}$ को असमतलीय सिद्ध कर सकते हैं

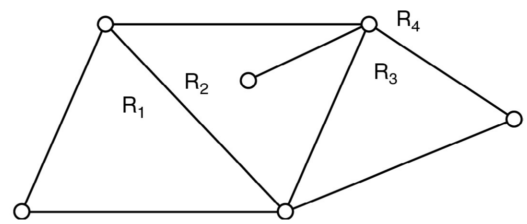
प्रमाण : मान लें कि $K_{3,3}$ असमतलीय है। मान लीजिए कि $K_{3,3}$ के शीर्ष $\{v_1,...,v_6\}$ है। मान लीजिए कि $P = \{v_1, v_3, v_5\}$ और $Q = \{v_2, v_4, v_6\}$ है।

मान लीजिए कि C में एक चक्र $v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5\, v_6\, v_1$ है। यह एक जोर्डन वक्र (Curve) है। अन्य तीन कोरें v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6, चक्र C के जीवा (Chords) हैं। इसलिए C के आंतरिक या बाहरी भाग में तीन में से दो जीवा (Chords) होनी चाहिए। मान लेते हैं कि C में दो जीवा (Chords) हैं। इन दो जीवा (Chords) को एक दूसरे को पार करना चाहिए, जो एक विरोधाभास है, इसलिए, $K_{3,3}$ असमतलीय है ।

समोच्च (Contour) : मान लीजिए कि G एक सम्बद्ध समतलीय आलेख है। G का क्षेत्र आलेख के कोरों से घिरा हुआ सतह का डोमेन है, इस तरह है कि किसी भी कोरें को पार किए बिना इसमें किसी भी दो बिंदु को एक रेखा से जोड़ा जा सकता है। एक क्षेत्र को छूने या स्पर्श वाले कोरें में एक साधारण चक्र होता है जिसे क्षेत्र का समोच्च (Contour) कहा जाता है। दो क्षेत्रों को निकटवर्ती कहा जाता है कि यदि दो क्षेत्रों के समोच्च (Contour) के बीच कम से कम एक कोर समरूप (Common) हो।

उदाहरण के लिए,

G:



G, एक समतलीय आलेख : R_i, $i = 1, 2, 3, 4$, G का क्षेत्र हैं। यहां R_4 अनंत क्षेत्र है।

यूलर सूत्र (Euler's Formula)

यदि G, एक सम्बद्ध समतलीय आलेख में n शीर्षों, e कोरें और r क्षेत्र हैं, तो, $n - e + r = 2$ होगा।

प्रमाण : e, कोरें की संख्या, पर आगमन इंडक्शन द्वारा,

यदि $e = 0$ है, तो $G = K_1$(G सम्बद्ध है)

$n = 1$; $r = 1$ (परिमित रूप) $\quad\therefore n - e + r = 1 - 0 + 2 = 2$

यदि $e = 1$ है, तो $n = 2$ (G सम्बद्ध है) और $r = 1$ होगा।

$\therefore\ n - e + R = 2 - 1 + 1 = 2$

यह परिणाम $e = 0$ और $e = 1$ के लिए भी सही होगा ।

मान लीजिए कि यह परिणाम सभी सम्बद्ध समतलीय आलेख $(e - 1)$ कोरों के लिए सही है।

मान लीजिए कि G, e कोरों के साथ एक सम्बद्ध समतलीय आलेख है।

केस (*i*) : यदि G, e कोरों वाली एक ट्री है तो $n = e + 1$ [n शीर्षों के ट्री में $(n\text{–}1)$ कोरें होती है]।

$r = 1$

$\therefore n - e + r = e + 1 - e + 1 = 2.$

केस (*ii*): यदि G एक ट्री नहीं है।

चूंकि G सम्बद्ध है, इसमें चक्र होंगे।

मान लीजिए कि कुछ सरल परिपथ G में e_1 एक कोर है ।

मान लीजिए कि G_1 एक आलेख है जिसको G में से e_1 को हटाकर प्राप्त किया गया है, यानी $G_1 = G - e_1$

अब, G_1 में शीर्षों की संख्या = n

G_1 में कोरों की संख्या = $e\text{–}1$

G_1 में क्षेत्रों की संख्या = $r\text{–}1$

चूंकि G_1 में e कोरें कम है तो परिणाम G_1 के लिए भी सही होगा ।

इंडक्शन परिकल्पना के द्वारा, $n_1\text{–}e_1\text{+}r_1 = 2$, जहाँ n_1 शीर्षों की संख्या है, e_1 कोरों की संख्या और r_1, G_1 में क्षेत्रों की संख्या है।

$$\therefore n\text{–}(e\text{–}1) + r\text{–}1 = 2 \Rightarrow n\text{–}e + r = 2.$$

