बी.एस.सी./बी.ए., द्वितीय वर्ष

गणित, तृतीय प्रश्नपत्र

अवकल समीकरण

(DIFFERENTIAL EQUATIONS)

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

COURSE WRITERS

Dr Bikas Chandra Bhui, Head, Mathematics Department, Meghnad Saha Institute of Technology, Kolkata
Dr Dipak Chatterjee, Distinguished Professor, St Xavier's College, Kolkata
Units (1-5)

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

अवकल समीकरण

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 अवकल समीकरण का श्रेणी हल, घात श्रेणी हल, बेसेल एवं लीजेण्ड्रे समीकरण, बेसेल एवं लीजेण्ड्रे फलन एवं उनके गुण, पुनरावृत्त एवं जनक फलन, फलन की लाम्बिकता।	**इकाई 1** : अवकल समीकरणों के श्रेणी हल **(पृष्ठ 3–50)**
इकाई–2 लाप्लास रूपांतरण, लाप्लास रूपांतरण की रैखिकता, लाप्लास रूपांतरण के लिए अस्तित्व प्रमेय, अवकलनों एवं समाकलनों का लाप्लास रूपांतरण, स्थानांतर प्रमेय, रूपांतरणों का अवकलन एवं समाकलन।	**इकाई 2** : लाप्लास रूपान्तरण **(पृष्ठ 51–79)**
इकाई–3 प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण, संवलन प्रमेय, अचर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपांतरणों के अनुप्रयोग।	**इकाई 3** : लाप्लास रूपान्तरण, प्रतिलोम और अवकल समीकरणों को हल करना **(पृष्ठ 81–97)**
इकाई–4 प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण, लैग्रांज विधि, विशिष्ट प्रकार के अवकल समीकरण का व्यापक विधि के अतिरिक्त अन्य विधि द्वारा सरलता से हल, चारपिट की व्यापक विधि।	**इकाई 4** : प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण **(पृष्ठ 99–123)**
इकाई–5 द्वितीय व उच्च कोटि के आंशिक अवकल समीकरण, द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण, अचर गुणांकों के समरूप एवं गैर–समरूप समीकरण, अचर गुणांकों में समान्य आंशिक अवकल समीकरण।	**इकाई 5** : द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरण **(पृष्ठ 125–165)**

विषय–सूची

परिचय

टिप्पणी

गणित में, उस समीकरण को अवकल समीकरण (Differential Equation) कहते हैं जिसमें एक या एक से अधिक फलन तथा उनके अवकलज होते हों। अवकल समीकरण उन संबंधों को कहते हैं, जिनमें स्वतंत्र चर तथा अज्ञात परतंत्र चर के साथ–साथ उस परतंत्र चर के एक या अधिक अवकल गुणांक (Differential Coefficient) हों। यदि इसमें एक परतंत्र चर तथा एक ही स्वतंत्र चर हो तो यह संबंध को साधारण (Ordinary) अवकल समीकरण कहते हैं। जब परतंत्र चर एक हो तथा स्वतंत्र चर अनेक होंगे तो परतंत्र चर के आंशिक अवकलन (Partial Differentials) होते हैं। जब ये अस्तित्व में रहते हैं तब संबंध को आंशिक (Partial) अवकल समीकरण कहते हैं। परतंत्र चर को स्वतंत्र चर के पदों में अभिव्यक्त करने को अवकल समीकरण का हल करना कहा जाता है।

यदि अवकल समीकरण में nवीं कोटि (Order) का अवकल गुणांक (Differential Coefficient) हो तो अवकल समीकरण nवीं कोटि का कहलाता है। उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात (Power) ही अवकल समीकरण की घात कहलाता है। गणित में, घात श्रेणी विधि (Power Series Method) या घात श्रेणी पद्धति का उपयोग कुछ विशेष समीकरणों के लिए घात श्रेणी के हल को ज्ञात करने लिए किया जाता है। कई क्षेत्रों में भौतिक समस्याओं के कारण अवकल समीकरण को हल किया जाना चाहिए। इनमें से कुछ को प्राथमिक विधियों से हल किया जा सकता है, लेकिन जब इन विधियों का उपयोग नहीं होता है तो हम श्रेणी समाधान का सहारा लेते हैं। घात श्रेणी विधि केवल प्रारंभिक मान की समस्याओं का समाधान देती है जो रैखिक समीकरणों (Linear Equations) से सम्बन्धित होगा क्योंकि समाधान कई रैखिक रूप से स्वतंत्र समाधानों को बदल सकता है जो सीमा मान समस्याओं (Boundary Value Problems) को हल करने के लिए अध्यारोपण (By Superposition) संयुक्त हो सकते हैं। एक और प्रतिबंध यह है कि श्रेणी गुणांक एक अरेखीय (Non-Linear) पुनरावृत्ति द्वारा निर्दिष्ट किया जाएगा, जो गैर–रेखीय अवकल समीकरण से मूल रूप में मिला है।

सामान्य तौर पर, ऐसा समाधान अज्ञात गुणांक वाले एक घात श्रेणी को मानता है और फिर गुणांक के लिए पुनरावृत्ति संबंध (Recurrence Relation) खोजने के लिए अंतर समीकरण में उस समाधान को प्रतिस्थापित करता है। लीजेण्ड्रे समीकरण (Legendre's Equations) इस प्रकार के बहुत महत्वपूर्ण समीकरण हैं। ये समीकरण और उनके हल प्रायोगिक गणित में एक महत्वपूर्ण और आधारभूत भूमिका निभाते हैं। घात श्रेणी विधि को चर गुणांकों के साथ रैखिक अंतर समीकरणों को हल करने के लिए मानक आधारभूत विधि के रूप में माना जाता है। प्रायोगिक गणित में सबसे महत्वपूर्ण अंतर समीकरणों में से एक बेसेल (Bessel) के अवकल समीकरण है। विभिन्न अंतर समीकरणों को बेसेल के समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

लाप्लास (Laplace) एक फ्रांसीसी गणितज्ञ, खगोलशास्त्री और भौतिक विज्ञानी थे, जिन्होंने आव्यूह प्रणाली (Metric System) के विकास में अग्रणी भूमिका निभाई थी।

टिप्पणी

लाप्लास परिवर्तन का उपयोग व्यापक रूप से अभियांत्रिकी अनुप्रयोगों (मैकेनिकल और इलेक्ट्रॉनिक) में किया जाता है, विशेष रूप से जहां प्रेरक बल (Driving Force) असतत है। इसका उपयोग प्रक्रिया नियंत्रण में भी किया जाता है। लाप्लास रूपांतरण) Laplace Transformation) हमें अवकल और समाकलन वाले समीकरणों को हल करने में मदद करता है जो समीकरण को t स्थान में परिवर्तित कर s स्थान में से एक में परिवर्तित कर देता है जिससे समस्या को हल करना बहुत आसान हो जाता है। लाप्लास रूपांतरण कुछ निश्चित प्रकार के अवकल समीकरणों को हल करने की एक उपयोगी विधि है, जब कुछ प्रारंभिक पद दिए जाते हैं, खासकर जब प्रारंभिक मान शून्य हो।

इस पुस्तक *'अवकल समीकरण'* में गणित की मूल अवधारणाओं को संग्रहित किया गया है। यह अवकल समीकरणों के श्रेणी हल, लाप्लास रूपान्तरण, प्रतिलोम और अवकल समीकरणों को हल करना, प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण, एवं द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरणों की मूल बातें समझने में छात्रों की मदद करेगा।

इस पुस्तक को पांच इकाइयों में विभाजित किया गया है जो एक स्व–अधिगम पाठ्य सामग्री (Self-Instruction Mode) है। प्रत्येक इकाई एक परिचय के साथ शुरू होती है जिसके बाद उद्देश्य की रूपरेखा होती है। तब विषय की विस्तृत सामग्री को एक सरल लेकिन संरचित तरीके से प्रस्तुत किया गया है ताकि छात्र आसानी से विषय को समझ सके। छात्र की समझ को परखने के लिए, बीच–बीच में 'अपनी प्रगति जांचिए' प्रश्न होते हैं, और विषय को आसानी से समझने हेतु सारांश, मुख्य शब्दावली, स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास भी प्रत्येक इकाई के अंत में दिया हुआ है।

इकाई 1 अवकल समीकरणों के श्रेणी हल

टिप्पणी

संरचना

1.0 परिचय

गणित में, घात श्रेणी विधि (Power Series Method) का उपयोग कुछ विशेष समीकरणों के लिए घात श्रेणी (Power Series) में प्रयुक्त समाधान की खोज के लिए किया जाता है। कई क्षेत्रों में भौतिक समस्याओं के कारण अवकल समीकरण (Differential Equation) को हल किया जाना चाहिए। इनमें से कुछ को प्राथमिक विधि (Elementry Method) से हल किया जा सकता है, लेकिन जब ये विधियां उपयोग नहीं होती हैं तो हम श्रेणी समाधान का सहारा लेते हैं। घात श्रेणी (Power Series) विधि केवल प्रारंभिक मान की समस्याओं का समाधान देगी जब रैखिक समीकरणों से सम्बन्धित होगा क्योंकि समाधान कई रैखिक रूप से स्वतंत्र समाधानों को बदल सकता है जो सीमा मान समस्याओं (Boundary Value Problems) को हल करने के लिए (अध्यारोपण द्वारा) संयुक्त हो सकते हैं। एक और प्रतिबंध यह है कि श्रेणी गुणांक एक अरेखीय (Non-Linear) पुनरावृत्ति द्वारा निर्दिष्ट किया जाएगा, जो अरेखीय (Non-Linear) अवकल समीकरण से विरासत में मिला है।

सामान्य तौर पर, ऐसा समाधान अज्ञात गुणांक वाली एक घात श्रेणी की कल्पना करता है और फिर गुणांक के लिए पुनरावृत्ति संबंध (Recurrence Relation) खोजने के लिए अवकल समीकरण में उस समाधान को प्रतिस्थापित करता है। लीजेण्ड्रे समीकरण (Legendre's Equations) इस प्रकार के बहुत महत्वपूर्ण समीकरण हैं। ये समीकरण और उनके समाधान व्यावहारिक गणित (Applied Mathematics) में एक महत्वपूर्ण और आधारभूत भूमिका निभाते हैं। घात श्रेणी विधि को चर गुणांकों के साथ रैखिक अवकल

समीकरणों को हल करने के लिए मानक आधारभूत विधि के रूप में माना जाता है। व्यावहारिक गणित में सबसे महत्वपूर्ण अवकल समीकरणों में से एक बेसेल (Bessel) के अवकल समीकरण है। विभिन्न अवकल समीकरणों को बेसेल के समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

इस इकाई में, आप घात श्रेणी विधि (Power Series Method), बेसेल और लीजेण्ड्रे के समीकरण, बेसेल और लीजेण्ड्रे के फलन (Bessel and Legendre Functions) और उनके गुण, अतिज्यामितीय समीकरण, नियमित एकल बिंदु, फलनों तथा पुनरावृत्ति संबंधों की उत्पत्ति, जनक फलन, बेसेल फलनों तथा लीजेण्ड्रे बहुपदों की लाम्बिकता के अवकल समीकरणों के श्रेणी हलों के बारे में अध्ययन करेंगे।

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- घात श्रेणी विधि को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- अभिसरण अंतराल तथा त्रिज्या को समझ पाएंगे;
- घात श्रेणी पर संक्रियाएं, घात श्रेणी के हल और वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन के अस्तित्व की चर्चा कर सकेंगे;
- बेसेल, लीजेण्ड्रे तथा अतिज्यामितीय समीकरणों को समझ पाएंगे;
- बेसेल समीकरण, लीजेण्ड्रे समीकरण तथा अतिज्यामितीय समीकरण की व्याख्या कर पाएंगे;
- नियमित एकल बिंदु, फलनों तथा पुनरावृत्ति संबंधों की उत्पत्ति को समझ पाएंगे;
- बेसेल फलनों तथा लीजेण्ड्रे बहुपदों की लाम्बिकता को परिभाषित करने में सक्षम होंगे।

1.2 घात श्रेणी विधि

कुछ निश्चित अवकल समीकरणों के घात श्रेणी (Power Series) हल ज्ञात करने के लिए घात श्रेणी विधि (Power Series Method) का प्रयोग किया जाता है, मूलरूप से ऐसा कोई हल अज्ञात गुणांकों के साथ एक घात श्रेणी की कल्पना करता है फिर उस हल को गुणांकों में आवर्ती संबंध (Recurrence Relation) निकालने हेतु, अवकल समीकरण में निविष्ट (Insert) करता है। घात श्रेणी विधि को कुछ कम नम्यता (Flexibility) के साथ कुछ अरैखिक (Non-Linear) अवकल समीकरणों पर भी प्रयुक्त किया जा सकता है। यदि एक समरूप रैखिक अवकल समीकरण नियत गुणांक (Constant Coefficient) निर्धारित है तब वह बीजगणितीय विधियों (Algebraic Methods) से हल किया जा सकता है और उसके हल भी कलन (Calculus) से ज्ञात किए हुए e^x, $\cos x$, इत्यादि, जैसे प्रारंभिक फलन (Elementary Function) होते हैं। हालांकि यदि समीकरण चर गुणांक जो x के फलन हों, तो उसे अन्य विधियों से हल करना होता है।

चर गुणांक वाले अवकल समीकरणों को हल करने के लिए प्रयोग होने वाली मानक और आधारभूत तकनीक घात श्रेणी विधि कही जाती है। इसे घात श्रेणी विधि

कहना इसलिए सार्थक है क्योंकि इसके माध्यम से मिलने वाले हल घात श्रेणी (Power Series) के रूप में होते हैं। इन श्रेणियों का उपयोग, इन हलों के मान निकालने के उद्देश्य से, इनकी विशेषताओं को समझने के उद्देश्य से तथा इन हलों की विभिन्न प्रकार की दूसरी अभिव्यक्तियां प्राप्त करने के उद्देश्य से किया जा सकता है घात श्रेणियों पर की जाने वाली संक्रियाओं में अवकलन, योग गुणन, इत्यादि, की विधियां सम्मिलित हैं।

घात श्रेणी (Power Series)

a एक घात श्रेणी ऐसी कोई श्रेणी है जो निम्नांकित रूप में लिखी जा सकती है–

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$

यहां a तथा C_n संख्याएं हैं, यहां जो C_n हैं वे प्रायः श्रेणी के गुणांक (Coefficients) कहलाते हैं। एक घात श्रेणी के बारे में सबसे जरूरी बात यह है कि यह x का एक फलन होता है। कलन (Calculus) से हम जानते हैं कि घात श्रेणी ($x-x_0$ की घातों में) निम्न स्वरूप वाली एक अनंत श्रेणी (Infinite Series) होती है–

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \quad (1.1)$$

यहां $a_0, a_1, a_2, \ldots$ नियतांक हैं, जो श्रेणी के **गुणांक** कहे जाते हैं, यहां x_0 एक नियतांक है जिसे **श्रेणी का केंद्र (Center of the Series)** कहते हैं तथा x एक चर (Variable) है। यदि $x_0 = 0$ तब हमें x की घातों में एक घात श्रेणी निम्नानुसार प्राप्त होगा–

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \quad (1.2)$$

हम यहां यह मान कर चलते हैं कि सभी चर तथा अचर वास्तविक (Real) हैं, तथा घात श्रेणियों के चर उचित रूप से ज्ञात है, उदाहरण मैक्लयूरिन श्रेणियां (Maclaurin Series) हैं–

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m + 1 + x + x^2 + \cdots$$

($|x| < 1$, यह एक ज्यामितीय श्रेणी (Geometric Series) होगी)

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

अवकल समीकरणों को हल करने में घात श्रेणी विधि का प्रयोग किया जाता है क्योंकि इस विधि को आसान माना जाता है तथा इसे वैश्विक रूप से एक मानक विधि

टिप्पणी

मानकर प्रयोग किया जाता है। हम सर्वप्रथम प्रक्रिया का वर्णन करेंगे और इसके पश्चात सरल समीकरणों का प्रयोग कर इसका उदाहरण प्रस्तुत करेंगे। एक दिए गए अवकल समीकरण के लिए–

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

अब $p(x)$ तथा $q(x)$ को x अथवा $x - x_0$ (यदि हल $x - x_0$ की घातों में चाहिए) की घात श्रेणी के रूप में प्रदर्शित करते हैं, यदि $p(x)$ तथा $q(x)$ बहुपद हैं तो इस चरण (Step) को छोड़ा जा सकता है। हम अज्ञात गुणांकों वाले एक घात श्रेणी के रूप में हल की कल्पना करते हैं जो इस प्रकार हैं–

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{1.3}$$

इस श्रेणी को तथा इस श्रेणी के पदशः अवकलन (Termwise Differentiation) से हमें मिलने वाली श्रेणियों को समीकरण में निविष्ट (Insert) करेंगे जो निम्न है,

$$\text{(a)}\ y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \tag{1.4}$$

$$\text{(b)}\ y'' = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \cdots \tag{1.5}$$

अब x की समान घातों वाले पदों का मूल्यांकन करेंगे और x की प्रत्येक घात के गुणांकों के योग को शून्य के बराबर रखेंगे जिसके नियत पदों से प्रारंभ होकर ऐसे पद जिनमें x हैं तथा पद जिनमें x^2 है, इत्यादि सम्मिलित हो, ऐसा करने से वे संबंध मिलेंगे जिनसे हम समीकरण (1.3) वाली श्रेणी के अज्ञात गुणांकों का निर्धारण क्रमिक रूप से कर सकेंगे, यह हम कुछ ऐसी सरल समीकरणों के प्रयोग कर समझा सकते हैं जिन्हें प्रारंभिक विधि से हल किया जा सकता है।

उदाहरण 1.1: $y' - y = 0$ को हल कीजिए।

हलः चरण 1: हम श्रेणी समीकरणों (1.3) तथा (1.4) को इस समीकरण में इस प्रकार निविष्ट करते हैं–

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0$$

चरण 2: x की समान घातों को एक साथ रखने पर–

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots = 0$$

चरण 3: x की प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य के बराबर रखने पर हमें प्राप्त होगा–

$$a_1 - a_0 = 0, \qquad 2a_2 - a_1 = 0, \qquad 3a_3 - a_2 = 0, \cdots$$

चरण 4: इन समीकरणों को हल करने के पश्चात $a_1, a_2, \cdots, a_0$ जो स्वैच्छ (Arbitrary) के पदों में व्यक्त किया जा सकता है–

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots$$

चरण 5: इन गुणांकों का उपयोग करने से समीकरण (1.3) में वर्णित श्रेणी इस प्रकार हो जायेगी,

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots.$$

चरण 6: अंत में हमें ज्ञात तथा प्रचलित सामान्य हल इस प्रकार प्राप्त किया जाता है–

$$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = a_0 e^x$$

उदाहरण 1.2: $y' = 2xy$ को हल कीजिए।

हल: इसी विधि का अनुगमन करते हुए समीकरणों (1.3) तथा (1.4) की श्रेणियों को इस समीकरण में निविष्ट करते हैं–

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = 2x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)$$

अब $2x$ से गुणन करते हैं, परिणामी समीकरण सरलता से इस रूप में लिखा जा सकता है,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \cdots$$

$$= 2a_0 + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 = 2a_4 x^5 + \cdots$$

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि,

$$a_1 = 0,\ 2a_2 = 2a_0,\ \ 3a_3 = 2a_1,\ \ 4a_4 = 2a_2,\ \ 5a_5 = 2a_3\quad \ldots$$

इसलिए $a_3 = 0, a_5 = 0, \cdots$ और सम अधोलेख (Subscript) रखने वाले गुणांकों के लिए, यह निम्न प्रकार से हो जायेगी–

$$a_2 = a_0, \qquad a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2!}, \qquad a_6 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots$$

यहां विवेकाधीन (Arbitrary) ही बना रहेगा, इन गुणांकों का उपयोग करके समीकरण (1.3) की श्रेणी निम्नानुसार स्वरूप वाले हल प्रदान करेगी,

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\right) = a_0 e^{x^2}$$

हल को चरों के पृथक्करण (Separating Variables) की विधि का प्रयोग करते हुए परिमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 1.3: $y'' + y = 0$ को हल कीजिए।

हल: हमें जो समीकरण प्राप्त हुआ है उसमें समीकरणों (1.3) तथा (1.5) को निविष्ट करने पर,

$$\left(2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \cdots\right) + \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) = 0$$

x की समान घातों को एक साथ रखने पर हमें प्राप्त होगा–

$$\left(2a_2 + a_0\right) + \left(3\cdot 2a_3 + a_1\right)x + \left(4\cdot 3a_4 + a_2\right)x^2 + \cdots = 0$$

टिप्पणी

x की प्रत्येक घात के गुणांकों को शून्य के बराबर रखने पर, हमें प्राप्त होगा–

$2a_2 + a_0 = 0$ x^0 के गुणांक

$3 \cdot 2a_3 + a_1 = 0$ x^1 के गुणांक

$4 \cdot 3a_4 + a_2 = 0$ x^2 के गुणांक, इत्यादि

दिए गए समीकरणों को हल करने पर, हम देखते हैं कि $a_2, a_4, \cdots$ को a_0 के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, $a_3, a_5, \cdots$ को a_1 के पदों में व्यक्त किया जा सकता है, यहां a_0 तथा a_1 स्वैच्छ हैं–

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!}, \cdots;$$

इन गुणांकों का प्रयोग करते हुए समीकरण (1.3) की श्रेणी को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!} + \frac{a_1}{5!}x^5 + \cdots$$

एक घात श्रेणी के लिए पदों के स्वीकार्य पुर्विन्यास को इस रूप में भी लिखा जा सकता है–

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots\right)$$

सामान्य हल को निम्न प्रकार से भी निर्धारित जा सकता है–

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

हम इस बात को संभवतया घात श्रेणी द्वारा विशेष रूप से निर्दिष्ट नये फलनों का प्रयोग करके समाप्ति की ओर ले जायेंगे, यदि ये समीकरण और उनके हल वास्तविक हैं या सैद्धांतिक महत्व के हैं तब उन्हें नाम दिये जायेंगे और इन्हें व्यवस्थित रूप से परखा जायेगा। इसी तरह लीजेण्ड्रे, बेसेल और गॉउस की अतिज्यामितीय श्रेणियां अस्तित्व में आयीं थीं।

आधारभूत संकल्पनाएं (Basic Concepts)

कलन (Calculus) में एक घात श्रेणी इस प्रकार के स्वरूप वाली एक अनंत श्रेणी होती है,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \tag{1.6}$$

यदि x चर, केंद्र x_0 तथा गुणांक $a_0, a_1, \cdots$ वास्तविक हैं तब श्रेणी समीकरण (1.6) का nवां आंशिक योग (Partial Sum) निम्न होगा,

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{1.7}$$

यहां $n = 0, 1, \cdots$ है यदि s_n के पद समीकरण (1.6) में लुप्त कर दिए तो शेष व्यंजक निम्न प्रकार हो जायेगा,

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \cdots \tag{1.8}$$

इस व्यंजक को समीकरण (1.6) के पद $a_n(x - x_0)^n$ के पश्चात् के शेष (Remainder) का नाम दिया है।

उदाहरण के लिए– निम्नलिखित ज्यामितीय श्रेणी पर विचार कीजिए–

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

हम इन्हें सम्मिलित कर सकते हैं–

$$s_0 = 1. \qquad R_0 = x + x^2 + x^3 + \cdots,$$

$$s_1 = 1 + x, \qquad R_1 = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots,$$

$$s_2 = 1 + x + x^2 \qquad R_2 = x^3 + x^4 + x^5 + \cdots,$$ इत्यादि।

इस क्रम में समीकरण (1.6) आंशिक योगों $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \cdots$ की श्रेणी से युग्मित हो जायेगा यदि $x = x_1$, तब श्रेणी इस प्रकार अभिसरित (Converge) होगी–

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x_1) = s(x_1)$$

तब समीकरण (1.6) में वर्णित समीकरण $x = x_1$ पर अभिसरित कही जायेगी तथा संख्या $s(x_1)$ को x_1 पर समीकरण (1.6) का मान (Value) या योग (Sum) कहा जायेगा, इसे इस प्रकार लिखा जायेगा

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m$$

प्रत्येक n के लिए

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \tag{1.9}$$

यदि श्रेणी $x = x_1$ पर अपसरण (Diverge) कर रही है तो समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी को $x = x_1$ पर अपसारी कहा जायेगा।

अभिसरण (Convergence) के प्रकरण में प्रत्येक धनात्मक मान $\in$ के लिए एक N होना चाहिए जो $\in$ पर निर्भर करे, समीकरण (1.9) का उपयोग करते हुए हमें प्राप्त होता है–

$$|R_n(x_1)| = |s(x_1) s_n(x_1)| < \in \quad \text{सभी } n > N \text{ के लिए} \tag{1.10}$$

गणितीय रूप से यह बताता है कि $n > N$ वाले सभी $s_n(x_1)$, $s(x_1) - \in$ तथा $s(x_1) + \in$ के बीच स्थित है, वास्तव में यह दर्शाता है कि अभिसरण (Convergence) के लिए समीकरण (1.6) का योग x_1 पर $s_n(x_1)$ के द्वारा n को बहुत अधिक मानते हुए ठीक–ठीक अनुमानित किया जा सकता है।

1.2.1 अभिसरण अंतराल तथा त्रिज्या

एक श्रेणी का अभिसरण (Convergence) x के उस मान पर निर्भर कर सकता है जिसे हम श्रेणी में रखते हैं और x के अन्य मानों के लिए अभिसरण नहीं करता है।

हम इस पर विचार कर सकते हैं कि R यहां कोई ऐसी संख्या है कि घात श्रेणी $|x-a|<R$ के लिए अभिसरण (Converge) करेगी और $|x-a|>R$ के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) कही जायेगी। ध्यान रहे कि यदि $|x-a|=R$ तब श्रेणी अभिसरण (Converge) कर भी सकती है और नहीं भी कर सकती है, यदि इन बिंदुओं पर कुछ होता भी है तो भी ऐसा होना अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) को परिवर्तित नहीं करेगा।

दूसरी बात यह है कि x के मानों का अंतराल जिसमें दोनों अंतिम बिंदु (End Points) भी शामिल हैं जिनके लिए कि यह घात श्रेणी अभिसरण (Converge) कर रही है, श्रेणी के अभिसरण का अंतराल कहलाता है, ये दोनों ही अवधारणाएं एक दूसरे के साथ प्रबलता से युग्मित हैं। यदि हम यह जानते हैं कि एक घात श्रेणी की अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) R है तब हमें यह बातें भी ज्ञात हो जायेंगी–

$a-R<x<\mathrm{a}+R$ घात श्रेणी अभिसरण (Converge) करती हैं।

$x<a-R$ तथा $x>a+R$ घात श्रेणी अपसरण (Diverge) करती है।

अंतराल $a-R<x<\mathrm{a}+R$ अभिसरण के अंतराल के ही अंतर्गत होना चाहिए। ऐसा इसलिए कि हम जानते हैं कि इन मानों के लिए घात श्रेणी अभिसरण (Converge) करेगी। हम यह भी जानते हैं अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) में वे x नहीं होंगे जो $x<a-R$ तथा $x>a+R$ की रेंज में पड़ते हैं क्योंकि हम जानते हैं कि x के इन मानों के लिए घात श्रेणी अपसरण (Diverge) करती है इसलिए अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) को पूर्णतः पहचानने के लिए हमें निर्धारित करना होगा कि क्या घात श्रेणी $x=a-R$ या $x=a+R$ के लिए अभिसरण (Converge) करती है।

यदि घात श्रेणी इनमें से एक या दोनों मानों के लिए अभिसरण (Converge) करती है तब हमें इन्हें अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) में शामिल करना होगा।

1. यदि समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी $x=x_0$ पर अभिसरण (Converge) कर रही है तब उसके पहले a_0 पद को छोड़कर सभी पद शून्य होंगे। विशेष प्रकरणों में उस समीकरण (1.6) के लिए जो कि अभिसरण (Convergence) कर रही है वह केवल x होगा, ऐसी श्रेणी को सार्थक (Significant) नहीं माना जाता।
2. यदि x का कोई अन्य मान भी है जिसके लिए श्रेणी द्वारा अभिसरण दर्शाया जाता है तब ऐसे मान एक अंतराल (Interval) निर्मित करते हैं, जिसे अभिसरण अंतराल (Convergence Interval) कहा जाता है। यदि यह अंतराल (Interval) परिमित (Finite) है तब यह मध्यबिंदु का x_0 धारण करेगा जो इस स्वरूप का होगा कि–

$$|x-x_0|<R \tag{1.11}$$

टिप्पणी

समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी उन सभी x के लिए अभिसरण (Converge) करेगी जिनके लिए $|x-x_0|<R$ है तथा उन सभी x के लिए अपसरण (Diverge) करेगी जिनके लिए $|x-x_0|>R$ है। यहां R समीकरण (1.6) के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence)या अभिसरण की त्रिज्या होगी। इसे नीचे दिए गये सूत्रों में से किसी से भी ज्ञात किया जा सकता है बशर्ते ये सीमाएं अस्तित्व में हों तथा शून्य न हों–

$$\text{(a) } R = 1\Big/\lim_{m\to\infty} m\sqrt{|a_m|} \qquad \text{(b) } R = 1\Big/\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \qquad (1.12)$$

ये अनंत होंगी तो समीकरण (6) में वर्णित श्रेणी केवल केंद्र (Centre) x_0 पर ही अभिसरण (Converge) करेगी।

3. अभिसरण (Convergence) अंतराल उस समय अनंत होगा जब समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी सभी x के लिए अभिसरण (Converge) करें, उदाहरण के लिए यदि समीकरणों (1.12 a) या (1.12 b) के लिए सीमा (Limit) शून्य है तब ऐसा होना घटित होगा और इसे $R=\infty$ इस प्रकार से लिखा जा सकेगा। प्रत्येक x के लिए जिसके लिए कि समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी अभिसरण (Converge) कर रही है $s(x)$ का एक निश्चित मान होगा। हम कह सकते हैं कि समीकरण (1.6) में वर्णित श्रेणी अभिसरण (Convergence) अंतराल में एक फलन $s(x)$ को व्यक्त करती है और यह इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$s(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m \qquad (|x-x_0|<R)$$

आगे दिये गये उदाहरण इस अवधारणा को स्पष्ट करेंगे।

केंद्र पर अभिसरण (Convergence at Centre)– इस श्रेणी पर विचार कीजिए,

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m = 1+x+2x^2+6x^3+\ldots$$

हम समीकरण (1.12b) में $am + m!$ को सम्मिलित कर सकते हैं,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m}=\frac{(m+1)!}{m!}=m+1\to\infty \text{ चूंकि } m\to\infty \text{ है।}$$

यह श्रेणी केवल केंद्र $x=0$ पर ही अभिसरण (Converge) करती है और इसलिए यह अनुपयोगी श्रेणी है।

परिमित अंतराल में अभिसरण (Convergence in Finite Interval)– इस ज्यामितीय श्रेणी पर विचार कीजिए–

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}=1+x+x^2+\ldots$$

टिप्पणी

हम $a_m = 1/m!$ को सम्मिलित करें, तो समीकरण (1.12b) इस प्रकार हो जायेगी–

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{1/(m+1)!}{1/m!} = \frac{1}{m+1} \to 0 \text{ चूंकि } m \to \infty \text{ है}$$

यह श्रेणी सभी x के लिए अभिसरण (Converge) करती है अतः सार्थक मानी गयी है।

नीचे दिया गया संकेत कुछ विशेष समस्याओं को हल करने में प्रयुक्त किया जाएगा–

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m} x^{3m} = 1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{512} + \ldots$$

इसे $t = x^3$ की घातों में तथा गुणांक $a_m = (-1)^m / 8^m$ रखने वाली श्रेणी के रूप में देखा जायेगा तब समीकरण (1.12b) में वर्णित श्रेणी इस प्रकार हो जायेगी–

$$\left|\frac{a_{m=1}}{a_m}\right| = \frac{8^m}{8^{m+1}} = \frac{1}{8}$$

$R = 8$ है अतः श्रेणी $|t| < 8$ अर्थात $|x| < 2$ के लिए अभिसरण (Converge) करेगी।

उदाहरण 1.4: इस घात श्रेणी के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^m n}{4^n} (x+3)^n$$

हलः यह घात श्रेणी $x = -3$ पर अभिसरण (Converge) करेगी। इस बिंदु पर हमें x का शेषफल निर्धारित करना होगा जिसके लिए वह उपयुक्त परीक्षणों में से किसी एक के लिए भी अभिसरण (Converge) करेगा। परीक्षण का प्रयोग करके हम x पर उन शर्तों को व्युत्पन्न करते हैं जो x के उन मानों को निर्धारित करने में प्रयोग होंगी जिनके लिए घात श्रेणी अभिसरण (Converge) करेगी और x के वे मान जिनके लिए वह अपसरण (Diverge) करेगी इसी से हम अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) भी परिकलित कर सकेंगे। इस प्रकरण में सबसे उपयुक्त परीक्षण अनुपात (Ratio) या मूल (Root) परीक्षण है, इस परीक्षण का प्रयोग करके हमें प्राप्त होगा–

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x+3)n+1}{4n+1} \frac{4^n}{(-1)^n (n)(x+3)^n} \right|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(n+1)(x+3)}{4n} \right|$$

यहां x सीमा (Limit) पर निर्भर नहीं है इसलिए इसे सीमा (Limit) के परे भी लिया जा सकता है। हमें इस पर निरपेक्ष मान का प्रतिबंध भी रखना होगा ताकि सभी धनात्मक रहे, तब सीमा (Limit) इस प्रकार हो जायेगी–

टिप्पणी

$$L = |x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n}$$

अनुपात परीक्षण (Ratio Test) परिभाषित करता है कि यदि $L < 1$ है तो श्रेणी अभिसरण (Converge) करके और यदि $L > 1$ है तो श्रेणी अपसरण (Diverge) करेगी यदि $L = 1$ है तो दोनों में से कुछ भी हो सकता है। इस प्रकार–

$\frac{1}{4}|x+3| < 1 \Rightarrow |x+3| < 4$ श्रेणी अभिसरण (Converge) करेगी।

$\frac{1}{4}|x+3| > 1 \Rightarrow |x+3| > 4$ श्रेणी अपसरण (Diverge) करेगी।

अब $L = 1$ वाली स्थिति पर विचार कीजिए, अब हमारे पास घात श्रेणी की अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) है, इस घात श्रेणी की अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) $R = 4$ है।

इसके बाद हम अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) को ज्ञात करते हैं इसके लिए हमें अधिकांश अंतराल उपर्युक्त श्रेणी की पहली असमानता (Inequality) को हल करने से प्राप्त होगा–

$$-4 < x + 3 < 4$$
$$-7 < x < 1$$

इस प्रकार वैधता का अंतराल (Interval of Validity) $-7 < x < 1$ द्वारा दर्शाया जाता है। अब हम यह ज्ञात करेंगे कि इस अंतराल के अंत बिंदुओं (End Points) पर यह घात श्रेणी अभिसरण (Convergence) करती है अथवा अपसरण (Divergence)। ध्यान रहे कि x के ये मान दिये गये $L = 1$ के संगत x के मान होंगे, इन बिंदुओं पर अभिसरण (Convergence) इन्हें मूल घात श्रेणी में रखकर निर्धारित की जा सकती है और देखा जा सकता है कि श्रेणी अभिसरण (Converge) करती है अथवा अपसरण (Diverge)।

$x = -7$ के लिए, इस स्थिति में श्रेणी होगी–

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n}(-1)^n 4^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n n \qquad (-1)^n (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n$$

चूंकि $\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$ अतः यह श्रेणी अपसारी (Divergent) होगी,

$x = 1$ के लिए– इस स्थिति में श्रेणी होगी,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$$

चूंकि $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$ अस्तित्व में नहीं होता अतः यह श्रेणी भी अपसारी (Divergent) होगी।

उदाहरण 1.5: दी गयी घात श्रेणी के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(4x-8)^n$$

हल: अनुपात परीक्षण (Ratio Test) का प्रयोग करके, हमें प्राप्त होगा–

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(4x-8)n+1}{n+1}\frac{n}{2^n(4x-8)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n(4x-8)}{n}\right|$$

$$= |4x-8|\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$$

$$= 2|4x-8|$$

इस प्रकार नीचे दिये गये तरीके से अभिसरण (Convergence) या अपसरण (Divergence) निर्धारित किया जा सकता है–

$2\,|4x-8| < 1$ श्रेणी अभिसरण (Converge) करती है।

$2\,|4x-8| > 1$ श्रेणी अपसरण (Diverge) करती है।

अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) के लिए हमें चाहिए $|x-a| < \mathrm{R}$ तथा $|x-a| > \mathrm{R}$, अर्थात अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) को सटीकता से प्राप्त करने के लिए हमें दिये गये निरपेक्ष मान में से 4 को क्रमगुणित (Factorize) करना होगा, इससे प्राप्त होगा–

$8\,|x-2| < 1 \Rightarrow |x-2| < \frac{1}{8}$ श्रेणी अभिसरण (Converge) करती है।

$8\,|x-2| > 1 \Rightarrow |x-2| > \frac{1}{8}$ श्रेणी अपसरण (Diverge) करती है।

इस प्रकार इस घात श्रेणी अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) $R = \frac{1}{8}$ है, पश्चात हम उस असमानता को हल करके जो अभिसरण (Convergence) प्रदान करती है हम अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात करेंगे।

$$\frac{1}{8} < x - 2 < \frac{1}{8}$$

$$\frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$$

अब अन्य बिंदुओं की पुष्टि करते हैं–

$x = \frac{15}{8}$ के लिए, श्रेणी होगी:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{15}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

इस श्रेणी का वियार एकान्तर हरात्मक श्रेणी (Alternation Harmonic Series) तथा उसका अभिसरण (Converge) करने पर–

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{17}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

यह एक हरात्मक (Harmonic) श्रेणी है तथा यह अपसरण (Diverge) करती है। इस तरह घात श्रेणी एक अन्त बिंदु (End Point) के लिए अभिसरण (Converge) करती है लेकिन दूसरे के लिए नहीं तब इस घात श्रेणी के लिए अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) इस प्रकार होगा–

$$\frac{15}{8} \leq x \leq \frac{17}{8}$$

उदाहरण 1.6: दी गयी घात श्रेणी के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात कीजिए।

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(2x+1)^n$$

हलः अनुपात परीक्षण (Ratio Test) से हमें प्राप्त होगा–

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(2x+1)^{n+1}}{n!(2x+1)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!(2x+1)}{n!}\right|$$

$$= |2x+1|\lim_{n\to\infty}(n+1)$$

यहां सीमा (Limit) अनंत है परंतु हम x से युक्त उस पद का प्रयोग कर सकते हैं जो सीमा (Limit) के सम्मुख है। हमारे समक्ष $L = \infty -> 1$ है जबकि दिया हुआ है कि $x \neq -\frac{1}{2}$ इसलिए यह घात श्रेणी तभी अभिसरण (Converge) करेगी यदि $x = -\frac{1}{2}$ हो।

उदाहरण 1.7: दी गयी घात श्रेणी के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात कीजिए–

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n^n}$$

हलः इस प्रकरण में हम मूल परीक्षण (Root Test) का प्रयोग यह ज्ञात करने के लिए करते हैं–

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^n}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-6}{n}\right|$$

$$= |x-6|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

चूंकि $L = 0 < 1$ इसलिए x के किसी मान विशेष के लिए नहीं बल्कि यह घात श्रेणी प्रत्येक x के लिए अभिसरण (Converge) करेगी, इस स्थिति में हम अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) $R = \infty$ परिभाषित कर सकते हैं और अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) $-\infty < x < \infty$ होगा।

उदाहरण 1.8: दी गयी घात श्रेणी के लिए अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) तथा अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) ज्ञात कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(-3)^n}$$

हलः इस प्रकरण में x का घातांक (Exponent) एक उल्लेखनीय अंतर है जो मानक (Standard) n के स्थान पर $2n$ है, हम अभिसरण (Convergence) निर्धारित करने के लिए पुनः मूल परीक्षण (Root Test) का प्रयोग करते हैं, इससे हमें प्राप्त होता है,

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{xn}}{(-3)^n}\right|^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{-3}\right|$$

$$= \frac{x^2}{3}$$

हमें अभिसरण (Convergence) प्राप्त होगा यदि–

$$= \frac{x^2}{3} < 1 \Rightarrow x^2 < 3$$

इस प्रकरण में अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) 3 नहीं है। हालांकि अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) x पर 1 का एक घातांक आवश्यक है तब परिणामस्वरूप,

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{3}$$

$$|x| < \sqrt{3}$$

यह अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) की भांति ही होता है, इस तरह $R = \sqrt{3}$, अपसरण (Divergence) की असमानता अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) है, आगे हमें अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) मिलेगा, असमानता (Inequality) से हमें ज्ञात होता है कि,

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

अब हम अंत बिंदु (End Points) की पुष्टि करते हैं।

$x = -\sqrt{3}$ के लिए घात श्रेणी होगी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^{2n}}{(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2\right)^n}{(-3)^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3)^n}{(-1)^n(3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

यह श्रेणी अपसारी (Divergent) है क्योंकि $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ का अस्तित्व नहीं है।

टिप्पणी

$x=\sqrt{3}$ के लिए– यहां हम x का वर्ग करते हैं जिससे श्रेणी आगामी चरण की तरह हो जायेगी जो कि अपसारी (Divergent) है।

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}}{(-3)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

अभिसरण का अंतराल (Interval of Convergence) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ है।

1.2.2 घात श्रेणी पर संक्रियाएं

घात श्रेणियों में जो स्वीकार्य संक्रियाएं (Operations) हैं वे घात श्रेणियों का अवकलन, समाकलन, योग, घटाव, विभाजन तथा गुणन हैं। एक घात श्रेणी के प्रत्येक गुणांक के अपसरण (Divergence) के संबध में प्रतिबंध सूचीबद्ध हैं। ये ही घात श्रेणी को हल करने की आधारभूत विधियां मानी जाती है।

अवकलन (Differentiation)

एक घात श्रेणी का अवकलन पदशः प्रत्येक पद द्वारा किया जाता है, अधिक सटीकता से कहा जाये तो यदि एक घात श्रेणी इस प्रकार है–

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$$

अभिसरण (Converge) के लिए $|x-x_0|<R$ के लिए जहां $R>0$ है तब प्रत्येक पद द्वारा अवकलन से प्राप्त होने वाली श्रेणी भी उन x के लिए अभिसरण (Converge) करेगी और उन x के लिए यह अवकलज y' तथा y के अभिलक्षण भी निर्धारित करेगी जो इस प्रकार–

$$y'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(x-x_0)^{m-1} \qquad (|x-x_0|<R)$$

तथा,

$$y''(x)=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m(x-x_0)^{m-2} \qquad (|x-x_0|<R), \text{ इत्यादि}$$

योग (Addition)

घात श्रेणी को प्रत्येक पद द्वारा जोड़ा जा सकता है और सटीकता से कहा जाये तो यदि श्रेणियां,

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m \text{ तथा } \sum_{m=0}^{\infty}b_m(x-x_0)^m \tag{1.13}$$

अभिसरण की धनात्मक त्रिज्या (Positive Radii of Convergence) निहित है तथा $f(x)$ तथा $g(x)$ योगफल हैं तब श्रेणी,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(a_m+b_m)(x-x_0)^m$$

अभिसरण (Converge) करेगी और ऐसे प्रत्येक x के लिए जो कि दी गयी प्रत्येक श्रेणी के अभिसरण (Convergence) के अंतर्गत है $f(x) + g(x)$ के द्वारा दर्शायी जायेगी।

गुणन (Multiplication)

दो दिए गए घात श्रेणियां प्रत्येक पद द्वारा गुणित भी की जा सकती हैं माना कि समीकरण (1.13) में वर्णित श्रेणी अभिसरण की धनात्मक त्रिज्या (Positive Radius of Convergence) रखती है $f(x)$ तथा $g(x)$ उसके योग (Sums) हैं तब हम पहली श्रेणी के प्रत्येक पद को दूसरी श्रेणी के प्रत्येक पद से गुणा करके और $x - x_0$ की समान घातों को एक साथ करके, श्रेणी प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात्

$$\sum \left(a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0\right)\left(x - x_0\right)^m$$

$$= a_0 b_0 + \left(a_0 b_1 + a_1 b_0\right)\left(x - x_0\right) + \left(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\right)\left(x - x_0\right)^2 + \cdots$$

यह अभिसरण (Converge) होता है तथा प्रत्येक दी गयी श्रेणी के अभिसरण अंतराल (Convergence Interval) के अंतर्गत पड़ने वाले प्रत्येक x के लिए $f(x)\, g(x)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

गुणांकों का विलोपन (Vanishing of Coefficients)

उन प्रकरणों में जहां एक घात श्रेणी की अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) धनात्मक है। साथ ही साथ संपूर्ण अभिसरण के अंतराल (Interval of Convergence) में योग एकसमान रूप से शून्य है तब श्रेणी का प्रत्येक गुणांक शून्य होगा।

योग घातांकों का स्थान्तरण (Shifting Summation Indices)

इसे विशेष उदाहरण देकर समझाया जा सकता है, नीचे दी गयी श्रेणी पर विचार करें,

$$x_2 \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$= x^2\left(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots\right) + 2\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\right)$$

यह श्रेणी एक एकल श्रेणी (Single Series) के रूप में लिखी जा सकती है। हम सर्वप्रथम योग (Summation) के अंतर्गत x^2 का प्रयोग इसे प्राप्त करने के लिए करते हैं–

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^{m-1}$$

माना जिस योगफल को हम प्राप्त करना चाहते हैं उसे s से व्यक्त किया जाता है। हम पहली श्रेणी में m को s से परिवर्तित करते हैं, संकेतन (Notation) का इस तरह बदलना संभव है क्योंकि योग को निरूपित करने वाला अक्षर (Summation Letter) एक प्रतिरूप तालिका है और हम ऐसे किसी भी अक्षर को प्रतिरूप तालिका की तरह उपयोग कर सकते हैं जिसे अभी तक उपयोग न किया गया हो। दूसरी श्रेणी में परिवर्तन वहीं होगा जहां हम एक इकाई परिवर्तन कर सकते हो। इस प्रकार से यदि $m - 1 = s$ है तब $m = 1 + s$, अब योग $s = 0$ से प्रारंभ होगा क्योंकि $m = 0 + 1 = 1$, जो कि पूर्व

टिप्पणी

शुरूआत थी, समस्त रूप में यह इस प्रकार हो जायेगा–

$$\sum_{s=2}^{\infty} s(s-1)a_s x^2 + \sum_{s=0}^{\infty} 2(s+1)a_{s+1}x^s$$

पहली श्रेणी में $s=2$ को $s=0$ से बदलते हैं ताकि हमें यह प्राप्त हो सके

$$\sum_{s=0}^{\infty}[s(s-1)a_s + 2(s+1)a_{s+1}]x^2$$

$$= 2a_1 + 4a_2 x + (2a_2 + 5a_3)x^2 + (6a_3 + 8a_4)x^3 + \cdots$$

1.2.3 घात श्रेणी हल और वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन का अस्तित्व

हम घात श्रेणी के विभिन्न गुणों को अब तक जान चुके हैं, हम जानते हैं कि समीकरणों के घात श्रेणी हल होते हैं। उस श्रेणी पर विचार करें जहां हमारे पास p तथा q गुणांक हों तथा समीकरण के दांयी ओर में फलन r हो तब,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1.14}$$

घात श्रेणी हल का स्वरूप वैसा ही होता है जैसा कि समीकरण (1.14) में दर्शाया गया है, यदि $\tilde{h}, \tilde{p}, \tilde{q}$ तथा $\tilde{r}$ श्रेणी में है तब यह सत्य होगा–

$$\tilde{h}(x)y'' = \tilde{p}(x)y = \tilde{r}(x) \tag{1.15}$$

समीकरण (1.15) में दर्शाये अनुसार भी घात श्रेणी को दर्शाया जा सकता है जहां $\tilde{h}(x_0) \neq 0$ यहां x_0 श्रेणी का केंद्र (Centre of the Series) है।

वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन (Real Analytic Function)

एक वास्तविक फलन $f(x)$ एक बिंदु $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक (Analytic) कहा जायेगा यदि उसे $x = x_0$ की घातों में अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) $R > 0$ के द्वारा एक घात श्रेणी के माध्यम से दर्शाया जा सके। गणित में एक विश्लेषणात्मक फलन वह फलन होता है जो स्थानीय रूप से एक अभिसारी (Convergent) घात श्रेणी द्वारा दिया जा सके। यहां वास्तविक (Real) विश्लेषणात्मक फलन तथा सम्मिश्र या जटिल (Complex) विश्लेषणात्मक फलन दोनों अस्तित्ववान होते हैं। दोनों ही प्रकार के फलन अनंत रूप से अवकलनीय होते हैं लेकिन सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन ऐसे गुण रखते हैं जो कि वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन में सामान्यतः नहीं होते हैं। एक फलन तभी विश्लेषणात्मक होगा यदि और केवल यदि उसके प्रत्येक बिंदु के कुछ सामीप्य (Neighborhood) में वह एक टेलर श्रेणी (Taylor Series) के तुल्य हो यह संकल्पना नीचे दी गयी एक मूलभूत प्रमेय (Fundamental Theorem) के माध्यम से कही जा सकती है।

प्रमेय 1: घात श्रेणी हल का अस्तित्व (Existence of Power Series Solution) समीकरण (1.14) में p, q तथा r, $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक (Analytic) हैं तब समीकरण (1.14) में वर्णित श्रेणी का प्रत्येक हल $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक होगा और $x = x_0$ की घातों में $R > 0$ अभिसरण की त्रिज्या (Radius of Convergence) द्वारा एक घात श्रेणी के

माध्यम से व्यक्त किये जा सकेंगे, यह बात तब भी सत्य होगी जब $\widetilde{h}, \widetilde{p}, \widetilde{q}$ तथा $\widetilde{r}$ समीकरण (1.15) में $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक हैं तथा $\widetilde{h}(x_0) \neq 0^3$, प्रमेय का प्रयोग करके हम घात श्रेणी का अस्तित्व सिद्ध कर सकते हो।

अपनी प्रगति जांचिए

1. घात श्रेणी विधि क्या है?
2. घात श्रेणी को किस तरह व्यक्त किया जाता है?
3. कलन में घात श्रेणी को परिभाषित कीजिए।
4. किस मान पर एक घात श्रेणी का अभिसरण निर्भर करता है।
5. अभिसरण के अंतराल को परिभाषित करो।
6. घात श्रेणी में कौन–कौन सी संक्रियाएं स्वीकार्य हैं?
7. घात श्रेणी के सभी गुणांक कब शून्य होते हैं?

