बी.एस.सी./बी.ए., तृतीय वर्ष

गणित, द्वितीय प्रश्नपत्र

वास्तविक एवं सम्मिश्र विश्लेषण

(REAL AND COMPLEX ANALYSIS)

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

Reviewer Committee

1. Dr. Anita Mandloi
   Professor
   Shyama Prasad Mukharjee Govt. Science & Commerce College Benazir, Bhopal (MP)

2. Dr. Manoj Shukla
   Professor
   IEHE, Bhopal

3. Dr. Neelam Wasnik
   Assistant Professor
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

Advisory Committee

1. Dr. Jayant Sonwalkar
   Hon'ble Vice Chancellor
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal (M.P.)

2. Dr. L.S. Solanki
   Registrar
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal (M.P.)

3. Dr. Neelam Wasnik
   Assistant Professor
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

4. Dr. Anita Mandloi
   Professor
   Shyama Prasad Mukharjee Govt. Science & Commerce College Benazir, Bhopal (MP)

5. Dr. Manoj Shukla
   Professor
   IEHE, Bhopal

COURSE WRITERS

Dr Pratiksha Saxena, Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, Gautam Buddha University, Greater Noida
Units (1, 2.0-2.1, 2.2-2.3, 2.4, 2.5-2.7, 2.8-2.12, 3, 4, 5.0-5.2)
Dr Bikas Chandra Bhui, Head, Mathematics Department, Meghnand Saha Institute of Technology, Kolkata
Prof. Dipak Chatterjee, Distinguished Professor, St Xavier's College, Kolkata
Unit (5.3-5.4, 5.5-5.6, 5.7-5.11)

Copyright © Reserved, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

All rights reserved. No part of this publication which is material protected by this copyright notice may be reproduced or transmitted or utilized or stored in any form or by any means now known or hereinafter invented, electronic, digital or mechanical, including photocopying, scanning, recording or by any information storage or retrieval system, without prior written permission from the Registrar, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal.

Information contained in this book has been published by VIKAS® Publishing House Pvt. Ltd. and has been obtained by its Authors from sources believed to be reliable and are correct to the best of their knowledge. However, the Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal, Publisher and its Authors shall in no event be liable for any errors, omissions or damages arising out of use of this information and specifically disclaim any implied warranties or merchantability or fitness for any particular use.

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

वास्तविक एवं सम्मिश्र विश्लेषण

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 रीमान समाकल, सतत एवं एकदिष्ट फलनों की समाकलनीयता, समाकलन का मूलभूत प्रमेय, समाकलनों के माध्य मान प्रमेय, दो चरों के वास्तविक मान, फलनों के आंशिक अवकलज एवं अवकलनीयता, स्कवार्ज एवं यंग के प्रमेय, अंतर्निहित फलन प्रमेय।	**इकाई 1** : समाकलन गणित, आंशिक अवकलज और अवकलनीयता **(पृष्ठ 3–42)**
इकाई–2 अनुचित समाकल एवं उनका अभिसरण, तुलना परीक्षण, एबेल एवं डिरिचलेट का परीक्षण, प्रचालिक फलनों के रूप में फ्रुलानी, समाकल, सातत्य, एक प्राचल के फलन के समाकल, अवकलनीयता एवं समाकलनीयता, अर्द्ध एवं पूर्ण अंतरालों की फूरियर श्रेणी।	**इकाई 2** : असंगत समाकलन, अभिसरण और फूरियर शृंखला **(पृष्ठ 43–100)**
इकाई–3 दूरीक समष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण, सामीप्य, सीमा बिन्दु, आंतरिक बिन्दु, विवृत एवं संवृत समुच्चय, संवरक एवं अभ्यंतर, परिसीमा बिन्दु, दूरीक समष्टि की उपसमष्टि, कॉउची अनुक्रम, पूर्णता, कैंटर का प्रतिच्छेदन प्रमेय, संकुचन सिद्धांत, पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में वास्तविक संख्यायें, सघन उपसमुच्चय, बैयर श्रेणी प्रमेय, पृथक्करण द्वितीय गणनीय एवं प्रथम गणनीय समष्टि।	**इकाई 3** : दूरीक समष्टि **(पृष्ठ 101–143)**
इकाई–4 सतत फलन, विस्तार प्रमेय, एक समान सातत्य, सुसंहिति (सघनता), अनुक्रमणीय सहतता, पूर्ण परिबद्ध समष्टि, परिमित प्रतिच्छेदन गुण, सतत फलन एवं संहत (सघन) समुच्चय, संबद्धता।	**इकाई 4** : निरंतर या सतत फलन और सघनता **(पृष्ठ 145–181)**
इकाई–5 सम्मिश्र संख्या क्रमित युग्म के रूप में, सम्मिश्र संख्या का ज्यामितीय निरुपण, सम्मिश्र फलनों की सातत्यता और अवकलनीयता, विश्लेषिक फलन, कॉउची–रीमान समीकरण, हरात्मक फलन, मोबियस रूपांतरण, स्थिर बिन्दु, तिर्यक अनुपात, प्रतिलोम बिन्दु, कनफॉर्मल (अनुकोण) फलन।	**इकाई 5** : सम्मिश्र संख्याएं और विश्लेषणात्मक फलन **(पृष्ठ 183–230)**