सभी केसों में, परिणाम सही है।

उपप्रमेय : यदि G बिना लूप के एक जुड़ा हुआ सरल समतलीय आलेख है और इसमें n शीर्षों, $e \geq 2$ कोरें और r क्षेत्र हैं, तो, $3/2\ r \leq e \leq 3n\text{–}6$ होगा।

प्रमाण : यदि $r = 1$ है, तो $3/2 \leq e \leq 3n\text{–}6$ सत्य है, क्योंकि $e \geq 2$

यदि $r > 1$, तो K परिमित क्षेत्रों के समोच्च (Contour) में कोरों की संख्या है।

चूंकि G सरल है, प्रत्येक क्षेत्र (परिमित) कम से कम 3 कोरें से घिरा हुआ होगा।

इसलिए $K \geq 3\ (r\text{-}1)$ (4)

लेकिन, एक समतलीय आलेख में, कोरें कम से कम के समोच्च के दो क्षेत्रों में होती हैं और कम से कम 3 कोरें अनंत क्षेत्र को छूती हैं।

$\therefore \qquad K \leq 2e - 3$ (5)

टिप्पणी

समीकरणों (4) और (5) से, $3r-3 \leq k \leq 2e-3$

$\Rightarrow 3r-3 \leq 2e-3$

$\Rightarrow 3r \leq 2e \Rightarrow 3/2\, r \leq e$ (6)

चूंकि G समतलीय है, इसलिए $n-e+r=2$ यूलर सूत्र से,

$\therefore n-e+2/3\, e \geq 2$ [समीकरण (6) $r \leq 2/3\, e$ से,]

$\Rightarrow 3n-3e+2e \geq 6$

$\Rightarrow -e \geq -3n+6$

$\Rightarrow e \leq 3n-6$ (7)

समीकरणों (6) और (7) से, $3/2r \leq e \leq 3n-6$

उदाहरण 5.4 : (i) सिद्ध कीजिए कि K_5 असमतलीय होता है।

हल : मान लीजिए कि K_5 समतलीय है, तो उपरोक्त उप–प्रमेय द्वारा, $e \leq 3n-6$

K_5 में, $n = 5, e = 10;$

$10 \leq 3\times5-6 = 9$ जो विसंगति है,

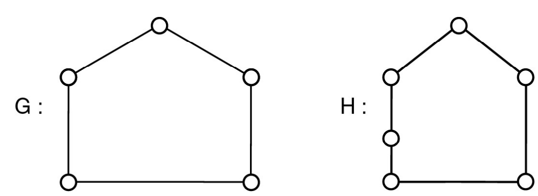
K_5 असमतलीय है

नोट : $K_5, K_{3,3}$ को कुर्टोवस्की का क्रमशः पहला आलेख, दूसरा आलेख कहा जाता है।

उपप्रमेय : यदि G, एक सरल सम्बद्ध समतलीय आलेख में n शीर्षों, e कोरें और r क्षेत्र हैं और इसमें कोई त्रिभुज नहीं है, तो $2r \leq e \leq (2n-4)$ होगा

उपखंडः एक आलेख G का उपखंड G की कोरें में शीर्षों (डिग्री 2) को सम्मिलित करके प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण के लिए,



H, G का उपखंड है।

कुर्टोवस्की प्रमेय (Kuratowski Theorem): एक आलेख समतलीय होता है यदि इसमें कोई उप–आलेख नहीं हो यानी समतुल्य K_5 या $K_{3,3}$ का उपखंड होना चाहिए।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. आव्यूहों की मदद से सत्यापित कीजिए कि आलेख समरूपी है या नहीं?
2. आसत्रता आव्यूह को परिभाषित कीजिए।
3. निर्देशित आलेख के लिए आसत्रता आव्यूह की व्याख्या कीजिए।
4. आसत्रता सूची की व्याख्या कीजिए।
5. पथ आव्यूह का वर्णन कीजिए।
6. कोर कनेक्टिविटी को परिभाषित कीजिए।
7. समतलीय तथा असमतलीय की व्याख्या कीजिए।
8. समोच्च का वर्णन कीजिए।