1.3 बेसेल, लीजेण्ड्रे तथा अतिज्यामितीय समीकरण

वे समीकरण तथा उनके मूलभूत गुण निम्नानुसार हैं जिनका प्रयोग घात श्रेणी के मूल्यांकन में किया जाता है–

1.3.1 बेसेल समीकरण

गणित में बेसेल फलन (Bessel Function) सर्वप्रथम गणितज्ञ डेनियल बरनौली (Daniel Bernoulli) द्वारा परिभाषित किये गये तथा इनका प्रसामान्यीकरण फ्रेडरिच बेसेल (Friedrich Bessel) द्वारा किया गया, ये बेसेल अवकल समीकरण (Bessel's Differential Equation) के प्रमाणिक हल $y(x)$ हैं–

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - a^2\right) y = 0$$

इस समीकरण में एक स्वैच्छ वास्तविक या सम्मिश्र संख्या α (जो कि बेसेल फलन की कोटि है) के लिए सबसे सामान्य तथा महत्वपूर्ण वे प्रकरण हैं जिनके लिए α एक पूर्णांक या अर्द्धपूर्णांक (Half Integer) है, हालांकि α तथा $-\alpha$ समान अवकल दर्शाते हैं इसलिए इन दोनों कोटियों (Orders) के लिए अलग–अलग बेसेल फलन को परिभाषित करते हैं। इसलिए बेसेल फलन α के सर्वाधिक निर्बाध (Smooth) फलन हैं। बेसेल फलन बेलन (Cylinder) फलन या बेलनाकार हरात्मक (Cylindrical Harmonic) की तरह भी जाने जाते हैं क्योंकि ये बेलनाकार (Cylindrical) निर्देशांकों में लाप्लास के समीकरण के हलों में मिलते हैं।

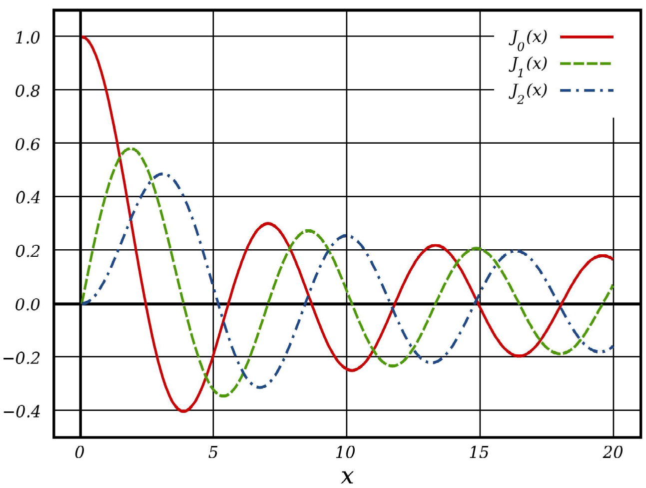
प्रथम प्रकार का बेसेल फलन : J_α

प्रथम प्रकार के बेसेल फलन जो $J_\alpha(x)$ से निरूपित किये जाते हैं, बेसेल के अवकल समीकरण के वे हल हैं जो जो मूल बिंदु $(x = 0)$ पर गैर–ऋणात्मक पूर्णांक α के लिए

परिमित हों तथा ऋणात्मक गैर–पूर्णांक (Non Integer) α के, जैसे ही x शून्य की ओर अग्रसर होता हो, अपसरण (Diverge) करते हैं, $J_\alpha(x)$ के हल का प्रकार तथा सामान्यकरण (Normalization) उसके गुणों द्वारा परिभाषित होते हैं। यह भी संभव है कि $x = 0$ के परितः इस प्रकार उसके टेलर श्रेणी विस्तार द्वारा फलन को परिभाषित किया जा सके–

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}x\right) 2m+\alpha$$

यहां $\Gamma(z)$ गामा फलन है जो गैर–पूर्णांक मानों के लिए भाज्य क्रमगुणित (Factorial) फलन का प्रसामान्यीकरण है। बेसेल फलन के आलेख मोटे तौर पर दोलायमान ज्या या कोज्या (Sine or Cosine) फलन की तरह दिखाई देते हैं जो $1/\sqrt{x}$ के अनुपात में क्षय (Decay) होते हैं। हालांकि इनके मूल (Roots) x के बड़े मानों के प्रकरण को छोड़कर आमतौर पर आवर्ती (Periodic) नहीं होते (देखें चित्र 1.1) तथा टेलर श्रेणी यह दर्शाती है कि $J_1(x)$ $J_0(x)$ का उसी प्रकार व्युत्पन्न (Derivative) है, जैसे कि $\sin x$, $\cos x$ का व्युत्पन्न है। गणितीय रूप से समिकाओं (Identities) का प्रयोग करके $J_n(x)$ के व्युत्पन्नों को $J_{n\pm1}(x)$ के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।



चित्र 1.1 पूर्णांक कोटि α=0,1,2 हेतु प्रथम प्रकार के बेसेल फलन, $J_\alpha(x)$ का आलेख

गैर–पूर्णांक α के लिए फलन $J_\alpha(x)$ तथा $J_{-\alpha}(x)$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं और इसलिए वे अलग–अलग अवकल समीकरणों के दो हल हैं। वैकल्पिक रूप से α की पूर्णांक कोटियों के लिए नीचे दिया गया संबंध वैध (Valid) है–

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

ध्यान रहे कि ऋणात्मक पूर्णांक तर्क (Argument) के लिए गामा फलन, अनंत हो जाता है। इसका अर्थ है कि दो हल रैखिक रूप से स्वतंत्र नहीं रह पाते हैं।

बेसेल के समाकलन (Bessel's Integrals) – नीचे दिए गए स्वरूप वाले एक समाकल निरूपण (Integral Representation) का प्रयोग करते हुए n के पूर्णांक मानों

के लिए बेसेल फलन की एक अन्य परिभाषा देना भी संभव है—

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\tau - x\sin\tau)\,d\tau$$

एक अन्य समाकल निरूपण इस प्रकार है,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\tau - x\sin\tau)}$$

यह वही विधि थी जिसका स्वयं बेसेल ने प्रयोग किया और इसी परिभाषा से उन्होंने फलन के विभिन्न गुणों को व्युत्पन्न किया था। इस परिभाषा को एक अन्य पद के समावेश द्वारा गैर–पूर्णांक (Non-Integer) के लिए भी विस्तारित किया जा सकता है।

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha\tau - x\sin\tau)\,d\tau - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^{\infty} e - x\sinh \le (\tau) - \alpha\tau d\tau$$

या $\alpha > -\frac{1}{2}$ के लिए इस प्रकार से—

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}x^\alpha}\int_0^{x}\left(x^2 - \tau^2\right)^{\alpha - 1/2}\cos\tau$$

अतिज्यामितीय श्रेणी से संबंध (Relation to Hypergeometric)

बेसेल फलन को प्रसामान्यीकृत अतिज्यामितीय (Normalized or Hypergeometric) श्रेणी के पदों को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—

$$J_\alpha(x) = \frac{(x/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{\pi}x^\alpha} \circ F_1\left(\alpha + 1 - \frac{1}{4}x^2\right)$$

यह व्यंजक बेसेल फलन के बेसेल–क्लिफोर्ड फलन (Bessel-Clifford Function) के पदों में विकसित करने से संबंधित है।

द्वितीय प्रकार का बेसेल फलनः Y_α

द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन (Bessel Function) जिन्हें $Y_\alpha(x)$ से निरूपित किया जाता है, बेसेल अवकल समीकरण (Bessel Differential Equation) के हल होते हैं, ये मूलबिंदु $(x = 0)$ पर विशिष्टता (Singlularity) रखते हैं। $Y_\alpha(x)$ को कभी–कभी न्यूमेन फलन (Neumann Function) और कुछ मौकों पर इसे अलग हटकर $N_\alpha(x)$ से भी प्रदर्शित किया जाता है। गैर–पूर्णांक (Non-Integer) α के लिए यह $J_\alpha(x)$ से इस संबंध के माध्यम से संबंधित होता है—

$$J_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

पूर्णांक कोटि (Integer Order) n के प्रकरण में फलन को एक गैर–पूर्णांक सीमा (Limit) α जो 'n' की ओर अग्रसर हो, इसे निम्न समीकरण परिभाषित किया गया है—

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} Y_\alpha(x)$$

यह परिणाम को समाकलन रूप (Integral Form) में इस प्रकार दर्शाता है–

टिप्पणी

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right] e^{-x\sinh t}\,dt$$

गैर–पूर्णांक (Non Integer) α के प्रकरण में $Y_\alpha(x)$ की परिभाषा निरर्थक (Redundant) है इसके अलावा जब α एक पूर्णांक होता है तब $Y_\alpha(x)$ बेसेल समीकरण का द्वितीय रैखीय रूप से स्वतंत्र हल (Second Linearly Independent Solution) होता है। इसी प्रकार पहले प्रकार (First Kind) के फलन के प्रकरण में नीचे दिया गया संबंध वैध (Valid) माना जाता है।

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n\, Y_n(x)$$

ऋणात्मक वास्तविक अक्ष के अनुदिश प्रतिच्छेद किए गये सम्मिश्र समतल (Complex Plane) पर $J_\alpha(x)$ तथा $Y_\alpha(x)$ x के पूर्ण सममितिक (Holomorphic)फलन हैं। जब α एक पूर्णांक है तब बेसेल फलन J, x के संपूर्ण फलन हैं और यदि x नियत (Fixed) रहता है तब तो बेसेल फलन α के संपूर्ण फलन (Entire Function) होते हैं।

1.3.2 लीजेण्ड्रे समीकरण

गणित में **लीजेण्ड्रे समीकरण (Legendre's Equation)** एक डायोफैंटाइन (Diophantine) समीकरण है और इसे इस तरह दर्शाया जाता है–

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

इसका नामकरण एड्रिन मेरी लीजेण्ड्रे (Adrien Marie Lagendre) के 1785 में यह सिद्ध करने के बाद किया गया कि x, y, z में हल किया जा सकता है यदि ये सभी शून्य न हों तो, यदि और केवल यदि $-bc, -ca$ तथा $-ab$ क्रमशः द्विघात अवशेषी मापांक (Quadratic Residues Modulo) a, b तथा c हो जहां a, b, c गैर–शून्य (Non-Zero) वर्ग निरपेक्ष युग्मानुसार (Square Free Pairwise) तुलनात्मक रूप से अभाज्य पूर्णांक (Prime Integers) हों न ही सभी धनात्मक हों न ही सभी ऋणात्मक हों।

लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण द्वितीय कोटि (Second Order) का साधारण अवकल समीकरण है जिसे इस रूप में लिखा जाता है–

$$(1-x^2)d^2y/dx^2 - 2xdy/dx + l(l+1)y = 0$$

इसे इस तरह भी लिखा जा सकता है–

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0$$

$Ly = 0$ के लिए, यहां L को लीजेण्ड्रे संकारक (Legendre's Operators) कहा जाता है–

$$L = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)$$

टिप्पणी

अंतराल (Region) $|x| \le 1$ में समीकरण को हल करने के लिए फ्रोबेनियस (Frobenius) विधि का उपयोग किया जा सकता है, फ्रोबेनियस विधि में परिमाप p को हम शून्य नियत समुच्चय (Set) कहते हैं।

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

इन पदों को मूल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा–

$0 = Ly = (1 - x^2)\, y'' - 2xy' + l\,(l+1)\, y$

$$= \left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} + l(l+1)a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-n(n-1) - 2n + l(l+1)\right]a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[l^2 - n^2 + l - n\right]a_n x^n + \sum_{n=-2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(l+n+1)(l-n)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\right]$$

इस प्रकार $a_2 = -\dfrac{l(l+1)}{2}a_0$

तथा $\qquad a_{n+2} = -\dfrac{l(l+n+1)(l-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$

यह श्रेणी अभिसरण (Converge) करती है यदि,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| < 1$$

अतः श्रेणी हल को यह निदिष्ट करके सीमित किया जाना चाहिए–

$n = -l$ या $n = -(l+1)$

विशिष्ट पूर्णांकों l तथा $l+1$ में श्रेणी का भाग जो बहुपद उत्पन्न करेगा वह लीजेण्ड्रे बहुपद कहलायेगा।

टिप्पणी

घात श्रेणी से हल (Solution via Power Series)

लीजेण्ड्रे समीकरण को निम्न रूप में दर्शाया जाता है–

$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n\,(\,n + 1)\, y = 0$

यह समीकरण $x_0 = 0$ के परितः विश्लेषणात्मक (Analytic) है इसलिए $y(x)$ को निर्धारित करने में हम मानक घात श्रेणी विधि (Standard Power Series Method) का प्रयोग कर सकते हैं, इसमें हम मानते हैं कि,

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\hbar} a_m x^m$$

मूल समीकरण में इसे तथा इसके उपयुक्त अवकलजों (Derivatives) का प्रतिस्थापन करने पर हमें निम्न स्वरूप वाला पुनरावृत्ति संबंध (Recurrence Relation) प्राप्त होता है–

$$a_{m+2} = -\frac{(n-m)(n+m+1)}{(m+2)(m+1)} a_m$$

यहां a_0 तथा a_1 स्वैच्छ नियतांक (Arbitrary Constant) हैं तथा $m = 0, 1, 2, \ldots.$ इस प्रकार लीजेण्ड्रे समीकरण का हल इस तरह लिखा जा सकता है–

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

यहां $y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)(n+3)n(n+1)}{4!}x^4 - \ldots.$

तथा

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n+4)(n+1)(n+2)}{5!}x^5 - \ldots.$$

यह श्रेणी $|x| \le 1$ के लिए अभिसरण (Converge) करती है।

1.3.3 अतिज्यामितीय समीकरण

गॉउसियन अतिज्यामितीय (Gaussian Hypergeometric) अवकल समीकरण को इस प्रकार से लिख सकते हैं:

$$x(1-x)y'' + \{c - (a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

यहां a, b तथा c नियतांक (Constant) समीकरण हैं, अतिज्यामितीय समीकरण (Hypergeometric Equation) का सांकेतिक समीकरण (Indicial Equation) निम्न स्वरूप का होता है–

$r^2 - (1 - c)\, r = 0$

यह $r_1 = 0$ तथा $r_2 = 1 - c$ मूल (Roots) रखता है, फ्रोबेनियस विधि (Frobenius Method) का प्रयोग करते हुए $r_1 = 0$ के लिए श्रेणी हल (Series Solution) निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{!!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

टिप्पणी

यहां $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ और श्रेणी $-1 < x < 1$ के लिए अभिसरण (Converge) करती है। इस श्रेणी को अतिज्यामितीय (Hypergeometric) श्रेणी कहा जाता है। अतिज्यामितीय (Hypergeometric) श्रेणी का योग $F(a, b; c; x)$ से व्यक्त किया जाता है और यह अतिज्यामितीय फलन (Hypergeometric Function) कहलाता है, इसे इस प्रकार दर्शाया जाता है–

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{2!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

सामान्य हल (General Solution)

यदि $c, a-b$ तथा $c-a-b$ सभी गैर–पूर्णांक (Non-Integer) हैं तब अतिज्यामितीय (Hypergeometric) अवकल समीकरण के लिए सामान्य हल इस स्वरूप (Form) का होगा–

$$y = AF(a,b;c;x) + Bx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x)$$

जो $-1 < x < 1$ के लिए वैध (Valid) होगा।

गामा फलन (Gamma Function)

एक अतिज्यामितीय फलन (Hypergeometric Function) को गामा फलन के पदों में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$F(a,b,c,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 \mathrm{v}^{b-1}(1-v)^{c-b-1}(1-\mathrm{v}x)^{-a}\,dv$$

$x = 1,$ के लिए

$$F(a,b,c,1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

1.3.4 नियमित एकल बिंदु

एक अवकल समीकरण का एक नियमित एकल बिंदु (Regular Singular Point) समीकरण का एक ऐसा एकल बिंदु (Singular Point) होता है जिस पर भी हल एक अनिवार्य विशिष्टता (Essential Singularity) नहीं रखता है। गणित में सम्मिश्र समतल (Complex Plane) C में साधारण अवकल समीकरण के सिद्धांत में C के बिंदु वर्गीकृत किये जाते हैं साधारण बिंदु (Ordinary Points) जहां समीकरण के गुणांक विश्लेषणात्मक फलन (Analytic Functions) होते हैं तथा एकल बिंदुओं (Singular Points) में, जहां कुछ गुणांक विशिष्टता (Singularity) रखते हैं। एकल बिंदुओं में एक महत्वपूर्ण विभेद नियमित एकल बिंदुओं (Regular Singular Points) के बीच किया गया है जहां (एक छोटे खण्ड में) हल की वृद्धि (Growth) एक बीजगणितीय फलन के द्वारा बाध्य (Bound) होती है जबकि एक अनियमित एकल बिंदु (Irregular Singular Point) वह है

जहां संपूर्ण हल समूह (Solution Set) को अधिक वृद्धि दर वाले फलनों की आवश्यकता होती है। यह विभेदन तीन नियमित एकल बिंदु वाली अतिज्यामितीय (Hypergeometric) समीकरण में तथा बेसेल समीकरण के सीमांत प्रकरण (Limiting Case) में लेकिन तब जबकि विश्लेषणात्मक गुण (Analytic Properties) बहुत हद तक भिन्न होती है, पाया जाता है और अधिक विशिष्टता के साथ nवीं कोटि की एक एक साधारण अवकल समीकरण के इस स्वरूप (Form) पर विचार करें–

$$\sum_{i=0}^{n} Pi(z) f^{(i)}(z) = 0$$

यहां $p_i(z)$ मेरोमार्फिक फलन (Meromarphic Fuction) हैं। कोई ऐसा मान सकता है कि $p_n(z) = 1$ लेकिन यदि ऐसी परिस्थिति नहीं है तब इस समीकरण को $p_n(x)$ से विभाजित किया जाना चाहिए। ऐसा करने से विचार करने को एकल बिंदुओं का आगमन होता है, यह समीकरण रीमान वृत्त (Riemann Sphere) पर अध्ययन किया जाना चाहिए जो अनंत पर स्थित बिंदु को एक संभावित एकल बिंदु के रूप में समाहित किये हों। जरूरत पड़ने पर सम्मिश्र समतल (Complex Plane) के परिमित भाग में ∞ को ले जाने के लिए मोबियन रूपांतरण (Mobius Transformation) का प्रयोग किया जा सकता है।

सम्मिश्र तल में किसी दिये गये a के निकट उन सम्भावित हलों को ज्ञात करने के लिए जो सम्मिश्र घातों (Complex Powers) $(z-a)^r$ के घात श्रेणी गुना हैं सांकेतिक समीकरण (Indicial Equation) पर आधारित फ्रोबेनियस विधि का तब प्रयोग किया जा सकता है, यहां यह जरूरी नहीं है कि r पूर्णांक ही हो। यह फलन का अस्तित्व हो सकता है इसलिए a में से एक शाखा बाहर निकलेगी या a के परितः एक छिद्रित डिस्क कि एक रीमान सतह (Riemann Surface) पर होगी यह a के एक साधारण बिन्दु (Ordinary Point) होने के लिए कोई कठिनाई प्रस्तुत नहीं करता है, a जब एक नियमित एकल बिन्दु है, जो कि परिभाषा अनुसार $p_{n-i}(z)$ है तब इसे एक a पर एक ध्रुव (Pole) की कोटि समान्यतौर पर $i\,a$ पर होना चाहिए।

a के समीप n स्वतंत्र हल प्रदान करने के लिए भी फ्रोबेनियस विधि का प्रयोग किया जा सकता है ऐसा नहीं होने पर a एक अनियमित विशिष्टता (Irregular Singularity) होगी, एक साधारण अवकल समीकरण जिसके अनंत अस्तित्व बिन्दु समेत केवल विशिष्ट बिन्दु (Singular Points) नियमित (Regular) एकल बिन्दु होते हैं एक फुक्सियन (Fuchsian) साधारण अवकल समीकरण कहलाते हैं।

द्वितीय कोटि (Second Order) अवकल समीकरणों के उदाहरण

ऊपर दी गयी समीकरण संक्षिप्त (Reduce) करके निम्न रूप से दर्शाते हैः

$$f''(x) + p_1(x)\, f'(x) + p_0(x) f(x) = 0$$

यहां निम्नलिखित शर्तें विभेदित की जा सकती है

- बिन्दु a एक साधारण बिन्दु होगा जबकि $x = a$ पर फलन $p_1(x)$ तथा $p_0(x)$ विश्लेषणात्मक हो।

टिप्पणी

- बिन्दु a एक नियमित एकल बिन्दु (Regular Singular Point) होगा यदि $x = a$ पर $p_1(x)$ एक 1 कोटि का ध्रुव रखता हो तथा $x = a$ पर p_0 2 तक की कोटि का ध्रुव रखता हो।
- अन्य स्थितियों में बिन्दु a एक अनियमित एकल बिन्दु (Irregular Singular Point) होगा।

साधारण अवकल समीकरणों के ये उदाहरण एकल बिन्दु तथा ज्ञात हल रखने वाले होते हैं।

बेसेल अवकल समीकरण (Bessel Differential Equation) : यह द्वितीय कोटि की एक साधारण अवकल समीकरण है। लाप्लास समीकरण को बेलनाकार निर्देशांकों (Cylindrical Coordinates) में हल करने में यह स्थापित होती हैः

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x\frac{df}{dx} + \left(x^2 - \alpha^2\right) f = 0$$

एक स्वैच्छ वास्तविक अथवा संम्मिश्र संख्या α (सेल फलन की कोटि) के लिए सबसे सामान्य तथा महत्वपूर्ण विशिष्ट प्रकरण वह है, जहां α एक पूर्णांक (Integer) हैं n है।

समीकरण को x^2 से विभाजित करने पर यह प्राप्त होता हैः

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) f = 0$$

इस प्रकरण में $x = 0$ पर $p_1(x) = 1/x$ पहली कोटि का एक ध्रुव रखता है जबकि $\alpha \neq 0$ $p_0(x) = (1 - \alpha^2/x^2)$ होने पर $x = 0$ पर यह द्वितीय कोटि (Second Order) का ध्रुव रखता है इसलिए O पर यह समीकरण एक नियमित एकलता (Regular Singularity) रखती है।

यह जानने के लिए कि सब $x \to \infty$ हो तब क्या होगा हमें मोबियस रूपांतरण प्रयोग द्वारा उदाहरण के लिए $x = 1 / (w - b)$, बीजगणितीय संक्रियाएं सम्पन्न करने परः

$$\frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{1}{w-b}\frac{df}{dw} + \left[\frac{1}{(w-b)^4} - \frac{\alpha^2}{(w-b)^2}\right] f = 0$$

अब $w = b$ पर $p_1(w) = 1/(w - b)$ का एक ध्रुव पहली कोटि का होगा तथा $w = b$ पर $p_0(w)$ एक चतुर्थ कोटि का ध्रुव रखेगा, इस प्रकार इस समीकरण में अनियमित एकलता होगी। $w = b, x$ के ∞ पर होने के संगत है इसलिए इस अवकल समीकरण जो कि बेसेल फलन के हल का यहां एक आधार है।

लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण (Legendre Differential Equation) : यह द्वितीय कोटि का एक साधारण अवकल समीकरण है। यह लाप्लास समीकरण में वृत्तीय निर्देशांकों (Spherical Coordinates) के हल से प्राप्त होता हैं:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] + n(n+1) f = 0$$

टिप्पणी

वर्ग के कोष्ठकों खोलने पर प्राप्त होगाः

$$(1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} + n(n+1)f = 0$$

$(1 - x^2)$ से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होगाः

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{2x}{\left(1-x^2\right)}\frac{df}{dx} + \frac{n(n+1)}{\left(1-x^2\right)}f = 0$$

यह अवकल समीकरण $-1, +1$ तथा ∞ पर नियमित एकल (Regular Singular) बिन्दु रखती है।

अतिज्यामितीय समीकरण (Hypergeometic Equation) : इसे इस तरह परिभाषित किया जा सकता है।

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[c-(a+b+1)\,z\right]\frac{df}{dz} - abf = 0$$

दोनों ओर $z\,(1 - z)$ से विभाजित करने पर प्राप्त होगाः

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{c-(a+b+1)\,z}{z(1-z)}\frac{df}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)}f = 0$$

$0, 1$ तथा ∞ पर यह अवकल समीकरण नियमित एकल (Regular Singular) बिन्दु रखती है।

अपनी प्रगति जांचिए

8. प्रथम प्रकार के बेसेल फलन क्या है ?
9. द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन को कैसे दर्शाया जाता है?
10. गणितीय रूप से लीजेण्ड्रे के समीकरण को कैसे दर्शाया जाता है?
11. द्वितीय कोटि का लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण लिखिए।
12. अतिज्यामितीय समीकरणों में सांकेतिक समीकरण का स्वरूप कैसा होता है?
13. एक अवकल समीकरण के लिए नियमित एकल एकल बिन्दुओं को परिभाषित कीजिए।

1.4 फलनों तथा पुनरावृत्ति संबंधों की उत्पत्ति

गणित में एक पुनरावृत्ति संबंध एक समीकरण है, जो पुनरावर्ततः (Recursively) एक अनुक्रम (Sequence) को परिभाषित करता है, जहां अनुक्रम के प्रत्येक पद (Term) को अपने पूर्वगामी (Preceding) पद के फलन के रुप में परिभाषित किया जा सकता है। कई बार एक विशिष्ट प्रकार के पुनरावृत्ति संबंध में लिए ''विभेद समीकरण (Difference Equation) शब्द का भी उपयोग किया जाता है, ध्यान रहे कि किसी पुनरावृत्ति संबंध को दर्शाने के लिए प्रायः विभेद समीकरण शब्द का ही उपयोग किया जाता है।

पुनरावृत्ति संबंध का एक उदाहरण एक तार्किक (Logical) प्रतिरूपण है जो इस तरह व्यक्त किया जा सकता है।

$$x_{n+1} = rx_n (1 - x_n)$$

कुछ सरलता से परिभाषित पुनरावृत्ति संबंध बहुत जटिल कार्य प्रणाली रखने वाले हो सकते हैं ये गणित के उस क्षेत्र का हिस्सा होते हैं जिसे अरैखिक विश्लेषण (Non Linear Analysis) कहते हैं। एक पुनरावृत्ति संबंध को हल करने का अर्थ एक संवृत स्वरूप हल (Closed Form Solution) या n का एक गैर–पुनरावृत्तीय (Non-Recursive) संवृत्त स्वरूप देने से होता है।

अचर गुणांको से युक्त रैखिक समरूप पुनरावृत्ति संबंध (Linear Homogeneous Recurrence Relations with Constant Coefficients)

एक कोटि d का रेखीय समरूप (Linear Homogeneous) अचर गुणांकों वाला पुनरावृत्ति संबंध इस स्वरुप (Form) वाला होता है।

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_d a_{n-d}$$

जहां d गुणांक c_i (सभी i के मानों के लिए) अचर (Constant) है। अधिक विशेषता बताते हुए कहा जाये तो यह एक ऐसी अनंत रैखिक युगपत् समीकरण (Infinite Simultaneous Linear Equation) होगी जिसके लिए प्रत्येक $n > d - 1$, एक ऐसा अनुक्रम (Sequence) जो इस प्रकार के एक संबंध को संतुष्ट करता है एक रैखिक पुनरावृत्ति अनुक्रम (LRS) कहलाता है। LRS लिए यहाँ स्वतंत्रता की कोटियां (Degree of Freedom) d है। प्रारंभिक मान $a_0, \ldots a_{d-1}$ किसी भी मान को लिया जा सकता है लेकिन रैखिक पुनरावृत्ति अद्वितीय रूप से (Uniquely) अनुक्रम (Sequence) को निर्धारित करेगी। ये समान गुणांक ही निम्न स्वरूप वाला अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial) प्रदान करते हैं:

$$p(t) = t^d - c_1 t^{d-1} - c_2 t^{d-2} - \cdots - c_d$$

इसके d मूल (Root) पुनरावृत्ति को संतुष्ट करने वाली अनुक्रम या अनुक्रम का पता करने तथा उसे समझने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। यदि मूल $r_1, r_2, \cdots$ सभी अलग–अलग (Distinct) है तब पुनरावृत्ति का हल इस प्रकार का स्वरूप को निरूपित करेगा:

$$a_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n + \ldots + k_d r_d^n$$

यहां पुनरावृत्ति (Recursive) की प्रारंभिक शर्तों को समायोजित (Fit) करने के दिशा में गुणांक k_i निर्धारित किये जाते हैं। जब वही समान मूल अनेक बार आते हैं तब इस सूत्र (Formula) के पद (Terms) द्वितीय (Second) के संगत होते है और उसके बाद भी उन्हीं मूलों का आना n की बढ़ती हुई घातों के गुणन के साथ होता है, उदाहरण के लिए यदि अभिलाक्षणिक बहुपद का $(x - r)^3$ के रूप में गुणनखंड किया जा सके जबकि वही समान मूल r तीन बार अस्तित्व में होता है।

तब हल कुछ ऐसा रूप ले लेगा जो निम्नांकित किया गया है,

$$a_n = k_1 r^n + k_2 n r^n + \ldots + k_3 n^2 r^n$$

टिप्पणी

परिमेय जनक फलन (Rational Generation Function)

रैखिक पुनरावृत्ति अनुक्रम या (Linear Recursive Sequence या **LRS**) ठीक–ठीक वह अनुक्रमित होता है जिसका जनक फलन एक परिमेय (Rational) फलन हो जहां हर (Denominator) एक सहायक (Auxiliary) बहुपद (Polynomial) हो तथा अंश (Numerator) बीज मानों (Seed Values) से प्राप्त हुआ हो।

इसका सरलतम उदाहरण आवर्ती अनुक्रम (Periodic Sequences) है, $a_n = a_{n-d,}\ n \geq d$ जहां $a_0, a_1, \ldots a_{d-1},\ a_0 \ldots$ अनुक्रम रखता है और जनक फलन निम्न स्वरूप वाला ज्यामितीय (Geometric) श्रेणियों का योग होता है:

$$\frac{a_0 + a_1 x^1 + \ldots a_{d-1}\, x^{d-1}}{1 - x^d}$$
$$= (a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{d-1} x^{d-1})$$
$$+ (a_0 + a_1 x^1 + \cdots a_{d-1} x^{d-1})\, x^d$$
$$+ (a_0 + a_1 x^1 + \cdots a_{d-1} x^{d-1})\, x^{2d} + \cdots$$

सामान्यतः पुनरावृत्ति संबंध इस प्रकार दिया जाता है:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_d a_{n-d}$$

जनक फलन (Generating Function) के साथ

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots$$

a_d और उसके ऊपर श्रेणी का बहुपद द्वारा शमन (Annihilated) हो जाता है:

$$1 - c_1 x^1 - c_2 x^2 + \cdots - c_d x^d$$

जनक फलन (Generating Function) को बहुपद से गुणा करने पर निम्न समीकरण प्राप्त होगा:

$$b_n = a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_d a_{n-d}$$

यहां $n \geq d.$ के लिए x^n के गुणांक पुनरावृत्ति संबंध द्वारा विलुप्त कर दिये जाएंगे।

$$\left(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots\right)\left(1 - c_1 x^1 - \ldots c_d x^d\right)$$

$$= \left(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_{d-1} x^{d-1}\right)$$

भाग देने पर मिलेगा,

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots = \frac{b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_d x^{d-1}}{1 - c_1 x^1 - c_2 x^2 - \ldots - c_d x^d}$$

यह जनक फलन (Generating Function) को एक परिमेय फलन के रूप में व्यक्त करता है, हर (Denominator) $x^d\, p(x^{-1})$ है जो सहायक बहुपद को निर्बाध रूप

से गुणांकों का क्रम पलटकर बदलता रहता है, यह सामान्यीकरण (Normalization) सहायक बहुपद से सरल संबंध इसलिए $b_0 = a_0$ है।

विभेद समीकरण से संबंध (Relationship to Difference Equation)

वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित अनुक्रम (Ordered Sequence) दिया गया है तब पहला विभेद (First Diffeence) $\Delta(a_n)$ इस प्रकार परिभाषित होगा–

$$\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n$$

द्वितीय विभेद (Second Diffeence) $\Delta^2(a^n)$ इस प्रकार परिभाषित होगा :

$$\Delta^2(a_n) = \Delta(a_{n+1}) - \Delta(a_n)$$

इसे इस रूप में सरल किया जा सकता है :

$$\Delta^2(a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

मूलभूत रूप से अनुक्रम a_n का K वां विभेद $\Delta^2(a_n)$ लिखा जा सकता है जिसे पुनरावृत्ति रूप से इस तरह परिभाषित किया जा सकता है,

$$\Delta^2(a_n) = \Delta^{K-1}(a_{n+1}) - \Delta^{K-1}(a_n)$$

विभेद समीकरण (Difference Equation) की अधिक प्रतिबंधात्मक परिभाषा a_n तथा उसके K वें विभेद से निर्मित समीकरण है। रैखिक विभेद समीकरण इसके विपरीत रैखिक पुनरावृत्ति संबंध (Linear Recurence Relation) का एक सरल तथा सामान्य स्वरूप है। उदाहरण के लिए इस विभेद समीकरण पर विचार करें :

$$3\Delta^2(a_n) = 2\Delta(a_n) + 7a_n = 0$$

यह समीकरण इस पुनरावृत्ति (Recurrence) संबंध के तुल्य है:

$$3a_{n+2} = 4_{an+1} - 12_{an}$$

इस प्रकार कोई अनेक पुनरावृत्ति संबंधों को विभेद (Difference) समीकरणों में अलग परिवर्तित कर तथा उन विभेद समीकरणों को हल कर सकता है उसी तरह, जैसे, वह साधारण अवकल समीकरणों को हल करता है।

जनक फलन (Generating Functions)

जनक फलन,

$$g(x) = \frac{x+1-\sqrt{x^2-6x+1}}{4} = 1x^1 + 1x^1 + 3x^3 + 11x^4 + 45x^5 +$$

यह (लघु) श्रोडिंगर संख्याओं (Schrödinger Number) पर मिश्रित परिभाषा से व्युत्पन्न किये हैं। कुछ पुनरावृत्ति संबंध इन संख्याओं से संतुष्ट होते हैं। यह दर्शाने के लिए कि कैसे ये पुनरावृत्ति संबंध जनक फलन से संबंधित हैं, $g(x)$ के अवकलज (Derivatives) को देखते हैं :

$$g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{x-3}{4\sqrt{x^2-6x+1}}$$

टिप्पणी

अतः $g(x)$ तथा $g'(x)$ को इस प्रकार लिखा जा सकता हैः

$$g(x)=\frac{x+4-Q}{4}\quad g'(x)=\frac{1}{4}-\frac{x-3}{4Q}$$

यहां Q, x^2-6x+1 के वर्गमूल को व्यक्त करता है। g, g' तथा x के बीच संबंध को दर्शाया जा सकता है ऐसा कि जिसमें वर्गमूल सम्मिलित न हो इस दिशा में बढ़ने के लिए इन दोनों समीकरणों में से प्रत्येक को Q के लिए हल करना होगा और फिर इन दोनों व्यंजकों को बराबर रखना होगा ऐसा करने पर निम्न समीकरण प्राप्त होगा :

$$4gg'-g-(1+x)g'+1=0$$

माना s_j, j वे लघु श्रोडिंगर संख्या को व्यक्त करते हैं तब फलनों g तथा g' के श्रेणी विस्तार इस प्रकार होंगेः

$$g(x)=s_1x+s_2x^2+s_3x^3+s_4x^4+\dots$$

$$g'(x)=s_1+2sx+3sx^2+4s_4x^3+\dots$$

पहले से परिभाषित समीकरण में g तथा g' के व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने तथा परिणामी व्यंजक में x की प्रत्येक घात का गुणांक शून्य पर समुच्चयित करने पर, हमें निम्न समीकरण मिलते हैंः

$$s_1=1$$
$$s_2=-s_1+2(s_1s_2)$$
$$s_3=-s_2+2(s_1s_2+s_2s_1)$$
$$s_3=-s_2+2(s_1s_2+s_2s_1)$$
$$s_4=-s_3+2(s_1s_3+s_2s_3+s_3s_1)$$
$$s_5=-s_4+2(s_1s_4+s_2s_3+s_3s_2+s_4s_1)$$
$$s_6=-s_5+2(s_1s_5+s_2s_4+s_3s_3+s_4s_2+s_5s_1)$$ इत्यादि।

इससे इस स्वरूप वाला एक घूर्णी पुनरावर्तन संबंध (Convolution Recurrence Relation) मिलेगा,

$$s_n=-s_{n-1}+2\sum_{j=1}^{n-1}s_js_{n-j}$$

यदि हमें इन फलनों को जोड़ने (Link) करने वाला एक रैखिक समीकरण मिलता है तो एक सरल पुनरावृत्ति संबंध पाया जायेगा इसके लिए हमें $g(x)$ वाले समीकरण को 4 से गुणा करना होगा और $g'(x)$ वाले समीकरण को $4Q^2$ से, इससे हमें यह प्राप्त होगाः

$$4g(x)=x+1-Q\quad 4Q^2g'(x)=Q^2-(x-3)Q$$

चूंकि $Q^2=x^2-6x+1$, हम बांयी ओर के समीकरण द्वारा दी गयी Q के व्यंजक के दांयी ओर वाले समीकरण में इसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं, ऐसा करने पर हमें प्राप्त होगा :

$(Q^2 = x^2 - 6x + 1)(4g' - 1) + (x - 3)(x + 1 - 4g)$

इस समीकरण को विस्तारित तथा सरल कर इस रूप में लिखा जा सकता है:

$(x - 3)g - (x^2 - 6x + 1)g' - (x - 1) = 0$

g तथा g′ के लिए विस्तारों को इस समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर तथा अंतिम व्यंजक में x की प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य परिभाषित करने पर :

$1s_1 = 1$

$2s_2 = 3s_1 - 1$

$3s_3 = 9s_2 - Os_1$

$4s_4 = 15s_2 - 1s_2$

$5s_5 = 21s_4 - 2s_3$

$6s_6 = 27s_5 - 3s_4$

$7s_7 = 33s_6 - 45s_5$

हमें पुनरावृत्ति ((Recurrence)) इस प्रकार प्राप्त होगी :

$ns_n = 3(2n - 3)s_{n-1-} - (n - 3)s_{n-2}$

विपरीत दिशा में बढ़ने अर्थात संख्याओं की एक श्रेणी के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध निश्चित करने की दिशा में हम उस अनुक्रम के लिए जनक फलन स्थापित कर सकते हैं। एक विशिष्ट अनुक्रम कई पुनरावृत्ति संबंधों को संतुष्ट कर सकता है इसलिए यहां को अद्वितीय (Unique) प्रारंभिक बिंदु (Initial Point) नहीं होता है यदि संवलन (Convolution) पुनरावृत्ति हमें ज्ञात हो तब हम निम्नानुसार संबंधों में से प्रत्येक को x की संगत घात से गुणा कर सकते हैं :

$s_1x = 1x$

$s_2x^2 = -s_1x^2 + 2(s_1s_2)x^2$

$s_3x^3 = -s_2x^3 + 2(s_1s_2 + s_2s_1)x^3$

$s_4x^4 = -s_3x^4 + 2(s_1s_3 + s_2s_2 + s_3s_1)x^4$

$s_5x^5 = -s_4x^5 + 2(s_1s_4 + s_2s_3 + s_3s_2 + s_4s_1)x^5$

$s_6x^6 = -s_5x^6 + 2(s_1s_5 + s_2s_4 + s_3s_3 + s_4s_2 + s_5s_1)x^6$ इत्यादि

इन समीकरणों को जोड़ने पर हमें प्राप्त होगा :

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = x - x\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n + 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n\right)^2$$

परिभाषानुसार प्रत्येक संकलन (Summation) $g(x)$ का एक जनक फलन है जो प्रतिस्थापन करता है तथा यह प्रदान करने के लिए पदों (Terms) को पुनर्विन्यासित (Rearrange) करता है।

$2g(x)^2 - (1 + x)g(x) + x = 0$

इस समीकरण का अवकलन करने पर हमें मिलता है :

$4gg'(x)^2 - (1 + x)g' - g + 1 = 0$

टिप्पणी

सर्वप्रथम चरों का परिवर्तन करके इस अवकल समीकरण को हल किया जा सकता है इसके बाद एक $h(x)$ परिभाषित होगा और $g(x)$ के पदों में उसके अवकलज, इसके अवकलज निम्न प्रकार से निरुपित करेंगे,

$$h = Ag^2 + Bg + C,\ h' = 2Agg' + A'g^2 + Bg' + C'$$

ध्यान रहे कि यदि हम निर्धारित कर दें कि $A(X) = 2, B(x) = -(1-x)$ तथा $C(X) = X$ तब h के पदों में लिखी अवकलन समीकरण $h' = 0$ होगा इससे अर्थ निकलेगा कि h एक समाकलन का स्वैच्छ नियतांक है। h के लिए तथा g के लिए हल करने के लिए A, B तथा C के मान समीकरण में रखते हैं, तब हमें प्राप्त होगाः

$$g(x) = \frac{1 + x - \sqrt{x^2 - 6x + 1 + 8h}}{4}$$

प्रारंभिक मानों से मिलान रखने के लिए इस समीकरण में $h = 0$ होगा और यह (लघु) श्रोडिंगर संख्याओं के लिए मूल जनक फलन माना जायेगा।

एक दिये गये द्वितीय कोटि के पुनरावृत्ति (Recurrence) संबंध के लिए भी हम इसी तरह आगे बढ़ते हैं तथा प्रत्येक मूलभूत संबंध को x की संगत घात से गुणा करते हैं। इससे निम्न स्वरूप की समीकरण मिलती है :

$$1s_1x = x$$
$$2s_2x^2 = 3s_1x^2 - x^2$$
$$3s_3x^3 = 9s_2x^3 - 0s_1x^3$$
$$4s_4x^4 = 15s_3x^4 - 1s_2x^4$$
$$5s_5x^5 = 21s_4x^5 - 2s_3x^5$$
$$6s_6x^6 = 27s_5x^6 - 3s_4x^6$$
$7s_7x^7 = 33s_6x^7 - 4s_5x^7$, इत्यादि,

इन्हें जोड़ने पर हमें प्राप्त होता हैः

$$\sum_{n=1}^{\infty} ns_nx^n = x + 3x\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)s_nx^n - x^2 - x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)s_nx^n$$

दांयी ओर जो दो संकलन हैं उन्हें दो में विभक्त किया जा सकता है एक जो n के गुणनखंडों (Factors) से युक्त हो और दूसरा जो इनसे रहित हो। युग्म संकलन को जनक फलन के अवकलज के पदों में इस तरह लिखा जा सकता हैः

$$xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ns_nx^n$$

पिछले समीकरण में इन संकलन का प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होगाः

$$xg' = x - x^2 + x^2g - x3g' + 6x^{2g'} - 3xg$$

$s_1=1$ लेकर पदों को पुनर्विन्यासित करने पर और x से विभाजित करने पर :

$$(3-x)g = (x^2 - 6x + 1)g' + (x-1) = 0$$

इस अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम एक नया फलन $Ag^2 + Bg + C$ परिभाषित करने की पूर्व विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यदि समीकरण रैखिक है

अर्थात ऐसे कोई दो पद (Term) नहीं जो g या उसके अवकलजों का व्युत्पन्न (Derivative) हों तो A=0 रखें, यदि हम ऊपर दी गयी समीकरण में g' के गुणांक में B को परिभाषित करें तो g का गुणांक $B' = 2x - 6$ होना चाहिए। हम एक समाकल कारक (Integrating Factor) का उपयोग कर सकते है अर्थात हम एक स्वैच्छ फलन $R(x)$ से गुणा कर सकते है। इससे हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा,

$$R(x)(3-x)g + R(x)(x^2 - 6x + 1)g' + R(x)(x-1) = 0$$

$B(x)$ को इस समीकरण में g' के गुणांक के बराबर मान लें और तब $R(x)$ को निर्धारित करें जो की कोटि $B'(x)$, का है और g का गुणांक है। अतः B का अवकलज है:

$$B' = (2x-6)R + (x^2 - 6x + 1)R'$$

इसे g के गुणांक के बराबर परिभाषित करके हम फलन R की यह अवस्था (State) प्राप्त कर सकते हैं:

$$(x^2 - 6x + 1)\frac{dR}{dx} = (9 - 3x)R$$

पदों का पुनर्विन्यास यह प्रदान करेगा,

$$\frac{1}{R}dR = \frac{9-3x}{x^2 - 6x + 1}dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन (Integrating) करने पर,

$$1n(R) = 1n\left(\frac{1}{(x^2 - 6x + 1)^{3/2}}\right)$$

दोनों ओर का घातांक (Exponential) लेने पर,

$$R(x) = \frac{1}{(x^2 - 6x + 1)^{3/2}}$$

इसके फलस्वरूप हमें प्राप्त होगा,

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}} \quad C''(x) = \frac{x-1}{(x^2 - 6x + 1)^{3/2}}$$