विषय–सूची

परिचय

टिप्पणी

गणित में, वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis) गणितीय विश्लेषण की वह शाखा है जो वास्तविक संख्याओं, अनुक्रमों और वास्तविक संख्याओं की शृंखला और वास्तविक अवकलनीयता के व्यवहार का अध्ययन करती है। वास्तविक मानों के अनुक्रमों और फलनों के कुछ विशेष गुण हैं जो वास्तविक विश्लेषण के अध्ययन में उपयोगी हैं, उदाहरण के लिए अभिसरण, सीमा, निरंतरता, अवकलनीयता और समाकलनीयता।

वास्तविक विश्लेषण जटिल विश्लेषण से अलग होता है, जटिल या सम्मिश्र विश्लेषण वास्तव में जटिल या सम्मिश्र संख्याओं और उनके फलनों के अध्ययन से संबंधित होता है। एक जटिल या सम्मिश्र संख्या वह संख्या है जिसे $a + bi$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, और i समीकरण $x^2 = -1$ का एक हल है। क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करती है, इसलिये i को एक काल्पनिक संख्या कहा जाता है। जटिल या सम्मिश्र संख्या $a + bi$ के लिए, a को वास्तविक भाग कहा जाता है, और b को काल्पनिक भाग कहा जाता है। ऐतिहासिक नामकरण काल्पनिक होने के बावजूद, जटिल या सम्मिश्र संख्याओं को गणितीय विज्ञानों में वास्तविक संख्याओं के समान वास्तविक माना जाता है।

एक विश्लेषणात्मक फलन वह फलन है जिसे एक अभिसरण घात शृंखला द्वारा दर्शाया जाता है। जब वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन और जटिल या सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन दोनों मौजूद हैं, तब श्रेणियां कुछ तरीकों से समान हैं, लेकिन कुछ समीकरणों में अलग हैं। प्रत्येक प्रकार के फलन असीम रूप से भिन्न होते हैं, लेकिन जटिल या सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन उन गुणों को प्रदर्शित करते हैं जो आम तौर पर वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन के लिए नहीं होते हैं। वास्तविक विश्लेषण की प्रमेयता वास्तविक संख्या रेखा की संरचना पर गहन रूप से निर्भर करती है। वास्तविक संख्या प्रणाली में एक अगणनीय समुच्चय (Uncountable Set) (R) होता है, साथ में दो द्विआधारी संचालन (Binary Operations) हैं जो कि + और – द्वारा चिह्नित किये जाते हैं, और एक क्रम या ऑर्डर को कोटि $<$ द्वारा चिह्नित किया जाता है।