5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. यदि G असंबद्ध है और इसके दो घटक हैं, तो इसके आसत्रता आव्यूह $A(G)$ को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है,

   $A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$, G_1 और G_2 घटक हैं।

   इन आव्यूहों की मदद से, कोई भी यह सत्यापित कर सकता है कि दिए गए आलेख समरूपी हैं या नहीं।
2. आसत्रता आव्यूह एक आलेख के शीर्षों की सरणी है। निर्देशित आलेख और अदिष्ट आलेख दोनों के लिए आव्यूह को बनाया जा सकता है। अदिष्ट आलेख G के लिए आसत्रता आव्यूह को वर्णित प्रक्रिया के अनुसार बनाया जा सकता है।
3.
   - 'n' शीर्षों वाले एक आलेख के लिए, एक आसत्रता आव्यूह को इसे दर्शाने के लिए n^2 अवयवों की आवश्यकता होती है।
   - n शीर्षों के एक निर्देशित आलेख में, $n^2–e$ कोरें शून्य होती हैं। इसी प्रकार, कम कोरों वाले आलेख में, आव्यूह विरल हो जाता है। इसका मतलब है कि कम कोरों वाले आलेख में आव्यूह में बहुत सारे शून्य होते है।
   - एक आसत्रता आव्यूह समानांतर कोरें का निरूपण नहीं कर सकता है।
4. आसत्रता आव्यूह की हानि से बचने के लिए, आसत्रता सूचियों का उपयोग किया जाता है। ये विशेष रूप से विरल आव्यूह के केस में ज्यादा उपयोगी होते हैं। ये आलेख G के सभी शीर्षों की आसत्रता शीर्षों की लिंक सूची का उपयोग करते हैं।

5. पथ आव्यूह एक निश्चित लंबाई के पथ को दर्शाता है। आसत्रता नोड्स को एक सरल निर्देशित आलेख में दिखाने के लिए हम आसत्रता आव्यूह का उपयोग करते हैं।

6. आलेख की कोर कनेक्टिविटी $\lambda(G)$, G के कोरों के समुच्चय S की न्यूनतम कार्डिनैलिटी (Cardinality) इस तरह होती है कि $G-S$ असम्बद्ध हो, अर्थात, सम्बद्ध आलेख में कोरें (रेखा) कनेक्टिविटी आलेख में एक न्यूनतम कट–समुच्चय में कोरें की संख्या होती है।

7. एक आलेख G को समतलीय कहा जाता है अगर G का कोई ज्यामितीय निरूपण उपस्थित हो, जो एक सतह (Plane) पर इस तरह बनाया जाता है कि इसकी दो कोरें आपस में मिलती नहीं हो (एक शीर्ष पर कोरों का मिलना सर्वनिष्ठ नहीं कहलाता है)। अगर कोरों को आपस में पार किए बिना एक आलेख के सतह (Plane) पर नहीं बनाया जा सकता है, तो उसे असमतलीय कहा जाता है।

8. मान लीजिए कि G एक सम्बद्ध समतलीय आलेख है। G का क्षेत्र आलेख के कोरों से घिरा हुआ सतह का डोमेन है, इस तरह है कि किसी भी कोरें को पार किए बिना इसमें किसी भी दो बिंदु को एक रेखा से जोड़ा जा सकता है। एक क्षेत्र को छूने वाले कोरें में एक साधारण चक्र होता है जिसे क्षेत्र का समोच्च कहा जाता है। दो क्षेत्रों को निकटवर्ती कहा जाता है कि यदि दो क्षेत्रों के समोच्च (Contour) के बीच कम से कम एक कोर समरूप या समान्य (Common) हो।

5.7 सारांश

- एक आसत्रता आव्यूह की सभी विकर्ण प्रविष्टियां शून्य होती हैं, यदि आलेख में कोई स्व–लूप नहीं होता है।
- यदि G असंबद्ध है और इसके दो घटक हैं, तो इसके आसत्रता आव्यूह $A(G)$ को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है,

  $A(G)=\begin{bmatrix} A(G_1) & 0 \\ 0 & A(G_2) \end{bmatrix}$ G_1 और G_2 घटक हैं।