$C'(x)$ के व्यंजक का समाकलन करने पर प्राप्त होगा,

$$C(x) = \frac{1+x}{4\sqrt{x^2 - 6x + 1}}$$

B और C के इन व्यंजकों का प्रयोग करते हुए, चर $h = Bg + C$ या कहें h'=0 के पदों में लिखी इस अवकल समीकरण से जहां h एक नियतांक है, हमें प्राप्त होगा–

$$g(x) = \frac{h-c}{B} = \frac{1+x}{4} + h\sqrt{x^2 - 6x + 1}$$

यहां नियतांक h प्रारंभिक मानों से समान होते हुए 1/4 है जो मूल जनक फलन प्रदान करता है। साधारण समाकलन प्रयोग किया गया है क्योंकि गुणांक निश्चित

प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। मूल रूप से यदि एक अनुक्रम प्रारंभिक मानों s_0, s_1 से परिभाषित है और द्वितीय कोटि का पुनरावृत्ति संबंध इस प्रकार है:

$$(A_n + B)s_n + (C_n + D)s_{n-1} + (E_n + F)s_{n-2} = 0$$

टिप्पणी

जहां F के माध्यम से A समाकल कारक (Integrating Factor) है तब $R(x)$ के समाकलन से प्राप्त होगा तब,

$$2ADE + AFC + BCE$$

यदि A, C तथा E सभी अशून्य (Non Zero) हैं तब यह इस प्रतिबंध के समतुल्य होगा,

$$2\frac{D}{C} = \frac{B}{A} + \frac{F}{E}$$

जब यह प्रतिबंध पूरा होगा तो हमें जनक फलन प्राप्त हो जायेगा:

$$g(x) = \frac{h + \int \left(B_{S_0} + \left[(A+B)s_1 + (C+D)s_0\right]x\right) x^{\left[\frac{B}{A}+1\right]} \left(A + Cx + Ex^2\right)^{\frac{1}{2}\left[\frac{F}{E}-\frac{B}{A}\right]} dx}{x^{(B/A)} \left(A + Cx + Ex^2\right)^{\frac{1}{2}\left[\frac{F}{E}-\frac{B}{A}\right]+1}}$$

जहां h एक नियतांक है जो 1/4 के समतुल्य और प्रारंभिक मानों से निर्धारित होगा। श्रोड़िगर संख्याओं के लिए A=1, B=0, C=–6, D=9, E=1 तथा F=–3 मानों पर विचार करें जो प्रमाणित की गयी विशिष्टताओं (Specification) को संतुष्ट करेंगे।

अब प्रारंभिक मानों $s_0 = s_1 = 1$ के साथ संख्याओं की एक श्रेणी पर विचार करें जो पुनरावृत्ति (Recurrence) को संतुष्ट करेगी

$$(2n+6)s_n + (8n+4)s_{n-1} + (5n-10)s_{n-2} = 0$$

गुणांक परिमाणित विशिष्टताओं को संतुष्ट करते हैं इसलिए जनक (Generating) फलन देने के लिए हम ऊपर दिये सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$g(x) = \frac{1}{27x^3}\left[8\sqrt{2}\left(2 + 8x + 5x^2\right)^{3/2} - 85x^3 - 312x^2 - 192x - 32\right]$$

इस फलन को एक श्रेणी में विस्तारित करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$g(x) = 1 + x - 2x^2 + \frac{17}{4}x^3 - \frac{19}{2}x^4 + \frac{1417}{64}x^5 - \frac{1709}{32}x^6 + \ldots$$

इस घात श्रेणी के गुणांक दिए गये पुनरावृत्ति संबंध को संतुष्ट करते हैं।

1.5 बेसेल फलनों तथा लीजेण्ड्रे बहुपदों की लाम्बिकता

गणित में एक लाम्बिक बहुपदीय अनुक्रम (Orthogonal Polynomial Sequence) एक चर x के वास्तविक बहुपदो $P_0, P_1, P_2 \ldots$ का अनंत अनुक्रम होता है जिसमें P_n, n से समाहित होता है तथा इस प्रकार होता है कि अनुक्रम में कोई दो अलग–अलग बहुपद L^2 आंतरिक गुणन (Inner Product) के किसी निश्चित संस्करण के लिए लाम्बिक (Orthogonality) होते हैं।

लाम्बिक बहुपदों के सिद्धांत में लाम्बिकता (Orthogonality) की अनेक परिभाषाएं सम्मिलित हैं अमूर्त संकेतन (Abstract Notation) में से $<p,q>=0$ लिखा जाता है। जहां बहुपद $P(x)$ तथा $Q(x)$ लाम्बिक है। लाम्बिक बहुपदों का एक अनुक्रम बहुपदों P_0, $P_1, P_2\ldots$ का ऐसा अनुक्रम होता है जिसमें कि Pn, n श्रेणी से संबंधित होता है तथा अनुक्रम के सभी अलग–अलग (Distinct) अवयव एक दूसरे पर लाम्बिक होते हैं। बहुपदों (Polynomials) की बीजगणितीय (Algebraic) तथा विश्लेषणात्मक (Analytic) गुण कारक $<.,.>$ के परितः विशिष्ट अवधारणाओं पर निर्भर करती है। चिरसम्मत सूत्रीकरण (Classical Formulation) में कारक को भारित गुणन (Weighted Product) के समाकल (Integral) के पदों में परिभाषित किया जाता है और वह एक आंतरिक गुणन (Inner Product) होता है।

माना $\left[x_1, x_2\right]$ एक यथार्थ रेखा पर एक अंतराल है जहां $x_1=-\infty$ तथा $x_2=\infty$ की अनुमिती (Allowed) हैं, इसे लाम्बिकता का अंतराल (Interval of Orthogonality) कहते हैं माना कि,

$$\mathrm{W}:\left[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\right] \rightarrow \mathrm{R}$$

अंतराल पर एक फलन है जो आंतरिक भाग (Interior) (x_1, x_2) में प्रतिबद्धता के साथ धनात्मक है परंतु अंत बिंदुओं (End Points) पर यह या तो शून्य होगा या अनंत पर स्थानांतरित होगा इसके अतिरिक्त W को उन वांछनीयता (Requirements) को संतुष्ट करना होगा जो कि एक बहुपद f की होती हैं तब समाकल,

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)W(x)dx$ परिमित (Finite) होगा ऐसे W को भारित फलन (Weight Function) कहते हैं।

दिये गये कोई भी x_1, x_2 तथा W, बहुपदों f तथा g के युग्मों पर एक संक्रिया (Operation) को इसके माध्यम से परिभाषित करते हैंः

$$\langle f, g\rangle \int_{x_1}^{x_2} f(x)W(x)dx$$

यह संक्रिया (Operation) सभी बहुपदों के सदिश समष्टि या वेक्टर समिष्ट (Vector Space) में एक आंतरिक गुणन (Inner Product) है यह सामान्य या प्रचलित अर्थों में लाम्बिकता या (Orthogonality) दर्शाता है जैसे हम कहते हैं कि दो बहुपद लाम्बिक होंगे यदि उनका आंतरिक गुणन (Inner Product) शून्य है। प्रचालकों (Operators) $<.,.>$ का सामान्य सिद्धान्त आंतरिक गुणन (Inner Product) की स्वयंसिद्धि को संतुष्ट करता है इसमें हिल्वर्ट समष्टि (Hilbert Space) में आंतरिक गुणन (Inner Product) भी सम्मिलित है जहां बहुपद लांबिक आधार (Orthogonal Basis) की तरह देखें जाते हैं तथा आंतरिक गुणन (Inner Product) इस स्वरूप वाले समाकल के रूप में परिभाषित होता हैः

$$\langle p, q\rangle \int P(x)q(x)d\mu(x)$$

जहां μ एक धनात्मक माप है जो चिरसम्मत् परिभाषा और साथ ही साथ प्रायिकता मूलक परिभाषा को सम्मिलित किये हैं जहां माप एवं प्रायिकता मापन है तथा एक विविक्त परिभाषा है जहां समाकल एक अनंत भारित योग (Weighted Sum) है।

टिप्पणी

बेसेल फलन (Bessel Functions)

पिछले खंड (Section) में हम बेसेल फलन की चर्चा कर चुके हैं यहां हम बेसेल फलन की लाम्बिकता की चर्चा करेंगे, हमारी समीकरण में ज्या (sine) का प्रयोग करने पर विचार करें ऐसा करने पर यह निम्न समीकरण प्रदान करेगा :

$$\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx = 0 \text{ यदि } m \neq n$$

समाकल की सीमाओं पर ज्या (sine) शून्य है इसलिए बेसेल फलन में हम उन शून्यों पर विचार करते हुए मानते हैं:

$$J_{(m)}(a) = 0 \; J_{(m)}(b) = 0$$

यहां फलन $J_{(m)}(ax)$ तथा $J_{(m)}(bx)$ निम्न अवकल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं:

$$x(xu')' + \left(a^2x^2 - m^2\right)u = 0$$

$$x(xv)' + \left(b^2x^2 - m^2\right)v = 0$$

प्रथम समीकरण को v से तथा द्वितीय को u से गुणा करने तथा घटाने पर हमें प्राप्त होगा,

$$\left(b^2 - a^2\right)xuv = \frac{d}{dx}(vxu' - uxv')$$

$$\text{इसलिए } \left(b^2 - a^2\right)\int_0^1 xuvdx = (vxu' - uxv')\Big|_0^1 = 0$$

इसके लिए इसका स्वरूप निम्न प्रकार से होना चाहिए

$$\int_0^1 xJ_m(ax)J_m(bx)dx = 0$$

इस प्रकरण में भारित लाम्बिकता (Weight Orthogonality) संबंध में सम्मिलित है।

a = b के लिए इसे इस तरह दर्शाया जा सकता है:

$$\int_0^1 xJ_m^2(ax)dx = \frac{1}{2}J_{m+1}^2(a)$$

ये व्युत्पत्ति (Derivations) बेसेल फलनों की एक श्रेणी में एक फलन के विस्तार (Expansion) के गुणांकों के निर्धारण में प्रयोग हो सकते हैं। यदि फलन $f(x)$ को सीमा (Range) $0 < x < a$ में विस्तारित किया जाना है तब हमारे पास निम्न समीकरण होगा :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_m(K_n x)$$

जहां K_n इस तरह निर्धारित किए जाते हैं कि $J_m(K_n a) = 0$ हो, विस्तार में गुणांक इस प्रकार से निर्दिष्ट किए जाएंगे $C_n = \dfrac{\int_0^a f(x) J_m(K_n x) x dx}{a^2 T^2 (Kna)}$

लीजेण्ड्रे बहुपद (Legendre Polynomials)

सबसे सरलतम लाम्बिक बहुपद जिनके लिए लाम्बिकता का अंतराल [–1, 1] होता है लीजेण्ड्रे बहुपद हैं और इनके लिए भारित फलन (Weight Function) 1 होता है।

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x + 3}{8}$$

ये [–1, 1] में लाम्बिक होते हैं जबकि $m \neq n$ हो

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

लीजेण्ड्रे बहुपद मानकीकृत (Standardized) हैं इसलिए $P_n(1) = 1$ सभी n के लिए होता है। नीचे दी गयी समीकरण लीजेण्ड्रे समीकरण के स्वरूप हैं:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \quad \text{जहां } \lambda = n(n+1)$$

अवकलन समीकरण का दूसरा रूप निम्न यह है:

$$\left(\left[1 - x^2\right] y'\right)' + \lambda y = 0$$

पुनरावृत्ति से संबंधित है

$$(n+1) P_{n+1}(x) = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x)$$

एक मिश्रित पुनरावृत्ति है:

$$P_{n+1}^{[r+1]}(x) = P_{n-1}^{[r+1]}(x) + (2n+1) P_n^{[r]}(x)$$

रोड्रीग्यूज सूत्र (Rodrigues' Formula) के अनुसार निम्न समीकरण होगा :

$$P_n(x) = \frac{n!}{2n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(\left[x^2 - 1\right]^n\right)$$

सम्बद्ध (Associated) लीजेण्ड्रे बहुपद को $P_l^{(m)}(x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहां l तथा m पूर्णांक इस प्रकार हैं कि ये इस प्रकार परिभाषित हैं:

$$P_l^{(m)}(x)(-1)^m\left(1-x^2\right)^{m/2}P_l^{[m]}(x)$$

टिप्पणी

कोष्ठक में m एक पैरामीटर है, कोष्ठक (Bracket) में m लीजेण्ड्रे बहुपद के m वे अवकलज (Derivative) को व्यक्त करता है, ये बहुपद, बहुपद नहीं कहे जायेंगे जबकि m विषम हो। ये एक पुनरावृत्ति से संबंध रखते हैं जो इस प्रकार हैं:

$$(l+1-m)P_{l+1}^{(m)}(x)=(2l+1)xP_l^{(m)}(x)-(l+m)P_{l-1}^{(m)}(x)$$

नियत m के लिए अनुक्रम $P_m^{(m)}, P_{m+1}^{(m)}, P_{m+2}^{(m)}...$ में भार (Weight) 1 के साथ $[-1, 1]$ आर्थोगोनल या लाम्बिकता हैं।

दिये गये m के लिए $P_l^{(m)}(x)$ इसके हल हैं:

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \text{ जबकि } -\lambda = \text{l(l+)}$$

अपनी प्रगति जांचिए

14. पुनरावृत्ति संबंध क्या है?
15. अचर गुणांकों वाले रैखिक समरूप पुनरावृत्ति संबंधों को परिभाषित करें।
16. लांबिकता बहुपद अनुक्रम क्या है?
17. सरलतम उत्कृष्ट लाम्बिक बहुपद क्या हैं?

1.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. कुछ निश्चित अवकल समीकरणों के घात श्रेणी हल ज्ञात करने के लिए घात श्रेणी विधि का प्रयोग किया जाता है, मूलरूप से ऐसा कोई हल अज्ञात गुणांकों के साथ एक घात श्रेणी की कल्पना करता है फिर उस हल को गुणांकों में आवर्ती संबंध ज्ञात करने हेतु, अवकल समीकरण में निविष्ट करता है। घात श्रेणी विधि को कुछ कम नम्यता के साथ कुछ अरैखिक अवकल समीकरणों पर भी प्रयुक्त किया जा सकता है।
2. a की एक घात श्रेणी या कहें कि कोई घात श्रेणी ऐसी कोई भी श्रेणी है जो इस रूप में लिखी जा सकती है–

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(x-a\right)^n$$

यहां a तथा C_n संख्याएं हैं, यहां जो C_n हैं वे प्रायः श्रेणी के गुणांक कहलाते हैं, एक घात श्रेणी के बारे में सबसे जरूरी बात यह है कि यह x का एक फलन होती है।

3. कलन से हम जानते हैं कि घात श्रेणी ($x - x_0$ की घातों में) निम्न स्वरूप वाली एक अनंत श्रेणी होती है–

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

4. एक श्रेणी का अभिसरण x के उस मान पर निर्भर कर सकता है जिसे हम श्रेणी में रखते हैं और x के अन्य मानों के लिए नहीं रखते हैं।

5. x के मानों का अंतराल जिसमें दोनों सीमातं मान भी शामिल हैं जिनके लिए घात श्रेणी अभिसरण करती है, इसे श्रेणी के अभिसरण का अंतराल कहा जाता है।

6. घात श्रेणियों में जो स्वीकार्य संक्रियाएं हैं वे घात श्रेणियों का अवकलन, समाकलन, योग, घटाव, विभाजन तथा गुणन हैं। एक घात श्रेणी के प्रत्येक गुणांक के अपसरण के संबध में प्रतिबंध सूचीबद्ध हैं। ये ही घात श्रेणी को हल करने की आधारभूत विधियां मानी जाती है।

7. उन प्रकरणों में जहां एक घात श्रेणी की अभिसरण की त्रिज्या धनात्मक है, साथ ही साथ संपूर्ण अभिसरण के अंतराल में योग की एकसमान रूप से शून्य है तब श्रेणी का प्रत्येक गुणांक शून्य होगा।

8. प्रथम प्रकार के बेसेल फलन जो $J_\alpha(x)$ से निरूपित किये जाते हैं, बेसेल की अवकल समीकरण के वे हल हैं जो मूल बिंदु ($x = 0$) पर गैर–ऋणात्मक पूर्णांक α के लिए परिमित हों तथा ऋणात्मक गैर–पूर्णांक α के जैसे ही x शून्य की ओर अग्रसर होता हो अपसरण करते हैं। $J_\alpha(x)$ के हल का प्रकार तथा समान्यीकरण उसके गुणों द्वारा परिभाषित होते हैं।

9. द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन जिन्हें $Y_\alpha(x)$ से निरूपित किया जाता है, बेसेल अवकल समीकरण के हल होते हैं, ये मूलबिंदु ($x = 0$) पर विशिष्टता रखते हैं। $Y_\alpha(x)$ को कभी–कभी न्यूमेन फलन और कुछ मौकों पर इसे अलग हटकर $N_\alpha(x)$ से भी प्रदर्शित किया जाता है। गैर–पूर्णांक α के लिए यह $J_\alpha(x)$ से इस संबंध के माध्यम से संबंधित होता है–

$$J_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

10. गणित में लीजेण्ड्रे समीकरण एक डायोफैंटाइन समीकरण है और निम्न समीकरण से दर्शाया जाता है–

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

11. लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण द्वितीय कोटि का साधारण अवकल समीकरण है जिसे निम्न रूप में लिखा जाता है–

$$\left(1 - x^2\right) d^2y/dx^2 - 2xdy/dx + l(l+1)y = 0$$

टिप्पणी

इसे निम्न तरह भी लिखा जा सकता है–

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+l\left(l+1\right)y=0$$

$Ly=0$ के लिए, यहां L को लीजेण्ड्रे संकारक कहा जाता है–

$$L=\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+l\left(l+1\right)$$

12. एक अवकल समीकरण का एक नियमित एकल बिंदु समीकरण का एक ऐसा एकल बिंदु होता है जिस पर भी हल एक अनिवार्य एकलता नहीं रखता है। सम्मिश्र तल में किसी दिये गये a के निकट उन सम्भावित हलों को ज्ञात करने के लिए जो सम्मिश्र घातों $(z-a)^r$ के घात श्रेणी गुना हैं घातांकी समीकरण पर आधारित फ्रोबेनियन विधि का तब प्रयोग किया जा सकता है।

13. एक अवकल समीकरण का एक नियमित एकल बिंदु (Regular Singular Point) समीकरण का एक ऐसा एकल बिंदु (Singular Point) होता है जिस पर भी हल एक अनिवार्य विशिष्टता (Essential Singularity) नहीं रखता है।

    गणित में सम्मिश्र समतल C में साधारण अवकल समीकरण के सिद्धांत में C के बिंदु वर्गीकृत किये जाते हैं साधारण बिंदु जहां समीकरण के गुणांक विश्लेषणात्मक फलन होते हैं तथा एकल बिंदुओं में, जहां कुछ गुणांक एकलता रखते हैं। एकल बिंदुओं में एक महत्वपूर्ण अवकल नियमित एकल बिंदुओं के बीच किया गया है जहां (एक छोटे खण्ड में) हल की वृद्धि एक बीजगणितीय फलन के द्वारा बाध्य होती है जबकि एक अनियमित एकल बिंदु वह है जहां संपूर्ण हल समूह को अधिक वृद्धि दर वाले फलनों की आवश्यकता होती है।

14. एक विशिष्ट प्रकार के पुनरावृत्ति संबंध में लिए "विभेद समीकरण शब्द का भी उपयोग किया जाता है, ध्यान रहे कि किसी पुनरावृत्ति संबंध को बताने के लिए प्रायः विभेद समीकरण शब्द का ही उपयोग किया जाता है। पुनरावृत्ति संबंध का एक उदाहरण एक तार्किक आलेख है जो इस तरह व्यक्त किया जा सकता है।
    $x_{n+1} = rx_n\,(1 - x_n)$

15. एक कोटि d का रेखीय समरूप अचर गुणांकों वाला पुनरावृत्ति संबंध निम्न स्वरुप वाला होता है।

    $a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_da_{n-d}$

    जहां d गुणांक c_i (सभी i के मानों के लिए) अचर (Constant) है। अधिक विशेषता बताते हुए कहा जाये तो यह एक ऐसी अनंत रैखिक युगपत् समीकरण (Infinite Simultaneous Linear Equation) होगी जिसके लिए प्रत्येक $n > d-1$, एक ऐसा अनुक्रम (Sequence) जो इस प्रकार के एक संबंध को संतुष्ट करता है एक रैखिक पुनरावृत्ति अनुक्रम (LRS) कहलाता है।

16. गणित में एक लाम्बिक बहुपदीय अनुक्रम एक चर x के वास्तविक बहुपदो P_0, $P_1, P_2\ldots$ का अनंत अनुक्रम होता है जिसमें Pn, n श्रेणी से संबंधित होता है तथा

इस प्रकार होता है कि अनुक्रम में कोई दो अलग अलग बहुपद L^2 आंतरिक गुणन के किसी निश्चित संस्करण के लिए लाम्बिक होते हैं।

17. सबसे सरलतम लाम्बिक बहुपद जिनके लिए लाम्बिकता या का अंतराल $[-1, 1]$ होता है लीजेण्ड्रे बहुपद हैं और इनके लिए भारित फलन 1 होता है।

1.7 सारांश

- कुछ निश्चित अवकल समीकरणों के घात श्रेणी हल ज्ञात करने के लिए घात श्रेणी विधि का प्रयोग किया जाता है, मूलरूप से ऐसा कोई हल अज्ञात गुणांकों के साथ एक घात श्रेणी की कल्पना करता है फिर उस हल को गुणांकों में आवर्ती संबंध ज्ञात करने हेतु, अवकल समीकरण में निविष्ट करता है। घात श्रेणी विधि को कुछ कम नम्यता के साथ कुछ गैर–रैखिक अवकल समीकरणों पर भी प्रयुक्त किया जा सकता है।
- यदि एक समघात रैखिक अवकल समीकरण नियत गुणांक से निहित है तब वह बीजगणितीय विधियों से हल की जा सकती है और उसके हल भी कलन से ज्ञात किए हुए e^x, $\cos x$, इत्यादि, जैसे प्रारंभिक फलन होते हैं हालांकि यदि समीकरण चर गुणांक जो x के फलन हों, रखती है तो उसे अन्य विधियों से हल करना होता है।
- अवकल समीकरणों का हल करने में घात श्रेणी विधि का प्रयोग किया जाता है क्योंकि इस विधि को आसान माना जाता है तथा इसे वैश्विक रूप से एक मानक विधि मानकर प्रयोग किया जाता है।
- घात श्रेणियों में जो स्वीकार्य संक्रियाएं हैं वे घात श्रेणियों का अवकलन, समाकलन, योग, घटाव, विभाजन तथा गुणन हैं। एक घात श्रेणी के प्रत्येक गुणांक के अपसरण के संबध में प्रतिबंध सूचीबद्ध हैं। ये ही घात श्रेणी को हल करने की आधारभूत विधियां मानी जाती हैं।
- एक वास्तविक फलन $f(x)$ एक बिंदु $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक कहा जायेगा यदि उसे $x = x_0$ की घातों में अभिसरण की त्रिज्या $R > 0$ के द्वारा एक घात श्रेणी के माध्यम से दर्शाया जा सके। गणित में एक विश्लेषणात्मक फलन वह फलन होता है जो स्थानीय रूप से एक अभिसरित घात श्रेणी द्वारा दिया जा सके।
- गणित में बेसेल फलन सर्वप्रथम गणितज्ञ डेनियल बरनौली द्वारा परिभाषित किये गये तथा इनका प्रसामान्यीकरण फ्रेडरिच बेसेल द्वारा किया गया था।
- प्रथम प्रकार के बेसेल फलन जो $J_\alpha(x)$ से निरूपित किये जाते हैं, बेसेल की अवकल समीकरण के वे हल हैं जो मूल बिंदु $(x = 0)$ पर गैर–ऋणात्मक पूर्णांक α के लिए परिमित हों तथा ऋणात्मक गैर–पूर्णांक α के जैसे ही x शून्य की ओर अग्रसर होता हो अपसरण करते हैं, $J_\alpha(x)$ के हल का प्रकार तथा सरलीकरण उसके गुणों द्वारा परिभाषित होते हैं।

टिप्पणी

- द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन जिन्हें $Y_\alpha(x)$ से निरूपित किया जाता है, बेसेल अवकल समीकरण के हल होते हैं, ये मूलबिंदु $(x = 0)$ पर विशिष्टता रखते हैं। $Y_\alpha(x)$ को कभी–कभी न्यूमेन फलन और कुछ मौकों पर इसे अलग हटकर $N_\alpha(x)$ से भी प्रदर्शित किया जाता है। गैर–पूर्णांक α के लिए यह $J_\alpha(x)$ से इस संबंध के माध्यम से संबंधित होता है–

$$J_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

- गणित में लीजेण्ड्रे समीकरण डायोफैंटाइन समीकरण है और इसे इस तरह दर्शाया जाता है–

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

- लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण द्वितीय कोटि का साधारण अवकल समीकरण है जिसे इस रूप में लिखा जाता है–

$$\left(1-x^2\right)d^2y/dx^2 - 2xdy/dx + l(l+1)y = 0$$

इसे इस तरह भी लिखा जा सकता है–

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0$$

$Ly = 0$ के लिए, यहां L को लीजेण्ड्रे संकारक कहा जाता है–

$$L = \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)$$

- गॉउसियन अतिज्यामितीय अवकल समीकरण इस प्रकार की होती है–

$$x(1-x)y'' + \{c - (a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

- एक अवकल समीकरण का एक नियमित एकल बिंदु समीकरण का एक ऐसा एकल बिंदु होता है जिस पर भी हल एक अनिवार्य एकलता नहीं रखता है।
- सम्मिश्र तल में किसी दिये गये a के निकट उन सम्भावित हलों को ज्ञात करने के लिए जो सम्मिश्र घातों $(z-a)^r$ के घात श्रेणी गुना है। घातांकी समीकरण पर आधारित फ्रोबेनियन विधि का तब प्रयोग किया जा सकता है।
- एक विशिष्ट प्रकार के पुनरावृत्ति संबंध में लिए ''विभेद समीकरण शब्द का भी उपयोग किया जाता है, ध्यान रहे कि किसी पुनरावृत्ति संबंध को बताने के लिए प्रायः विभेद समीकरण शब्द का ही उपयोग किया जाता है। पुनरावृत्ति संबंध का एक उदाहरण एक तार्किक प्रतिरूपण है जो इस तरह व्यक्त किया जा सकता है।

$$x_{n+1} = rx_n\,(1 - x_n)$$

- एक कोटि d का रेखीय समरूप अचर गुणांकों वाला पुनरावृत्ति संबंध निम्न स्वरुप वाला होता है।

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_d a_{n-d}$$

- यदि वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित अनुक्रम दिया गया है तब पहला विभेद $\Delta(a_n)$ इस प्रकार परिभाषित होगा–

$$\Delta(a_n) = a_{n+1} - a_n$$

द्वितीय विभेद $\Delta^2(a_n)$ इस प्रकार परिभाषित होगा :

$$\Delta^2(a_n) = \Delta(a_{n+1}) - \Delta(a_n)$$

- गणित में एक लाम्बिक बहुपदीय अनुक्रम एक चर x के वास्तविक बहुपदो P_0, $P_1, P_2 \ldots$ का अनंत अनुक्रम होता है जिसमें Pn, n कोटि से संबंधित है तथा इस प्रकार होता है कि अनुक्रम में कोई दो अलग अलग बहुपद L^2 आंतरिक गुणन के किसी निश्चित संस्करण के लिए लाम्बिक होते हैं।

1.8 मुख्य शब्दावली

- **घात श्रेणी विधि** : चर गुणांक वाले अवकल समीकरणों को हल करने के लिए प्रयोग होने वाली मानक और आधारभूत तकनीक घात श्रेणी विधि कही जाती है। इसे घात श्रेणी विधि इसलिए कहते हैं क्योंकि इसके माध्यम से मिलने वाले हल घात श्रेणी के रूप में होते हैं।
- **अभिसरण अंतराल** : एक श्रेणी का अभिसरण x के उस मान पर निर्भर कर सकता है जिसे हम श्रेणी में रखते हैं और x के अन्य मानों के लिए नहीं। यदि x का कोई अन्य मान भी है जिसके लिए श्रेणी द्वारा दर्शाया जाता है तब ऐसे मान एक अंतराल निर्मित करते हैं, जो अभिसरण अंतराल कहा जाता है।
- **अनुपात परीक्षण** : अनुपात परीक्षण परिभाषित करता है कि यदि $L < 1$ है तो श्रेणी अभिसरण करके और यदि $L > 1$ है तो श्रेणी अपसरण करेगी यदि $L = 1$ है तो दोनों में से कुछ भी हो सकता है।
- **घात श्रेणी पर संक्रियाएं** : घात श्रेणियों में जो स्वीकार्य संक्रियाएं हैं वे घात श्रेणियों का अवकलन, समाकलन, योग, घटाव, विभाजन तथा गुणन हैं। एक घात श्रेणी के प्रत्येक गुणांक के अपसरण के संबध में प्रतिबंध सूचीबद्ध हैं। ये ही घात श्रेणी को हल करने की आधारभूत विधियां मानी जाती हैं।
- **वास्तविक विश्लेषी फलन** : एक वास्तविक फलन $f(x)$ एक बिंदु $x = x_0$ पर विश्लेषणात्मक कहा जायेगा यदि उसे $x = x_0$ की घातों में अभिसरण की त्रिज्या $R > 0$ के द्वारा एक घात श्रेणी के माध्यम से दर्शाया जा सके। गणित में एक विश्लेषणात्मक फलन वह फलन होता है जो स्थानीय रूप से एक अभिसरित घात श्रेणी द्वारा दिया जा सके।
- **प्रथम प्रकार का बेसेल फलन** : प्रथम प्रकार के बेसेल फलन जो $J_\alpha(x)$ से निरूपित किये जाते हैं, बेसेल की अवकल समीकरण के वे हल हैं जो मूल बिंदु $(x = 0)$ पर गैर–ऋणात्मक पूर्णांक α के लिए परिमित हों तथा ऋणात्मक

टिप्पणी

गैर–पूर्णांक α के जैसे ही x शून्य की ओर अग्रसर होता हो अपसरण करते हैं, $J_\alpha(x)$ के हल का प्रकार तथा समान्यीकरण उसके गुणों द्वारा परिभाषित होते हैं।

- **द्वितीय प्रकार का बेसेल फलन** : द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन जिन्हें $Y_a(x)$ से निरूपित किया जाता है, बेसेल अवकल समीकरण के हल होते हैं। ये मूलबिंदु $(x = 0)$ पर विशिष्टता रखते हैं। $Y_a(x)$ को कभी–कभी न्यूमेन फलन और कुछ मौकों पर इसे अलग हटकर $N_a(x)$ से भी प्रदर्शित किया जाता है।
- **लीजेण्ड्रे समीकरण** : गणित में लीजेण्ड्रे समीकरण एक डायोफैंटाइन समीकरण है और इसे इस समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ से दर्शाया जाता है।
- **नियमित एकल बिंदु** : एक अवकल समीकरण का एक नियमित एकल बिंदु समीकरण का एक ऐसा एकल बिंदु होता है जिस पर भी हल एक अनिवार्य एकलता नहीं रखता है। एकल बिंदुओं में एक महत्वपूर्ण विभेद नियमित एकल बिंदुओं के बीच किया गया है जहां (एक छोटे खण्ड में) हल की वृद्धि एक बीजगणितीय फलन के द्वारा बाध्य होती है।
- **अनियमित एकल बिंदु** : अनियमित एकल बिंदु वह है जहां संपूर्ण हल समुच्चय को अधिक वृद्धि दर वाले फलनों की आवश्यकता होती है।
- **लीजेण्ड्रे अवकल समीकरण** : यह द्वितीय कोटि का एक साधारण अवकल समीकरण है। यह लाप्लास समीकरण में वृत्तीय निर्देशांकों में हल से प्राप्त होता हैं।
- **पुनरावृत्ति संबंध** : गणित में एक पुनरावृत्ति संबंध एक समीकरण है जो पुनरावर्तनः एक अनुक्रम को परिभाषित करता है, जहां अनुक्रम के प्रत्येक पद को अपने पूर्वगामी पद के फलन के रुप में परिभाषित किया जा सकता है।
- **लीजेण्ड्रे बहुपद** : सबसे सरलतम लाम्बिक बहुपद जिनके लिए लाम्बिकता का अंतराल $[-1, 1]$ होता है लीजेण्ड्रे बहुपद हैं और इनके लिए भारित 1 होता है।

1.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. घात श्रेणी विधि का उपयोग क्यों किया जाता है?
2. एक घात श्रेणी और इसकी कार्यक्षमता को परिभाषित करें।
3. अभिसरण अंतराल को परिभाषित करें।
4. घात श्रेणियों में संक्रियाएं क्या है?
5. प्रथम प्रकार के बेसेल फलन तथा द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन के महत्व को परिभाषित करें।
6. घात श्रेणी में नियमित एकल बिंदु का उपयोग क्यों किया जाता है?
7. गणित में लीजेण्ड्रे समीकरण किस प्रकार से दर्शाया जाता है।

8. घात श्रेणी में बेसेल, लीजेण्ड्रे और अतिज्यामितीय समीकरणों के महत्व को परिभाषित करें।
9. पुनरावृत्ति संबंध क्या हैं? इसका उपयोग क्यों किया जाता है?
10. जनन फलन का उपयोग क्यों किया जाता है?
11. लाम्बिकता का क्या मतलब है?
12. बेसेल फलनों और लीजेण्ड्रे बहुपदों की लाम्बिकता में क्या भूमिका है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि दी गई घात श्रेणी 0 पर केंद्रित है।

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots$$

2. सिद्ध कीजिए कि दी गई घात श्रेणी –2 पर केंद्रित है।

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (x+2)^n}{n!} = 1 - 2(x+2) + 2(x+2)^2 - \frac{4(x+2)^3}{3} + \ldots$$

3. निम्न समीकरण के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$$

4. निम्न समीकरण के अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात कीजिए,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$$

5. दिखाएँ कि $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ अवकल समीकरण को संतुष्ट करता हैं,

$y'' + xy' - y = 0$

6. दी गई घात श्रेणी के लिए अभिसरण और अभिसरण के अंतराल को निर्धारित करें, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

7. अभिसरण की त्रिज्या निर्धारित करें घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$ के लिए।

8. निम्नलिखित फलन के लिए एक घात श्रेणी प्रतिनिधित्व ज्ञात कीजिए और इसकी अभिसरण के अंतराल का निर्धारण करें।

$$g(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

टिप्पणी

9. निम्नलिखित फलन के लिए एक घात श्रेणी निरूपण ज्ञात कीजिए और इसकी अभिसरण के अंतराल का निर्धारण करें।

$$f(x) = \frac{x}{5-x}$$

10. सिद्ध करें कि लीजेण्ड्रे बहुपद लाम्बिकता है (–1, 1) पर भारित फलन 1 के साथ और संतुष्ट करती है,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

1.10 सहायक पाठ्य सामग्री

K. P. Gupta and J. K. Goyal. 2013. *Integral Transform*. Meerut (UP): Pragati Prakashan.

Sharma, J. N. and R. K. Gupta. 2015. *Differential Equations* (Paperback Edition). Meerut (UP): Krishna Prakashan Media (P) Ltd.

Raisinghania, M. D. 2013. *Ordinary and Partial Differential Equations*. New Delhi: S. Chand And Company Limited.

Coddington, Earl A. and N. Levinson. 1972. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Coddington, Earl A. 1987. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Boyce, W. E. and Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons.

Sneddon, I. N. 1986. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Education.

Somasundaram, D. 2002. *Ordinary Differential Equations*. Chennai: Narosa Publishing House.

इकाई 2 लाप्लास रूपान्तरण

संरचना

2.0 परिचय

लाप्लास (Laplace) एक फ्रांसीसी गणितज्ञ, खगोलशास्त्री और भौतिक विज्ञानी थे, जिन्होंने आव्यूह प्रणाली (Metric System) के विकास में अग्रणी भूमिका निभाई थी। लाप्लास परिवर्तन का उपयोग व्यापक रूप से इंजीनियरिंग अनुप्रयोगों (मैकेनिकल और इलेक्ट्रॉनिक) में किया जाता है, विशेष रूप से जहां संचालक बल (Driving Force) असतत है। इसका उपयोग प्रक्रिया नियंत्रण में भी किया जाता है। लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation) हमें समीकरण या अवकल और समाकल वाले समीकरणों का हल करने में मदद करता है जो समीकरण को 't' अंतराल में बदलकर 's' अंतराल में से एक में बदल देता है जिससे समस्या को हल करना बहुत आसान हो जाता है। लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation) कुछ निश्चित प्रकार के अवकल समीकरणों को हल करने की एक उपयोगी विधि प्रदान करता है, जब कुछ प्रारंभिक प्रतिबंध दिए जाते हैं, आमतौर पर जब प्रारंभिक मान शून्य हो।

लाप्लास रूपांतरण फूरियर रूपांतरण के समान है। जबकि किसी फलन का फूरियर रूपांतरण (Fourier Transformation) एक वास्तविक चर (Real Variable) का एक जटिल फलन है, फलन का लाप्लास रूपांतरण एक सम्मिश्र चर (Complex Variable) का एक फलन होता है। लाप्लास रूपांतरण आमतौर पर t के फलनों के परिवर्तन के लिए प्रतिबंधित है, जब $t \geq 0$ हो। इस प्रतिबंध का एक परिणाम यह है कि एक फलन का लाप्लास रूपांतरण चर s का एक समरूप फलन (Homomorphism Function) अथवा पूर्णसममितिक फलन है। फूरियर रूपांतरण के विपरीत, तथा वितरण का लाप्लास रूपांतरण आमतौर पर एक उचित फलन है। सम्मिश्र चर की तकनीकों का उपयोग लाप्लास रूपांतरण के सीधे अध्ययन के लिए भी किया जा सकता है। एक समरूप फलन के रूप में, लाप्लास रूपांतरण में एक घात श्रेणी (Power Series) का

प्रतिनिधित्व करता है। यह घात श्रेणी एक फलन को फलन के क्षण के रैखिक अध्यारोपण (Linear Superposition) के रूप में व्यक्त करती है। इस परिप्रेक्ष्य या संभावना का प्रायिकता सिद्धांत में अनुप्रयोग हैं।

टिप्पणी

इस इकाई में आप लाप्लास रूपान्तरण, लाप्लास रूपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय, अवकलनों तथा समाकलों का लाप्लास रुपान्तरण, स्थानान्तरण/विस्थापन प्रमेय, रूपान्तरणों का अवकलन तथा समाकलन के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- लाप्लास रूपान्तरण को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- लाप्लास रूपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय को समझ पाएंगे;
- अवकलनों तथा समाकलों के लाप्लास रुपान्तरण की व्याख्या कर पाएंगे;
- स्थानान्तरण/विस्थापन प्रमेय को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- रूपान्तरणों का अवकलन तथा समाकलन को समझ पाएंगे।

2.2 लाप्लास रूपान्तरण

गणित में लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation) बहुत व्यापक तौर पर प्रयुक्त होने वाले समाकल रूपान्तरण (Integral Transform) है जिन्हें $\mathcal{L}\{f(t)\}$ द्वारा निरुपित किया जाता है। यह एक वास्तविक तर्क (Real Argument) $t\,(t \geq 0)$ के साथ एक फलन $f(t)$ का रैखिक संकारक है जो उसे एक सम्मिश्र तर्क (Complex Argument) s वाले $F(s)$ में रूपान्तरित कर देता है। एक द्विभाजित (Bijective) रूपान्तरण की तरह $f(t)$ तथा $F(s)$ के संगत युग्म सारणियों में सम्मिलित किए जा सकते हैं। लाप्लास रूपान्तरण सार्थक गुण रखता है इसलिए मूल $f(t)$ फलनों के सामान्य संबंध (Relations) तथा संक्रियाएं (Operations), प्रतिबिम्बों $F(s)$ के संबंधों तथा संक्रियाओं से संगतता रखते हैं।

लाप्लास रूपान्तरण को फूरियर रूपान्तरण से संबंधित किया जा सकता है। फूरियर रूपान्तरण जहां एक फलन या संकेत को उसकी कंपन विधियों (Modes of Vibrations) में परिभाषित है वहीं लाप्लास रूपान्तरण एक फलन को उसके उस समय क्षणों (Moments) में परिभाषित है, मूल संकेत (Signal) समय पर निर्भर होता है और इसलिए लाप्लास रूपान्तरण संकेतक की समय क्षेत्र अभिव्यक्ति (Time Domain Representation) कहलाता है जबकि फूरियर रूपान्तरण आवृति पर निर्भर करता है और संकेत (Signal) की आवृति (Frequency) क्षेत्र (Domain) अभिव्यक्ति (Representation) कहलाता है। फूरियर रूपान्तरण (Fourier Transform) की ही तरह लाप्लास रूपान्तरण भी अवकल तथा समाकल समीकरणों को हल करने में उपयोग होता है।

भौतिकी तथा इंजीनियरिंग में यह रैखिक समय अचर तंत्र (Linear Time Invariance Systems) जैसे विद्युत परिपथ, आवर्ती दौलित्र, प्रकाशीय उपकरण, यांत्रिक प्रणाली आदि के विश्लेषण में प्रयोग किया जाता है।

रूपान्तरण में– कलन की संक्रियाओं (Operations of Calculus) से बीजीय संक्रियाओं (Algebraic Operation) की ओर स्थानांतरण (Shifting) संक्रियात्मक कलन (Operational Calculus) कहलाती है जो व्यवहारिक गणित (Applied Mathematics) का एक अनिवार्य भाग है और विशेष रूप से अभियांत्रिकी के संदर्भ में प्रयोग किया जाता है। लाप्लास रूपान्तरण विधि मूलरूप से गणितीय क्षेत्र में अत्यावश्यक संक्रियात्मक तकनीक (Operational Technique) है। लाप्लास रूपान्तरण विधि मूल रूप से एक बहुत जरूरी संक्रियात्मक (Operational) तकनीक है यह विशेषकर उन समस्याओं में उपयोगी हैं जहां यांत्रिक या विद्युतीय संचालन बल (Driving Force) असतत् (Discontinuous) आवेगात्मक (Impulsive) या जटिल आवर्ती फलन (Complex Periodic Function) है परंतु इस तथ्य से कि यह ज्या या कोज्या (Sine or Cosine) नहीं हों।

लाप्लास रूपान्तरण का एक अन्य लाभ यह है कि यह समस्याओं को सीधे–सीधे तरीके से हल करने में सहायक होता है। इस अध्याय में हम एक प्रायोगिक पहुंच से लाप्लास रूपान्तरण पर विचार करेंगे और उन अभियांत्रिकी समस्याओं जिनमें साधारण अवकल समीकरण अस्तित्व में होते हैं। आंशिक अवकल समीकरण भी लाप्लास रूपान्तरण के माध्यम से समस्याओं के हल तक पहुंचाती है। लाप्लास रूपान्तरण का नामकरण गणितज्ञ तथा खगोलविज्ञानी पियरे–सिमोन लाप्लास (Pierre-Simon Laplace) के सम्मान में किया गया है जिन्होंने प्रायिकता सिद्धान्त (Probability Theory) के समस्याओं के समाधान के लिए इस रूपान्तरण का प्रयोग किया था। लीयोनार्ड यूलर (Leonhard Euler) ने इस स्वरूप वाले समाकलों पर विचार कियाः

$$z = \int X(x)e^{ax}dx \text{ तथा } z = \int X(x)x^{A}dx$$

ये समाकल अवकल समीकरणों के हल थे लेकिन बहुत आगे तक इन्हें उपयोग नहीं किये गये थे। जोसेफ लुईस लैग्रांज (Joseph Louis Lagrange) यूलर (Euler) के प्रशंसक थे तथा अपने कार्य में उन्होंने प्रायिकता घनत्व फलनों के समाकल और इसके स्वरूप (Form) वाले व्यंजक (Expression) को ज्ञात किया जो निम्नांकित हैः

$$\int X(x)e^{-ax}a^{x}dx$$

इसकी व्याख्या आधुनिक लाप्लास रूपांतरण सिद्धांत में किया गया था। जिसमें समाकलन विधि को सम्मिलित किया गया था जो इस प्रकार

$$\int x^{s}\phi(s)dx$$

यह समाकल एक मेलिन रूपान्तरण (Mellin Transform) की तरह था जो एक अवकल समीकरण को पूरी तरह रूपान्तरित करता था ताकि रूपान्तरित समीकरण का हल ज्ञात किया जा सके। सभी वास्तविक संख्याओं $t \geq 0$ के लिए एक फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण फलन $F(s)$ होता है। जो निम्नानुसार परिभाषित होता है।

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} c^{-st} f(t)\, dt$$

मापदंड (Parametre) s वास्तविक σ संख्याओं ω के साथ एक सम्मिश्र संख्या (Complex Number) $s = \sigma + i\omega$ है। समाकल अर्थ उस फलन के प्रकार पर निर्भर करता है जिस पर हम विचार कर रहे हैं। समाकल के अस्तित्व के लिए जरूरी प्रतिबंध

टिप्पणी

यह है कि $(0,\infty)$ पर f सामीप्य समाकल्य (Neighborhood Integrable) होना चाहिए सामीप्य समाकल्य (Neighborhood Integrable) फलनों के लिए जो अनंत पर क्षय (Decay) हों या घातांकी (Exponential) प्रकार के हों समाकल को लेबेगे समाकलन (Lebesgue Integral) समझा जा सकता है हालांकि अनेक अनुप्रयोगों में यह अनंत पर अभिसरण (Convergent) संगत (Improper) समाकल माना जाता है। इस रूप वाले लेबेग समाकल के एक परिमित बोरेल माप (Borel Measure) μ के द्वारा लाप्लास रूपान्तरण (Transformation) को परिभाषित किया जा सकता है।

$$(\mathcal{L}\mu)(s) = \int_{[0,\infty]} e^{-st}\, d\mu(t)$$

एक विशेष रूप में μ प्रायिकता घनत्व की माप या अधिक ठीक–ठीक कहें तो डिराक डेल्टा फलन (Dirac Delta Function) है। संक्रियात्मक (Operational) कलन (Calculus) में एक माप का लाप्लास रूपान्तरण वितरण फलन (Distribution Function) f की माप माना जाता है। निम्न स्थिति में व्यंजक (Expression) निम्न स्वरूप (Form) वाला होता है:

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

यहां निम्न सीमा (Lower Limit) 0^- एक संक्षिप्त संकेतन है, जिसका अर्थ है $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\infty}$ ।

यह सीमा (Limit) इस बात पर जोर देती है कि 0 पर स्थित कोई बिन्दु लाप्लास रूपान्तरण द्वारा प्राप्त (Acquired) होता है।

द्विपार्श्विक लाप्लास रूपांतरण (Bilateral Laplace Transform)

जब बिना प्रतिबंध (Condition) के लाप्लास रूपान्तरण परिभाषित किया जाता है तब प्रायः एकल पार्श्वीय (Unilateral) या एकपक्षीय रूपान्तरण पर विचार किया जाता है वैकल्पिक रूप से सम्पूर्ण वास्तविक अक्ष (Entire Real Axis) पर समाकलन की सीमाओं को विस्तारित (Extend) कर लाप्लास रूपान्तरण को द्विपार्श्विक (Bilateral) या द्विपार्श्विक लाप्लास रूपान्तरण की तरह परिभाषित किया जा सकता है। यदि ऐसा कर दिया गया तो सामान्य एकपक्षीय रूपान्तरण, द्विपार्श्विक रूपान्तरण का एक विशेष प्रकरण (Special Case) बन जायेगा जिसमें फलन की परिभाषा हैविसाइड चरण फलन (Heaviside Step Function) से गुणा हो जाने से रूपान्तरित हो जाती है। द्विपार्श्विक लाप्लास रूपान्तरण को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तर (Inverse Laplace Transform)