संचालन तथा संक्रिया वास्तविक संख्याओं का एक क्षेत्र बनाते हैं और क्रम या कोटि के साथ, एक क्रमित सुव्यवस्थित क्षेत्र बनाते है। वास्तविक संख्या प्रणाली अद्वितीय पूर्ण क्रमित सुव्यवस्थित क्षेत्र है, इस अर्थ में कि कोई अन्य पूर्ण क्रमित सुव्यवस्थित क्षेत्र इसके लिए तुल्यकारिक (Isomorphic) है। सहज रूप से, पूर्णता का अर्थ है कि वास्तविक संख्या में कोई 'अंतराल' नहीं है। वास्तविक संख्याओं में विभिन्न जालक (Lattice) गुण होते हैं जो जटिल या सम्मिश्र संख्या में अनुपस्थित होते हैं। इसके अलावा, वास्तविक संख्याएं एक क्रम या कोटि के अनुसार क्षेत्र का निर्माण करती हैं, जिसमें धनात्मक संख्याओं का योगफल और गुणनफल भी धनात्मक होते हैं।

सम्मिश्र या जटिल विश्लेषण (Complex Analysis) जिसे सामान्यतः सम्मिश्र या जटिल चरों के फलनों का सिद्धान्त भी कहा जाता है, गणितीय विश्लेषण की एक शाखा है जिसमें सम्मिश्र या जटिल संख्याओं के फलनों का अध्ययन किया जाता है। यह

टिप्पणी

बीजीय ज्यामिति, संख्या सिद्धान्त, व्यावहारिक गणित सहित गणित की विभिन्न शाखाओं में उपयोगी है तथा इसी प्रकार तरल गतिकी, ऊष्मागतिकी, यांत्रिकी अभियान्त्रिकी (Mechanical Engineering) और विद्युतीय अभियान्त्रिकी (Electrical Engineering) सहित भौतिक विज्ञान (Physics) में भी उपयोगी है।

एक सम्मिश्र या जटिल फलन वह है जिसमें स्वतंत्र चर और आश्रित चर दोनों ही सम्मिश्र या जटिल संख्याएं हो। अधिक संक्षेप में सम्मिश्र या जटिल फलन वह फलन है जिसमें डोमेन (Domain) और उपडोमेन (Codomain) दोनों सम्मिश्र या जटिल संख्या के उपसमुच्चय हों। एक सम्मिश्र या जटिल फलन के लिए, स्वतंत्र चर और आश्रित चर दोनों को वास्तविक व काल्पनिक भागों में विभक्त किया जा सकता है।

इकाई एक में रीमान समाकल, सतत एवं एकदिष्ट फलनों की समाकलनीयता, समाकलन का मूलभूत प्रमेय, समाकलनों के माध्य मान प्रमेय, दो चरों के वास्तविक मान, फलनों के आंशिक अवकलज एवं अवकलनीयता, स्कवार्ज एवं यंग के प्रमेय का उदाहरण सहित विश्लेषण किया गया है।

इकाई दो में अनुचित समाकल एवं उनका अभिसरण, तुलना परीक्षण, एबेल एवं डिरिचलेट का परीक्षण, प्रचालिक फलनों के रूप में फ्रुलानी, समाकल, सातत्य, एक प्राचल के फलन के समाकल, अवकलनीयता एवं समाकलनीयता, अर्द्ध एवं पूर्ण अंतरालों की फूरियर श्रेणी का विस्तार से वर्णन है।

इकाई तीन में दूरीक समष्टि, सामीप्य, सीमा बिन्दु, आंतरिक बिन्दु, विवृत एवं संवृत समुच्चय, परिसीमा बिन्दु, कॉउची अनुक्रम, पूर्णता, कैंटर का प्रतिच्छेदन प्रमेय, संकुचन सिद्धांत, पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में वास्तविक संख्यायें, बैयर श्रेणी प्रमेय, पृथक्करण द्वितीय गणनीय एवं प्रथम गणनीय समष्टि के विषय में वर्णन किया गया है।

इकाई चार में सतत फलन, विस्तार प्रमेय, एक समान सातत्य, सुसंहिति (सघनता), अनुक्रमणीय सहतता, पूर्ण परिबद्ध समष्टि, परिमित प्रतिच्छेदन गुण, सतत फलन एवं संहत (सघन) समुच्चय, संबद्धता को उदाहरण सहित समझाया गया है।