  इन आव्यूहों की मदद से, कोई भी यह सत्यापित कर सकता है कि दिए गए आलेख समरूपी हैं या नहीं।
- कंप्यूटर में, एक आलेख को दो तरीकों से दर्शाया जा सकता है, जैसे, आसत्रता आव्यूह और आसत्रता सूची है। आसत्रता आव्यूह सरणी (Arrays) का उपयोग करता है जबकि आसत्रता सूची में आलेख के निरूपण के लिए जुड़ी हुई सूचियों का उपयोग किया जाता है।
- आसत्रता आव्यूह एक आलेख के शीर्षों की सरणी है। निर्देशित आलेख और अदिष्ट आलेख दोनों के लिए आव्यूह को बनाया जा सकता है। अदिष्ट आलेख

G के लिए आसत्रता आव्यूह को वर्णित प्रक्रिया के अनुसार बनाया जा सकता है।

- n शीर्षों के एक निर्देशित आलेख में, n^2-e कोरें शून्य होती हैं। इसी प्रकार, कम कोरों वाले आलेख में, आव्यूह विरल हो जाता है। इसका मतलब है कि कम कोरों वाले आलेख में आव्यूह में बहुत सारे शून्य होते है।
- आसत्रता आव्यूह की हानि से बचने के लिए, आसत्रता सूचियों का उपयोग किया जाता है। ये विशेष रूप से विरल आव्यूह के केस में ज्यादा उपयोगी होते हैं। ये आलेख G के सभी शीर्षों की आसत्रता शीर्षों की लिंक सूची का उपयोग करते हैं।
- यदि शीर्षों और कोरों की संख्या बढ़ जाती है, तो आसत्रता सूची अक्षम हो जाती है, अर्थात, यह अधिक स्मरण या मेमोरी का उपयोग करने लगती है क्योंकि सूचक को बनाए रखने के लिए ओवरहेड बढ़ जाता है।
- पथ आव्यूह एक निश्चित लंबाई के पथ को दर्शाता है। आसत्रता नोड्स को एक सरल निर्देशित आलेख में दिखाने के लिए हम आसत्रता आव्यूह का उपयोग करते हैं।
- एक सम्बद्ध आलेख G के कोर समुच्चय के कोर उप–समुच्चय S को G का कट–कोर समुच्चय या कट–समुच्चय कहा जाता है, यदि

  (*i*) $G - S$ असम्बद्ध हो।

  (*ii*) $G - S_1, S$ का प्रत्येक उचित उपसमुच्चय S_1 सम्बद्ध हो।
- आलेख की कोर कनेक्टिविटी $\lambda(G)$, G के कोरों के समुच्चय S की न्यूनतम कार्डिनैलिटी (Cardinality) इस तरह होती है कि $G - S$ असम्बद्ध हो, अर्थात, सम्बद्ध आलेख में कोरें (रेखा) कनेक्टिविटी आलेख में एक न्यूनतम कट–समुच्चय में कोरें की संख्या होती है।
- आलेख G की शीर्ष कनेक्टिविटी $K(G)$, शीर्षों की वह न्यूनतम संख्या है जिनको हटाने से G असम्बद्ध या तुच्छ आलेख बनता है, अर्थात, न्यूनतम शीर्ष कट में शीर्षों की संख्या को आलेख की कनेक्टिविटी कहा जाता है।
- एक आलेख G को समतलीय कहा जाता है अगर G का कोई ज्यामितीय निरूपण उपस्थित हो, जो एक सतह या समतल (Plane) पर इस तरह बनाया जाता है कि इसकी दो कोरें आपस में मिलती नहीं हो (एक शीर्ष पर कोरों का मिलना सर्वनिष्ठ नहीं कहलाता है)। अगर कोरों को आपस में पार किए बिना एक आलेख के सतह (Plane) पर नहीं बनाया जा सकता है, तो उसे असमतलीय कहा जाता है।
- मान लीजिए कि G एक सम्बद्ध समतलीय आलेख है। G का क्षेत्र आलेख के कोरों से घिरा हुआ सतह का डोमेन है, इस तरह है कि किसी भी कोरें को पार किए बिना इसमें किसी भी दो बिंदु को एक रेखा से जोड़ा जा सकता है। एक

क्षेत्र को छूने वाले कोरें में एक साधारण चक्र होता है जिसे क्षेत्र का समोच्च कहा जाता है। दो क्षेत्रों को निकटवर्ती कहा जाता है कि यदि दो क्षेत्रों के समोच्च (Contour) के बीच कम से कम एक कोर समरूप (Common) हो।