प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण को अनेक नामों से जाना जाता है, जैसे ब्रोमविच समाकल (Bromwich Integral) फूरियर–मेलिन समाकल (Fourier-Mellin Integral) तथा मेलिन का प्रतिलोम सूत्र (Mellin's Inverse Formula), यह निम्नलिखित संम्मिश्र (Complex) समाकल के माध्यम से बताया जाता है:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{-st} F(s)\, ds$$

जहां γ एक वास्तविक संख्या है समाकलन का पथ समोच्च मार्ग (Contour Path) $F(s)$ के अभिसरण का क्षेत्र (Region of Convergence) होगा।

अभिसरण का क्षेत्र (Region of Convergence)

टिप्पणी

यदि f एक स्थानीय समाकल्य फलन (Locally Integrable Function) है। तब उसका लाप्लास रूपान्तरण $F(s)$ अभिसरण (Converge) करेगाः

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(t)\,e^{-ts}\,dt$$

यदि नीचे दिया गया समाकल अस्तित्वान होगा तो लाप्लास रूपान्तरण निरपेक्ष निम्न रूप से अभिसरण (Converge) करेगा।

$$\int_0^\infty \left|f(t)\,e^{-ts}\right|dt$$

लाप्लास रूपान्तरण को प्रायः सशर्त अभिसरण (Convergent) समझा जाता है इसका अर्थ है कि यह दूसरे दृष्टिकोण की तुलना में पहले से अभिसरण (Converge) करता है। मानों का वह समुच्चय जिनके लिए $F(s)$ पूरी तरह अभिसरण करता है या तो $\mathrm{Re}\{s\} > a$ रूप वाला या $\mathrm{Re}\{s\} \geq a$ रूप वाला होगा जहां a एक विस्तारित वास्तविक नियतांक (Extended Real Constant) है जबकि $-\infty \leq a \leq \infty$ यह प्रभावी अभिसरण प्रमेय (Dominated Convergence Theorem) का पालन करता है यहां a पूर्ण या निरपेक्ष (Absolute) अभिसरण (Convergence) का भुज (Abscissa) कहलाता है और यह $f(t)$ के वृद्धि प्रकृति (Growth Behavior) पर निर्भर करता है इसी तरह द्विपक्षीय रूपांतरण $a < \mathrm{Re}\{s\} < b$ से बनी एक पट्टी में पूरी तरह अभिसरण करता है जो संभावित रूप से रेखाओं $\mathrm{Re}\{s\} = a$ या $\mathrm{Re}\{s\} = b$ के अस्तित्व में होती है। s के उन मानों का उपसमूह (Subset) जिनके लिए लाप्लास रूपान्तरण पूरी तरह अभिसरण करता है, परम अभिसरण का क्षेत्र अभिसरण (Region of Absolute Convergence) या परम अभिसरण (Absolute Convergence) की परास या क्षेत्र (Domian) कहलाती है। द्विपक्षीय के प्रकरण में इसे कभी–कभी परम अभिसरण की पट्टी (Strip of Absolute Convergence) भी कहा जाता है। परम अभिसरण (Absolute Convergence) के क्षेत्र (Region) में लाप्लास रूपान्तरण विश्लेषणात्मक होता है।

इसी प्रकार मानों का वह समुच्चय जिसके लिए $F(s)$ अभिसरण करता है। (सशर्त या निरपेक्ष) को सशर्त अभिसरण का क्षेत्र (Region of Conditional Convergence) या केवल अभिसरण का क्षेत्र (Region of Convergence) कहते हैं। यदि लाप्लास रूपान्तरण $s = s_0$ पर (सशर्त) अभिसरण करता है तब यह स्वतः ही उन सभी s के लिए भी अभिसरण करेगा जिनके लिए $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$ इसलिए अभिसरण का क्षेत्र $\mathrm{Re}\{s\} > a$ के प्रकार का एक अर्धतल (Half-Plane) होगा जिसमें संभव है कि सीमारेखा $\mathrm{Re}\{s\} = a$ के कुछ बिन्दु सम्मिलित हों, अभिसरण का क्षेत्र $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$ में f का लाप्लास रूपान्तरण को खण्डशः समाकलन (Integrative By Parts) के समाकलन की तरह व्यक्त किया जा सकता है।

$$F(s) = (s - s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\beta(t)\,dt\,,\ \ \beta(u) = \int_0^u e^{-s_0 t} f(t)\,dt$$

इस प्रकार अभिसरण के क्षेत्र $F(s)$ को प्रभावशाली रूप से किसी अन्य फलन के निरपेक्ष रूप (Absolutely) अभिसरण (Convergent) लाप्लास रूपान्तरण के माध्यम से

दर्शाया जा सकता है विशेष तौर पर वह विश्लेषणात्मक होगा, पेले–वीइनर प्रमेय (Paley-Wiener Theorem) के रूप में ऐसी अनेक प्रमेय अस्तित्व में है जो f के क्षय गुणधर्मों (Decay Properties) तथा अभिसरण के क्षेत्र के अंतर्गत लाप्लास रूपान्तरण के गुणों के बारे में बताती है।

अवकल समीकरण और उनके संगत प्रारंभिक (Initial) तथा साथ ही साथ सीमा मान (Boundary Value) समस्याएं लाप्लास रूपान्तरण विधि से हल की जा सकती है। हल प्राप्त करने की दिशा में तीन आधारभूत चरण (Step) होते हैं–

चरण 1: दी गयी कठिन समस्या का एक सरल समीकरण (Subsidiary Equation) में रूपान्तरण (Transformation) (सहायक समीकरण)।

चरण 2: सहायक समीकरण (Subsidiary Equation) को हल करने के लिए विशुद्ध बीजगणितीय रूपान्तरण (Purely Algebraic Modifications) का प्रयोग किया जाता है।

चरण 3: सहायक समीकरण का उत्तर पुनः दी गयी समस्या का उत्तर ज्ञात करने के लिए रूपान्तरित (Transformed) किया जाता है।

इससे होकर लाप्लास रूपान्तरण एक अवकल समीकरण के मूल्यांकन की समस्या को परिवर्तित कर एक बीजगणितीय समस्या बनाने में सहायता करता है। फलन तथा उनके रूपान्तरणों की सारणी इस फलन को एक आसानी से प्रतिरूपण करने वाला बना देते हैं ऐसी सारणी की भूमिका कलन (Calculus) में समाकल सारणी (Integral Table) के समतुल्य है, यह सारणी इस अध्याय के अंत में दी गयी है।

एक ऐसे दिए गए फलन $f(t)$ पर जो सभी $t \geq 0$ के लिए परिभाषित है पर विचार कीजिए, $f(t)$ को e^{-st} से से गुणा कर t को शून्य से अनंत तक समाकलित कीजिए यदि संबंधित समाकल अस्तित्व रखता है तथा कुछ मान के साथ तो यह s का फलन होगा तथा $F(s)$ द्वारा दर्शाया जायेगा।

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

s का यह फलन $F(s)$ मूल फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण है तथा $L(f)$ द्वारा दर्शाया जाता है इस प्रकार

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.1}$$

यहां मूल फलन $f(t)$ पर निर्भर है तथा नया फलन F जो उसका रूपान्तरण (Transform) है जो कि s पर निर्भर है वह प्रक्रिया जो दिए गये $f(t)$ से $F(s)$ प्रदान करती है लाप्लास रूपान्तरण कहलाती है।

समीकरण (2.1) में मूल फलन $f(t)$ को प्रतिलोम (Inverse) कहते हैं तथा $L^{-1}(F)$ से दर्शाते हैं इसे ऐसे लिखा जाता है:

$$f(t) = L^{-1}(F)$$

टिप्पणी

संकेतन

मूल फलन छोटे अक्षरों (Lowercase Letters) से तथा उनसे संबद्ध रूपान्तरण उन्हीं अक्षरों के शीर्ष (Captial) से दर्शाये जाते हैं जैसे $F(s), f(t)$ के रूपान्तरण (Transform) को दर्शाता है जबकि $Y(s), y(t)$ के रूपान्तरण को दर्शाता है।

उदाहरण 2.1: यदि $f(t)=1$ $t \geq 0$ के लिए है तब $F(s)$ ज्ञात करें।

हलः समीकरण (2.1) से समाकलन का प्रयोग करके हमें प्राप्त होगा,

$$L(f)=L(1)=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}\ (s>0)$$

यह संकेतन (Notation) पर्याप्त है यहां समीकरण (2.1) में समकल का अंतराल (Interval) अनंत है और इसे संगत समाकलन (Improper Integral) कहा जाता है। नियमानुसार,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\min_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

इसलिए संकेतन का अर्थ है

$$\int_0^\infty e^{-st}dt=\min_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T=\min_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}e^0\right]=\frac{1}{s}\quad (s>0) \text{ के लिए,}$$

उदाहरण 2.2: $t \geq 0$ के लिए माना $f(t)=e^{at}$ है जहां a एक नियतांक है चर घातांकी फलन का $L(f)$ ज्ञात कीजिए।

हलः समीकरण (2.1) का प्रयोग करने पर हमें मिलेगा,

$$L(e^{at})=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty$$

यदि $s-a>0$ तब हमें प्राप्त होगा,

$$L(e^{at})=\frac{1}{s-a}$$

प्रमेय 2.1 : लाप्लास रूपान्तरण की रेखीयता (Linearity of the Laplace Transform) लाप्लास रूपान्तरण एक रैखिक संक्रिया (Linear Operation) है इसका अर्थ है कोई फलन $f(t)$ तथा $g(t)$ जिनका लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व (Exist) रखता है तथा नियतांक a तथा b हैः

$$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$$

प्रमाण (Proof) : दी गई परिभाषा द्वारा,

$$L\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}[af(t)+bg(t)]dt$$

$$=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt.$$

$$=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}.$$

उदाहरण 2.3 : प्रमेय 2.1 का प्रयोग करते हुए $L(f)$ ज्ञात कीजिए यदि $f(t) = \cosh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)$

हलः प्रमेय 2.1 तथा उदाहरण 2.2 का उपयोग करते हुए

$$L(\cosh at) = \frac{1}{2}L\left(e^{at}\right) + \frac{1}{2}L\left(e^{-at}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

उभयनिष्ठ हर (Common Denominator) लेते हुए जबकि $s > a\ (\geq 0)$

$$L(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

2.3 लाप्लास रूपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय

विभिन्न परिस्थितियों में अवकल समीकरण का हल बिना किसी कठिनाई के प्रतिस्थापन (Substitution) द्वारा जांचा जा सकता है इसलिए इसे कोई बड़ी प्रायोगिक समस्या नहीं कहा जा सकता। एक निश्चित (Fixed) s के लिए समीकरण (2.1) का समकल अस्तित्वान होगा (Will Exist) यदि ऋणात्मक घातांक के साथ एक चर घातांकी फलन (Exponential Function) के लिए $t \to \infty$ होने पर सम्पूर्ण समाकल्य (Integrand) $e^{-st} f(t)$ शून्य हो इसका तात्पर्य है कि $f(t)$ स्वयं e^{kt} से अधिक शीघ्रता से वृद्धि नहीं होनी चाहिए।

माना कि $f(t)$ एक फलन है जो $[0, A]$ पर (प्रत्येक $A > 0$ के लिए) खण्डशः (Piecewise) सतत् है तथा $| f(t) \leq Me^{\infty}$ के साथ अनंत पर एक चरघातांकी कोटि (Exponential Order) रखता है। तब जो लाप्लास रुपान्तरण $s > \alpha$ के लिए परिभाषित होगा वह $\mathcal{L}(f)$ होगा $\{-s > \alpha\} \subset$ क्षेत्र (Domain) $(\mathcal{L}(f))$आवश्यक नहीं कि फलन $f(t)$ सतत् हो, खण्डशः सततता (Piecewise Continuity) प्रायोगिक महत्व (Practical Importance) की है क्योंकि असतत प्रविष्टियों के लिए लाप्लास रूपान्तरण विधि आंशिक रूप से उपयोगी होती है। परिभाषानुसार एक परिमित अंतराल $a \leq t \leq b$ में एक फलन $f(t)$ खण्डशः (Piecewise) सतत् है वह उस अंतराल के लिए परिभाषित होगा और ऐसे अंतराल (Interval) को ऐसे परिमित संख्या में अनेक अंतरालों में उपविभाजित (Subdivide) किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक में $f(t)$ सतत है और ऐसी ही परिमित सीमा (Limit) रखता है कि जैसे t आंतरिक की ओर से उपविभाजन (Sub Division) के अन्त बिन्दु (End Points) की ओर पंहुचती है।

प्रमेय 2.2: लाप्लास रुपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय (Existene Theorem for Laplace Transform)

माना $f(t)$ एक फलन है रेंज (Range) $t \geqq 0$ के प्रत्येक परिमित अंतराल में खण्डशः सतत (Piecewise Continuous) है तथा इसे संतुष्ट करता हैः

$$|f(t)| \leqq Me^{-kt} \text{ सभी के लिए } t \geq 0 \tag{2.2}$$

किन्हीं नियतांकों k तथा M के लिए, तब सभी $s > k$ के लिए $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में रहेगा।

प्रमाण (Proof) : चूंकि $f(t)$ खण्डशः सतत् है, t–अक्ष के किसी भी परिमित अंतराल में $e^{-st}f(t)$ समाकलनीय (Integrable) होगा। समीकरण (2.2) में हम $s > k$ लेकर निम्न व्यंजन प्राप्त कर सकते है,

टिप्पणी

$$|L(f)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leqq \int |f(t)| e^{-st}dt \leqq \int_0^\infty Me^{kt}e^{-st}dt = \frac{M}{s-k}$$

यहां प्रतिबंध $s > k$ अंतिम समाकल के अस्तित्व के लिए आवश्यक (Required) हैं। अतः सिद्ध हुआ (Hence Proved)।

प्रमेय 2.2 का प्रतिबंध तब प्रयोग होता है जब हम जानना चाहे कि क्या एक फलन समीकरण (2.2) में दी गयी स्वरूप वाली असमानता (Inequality) को संतुष्ट करता है या नहीं, उदाहरण के लिए,

$$\cosh t < e^t, \qquad t^n < n!\ e^t \qquad (n = 0,1,\cdots) \text{ सभी } t > 0 \text{ के लिए} \qquad (2.3)$$

कोई फलन जो सभी $t \geq 0$ के लिए निरपेक्ष मान में बाध्य (Bounded) है अर्थात् वास्तविक चरों के ज्या (Sine) तथा कोज्या (Cosine) फलन प्रतिबंध को संतुष्ट करते है। एक फलन जो समीकरण (2.2) में दिए गये स्वरूप (Form) के संबंध को सुनिश्चित नहीं करता चर घातांकी (Exponential) फलन e^{t^2} है क्योंकि समीकरण (2.2) में हमारे पास बृहद M तथा k होंगे,

$$e^{t^2} > Me^{kt} \quad \text{सभी के लिए } t > t_0,$$

यहां t_0 एक पर्याप्त रूप से बड़ी संख्या है जो M तथा k पर निर्भर करती है। प्रमेय 2.2 में दिए गये प्रतिबंध पर्याप्त (Sufficient) हैं अनिवार्य (Necessary) नहीं है। उदाहरण के लिए फलन $1/\sqrt{t}$ $t = 0$ पर अनंत है लेकिन इसका रूपान्तरण अस्तित्व में होता है। परिभाषा से तथा $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ के लिए हमारे पास $st = x$ के लिए निम्न व्यंजक हैः

$$L(t^{-1/2}) = \int_0^\infty e^{-st}t^{-1/2}dt = \frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.$$

अद्वितीयता (Uniqueness)

यदि एक दिए गये फलन का लाप्लास रुपान्तरण अस्तित्व रखता है तो वह पृथक रूप से निर्धारित (Distinctly Determined) होता है।

इसके विपरीत यह भी दिखाया जा सकता है कि यदि दो फलन जो कि धनात्मक अक्ष पर परिभषित हैं और समान रुपान्तरण रखते हैं ऐसे फलन धनात्मक दूरी के एक अंतराल में परिवर्तित नहीं होते विभिन्न पृथक–पृथक बिन्दुओं के विधा (Different Isolated Point) पर परिवर्तन भले ही हो जाये, चूंकि उपयोगिता में यह कोई सार्थकता (Signifiance) नहीं रखता है यह कहा जा सकता है कि एक दिए गये रुपान्तरण का

प्रतिलोम (Inverse) मूलरूप से अलग (Distint) होता है। विशेषतौर पर कहा जाय तो यदि ऐसे दो सतत फलन है जो समान रुपान्तरण (Transform) रखते हैं वे पूरी तरह समान होगें।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. गणित में लाप्लास रूपान्तरण क्यों उपयोग किया जाता है?
2. आप एक फलन का लाप्लास रूपान्तरण किस प्रकार प्रदर्शित करेंगे?
3. लाप्लास रूपान्तरण में प्रयुक्त तीन मूलभूत चरणों को लिखिए।
4. लाप्लास रूपान्तरण का रेखीय प्रमेय लिखिए।
5. लाप्लास रूपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय को परिभाषित करें।

2.4 अवकलनों तथा समाकलों का लाप्लास रूपान्तरण

एक फलन के अवकलज लाप्लास रूपान्तरण का प्रमाण (Proof of the Laplace Transform of a Function's Derivative)

लाप्लास रूपान्तरण के अवकलज गुण (Differentiation Properties) का उपयोग एक फलन के अवकलज को ज्ञात करने में प्रायः सुविधाजनक होता है। यह निम्नानुसार लाप्लास रूपान्तरण के मौलिक व्यंजन (Basic Expression) से व्युत्पन्न किया जा सकता है:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \left[\frac{f(t)e^{-st}}{-s}\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} f'(t)\, dt \quad \text{(खण्डशः)} \\ &= \left[-\frac{f(0)}{-s}\right] + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f'(t)\},\end{aligned}$$

इससे हमें प्राप्त होता है:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

द्विपार्श्विक (Bilateral) प्रकरण में,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

सामान्य परिणाम:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

यहां f^n, f का nवां अवकलज है, जो आगमनात्मक तर्क (Inductive Argument) के साथ आधारभूत तथ्य है।

अवकलजों का लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform of the Derivative)

मान लीजिए $y(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण $Y(s)$ है तब $y'(t)$ का लाप्लास रुपान्तरण होगा,

$$L\left[y'(t)\right](s) = sY(s) - y(0)$$

द्वितीय अवकलज के लिए हमारे पास है:

$$L\left[y''(t)\right](s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

n'वें अवकलज के लिए हमारे पास,

$$L\left[y^{(n)}(t)\right](s) = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots y^{(n-1)}(0)$$

लाप्लास रुपान्तरण का अवकलज (Derivatives of the Laplace Transform)

माना $y(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण $Y(s)$ है तब,

$$L\left[t^n y(t)\right](s) = (-1)^n \frac{d^nY}{ds^n}(s)$$

हम $t \sin(t)$ का लाप्लास रुपान्तरण इस प्रकार ज्ञात करते हैं,

$$L[t\sin t] = \frac{-d}{ds}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{2s}{\left(s^2+a\right)^2}$$

लाप्लास रूपान्तरण एक विधि है जिसका उपयोग अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने में किया जाता है, लाप्लास रूपान्तरण कलन की संक्रियाओं को बीजगणितीय संक्रियाओं (Algebraic Operation) से प्रतिस्थापित कर देता है, $f(t)$ का अवकलन $L(s)$ के s से गुणन तथा $f(t)$ का समाकलन $L(f)$ के s से विभाजन प्रतिस्थापित हो जाता है।

प्रमेय 2.3 $f(t)$ के अवकलज का लाप्लास रुपान्तरण

माना कि सभी ≥ 0 के लिए $f(t)$ सतत् है, कुछ k तथा M को संतुष्ट करता है तथा एक अवकलज $f'(t)$ रखता है जो रेंज (Range) $t \geqq 0$ में प्रत्येक परिमित अंतराल में खण्डशः (Piecewise) सतत् है। तब जब $s > k$ तब अवकलज $f'(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में होगा तथा

$$L(f') = sL(f) - f(0) \quad for \;\; (s > k) \text{ के लिए}$$

प्रमाण (Proof): उस स्थिति पर विचार कीजिए जब सभी $t \geq 0$ के लिए $f'(t)$ सतत हैं तब परिभाषा से तथा खण्डशः समाकलन के द्वारा हमारे पास है:

$$L(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

चूंकि f संतुष्ट करता है जब $s > k$ है तब दांयी ओर का समाकलित भाग उच्च सीमा (Upper Limit) पर शून्य है तथा निम्न सीमा (Lower Limit) पर इसका

योगदान $-f(0)$ है। तथा निम्न सीमा (Integral) $s > k$ के लिए अस्तित्वान है इससे यह सिद्ध होता है कि दांयी ओर का व्यंजक तब अस्तित्व में होगा जब $s > k$ तथा $-f(0)+sL(t)$ के तुल्य होगा परिणामस्वरूप $L(f')$ अस्तित्व में होगा जबकि $s > k$, यदि अवकलज $f'(t)$ खडशः सतत् है तब प्रमाण पर्याप्त से समान ही होगी। इस प्रकरण में मूल समाकल में जो $f(t)$ के लिए भी विस्तारित की जा सकती है।

टिप्पणी

प्रमेय 2.4 : किसी भी n कोटि अवकलज के लिए लाप्लास रूपान्तरण

माना $f(t)$ तथा उसके अवकलज $f'(t), f''(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ सभी $t \geq 0$ के लिए सतत फलन हैं, कुछ k तथा M को संतुष्ट करते है माना अवकलज $f^{(n)}(t)$ रेंज (Range) $t \geq 0$ में प्रत्येक परिमित अंतराल में खण्डशः सतत् है तब लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में होगा जबकि $s > k$ हो और इस प्रकार दिया जायेगा,

$$L\left(f^{(n)}\right) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

उदाहरण 2.4: यदि $f(t) = t^2$ तब $L(1)$ से $L(f)$ का व्युत्पन्न करें।

हल : चूंकि $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(t) = 2$ तथा $L(2) = 2L(1) = 2/s$

हमें प्राप्त होगा

$$L(f'') = L(2) = \frac{2}{s} = s^2 L(f), \quad \text{इसलिए} \quad L\left(f^2\right) = \frac{2}{s^3}$$

उदाहरण 2.5: $\cos\omega t$ का लाप्लास रूपान्तरण व्युत्पन्न कीजिए।

हलः माना $f(t) = \cos\omega t$ तब $f''(t) = -\omega^2 \cos\omega t = -\omega^2 f(t)$ साथ ही $f(0) = 1,\ f'(0) = 0$ अब हम रूपान्तरण (Transform) लेते हैं $L(f'') = -\omega^2 L(f)$

हमें प्राप्त होगा $-\omega^2 L(f) = L(f'') = s^2 L(f) - s,$

इसलिए $L(f) = L(\cos\omega t) = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

उदाहरण 2.6 : यदि $f(t) = \sin^2 t$ तब $L(f)$ ज्ञात करें।

हलः दिया है, $f(0) = 0,\ f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$

इससे प्राप्त होगा,

$$L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4} = sL(f). \qquad \text{या} \qquad L\left(\sin^2 t\right) = \frac{2}{s\left(s^2 + 4\right)}$$

उदाहरण 2.7: यदि $f(t) = t \sin \omega t$ तब $L(f)$ ज्ञात करें।

हल : दिया है कि $f(0) = 0$ तथा

$$f'(t) = \sin\omega t + \omega t\cos\omega t,$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(t) = 2\omega\cos\omega t - \omega^2 t\sin\omega t$$
$$= 2\omega\cos\omega t - \omega^2 f(t),$$

साथ ही,

$$L(f'') = 2\omega L(\cos\omega t) - \omega^2 L(f) = s^2 L(f).$$

$\cos\omega t$ के लाप्लास रूपान्तरण के लिए सूत्र का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$(s^2+\omega^2)L(f) = 2\omega L(\cos\omega t) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$$

इससे निम्न परिणाम निकल कर आयेगा,

$$L(t\sin\omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

एक फलन के समाकल का लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform of the Integral of a Function)

अवकलन तथा समाकलन परस्पर विपरीत प्रक्रियाएं हैं। इसी कोटि में एक फलन का अवकलन उसके रूपान्तरण (Transform) में s के गुणन के संगत होता है। हम अपेक्षा करते हैं कि एक फलन का समाकलन उसके रूपान्तरण को s से विभाजित करने पर मिलने वाले परिणाम के संगत होगें क्योंकि विभाजन गुणन की प्रतिलोम प्रक्रिया है।

प्रमेय 2.5 : $f(t)$ का समाकलन

माना $F(s)$ $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण हैं यदि $f(t)$ खण्डशः सतत है तथा एक असमानता (Inequality) को संतुष्ट करता है तब,

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$(s > 0, s > k)$ के लिए यदि ऊपर लिखे गए समीकरण के दोनों पक्षों का केवल प्रतिलोम रूपान्तरण (Inverse Transform) लिया जाये,

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$$

प्रमाण (Proof): माना $f(t)$ खण्डशः सतत् है तथा कुछ k तथा M के लिए समीकरण (2.2) को संतुष्ट करता है स्पष्टतः यदि समीकरण (2.2) के लिए ऋणात्मक k है यह धनात्मक k के लिए भी प्रयोग होता है तब हम यह मान लेते हैं कि k धनात्मक है तब समाकल,

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

सतत् होगा और समीकरण (2.2) का प्रयोग करके हमें किसी धनात्मक t के लिए प्राप्त होगाः

$$|g(t)| \leqq \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leqq M\int_0^t e^{k\tau}d\tau = \frac{M}{k}(e^{kt}-1) \leqq \frac{M}{k}e^{kt} \quad \text{for } (k>0).$$

यह दर्शाता है कि $g(t)$ भी समीकरण (2.2) में दिए गये स्वरूप (Form) वाली असमानता को संतुष्ट करता है साथ ही $g'(t) = f(t)$, उन बिन्दुओं को छोड़कर जिनके लिए $f(t)$ असतत् (Discontinuous) है इसलिए प्रत्येक परिमित अंतराल के लिए $g'(t)$ खण्डशः सतत है तथा यह प्रदान करता हैः

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) \quad \text{for } (s > k).$$

यहां स्पष्ट है कि $g(0) = 0$, इसलिए $L(f) = sL(g)$.

अपनी प्रगति जांचिए

6. लाप्लास रूपान्तरण के अवकलज गुण का उपयोग क्यों किया जाता है?
7. किसी भी n कोटि अवकलज के लिए लाप्लास रूपान्तरण प्रमेय को लिखिए।

2.5 स्थानान्तरण/विस्थापन प्रमेय

प्रमेय 2.6 प्रथम स्थानान्तरण/विस्थापन प्रमेय (First Shifting Theorem)

यदि $f(t)$ का रूपान्तरण $F(s)$ है (जहां $s > k$) तब $e^{at} f(t)$ का रूपान्तरण $F(s - a)$ होगा जहां $s - a > k$, सूत्र के अनुसार

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

या यदि हम दोनों ओर प्रतिलोम (Inverse) तो हमें प्राप्त होगाः

$$e^{at} f(t) = L^{-1}\{F(s-a)\}.$$

प्रमाण (Proof) : समाकल में हम s को $s - a$ से प्रतिस्थापित कर $F(s - a)$ प्राप्त कर सकते हैं,

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at} f(t)\right]dt = L\{e^{at} f(t)\}.$$

यदि कुछ s जो कुछ k से बड़े हैं जिसके लिए $F(s)$ अस्तित्वान होता है (अर्थात् परिमित) होता है तब $s - a > k$ के लिए प्रथम समाकल (First Integral) अस्तित्व में होगा, प्रमेय का द्वितीय सूत्र (Second Formula) प्राप्त करने के लिए अब दोनों पक्षों का प्रतिलोम लेते हैं।

अवमंदित कम्पन (Damped Vibration)

प्रथम स्थानांतरित प्रमेय से हमें निम्नलिखित उपयोगी सूत्र प्राप्त हैं,

$$L(e^{at}\cos\omega t) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$L(e^{at}\sin\omega t) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}.$$

ऋणात्मक a के लिए ये $f(t)$ अवमंदित कम्पन हैं।

कुछ महत्वपूर्ण रूपान्तरण (Some Important Transform)

सारणी 2.1 में कुछ मूलभूत रूपान्तरणों, जिनमें कुछ फलन *f(t)* तथा उनके लाप्लास रूपान्तरण *L(f)* सम्मिलित हैं, जिन्हें सूचीबद्ध किया गया है इन रूपान्तरणों से हम वे लगभग सभी रूपान्तरण प्राप्त कर सकते हैं जिनकी हमें आवश्यकता होती है।

सारणी 2.1

	$f(t)$	$L(f)$		$f(t)$	$L(f)$
1	1	½	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
2	T	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
4	t^n $(n=0,1,\cdots)9$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$ s	$\frac{a}{s^2-a^2}$
5	t^a (धनात्मक)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

प्रमाण (Proofs): सारणी 2.1 में सूत्र 1, 2, तथा 3 सूत्र 4 के ही विशिष्ट प्रकरण हैं हम आगमन (Induction) के द्वारा सूत्र 4 को सिद्ध कर सकते हैं। यह $n=0$ के लिए सत्य है क्योंकि $0!=1$ है। अब हम आगमन परिकल्पना (Induction Hypothesis) को ले सकते हैं क्योंकि यह किसी भी धनात्मक पूर्णांक n पर प्रयोग होती है, हम खण्डशः समाकलन द्वारा प्राप्त कर सकते हैं–

$$L\left(t^{n+1}\right)=\int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}t^{n+1}\Big|_0^\infty+\frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$$

$t=0$ तथा $t\to\infty$ के लिए समाकल के स्वतंत्र भाग (Integral Free Part) हैं। दांया भाग $(n+1)L(t^n/s)$ के तुल्य है इससे तथा आगमनात्मक परिकल्पना (Induction Hypothesis) से हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगाः

$$L\left(t^{n=1}\right)=\frac{n+1}{s}L\left(t^n\right)=\frac{(n+1)n!}{s\cdot s^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

यह सारणी 2.1 के सूत्र 4 को प्रमाणित करता है।

सारणी 2.1 के सूत्र 5 में $\Gamma(a+1)$ गामा फलन है, हम $st=x$ निर्धारित करके सूत्र 5 प्राप्त कर सकते हैं।

$$L\left(t^a\right)=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^a\frac{dx}{s}=\frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^a dx$$

जहां $s>0$

ध्यान रहे गैर–ऋणात्मक पूर्णांकों n के लिए $\Gamma(n+1)=n!$ इस प्रकार सूत्र 4 भी सूत्र 5 का अनुकरण (Follows) करता है।

सारणी 2.1 से तथा प्रथम स्थानान्तरण/विस्थापन (Shifting) प्रमेय से हम एक और महत्वपूर्ण सूत्र तत्काल प्राप्त कर सकते हैं:

$$L(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

उदाहरण के लिए $L(te^{at}) = 1/(s-a)^2$

प्रमेय 2.7 द्वितीय स्थानान्तरण (Shifting) प्रमेय : डिराक डेल्टा फलन (Dirac's Delta Function)

इकाई चरण फलन $u(t-a)$

यह इकाई चरण फलन का कार्य समान्यता के साथ दक्ष भी है। जब 't' का मान बड़ा होता है तो 'u' का मान हमेशा शून्य तथा 'a' के मान से भी छोटा होता है। जिससे सिद्ध है कि 't' का मान 'a' के मान से बड़ा है।

2.6 अवकलन तथा समाकलन का रूपान्तरण

अवकलन समीकरणों का उत्तर देने के लिए रूपान्तरण प्रतिलोम रूपान्तरण के ज्ञात करने तथा उनसे जुड़े अनुप्रयोगों के संबंधित विभिन्न तकनीकों की संख्या बहुत अधिक है। रूपान्तरणों (Transforms) $F(s)$ के अवकलनों तथा समाकलों पर विचार किया जाता है, मूल फलन $f(t)$ के लिए इनसे संबंधित प्रचालनों को भी महत्व प्राप्त है।

इस बात पर विचार कीजिए कि अवकलन तथा समाकलन 't' समिष्ट (Space) का 's' समिष्ट में अभिव्यक्ति रूपांतरित किया जाए।

लाप्लास समीकरण का अवकलन (Differentiation of Laplace Transform)

माना कि $F(s)$ फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण है इसका अर्थ है रूपान्तरण की परिभाषा से,

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

तब $F(s)$ का अवकलन $F'(s)$ होगा

$$\frac{d}{ds}F(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[e^{-st}\right]\cdot f(t)dt = \int_0^\infty (-t)\cdot e^{-st}\cdot f(t)\,dt$$

चूंकि समाकलन t के सापेक्ष किया गया है तब समाकल के अंतर्गत (Inside) हम अवकलन करते हैं:

$$\frac{d}{ds}F(s) = -\int_0^\infty e^{-st}\left[t\cdot f(t)\right]dt = -\mathcal{L}\{t\cdot f(t)\}$$

यदि हम स्वयं रूपान्तरण का अवकलन s के सापेक्ष करते हैं तब इसका परिणाम मूल फलन में $-t$ का गुणन होगा

या $-F(s) = \mathcal{L}\{t\ f(t)\}$

और फलस्वरूप $\mathcal{L}\{F'(s)\} = t \cdot f(t)$

यह भी दर्शाया जा सकता है कि यदि $f(t)$ अस्तित्व प्रमेय की शर्तों को संतुष्ट करता है तब उसके रूपान्तरण का अवकल $F'(s)$ यह होगा।

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

s के सापेक्ष प्राप्त करने के लिए समाकल चिन्ह के अंदर s के सापेक्ष अवकल करना होगा

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} [tf(t)]\, dt\,.$$

परिणामस्वरूप $L(f) = F(s)$ यदि है तब $L\{tf(t)\} = -F'(s)$ एक फलन के रूपान्तरण का अवकल है जिसके संगत फलन को $-t$ से गुणा किया गया है।

$$L^{-1}\{F'(s)\} = -tf(t)$$

यह गुण समकल को रूपान्तरित करने में सहायता करता है।

रूपान्तरणों का समाकल (Integration of Transforms)

पुनः रूपान्तरणों का समाकल ज्ञात करने की दिशा में हम लाप्लास रूपान्तरण की परिभाषा का प्रयोग करेंगे।

तब $\int_0^\infty f(\tilde{s})\, d\tilde{s}$ इस प्रकार परिभाषित होगा

$$\int_0^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}\ f(t) dt \right) d\tilde{s} = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} d\tilde{s}) \right) f dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} e^{-st}\ f(t) dt$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}$$

या $$\mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_0^\infty F(\tilde{s}) d\tilde{s}$$

तथा $$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \int_0^\infty F(\tilde{s})\, d\tilde{s} \right\} = \frac{f(t)}{t}$$

दूसरी दिशा के लिए

इसी प्रकार यदि $f(t)$ अस्तित्व प्रमेय के प्रतिबंध को संतुष्ट करता है तथा $f(t)/t$ की सीमा (Limit) में t जैसे दांये से t जैसे पर पहुंचता है तब,

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\tilde{s})\, d\tilde{s} \quad \text{सभी के लिए } (s > k),$$

टिप्पणी

इस प्रकार एक फलन के रूपान्तरण का समाकलन $f(t)$ को t से विभाजित करने के द्वारा किया जाता है इसी तरह,

$$L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\tilde{s})\, d\tilde{s}\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

वास्तव में परिभाषा से यह इस बात का अनुकरण करता है कि,

$$\int_s^{\infty} F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_s^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-\tilde{s}t} f(t) dt\right] d\tilde{s}$$

और यह भी दिखाया जा सकता है कि अवधारणाओं का उपयोग करके हम समाकलन की कोटि (Order of Integration) का उत्क्रम (Reverse) प्राप्त कर सकते हैं इस प्रकार,

$$\int_s^{\infty} F(\tilde{s})\, d\tilde{s} = \int_0^{\infty}\left[\int_s^{\infty} e^{-\tilde{s}t} f(t) d\tilde{s}\right] dt = \int_0^{\infty} f(t)\left[\int_s^{\infty} e^{-\tilde{s}t} d\tilde{s}\right] dt$$

$e^{-\tilde{s}t}$ का $\tilde{s}$ के सापेक्ष समाकल $e^{-\tilde{s}t}/(-t)$ प्रदान करता है। यहां $\tilde{s}$ के पारित दांये समाकल e^{-st}/t के तुल्य है इसलिए,

$$\int_s^{\infty} F(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \text{ सभी के लिए } (s > k)$$

उदाहरण 2.8: प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें यदि फलन $\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)$ हैं।

हल : अवकलन द्वारा,

$$-\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right) = -\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{s^2}}\cdot(-2)\frac{\omega^2}{s^3} = \frac{\omega^2}{s^3} = \frac{2\omega^2}{s\left(s^2+\omega^2\right)} = \frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

अंतिम समानता को प्रत्यक्ष गणना के माध्यम से पूरी तरह से जांचा जा सकता है, अर्थात, $F(s)$ है। यह दिए गए फलन (गुना – 1) का व्युत्पन्न है, ताकि उसके तदुपरांत वाला समाकल $F(s)$ है, जो s से ∞ तक $F(s)$ का अभिन्न अंग है। सारणी 2. 1 से हम प्राप्त करते हैं,

$$f(t) = L^{-1}F = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - 2\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = 2 - 2\cos\omega t$$

यह फलन स्थितियों को संतुष्ट करता है। इसलिए,

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\} = L^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(\tilde{s}) d\tilde{s}\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

अंतिम परिणाम है,

$$L^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\}=\frac{2}{t}(1-\cos\omega t)$$

अपनी प्रगति जांचिए

8. प्रथम स्थानांन्तरण/विस्थापन प्रमेय लिखिए।
9. रूपांतरणों का अवकलन तथा समाकलन किस प्रकार किया जाता है?

2.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. लाप्लास रूपान्तरण को फूरियर रूपान्तरण से संबंधित किया जा सकता है। फूरियर रूपान्तर जहां एक फलन या सिग्नल को उसकी कंपन विधियों में परिभाषित है वहीं लाप्लास रूपान्तरण एक फलन को उसक समय क्षणों में परिभाषित है, मूल संकेत समय पर निर्भर होता है और इसलिए लाप्लास रूपान्तरण संकेतक की समय अभिव्यक्ति क्षेत्र कहलाता है।
2. सभी वास्तविक संख्याओं $t \geq 0$ के लिए एक फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण फलन $F(s)$ होता है। जो निम्नानुसार परिभाषित होता है।

   $$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

3. हल प्राप्त करने की दिशा में तीन आधारभूत चरण होती है–

   चरण 1: दी गयी कठिन समस्या का एक सरल समीकरण में रूपान्तरण (सहायक समीकरण)

   चरण 2: सहायक समीकरण को हल करने के लिए विशुद्ध बीजगणितीय रूपान्तरण का प्रयोग

   चरण 3: सहायक समीकरण का उत्तर पुनः दी गयी समस्या का उत्तर ज्ञात करने के लिए रूपान्तरित किया जाता है।
4. लाप्लास रूपान्तरण की रेखीयता (Linearity of the Laplace Transform) : लाप्लास रूपान्तरण एक रैखिक संक्रिया (Linear Operation) है इसका अर्थ है कोई फलन $f(t)$ तथा $g(t)$ जिनका लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व (Exist) रखता है तथा नियतांक a तथा b हैः

   $$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$$

5. माना $f(t)$ एक फलन है परास (Range) $t \geqq 0$ के प्रत्येक परिमित अंतराल में खण्डशः सतत है तथा इसे संतुष्ट करता हैः

   $|f(t)| \leqq Me^{-kt}$ $\quad t \geq 0$ सभी के लिए

किन्हीं नियतांकों k तथा M के लिए, तब सभी $s > k$ के लिए $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में रहेगा।

टिप्पणी

6. लाप्लास रूपान्तरण के अवकलज गुण का उपयोग एक फलन के अवकलज को ज्ञात करने में प्रायः सुविधाजनक होता है।

7. माना $f(t)$ तथा उसके अवकलज $f'(t), f''(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ सभी $t \geq 0$ के लिए सतत् फलन हैं, कुछ k तथा M को संतुष्ट करते है माना अवकलज $f^{(n)}(t)$ रेंज $t \geq 0$ में प्रत्येक परिमित अंतराल में खण्डशः सतत् है तब लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में होगा जबकि $s > k$ हो और इस प्रकार दिया जायेगा,

$$L\left(f^{(n)}\right) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

8. यदि $f(t)$ का रूपान्तरण $F(s)$ है (जहां $s > k$) तब $e^{at} f(t)$ का रूपान्तरण $F(s - a)$ होगा जहां $s - a > k$, सूत्र के अनुसार

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

या यदि हम दोनों ओर प्रतिलोम तो हमें प्राप्त होगाः

$$e^{at} f(t) = L^{-1}\{F(s - a)\}.$$

9. अवकलन समीकरणों का हल देने के लिए रूपान्तरण प्रतिलोम रूपान्तरण निकालने तथा उनसे जुड़े अनुप्रयोगों के संबंधित विभिन्न तकनीकों की संख्या बहुत अधिक है। रूपान्तरणों $F(s)$ के अवकलनों तथा समाकलों पर विचार किया जाता है, मूल फलन $f(t)$ के लिए इनसे संबंधित प्रचालनों को भी महत्व प्राप्त है। इस बात पर विचार कीजिए कि अवकलन तथा समकलन 't' समिष्ट का 's' समिष्ट में अभिव्यक्ति रूपांतरित किया जाए।

2.8 सारांश

- गणित में लाप्लास रूपान्तर बहुत व्यापक तौर पर प्रयुक्त होने वाले समाकल रूपान्तरण है जिन्हें $\mathcal{L}\{f(t)\}$ द्वारा निरुपित किया जाता है। यह एक वास्तविक तर्क t ($t \geq 0$) के साथ एक फलन $f(t)$ का रैखिक संकारक है जो उसे एक सम्मिश्र तर्क s वाले $F(s)$ में रूपान्तरित कर देता है।
- लाप्लास रूपान्तरण को फूरियर रूपान्तरण से संबंधित किया जा सकता है। फूरियर रूपान्तर जहां एक फलन को उसकी कंपन विधियों में परिभाषित है वहीं लाप्लास रूपान्तरण एक फलन को उसके समय क्षणों में परिभाषित है, मूल संकेत समय पर निर्भर होता है और इसलिए लाप्लास रूपान्तरण संकेत की समय क्षेत्र निरूपण कहलाता है
- रूपान्तरण में– कलन संक्रियाओं से बीजीय संक्रियाओं की ओर स्थानांतरण संक्रियात्मक कलन कहलाती है जो अनुप्रयुक्त गणित का एक अनिवार्य भाग है और विशेषरूप से अभियांत्रिकी के संदर्भ में प्रयुक्त किया जाता है।

- जब बिना प्रतिबंध के लाप्लास रूपान्तरण परिभाषित किया जाता है तब प्रायः एकपक्षीय रूपान्तरण पर विचार किया जाता है वैकल्पिक रूप से सम्पूर्ण वास्तविक अक्ष पर समाकलन की सीमाओं को विस्तारित कर लाप्लास रूपान्तरण को द्विपार्श्विक लाप्लास रूपान्तरण की तरह परिभाषित किया जा सकता है। यदि ऐसा कर दिया गया तो सामान्य एकपक्षीय रूपान्तरण, द्विपार्श्विक रूपान्तरण का एक विशेष प्रकरण बन जायेगा जिसमें फलन की परिभाषा हैवीसाइड चरण फलन से गुणा हो जाने से रूपान्तरित हो जाती है।
- प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण को अनेक नामों से जाना जाता है जैसे ब्रोमविच समाकल फूरियर–मेलिन समाकल तथा मेलिन का प्रतिलोम सूत्र।
- लाप्लास रूपान्तरण को प्रायः सशर्त अभिसरण समझा जाता है इसका अर्थ है कि यह दूसरे दृष्टिकोण की तुलना में पहले से अभिसरण करता है।
- विभिन्न परिस्थितियों में अवकल समीकरण का हल बिना किसी कठिनाई के प्रतिस्थापन द्वारा जांचा जा सकता है इसलिए इसे कोई बड़ी प्रायोगिक समस्या नहीं कहा जा सकता।
- यदि एक दिए गये फलन का लाप्लास रुपान्तरण अस्तित्व रखता है तो उसे वह पृथक रूप से निर्धारित होता है।
- लाप्लास रूपान्तरण एक विधि है जिसका उपयोग अवकल समीकरणों के हल को ज्ञात करने में किया जाता है, लाप्लास रूपान्तरण कलन की संक्रियाओं को बीजगणितीय प्रचालन या संक्रियाएं से प्रतिस्थापित कर देता है।
- अवकलन तथा समाकलन परस्पर विपरीत प्रक्रियाएं हैं इसी कोटि में एक फलन का अवकलन उसके रूपान्तरण में s के गुणन के संगत होता है हम अपेक्षा करते हैं कि एक फलन का समाकलन उसके रूपान्तरण को s से विभाजित करने पर मिलने वाले परिणाम के संगत होगा क्योंकि विभाजन गुणन की प्रतिलोम प्रक्रिया है।
- अवकलन समीकरणों का उत्तर देने के लिए रूपान्तरण प्रतिलोम रूपान्तरण निकालने तथा उनसे जुड़े अनुप्रयोगों के संबंधित विभिन्न तकनीकों की संख्या बहुत अधिक है। रूपान्तरणों $F(s)$ के अवकलनों तथा समाकलों पर विचार किया जाता है, मूल फलन $f(t)$ के लिए इनसे संबंधित प्रचालनों प्रचालन को भी महत्व प्राप्त है।

2.9 मुख्य शब्दावली

- **लाप्लास रूपान्तरण** : गणित में लाप्लास रूपान्तर बहुत व्यापक तौर पर प्रयुक्त होने वाले समाकल रूपान्तरण है जिन्हें $L\{f(t)\}$ द्वारा निरुपित किया जाता है। यह एक वास्तविक तर्क $t\,(t \geq 0)$ के साथ एक फलन $f(t)$ का रैखिक संचालक है जो उसे एक संमिश्र तर्क s वाले $F(s)$ में रूपान्तरित कर देता है।
- **द्विपार्श्विक लाप्लास रूपान्तरण** : जब बिना शर्त के लाप्लास रूपान्तरण परिभाषित किया जाता है तब प्रायः एकपक्षीय रूपान्तरण पर विचार किया जाता

है वैकल्पिक रूप से सम्पूर्ण वास्तविक अक्ष पर समाकलन की सीमाओं को विस्तारित कर लाप्लास रूपान्तरण को द्विपक्षीय लाप्लास रूपान्तरण की तरह परिभाषित किया जा सकता है।

टिप्पणी

2.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. लाप्लास रूपान्तरण का उपयोग क्यों किया जाता है?
2. द्विपार्श्विक लाप्लास रूपान्तरण और प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण के बीच क्या अंतर है?
3. अभिसरण के क्षेत्र को परिभाषित करें।
4. लाप्लास रूपान्तरण के लिए अस्तित्व प्रमेय की व्याख्या करें।
5. एक फलन के अवकलज का लाप्लास रूपान्तरण कैसे किया जाता है?
6. किसी भी क्रम n के व्युत्पन्न के लिये लाप्लास रूपान्तरण पर उदाहरण के साथ व्याख्या करें।
7. अवकलनों तथा समाकलों का लाप्लास रुपान्तरण कैसे किया जाता है?
8. प्रथम स्थानान्तरण/विस्थापन प्रमेयों को परिभाषित करें।
9. लाप्लास रूपान्तरण को योजनाबद्ध तरीके से कैसे हल किया जाता है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. अवकल या अंतर समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपान्तरण के महत्व पर चर्चा करें।
2. निम्नलिखित के लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

   (i) $2t^3 + 3t^2 - 5t + 2$

   (ii) $\sqrt{e^{3(t+1)}}$

   (iii) $(e^{3t} + e^{-2t})^2$

   (iv) $\sin at \cos at$

   (v) $\sin^3 bt$

   (vi) $3t^2 + \cos^3 bt$

   (vii) $\sin at \cos bt$

3. निम्नलिखित समीकरणों के लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

   (i) $t^3 e^5 t$

   (ii) $e^{-t} \sin(2t+3)$

   (iii) $\cosh at \cos bt$

   (iv) $\sinh at \sin bt$

   (v) $3t^2 e^{-3t} + 5e^{3t} \cos 2t$

4. निम्नलिखित समीकरणों के लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए :
   (i) $(2t+1)\sin 2t$
   (ii) $(t+2)\cos 3t$
   (iii) $t^2 \sin at$
   (iv) $t^2 \cos at$
   (v) $te^{-t} \cos 2t$
   (vi) $te^{-at} \sin at$

5. निम्नलिखित समीकरणों के लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

   (i) $\dfrac{e^{-at} - \cos at}{t}$ *(ii)* $\dfrac{\sin^2 t}{t}$

   (iii) $\left[\dfrac{\sin 2t}{\sqrt{t}}\right]^2$ *(iv)* $\left(\dfrac{\sin at}{at}\right)^2$

   (v) $\dfrac{1-e^{-at}}{t}$

6. निम्नलिखित समीकरणों के लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

   (i) ज्ञात कीजिए :

   $$L\left[\int_0^t \frac{\sin at}{t} dt\right]$$

   (ii) सिद्ध कीजिए :

   $$L\left[\int_0^t \frac{f(t)}{t} dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \int_s^\infty L[f(t)ds$$

   (iii) ज्ञात कीजिए :

   $$L\left[\int_0^t \frac{\sin^2 t}{t} dt\right]$$

   (iv) ज्ञात कीजिए :

   $$L\left[\int_0^t \frac{t-e^{-at}}{t} dt\right]$$

   (v) ज्ञात कीजिए :

   $$L[e^{-t}\int_0^t t\cos t\, dt]$$

7. निम्नलिखित आवधिक फलन के लाप्लास रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए :
   (i) $f(t) = E \sin \omega t,\ 0 \le t \le (\pi / \omega)$ के लिए, और $f(t + (\pi / \omega) = f(t)$, सभी के लिए t.
   (ii) $f(t) = |\cos \omega t|$

(iii) $f(t) = 0, 0 < t < (\pi / \omega) = -\sin \omega t$ के लिए, $(\pi / \omega) < t < \frac{2\pi}{\omega}$ के लिए,
और $f(t + 2(\pi / \omega)) = f(t), t$ सभी के लिए।

टिप्पणी

8. निम्नलिखित दिए गए फलनों के लाप्लास रूपांतरणों को ज्ञात कीजिए यदि दिया है कि $f(t)$ एक आवधिक फलन है अवधि 2π का,
   (i) $f(t) = e^t, 0 < t < 2\pi$ के लिए
   (ii) $f(t) = \pi - t, 0 < t < 2\pi$ के लिए
   (iii) $f(t) = t^2$, के लिए $0 < t < 2\pi$
   (iv) $f(t) = t$, के लिए $0 < t < \pi = 0, \pi < t < 2\pi$ के लिए
   (v) $f(t) = t$, के लिए $0 < t < \pi = 2\pi - t, \pi < t < 2\pi$ के लिए
9. निम्नलिखित का प्रतिलोम रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :
   (i) $\frac{1}{(3p-4)^5}$ (ii) $\frac{1}{(2-3s)^3}$
   (iii) $\frac{2s^2+5s+2}{(s-1)^4}$ (iv) $\frac{2s+1}{(s^2-4)}$
   (v) $\frac{4s-1}{(s+1)^2}$ (vi) $\frac{s}{(s^2+4)^2}$
   (vii) $\frac{s^2+3s-2}{(s^2+4)^2}$
10. निम्नलिखित का प्रतिलोम रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :
   (i) $\frac{1}{s(s^2+4)}$ (ii) $\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
   (iii) $\frac{1}{s(s+2)(s-2)}$ (iv) $\frac{s}{(s+2)(s+7)}$
   (v) $\frac{s}{(2s+3)(3s+5)}$
11. निम्नलिखित समीकरणों के लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :
   (i) $L(2t^2 - e^{-t})$
   (ii) $L(t^2 + 1)^2$
   (iii) $L(\sin t - \cos t)^2$
   (iv) $L(\cosh^2 4t)$
   (v) $L\{f(t)\}$ if $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{जब } 0 < t < 2 \\ 4 & \text{जब } t > 2 \end{cases}$
   (vi) $L\{t^3 \, e^{-3t}\}$
   (vii) $L\{(t+2)^2 e^t\}$

12. सिद्ध कीजिए कि लाप्लास का रूपान्तरण संभव है :

$$\int_0^\infty te^{-3t} \sin t \; dt = \frac{3}{50}$$

13. समीकरण का उपयोग कर के निम्नलिखित समीकरणों को हल करें :

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$

(i) ज्ञात कीजिए :

$$L\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right]$$

(ii) ज्ञात कीजिए :

$$L\left[\frac{1-e^t}{t}\right]$$

(iii) निर्धारित कीजिए :

$$\int_s^\infty te^{-3t} \cos t \, dt$$

2.11 सहायक पाठ्य सामग्री

K. P. Gupta and J. K. Goyal. 2013. *Integral Transform*. Meerut (UP): Pragati Prakashan.

Sharma, J. N. and R. K. Gupta. 2015. *Differential Equations* (Paperback Edition). Meerut (UP): Krishna Prakashan Media (P) Ltd.