इकाई पांच में सम्मिश्र या जटिल संख्या क्रमित युग्म के रूप में, सम्मिश्र या जटिल संख्या का ज्यामितीय निरुपण, सम्मिश्र फलनों की सातत्यता और अवकलनीयता, विश्लेषिक फलन, काउची–रीमान समीकरण, मोबियस रूपांतरण, स्थिर बिन्दु, तिर्यक अनुपात, प्रतिलोम बिन्दु, कनफॉर्मल (अनुकोण) फलन के विषय में विस्तार से वर्णन किया गया है।

इस पुस्तक 'वास्तविक एवं सम्मिश्र विश्लेषण' को एक सरल पुस्तक के रूप में व्यवस्थित किया गया है जिसमें वास्तविक एवं सम्मिश्र विश्लेषण की मूल अवधारणाओं का विस्तार से वर्णन किया गया है। पुस्तक में स्वाध्याय प्रणाली का प्रयोग किया गया है, जिसमें प्रत्येक इकाई का आरंभ उस इकाई के परिचय से होता है, तत्पश्चात इकाई के उद्देश्य आते हैं। पाठ के बीच–बीच में अपनी प्रगति जांचिए के प्रश्न समाविष्ट किये गए हैं। प्रभावी पुनर्कथन के लिये प्रत्येक पाठ के अंत में सारांश, मुख्य शब्दावली और स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास दिए गए हैं।

हमें विश्वास है कि यह पुस्तक विषय के सांगोपांग अध्ययन में विद्यार्थियों के लिये उपयोगी साबित होगी।

इकाई 1 समाकलन गणित, आंशिक अवकलज और अवकलनीयता

संरचना

1.0 परिचय

बर्नहार्ड रीमान (Bernhard Riemann) द्वारा बनाई गई रीमान समाकलन (Riemann Integral), एक अंतराल पर एक फलन के अभिन्न अंग की पहली कठोर परिभाषा थी। इसे 1854 में गौटिंगेन विश्वविद्यालय (Goettingen University) के विभाग में प्रस्तुत किया गया था, लेकिन 1868 तक पत्रिका में प्रकाशित नहीं किया गया था। कई फलन और व्यावहारिक अनुप्रयोगों के लिए, रीमान का मूल्यांकन कलन (Calculus) के मौलिक प्रमेय या संख्यात्मक एकीकरण द्वारा अनुमानित किया जा सकता है। जॉर्ज फ्रेडरिक बर्नहार्ड रीमान (Georg Friedrich Bernhard Riemann) एक प्रतिभाशाली जर्मन गणितज्ञ थे। उन्होंने विश्लेषण, संख्या सिद्धान्त और अवकल ज्यामिति के क्षेत्र में प्रभावी योगदान दिया जिसका उपयोग सामान्य आपेक्षिकता के विकास में भी किया गया। रीमान परिकल्पना के लिये ये विशेष रूप से प्रसिद्ध हैं।

कई चर के एक अवकलज का एक आंशिक अवकलज (Partial Derivative), उन चर में से एक के संबंध में इसका अवकलज है, जिसमें अन्य को स्थिर रखा गया है (जैसा कि कुल अवकलज के विपरीत है, जिसमें सभी चर अलग–अलग होते हैं)। आंशिक अवकलज (Partial Derivative) का उपयोग सदिश कलन (Vector Calculus) और अवकलन ज्यामिति में किया जाता है।

इस इकाई में आप रीमान समाकलन (Riemann Integral) सतत् (Continuous) एवं एकदिष्ट फलनों (Monotonic Functions) की समाकलनीयता (Integrability), समाकलन कलन (Integral Calculus) की आधारभूत प्रमेय, समाकलन कलन की मध्य मान प्रमेय (Mean Value Theorem) तथा आंशिक अवकलज (Partial Derivatives) के बारे में अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- रीमान समाकलन की व्याख्या कर पाएंगे;
- सतत और एकदिष्ट फलनों की समाकलनीयता को समझ पाएंगे;
- समाकलन कलन प्रमेय का वर्णन कर पाएंगे;
- समाकलन कलन की मध्य मान प्रमेय को समझ पाएंगे;
- आंशिक अवकलज की व्याख्या कर पाएंगे।