टिप्पणी

5.8 मुख्य शब्दावली

- **आपतित आव्यूह** : किसी भी आलेख G में एक मेल खाती है $V \times E$ आव्यूह होती है, जिसे G की आपतित आव्यूह कहा जाता है और $1\,(G) = [a_{ij}]_{V \times \mathrm{E}}$ जिसमें कोई चक्र नहीं है, उसे अचक्रीय आलेख कहा जाता है।
- **आसत्रता आव्यूह** : आसत्रता आव्यूह एक आलेख के शीर्षों की सारणी है। निर्देशित आलेख और अदिष्ट आलेख दोनों के लिए आव्यूह को बनाया जा सकता है। अदिष्ट आलेख G के लिए आसत्रता आव्यूह को वर्णित प्रक्रिया के अनुसार बनाया जा सकता है।
- **आसत्रता सूची** : आसत्रता आव्यूह के नुकसान से बचने के लिए, आसत्रता सूचियों का उपयोग किया जाता है। ये विशेष रूप से विरल आव्यूह के केस में ज्यादा उपयोगी होते हैं।
- **पथ आव्यूह** : पथ आव्यूह एक निश्चित लंबाई के पथ को दर्शाता है। आसत्रता नोड्स को एक सरल आलेख में दिखाने के लिए हम आसत्रता आव्यूह का उपयोग करते हैं।
- **असमतलीय** : अगर कोरों को आपस में पार किए बिना एक आलेख के सतह पर नहीं बनाया जा सकता है, तो उसे असमतलीय कहा जाता है।

5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. आपतित आव्यूह क्या है?
2. आसत्रता आव्यूह से आप क्या समझते हैं?
3. प्रहार क्या है?
4. शीर्ष कनेक्टिविटी को परिभाषित कीजिए।
5. असमतलीय आलेख से आप क्या समझते हैं?
6. यूलर सूत्र क्या हैं?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. आपतित आव्यूह क्या है? निर्देशित आलेख के आपतित आव्यूह को परिभाषित कीजिए।

2. आसत्रता सूची क्या है? आसत्रता आव्यूह में इसके साथ जुड़े त्रुटियों की व्याख्या कीजिए।
3. प्रहार और उनके गुणधर्म की व्याख्या कीजिए। साथ ही कट–कोर व शीर्ष कट–समुच्चय को परिभाषित कीजिए।
4. प्रत्येक आलेख G के लिए, $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ को परिभाषित कीजिए।
5. असमतलीय आलेख क्या है? बारीक शीर्षों का पूर्ण आलेख असमतलीय को परिभाषित कीजिए।
6. यदि G बिना लूप के एक जुड़ा हुआ सरल समतलीय आलेख है, और इसमें n शीर्षों $e \geq 2$ कोरे और r क्षेत्र है तो $3/2\, r \leq e \leq 3n-6$ को परिभाषित कीजिए।

टिप्पणी

5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Pathak, Dr. H. K. 2017. विविक्त गणित (Discrete Mathematics). Meerut (UP): Shiksha Sahitya Prakashan.

Liu, C. L. 1977. *Elements of Discrete Mathematics*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

Deo, Narsingh. 1999. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall of India.

Mott, J. L. 2007. *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 2nd Edition. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt. Ltd.

Rosen, Kenneth. 2007. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th Edition. New York: McGraw-Hill Higher Education.

Tremblay, Jean Paul and R. Manohar. 1975. *Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science*. New York: McGraw-Hill Inc.

Singh, Y. N. 2005. *Mathematical Foundation of Computer Science*. New Delhi: New Age International Pvt. Ltd.

Malik, D. S. 2004. *Discrete Mathematical Structures: Theory and Applications*. London: Thomson Learning.

Haggard, Gary, John Schlipf and Sue Whiteside. 2006. *Discrete Mathematics for Computer Science*. California: Thomson Learning.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2008. *A Course in Abstract Algebra*, 3rd Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Grewal, B. S. 1998. *Higher Engineering Mathematics,* 34th Edition. New Delhi: Khanna Publishers.

Narayan, Shanti. 1996. *Differential Calculus,* 14th Edition. New Delhi: S Chand And Company Limited.

टिप्पणी

Kreyszig, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics,* 7th Edition. Mumbai: Wiley Eastern Ltd.

Bali, N. P. 2007. *A Textbook of Engineering Mathematics*. New Delhi: Laxmi Publications (P) Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambri. 2009. *Business Mathematics*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.