Raisinghania, M. D. 2013. *Ordinary and Partial Differential Equations*. New Delhi: S. Chand And Company Limited.

Coddington, Earl A. and N. Levinson. 1972. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Coddington, Earl A. 1987. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Boyce, W. E. and Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons.

Sneddon, I. N. 1986. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Education.

Somasundaram, D. 2002. *Ordinary Differential Equations*. Chennai: Narosa Publishing House.

लाप्लास रूपान्तरण की सारणी

फलन रूपान्तरण

टिप्पणी

F(s)	f(t) , t > 0
$Y(s) = \int_0^\infty \exp(-st)y(t)dt$	y(t) , लाप्लास रूपान्तरण की परिभाषा के अनुसार।
Y(s)	$y(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\exp(st)Y(s)ds$ प्रतिलोमीय सूत्र
$sY(s) - y(0)$	$y'(t)$, प्रथम अवकलज
$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$	$y''(t)$, द्वितीय अवकलज
$s^nY(s) - s^{n-1}[y(0)]$ $- s^{n-2}[y'(0)] - \ldots - s[y^{(n-2)}(0)]$ $-[y^{(n-1)}(0)]$	$y^{(n)}(t)$, n वाँ अवकलज
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t Y(\tau)d\tau$, समाकलन
F(s)G(s)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, संवलन समाकल
$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	$f(\alpha t)$, अनुमापन
$F(s - \alpha)$	$\exp(\alpha t)\, f(t)$, 's' समतल में स्थानांतरण
$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha} - \beta\right)$	$\exp(\alpha\beta t)f(\alpha t)$, संयुक्त अनुमापन तथा स्थानांतरण

टिप्पणी

F(s)	f (t) , t > 0
1	δ(t) , unit impulse at t = 0
s	$\frac{d}{dt}\delta(t)$, doublet impulse at t = 0
exp(- αs), α ≥ 0	$\delta(t-\alpha)$
$\frac{1}{s}$	u(t) , unit step
$\frac{1}{s}\exp(-\alpha s)$	$u(t-\alpha)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$, $n=1,2,3,....$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $n=1,2,3,....$	t^n
$\frac{1}{s^k}$, k is any real number > 0	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$\exp(-\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$t\exp(-\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$, $n=1,2,3,....$	$\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]\exp(-\alpha t)$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-\exp(-\alpha t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$, $\alpha \neq \beta$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)}[\exp(-\alpha t)-\exp(-\beta t)]$

टिप्पणी

$\dfrac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}, \quad \alpha \neq \beta$	$\dfrac{1}{\alpha\beta} + \dfrac{\exp(-\alpha t)}{\alpha(\alpha-\beta)} + \dfrac{\exp(-\beta t)}{\beta(\beta-\alpha)}$
$\dfrac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}, \quad \alpha \neq \beta$	$\dfrac{1}{(\alpha-\beta)}[\alpha \exp(-\alpha t) - \beta \exp(-\beta t)]$
$\dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\sin(\alpha t)$
$\dfrac{[\sin(\phi)]s + [\cos(\phi)]\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \phi)$
$\dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\cos(\alpha t)$
$\dfrac{s^2-\alpha^2}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$	$t\cos(\alpha t)$
$\dfrac{1}{s\left(s^2+\alpha^2\right)}$	$\dfrac{1}{\alpha^2}[1-\cos(\alpha t)]$
$\dfrac{1}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2\alpha^3}[\sin(\alpha t) - \alpha t\cos(\alpha t)]$
$\dfrac{s}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2\alpha}[t\sin(\alpha t)]$
$\dfrac{s^2}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2\alpha}[\sin(\alpha t) + \alpha t\cos(\alpha t)]$
$\dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+\alpha^2\right)}, \quad \alpha \neq \omega$	$\left\{\dfrac{1}{\omega^2-\alpha^2}\right\}\left\{\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha t) - \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right\}$
$\dfrac{\alpha}{s^2(s+\alpha)}$	$t - \dfrac{1}{\alpha}[1-\exp(-\alpha t)]$
$\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\sin(\beta t)$
$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)$

टिप्पणी

$\dfrac{s+\lambda}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\exp(-\alpha t)\left\{\cos(\beta t)+\left[\dfrac{\lambda-\alpha}{\beta}\right]\sin(\beta t)\right\}$
$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\beta^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin(\beta t+\phi), \quad \phi=\arctan\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$
$\dfrac{1}{s^2-\alpha^2}$	$\dfrac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t)$
$\dfrac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\cosh(\alpha t)$
$\arctan\left(\dfrac{\alpha}{s}\right)$	$\dfrac{1}{t}\sin(\alpha t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s+\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp(-\alpha t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^3}}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+\alpha^2}}$	$J_o(\alpha t)$,
$\dfrac{1}{\left(s^2+\alpha^2\right)^{3/2}}$	$\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)J_1(\alpha t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-\alpha^2}}$	$I_o(\alpha t)$,
$\dfrac{1}{\left(s^2-\alpha^2\right)^{3/2}}$	$\left(\dfrac{t}{\alpha}\right)I_1(\alpha t)$
$\sqrt{s-\alpha}-\sqrt{s-\beta}$	$\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t}}[\exp(\beta t)-\exp(\alpha t)]$

इकाई 3 लाप्लास रूपान्तरण, प्रतिलोम और अवकल समीकरणों को हल करना

संरचना

3.0 परिचय

गणित में, एक फलन $F(s)$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण (Inverse Laplace Transform) का खण्डशः (Piecewise) सतत या निरंतर फलन और घातीय रूप से प्रतिबंधित वास्तविक फलन (Real Function) $f(t)$ का रूप है। यह सिद्ध हो सकता है कि, यदि किसी फलन $F(s)$ में प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform) $f(t)$ है, तो $f(t)$ विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जाता है (केवल एक बिंदु पर एक दूसरे से भिन्न फलनों को निर्धारित करते हुए लेबेग (Lebesgue) को शून्य के रूप में मापते हैं)। यह परिणाम पहली बार 1903 में मैथियास लेर्च (Mathias Lerch) द्वारा सिद्ध किया गया था और इसे लेर्च के प्रमेय (Lerch's Theorem) के रूप में जाना जाता है। लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation) और प्रतिलोम लाप्लास में एक साथ कई गुण होते हैं जो रैखिक गतिशील प्रणालियों के विश्लेषण के लिए उन्हें उपयोगी बनाते हैं।

इस इकाई में आप प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरणों, संवलन प्रमेय अचर गुणांक वाले रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपान्तरण के अनुप्रयोग के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- संवलन प्रमेय की व्याख्या कर पाएंगे;
- अचर गुणांक के साथ रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपान्तरण का अनुप्रयोग कर पाएंगे।

3.2 प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण

अब हम प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation) को परिभाषित कर सकते हैं :

दिया हुआ हैं कि एक फलन (Function) (s), जो प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण है F का, जिसे $\mathcal{L}^{-1}$[F] द्वारा दर्शाया जाता है, वह फलन (f) है जिसका लाप्लास रूपान्तरण F है।

संक्षेप में,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t \iff \mathcal{L}[f(t)]|_s = F(s)$$

हमेशा $t \geq 0$ मानने पर हम प्राप्त करते हैं कि [F] के लिए उपरोक्त परिभाषा सुस्पष्ट है। इस परिभाषा में, निश्चित रूप से, हम मानते हैं कि $F(s)$ को कुछ फलन (f) के लिए $f(t)$ के रूप में दिया जा सकता है।

उदाहरण 3.1: दिया गया है,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-3}\right]\bigg|_t = 4e^{3t}$$

चूंकि

$$\frac{4}{s-3} = \mathcal{L}\left[4e^{3t}\right]\big|_s$$

इसी प्रकार दर्शाए कि,

$$\mathcal{L}\left[t^3\right]\big|_s = \frac{6}{s^4}$$

हमारे पास है,

$$t^3 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right]\bigg|_t$$

ये सत्य है कि,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t \iff \mathcal{L}[f(t)]|_s = F(s)$$

प्राप्त किए गए प्रत्येक $f(t)$ के लिए $F(s)$ को पढ़ने के बजाय, प्रत्येक $F(s)$ के लिए $f(t)$ को पढ़ें।

जैसा कि आप पहले ही देख चुके होंगे, प्रतिलोम रूपान्तरण के फलनों (s) को बड़े रोमन अक्षरों द्वारा दर्शाया जाता है, और इसी प्रकार (t) के फलन को छोटे रोमन संख्या (Roman Number) द्वारा दर्शाया जाता हैं। ये तकनीक संकेत लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transforms) के लिए पहले से निर्धारित किए गए तकनीक संकेत के अनुरूप हैं।

हमें यह भी ध्यान देना चाहिए कि वाक्यांश प्रतिलोम (Phrase Inverse) लाप्लास रूपान्तरण या तो प्रतिलोम रूपान्तरित फलन (f) या (g) से F की गणना करने की प्रक्रिया को संदर्भित कर सकता है।

वैसे, प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की गणना करने के लिए एक सूत्र है जो निम्न दिया गया है,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t = \frac{1}{2\pi} \lim_{Y \to +\infty} \int_{-Y}^{Y} e^{t(\sigma+i\xi)} F(\sigma + i\xi)\, d\xi$$

यहां पूर्ण सांख्यिक सम्मिश्र समतल (Complex Plane) में एक पंक्ति से अधिक है, और σ एक उपयुक्त रूप से चुना हुआ धनात्मक मान (Positive Value) है।

प्रतिलोम रूपान्तरण की रैखिकता (Linearity of the Inverse Transform)

तथ्य यह है कि प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण रेखीय रूपान्तरण की रैखिकता से तुरंत लाप्लास रूपान्तरण के प्रकार का अनुसरण करता है। यह देखने के लिए, आइए विचार करें कि $[\alpha F(s) + \beta G(s)]$ है जहां α और β कोई दो नियतांक हैं और F और G कोई दो फलन हैं, जिसके लिए लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में हैं। तकनीक संकेत के अनुसार, हम उन प्रतिलोम रूपान्तरणों को (f) और (g) द्वारा निरूपित करेंगे। अर्थात,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t \text{ और } g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]|_t$$

याद रखें, यह पूरी तरह से एक ही है कि,

$$\mathcal{L}[f(t)]|_s = F(s) \text{ और } \mathcal{L}[g(t)]|_s = G(s)$$

क्योंकि हम पहले से ही जानते हैं कि लाप्लास रूपान्तरण रैखिक है, हम जानते हैं कि,

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)]|_s = \alpha \mathcal{L}[f(t)]|_s + \beta \mathcal{L}[g(t)]|_s = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

यह, (f) और (g) के लिए प्रतिलोम रूपान्तरण की परिभाषा और उपरोक्त परिभाषाओं के साथ देता है,

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)]|_t = \alpha f(t) + \beta g(t) = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)]|_t$$

इन समीकरणों को वांछित के रूप में कई फलनों और नियतांक का उपयोग करके हल किया जा सकता है जो नीचे चर्चा की गई प्रमेय देता है।

प्रमेय 3.1 : प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की रैखिकता (Linearity of the Inverse Laplace Transform)

प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण रैखिक है। अर्थात,

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \cdots + c_n F_n(s)]$$
$$= c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \mathcal{L}[F_2(s)] + \cdots + c_n \mathcal{L}[F_n(s)]$$

जब प्रत्येक Ck एक नियतांक होता है और प्रत्येक Fk एक ऐसा फलन होता है जिसमें प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण होता है।

कुछ प्रतिलोम रूपान्तरणों की गणना करने के लिए रैखिकता का उपयोग करें।

उदाहरण 3.2 : ज्ञात करें

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]\Big|_t$$

हल: हम जानते हैं कि,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]\Big|_t = \sin(3t)$$

जो वांछित परिणाम देता है। इसके बाद इसका उपयोग आवश्यक प्रतिलोम रूपान्तरणों की गणना के साथ किया जा सकता है, ताकि हम गणित के सबसे पुराने युक्ति से एक के साथ रैखिकता को जोड़ सकें (1 से गुणा करके, इस प्रकरण में, 1 = 3/3)।

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]\bigg|_t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}\right]\bigg|_t = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right]\bigg|_t = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

'1' से गुणा करने के साथ–साथ रैखिकता का उपयोग बार–बार किया जाएगा।

उदाहरण 3.3 : प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

$$\frac{30}{s^7} + \frac{8}{s-4}$$

हलः

हम जानते हैं कि,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6!}{s^7}\right]\bigg|_t = t^6 \qquad \text{और} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right]\bigg|_t = e^{4t}$$

अगर,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s^7} + \frac{8}{s-4}\right]\bigg|_t = 30\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^7}\right]\bigg|_t + 8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right]\bigg|_t$$

$$= 30\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6!}\cdot\frac{6!}{s^7}\right]\bigg|_t + 8e^{4t}$$

$$= \frac{30}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6!}{s^7}\right]\bigg|_t + 8e^{4t} = \frac{30}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}t^6 + 8e^{4t}$$

जो कि कुछ गणितीय गणनाओं के उपरांत हो जाता है।

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s^7} + \frac{8}{s-4}\right]\bigg|_t = \frac{1}{24}t^6 + 8e^{4t}$$

आंशिक भिन्न (Partial Fractions)

लाप्लास रूपान्तरण अवकल समीकरणों (Differential Equations) के साथ रूपान्तरण का उपयोग करते समय, हमें अक्सर ऐसे रूपान्तरण मिलते हैं, जिन्हें आंशिक भिन्नों (Partial Fractions) के जरिए परिवर्तित किया जा सकता है, जिन्हें सारणी और रैखिकता का उपयोग करके आसानी से प्रतिलोम रूप दिया जाता है। इसका मतलब है कि आंशिक भिन्न अंशों की सामान्य विधि (s) विशेष रूप से महत्वपूर्ण हैं। अब तक आप आंशिक भिन्न अंशों का उपयोग करने के साथ अच्छी तरह से परिचित हो गए हैं। याद रखें, मूल विचार यह है, अगर हमारे पास दो बहुपदों (Polynomials) का भिन्न है,

$$\frac{Q(s)}{P(s)}$$

और $P(s)$ को दो छोटे बहुपदों में विभाजित किया जा सकता है,

$$P(s) = P_1(s)\, P_2(s)$$

फिर दो अन्य बहुपद $Q_1(s)$ और $Q_2(s)$ मिल सकते हैं, ताकि

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{P_1(s)P_2(s)} = \frac{Q_1(s)}{P_1(s)} + \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}$$

इसके अलावा, यदि $Q(s)$ की कोटि $P(s)$ की कोटि से कम है, तो प्रत्येक $Q_k(s)$ की कोटि संबंधित $P_k(s)$ की कोटि से कम होगी।

स्थानांतरण किए गए फलन के प्रतिलोम रूपान्तरण (Inverse Transforms of Shifted Functions)

लाप्लास रूपान्तरण के लिए निकाली गई सभी तत्समक को प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण के संदर्भ में फिर से लिखा जा सकता है। हमारे लिए विशेष मान प्रथम स्थानांतरण (Shifting) तत्समक है:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)]\big|_s = F(s-a)$$

जहाँ $F = \mathcal{L}[f(t)]$ और a कोई निश्चित वास्तविक संख्या है। प्रतिलोम रूपान्तरण के संदर्भ में, यह है

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]\big|_t = e^{at} f(t)$$

जहाँ $f = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ और a कोई निश्चित वास्तविक संख्या (Real Number) है। इस तरह से देखने पर, हमारे पास उन फलन के प्रतिलोम रूपान्तरणों को खोजने का एक उपर्युक्त तरीका है जिन्हें हमारी सारणी या तालिकाओं में फलन के 'स्थानांतरण' के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 3.4: माना कि

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-6)^3}\right]\bigg|_t$$

यहां स्पष्ट रूप से 'स्थानांतण' है $a = 6$, और उपरोक्त तत्समक का प्रयोग करते हुए हमारे पास है,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-6)^3}\right]\bigg|_t = \mathcal{F}^{-1}[F(s-6)]\big|_t = e^{6t} f(t) \qquad (3.1)$$

अब हमें $f(t)$ ज्ञात करना है, इस तथ्य से कि,

$$F(s-6) = \frac{1}{(s-6)^3}$$

माना कि $X = s - 6$ इस समीकरण में, तो हमारे पास हैं,

$$F(X) = \frac{1}{X^3}$$

इस प्रकार,

$$F(s) = \frac{1}{s^3}$$

टिप्पणी

और,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]\Bigg|_t$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2!}\cdot\frac{2!}{s^{2+1}}\right]\Bigg|_t = \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\cdot\frac{2!}{s^{2+1}}\right]\Bigg|_t = \frac{1}{2}t^2$$

समीकरण (3.1) को लेने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-6)^3}\right]\Bigg|_t = \cdots = e^{6t}f(t) = e^{6t}\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^2e^{6t}$$

उदाहरण 3.5 : प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण के आधार पर ज्ञात करें,

$$\frac{1}{s^2-8s+25}$$

हलः यदि भाजक को उपयुक्त रूप से भिन्न किया जा सकता है, तो हम आंशिक भिन्नों का उपयोग करेंगे। यह भाजक उपयुक्त रूप से भिन्न नहीं है (जब तक कि हम सम्मिश्र संख्या का उपयोग नहीं करते हैं)। जब ऐसा होता है, तो कुछ नियतांक a के लिए पद '$s-a$' के संदर्भ में हर को फिर से लिखने के लिए वर्ग को पूरा करने का प्रयास करें। यहाँ,

$$s^2 - 8s + 25 = s^2 - 2\cdot 4s + [4^2 - 4^2] + 25$$

$$= \underbrace{s^2 - 2\cdot 4s + 4^2}_{(s-4)^2} - 4^2 + 25 = (s-4)^2 + 9$$

अतः,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-8s+25}\right]\Bigg|_t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)^2+9}\right]\Bigg|_t$$

$$= \mathcal{L}^{-1}[F(s-4)]|_t = e^{4t}f(t) \qquad ...(3.2)$$

फिर हमें ज्ञात करना है, $f(t)$ जो कि स्थानांतरण या रूपान्तरण है। यहां,

$$F(s-4) = \frac{1}{(s-4)^2+9}$$

माना कि $X = s-4$ इस समीकरण में हमारे पास है,

$$F(X) = \frac{1}{X^2+9}$$

जो यह बताता है कि $F(s)$ के सूत्र है,

$$F(s) = \frac{1}{s^2+9}$$

इस प्रकार,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]\Big|_t$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}\right]\Big|_t = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right]\Big|_t = \frac{1}{3}\sin(3t)$$

समीकरण (3.2) का उपयोग करने पर हम,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-8s+25}\right]\Big|_t = \cdots = e^{4t}f(t) = e^{4t}\frac{1}{3}\sin(3t) = \frac{1}{3}e^{4t}\sin(3t)$$

3.3 संवलन प्रमेय

संवलन प्रमेय (Convolution Theorem) रूपांतरणों के गुणों से संबंधित लाप्लास रूपान्तरण के एक और आवश्यक आधारभूत गुण (Basic Property) है। कई बार, ऐसा होता है कि दो रूपान्तरणों $F(s)$ और $G(s)$ प्रदान किए जाते हैं जिनके प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ ज्ञात होते हैं, और गुणन $H(s) = F(s)G(s)$ की गणना उन ज्ञात प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ से की जानी है। इस प्रतिलोम $h(t)$ को $(f * g)(t)$ लिखा जाता है, जो एक मानक संकेतन है, और f और g का **संवलन (Convolution)** कहलाता है।

प्रमेय 3.2 : संवलन प्रमेय (Convolution Theorem)

इसलिए *f(t)* और *g(t)* **अस्तित्व प्रमेय (Existence Theorem)** की परिकल्पना को पूरा करते हैं। फिर उनके रूपान्तरणों का गुणन और *f(t)* और *g(t)* के संवलन (Convolution) *h(t)* का रूपान्तरण है, जिसे इसके द्वारा *(f * g)(t)* को परिभाषित किया जाता है। और,

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

प्रमाणः इस प्रमेय को $G(s)$ की परिभाषा से प्रमाणित किया जा सकता है और द्वितीय स्थानांतरण प्रमेय का उपयोग किया जाता है, प्रत्येक निश्चित τ $(\tau \geqq 0)$ के लिए हम प्राप्त करते हैं,

$$e^{-s\tau}G(s) = L\{g(t-\tau)u(t-\tau)\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)u(t-\tau)\,dt$$

$$= \int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt$$

जहां $s > k$. इससे तथा $F(s)$ की परिभाषा से हम प्राप्त करते हैं,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\;d\tau$$

जहां $s > k$। यहां हम समाकल t को τ से ∞ तक और फिर τ को 0 से ∞ तक करते हैं।

उदाहरण 3.6: संवलन प्रमेय का प्रयोग करके $H(t)$ का प्रतिलोम ज्ञात करें।

टिप्पणी

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

हल: हम जानते हैं कि दाईं ओर प्रत्येक गुणक (Factor) में प्रतिलोम $\sin t$ है। इसलिए हम जो संवलन प्रमेय से प्राप्त करते हैं,

$$h(t) = L^{-1}(H) = \sin t * \sin t$$

$$= \int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t -\cos t\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau - t)\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

$1/s^2$ के पास है प्रतिलोम t और $1/s$ और संवलन प्रमेय सिद्ध करता है कि $1/s^3 = (1/s^2)(1/s)$ का प्रतिलोम है,

$$t * 1 = \int \tau \cdot 1\, d\tau = \frac{t^2}{2}.$$

उदाहरण 3.7: यदि If $H(s) = 1/\left[s^2(s-a)\right]$ तो ज्ञात करें $h(t)$.

हल: सारणी 2.1 से हमें ज्ञात है कि,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

रूपान्तरण प्रमेय का प्रयोग करके और विभिन्न भागों का समाकलन करके हमें उत्तर प्राप्त होता है,

$$h(t) = t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)}\,d\tau = e^{at}\int_0^t \tau e^{-a\tau}\,d\tau$$

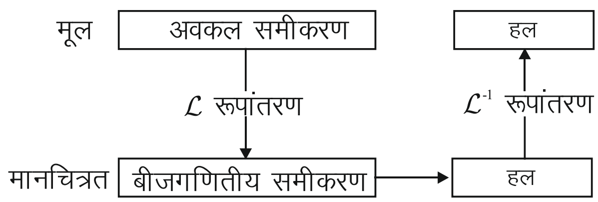
$$= \frac{1}{a^2}\left(e^{at} - at - 1\right).$$

3.4 अचर गुणांक के साथ रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपान्तरण का अनुप्रयोग

लाप्लास रूपांतरण (Algebric Equation), अचर गुणांक वाले रैखिक अवकल समीकरणों के तीव्र से और योजनाबद्ध समाधान के लिए एक उपयुक्त युक्ति है। मूल डोमेन में प्रारंभिक स्थितियों के साथ अवकल समीकरण को हल करने के विकल्प के रूप में, आवृत्ति

डोमेन में एक मानचित्रण लिया जाता है जहां केवल एक बीजीय समीकरण (Algebraic Equations) को हल करना होता है। अवकल समीकरणों को हल करना चित्र 3.1 में दिए गए दिशा–निर्देशों के अनुसार किया जाता है, जिसमें निम्नलिखित तीन चरण शामिल होते हैं:

- मानचित्रित समष्टि (Mapped Space) में अवकल या अंतर समीकरण का परिवर्तन होना।
- मानचित्रित समष्टि में बीजगणितीय समीकरण को हल करना।
- मूल समष्टि में समाधान का पूर्व रूपान्तरण करना।



***चित्र 3.1** अवकल समीकरणों को हल करने की विधि लाप्लास रूपान्तरण द्वारा*

निम्न उदाहरणों से इस तथ्य को समझाना आसान होगा।

उदाहरण 3.8: माना कि अवकल समीकरण $\ddot{f}(t)+3\dot{f}(t)+2f(t)=e^{-t}$ है, जिसकी प्रारभिंक स्थिति $f(0+)=\dot{f}(0+)=0$ है।

हल: हम अवकल समीकरण को निम्न चरणों की सहायता से हल कर सकते हैं।

चरण 1: $s^2F(s)+3sF(s)+2F(s)=\dfrac{1}{s+1}$

चरण 2: $F(s)=\dfrac{1}{s+1}\,\dfrac{1}{s^2+3s+2}$

चरण 3: सम्मिश्र फलन (Complex Function) $F(s)$ को आंशिक भिन्नों में विघटित किया जाता है।

$$F(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}.$$

प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण से दिए गए अवकल समीकरण का हल प्राप्त करते हैं,

$$f(t)=e^{-2t}-e^{-t}+te^{-t}.$$

उदाहरण 3.9: दिए गए अवकल समीकरणों को लाप्लास रूपान्तरण का प्रयोग करके हल करें।

$$x_1'=3x_1-3x_2+2 \qquad x_1(0)=1$$
$$x_2'=-6x_1-t \qquad x_2(0)=-1$$

हल: ध्यान दें कि प्रणाली आव्यूह रूप में नहीं दिया गया है इसलिए समाधान में आव्यूह रूप की आवश्यकता नहीं है। तब यह प्रणाली असमरूप (Non-Homogeneous) है।

अवकल समीकरणों को हल करने के लिए लाप्लास रूपान्तरण का उपयोग करते हुए, हम दोनों अवकल समीकरणों के रूपान्तरण पर विचार करते हैं,

$$sX_1(s)-x_1(0)=3X_1(s)-3X_2(s)+\frac{2}{s}$$

$$sX_2(s)-x_2(0)=-6X_1(s)-\frac{1}{s^2}$$

अब प्रारंभिक स्थिति का उपयोग करें और प्राप्त करने के लिए सरल करें,

$$(s-3)X_1(s)+3X_2(s)=\frac{2}{s}+1=\frac{2+s}{s}$$

$$6X_1(s)+sX_2(s)=-\frac{1}{s^2}-1=-\frac{s^2+1}{s^2}$$

किसी एक रूपान्तरण के लिए इसे हल करने के लिए, पूर्व समीकरण को अंश में s से और हर को –3 से गुणा करें और फिर जोड़ें तब हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा,

$$(s^2-3s-18)X_1(s)=2+s+\frac{3s^2+3}{s^2}$$

X_1 को हल करने पर,

$$X_1(s)=\frac{s^3+5s^2+3}{s^2(s+3)(s-6)}$$

आंशिक भिन्न के द्वारा,

$$X_1(s)=\frac{1}{108}\left(\frac{133}{s-6}-\frac{28}{s+3}+\frac{3}{s}-\frac{18}{s^2}\right)$$

प्रतिलोम रूपान्तरण से हमें प्रथम हल प्राप्त होता है।

$$x_1(t)=\frac{1}{108}\left(133e^{6t}-28e^{-3t}+3-18t\right)$$

द्वितीय हल के लिए X_1 को निष्कासित कर रूपान्तरण ज्ञात करते है X_2 का इस स्थिति में द्वितीय अवकल समीकरण निम्न होगा,

$$x_2'=-6x_1-t \qquad \Rightarrow \qquad x_2=\int -6x_1-t\,dt$$

प्रथम हल के साथ समाकलित (Integrating) करने पर,

$$x_2(t)=-\frac{1}{18}\int 133e^{6t}-28e^{-3t}+3\,dt$$

$$=-\frac{1}{108}\left(133e^{6t}+56e^{-3t}+18t\right)+c$$

द्वितीय प्रारंभिक स्थिति को पुनः उपयोग कर के हम समाकलन स्थिंराक पाते हैं,

$$-1=-\frac{1}{108}(133+56)+c \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{3}{4}$$

द्वितीय हल है,

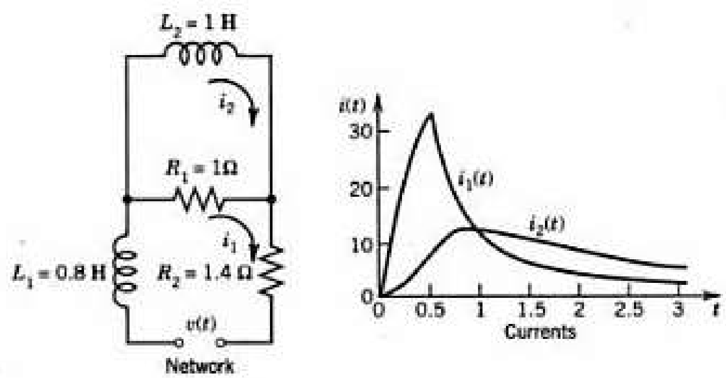
$$x_2(t) = -\frac{1}{108}\left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81\right)$$

सभी समीकरणों को एक साथ रख कर हमें हल मिलता है।

$$x_1(t) = \frac{1}{108}\left(133e^{6t} - 28e^{-3t} + 3 - 18t\right)$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{108}\left(133e^{6t} + 56e^{-3t} + 18t - 81\right)$$

उदाहरण 3.10: ज्ञात कीजिए कि धारा $i_1(t)$ तथा $i_2(t)$ नेटवर्क में दिए गए चित्रानुसार है तथा जो L एवं R मापने के लिए सामान्य इकाई, $v(t) = 100$ वोल्ट यदि $0 \le \mathbf{t} \le$ 0.5 सेकेण्ड एवं 0 है तथा $i(0) = 0$, $i(0) = 0$ दिया है।



हल: किरचॉफ वोल्टेज नियम (Kirchhoff's Voltage Law) का उपयोग करके नेटवर्क की विधि (Method of the Network) प्राप्त की जा सकती है।

$$0.8i_1' + 1(i_1 - i_2) + 1.4i_1 = 100\left[1 - u\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$1 \cdot i_2' + l(i_2 - i_1) = 0.$$

0.8 से भाग देने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा

$$i_1' + 3i_1 - 1.25i_2 = 125\left[1 - u\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$i_2' - i_1 + i_2 = 0$$

$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0$ के साथ हम द्वितीय स्थानान्तरण प्रमेय (Second Shifting Theorem) को सहायक समीकरण के रूप में प्राप्त करते हैं:

$$(s+3)I_1 - 1.25I_2 = 125\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-s/2}}{s}\right)$$

$$-I_1 + (s+1)I_2 = 0.$$

बीजगणितीय संक्रियाओं द्वारा हल I_1 और I_2 प्राप्त समीकरण निम्न होगा:

$$I_1 = \frac{125(s+1)}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{7}{2}\right)}\left(1-e^{s/2}\right)$$

$$I_2 = \frac{125}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{7}{2}\right)}\left(1-e^{-s/2}\right),$$

गुणक के अभाव में दाहिनी ओर $1-e^{-s/2}$ के आंशिक भिन्न विस्तार के रूप को समाहित करने पर,

$$\frac{500}{7s}-\frac{125}{3\left(s+\frac{1}{2}\right)}-\frac{625}{21\left(s+\frac{7}{2}\right)},\ \frac{500}{7s}-\frac{250}{3\left(s+\frac{1}{2}\right)}+\frac{250}{21\left(s+\frac{7}{2}\right)},$$

प्रयुक्त समीकरण $0 \le t \le \frac{1}{2}$ का प्रतिलोम रूपांतरण प्रदान करता है,

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}e^{-t/2}-\frac{625}{21}e^{-7t/2}+\frac{500}{7}$$

$$i_2(t) = -\frac{250}{3}e^{-t/2}+\frac{250}{21}e^{-7t/2}+\frac{500}{7} \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

द्वितीय स्थानांतरण प्रमेय द्वारा $t > \frac{1}{2}$ हल के लिए क्रमशः प्रतिसीपन द्वारा प्राप्त समीकरण, $i_1\left(t-\frac{1}{2}\right)$ और $i_2\left(t-\frac{1}{2}\right)$, क्रमशः प्रतिस्थापन द्वारा प्राप्त समीकरण,

$$i_1(t) = -\frac{125}{3}\left(1-e^{1/4}\right)e^{-t/2}-\frac{625}{21}\left(1-e^{7/4}\right)e^{-7t/2}$$

$$i_2(t) = -\frac{250}{3}\left(1-e^{1/4}\right)e^{-t/2}+\frac{250}{21}\left(1-e^{7/4}\right)e^{7t/2} \qquad \left(t>\frac{1}{2}\right)$$

इसी प्रकार अवकल समीकरण की उच्च कोटि की प्रणाली लाप्लेस रूपांतरण विधि का प्रयोग करके हल की जा सकती है। उच्च कोटि का अवकल समीकरण उच्च व्युत्पन्न $x''(t), x'''(t)$, इत्यादि, से समाहित है ये गणितीय प्रतिरूप भौतिकी तथा अभियांत्रिकी में होने वाली समस्त्राओं के समाधान के लिए प्रयोगकारी साबित की गई है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण क्या है?
2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की रैखिकता क्या है?
3. संवलन प्रमेय को परिभाषित करें।
4. लाप्लास रूपान्तरण को क्यों उपयोग करते हैं?

3.5 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. दिया हुआ हैं एक फलन (s), जो प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण है F का, जिसे $\mathcal{L}^{-1}$ [F] द्वारा दर्शाया जाता है, वह फलन (f) है जिसका लाप्लास रूपान्तरण F है।

   संक्षेप में

   $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t \iff \mathcal{L}[f(t)]|_s = F(s)$

   हमेशा $t \geq 0$ मानने पर हम प्राप्त करते हैं कि [F] के लिए उपरोक्त परिभाषा सुस्पष्ट है। इस परिभाषा में, निश्चित रूप से, हम मानते हैं कि $F(s)$ को कुछ फलन (f) के लिए $f(t)$ के रूप में दिया जा सकता है।

2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण रैखिक है। अर्थात,

   $$\mathcal{L}^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \cdots + c_nF_n(s)]$$
   $$= c_1\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2\mathcal{L}[F_2(s)] + \cdots + c_n\mathcal{L}[F_n(s)]$$

   जब प्रत्येक Ck एक नियतांक होता है और प्रत्येक Fk एक ऐसा फलन होता है जिसमें प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण होता है।

3. संवलन प्रमेय रूपांतरणों के गुणों से संबंधित लाप्लास रूपान्तरण की एक और आवश्यक आधारभूत गुण है। कई बार, ऐसा होता है कि दो रूपान्तरणों $F(s)$ और $G(s)$ प्रदान किए जाते हैं जिनके प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ ज्ञात होते हैं, और गुणन $H(s) = F(s)G(s)$ की गणना उन ज्ञात प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ से की जाती है। इस प्रतिलोम $h(t)$ को $(f * g)(t)$ लिखा जाता है, जो एक मानक संवलन है, और f और g का संवलन कहलाता है।

4. लाप्लास रूपांतरण, चर गुणांक वाले रैखिक अवकल या अंतर समीकरणों के तीव्र और योजनाबद्ध समाधान के लिए एक उपयुक्त युक्ति है। मूल डोमेन में प्रारंभिक स्थितियों के साथ अवकल समीकरण को हल करने के विकल्प के रूप में, आवृत्ति क्षेत्र में एक मानचित्रण लिया जाता है जहां केवल एक बीजीय समीकरण को हल करना होता है।

3.6 सारांश

- दिया हुआ हैं एक फलन (s), जो प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण है F का, जिसे $\mathcal{L}^{-1}$[F] द्वारा दर्शाया जाता है, वह फलन (f) है जिसका लाप्लास रूपान्तरण F है।

  संक्षेप में

  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t \iff \mathcal{L}[f(t)]|_s = F(s)$

  हमेशा $t \geq 0$ मानने पर हम पाते है कि [F] के लिए उपरोक्त परिभाषा सुस्पष्ट है। इस परिभाषा में, निश्चित रूप से, हम मानते हैं कि $F(s)$ को कुछ फलन (f) के लिए $f(t)$ के रूप में दिया जा सकता है।

- वैसे, प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की गणना करने के लिए एक सूत्र है जो निम्न है,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_t = \frac{1}{2\pi} \lim_{Y \to +\infty} \int_{-Y}^{Y} e^{t(\sigma + i\xi)} F(\sigma + i\xi)\, d\xi$$

यहां पूर्ण सांख्यिक सम्मिश्र समतल में एक पंक्ति से अधिक है, और σ एक उपयुक्त रूप से चुना हुआ धनात्मक मान है।

- तथ्य यह है कि प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण रेखीय रूपान्तरण की रैखिकता से तुरंत लाप्लास रूपान्तरण प्रकार का अनुसरण करता है। यह देखने के लिए, आइए विचार करें कि $[\alpha F(s) + \beta G(s)]$ है जहां α और β किन्हीं दो नियतांक हैं और F और G किन्हीं दो फलन हैं, जिसके लिए लाप्लास रूपान्तरण अस्तित्व में हैं। तकनीक संकेत के अनुसार, हम उन प्रतिलोम रूपान्तरणों को (f) और (g) द्वारा निरूपित करेंगे।

- प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण रैखिक है। अर्थात

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \cdots + c_n F_n(s)]$$
$$= c_1 \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + c_2 \mathcal{L}[F_2(s)] + \cdots + c_n \mathcal{L}[F_n(s)]$$

जब प्रत्येक Ck एक नियतांक होता है और प्रत्येक Fk एक ऐसा फलन होता है जिसमें प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण होता है।

- लाप्लास रूपान्तरण अवकल समीकरणों के साथ रूपान्तरण का उपयोग करते समय, हमें अक्सर ऐसे रूपान्तरण मिलते हैं, जिन्हें आंशिक भिन्न के जरिए परिवर्तित किया जा सकता है, जिन्हें सारणी और रैखिकता का उपयोग करके आसानी से प्रतिलोम रूप दिया जाता है।

- लाप्लास रूपान्तरण के लिए निकाले गए सभी तत्समकों को प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण के संदर्भ में फिर से लिखा जा सकता है। हमारे लिए विशेष मान प्रथम स्थानांतरण तत्समक हैः

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right]\Big|_s = F(s-a)$$

जहाँ $F = \mathcal{L}[f(t)]$ और a कोई निश्चित वास्तविक संख्या है। प्रतिलोम रूपान्तरण के संदर्भ में, यह है

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]|_t = e^{at} f(t)$$

जहाँ $f = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ और a कोई निश्चित वास्तविक संख्या है। इस तरह से देखने पर, हमारे पास उन फलन के प्रतिलोम रूपान्तरणों को खोजने का एक अच्छा तरीका है जिन्हें हमारी सारणी या तालिकाओं में फलन के 'स्थानांतरण' के रूप में लिखा जा सकता है।

- संवलन प्रमेय रूपांतरणों के गुणों से संबंधित लाप्लास रूपान्तरण की एक और आवश्यक आधारभूत गुण है। कई बार, ऐसा होता है कि दो रूपान्तरणों $F(s)$ और $G(s)$ प्रदान किए जाते हैं जिनके प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ ज्ञात होते हैं, और गुणन $H(s) = F(s)G(s)$ की गणना उन ज्ञात प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ से की जानी है।

इस प्रतिलोम $h(t)$ को $(f * g)(t)$ लिखा जाता है, जो एक मानक संवलन है, और f और g का दृढ़ संवलन कहलाता है।

- लाप्लास रूपांतरण, नियतांक गुणांक वाले रैखिक अवकल समीकरणों के तीव्र से और योजनाबद्ध हल के लिए एक उपयुक्त युक्ति है। मूल डोमेन में प्रारंभिक स्थितियों के साथ अवकल समीकरण को हल करने के विकल्प के रूप में, आवृत्ति डोमेन में एक मानचित्रण लिया जाता है जहां केवल एक बीजीय समीकरण को हल करना होता है।

3.7 मुख्य शब्दावली

- **प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण** : दिया हुआ हैं एक फलन (s), जो प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण है F का, जिसे $\mathcal{L}^{-1}[F]$ द्वारा दर्शाया जाता है, वह फलन (f) है जिसका लाप्लास रूपांतरण F है।
- **आंशिक भिन्न** : लाप्लास रूपान्तरण अवकल समीकरणों के साथ रूपान्तरण का उपयोग करते समय, हमें अक्सर ऐसे रूपान्तरण मिलते हैं, जिन्हें आंशिक भिन्न के जरिए परिवर्तित किया जा सकता है, जिन्हें सारणी और रैखिकता का उपयोग करके आसानी से प्रतिलोम रूप दिया जाता है।
- **संवलन प्रमेय** : संवलन प्रमेय रूपांतरणों के गुणों से संबंधित लाप्लास रूपांतरण की एक और आवश्यक आधारभूत गुण है। कई बार, ऐसा होता है कि दो रूपान्तरणों $F(s)$ और $G(s)$ प्रदान किए जाते हैं जिनके प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ ज्ञात होते हैं, और गुणन $H(s) = F(s)G(s)$ की गणना उन ज्ञात प्रतिलोम $f(t)$ और $g(t)$ से की जानी है। इस प्रतिलोम $h(t)$ को $(f * g)(t)$ लिखा जाता है, जो एक मानक संवलन है, और f और g का संवलन कहलाता है।

3.8 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. प्रतिलोम लाप्लास प्रमेय की परिभाषा दीजिए।
2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की रैखिकता क्या है?
3. स्थानांतरण किए गए फलनों के प्रतिलोम को समझाइए।
4. संवलन प्रमेय का वर्णन करें।
5. रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में लाप्लास रूपान्तरण का क्या उपयोग है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. उपयुक्त उदाहरणों के साथ प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण के बारे में चर्चा करें।
2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण में आंशिक भिन्न के उपयोग का विश्लेषण करें।

3. संवलन प्रमेय की विधि के विषय में उदाहरण के साथ व्याख्या करें।
4. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{1}{s-6}$ (ii) $\frac{1}{s+2}$ (iii) $\frac{1}{s^2}$

(iv) $\frac{6}{s^4}$ (v) $\frac{5}{s^2+25}$ (vi) $\frac{s}{s^2+3\pi^2}$

5. तालिकाओं और रैखिकता का उपयोग करते हुए, निम्न में से प्रत्येक के लिए प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{6}{s+2}$ (ii) $\frac{1}{s^4}$ (iii) $\frac{3}{\sqrt{s}} - \frac{8}{s-4}$

(iv) $\frac{4s^2-4}{s^5}$ (v) $\frac{3s+1}{s^2+25}$ (vi) $\frac{1-e^{-4s}}{s}$

6. निम्नलिखित लाप्लास प्रतिलोम की जाँच करें कि कोई वास्तविक नियतांक ω हैः

(i) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right]\bigg|_t = \frac{t}{2\omega}\sin(\omega t)$$

(ii) $$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]\bigg|_t = \frac{1}{2\omega^3}[\sin(\omega t) - \omega t\sin(\omega t)]$$

7. लाप्लास रूपान्तरण का उपयोग करके निम्नलिखित प्रत्येक प्रारंभिक–मान समस्याओं को हल करें :

(i) $y' + 9y = 0$ $y(0) = 4$ के साथ

(ii) $y'' + 9y = 0$ $y(0) = 4$ के साथ और $y'(0) = 6$

8. तालिकाओं और आंशिक भिन्न का उपयोग करके निम्न में से प्रत्येक के लिए प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7s+5}{(s+2)(s-1)}$ (ii) $\frac{s-1}{s^2-7s+12}$

(iii) $\frac{1}{s^2-4}$ (iv) $\frac{3s^2+6s+27}{s^3+9s}$

(v) $\frac{1}{s^3-4s^2}$ (vi) $\frac{8s^3}{s^4-81}$

(vii) $\frac{5s^2+6s-40}{(s+6)(s^2+16)}$ (viii) $\frac{2s^3+3s^2+2s+27}{(s^2+9)(s^2+1)}$

(ix) $\frac{6s^2+62s+92}{(s+1)(s^2+10s+21)}$

9. लाप्लास रूपान्तरण (और आंशिक भिन्न) का उपयोग करके निम्नलिखित प्रारंभिक–मान समस्याओं में से प्रत्येक को हल करें :

(i) $y'' - 9y = 0, y(0) = 4$ के साथ और $y'(0) = 9$

(ii) $y'' + 9y = 27t^3, y(0) = 0$ के साथ और $y'(0) = 0$

(iii) $y'' + 8y' + 7y = 165e^{4t},\ y(0) = 8$ के साथ और $y'(0) = 1$

10. अनुवाद तत्समक (और तालिकाओं) का उपयोग करके निम्न में से प्रत्येक के लिए प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए :

(i) $\dfrac{1}{(s-7)^5}$ (ii) $\dfrac{1}{s^2-6s+45}$ (iii) $\dfrac{s}{s^2-6s+45}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{s+2}}$ (v) $\dfrac{1}{s^2+8s+16}$ (vi) $\dfrac{s}{s^2-12s+40}$

(vii) $\dfrac{1}{s^2+12s+40}$ (viii) $\dfrac{s^2}{(s-3)^5}$

3.9 सहायक पाठ्य सामग्री

K. P. Gupta and J. K. Goyal. 2013. *Integral Transform*. Meerut (UP): Pragati Prakashan.

Sharma, J. N. and R. K. Gupta. 2015. *Differential Equations* (Paperback Edition). Meerut (UP): Krishna Prakashan Media (P) Ltd.

Raisinghania, M. D. 2013. *Ordinary and Partial Differential Equations*. New Delhi: S. Chand And Company Limited.

Coddington, Earl A. and N. Levinson. 1972. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Coddington, Earl A. 1987. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Boyce, W. E. and Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons.

Sneddon, I. N. 1986. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Education.

Somasundaram, D. 2002. *Ordinary Differential Equations*. Chennai: Narosa Publishing House.

इकाई 4 प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय

गणित में, उस समीकरण को प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण (First Order Partial Differential Equation) कहते हैं जिसमें एक या एक से अधिक फलन तथा उनके अवकलज हों। अवकल समीकरण (Differential Equations) उन संबंधों को कहते हैं जिनमें स्वतंत्र चर तथा अज्ञात परतंत्र चर के साथ–साथ उस परतंत्र चर के एक या अधिक अवकल गुणांक (Differential Coefficients) होते हैं।

यदि एक अवकल समीकरण में एक परतंत्र चर तथा एक ही स्वतंत्र चर भी हो तो संबंध को साधारण अवकल समीकरण (Ordinary Differential Equation) कहते हैं। जब परतंत्र चर एक परंतु स्वतंत्र चर अनेक हों तो परतंत्र चर के आंशिक अवकल (Partial Differentials) होते हैं। जब ये उपस्थित रहते हैं तब संबंध को आंशिक (Partial) अवकल समीकरण कहते हैं। परतंत्र चर को स्वतंत्र चर के पदों में अभिव्यक्त करने को अवकल समीकरण का हल करना कहा जाता है।

गणित में, एक प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण एक आंशिक अवकल समीकरण है, जिसमें n चरों के अज्ञात फलन (Unknown Function) का केवल प्रथम अवकलज शामिल होता है। यदि अवकल समीकरण में nवीं कोटि (Order) का अवकल गुणांक हो और अधिक का नहीं, तो अवकल समीकरण nवीं कोटि का कहलाता है। इस तरह के समीकरण अतिपरवलय (Hyperbolic) आंशिक अवकल समीकरणों के लिए विशिष्ट सतहों के निर्माण में उत्पन्न होते हैं, कुछ ज्यामितीय (Geometrical) समस्याओं में, और गैस गतिकी के सरल प्रतिरूपों में, जिनके समाधान में विशेषताओं की विधियां शामिल होती है। अवकल समीकरणों का समाकलन करके सामान्य समाधान प्राप्त किए जा सकते हैं।

इस इकाई में आप प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण, लैग्रांज विधि, विशिष्ट प्रकार के अवकल समीकरणों का हल, तथा चारपिट की सामान्य विधि के बारे में अध्ययन करेंगे।

4.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरणों को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- लैग्रांज विधि को समझने में सक्षम होंगे और उनकी व्याख्या कर पाएंगे;
- विशिष्ट प्रकार के अवकल समीकरणों का हल करने में सक्षम होंगे और उनकी व्याख्या कर पाएंगे;
- चारपिट की विधि को समझ पाएंगे।

4.2 प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन समीकरण–लैग्रांज विधि

लैग्रांज समीकरण (Lagrange's Equation)

आंशिक अवकलन समीकरण (Partial Differential Equation) $Pp+Qq=R$ जहां, P, Q, R, x, y, z के फलन हैं लैग्रांज का रैखिक अवकलन समीकरण (Langrange's Linear Differential Equation) कहलाता है।

सहायक समीकरण (Auxiliary Equations) से $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ तथा सहायक समीकरण के दो स्वतंत्र हल $u(x,y,z)=C_1$ तथा $v(x,y,z)=C_2$ मानने पर जहां C_1 तथा C_2 नियतांक (Constants) हैं तब दिए गए समीकरण का हल $F(u,v)=0$ या $u=F(v)$ होगा। उदाहरण $(y^2+z^2)p-xyq=-xz$ को हल करें–

सहायक समीकरण होंगे–

$$\frac{dx}{y^2+z^2} = \frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-xz} \tag{4.1}$$

अंतिम दोनों समीकरणों को लेने पर हमें प्राप्त होगा–

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा $\log y=\log z+$ नियतांक

$$\therefore \qquad \frac{y}{z} = C_1$$

समीकरण (4.1) में से प्रत्येक निम्नलिखित समीकरण बराबर होगें।

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(y^2+z^2)-xy^2-xz^2}$$

इस प्रकार $\frac{xdx + ydy + zdz}{0}$

तब $$xdx + ydy + zdz = 0$$

समाकलन करने के पश्चात यह निम्न प्रकार का हो जाएगा,

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

इसलिए इस समीकरण का सामान्य हल निम्नलिखित होगा,

$$F\left(\frac{y}{z}, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$$

उदाहरण 4.1: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)z$

हल : सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) होंगे,

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(x + y)z}$$

इस प्रकार $$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{(x + y)z}$$

इस प्रकार $$\frac{dx - dy}{x - y} = \frac{dz}{z}$$

या $\log (x - y) = \log z +$ नियतांक

$$\therefore \quad \frac{x - y}{z} = C_1$$

या $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$

इस प्रकार $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} +$ नियतांक

$$\therefore \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C_2$$

इस प्रकार $F\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \frac{x - y}{z}\right) = 0$ हल होगा।

उदाहरण 4.2: हल कीजिए– $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$

हल : सहायक समीकरण इस प्रकार होंगा–

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{dx - dy}{x^2 - yz - (y^2 - zx)} = \frac{d(x - y)}{(x - y)(x + y + z)}$$

टिप्पणी

$$= \frac{d(y-z)}{(y-z)(x+y+z)}$$

टिप्पणी

$$\therefore \qquad \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{d(y-z)}{y-z}$$

समाकलन करने पर– $(x-y) = \log(y-z) + \log C_1$

$$\therefore \qquad \frac{x-y}{y-z} = C_1 \qquad (4.2)$$

गुणन (Multipliers) x, y, z का प्रयोग करने पर सहायक समीकरणों में से प्रत्येक का हल निम्न होगा,

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)}$$

यह इस समीकरण $\dfrac{dx + dy + dz}{x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy}$ के भी बराबर हो सकता है

$$\therefore \qquad \frac{xdx + ydy + zdz}{x+y+z} = \frac{dx + dy + dz}{1}$$

$$xdx + ydy + zdz = (x+y+z)d\,(x+y+z)$$

समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 + C_2$$

$$\therefore \qquad xy + yz + zx = C'_2 \qquad (4.3)$$

समीकरणों (4.2) तथा (4.3) से हमें निम्न हल (Solution) प्राप्त होगा–

$F\left(\dfrac{x-y}{y-z}, xy + yz + zx\right) = 0$, यहां F स्वेच्छ (Arbitrary) है।

उदाहरण 4.3: हल करें– $(a-x)p + (b-y)q = c - z$

हल : सहायक समीकरण होंगे–

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{b-y} = \frac{dz}{c-z} \qquad (4.4)$$

समीकरण (4.4) से

$$\frac{dy}{b-y} = \frac{dz}{c-z}$$

अर्थात्

$$\frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}$$

$$\log(y-b) = \log(z-c) + \log C_1$$

$$\therefore \qquad \frac{y-b}{z-c} = C_1$$

तथा इस प्रकार भी होगा कि

$$\frac{dx}{a-x} = \frac{dy}{b-y}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b}$$

टिप्पणी

$$\therefore \quad \log(x-a) = \log(y-b) + \log C_2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{x-a}{y-b}\right) = C_2$$

सामान्य हल होगा $F\left(\frac{y-b}{z-c}, \frac{x-a}{y-b}\right) = 0$

उदाहरण 4.4: हल करें– $(y-z)p + (z-x)q = x - y$

हल : सहायक समीकरण इस प्रकार हैं–

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$\therefore \quad dx + dy + dz = 0$$

समाकलित करने पर हमें प्राप्त होगा– $x + y + z = C_1$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{x(y-z) + y(z-x) + z(x-y)}$$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

$$\therefore \quad xdx + ydy + zdz = 0$$

समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा– $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$

$\therefore$ सामान्य हल होगा $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$

उदाहरण 4.5: हल करें– $(mz - ny)p - (nx - lz)q = ly - mx$

हल : सहायक समीकरण होंगे

$$\frac{dx}{mz-ny} = \frac{dy}{nx-lz} = \frac{dz}{ly-mx}$$

गुणकों x, y, z का प्रयोग कर हमें प्रत्येक अनुपात मिलेगा–

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{x(mz-ny) + y(nx-lz) + z(ly-mx)}$$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_1$$

गुणकों (Multipliers) l, m, n का प्रयोग करके भी हम प्रत्येक अनुपात प्राप्त कर सकते हैं–

$$= \frac{ldx + mdy + ndz}{0}$$

$$\therefore \qquad lx + my + nz = C_2$$

$\therefore$ सामान्य हल होगा– $F\left(x^2 + y^2 + z^2, lx + my + nz\right) = 0$

उदाहरण 4.6: हल करें– $x(y - z)p + y(z - x)q = z(x - y)$

हल : सहायक समीकरण (Auxilary Equation) हैं–

$$\frac{dx}{xy - xz} = \frac{dy}{yz - yx} = \frac{dz}{zx - zy}$$

$$= \frac{dx + dy + dz}{0}$$

$$\therefore \qquad dx + dy + dz = 0$$

समाकलन करने पर प्राप्त होगा– $x + y + z = C_1$ (4.5)

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y - z} = \frac{\frac{dy}{y}}{z - x} = \frac{\frac{dz}{z}}{x - y} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{0}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

समाकलन करने पर $\log x + \log y + \log z = \log C_2$

$$xyz = C_2 \qquad (4.6)$$

समीकरणों (4.5) तथा (4.6) से सामान्य हल (General Solution),

$$F(x + y + z, xyz) = 0$$

उदाहरण 4.7: हल करें– $x^2p + y^2q = z^2$

हल : सहायक समीकरण हैं– $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$

$$\therefore \qquad \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{y^{-1}}{-1} + C_1$$

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C_1$$

इसी प्रकार $\qquad \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z^2}$

$$\therefore \qquad -\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + C_2$$

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{y} = C_2$$

टिप्पणी

सामान्य हल है– $F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right)=0$

उदाहरण 4.8: हल करें– $(y+z)p+(z+x)q = x+y$

हल : सहायक समीकरण हैं– $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$

अर्थात
$$\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{dy-dz}{y-z}=\frac{dz-dx}{z-x}$$

$$= \frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}$$

पहले दो अवयवों पर विचार करने पर तथा उन्हें समाकलित (Integrating) करने पर हमें प्राप्त होगा–

$$\frac{x-y}{y-z} = C_1$$

पहले तथा अंतिम अवयव (Members) पर विचार करने तथा उन्हें समाकलित करने पर हमें प्राप्त होगा–

$$\log(x-y) = \frac{1}{2}\log(x+y+z)+\log C_2$$

$$\log\frac{(x-y)^2}{x+y+z} = \log C_2'$$

$$\frac{(x-y)^2}{x+y+z} = \log C_2'$$

∴ सामान्य हल (General Solution) होगा–

$$F\left(\frac{x-y}{y-z},\frac{(x-y)^2}{x+y+z}\right)=0$$

4.3 विशिष्ट प्रकार के अवकल समीकरणों का हल

तरंग समीकरण (Wave Equation)

तरंग समीकरण को हल करने हेतु मानी गई अवधारणाएं इस प्रकार है।

प्रत्यास्थ डोरी (Elastic String) में लघु अनुप्रस्थ कंपनों (Small Transverse Vibrations) की व्युत्पत्ति करने वाले समीकरण की स्थापना करने हेतु हम डोरी को x–अक्ष के अनुदिश रखा मानते हैं, जो L लंबाई में फैली हुई है तथा जिसके किनारे के सिरों $x = 0$ तथा $x = L$ से बंधे हुए हैं। माना कि किसी समय $t = 0$ पर डोरी को विरूपित

(Distort) करके छोड़ा गया ताकि वह कम्पन करने लगे। अब हमारी समस्या $t > 0$ समय पर डोरी की किसी बिंदु x पर विचलन (Deflection) $u\,(x, t)$ को ज्ञात करना है।

टिप्पणी

आंशिक अवकलन समीकरण से परिणाम के रूप में $u(x, \mathrm{t})$ प्राप्त करने के लिए हमें अवधारणाओं को निम्नानुसार सरल करना होगा–

1. डोरी समरूप (Homogeneous) है। डोरी की प्रत्येक इकाई लंबाई के पदार्थ का द्रव्यमान नियत (Constant) है, डोरी पूर्णतया प्रत्यास्थ (Perfectly Elastic) है ओर इसलिए वंकन (Bending) के प्रति जरा भी प्रतिरोध (Resistance) उत्पन्न नहीं करती है।
2. डोरी का तनाव (Tension) एक समान है।
3. डोरी में कंपन लघु आयाम का हैं ताकि प्रत्येक बिंदु पर ढाल (Slope) एक समान बना रहे।

अवकल समीकरण निर्मित करने के लिए डोरी के छोटे खंड पर कार्य करने वाले बलों पर विचार कीजिए। माना कि अध्ययन के लिए चुने गए भाग के अंतिम बिंदुओं P तथा Q पर तनाव (Tension) T_1 तथा T_2 है। चूंकि हमारी अवधारणा के अनुसार डोरी के बिंदु ऊर्ध्वाधर (Vertical) दिशा में कंपन करते हैं इसलिए तनाव के क्षैतिज घटक (Horizontal Component) अचर है।

इसलिए $\quad T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T =$ अचर $\quad$ (4.7)

ऊर्ध्वाधर दिशा में T_1 और T_2 दो बल $-T_1 \sin\alpha$ तथा $T_2 \sin\beta$ हैं। ऋणात्मक चिह्न यह बताता है कि उस घटक की दिशा नीचे की ओर (Downward) है। यदि अविचलित दशा में डोरी की प्रति इकाई लंबाई की द्रव्यमान ρ तथा उस खंड की लंबाई जो कि अविचलित (Undeflected) है, Δx है तो न्यूटन के द्वितीय नियम से इन दोनों बलों का परिणामी द्रव्यमान $(\rho\Delta x)$ का त्वरण $\partial^2 u/\partial t^2$ गुना होगा–

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (4.8)$$

समीकरण (4.1) का उपयोग करते हुए हम ऊपर लिखी समीकरण को $T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$ से भाग दे सकते हैं ताकि हमें प्राप्त हो सकें–

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (4.9)$$

चूंकि $\tan\alpha$ तथा $\tan\beta$ क्रमशः x तथा $x + \Delta z$ पर ढाल (Slopes) हैं, इसलिए

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_x . \text{ तथा } \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x+\Delta x}$$

समीकरण (4.9) को Δx से विभाजित कर तथा $\tan\alpha$ तथा $\tan\beta$ के मान प्रस्थापित करने पर,

टिप्पणी

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x}\right]=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

जैसे ही Δx शून्य की ओर अग्रसर होता है, समीकरण आंशिक अवकल समीकरण (Partial Differential Equation) बन जाता है–

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2=\frac{T}{\rho} \tag{4.10}$$

यह एक एकविमीय तरंग समीकरण (One-Dimensional Wave Equation) है, जो एक प्रत्यास्थ डोरी में कंपनों की व्युत्पत्ति करता है।

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2}=\mathrm{c}^2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}, \tag{4.11}$$

हल (Solution) प्राप्त करने के लिए हम सीमा प्रतिबंधों (Boundary Conditions) $x=0$ तथा $x=L$ प्रयुक्त करते हैं–

$$u(0,t)=0, \qquad u(L,t)=0,\ t \text{ के सभी मानों के लिए} \tag{4.12}$$

डोरी का प्रारंभिक वेग तथा प्रारंभिक विचलन या विस्थापन गति के स्वरूप का निर्धारण करता है यदि $f(x)$ मूलभूत विचलन (Orginal Deflection) तथा $g(x)$ प्रारंभिक वेग है, तब हमारी प्रारंभिक स्थितियां होंगी–

$$u(x,0)=f(x) \tag{4.13}$$

तथा
$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g(x). \tag{4.14}$$

I. अब हमारी समस्या समीकरण (4.11) का वह हल निकालना है जो समीकरण (4.12) से समीकरण (4.13) में दिये गये प्रतिबंधों को संतुष्ट करें।

चरों के पृथक्करण की विधि (Methods of Separation of Variable) का इस्तेमाल करते हुए तरंग समीकरण (4.11) के इस स्वरूप के हलों की पुष्टि (verify) करते हैं।

$$u(x,t)=F(x)G(t) \tag{4.15}$$

जो कि दो फलनों $f(x)$ तथा $g(t)$ के गुणन (Products) हैं, यहां ध्यान रहे कि इनमें से प्रत्येक फलन एक चर (Variable) पर निर्भर है अर्थात या तो x या t, समीकरण (4.15) को दो बार x तथा t के सापेक्ष अवकलित करके हमें प्राप्त होगा–

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\ddot{G} \text{ तथा } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G$$

इन मानों को तरंग समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा–

$$F\ddot{G}=c^2F''G\cdot$$

टिप्पणी

समीकरण को c^2FG से भाग देने पर हमें प्राप्त होगा–

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k.$$

दोनों ओर के समीकरण अलग–अलग चरों पर निर्भर है इसलिए x के मान का परिवर्तित होना G के मान को परिवर्तित नहीं करेगा और t के मान का परिवर्तन F के मान को परिवर्तित नहीं करेगा और दूसरा पक्ष नियत (Constant) ही बना रहेगा। इस प्रकार–

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k.$$

या $F'' - kF = 0$ (4.16)

तथा $\ddot{G} - c^2kG = 0\cdot$ (4.17)

जबकि नियतांक K स्वैच्छ (Arbitrary) है।

अब हम समीकरणों (4.16) तथा (4.17) के हल ज्ञात करेंगे। इस प्रकार से कि समीकरण $u = FG$ सीमा प्रतिबंधों (Boundary Conditions) (4.12) को पूर्ण करे जो इस प्रकार है–

$u(0,t) = F(0)G(t) = 0,\ u(L,t) = F(L)G(t) = 0$ के सभी मानों के लिए।

जब $G \equiv 0$ तब $u \equiv 0.$

इसलिए $G \neq 0$ तथा (a)$F(0) = 0,$ (b) $F(L) = 0$ (4.18)

$K = 0$ के लिए समीकरण (4.16) का सामान्य हल $F = ax + b$ है तथा समीकरण (4.17) से हमें प्राप्त है $a = b = 0$ और इसलिए $F \equiv 0$ जो प्रदान करेगा $u \equiv 0$ लेकिन K के धनात्मक मानों के लिए अर्थात् $k = \mu^2$ समीकरण का सामान्य हल होगा।

$$F = Ae^{\mu, x} + Be^{-\mu x},$$

तथा समीकरण (4.18) से, हमें पुनः $F \equiv 0$ प्राप्त है इसलिए $K < 0,$ अर्थात् $k = p^2$ को निर्धारित किया तब समीकरण (4.16) इस प्रकार हो जाएगा– $F'' + p^2F = 0$

इस समीकरण का सामान्य हल होगा– $F(x) = A\cos px + B\sin px.$

समीकरण (4.18) के प्रतिबंधों का प्रयोग करने पर, हमें प्राप्त है–

$F(0) = A = 0$ तथा $F(L) = B\sin pL = 0$

$B = 0$ का तात्पर्य $F \equiv 0$ से है इस प्रकार हम $\text{Sin}\, pL = 0$ लेने पर अर्थात्

$pL = n\pi$ इसलिए $p = \dfrac{n\pi}{L}$ जहां n एक पूर्णांक (Integer) है। (4.19)

$B = 1$ के लिए हमें अनंततः अनेक हल $F(x) = F_n(x)$ प्राप्त है जहां,

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (\mathrm{n} = 1, 2, \cdots). \tag{4.20}$$

टिप्पणी

ये हल समीकरण (4.18) को संतुष्ट करते हैं। अब नियतांक k का मान $k-p^2=-(n\pi/L)^2$ से सीमित है, समीकरण (4.19) के परिणामस्वरूप समीकरण (4.17) हो जायेगा–

$$\ddot{G}+\lambda_n^2 G=0 \text{ जहां } \lambda_n=\frac{cn\pi}{L} \tag{4.21}$$

एक सामान्य हल है–

$$G_n(t)=B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t.$$

अतः समीकरण (4.11) के हल समीकरण (4.12) को संतुष्ट करते हैं $u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)$ है जो इस प्रकार लिखे जा सकते हैं–

$$u_n(x,t)=(B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x\ (n=1,2,\cdots). \tag{4.22}$$

इस प्रकार के फलन आइगेन फलन (Eigen Function) कहलाता हैं तथा मान $\lambda_n = cn\pi/L$ कंपनित डोरी (Vibrating String) के आइगेन मान (Eigen Values) कहलाते हैं। λ_n का यह समुच्चय (Set) स्पेक्ट्रम (Spectrum) कहलाता है।

प्रत्येक u_n, $\lambda_n/2\pi=cn/2L$ चक्र प्रति सेकेंड की आवृत्ति के साथ एक आवर्ती गति (Harmonic Motion) को व्यक्त करता है। यह गति डोरी की nवीं सामान्य बहुलक (Normal Mode) कहलाती है। पहले सामान्य बहुलक को **मौलिक बहुलक (n = 1) (Fundamental Mode)** कहा जाता है जबकि अन्य को **"ओवरटोन" (Overtone)** कहा जाता है। एक एकल हल (Single Solution) $u_n(x, t)$ प्रारंभिक प्रतिबंध (Initial Conditions) समीकरण (4.11) का एक हल होगा चूंकि समीकरण रैखिक (Linear) तथा समरूप (Homogeneous) है। एक ऐसा हल ज्ञात करने के लिए जो समीकरणों (4.13) तथा (4.14) को संतुष्ट करे, निम्न अनंत श्रेणी (Infinite Series) पर विचार करे–

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x,$$

$$\text{जहां } \lambda_n=cn\pi/L \tag{4.23}$$

$$\text{इसलिए } u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x). \tag{4.24}$$

गुणांकों B_n को इस प्रकार निर्धारित करें कि $u(x, o), f(x)$ की फूरियर ज्या श्रेणी (Fourier Sine Series) हो जाये तब समीकरण (4.23) से,

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,\ n=1,2,\cdots. \tag{4.25}$$

इसी प्रकार t के सापेक्ष समीकरण (4.23) को अवकलित करने पर तथा समीकरण (4.16) का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होगा–

टिप्पणी

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n \sin\lambda_n t + B_n{}^*\lambda_n \cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n{}^*\lambda_n \sin\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

$B_n{}^*$'s इस प्रकार निर्धारित जाना चाहिए कि $t=0$ के लिए आंशिक अवकलन $\partial u/\partial t$ फलन $g(x)$ की फूरियर ज्या श्रेणी हो जाये तब समीकरण (4.16) से

$$B_n{}^*\lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dr$$

यहां, चूंकि $\lambda_n = cn\pi/L$,

$$B_n{}^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{4.26}$$

अब हम उस स्थिति पर विचार करते हैं जब प्रारंभिक वेग $g(x)$ शून्य हो तब B* शून्य होंगे और समीकरण (4.23) इस प्रकार हो जाएगा

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \tag{4.27}$$

हम जानते हैं कि–

$$\cos\frac{cn\pi}{L}t\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

तब समीकरण (4.27) इस प्रकार हो जायेगी–

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}$$

ये दोनों श्रेणियां समीकरण (4.24) द्वारा $f(x)$ के लिए दी जाने वाली फूरियर ज्या श्रेणी में चर x के लिए क्रमशः $x - ct$ तथा $x + ct$ प्रतिस्थापित करने पर उत्पन्न (Generate) होती है। इस प्रकार–

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right] \tag{4.28}$$

जहां f^*, f का आवर्तकाल $2L$ के साथ विषम आवर्ती विस्तार (Odd Periodic Extension) है, समीकरण (4.28) को अवकलित करने पर हम देखते हैं कि $u(x, t)$ समीकरण (4.11) का एक हल है। दिया गया है कि $f(x)$ अंतराल $0 < f(x) < L$ में दो बार अवकलनीय प्रक्रिया से युक्त किया गया है और $x = 0$ तथा $x = L$ पर एक तरफा (One Sided) या एक दिशात्मक द्वितीय अवकलन से युक्त है जो कि शून्य है। $u(x, t)$ को समीकरण (4.12) से (4.14) को संतुष्ट करने वाले एक हल के रूप में प्राप्त किया गया है।

यदि $f'(x)$ तथा $f''(x)$ खंडशः सतत (Piecewise Continuous) है या यदि एक पक्षीय (One Sided) अवकलन शून्य न हो तब प्रत्येक t के लिए x के परिमित रूप से ऐसे कई मान होंगे जिन पर u का द्वितीय अवकलन जो कि समीकरण (4.11) में उपस्थित हो अस्तित्व नहीं रखता हो उन बिंदुओं को छोड़कर तरंग समीकरण संतुष्ट होगा तब हम $u(x, t)$ को सामान्यीकृत हल (Generalized Solution) कह सकते हैं।

उदाहरण 4.9: नीचे दिए गये त्रिकोणीय प्रारंभिक विचलन (Triangular Initial Deflection) के संगत तरंग समीकरण (4.11) का हल निर्धारित कीजिए–

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & if \quad 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & if \quad \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

हल : चूंकि $g(x) \equiv 0$ अतः समीकरण (4.23) में $B_n^* = 0$ होगा। समीकरण (4.17) द्वारा दिया जाने वाला B^n और तब समीकरण (4.23) निम्नलिखित स्वरूप ग्रहण कर लेगा–

$$u(x,t) = \frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t + \cdots\right].$$

4.4 चारपिट की विधि

चारपिट की विधि (Charpit's General Method) का प्रयोग प्रथम कोटि के सर्वाधिक सामान्य आंशिक अवकलन समीकरणों के हल ज्ञात करने में होता है जो इस प्रकार व्यक्त किए जाते हैं–

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{4.29}$$

इस विधि का मूल विचार प्रथम कोटि की एक द्वितीय आंशिक अवकलन समीकरण का समावेशन करा देना है–

$$f(x, y, z, p, q, a) = 0 \tag{4.30}$$

यह एक स्वैच्छ नियतांक 'a' से निहित है तथा निम्नलिखित प्रतिबंधों (Condition) को संतुष्ट करता है–

1. समीकरणों (4.29) तथा (4.30) को हल करके निम्न प्राप्त किया जा सकता है।

   $p = p(x, y, z, a)$ तथा $q = q(x, y, z, a)$

2. समीकरण समाकलनीय (Integrable) है।

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy \tag{4.31}$$

जब एक फलन 'f' प्रतिबंध 1 तथा 2 को संतुष्ट करता है, तब यह देखा जाता है कि दो स्वैच्छ नियतांक ('a' सहित) प्रयुक्त समीकरण (4.31) का हल समीकरण (4. 29) का एक हल होगा। प्रतिबंध 1 तभी मान्य होगा जबकि–

टिप्पणी

$$J = \frac{\partial(F, f)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{vmatrix} \neq 0$$

(4.32)

प्रतिबंध 2 मान्य होगा जबकि–

$$p\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + q\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad p\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial x} = q\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4.33)$$

x, y तथा z के फलन के रूप में p तथा q के मान समीकरणों (4.29) तथा (4.30) में प्रतिस्थापित करने तथा x के सापेक्ष अवकलित करने पर–

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

तथा $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$

इसलिए $\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}$

या $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$

इसी प्रकार $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{J}\left\{-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{J}\left\{-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

तथा $\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ (4.34)

समीकरण (4.28) से मानों का समीकरण (4.27) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{1}{J}\left[p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{J}\left[q\left(-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\left(-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

या $\left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial f}{\partial z}$

$$+\left(p\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(q\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial q}=0 \quad (4.35)$$

समीकरण (4.35) में चरों x, v, z, p, q तथा f रैखिक (Linear) समावेशन है तथा निम्न सहायक समीकरण (Subsidiary Equation) रखती है–

$$\frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dp}{\frac{\partial F}{dx}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (4.36)$$

यदि समीकरण (4.36) के किसी भी समाकलन (Integrals) में p या q सम्मिलित हैं तो यह समीकरण (4.30) का ही रूप होगा तब हमें समीकरणों (4.29) तथा (4.30) को p तथा q के लिए हल करना होगा तथा समीकरण (4.31) को समाकलित करना होगा।

उदाहरण 4.10: समीकरण $p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0$ का पूर्ण समाकल– ज्ञात कीजिए (4.37)

हल : सहायक समीकरण होगा–

$$\frac{dp}{2(y-p)}=\frac{dq}{2(x-q)}=\frac{dx}{-2(p-x)}=\frac{dy}{-2(q-y)} \quad (4.38)$$

$$\therefore\ \frac{dp+dq}{2y+2x-2p-2q}=\frac{dx+dy}{2x+2y-2p-2q}$$

$$\therefore\quad dp+dq=dx+dy$$

समाकल करने पर हमें प्राप्त होगा–

$$p+q=x+y+a$$

जहां a एक नियतांक है।

$$\therefore\quad (p-x)+(q-y)=a \quad (4.39)$$

समीकरण (4.39) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है–

$$(p-x)^2+(q-y)^2=(x-y)^2$$

अब $\{(p-x)-(q-y)\}^2+\{(p-x)+(q-y)\}^2$

$$=2\left\{(p-x)^2+(q-y)^2\right\}$$

$$\therefore \quad (p-x)-(q-y)=\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$
(4.40)

समीकरणों (4.39) तथा (4.40) को जोड़ने पर–

$$(p-x)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$

या $$p=\frac{a}{2}+x+\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$

इसी प्रकार समीकरण (4.40) को समीकरण (4.39) में से घटाने पर–

$$q=y+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}$$

$$\therefore \quad dz=pdx+qdy$$

या

$$dz=\left\{\frac{a}{2}+x+\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}\right\}dx+\left\{y+\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}\right\}dy$$

$$=\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2\right)+\frac{a}{2}d(x+y)+\frac{1}{2}\sqrt{2(x-y)^2-a^2}\,d(x-y)$$

समाकलन करने पर,

$$z+b=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{a}{2}(x+y)+\frac{1}{2}\int\left(2U^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}dU$$

जहां $U=x-y$ तथा b एक स्वैच्छ नियतांक हैं।

$$z+b=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{a}{2}\left(x+y+\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{U\sqrt{U^2-\frac{a^2}{2}}}{2}-\frac{a^2}{4}\log\left(U+\sqrt{U^2-\frac{a^2}{2}}\right)\right\}\right)$$

$$=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{a}{2}(x+y)+\frac{(x-y)\sqrt{2(x-y)^2-a^2}}{4}$$

$$-\frac{a^2}{4\sqrt{2}}\log\left((x-y)+\sqrt{(x-y)^2-\frac{a^2}{2}}\right)$$

उदाहरण 4.11: नीचे दी गयी समीकरण का संपूर्ण समाकलन (Complete Integral) ज्ञात कीजिए–

$$p^2+q^2-2px-2qy+1=0 \qquad (4.41)$$

हल : सहायक समीकरण इस प्रकार होंगे–

$$\frac{dx}{-(2-2xp)}=\frac{dy}{-(2q-2y)}=\frac{dp}{-2p}=\frac{dq}{-2q} \quad (4.42)$$

टिप्पणी

साथ ही, $\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$

समाकलन करने पर हमें मिलता है–

$$p=aq \quad (4.43)$$

यहां 'a' एक स्वैच्छ नियतांक है।

p का मान समीकरण (4.46) से समीकरण (4.41) में रखने पर

$$q^2(1+a^2)-2q(ax+y)+1=0$$

$$\therefore \quad q=(ax+y)+\sqrt{(ax+y)^2-(1+a^2)}$$

$$\therefore \quad dz=pdx+qdy$$

इससे प्राप्त होगा– $dz=q(adx+dy)$

$$=d(ax+y)\left\{(ax+y)+\sqrt{(ax+y)^2-(1+a^2)}\right\}$$

समाकलन करने पर

$$z+b=\frac{1}{2}(ax+y)^2+\frac{(ax+y)\sqrt{(ax+y)^2-(1+a^2)}}{2}$$

$$-\frac{(a^2+1)}{2}\log\left\{(ax+y)+\sqrt{(ax+y)^2-(1+a^2)}\right\}$$

यहां b एक स्वैच्छ या विवेकाधीन नियतांक है।

उदाहरण 4.12: नीचे दी गयी समीकरण का संपूर्ण समाकल ज्ञात करें–

$$2(pq+py+qx)+x^2+y^2=0 \quad (4.44)$$

हल : समीकरण (4.44) के सहायक समीकरण होंगे–

$$\frac{dx}{-(2q+2y)}=\frac{dy}{-(2p+2x)}=\frac{dp}{(2q+2x)}=\frac{dq}{(2p+2y)} \quad (4.45)$$

$\therefore dp+dq+dx+dy=0$

समाकलन करने पर–

$$p+q+x+y=\text{नियतांक}=a \text{ (माना)}$$

या $\quad (p+x)+(q+y)=a \quad (4.46)$

टिप्पणी

समीकरण (4.44) को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$$2(p+x)(q+y)(x-y)^2 = 0$$

या $\quad (p+x)(q+y) = -\frac{1}{2}(x-y)^2$

$$\therefore \quad (p+x)-(q+y) = \sqrt{\{(p+x)+(q+y)\}^2 - 4(p+x)(q+y)}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2(x-y)^2} \qquad (4.47)$$

समीकरणों (4.46) तथा (4.47) को जोड़ने पर–

$$2(p+x) = a + \sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}$$

या $\quad p = -x + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}$

समीकरण (4.46) में से समीकरण (4.47) को घटाने पर–

$$q = -y + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}$$

$$\therefore \quad dz = pdx + qdy$$

इससे प्राप्त होगा–

$$dz = -(xdx + ydy) + \frac{a}{2}(dx+dy) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}\, d(x-y)$$

$$= -\frac{1}{2}d(x^3 + y^3) + \frac{a}{2}d(x+y) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}\, d(x-y)$$

ऊपर लिखे समीकरण का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगा–

$$2z + b = -(x^2+y^2) + a(x+y) + \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{a^2}{2}(x-y)^2}\, d(x-y)$$

$$= -(x^2+y^2) + a(x+y) + \frac{\sqrt{2}(x-y)\sqrt{\frac{a^2}{2} + (x-y)^2}}{2}$$

$$+ \sqrt{2}\frac{a^2}{4}\log\left\{(x-y) + \sqrt{\frac{a^2}{2} + (x-y)^2}\right\}$$

$$= -(x^2+y^2) + a(x+y) + \frac{(x-y)\sqrt{a^2 + 2(x-y)^2}}{2}$$

$$+\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\log\left\{(x-y)+\sqrt{\frac{a^2}{2}+(x-y)^2}\right\}.$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.13: नीचे दिए गए समीकरण का संपूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए–

$$p^2+q^2-2pq\tan h2y=\sec h^2 2y$$

हल : सहायक समीकरण इस प्रकार होंगे–

$$\frac{dx}{-(2p-2q\tanh 2y)}=\frac{dy}{(-2q-2p\tanh 2y)}=\frac{dp}{0}$$

$$=\frac{dq}{-4pq\sec h^2 2y+4\sec h^2 2y\tanh 2y}$$

$\therefore \quad dp=0$

या $\quad p=$ नियतांक $=a$ (माना)

तब $\quad q^2-2a\tanh 2y.q+a^2-\sec h^2 2y=0$

$\therefore \quad q=a\tanh 2y+\sqrt{a^2\tanh^2 2y-a^2+\sec h^2 2y}$

$\quad =a\tanh 2y+\sqrt{1-a^2}\sec h2y$

$\therefore \quad dz=pdz+qdy$

जो प्रदान करेगा– $dz=adx+\left(a\tanh 2y+\sqrt{1-a^2}\sec h2y\right)dy$

$$=d\left(ax+\frac{a}{2}\log\cosh 2y\right)+\sqrt{1-a^2}\sec h2ydy$$

समाकल करने पर–

$$z+b=ax+\frac{a}{2}\log\cosh 2y+\sqrt{1-a^2}\int\frac{2dy}{e^{2v}+e^{-2v}}$$

$$=ax+\frac{a}{2}\log\cosh 2y+\sqrt{1-a^2}\int\frac{2e^{2v}dy}{1+e^{4v}}$$

$$=ax+\frac{a}{2}\log\cosh 2y+\sqrt{1-a^2}\left(\tan^{-1}e^{2v}\right).$$

उदाहरण 4.14: नीचे दिए समीकरण का संपूर्ण समाकलन ज्ञात करें–

$$xy+3yq=2\left(z-x^2q^2\right) \tag{4.48}$$

हल : सहायक समीकरण इस प्रकार होंगे–

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{-3y-4x^3q}=\frac{dp}{p-2p+4xq^2}=\frac{dq}{3q-2q}$$

टिप्पणी

$$\therefore \quad \frac{dq}{q} = \frac{dx}{-x}$$

$\Rightarrow \quad qx =$ नियतांक $= a$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{a}{x}$$

समीकरण (4.48) में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलेगा–

$$p = \frac{2(z - a^3)}{x} - \frac{3ya}{x^2}$$

$\therefore \quad dz = pdx + qdy$

यह प्रदान करेगा $dz = \left\{\frac{2(z - a^2)}{x} - \frac{3ya}{x^2}\right\}dx + \frac{a}{x}dy$

x^2 से गुणा करने पर–

$$x^3 dz = 2x(z - a^2)dx - 3yadx + axdy$$

अर्थात्, $\quad x^4 d\left(\frac{z - a^2}{x^2}\right) = -3aydx + axdy$

अर्थात्, $\quad d\left(\frac{z - a^2}{x^2}\right) = \frac{a}{x^3}dy - \frac{3ay}{x^4}dx = d\left(\frac{ay}{x^2}\right)$

समाकल करने पर हमें मिलेगा $\frac{z - a^2}{x^2} = \frac{ay}{x^3} + b$

या $z = a\left(a + \frac{y}{x}\right) + bx^2$ यहां, a तथा b स्वैच्छ नियतांक है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. लैग्रांज रैखिक अवकलन समीकरण को परिभाषित कीजिए।
2. तरंग समीकरण को हल करने हेतु प्रयुक्त अवधारणाएं क्या है?
3. डोरी की nवीं सामान्य बहुलक क्या होती है?
4. चारपिट विधि का उपयोग कहां किया जाता है?

4.5 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. आंशिक अवकलन समीकरण $Pp + Qq = R$ जहां, P, Q, R, x, y, z के फलन हैं जो लैग्रांज के रैखिक अवकलन समीकरण कहलाते है।

टिप्पणी

2. तरंग समीकरण को हल करने हेतु मानी गई अवधारणाएं इस प्रकार है।

प्रत्यास्थ डोरी में लघु अनुप्रस्थ कंपनों की व्युत्पत्ति करने वाले समीकरण की स्थापना करने हेतु हम डोरी को x–अक्ष के अनुदिश रखा मानते हैं जो L लंबाई में फैली हुई है तथा जिसके किनारे के सिरों $x = 0$ तथा $x = L$ से बंधे हुए हैं। माना कि किसी समय $t = 0$ पर डोरी को विरूपित (Distort) करके छोड़ा गया ताकि वह कम्पन करने लगे। अब हमारी समस्या $t > 0$ समय पर डोरी की किसी बिंदु x पर विचलन $u(x, t)$ को ज्ञात करना है।

आंशिक अवकलन समीकरण से परिणाम के रूप में $u(x, \mathrm{t})$ प्राप्त करने के लिए हमें अवधारणाओं को निम्नानुसार सरल करना होगा–

- o डोरी समरूप है। डोरी की प्रत्येक इकाई लंबाई के पदार्थ का द्रव्यमान नियत है, डोरी पूर्णतया प्रत्यास्थ है ओर इसलिए वंकन के प्रति जरा भी प्रतिरोध उत्पन्न नहीं करती है।
- o डोरी की का तनाव एक समान है।
- o डोरी में कंपन लघु आयाम का है ताकि प्रत्येक बिंदु पर ढाल एक समान बना रहे।

3. प्रत्येक u_n, $\lambda_n / 2\pi = cn/2L$ चक्र प्रति सेकेंड की आवृत्ति के साथ एक आवर्ती गति को व्यक्त करता है। यह गति डोरी की nवीं सामान्य बहुलक कहलाता है। पहले सामान्य बहुलक को मौलिक बहुलक $(n = 1)$ कहा जाता है जबकि अन्य को "ओवरटोन" कहा जाता है।

4. चारपिट की विधि का प्रयोग प्रथम कोटि के सर्वाधिक सामान्य आंशिक अवकलन समीकरणों के हल ज्ञात करने में होता है जो इस प्रकार व्यक्त किए जाते हैं–

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

इस विधि का मूल विचार प्रथम कोटि की एक द्वितीय आंशिक अवकलन समीकरण का समावेशन करा देना है–

$$f(x, y, z, p, q, a) = 0$$

यह एक विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक 'a' से निहित है।

4.6 सारांश

- आंशिक अवकलन समीकरण $Pp + Qq = R$ जहां, P, Q, R, x, y, z के फलन हैं लैग्रांज की रैखिक अवकलन समीकरण कहलाता है।
- प्रत्यास्थ डोरी में लघु अनुप्रस्थ कंपनों की व्युत्पत्ति करने वाले समीकरण की स्थापना करने हेतु हम डोरी को x–अक्ष के अनुदिश रखा मानते हैं, जो L लंबाई में फैली हुई है तथा जिसके किनारे सिरों $x = 0$ तथा $x = L$ से बंधे हुए हैं। माना कि किसी समय $t = 0$ पर डोरी को विरूपित करके छोड़ा गया ताकि वह कम्पन करने लगे। अब हमारी समस्या $t > 0$ समय पर डोरी की किसी बिंदु x पर विचलन $u(x, t)$ को ज्ञात करना है।

टिप्पणी

- डोरी समरूप है। डोरी की प्रत्येक इकाई लंबाई के पदार्थ का द्रव्यमान नियत है, डोरी पूर्णतया प्रत्यास्थ है ओर इसलिए वंकन के प्रति जरा भी प्रतिरोध उत्पन्न नहीं करती है।
- डोरी का तनाव एक समान है।
- डोरी में कंपन लघु आयाम के हैं ताकि प्रत्येक बिंदु पर ढाल एक समान बना रहे।
- चारपिट की सामान्य विधि का प्रयोग प्रथम कोटि के सर्वाधिक सामान्य आंशिक अवकलन समीकरणों के हल ज्ञात करने में होता है जो इस प्रकार व्यक्त किए जाते हैं–

  $F(x, y, z, p, q) = 0$

4.7 मुख्य शब्दावली

- **लैग्रांज समीकरण** : आंशिक अवकलन समीकरण $Pp + Qq = R$ जहां, P, Q, R, x, y, z के फलन हैं लैग्रांज के रैखिक अवकलन समीकरण कहलाते है।
- **आंशिक अवकल समीकरण** : जब किसी भी समीकरण में एक या एक से अधिक आंशिक अवकलज होते हैं, जिसे आंशिक अवकल समीकरण कहा जाता है।
- **चारपिट की विधि** : चारपिट की विधि का उपयोग कोटि एक के सबसे सामान्य आंशिक अवकल समीकरण के समाधान को ज्ञात करने के लिए किया जाता है, जो कि निम्न समीकरण द्वारा दिया गया है,

  $F(x, y, z, p, q) = 0.$

4.8 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. उपयुक्त उदाहरणों के साथ लैग्रांज की रैखिक अवकलन समीकरण को परिभाषित करें।
2. तरंग समीकरण को हल करने हेतु मानी गई अवधारणाएं क्या है?
3. चरों के पृथक्करण की विधि का उपयोग क्यों किया जाता है?
4. आइगेन फलन तथा आइगेन मान को परिभाषित करें।
5. आवर्ती गति तथा स्पेक्ट्रम की उदाहरण के साथ व्याख्या करें।
6. एकल हल तथा प्रारंभिक प्रतिबंध समीकरण का हल रैखिक तथा समरूप कब होगा?
7. चारपिट की विधि की उदाहरण के साथ व्याख्या करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. प्रथम कोटि में लैग्रांज के रैखिक अवकलन समीकरणों के विषय में उदाहरण के साथ व्याख्या करें।
2. उपयुक्त उदाहरणों के साथ तरंग समीकरण का वर्णन करें।
3. सामान्य आंशिक अवकलन समीकरण के हल को ज्ञात करने के लिए चारपिट की सामान्य विधि की व्याख्या करें।
4. निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल करें :

   (i) $(3z-4y)p+(4x-2z)q=2y-3x$

   (ii) $x(z^2-y^2)p+y(x^2-z^2)q=z(y^2-x^2)$
5. कंपन डोरी के मूलभूत प्रणाली या बहुलक की आवृत्ति (i) डोरी की लंबाई (ii) पिंड पर प्रति इकाई लंबाई तथा (iii) डोरी तनाव पर कैसे निर्भर करती है? अगर हम डोरी के तनाव को दोगुना कर दें तो उस की आवृत्ति कितनी होगी?
6. ज्ञात करें $u(x, t)$ एक डोरी की लंबाई $L = \pi$ का जब $c^2 = 1$ है। प्रारंभिक वेग शून्य है और प्रारंभिक विचलन निम्न है :

   (i) $0.01 \sin 3x$.

   (ii) $k\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$.

   (iii) $0.1x(\pi-x)$.

   (iv) $0.1x(\pi^2-x^2)$.
7. विचलन $u(x,t)$ ज्ञात करें लंबाई $L = \pi$ की डोरी का और $c^2 = 1$ शून्य प्रारंभिक विस्थापन के लिए और जब त्रिकोणीय प्रारंभिक वेग $u_t(x,0)=(0.01x)$ है और यदि $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\pi$, $u_t(x,0)=0.01(\pi-x)$ यदि $\dfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \pi$ । (प्रारंभिक या आरंभिक स्थितियों के साथ $u_t(x,0)\neq 0$ को प्रयोगात्मक रूप से ज्ञात करना कठिन है)।
8. चरों को अलग करके निम्नलिखित समीकरणों के हल $u(x, y)$ ज्ञात कीजिए।

   (i) $u_x+u_y=0$.

   (ii) $u_x-u_y=0$.

   (iii) $y^2u_x-x^2u_y=0$.

   (iv) $u_x+u_y=(x+y)u$.

   (v) $u_{xx}+u_{yy}=0$.

टिप्पणी

(vi) $u_{xy} - u = 0$.

(vii) $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

(viii) $xu_{xy} + 2yu = 0$.

9. सिद्ध करें कि $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ ($L =$ डोरी की लंबाई) का प्रतिस्थापन यदि तरंग समीकरण में होता है तो मुक्त कंपन को नियंत्रित करने वाला समीकरण संभव है :

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G = 0,\ \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

10. एक बाह्य बल $P(x, t)$ के तहत डोरी की बलपूर्वक या अनिवार्य कंपन प्रति इकाई लंबाई डोरी के लिए निम्न सामान्य समीकरण द्वारा नियंत्रित किया जाता है:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{P}{\rho}.$$

11. निम्नलिखित समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात करें :

(i) $p^2 + px + q = z$.

(ii) $p^2 x + q^2 y = z$.

(iii) $px + qy = z\sqrt{1 + pq}$.

(iv) $p(1 + q^2) = q(z - a)$.

(v) $pq + x(2y + 1)p + (y^2 + y)q - (2y + 1)z = 0$.

(vi) $(pq)(px + qy) = 1$.

(vii) $pxy + pq + qy = yz$.

(viii) $(p^2 + q^2)x = pz$.

(ix) $2(y + zq) = q(xp + yq)$.

4.9 सहायक पाठ्य सामग्री

K. P. Gupta and J. K. Goyal. 2013. *Integral Transform*. Meerut (UP): Pragati Prakashan.

Sharma, J. N. and R. K. Gupta. 2015. *Differential Equations* (Paperback Edition). Meerut (UP): Krishna Prakashan Media (P) Ltd.

Raisinghania, M. D. 2013. *Ordinary and Partial Differential Equations*. New Delhi: S. Chand And Company Limited.

Coddington, Earl A. and N. Levinson. 1972. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Coddington, Earl A. 1987. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Boyce, W. E. and Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons.

Sneddon, I. N. 1986. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Education.

Somasundaram, D. 2002. *Ordinary Differential Equations*. Chennai: Narosa Publishing House.

टिप्पणी

इकाई 5 द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरण

संरचना

5.0 परिचय

गणित में, एक आंशिक अवकल समीकरण (पीडीई या Partial Differential Equation या PDE) एक बहुचर फलन समीकरण (Multivariable Function Equation) है, जिसमें अज्ञात बहुचर फलन (Unknown Multivariable Function) और उनके आंशिक अवकलज होते हैं। पीडीई का उपयोग कई चर के फलनों से संबंधित समस्याओं को सुविन्यस्त करने के लिए किया जाता है। एक विशेष प्रकरण में सामान्य अवकल समीकरण (ओडीई या Ordinary Differential Equation या ODE) है, जो एकल चर और उनके अवकलज (Derivative) से सम्बन्धित है। पीडीई का उपयोग ध्वनि, ऊष्मा, विसरण, विद्युत स्थैतिक (Electrostatic) विद्युत गतिकी (Electrodynamics), द्रव गतिकी (Fluid Dynamics), प्रत्यास्थता (Elasticity), गुरुत्वाकर्षण (Gravitation) और क्वांटम यांत्रिकी (Quantum Mechanics) जैसी कई प्रकार की घटनाओं का वर्णन करने के लिए किया जा सकता है। जिससे यह प्रतीत होता है कि अलग–अलग भौतिक घटनाएं पीडीई के संदर्भ में औपचारिक रूप से समान हो सकती हैं। जैसे साधारण अवकल समीकरण अक्सर एक–आयामी गतिशील प्रणाली (One-Dimensional Dynamical System) को प्रतिरूपित करते हैं, वैसे ही आंशिक अवकल समीकरण अक्सर बहुआयामी प्रणाली (Multidimensional System) को प्रतिरूपित करते हैं। पीडीई स्टोकेस्टिक (Stochastic) आंशिक अवकल समीकरणों में उनके सामान्यीकरण का पता लगाते हैं।

आंशिक अवकल समीकरण वे समीकरण होते हैं, जिनमें सांतत्य चर के संबंध में परिवर्तन की दरें शामिल होती हैं। दृढ़ पिण्ड (Rigid Body) की स्थिति छह मापदंडों द्वारा निर्दिष्ट की जाती है, लेकिन एक तरल पदार्थ का विन्यास कई मापदंडों के निरंतर वितरण द्वारा दिया जाता है, जैसे कि तापमान, दाब, आदि। दृढ़ पिण्ड के लिए गतिशीलता एक परिमित–आयामी विन्यास समष्टि (Finite-Dimensional Configuration

Space) में होती है तरल पदार्थ के लिए गतिशीलता एक अनंत–आयामी विन्यास स्थान (Infinite-Dimensional Configuration Space) में होती है। यह अंतर आमतौर पर पीडीई को सामान्य अवकल समीकरणों की तुलना में हल करने के लिए बहुत कठिन बनाता है, लेकिन यह रैखिक समस्याओं के लिए सरल समाधान होंगे। चिरसम्मत क्षेत्र (Classical Domains) जहां पीडीई का उपयोग किया जाता है उनमें ध्वनि विज्ञान, द्रव गतिकी, विद्युत गतिकी, और ऊष्मा रूपान्तरण (Heat Transfer) सम्मिलित हैं।

इस इकाई में आप द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरण, द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण, अचर गुणांकों वाले समरूप तथा गैर–समरूप समीकरण तथा अचर गुणांकों वाले समीकरणों में परिवर्तनीय आंशिक अवकल समीकरण के बारे में अध्ययन करेंगे।

5.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरणों को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के वर्गीकरण को निर्धारित कर पाएंगे;
- अचर गुणांकों वाले समरूप तथा गैर–समरूप समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे और उनकी व्याख्या कर पाएंगे;
- अचर गुणांकों वाले समीकरणों में परिवर्तनीय आंशिक अवकल समीकरण को समझ पाएंगे।

5.2 द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरण

nवीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equation) का सामान्य रूप इस प्रकार होता है:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

जहां $P_1, P_2 \ldots, P_n$ तथा Q एकमात्र x के फलन तथा नियतांक हैं।

अचर गुणांकों के साथ रैखिक अवकल समीकरण इस स्वरूप के होते हैं:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q \qquad (5.1)$$

जहां $P_1, P_2, \ldots, P_n$ नियतांक या अचर (Constant) है तथा Q, x का फलन है।

समीकरण $$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_y y = 0 \qquad (5.2)$$

टिप्पणी

इसे समीकरण (5.1) की समानीत समीकरण (Reduced Equation या (R.E.) कहते हैं।

यदि $y = y_1(x), y = y_2(x), ..., y = y_n(x)$ इस समानीत समीकरण के n हल हैं तो $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ भी समानीत समीकरण का एक हल होगा जहां $c_1, c_2, ..., c_n$ विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक (Arbitrary Constant) है।

हल $y = y_1(x), y = y_2(x), y = y_3(x), ..., y = y_n(x)$ रैखिक रूप से स्वतंत्र कहे जायेंगे यदि रोनस्कियन फलनों (Wronskian of the Functions) शून्य न हो, जहां y_1, y_2,..., y_n रोनस्कियन (Wronskian) फलनों को $W(y_1, y_2, ...y_n)$ से दर्शाया जाता है, गणित में, रोनस्कियन (Wronskian) का निर्धारण जोजेफ होइन रोन्स्की (Józef Hoene-Wronski) (1812) और थॉमस मुइरो (Thomas Muir) के द्वारा किया गया इसका प्रयोग अवकल समीकरण के अध्ययन लिए किया जाता है।

$$W(y_1, y_2, ...y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 ... y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' ... y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' ... y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} ... y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

चूंकि nवीं कोटि के अवकल समीकरण का सामान्य हल n विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक है, तथा $u = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ उसका पूर्ण हल है।

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1}\frac{dv}{dx} + P_n v = Q \quad (5.3)$$

चूंकि u समीकरण (5.2) का एक हल है, हमें प्राप्त होगा

$$\frac{d^n u}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1}\frac{du}{dx} + P_n u = 0 \quad (5.4)$$

अब समीकरण (5.3) तथा समीकरण (5.4) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होगा

$$\frac{d^n(u+v)}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}(u+v)}{dx^n} + P_2\frac{d^{n-2}(u+v)}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1}\frac{d(u+v)}{dx} + P_n(u+v) = Q$$

यहां दर्शाता है कि $y = u + v$ समीकरण (5.1) का सम्पूर्ण हल है।

$\frac{d}{dx}$ के लिए संचालक D, $\frac{d^2}{dx^2}$ के लिए D^2, $\frac{d^3}{dx^3}$ के लिए D^3 की प्रविष्टी (Introduce) कराने पर समीकरण (5.1) को इस स्वरूप में लिखा जा सकता है।

$$D^n y + P_1D^{n-1}y + P_2D^{n-2}y + ... + P_{n-1}Dy + yP_n = Q$$

या $$(D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + ... + P_{n-1}D + P_n)y = Q$$

या $F(D)y = Q$ जहां $F(D) = D^n + P_1D^{n-1}\ P_2D^{n-2} + ... + P_{n-1}D + P_n$

ऊपर की गयी चर्चा से यह स्पष्ट है कि $F(D)y = Q$ का सामान्य हल दो भागों से निर्मित है जो निम्नांकित किए गए है

(i) पूरक फलन (Complementary Function या C.F.) फलन जो समानीत समीकरण का सम्पूर्ण प्रारंभिक (Complete Primitive) है तथा इस स्वरूप वाला होगा जो निम्न दिया गया है।

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ n विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक धारण करता है।

(*ii*) विशिष्ट समाकल (Particular Integral या P.I.) जो $F(D)\, y = Q$ का एक हल है और कोई भी विवेकाधीन या स्वैच्छ अचर (Arbitrary Constant) नहीं निर्धारित करता है।

पूरक फलन ज्ञात करने के नियम (Rules for Finding the Complementary Function)

हम एक द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण पर विचार करते है:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0 \qquad (5.5)$$

माना कि $y = A\, e^{mx}$ समीकरण (5.3) का एक परीक्षण हल (Trial Solution) है समीकरण (5.5) का सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) A.E. इस प्रकार होगा:

$$m^2 + P_1 m + P_2 = 0 \qquad (5.6)$$

समीकरण (5.6) दो मूल (Roots) $m = m_1, m = m_2$ है, हम निम्न मामलों पर विचार करेंगे:

(*i*) जब $m_1 \neq m_2$ तब $C.F.\; y = c_1 e^{m^1 x} + c_2\, e^{m^2 x}$ होगा

जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक है।

(*ii*) जब $m_1 = m_2$ तब पूरक फलन (C.F.) होगा:

जहां $y = (c_1 + c_2\, x)\, e^{m^1 x}$ तथा c_1 विवेकाधीन या स्वैच्छ c_2 नियतांक है।

(*iii*) जब सहायक समीकरणों (Auxiliary Equations) (5.6), $\alpha - i\beta$ और $\alpha + i\beta$ प्रकार के सम्मिश्र मूल (Complex Roots) से समाविष्ट है तब पूरक फलन (C.F.) निम्न होगा

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta\, x + c_2 \sin \beta\, x)$$

हम n कोटि की समीकरण पर विचार करते हैं:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + ... + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0 \qquad (5.7)$$

माना कि $y = A\, e^{mx}$ समीकरण (5.7) का एक परीक्षण हल है तब सहायक समीकरण इस प्रकार है:

$$m^n + P_1\, m^{n-1} + P_2\, m^{n-2} + ...+ P_{n-1}\, m + P_n = 0 \qquad (5.8)$$

नियम (1) : यदि $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ समीकरण (5.8) के अलग–अलग वास्तविक मूल (Distinct Real Roots) है तब सामान्य हल होगा

$$y = c_1\, e^{m^1 x} + c_2 e^{\,m^2 x} + c_3 e^{m^3 x} + ... + c_n e^{mnx}$$

जहां $\quad c_1, c_2, c_3 .....c_n$

नियम (2) : यदि सहायक समीकरण के दो मूल m_1 तथा m_2 समान हैं और प्रत्येक m के बराबर है तब सामान्य हल का संगत भाग $(c_1 + c_2 x) e^{mx}$ होगा और यदि तीन मूल m_3, m_4, m_5, α के बराबर होंगे तो हल का संगत भाग $(c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{\alpha x}$ होगा तथा अन्य अलग–अलग (Distinct) होगें तो सामान्य हल होगें:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{mx} + (c_3 + c_4 + c_5 x^2) e^{\alpha x} + c_6 e^{m^6 x} + ...+ c_n e^{mnx}$$

नियम (3) : यदि अधिकल्पित मूल का युग्म (Pair or Imaginary Roots) $\alpha \pm i\beta$ दो बार अस्तित्व में है तब सामान्य हल का संगत भाग होगा:

$$e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x]$$

और सामान्य हल होगा:

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x] + c_5 e^{m^5 x} + ...+ c_n e^{mnx}$$

जहां $c_1, c_2 ..., c_n$ विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक या अचर है तथा $m_5, m_6, ...,$ m_n समीकरण (5.8) के पृथक–पृथक वास्तविक मूल (Distinct Real Roots) है।

नियम (4) : यदि दो मूल (वास्तविक) m तथा $-m$ हैं, सामान्य हल का संगत भाग (Corresponding Part) $c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$ होगा :

$$= c_1 (\cosh mx + \sinh mx) + c_2 (\cosh mx - \sinh mx)$$

$$= c'_1 \cosh mx + c'_2 \sinh mx \text{ जहां } c'_1 = c_1 + c_2, c'_2 = c_1 - c_2$$

और सामान्य हल होगा

$$y = c'_1 \cosh mx + c'_2 \sinh mx + c_3 e^{m^3 x} + c_4 e^{m^4 x} + ...+ c_n e^{mnx}$$

जहां $c'_1, c'_2, c_3, ...c_n$ स्वैच्छ अचर हैं तथा $m_3, m_4 ... m_n$ समीकरण (5.8) के पृथक–पृथक वास्तविक मूल हैं।

विशिष्ट समाकल ज्ञात करने का नियम (Rules for Finding PI or Particular Integrals)

$F(D) y = f(x)$ का कोई विशिष्ट हल उसका विशिष्ट समाकल या P.I (Particular Integral) कहलाता है। $F(D)y = f(x)$ के P.I. को सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखा जाता है:

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)} \{f(x)\} \text{ जहां } F(D) \text{ संचालक (Operator) है।}$$

संचालक $\frac{1}{F(D)}$ इस प्रकार परिभाषित है कि जब यह संचालक एक $f(x)$ पर संचालित होता है तो एक फलन $\phi(x)$ देता है जो इस प्रकार होता है कि

$$F(D) \phi(x) = f(x)$$

अर्थात् $\frac{1}{F(D)} \{f(x)\} = \phi(x)$ (= P.I.)

$$\therefore \quad F(D) \left\{\frac{1}{F(D)} f(x)\right\} = f(x) \quad \left[\because \frac{1}{F(D)} f(x) = \phi(x)\right]$$

स्पष्ट है कि $F(D)$ तथा $1/F(D)$ प्रतिलोम संचालक (Inverse Operators) हैं।

प्रकरण I: माना $F(D) = D$ तब $\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\, dx$ है।

उपपत्ति (Proof) : माना $y = \frac{1}{D}\{f(x)\}$, D से संचालित करने पर हमें प्राप्त होगा $Dy = D \cdot \frac{1}{D}\{f(x)\}$ या $Dy = f(x)$ या $\frac{dy}{dx} = f(x)$ या $dy = f(x)x$ के सापेक्ष दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होगा $y = \int f(x)\, dx$ चूंकि विशिष्ट समाकल में कोई विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक नहीं होता।

प्रकरण II: माना $F(D) = D - m$ जहां m एक नियतांक है तब

$$\frac{1}{D-m}\{f(x)\} = e^{mx} \int e^{-mx} f(x) dx.$$

उपपत्ति (Proof) : माना $\frac{1}{D-m}\{f(x)\} = y$ तब $D - m$ से संचालित (Operating) करने पर हमें प्रापत होगाः

$$(D-m) \cdot \frac{1}{D-m}\{f(x)\} = (D-m)\, y$$

या $$f(x) = \frac{dy}{dx} - my$$

या $\frac{dy}{dx} - my = f(x)$ जो कि एक प्रथम कोटि की रैखिक अवकल समीकरण है तथा I.F. = $e^{\int -m dx} = e^{-mx}$ होगा।

तब उपर्युक्त समीकरण को e^{-mx} से गुणा करने तथा x के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें प्राप्त होगाः

$y\, e^{-mx} = \int f(x) e^{-mx} dx$, क्योंकि विशिष्ट समाकलन (Particular Integral) कोई विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक निर्धारित नहीं करता।

या $$y = e^{mx} \int f(x) e^{-mx} dx.$$

टिप्पणी: यदि $\frac{1}{F(D)} = \frac{a_1}{D-m_1} + \frac{a_2}{D-m_2} + ... + \frac{a_n}{D-m_n}$ जहां a_i तथा m_i $(i = 1, 2, ..., n)$ नियतांक हैं, तब

$$\frac{1}{F(D)}\{f(x)\} = a_1 e^{m_1 x} \int f(x) e^{-m_1 x} dx + a_2 e^{m_2 x} \int f(x) e^{-m_2 x} dx + \dots + a_n e^{m_n x} \int f(x) e^{-m_n x} dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i e^{m_i x} \int f(x) e^{-m_i x} dx$$

अब हम कुछ विशेष प्रकार के दाएं पक्ष के (Right Hand Side) फलनों के लिए विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की विधि पर चर्चा करते हैं।

प्रकार– I: $f(D)\, y = e^{mx}$ जहां m एक नियतांक है।

तब $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} = \frac{e^{mx}}{F(m)} \text{ if } F(m) \neq 0$$

यदि $F(m) = 0$ तब हम D को $D + m$ से $F(D)$ में प्रतिस्थापित करते हैं,

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} = e^{mx} \cdot \frac{1}{F(D+m)}\{1\}$$

उदाहरण 5.1: $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = (e^{2x} + 3)^2 + e^{3x} \cosh x.$

हलः निम्न समीकरण समानीत समीकरण (Reduced Equation) है,

$$(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = 0 \qquad ...(5.9)$$

माना कि $y = Ae^{mx}$ समीकरण (5.9) का एक परीक्षण हल (Trial Solution) है तब सहायक समीकरणः

$$m^3 - 2\,m^2 - 5m + 6 = 0 \text{ or } m^3 - m^2 - m^2 + m - 6m + 6 = 0$$

या $$m^2 (m-1) - m(m-1) - 6(m-1) = 0$$

या $$(m-1)(m^2 - m - 6) = 0 \text{ or } (m-1)(m^2 - 3m + 2m - 6) = 0$$

या $$(m-1)(m-3)(m+2) = 0 \text{ or } m = 1, 3, -2$$

$\therefore$ पूरक फलन (Complementary Function) हैः

$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + c_3\, e^{-2x}$ जहां c_1, c_2, c_3 विवेकाधीन या स्वैच्छ अचर है।

पुनः $$(e^{2x} + 3)^2 + e^{3x} \cosh x = e^{4x} + 6\, e^{2x} + 9 + e^{3x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$$

$$= e^{4x} + 6\, e^{2x} + 9e^{0\cdot x} + \frac{e^{4x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}e^{4x} + \frac{13}{2}e^{2x} + 9e^{0.x}$$

$\therefore$ विशिष्ट समाकल (P.I.) है,

$$y = \frac{1}{D^3 - 2D^2 - 5D + 6}\left\{\frac{3}{2}e^{4x} + \frac{13}{2}e^{2x} + 9e^{0.x}\right\}$$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}\left\{\frac{3}{2}e^{4x} + \frac{13}{2}e^{2x} + 9e^{0.x}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}e^{4x} + \frac{13}{2}\frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}\{e^{2x}\}$$

$$+\ 9\frac{1}{(D-1)(D-3)(D+2)}e^{0.x}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{e^{4x}}{(4-1)\,(4-3)\,(4+2)} + \frac{13}{2}\frac{e^{2x}}{(2-1)\,)(2+2)\,(2-3)}$$

$$+9\frac{e^{0.x}}{(0-1)(0-3)(0+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{e^{4x}}{3.1.6}+\frac{13}{2}\frac{e^{2x}}{1.4.(-1)}+9\frac{e^{0.x}}{(-1)(-3).2}$$

$$=\frac{e^{4x}}{12}-\frac{13}{8}e^{2x}+\frac{3}{2}$$ होगा।

इसलिए सामान्य हल है:

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

$$= c_1e^x + c_2\,e^{3x} + c_3\,e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{12}-\frac{13}{8}e^{2x}+\frac{3}{2}$$ होगा।

टिप्पणियां:

1. जब $F(m) = 0$ तथा $F'(m) \neq 0$,

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} \quad = x\,\frac{1}{F'(D)}\{e^{mx}\} = \frac{xe^{mx}}{F'(m)}$$

2. जब $F(m)= 0$ $F'(m) = 0$ तथा $F''(m) \neq 0$, तब

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} = x^2\,\frac{1}{F''(D)}\left\{e^{mx}\right\} = \frac{x^2e^{mx}}{F''(m)}$$ तथा इसी प्रकार

प्रकार– II: $f(x) = e^{mx}\,V$ जहां V, x का कोई फलन है।

यहां (P.I.) का $F(D)\,y = f(x)$ का विशिष्ट समाकल है:

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}V\} = e^{mx}\frac{1}{F(D+m)}\{V\}.$$

उदाहरण 5.2: $(D^2 - 5D + 6)\,y = x^2\,e^{3x}$ को हल करें।

हल: निम्न समीकरण समानीत समीकरण (Reduced Equation) है,

$$(D^2 -5D + 6)\,y = 0 \tag{5.10}$$

माना कि $y = Ae^{mx}$ समीकरण (5.10) का परीक्षण (Trail) हल है, तब सहायक समीकरण:

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \text{ or } m^2 - 3m - 2m + 6 = 0$$

या $\quad m(m - 3) - 2(m - 3) = 0$ or $(m - 3)(m - 2) = 0$

$\therefore \quad m = 2, 3$

$\therefore \quad$ पूरक फलन (C.F.) है:

$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x}$ जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ अचर हैं। तब विशिष्ट समाकल निम्न होगा:

$$y = \frac{1}{D^2-5D+6}\{x^2e^{3x}\} = \frac{e^{3x}}{(D+3)^2-5(D+3)+6}\{x^2\}$$

$$= e^{3x}\frac{1}{D^2+6D+9-5D-15+6}\{x^2\} = e^{3x}\,\frac{1}{D^2+D}\{x^2\}$$

टिप्पणी

$$= e^{3x}\,\frac{1}{D(1+D)}\{x^2\} = e^{3x}\,\frac{1}{D}(1+D)^{-1}\{x^2\}$$

$$= \frac{e^{3x}}{D}(1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - ...)\{x^2\}$$

$$= \frac{e^{3x}}{D}\{x^2 - 2x + 2\} = e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right)$$

इसलिए सामान्य हल है:

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right).$$

याद रहे: (*i*) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...$

(*ii*) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...$

प्रकार– III:

(*a*) $F(D)\,y = \sin ax$ या $\cos ax$ जहां $F(D) = \phi(D^2)$.

यहां $\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{\sin ax\} = \frac{1}{\phi(-a^2)}\sin ax$ (यदि $\phi(-a^2) \neq 0$)

या $\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{\cos ax\} = \frac{1}{\phi(-a^2)}\cos ax$ (यदि $\phi(-a^2) \neq 0$)

(ध्यान देने योग्य है कि D^2, $-a^2$ से प्रतिस्थापित हुआ है लेकिन D, $-a$ से प्रतिस्थापित नहीं हुआ है)

(b) $F(D)\,y = \sin ax$ या $\cos ax$ या $F(D) = \phi(D^2, D)$

यहां $\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{\sin ax\} = \frac{1}{\phi(D^2, D)}\{\sin ax\} = \frac{1}{\phi(-a^2, D)}\{\sin ax\}$

यदि $\phi(-a^2, D) \neq 0$

या $y = \frac{1}{F(D)}\{\cos ax\} = \frac{1}{\phi(D^2, D)}\{\cos ax\} = \frac{1}{\phi(-a^2, D)}\{\cos ax\}$

यदि $\phi(-a^2, D) \neq 0$

(*c*) $F(D)\,y = \sin ax$ or $\cos ax$ तथा $F(D) = \frac{\psi(D)}{\phi(D^2)}$

यहा $\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{\sin ax\} = \frac{\psi(D)}{\phi(D^2)}\{\sin ax\} = \frac{\psi(D)}{\phi(-a^2)}\{\sin ax\}$ यदि $\phi(-a^2) \neq 0$

या $y = \frac{1}{F(D)}\{\cos ax\} = \frac{\psi(D)}{\phi(D^2)}\{\cos ax\}$

$$= \frac{\psi(D)}{\phi(-a^2)}\{\cos ax\} \text{ यदि } \phi(-a^2) \neq 0$$

टिप्पणी

(*d*) $F(D)\,y = \sin ax$ या $\cos ax$, $F(D) = \phi(D^2)$ परन्तु $\phi(-a^2) = 0$

$$\text{यहां P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{\sin ax \text{ या } \cos ax\} = x\frac{1}{F'(D)}\{\sin ax \text{ या } \cos ax\}$$

वैकल्पिक रूप से $\sin ax$ तथा $\cos ax$ को $\sin ax = \dfrac{e^{ixa} - e^{-ixa}}{2i}$ तथा $\cos ax = \dfrac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}$, इस रूप में भी लिखा जा सकता है। तब प्रकार–I की विधि से P.I. ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 5.3: $(D^4 + 2D^2 + 1)\,y = \cos x$ ज्ञात करें।

हलः समानीत समीकरण (Reduced Equation) is $(D^4 + 2D^2 + 1)\,y = 0$ है। माना $y = Ae^{mx}$ परीक्षण हल है तब सहायक समीकरण,

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \text{ या } [(m^2 + 1)]^2 = 0 \text{ या } m = \pm i, \pm i$$

$\therefore$ C.F. $= (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$ जहां c_1, c_2, c_3 तथा c_4 विवेकाधीन या स्वैच्छ अचर (Arbitrary Constants) हैं।

$$\therefore \quad \text{P.I.} = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1}\{\cos x\}$$

$$= x\frac{1}{4D^3 + 4D}\{\cos x\}$$

$[\because \phi(D^2) = D^4 + 2D^2 + 1$

$\phi(-1^2) = 1 - 2 + 1 = 0$, तब $\dfrac{1}{F(D)}\{f(x)\} = x\dfrac{1}{F'(D)}\{f(x)\}]$

$$= \frac{x}{4}\frac{1}{D^3 + D}\{\cos x\} = \frac{x}{4}.\frac{x}{3D^2 + 1}\{\cos x\}$$

$$= \frac{x^2}{4}\,\frac{1}{3D^2 + 1}\{\cos x\} = \frac{x^2}{4}.\frac{\cos x}{-3 + 1} = -\frac{x^2}{8}\cos x$$

इस प्रकार सामान्य हल (General Solution) हैः

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

$$= (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x - \frac{x^2}{8}\cos x.$$

उदाहरण 5.4: $(D^2 - 4)y = \sin 2x$ को हल करें

हलः समानीत समीकरण (Reduced Equation) निम्न दिया गया हैः

$$(D^2 - 4)y = 0$$

माना कि $y = Ae^{mx}$ एक परीक्षण हल (Trial Solution) है और

सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) हैः

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

पूरक फलन (Complementary Function) हैः

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक है।

विशिष्ट समाकल (Particular Integral) निम्न होगाः

$$y = \frac{1}{D^2-4}\{\sin 2x\} = \frac{1}{-2^2-4}\sin 2x$$ [D^2 को -2^2 से प्रतिस्थापित करने पर]

$$= -\frac{1}{8}\sin 2x$$

सामान्य हल (General Solution) $y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{8}\sin 2x$ है।

उदाहरण 5.5: $(3D^2 + 2D - 8)y = 5\cos x$ को हल करें।

हलः समानीत समीकरण है $(3D^2 + 2D - 8)y = 0$

माना $y = Ae^{mx}$ एक परीक्षण हल है तब सहायक समीकरण होंगे

$$3m^2 + 2m - 8 = 0 \text{ या } 3m^2 + 6m - 4m - 8 = 0$$

या $\quad 3m(m + 2) - 4(m + 2) = 0$ या $(m + 2)(3m - 4) = 0$

या $\quad m = -2, m = \frac{4}{3}$

$\therefore$ पूरक फलन (Complementary Function) है,

$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{\frac{4}{3}x}$ जबकि c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक हैं।

विशिष्ट समाकल (Particular Integral) है,

$$y = \frac{1}{3D^2+2D-8}\{5\cos x\} = 5\frac{1}{(3D-4)(D+2)}\{\cos x\}$$

$$= 5\frac{(3D+4)(D-2)}{(9D^2-16)(D^2-4)}\{\cos x\} = 5\frac{(3D+4)(D-2)}{[9(-1^2)-16][-1^2-4]}\{\cos x\}$$

[हर (Denominator) में D^2 को -1^2 से प्रतिस्थापित करने पर]

जिसका स्वरूप है, $\left[\frac{\psi(D)}{\phi(D^2)}\right]$

$$= \frac{5}{(-25)(-5)}[3D^2 - 6D + 4D - 8]\{\cos x\} = \frac{1}{25}[3D^2 - 2D - 8]\cos x$$

$$= \frac{1}{25}\left(3\frac{d^2}{dx^2}(\cos x) - 2\frac{d}{dx}(\cos x) - 8\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{25}[-3\cos + 2\sin x - 8\cos x] = \frac{1}{25}(2\sin x - 11\cos x)$$

सामान्य हल (General Solution)

$y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$

$$= c_1e^{-2x} + c_2e^{4/3x} + \frac{1}{25}(2\sin x - 11\cos x).$$

प्रकार– IV: $F(D)\,y = x^n$, n एक धनात्मक पूर्णांक है।

यहां $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{x^n\} = [F(D)]^{-1}\{x^n\}$$

टिप्पणी

इस प्रकरण में $[F(D)]^{-1}$ को द्विपद श्रेणी (Binomial Series) में आरोही घातों में D से D^n तक विस्तारित करते हैं और फिर विस्तार के प्रत्येक पद (Term) के साथ x^n पर संचालित (Operate) करते हैं। विस्तार में D^n से परे जो पद है उन पर विचार करने की आवश्यकता नहीं होती हालांकि उनके x^n पर संचालक का परिणाम शून्य आता है।

उदाहरण 5.6: $D^2(D^2 + D + 1)y = x^2$ को हल करें।

हल: समानीत समीकरण निम्न है,

$$D^2(D^2 + D + 1)y = 0 \tag{5.11}$$

माना $y = Ae^{mx}$ समीकरण (5.11) का एक परीक्षण हल है तब सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) है:

$$m^2(m^2 + m + 1) = 0$$

$$\therefore \quad m = 0, 0 \text{ और } m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-I \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore$ पूरक फलक (Complementry Function) है:

$$y = (c_1 + c_2 x)\,e^{0 \cdot x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$= c_1 + c_2 x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

जहां c_1, c_2, c_3, c_4 विवेकाधीन नियतांक (Arbitrary Constant) हैं।

विशिष्ट समाकल (Particular Integral) है:

$$y = \frac{1}{D^2(D^2 + D + 1)}\{x^2\} = \frac{1}{D^2}(1 + D + D^2)^{-1}\{x^2\}$$

$$= \frac{1}{D^2}\{1 - (D + D^2) + (D + D^2)^2 - (D + D^2)^3 + \ldots\}\{x^2\}$$

$$= \frac{1}{D^2}\{1 - (D + D^2) + (D^2 + 2D^3 + D^4) - (D + D^2)^3 + \ldots\}\{x^2\}$$

$$= \frac{1}{D^2}\{x^2 - (2x + 2) + (2) + 0\}$$

$$= \frac{1}{D^2}\{x^2 - 2x\} = \frac{1}{D}\left\{\frac{x^3}{3} - x^2\right\} = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

टिप्पणी

सामान्य हल (General Solution) $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$ है।

$$= c_1 + c_2 x + e^{-x/2}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}.$$

उदाहरण 5.7: $(D^2 + 4)y = x \sin^2 x$ को हल करें।

हल: समानीत समीकरण (Reduced Equation) है

$$(D^2 + 4)\, y = 0$$

परीक्षण हल (Trial Solution) $y = A\, e^{mx}$ इस प्रकार सहायक समीकरण प्रदान करेगा

$$m^2 + 4 = 0,\ m = \pm 2i$$

पूरक फलन (Complementary Function) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ है।

विशिष्ट समाकल (Particular Integral) $y = \dfrac{1}{D^2+4}\{x \sin^2 x\}$

$$= \frac{1}{D^2+4}\left\{\frac{x}{2}(1-\cos 2x)\right\} = \frac{1}{D^2+4}\left\{\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos 2x\right\}$$

$$= \frac{1}{D^2+4}\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{D^2+4}\left\{\frac{x}{2}\frac{(e^{2ix}+e^{-2ix})}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)^{-1}\left\{\frac{x}{2}\right\} - \frac{1}{4}\frac{e^{2ix}}{(D+2i)^2+4}\{x\} - \frac{e^{-2ix}}{4(D-2i)^2+4}\{x\}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x}{2} - \frac{e^{2ix}}{4}\frac{1}{D^2+4Di-4+4}\{x\} - \frac{e^{-2ix}}{4}\frac{1}{D^2-4Di-4+4}\{x\}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{e^{2ix}}{4}\frac{1}{4Di\left(1+\dfrac{D}{4i}\right)}\{x\} - \frac{e^{-2ix}}{4.(-4Di)\left(1-\dfrac{D}{4i}\right)}\{x\}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{e^{2ix}}{4}.\frac{1}{4Di}\left(1+\frac{D}{4i}\right)^{-1}\{x\} - \frac{e^{-2xi}}{4(-4Di)}\left(1-\frac{D}{4i}\right)^{-1}\{x\}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{e^{2ix}}{4}.\frac{1}{4Di}\left(1-\frac{D}{4i}+\frac{D^2}{-16}\ldots\right)\{x\} - \frac{e^{-2xi}}{4(-4Di)}\left(1+\frac{D}{4i}+\ldots\right)\{x\}$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{e^{2ix}}{4}.\frac{1}{4Di}\left(x-\frac{1}{4i}\right) + \frac{e^{-2xi}}{4.4Di}\left(x+\frac{1}{4i}\right)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{e^{2ix}}{2.8i}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{4i}\right) + \frac{e^{-2xi}}{2.8i}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4i}\right)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{x^2}{2.8}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2xi}}{2i}\right) + \frac{x}{2.16.i^2}\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2xi}}{2}\right)$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{x^2}{2.8}\sin 2x - \frac{x}{2.16}\cos 2x$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{x^2}{16}\sin 2x - \frac{x}{32}\cos 2x$$

टिप्पणी

इस प्रकार सामान्य हल (General Solution) $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$

$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{16} \sin 2x - \frac{x}{32}\cos 2x.$$

उदाहरण 5.8: $(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)\, y = 3xe^{-x}$ को हल करें।

हलः समानीत समीकरण हैः

$$(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)\, y = 0 \qquad (5.12)$$

परीक्षण हल $y = Ae^{mx}$ निम्नानुसार सहायक समीकरण देगाः

$$m^4 + m^3 - 3m^2 - 5\,m - 2 = 0$$

या $m^4 + m^3 - 3m^2 - 3\,m - 2m - 2 = 0$

या $m^3\,(m + 1) - 3m\,(m + 1) - 2\,(m + 1)$

या $(m + 1)\,(m^3 - 3m - 2) = 0$ या $(m + 1)$

$\{m^3 + m^2 - m^2 - m - 2m - 2) = 0$

या $(m + 1)\,\{m^2\,(m + 1) - m\,(m + 1) - 2\,(m + 1)\} = 0$

या $(m + 1)\,(m + 1)\,(m^2 - m - 2) = 0$

या $(m + 1)^2\,(m^2 - 2m + m - 2) = 0$

या $(m + 1)^2\,(m + 1)\,(m - 2) = 0$

$\therefore\ m = -1, -1, -1, 2$

पूरक फलन (Complementary Function) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\, e^{-x} + c_4 e^{2x}$ है।

विशिष्ट समाकल (Particular Integral) है,

$$y = \frac{1}{(D+1)^3\,(D-2)}\{3e^{-x}\,x\}$$

$$= 3e^{-x}\frac{1}{(D-1+1)^3\,(D-3)}\{x\} = 3e^{-x}\frac{1}{D^3(-3)\,(1-D/3)}\{x\}$$

$$= -\,e^{-x}\frac{1}{D^3}\left(1-\frac{D}{3}\right)^{-1}\{x\} = -e^{-x}\,\frac{1}{D^3}\left(1+\frac{D}{3}+\frac{D^2}{9}+\ldots\right)\{x\}$$

$$= -\,e^{-x}\,\frac{1}{D^3}\left(x+\frac{1}{3}\right) = -e^{-x}\,\frac{1}{D^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right) = -e^{-x}\,\frac{1}{D}\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)$$

$$= -e^{-x}\left(\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{18}\right)$$

सामान्य हल (General Solution) $y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$ है,

$$= (c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2) + c_4\,e^{2x} - e^{-x}\left(\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{18}\right).$$

प्रकार– V: (*a*) $F\,(D)\,y = xV$ जहां V, x का एक फलन है।.

यहां $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{xV\} = \left\{x - \frac{1}{F(D)}F'(D)\right\}\frac{1}{F(D)}\{V\}.$$

टिप्पणी

उदाहरण 5.9: $(D^2 + 9)\, y = x \sin x$ को हल करें।

हल: समानीत समीकरण (Reduced Equation) $(D^2 + 9)\, y = 0$ है। (5.13)

परीक्षण हल (Trial Solution) $y = Ae^{mx}$ यह सहायक समीकरण देता है,

$$m^2 + 9 = 0 \text{ या } m = \pm 3i$$

$\therefore$ C.F. $= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक हैं।

तथा $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{x \sin x\} \text{ जहां } F(D) = D^2 + 9$$

$$= \left\{x - \frac{1}{F(D)} F'(D)\right\} \frac{1}{F(D)}\{\sin x\}$$

$$= \left\{x - \frac{2D}{D^2+9}\right\} \frac{1}{D^2+9}\{\sin x\}$$

$$= \left\{x - \frac{2D}{D^2+9}\right\} \frac{\sin x}{-1+9} = \left\{x - \frac{2D}{D^2+9}\right\}\left\{\frac{\sin x}{8}\right\}$$

$$= \frac{x \sin x}{8} - \frac{1}{4}\frac{1}{-1+9} D\{\sin x\} = \frac{x \sin x}{8} - \frac{1}{32}\cos x$$

इस प्रकार सामान्य हल है:

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x \sin x}{8} - \frac{1}{32}\cos x$$

(*b*) $F(D)\, y = x^n V$ जहां V, x का कोई फलन है।

यहां $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{f(x)\} = \frac{1}{F(D)}\{x^n V\} = \left\{x - \frac{F'(D)}{F(D)}\right\}^n \frac{1}{F(D)}\{V\}$$

उदाहरण 5.10: $(D^2 - 1)y = x^2 \sin x$ को हल करें।

हल: समानीत समीकरण (Reduced Equation) $(D^2 - 1)y = 0$ है (5.14)

माना $y = Ae^{mx}$ एक परीक्षण हल है तब सहायक समीकरण है:

$$m^2 - 1 = 0 \text{ or } m = \pm 1$$

$\therefore$ C.F. $= c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक है।

$\therefore$ $$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{x^2 \sin x\} \text{ जहां } F(D) = D^2 - 1$$

$$= \left\{x - \frac{F'(D)}{F(D)}\right\}^2 \frac{1}{F(D)}\{\sin x\} = \left\{x - \frac{1}{D^2-1} 2D\right\}^2 \frac{1}{D^2-1}\{\sin x\}$$

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1} 2D\right\}\left\{x - \frac{1}{D^2-1} 2D\right\}\left\{\frac{1}{-1^2-1} \sin x\right\}$$

टिप्पणी

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\{-1/2\sin x\}$$

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\left\{-\frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{D^2-1}\right\}\{\cos x\}$$

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\left\{-\frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right\}$$

$$= -\frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{D^2-1}\{D(x\sin x + \cos x)\}$$

$$= -\frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{D^2-1}\{\sin x + x\cos x - \sin x\}$$

$$= -\frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{D^2-1}\{x\cos x\}$$

पुनः $\frac{1}{D^2-1}\{x\cos x\} = \left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\frac{1}{D^2-1}\{\cos x\}$

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1}2D\right\}\left\{\frac{1}{-1-1}\cos x\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{D^2-1}\{-\sin x\}$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos x - \frac{\sin x}{-1^2-1} = -\frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = -\frac{x^2}{2}\sin x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

इस प्रकार सामान्य हल (General Solution) है,

$$y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = c_1e^x + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

अपनी प्रगति जांचिए

1. अचर गुणांकों वाले सामान्य रैखिक अवकल समीकरण लिखिए।
2. द्वितीय कोटि रैखिक अवकल समीकरण का पूरक फलन क्या होता है, यदि समीकरण के मूल ($m_1 = m_2$) के बराबर हों?
3. विशिष्ट समाकल क्या होता है?

5.3 द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

दो स्वतंत्र चरों (Independent Variables) में द्वितीय कोटि (Second Order) के निम्नांकित आंशिक अवकल समीकरण पर विचार कीजिए।

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

यहां $A, B, C, D, E, F,$ तथा G, x तथा y के फलन हैं।

टिप्पणी

जहां यह समीकरण अर्ध रैखिक (Quasi-Linear) आंशिक अवकल समीकरण में परिवर्तित हो जायेगी, तब ऐसा स्वरूप ग्रहण कर लेगी।

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

ये समीकरण इस प्रकार की कही जायेगी यदिः

1. दीर्घवृत्तीय प्रकार की (Elliptic Type) यदि $B^2-4AC<0$
2. परवलयिक प्रकार की (Parabolic Type) यदि $B^2-4AC=0$
3. अतिपरवलयिक प्रकार की (Hyperbolic Type) यदि $B^2-4AC>0$

इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैंः

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

$\Rightarrow u_{xx}-2xu_{xy}+\mathrm{x}2u_{yy}-2u_y=0$

इसकी सामान्य समीकरण से तुलना करने पर हमें पता चलता है कि

$A=1, B=-2x, C=x^2$

इसलिए $B^2-4AC=(-2x)^2-4x^2=0, \forall\ x$ तथा $y\neq 0$

इसलिए समीकरण सभी बिन्दुओं पर परवलयिक (Parabolic) है।

(ii) $y^2u_{xx}+\mathrm{x}^2u_{yy}=0$

इसकी सामान्य समीकरण से तुलना करने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता हैः

$A=y^2, B=0, C=x^2$

इसलिए $B^2-4AC=0-\ 4x^2y^2<0, \forall\ x$ तथा $y\neq 0$

इस प्रकार यह समीकरण सभी बिन्दुओं पर दीर्घवृतीय (Elliptic) है।

(iii) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$

इसकी सामान्य समीकरण से तुलना करने पर हमें ज्ञात होता हैः

$A=x^2, B=0, C=-y^2$

इसलिए $B^2-4AC=0-\ 4x^2y^2>0, \forall x$ तथा $y\neq 0$

अतः समीकरण सभी बिन्दुओं पर अतिपरवलयक (Hyperbolic) है।

सर्वाधिक सामान्य (Most Common) रूप से इस्तेमाल होने वाले द्वितीय कोटि की तीन आंशिक अवकल समीकरण इस प्रकार है।

टिप्पणी

1. लाप्लास समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ यह दीर्घवृतीय (Elliptic) प्रकार का है।

2. एक विमीय ऊष्मा प्रवाह समीकरण $\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ यह परवलयिक (Parabolic) प्रकार का है।

3. एक विमीय तरंग समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ यह अतिपरवलयिक (Hyperbolic) प्रकार का है।

5.4 अचर गुणांकों वाले समरूप तथा गैर–समरूप समीकरण

अचर गुणों वाले समरूप रैखिक समीकरण (Homogeneous Linear Equations with Constant Coefficients)

माना $f(D, D')z = V(x, y)$ (5.15)

तब यदि $f(D,D') = A_0D^n + A_1D^{n-1}D' + A_2D^{n-2}D_2' + \cdots + A_nD'^n$ (5.16)

जहां $A_1, A_2, \cdots, A_n$ अचर राशि हैं।

तब समीकरण (5.15) को समरूप (Homogeneous) समीकरण के रूप में जाना जाता है यह निम्न स्वरूप प्राप्त करती हैः

$$\left(A_0D^n + A_1D^{n-1}D' + A_2D^{n-2}D'^2 + \cdots + A_nD'^n\right)z = V(x, y) \tag{5.17}$$

पूरक फलन (Complementry Function)

समीकरण पर विचार कीजिएः

$$\left(A_0D^n + A_1D^{n-1}D' + A_2D^{n-2}D'^2 + \cdots + A_nD'^n\right)z = 0 \tag{5.18}$$

माना कि $z = \phi(y + mx)$ (5.19)

समीकरण (5.18) का एक हल है।

अब $D^r z = m^r \phi^r(y + mx)$

$D'^s z = \phi^{(e)}(y + mx)$

तथा $D^r D'^s z = m^r \phi^{(r+s)}(y + mx)$

समीकरण (5.19) को समीकरण (5.18) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगाः

$$\left(A_0m^n + A_1m^{n-s} + A_2m^{n-2} + \cdots + A_n\right)\phi^{(n)}(y + mx) = 0$$

यह संतुष्ट (Satisfy) होगा यदि

$$A_0m^n + A_1m^{n-1} + A_2m^{n-2} + \cdots + A_n = 0 \tag{5.20}$$

समीकरण (5.20) को सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) कहा जाता है।

माना कि $m_1, m_2, \cdots, m_n$ समीकरण (5.20) के मूल (Roots) हैं तब नीचे दी गयी तीन निम्न प्रकरण हैं।

प्रकरण I : मूल (Roots) $m_1, m_2, \cdots, m_n$ पृथक (Distinct) है

$m = m_1$ के संगत पूरक फलन C.F. के भाग है:

$$z = \phi_1(y + m_1 x)$$

यहां 'ϕ_1' एक विवेकाधीन फलन (Arbitrary Function) है।

$m = m_2$ के संगत C.F. का भाग है:

$$z = \phi_2(y + m_2 x)$$

यहां 'ϕ_2' एक विवेकाधीन फलन है।

अब क्योंकि हमारा समीकरण रैखिक है तब हलों का योग (Sum of Solutions) भी एक हल होगा इसलिए हमे पूरक फलन (Complimentary Function) प्राप्त हो जायेगा:

$$\text{C.F.} = \phi_1(y + m_1 x) + \phi_2(y + m_2 x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \phi_n(y + m_n x)$$

प्रकरण II : मूल (Roots) अभिकल्पित (Imaginary) है।

माना की समीकरण (5.50) के सम्मिश्र मूलों का युग्म $u \pm iv$ है

तब इसके पूरक फलन (Complimentary Function) का संगत भाग होगा

$$z = \phi_1(y + ux + ivx) + \phi_2(y + ux - ivx) \quad \ldots(5.21)$$

माना $y + ux = P$ तथा $vx = Q$

तब $z = \phi_1(P + iQ) + \phi_2(P - iQ)$

या $z = (\phi_1 + \phi_2)P + (\phi_1 - \phi_2)iQ$

यदि $\phi_1 + \phi_2 = \xi_1$ तथा $\phi_1 - \phi_2 = \xi_2$ तब

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2) \text{ और } \varphi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - i\xi_2)$$

ये मान समीकरण (5.21) में रखने पर हमें प्राप्त होगा:

$$z = \frac{1}{2}\xi_1(P + iQ) + \frac{1}{2}i\xi_2(P + iQ) + \frac{1}{2}\xi_1(P - iQ) - \frac{1}{2}i\xi_2(P - iQ)$$

या $z = \frac{1}{2}\{\xi_1(P + iQ) + \xi_1(P - iQ)\} + \frac{1}{2}i\{\xi_2(P + iQ) - \xi_2(P - iQ)\}$

प्रकरण III : मूलों (Roots) की पुनरावृत्ति होती है।

माना m समीकरण (5.20) के पुनरावृत्त मूल (Repeated Root) हैं तब हमारे पास हैं:

$$(D - mD')(D - mD')z = 0$$

$(D - mD')z = U$ रखने पर हमें प्राप्त होगा (5.22)

$$(D - mD')U = 0 \tag{5.23}$$

चूंकि यह समीकरण रैखिक (Linear) है इसका सहायक (Subsidiary) समीकरण निम्न होगाः

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dU}{0} \tag{5.24}$$

समीकरण (5.24) को दो स्वतंत्र समाकल (Independent Integrals) होगेंः

$y + mx$ = नियतांक

तथा U = नियतांक

$\therefore \quad U = \phi(y + mx)$

यह समीकरण (5.23) का एक हल होगा जहां ϕ एक विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

इसे समीकरण (5.22) में रखने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x} - m\frac{\partial z}{\partial y} = \phi(y + mx) \tag{5.25}$$

इसका सहायक (Subsidiary) समीकरण निम्न होगाः

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{\phi(y + mx)}$$

समीकरण (5.22) के दो स्वतंत्र समाकल (Independent Integrals) निम्नांकित किए गए हैंः

$y + mx$ = नियतांक

तथा $z = x\phi(y + mx) +$ नियतांक

इसलिए $z = x\phi(y + mx) + \psi(y + mx)$ (5.26)

यह समीकरण (5.23) का एक हल होगा जहां ψ एक विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

दो बार पुनरावृत्ति वाले मूल (Two Times Repeated Root) के संगत समीकरण (5.26) C.F. का भाग है।

सामान्यतः यदि मूल *m, r* बार पुनरावृत्ति करता है तो का C.F. संगत भाग होगा

$$z = x^{r-1}\phi_1(y + mx) + x^{r-2}\phi_2(y + mx) + \cdots + \phi_r(y + mx)$$

जहां $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_r$ विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

उदाहरण 5.11: समीकरण $(D^3 - 3D^2D' + 3DD'^2 - D'^3)z = 0$

हलः दिए गए समीकरण के सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) हैंः

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

या $(m-1)^3 = 0$

$\Rightarrow$ $m = 1, 1, 1$

$\therefore$ C.F. = $x^2\phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) + \phi_2(y+x)$.

अचर गुणांकों वाले गैर–समरूप रैखिक समीकरण (Non-Homogeneous Linear Equation with Constant Coefficiants)

यदि समीकरण (5.15) के बांये पक्ष (L.H.S) के सभी पद समान कोटि (Same Degree) के नहीं है तो समीकरण (5.15) को **गैर–समरूप समीकरण (Non-Homogeneous Equation)** कहा जाता है, यदि सांकेतिक (Symbolic) फलन $f(D, D')$ को ऐसे गुणनखण्डों (Factors) में वियोजित (Resolve) किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक D तथा D' में प्रथम कोटि का हो तो समीकरण को समानयन योग्य (Reducible) कहते हैं और ऐसा नहीं होने पर असमानयन योग्य (Irreducible) कहते हैं।

उदाहरण के लिए समीकरण

$$f(D, D')z = (D^2 - D'^2 + 2D + 1)z = (D + D' + 1)(D - D' + 1)z = x^2 + xy$$

समानयन योग्य है जबकि समीकरण

$$f(D, D')z = (DD' + D'^3)z = D'(D + D'^2)z = \cos(x + 2y)$$

समानयन योग्य गैर–समरूप समीकरण (Reducible Non-Homogeneous Equations)

समीकरण $f(D, D') = (a_1 D + b_1 D' + c_1)(a_2 D + b_2 D' + c_2)$

$$\cdots(a_n D + b_n D' + c_n) \quad (5.27)$$

में जहां सभी a, b तथा c नियतांक हैं, पूरक फलन (Complementary Function) निम्न रूप प्राप्त कर लेता है।

$$(a_1 D + b_1 D' + c_1)(a_2 D + b_2 D' + c_2)\cdots(a_n D + b_n D' + c_n)z = 0 \quad (5.28)$$

समीकरण का कोई हल इस प्रकार दिया जाता है।

$$(a_i D + b_i D' + c_i)z = 0 \quad (5.29)$$

यह समीकरण (5.28) का एक हल है।

समीकरण (5.29) का लैग्रांज सहायक समीकरण (Lagrange's Subsidiary Equations) के निर्धारण पर,

$$\frac{dx}{a_i} = \frac{dy}{b_i} = \frac{dz}{-c_i z} \quad (5.30)$$

समीकरण (5.30) के दो स्वतंत्र समाकल (Independent Integrals) इस प्रकार है।

$$b_i x - a_i y = \text{नियतांक}$$

तथा $z = \text{नियतांक } e^{-\frac{c_i}{a_i}x}$, if $a_i \neq 0$

तथा $z =$ नियतांक $e^{-\frac{c_i}{b}y}$, if $b_i \neq 0$

इसलिए, $z = e^{-\frac{c_i}{a_i}x}\,\phi_i(b_i x - a_i y)$, यदि $a_i \neq 0$

या $z = e^{-\frac{c_i}{b_i}y}\,\psi_i(b_i x - a_i y)$ यदि $b_i \neq 0$

समीकरण (5.29) का सामान्य हल है यहां φ_i तथा ψ_i विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

उदाहरण 5.12: अवकल समीकरण $(D^2 - D'^2 - 3D + 3D')z = 0$ को हल करो।

हल: समीकरण को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$(D - D')(D + D' - 3)z = 0$$

$$\therefore \quad \text{C.F.} = \phi_1(y + x) + e^{3x}\phi_2(x - y)$$

या $\psi_1(y + x) + e^{3y}\psi_2(x - y)$

जब गुणनखंडों (Factors) की पुनरावृत्ति हो।

$(aD + bD' + c)$

इस समीकरण पर विचार करें

$$(aD + bD' + c)(aD + bD' + c)z = 0 \tag{5.31}$$

$$(aD + bD' + c)z = U \tag{5.32}$$

तब समीकरण (5.32) इस रूप में परिवर्तित (Reduces) हो जायेगा

$$(aD + bD' + c)U = 0 \tag{5.33}$$

समीकरण (5.32) का सामान्य हल है:

$$U = e^{-\frac{c}{a}x}\,\phi(bx - ay) \text{ या } a \neq 0 \tag{5.34}$$

या

$$U = e^{-\frac{c}{b}y}\,\psi(bx - ay) \text{ या } b \neq 0 \tag{5.35}$$

समीकरण (5.34) को समीकरण (5.32) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$(aD + bD' + c)z = e^{-\frac{c}{a}x}\,\phi(bx - ay) \tag{5.36}$$

सहायक समीकरण (Subsidiary Equations) निम्न है:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{e^{-\frac{c}{a}x}\varphi(bx - ay) - cz} \tag{5.37}$$

समीकरण (5.37) के दो स्वतंत्र समाकल इस प्रकार दिये जायेंगे

$$bx - ay = \text{नियतांक} = \lambda \tag{5.38}$$

तथा

$$\frac{dz}{dx} + \frac{c}{a}z = \frac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi(bx - ay) = \frac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\varphi(\lambda) \tag{5.39}$$

समीकरण (5.39) एक साधारण रैखिक समीकरण के प्रकरण में निम्न दिए गये हल इस प्रकार है:

$$ze^{\frac{c}{a}x} = \frac{1}{a}x\varphi(\lambda) + \text{नियतांक}$$

या $$ze^{\frac{c}{a}x} = \frac{1}{a}x\varphi(bx - ay) + \text{नियतांक}$$

इसलिए समीकरण (5.36) का सामान्य हल है:

$$z = \frac{x}{a}e^{-\frac{c}{a}x}\phi(bx - ay) + \phi_1(bx - ay)e^{-\frac{c}{a}x}$$

$$= e^{-\frac{c}{a}x}\{x\phi_2(bx - ay) + \phi_1(bx - ay)\} \quad \ldots(5.40)$$

जहां ϕ_1 तथा ϕ_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

इस प्रकार समीकरण (5.35) तथा समीकरण (5.32) से हमें प्राप्त है:

$$z = e^{-\frac{c}{b}y}\{y\psi_2(bx - ay) + \psi_1(bx - ay)\}$$

जहां ψ_1 तथा ψ_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

सामान्य रूप से, *r* बार पुनरावृत्ति वाले गुणनखंड (Factors) के लिए $(aD + bD' + c)$

$$z = e^{-\frac{c}{a}x}\sum_{i=1}^{r} x^{i-1}\phi_i(bx - ay) \quad \text{यदि } a \neq 0$$

या $$z - e^{-\frac{c}{b}y}\sum_{i=1}^{r} y^{i-1}\psi_i(bx - ay) \quad \text{यदि } b \neq 0$$

जहां $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ तथा $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

उदाहरण 5.13: निम्न अवकल समीकरण को हल करें।

$$(2D - D' + 4)(D + 2D' + 1^2 z = 0)$$

हल: गुणनखंड (Factors) $(2D - D' + 4)$ के संगत C.F. (पूरक फलन)

$$e^{4y}\phi(x + 2y)$$

गुणनखंड (Factors) $(D = 2D' + 1)^2$ के संगत पूरक फलन C.F. है:

$$e^{-x}\{x\phi_2(2x - y) + \phi_1(2x - y)\}$$

इसलिए $C.F. = e^{4y}\phi(x + 2y) + e^{-x}\{x\phi_2(2x - y) + \phi_1(2x - y)\}$

असमानयनीय (Irreducible) गैर–समरूप समीकरण

समीकरण हल करने के लिए $f(D, D')z = 0$ (5.41)

$z = ce^{ax+by}$ प्रतिस्थापित करने पर, जहां *a*, *b* तथा *c* नियतांक है (5.42)

टिप्पणी

अब $D^r z = ca^r e^{ax+by}$

$D^r D'^a z = ca^r b^s e^{ax+by}$

तथा $D'^s z = cb^s e^{ax+by}$

समीकरण (5.42) को समीकरण (5.41) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त है

$$cf(a,b)e^{ax+by} = 0$$

जो तभी प्रयोग होगा यदि $f(a, b) = 0$ हो (5.43)

(a या b) के किसी निर्धारित किए गये मान के लिए समीकरण (5.43) (b या a) के एक या अधिक मान प्रदान करती है तब ऐसे अनंततः अनेक (a_i, b_i) संख्याओं के युग्म होंगे जो समीकरण (5.43) को संतुष्ट करेंगे

तब $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y}$ (5.44)

जहां $f(a_i, b_i) = 0 \ \forall \ i$ समीकरण (5.43) का एक हल है।

यदि $f(D, D') = (D + hD' + k)g(D, D')$ (5.45)

तब कोई युग्म (a, b) इस प्रकार होगा कि

$$a + hb + k = 0 \quad (5.46)$$

समीकरण (5.43) को संतुष्ट करे, ऐसे हलों की संख्या अनंत होगी

समीकरण (5.46) $a = -(hb + k)$

तब $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-(hb_i + k)x + b_i y}$

$$= e^{-kx} \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{b_i (y - hx)} \quad (5.47)$$

यह एक रैखिक गुणनखंड $(D + hD' + k)$ के संगत पूरक फलन C.F. का भाग है जो समीकरण (5.45) में दिया गया है। समीकरण (5.47) इसके समतुल्य (Equivalent) है:

$$e^{-kx} \phi(y - hx)$$

जहां 'ϕ' एक विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन है।

समीकरण (5.44) सामान्य हल है बशर्ते $f(D, D')$ का कोई रैखिक गुणनखंड (Linear Factors) न हो अन्यथा सामान्य हल विवेकाधीन या स्वैच्छ फलन तथा आंशिक विवेकाधीन या स्वैच्छ अचर दोनों से समाविष्ट होगा।

उदाहरण 5.14: अवकल समीकरण $(2D^4 + 3D^2 D' + D'^2)z = 0$ को हल करें।

हल: दिया गया समीकरण इसके समतुल्य है:

$$(2D^2 + D')(D^2 + D')z = 0$$

पहले गुणनखंड के संगत पूरक फलन C.F.

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + b_i y}$$

जहां a_i तथा b_i इस प्रकार परस्पर संबंधित है:

$$2a_i^2 + b_i = 0 \qquad \text{या} \qquad b_i = -2a_i^2$$

इस प्रकार पहले गुणनखंड के संगत C.F. का भाग

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i e^{e_i(x - e_i y)}$$

जहां e_i तथा d_i विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक हैं।

$$\therefore \quad \text{C.F.} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i(x-2a_i y)} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i e^{e_i(x-e_i y)}$$

विशिष्ट समाकल (Particular Integral)

समीकरण में $f(D, D')z = V(x, y)$ ...(5.48)

f(*D*, *D*′) *D* तथा *D*′ का एक गैर–समरूप (Non-Homogeneous) फलन है:

$$\text{P.I.} = \frac{1}{f(D, D')} V(x, y) \qquad \text{...(5.49)}$$

यहां $V(x, y)$ स्वरूप e^{ax+by} है जहां '*a*' तथा '*b*' नियतांक हैं तब विशिष्ट समाकल (Particular Integral) को ज्ञात करने में हम नीचे दी गयी प्रमेय का प्रयोग करते हैं–

प्रमेय 5.1: यदि $f(a, b) \neq 0$ तब

$$\frac{1}{f(D, D')} e^{ax+by} = \frac{1}{f(a, b)} e^{ax+by}$$

प्रमाण : अवकलन द्वारा

$$D^r D'^s e^{ax+by} = a^r b^s e^{ax+by}$$

$$D^r e^{ax+by} = a^r e^{ax+by}$$

$$D'^s e^{ax+by} = b^s e^{ax+by}$$

$$\therefore \quad f(D, D')e^{ax+by} = f(a, b)e^{ax+by}$$

$$e^{ax+by} = f(a, b)\frac{1}{f(D, D')} e^{ax+by}$$

ऊपर लिखे समीकरण को *f*(*a*, *b*) से विभाजित करने पर

$$\frac{1}{f(a, b)} e^{ax+by} = \frac{1}{f(D, D')} e^{ax+by}$$

टिप्पणी

या $$\frac{1}{f(D,D')}e^{ax+by}=\frac{1}{f(a,b)}e^{ax+by}$$

उदाहरण 5.15: समीकरण $(D^2-D'^2-3D+3D')z=e^{x-2y}$ को हल करें।

हल: दिया गया समीकरण इसके समतुल्य है

$$(D-D')(D+D'-3)z=e^{x-2y}$$

$$\text{C.F.}=\phi_1(y+x)+e^{3x}\phi_2(y-x)$$

$$\text{P.I.}=\frac{1}{(D-D')(D+D'-3)}e^{x-2y}$$

$$=-\frac{1}{12}e^{x-2y}$$

इसलिए, $z=\varphi_1(y+x)+e^{3x}\varphi_2(y-x)-\frac{1}{12}e^{x-2y}$

परन्तु इस प्रकरण में $V(x,y)$, $e^{ax+by}\phi(x,y)$ स्वरूप वाला है जहां 'a' तथा 'b' नियतांक है। तब नीचे दी गयी प्रमेय P.I. ज्ञात करने में प्रयोग होंगी।

प्रमेय 5.2 : यदि $\phi(x,y)$ कोई फलन है तब,

$$\frac{1}{f(D,D')}e^{ax+by}\phi(x,y)=e^{ax+by}\frac{1}{f(D+a,D'+b)}\phi(x,y)$$

प्रमाण (Proof) : क्रमिक अवकलन (Successive Differentiation) के लिए लेबनीज प्रमेय (Leibnitz's Theorem) से, हमारे पास है

$$D^r\{e^{ax+by}\phi(x,y)\}=e^{ax+by}\{D^r\phi(x,y)+{}^r c_1 a.D^{r-1}\phi(x,y)\}$$

$$+{}^r c_2 a^2 d^{r-2}\phi(x,y)+\cdots+{}^r c_r a^r\phi(x,y)$$

$$=e^{ax+by}\{D^r+{}^r c_1 D^{r-1}+{}^r c_2 a^2 D^{r-2}+\cdots+{}^r c^r a^r\}\phi(x,y)$$

$$=e^{ax+by}(D+a)^r\phi(x,y).$$

इसी प्रकार

$$D'^s\{e^{ax+by}\varphi(x,y)\}=e^{ax+by}(D'+b)^s\varphi(x,y)$$

तथा $$D^r D'^s\{e^{ax+by}\varphi(x,y)\}=D^r[e^{ax+by}(D'+b)\varphi(x,y)]$$

$$=e^{ax+by}(D+a)^r(D'+b)^s\phi(x,y)$$

तब $$f(D,D')\{e^{ax+by}\phi(x,y)\}=e^{ax+by}f(D+a,D'+b)\phi(x,y) \qquad (5.50)$$

$f(D+a,D'+b)\phi(x,y)=\psi(x,y)$ रखने पर

$$\therefore \quad \phi(x,y)=\frac{1}{f(D+a,D'+b)}\psi(x,y)$$

समीकरण (5.50) में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलेगा

$$f(D,D')\left\{e^{ax+by}\frac{1}{f(D+a,D'+b)}\psi(x,y)\right\}=e^{ax+by}\psi(x,y)$$

समीकरण पर $\dfrac{1}{f(D,D')}$ से संचालन करने पर

$$e^{ax+by}\frac{1}{f(D+a,D'+b)}\psi(x,y)=\frac{1}{f(D,D')}\left\{e^{ax+by}\psi(x,y)\right\}$$

$\psi(x,y)$ को $\phi(x,y)$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$\frac{1}{f(D,D')}\left(e^{ax+by}\phi(x,y)\right)=e^{ax+by}\frac{1}{f(D+a,D'+b)}\phi(x,y)$$

उदाहरण 5.16: $\left(D^2-D'^2-3D+3D'\right)z=xv+e^{x+av}$ को हल करें।

हल: दिया गया समीकरण इसके समतुल्य है:

$$(D-D')(D+D'-3)y=xy+e^{x+2y}$$

$$C.F.=\phi_1(y+x)+e^{3x}\phi_2(x-y)$$

$$P.I.=\frac{1}{(D-D')(D+D'-3)}xy+\frac{1}{(D-D')(D+D'-3)}e^{x+2y}$$

$$=-\frac{1}{3D}\left\{1-\frac{D'}{D}\right\}^{-1}\left\{1-\frac{D+D'}{3}\right\}^{-1}xy$$

$$+e^{x+2y}\frac{1}{(D+1-D'-2)(D+1+D'+2-3)}1$$

$$=-\frac{1}{3D}\left\{1+\frac{D'}{D}+\frac{D'^2}{D^2}+\cdots\right\}\left\{1+\frac{D+D'}{3}+\frac{2}{9}DD'+\cdots\right\}xy+e^{x+2y}$$

$$\frac{1}{(D-D'-1)(D+D')}.1$$

$$=-\frac{1}{3D}\left\{1+\frac{D'}{D}+\frac{D'^2}{D^2}+\cdots\right\}\left\{1+\frac{D+D'}{3}+\frac{2}{9}DD'+\cdots\right\}+e^{x+2y}\frac{1}{(-1)(D+D')}\cdot 1$$

$$=-\frac{1}{3D}\left\{xy+\frac{2}{3}x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}y+\frac{2}{9}\right\}-xe^{x+2y}$$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\frac{x^2y}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{9}x\right\}-xe^{x+2y}$$

$$\therefore z=\phi_1(y+x)+e^{3x}\phi_2(x-y)-xe^{x+2y}$$

$$-\frac{1}{6}x^2y-\frac{1}{9}x^2-\frac{x^3}{18}-\frac{1}{9}xy-\frac{2}{27}x$$

टिप्पणी

उदाहरण 5.17: $(D^2-DD'+D'-1)z=\cos(x+2y)+e^y+xy+1$ को हल करें

हल : यह समीकरण इसके समतुल्य है–

$$(D-1)(D-D'+1)z=\cos(x+2y)+e^y+xy+1$$

पूरक फलन (Complementary Function) $= e^x\varphi_1(y)+e^y\varphi_2(x+y)$ है।

cos $(x+2y)$ के संगत विशिष्ट समाकल (Corresponding Particular Integral) है:

$$\frac{1}{D^2-DD'+D'-1}\cos(x+2y)$$

$$=\frac{1}{(-1)-(-2)+D'-1}\cos(x+2y)$$

$$=\frac{1}{D'}\cos(x+2y)$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x+2y)$$

e^y, के संगत विशिष्ट समाकल (Particular Integral) समाकल है:

$$=\frac{1}{D^2-DD'+D'-1}e^y$$

$$=\frac{1}{D'-1}e^y$$

$$=e^y.\frac{1}{D'}.1$$

$$=ye^y.$$

भाग $(xy+1)$ के संगत विशिष्ट समाकल (Particular Integral) है:

$$=\frac{1}{(D-1)(D-D'+1)}(xy+1)$$

$$-\{1-D\}^{-1}\{1+(D-D')\}^{-1}(xy+1)$$

$$=-\{1+D+D^2+.....\}\{1-(D-D')+(D-D')^2-.....\}(xy+1)$$

$$=-\{1+D+D^2+.....\}\{(xy+1)-(y-x)-2\}$$

$$=-\{1+D+D^2+.....\}(xy-y+x-1)$$

$$=-\{(xy-y+x-1)+(y+1)\}$$

$$=-(xy+x)$$

$$=-x(y+1)$$

$$\therefore \qquad z = e^x\varphi_1(y) + e^y\varphi_2(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x+2y) + ye^y - x(y+1)$$

टिप्पणी

5.5 अचर गुणाकों वाले समीकरणों में परिवर्तनीय आंशिक अवकल समीकरण

समीकरण $f(xD, yD')z = V(x,y)$

जहां $f(xD, yD') = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s D^r D'^s, c_{rs} =$ नियतांक (5.51)

निम्न प्रतिस्थापन के द्वारा अचर गुणांकों वाले रैखिक आंशिक अवकल समीकरण में समानयन योग्य (Reducible) होता है:

$$u = \log x, v = \log y \tag{5.52}$$

समीकरण (5.52) के प्रतिस्थापन से,

$$xD = x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$= x\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} = d \text{ (माना कि)}$$

तथा $$x^2D^2 = x^2D\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

$$= x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u}$$

$$= d(d-1)$$

इसलिए $x^rD^r = d(d-1)(d-2).....(d-\overline{r-1})$

तथा $y^sD'^s = d'(d'-1)(d'-2)...(d'-\overline{s-1})$

इस प्रकार $f(xD, yD') = \sum c_{rs} d(d-1).....(d-\overline{r-1})\, d'(d'-1).....(d'-\overline{s-1})$

$$= g(d, d')$$

यहां $g(d, d')$ में गुणांक नियतांक (Constants) हैं।

तब प्रतिस्थापन से समीकरण (5.51) इसमें परिवर्तित हो जायेगा:

$$g(d, d')z = V(e^u, e^v)$$

या $$g(d, d')z = U(u, v) \tag{5.53}$$

समीकरण (5.53) को उन विधियों से हल किया जा सकता है जिनका अचर गुणांकों वाली आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए वर्णन किया गया है।

उदाहरण 5.18 : निम्न अवकल समीकरण को हल करें:

$$\left(x^2D^2 - 4xyDD' + 4y^2D'^2 + 6yD'\right)z = x^3y^4$$

हल: $u = \log x$ तथा $v = \log y$ रखने पर समीकरण को इस रूप में परिवर्तित (Reduce) किया जा सकता है:

$$\{d(d-1) - 4dd' + 4d'(d'-1) + 6d'\}z = e^{3u+4v}$$

या $\left\{(d-2d')^2 - (d-2d')\right\}z = e^{3u+4v}$

या $(d-2d')(d-2d'-1)z = e^{3u+4v}$

या $(d-2d')(d-2d'-1)z = e^{3u+4v}$

पूरक फलन (Complementary Function) है: $\phi_1(2u+v) + e^u\phi_2(2u+v)$

$$= \phi_1(\log x^2y) + x\phi_2(\log x^2y)$$

$$= \psi_1(x^2y) + x\psi_2(x^2y)$$

तथा विशिष्ट समाकलन (Particular Integral) है: $\dfrac{1}{(d-2d')(d-2d'-1)}e^{3u+2v}$

$$= \frac{1}{30}e^{3u+4v}$$

$$= \frac{1}{30}x^3y^4$$

$\therefore$ $$z = \psi_1(x^2y) + x\psi_2(x^2y) + \frac{1}{30}x^3y^4.$$

उदाहरण 5.19 : $\left(x^2D^2 - y^2D'^2 - yD' + xD\right)z = 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल: $u = \log x$

$v = \log y$ रखने पर

दी गयी समीकरण इस रूप में परिवर्तित (Reduce) हो जायेगी:

$$\{d(d-1) - d'(d'-1) - d' + d\}z = 0$$

$\Rightarrow$ $$\left(d^2 - d'^2\right)z = 0$$

सहायक समीकरण (Auxiliary Equation) है:

$$m^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $$m = 1, -1$$

$\Rightarrow$ $$z = \phi_1(v+u) + \phi_2(v-u)$$

टिप्पणी

$$= \phi_1(\log xy) + \phi_2\left(\log\frac{y}{x}\right)$$

$$= \Psi_1(xy) + \Psi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

उदाहरण 5.20 : निम्न समीकरण का हल ज्ञात करें:

$$\left(x^2D^2 + 2xyDD' + y^2D'^2\right)z + nz = n(xD + yD')z + x^2 + y^2 + x^3$$

हलः $u = \log x$

तथा $v = \log y$ रखने पर, समीकरण इस रूप में परिवर्तित हो जायेगी

$$\{d(d-1) + 2dd' + d'(d'-1)\}z - n(d+d')z + nz = e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}$$

या $$\left\{(d+d')^2 - (d+d')\right\}z - n(d+d')z + nz = e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}$$

या $$\{(d+d')(d+d'-1) - n(d+d') + n\}z = e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}$$

या $$\left\{(d+d')^2 - (n+1)(d+d') + n\right\}z = e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}$$

या $$(d+d'-n)(d+d'-1)z = e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}$$

पूरक फलन C.F. = $e^{nu}\phi_1(u-v) + e^u\phi_2(u-v)$

$$= x^n\psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

P.I. $$= \frac{1}{(d+d'-n)(d+d'-1)}\left\{e^{2u} + e^{2v} + e^{3u}\right\}$$

$$= \frac{1}{2-n}e^{2u} + \frac{1}{2-n}e^{2v} + \frac{1}{(3-n)^2}e^{3u}$$

$$= -\frac{x^2+y^2}{n-2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{n-3}x^3$$

$$\therefore \quad z = x^n\psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2+y^2}{n-2} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{n-3}$$

उदाहरण 5.21 : $\left(x^2D^2 - xyDD' - 2y^2D'^2 + xD - 2yD'\right)z = \log\frac{y}{x} - \frac{1}{2}$ को हल करें।

हलः $u = \log x$

तथा $v = \log y$ रखने पर हमारा समीकरण इस रूप में परिवर्तित (Reduce) हो जायेगा,

$$\{d(d-1)-dd'-2d'(d'-1)+d-2d'\}z = v-u-\frac{1}{2}$$

$$(d^2-dd'-2d'^2)z = v-u-\frac{1}{2}$$

या $$(d-2d')(d+d')z = v-u-\frac{1}{2}$$

पूरक फलन $$\text{C.F.} = \phi_1(2u+v)+\phi_2(u-v)$$

$$= \psi_1(x^2y)+\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

विशिष्ट समाकल $$= \frac{1}{(d-2d')(d+d')}\left(v-u-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{d-2d'}\cdot\frac{1}{d}\left\{1-\frac{d'}{d}\cdots\right\}\left(v-u-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{d-2d'}\cdot\frac{1}{d}\left\{v-u-\frac{1}{2}-u\right\}$$

$$= \frac{1}{d-2d'}\cdot\left(uv-u^2-\frac{1}{2}u\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left\{1+\frac{2d'}{d}+\frac{4d'^2}{d^2}+\cdots\right\}\left(uv-u^2-\frac{1}{2}u\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left\{uv-u^2-\frac{1}{2}u+u^2\right\}$$

$$= \frac{u^2v}{2}-\frac{u^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}(\log x)^2\log y-\frac{1}{4}(\log x)^2$$

$\therefore$ $$z = \psi_1(x^2y)+\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}(\log x)^2\log y-\frac{1}{4}(\log x)^2.$$

उदाहरण 5.22 : निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिएः

$$(x^2D^2+2xyDD'+y^2D'^2)z = (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

हल : $u = \log x$

$v = \log y$ रखने पर समीकरण इस रूप में परिवर्तित (Reduce) हो जायेगा

$$\{d(d-1)+2dd'+d'(d'-1)\}z = (e^{2u}+e^{2v})^{\frac{n}{2}}$$

या $$\{(d+d')^2-(d+d')\}z = (e^{2u}+e^{2v})^{\frac{n}{2}}$$

टिप्पणी

या $$(d+d')(d+d'-1)z=\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$$

पूरक फलन $$=\phi_1(u-v)+e^u\phi_2(u-v)$$

$$=\phi_1\left(\log\frac{x}{y}\right)+x\phi_2\left(\log\frac{x}{y}\right)$$

$$=\Psi_1\left(\frac{x}{y}\right)+x\Psi_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

विशिष्ट समाकल $$=\frac{1}{(d+d')(d+d'-1)}\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$Z=\dfrac{1}{d+d'-1}\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$ प्रतिस्थापित करने पर,

या $$\frac{\partial Z}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial v}=Z+\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$$

सहायक समीकरण (Subsidiary Equations) निम्न हैः

$$\frac{du}{1}=\frac{dv}{1}=\frac{dZ}{Z+\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

समीकरण के दो स्वतंत्र समाकल (Independent Integrals) निम्न प्रकार से दिए जाएंगेः

$$u-v=\text{नियतांक}=a \text{ (माना कि)}$$

तथा $$\frac{dZ}{dv}-Z=\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=e^{nv}(e^{2a}+1)^{\frac{n}{2}}$$

चूंकि यह समीकरण रैखिक (Linear) है इसलिए,

$$Ze^{-v}=\frac{e^{(n-1)v}}{(n-1)}\left(e^{2a}+1\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \quad Z=\frac{e^{nv}}{n-1}\left(e^{2a}+1\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)}$$

$\therefore$ विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{d+d'}\left\{\dfrac{\left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}}{n-1}\right\}$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{(n-1)} \int_{a=v-u} \left\{ e^{2u} + e^{2a+2u} \right\}^{\frac{n}{2}} du$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \int (e^{2a}+1)^{\frac{n}{2}} \int e^{nu} du \right\}_{a=v-u}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ e^{nu} \left(e^{2a}+1\right)^{\frac{n}{2}} \right\}_{a=v-u}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left(e^{2u}+e^{2v}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \qquad z = \psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{n(n-1)}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

उदाहरण 5.23: $\left(x^2D^2 - 2xyDD' + y^2D'^2 - xD + 3yD'\right)z = \frac{8y}{x}$ को हल करें।

हल: $u = \log x$

$v = \log x$ रखने पर समीकरण इस रूप में परिवर्तित (Reduce) हो जायेगा,

$$\left\{d(d-1) - 2dd' + d'(d'-1) - d + 3d'\right\} z = 8e^{v-u}$$

या $$\left((d-d')^2 - 2(d-d')\right) z = 8e^{v-u}$$

या $$(d-d')(d-d'-2)z = 8e^{v-u}$$

पूरक फलन $$= \phi_1(u+v) + e^{2u}\phi_2(u+v)$$

$$= \psi_1(xy) + x^2\psi_2(xy)$$

विशिष्ट समाकल $$= 8.\frac{1}{(d-d')(d-d'-2)} e^{v-u}$$

$$= e^{v-u}$$

$$= \frac{y}{x}$$

$$\therefore \qquad z = \psi(xy) + x^2\psi_2(xy) + \frac{y}{x}$$

उदाहरण 5.24: $\left(x^2D^2 + 2xyDD' + y^2D'^2\right)z = x^m y^n$ को हल करें।

हल: $u = \log x$

$v = \log y$ रखने पर समीकरण इस रूप में परिवर्तित (Reduce) हो जायेगा,

$$\{d(d-1) + 2dd' + d'(d'-1)\} z = e^{mu+nv}$$

या $$\left\{(d+d')^2 - (d+d')\right\} z = e^{mu+nv}$$

टिप्पणी

या $\quad (d+d')(d+d'-1)z = e^{mu+nv}$

पूरक फलन $\quad = \phi_1(u-v) + e^u \phi_2(u-v)$

$$= \psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

विशिष्ट समाकल $\quad = \dfrac{1}{(d+d')(d+d'-1)} e^{mu+nv}$

$$= \frac{1}{(m+n)(m+n-1)} e^{mu+nv}$$

$$= \frac{1}{(m+n)(m+n-1)} x^m y^n$$

$$\therefore \quad z = \psi_1\left(\frac{x}{y}\right) + x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{(m+n)(m+n-1)} x^m y^n .$$

अपनी प्रगति जांचिए

4. अचर गुणांकों वाली समरूप रैखिक समीकरणों को लिखिए।
5. गैर–समरूप समीकरण को कब समानयन योग्य कहा जाता है?
6. अचर गुणांकों वाली आंशिक अवकल समीकरणों में समानयन योग हेतु समीकरण लिखिए।

5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. अचर गुणांकों के साथ रैखिक अवकल समीकरण निम्न स्वरूप के होते हैं:

   $$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

   जहां $P_1, P_2, \dots, P_n$ नियतांक (अचर) है तथा Q, x का फलन है।
2. जब $m_1 = m_2$ तब पूरक फलन होगा:

   जहां $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{m_1 x}$ तथा c_1 विवेकाधीन या स्वैच्छ c_2 नियतांक है।
3. $F(D)\, y = f(x)$ का कोई विशिष्ट हल उसका विशिष्ट समाकल या P.I. कहलाता है। $F(D)y = f(x)$ के P.I. या विशिष्ट समाकल को सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखा जाता है:

   $\text{P.I.} = \dfrac{1}{F(D)} \{f(x)\}$ जहां $F(D)$ संचालक या संकेतक है।
4. माना अचर गुणों वाला समरूप रैखिक समीकरण निम्न है

   $$f(D, D')z = V(x, y)$$

तब यदि $f(D, D') = A_0 D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D_2' + \cdots + A_n D'^n$

जहां $A_1, A_2, \cdots, A_n$ अचर या नियतांक हैं।

5. यदि सांकेतिक फलन $f(D, D')$ को ऐसे गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक D तथा D' में प्रथम कोटि का हो तो समीकरण को समानयन योग्य कहते हैं और ऐसा नहीं होने पर असमानयन योग्य कहते हैं।

6. समीकरण $f(xD, yD')z = V(x, y)$

   जहां $f(xD, yD') = \sum_{r,s} c_{rs} x^r y^s D^r D'^s, c_{rs} =$ नियतांक

   निम्न प्रतिस्थापन के द्वारा अचर गुणांकों वाले रैखिक आंशिक अवकल समीकरण में समानयन योग (Reducible) होता है:

   $u = \log x, v = \log y$

5.7 सारांश

- nवीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का सामान्य रूप निम्न प्रकार होता है:

  $$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

  जहां $P_1, P_2 \ldots, P_n$ तथा Q एकमात्र x के फलन हैं या नियतांक हैं।
- संपूरक फलन (C.F.) जो समानीत समीकरण का सम्पूर्ण प्रारम्भिक है तथा निम्न स्वरूप वाला होगा,

  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ n विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक धारण करता है।
- जब $m_1 \neq m_2$ तब $C.F.\ y = c_1 e^{m1x} + c_2\, e^{m2x}$ होगा

  जहां c_1 तथा c_2 विवेकाधीन या स्वैच्छ नियतांक है।
- जब $m_1 = m_2$ तब पूरक फलन (C.F.) होगा:

  जहां $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{m1x}$ तथा c_1 विवेकाधीन या स्वैच्छ c_2 नियतांक है।
- यदि सहायक समीकरण (A.U) के दो मूल m_1 तथा m_2 समान हैं और प्रत्येक m के बराबर है तब सामान्य हल का संगत भाग $(c_1 + c_2 x)\, e^{mx}$ होगा और यदि तीन मूल m_3, m_4, m_5 α के बराबर होंगे तो हल का संगत भाग $(c_3 + c_4 x + c_5 x^2)\, e^{\alpha x}$ होगा तथा अन्य अलग–अलग होगें तो सामान्य हल होगा:

  $y = (c_1 + c_2 x)\, e^{mx} + (c_3 + c_4 + c_5 x^2)\, e^{\alpha x} + c_6\, e^{m6x} + \ldots\ldots + c_n e^{mnx}$
- यदि अधिकल्पित मूल का युग्म $\alpha \pm i\beta$ दो बार आया है तब सामान्य हल का संगत भाग निम्न होगा:

  $$e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x]$$

- यदि दो मूल (वास्तविक) m तथा $-m$ हैं, सामान्य हल का संगत भाग $c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$ होगा,

$$= c_1 (\cosh mx + \sinh mx) + c_2 (\cosh mx - \sinh mx)$$

$$= c_1' \cosh mx + c_2' \sinh mx \text{ जहां } c_1' = c_1 + c_2, c_2' = c_1 - c_2$$

और सामान्य हल होगा।

- $F(D)\,y = f(x)$ का कोई विशिष्ट हल उसका विशिष्ट समाकल या P.I. कहलाता है। $F(D)y = f(x)$ के P.I. को सांकेतिक रूप से निम्न प्रकार से लिखा जाता है:

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{f(x)\} \text{ जहां } F(D) \text{ संचालक है।}$$

- यदि $\dfrac{1}{F(D)} = \dfrac{a_1}{D-m_1} + \dfrac{a_2}{D-m_2} + \ldots.. + \dfrac{a_n}{D-m_n}$ जहां a_i तथा $m_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ नियतांक हैं तब,

$$\frac{1}{F(D)}\{f(x)\} = a_1 e^{m_1 x}\int f(x)e^{-m_1 x}dx + a_2 e^{m_2 x}\int f(x)e^{-m_2 x}dx + \ldots + a_n e^{m_n x}\int f(x)e^{-m_n x}dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i e^{m_i x}\int f(x)e^{-m_i x}dx$$

- $f(D)\,y = e^{mx}$ जहां m एक नियतांक है।

तब $\text{P.I.} = \dfrac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} = \dfrac{e^{mx}}{F(m)}$ if $F(m) \neq 0$

यदि $F(m) = 0$ तब हम D को $D + m$ से $F(D)$ में प्रतिस्थापित करते हैं,

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{e^{mx}\} = e^{mx} \cdot \frac{1}{F(D+m)}\{1\}$$

- $[F(D)]^{-1}$ को द्विपद श्रेणी में आरोही घातों में D से D^n तक विस्तारित करते हैं और फिर विस्तार के प्रत्येक पद के साथ x^n को संचालित करते हैं। विस्तार में D^n से परे जो पद है उन पर विचार करने की आवश्यकता नहीं होती हालांकि उनके x^n पर संचालक का परिणाम शून्य आता है।

- दो स्वतंत्र चरों में द्वितीय कोटि की इस आंशिक अवकल समीकरण पर विचार कीजिए।

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

यहां $A, B, C, D, E, F,$ तथा G x तथा y के फलन हैं।

- दीर्घवृत्तीय प्रकार की यदि $B^2 - 4AC < 0$

परवलयिक प्रकार की यदि $B^2 - 4AC = 0$

अतिपरवलयिक प्रकार की यदि $B^2 - 4AC > 0$

- यदि सांकेतिक फलन $f(D, D')$ को ऐसे गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक D तथा D' में प्रथम कोटि का हो तो समीकरण को समानयन योग्य कहते हैं और ऐसा नहीं होने पर असमानयन योग्य (Irreducible) कहते हैं।

5.8 मुख्य शब्दावली

- **विशिष्ट समाकल** : $F(D)\,y = f(x)$ का कोई विशिष्ट हल उसका विशिष्ट समाकल या P.I कहलाता है। $F(D)y = f(x)$ के P.I. या विशिष्ट समाकल को सांकेतिक रूप से इस प्रकार लिखा जाता है:

$$\text{P.I.} = \frac{1}{F(D)}\{f(x)\}$$ जहां $F(D)$ संचालक है।

- **अचर गुणांकों वाले गैर–समरूप रैखिक समीकरण** : यदि समीकरण के बांये पक्ष (L.H.S) के सभी पद समान कोटि के नहीं है तो समीकरण को गैर–समरूप समीकरण कहा जाता है।
- **समानयन योग्य समीकरण** : यदि सांकेतिक फलन $f(D, D')$ को ऐसे गुणनखण्डों में वियोजित किया जा सकता है जिनमें से प्रत्येक D तथा D' में प्रथम कोटि का हो तो समीकरण को समानयन योग्य कहते हैं और ऐसा नहीं होने पर असमानयन योग्य कहते हैं।

5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. उपयुक्त उदाहरणों के साथ आंशिक अवकल समीकरणों को परिभाषित करें।
2. विशिष्ट समाकलन ज्ञात करने का नियम दें।
3. आप आंशिक अवकल समीकरण को कोटि को कैसे पहचानेंगे?
4. आप आंशिक अवकल समीकरण की कोटि कैसे निर्धारित करेंगे?
5. द्वितीय तथा उच्च कोटियों के आंशिक अवकल समीकरणों में क्या अंतर है?
6. द्वितीय कोटि की आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण कैसे निर्धारित करेंगे?
7. दो स्वतंत्र चरों में द्वितीय कोटि की आंशिक अवकल समीकरण की व्याख्या करें।
8. पूरक फलन नियम ज्ञात करने की विधि की व्याख्या करें।
9. दीर्घवृत्तीय, परवलयिक तथा अतिपरवलयिक प्रकार के समीकरणों के उदाहरण दें।
10. अचर गुणांकों वाले समरूप तथा गैर–समरूप समीकरणों को परिभाषित करें।
11. अचर गुणांकों वाले समीकरणों में परिवर्तनीय आंशिक अवकल समीकरण के उदाहरण दें।

टिप्पणी

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(D^2 + DD'^s - 1D'^3\right)z = 0$.
   (ii) $\left(D^3 + 3D^2D' - 4D'^3\right)z = 0$.
2. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(D^2 + 2DD' + D'^2\right)z = 12xy$.
   (ii) $\left(D^2 - 2DD' - 15D'^2\right)z = 12xy$.
   (iii) $\left(D^2 - 6DD' - 9D'^2\right)z = 12x^2 + 16xy$.
   (iv) $\left(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3\right)z = x^2 + xy^2 + y^3$.
   (v) $\left(D^2D' - 2DD'^2 + D'^3\right)z = \frac{1}{x^2}$.
3. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(D^2 - DD' - 2D'^2\right)z = x - y$.
   (ii) $\left(D^2 - 3DD' + 2D'^2\right)z = x + y$.
   (iii) $\left(4D^2 - 4DD' + D'^2\right)z = 16\log(x + 2y)$.
   (iv) $\left(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3\right)z = \cos(x - y) + x^2 + xy^2 + y^3$.
   (v) $\left(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3\right)z = \sin(x + 2y) + e^{3x+y}$.
   (vi) $\left(D^3 - 3DD'^2 + 2D'^3\right)z = \sqrt{x - 2y}$.
   (vii) $\left(D^3 - 4D^2D' + 5DD'^2 - 2D'^3\right)z = e^{y+2x} + \sqrt{y + x}$.
4. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(D^3 - 3DD'^2 - 2D'^3\right)z = \cos(x + 2y)$.
   (ii) $\left(D^2 + 5DD' + 5D'^2\right)z = x\sin(3x - 2y)$.
5. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(D^2 - Dd' - 2D'^2\right)z = (y - 1)e^x$.
   (ii) $\left(D^3 - 3DD'^2 - 2D'^3\right)z = \cos(x + 2y) - e^y(3 + 2x)$.
6. दिए गए समीकरणों को हल करें :
   (i) $\left(DD' + D'^2 - 3D'\right)z = 0$.
   (ii) $(2D + D' - 1)^2(D - 2D' + 2)^3 z = 0$.

7. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(2D^2 - D'^2 + D)z = 0$.

(ii) $(D^2 + DD' + D + D' + 1)z = 0$.

8. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(D - D' - 1)(D + D' - 2)z = e^{2x-y}$.

(ii) $(D^2 - D')z = e^{x+y}$.

9. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(D^2 - DD' - 2D)z = \cos(3x + 4y)$.

(ii) $(D^2 - D')z = A\cos(lx + my)$, जहां A, l, m नियतांक है।

10. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(D = D' - 1)(D + 2D' - 3)z = 4 + 3x + 6y$.

(ii) $(D^3 - DD'^2 - D^2 + DD')z = \frac{x+2}{x^3}$.

(iii) $(D^2 - D')y = 2y - x^2$.

11. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(D - D'^2)z = \cos(x - 3y)$.

(ii) $(D + D' - 1)(D + D' - 3)(D + D')z = e^{x+y}\sin(2x + y)$.

(iii) $(D^2 + DD' + D' - 1)z = 4\sin h\ x$.

(iv) $(D^2D' + D'^2 - 2)z = {}^{2y}\sin 3x - e^{\infty}\cos 2y$.

12. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $(x^2D^3 - y^3D'^2)z = xy$.

(ii) $(x^2D^2 + 2xyDD' + y^2D'^2)z = x^2y^2$.

(iii) $(x^2D^2 - 2xyDD' - 3y^2D'^2 + xD - 3yD')z = x^2y\cos(\log x^3)$.

13. हल करें : $(D^3 - 2D^2D' - DD'^2 + 2D'^3)z = e^{x+y}$.

14. हल करें : $(D^3 + D'^3 + D''^3 - 3DD'D'')u = x^3 = 3xyz$.

15. दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $r = x^2 e^y$.

(ii) $xys = 1$.

16. दिए गए समीकरणों को हल करें :

    (i) $t - xq = -\sin y - x\cos y$.

    (ii) $t - xq = x^2$.

    (iii) $yt - q = xy$.

17. दिए गए समीकरणों को हल करें :

    (i) $xr + ys + p = 10xy^3$.

    (ii) $2yt - xs + 2q = 4yx^3$.

    (iii) $z + r = x\cos(x + y)$.

18. दिए गए अवकल समीकरण $r - 2yp + y^2 z = (y-2)e^{2x+3y}$ को हल करें।

5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

K. P. Gupta and J. K. Goyal. 2013. *Integral Transform*. Meerut (UP): Pragati Prakashan.

Sharma, J. N. and R. K. Gupta. 2015. *Differential Equations* (Paperback Edition). Meerut (UP): Krishna Prakashan Media (P) Ltd.

Raisinghania, M. D. 2013. *Ordinary and Partial Differential Equations*. New Delhi: S. Chand And Company Limited.

Coddington, Earl A. and N. Levinson. 1972. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.

Coddington, Earl A. 1987. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Prentice Hall of India.

Boyce, W. E. and Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equations*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons.

Sneddon, I. N. 1986. *Elements of Partial Differential Equations*. New York: McGraw-Hill Education.

Somasundaram, D. 2002. *Ordinary Differential Equations*. Chennai: Narosa Publishing House.