1.2 रीमान समाकलन

इस भाग में हम रीमान समाकलन (Reimann Integral) के विषय में अध्ययन करेंगे। हम जानते हैं कि समाकलन की शुरुआत एक वक्र के तहत क्षेत्र को खोजने के रूप में की गई है और यह समीकरण का अधिक परिष्कृत रूप है। समाकलन गणित का निर्माण बर्नहार्ड रीमान (Bernhard Riemann) द्वारा किया गया है और यह एक अंतराल पर एक फलन के अभिन्न भाग की पहली कठोर परिभाषा थी। समाकलन गणित को परिभाषित करने से पहले, हम अंतराल और समाकलन योग के विभाजन को परिभाषित करेंगे और तब यह समाकलन गणित को परिभाषित करने में सहायक सिद्ध होगा।

बंद अंतराल $[a, b]$ का एक **विभाजन** P, अंकों $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ का एक परिमित समुच्चय है, इस प्रकार,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

विभाजन के किसी भी दो लगातार अंकों के बीच अधिकतम अंतर को मानक या **विभाजन की आदर्श** या **जाल** (Mesh of the Partition) कहा जाता है और उसे *'P'* के रूप में चिह्नित किया जाता है। अर्थात्

$$|P| = \max \{x_j - x_{j-1}, j = 1 ... n\}$$

विभाजन P का परिशोधन एक और विभाजन P' है जिसमें P से सभी बिंदु होते हैं और कुछ अतिरिक्त बिंदु, फिर से परिमाण के क्रम से क्रमबद्ध होते हैं।

रीमान योग (Riemann Sum) में किसी भी आयाम के सामान्यीकृत स्थान का विकास शामिल है जिसमें माप बिंदु से बिंदु तक भिन्न हो सकते हैं। मान लीजिए कि F फलन बंद अंतराल में परिभाषित किया गया है *[a, b]*, और माना $\Delta [a, b]$ का एक विभाजन दिया है,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < < .... < x_{n-1} < x_n = b$$

जहां x_I चौड़ाई है। यदि a_i उप–बिंदु पर कोई i बिंदु है, तब योग

$\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i, x_{i-1} \le a_i x_i$, Δ विभाजन के लिए f का रीमान योग कहा जाता है।

यदि फलन f धनात्मक है, एक रीमान योग ज्यामितीय रूप (Geometric Form) से लंबाई $X_j - X_{j-1}$ और ऊंचाई $f(a_j)$ वाले आयतों के क्षेत्रों के एक योग के अनुकूल होता है। चलिए, हम एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

टिप्पणी

उदाहरण 1.1: n = 8 उप अंतराल में एक नियमित विभाजन के साथ, $[1,9]$ पर फलन $f(x) = 1/x$ के लिए रीमान योग की गणना कीजिए।

हल: माना कि $a = 1$, $b = 9$ और $n = 8$ है तो निम्नलिखित की गणना करें,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{9-1}{8} = 1.$$

$$x_i = a + i\Delta x = 1 + i, \text{ प्रत्येक } i \text{ के लिए}$$

$$f(a_i) = \frac{1}{1+i} \text{ प्रत्येक } i \text{ के लिए}$$

इसलिए,

$$\text{रीमान योग } = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$= 0.5 + 0.33 + 0.25 + 0.20 + 0.16 + 0.14 + 0.125 + .111$$

$$\mathbf{= 1.816}$$

निचले और ऊपरी रीमान समाकलन (Lower and Upper Riemann Integral): माना बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक वास्तविक एवं बाध्य फलन है। साथ ही माना p , $[a ,b]$ कोई भी विभाजन है। अब कल्पना करते हैं कि फलन f के अंतराल पर निम्नतम और उच्चतम क्रमशः हैं,

$$m_r = \inf\{f(x) : x_{r-1} \le x \le x_r\}$$
$$M_r = \sup\{f(x) : x_{r-1} \le x \le x_r\}$$

और

$$L(P, f) = \sum_{r=1}^{n} m_r \Delta x_r \text{ और } U(P, f) = \sum_{r=1}^{n} M_r \Delta x_r$$

फिर $L(P, f)$ को f का निचला रीमान योग (Lower Riemann Integral) कहा जाता है विभाजन P के संबंध में $[a, b]$ और $U(P,F)$, f का ऊपरी रीमान योग (Upper Riemann Integral) कहा जाता है विभाजन P के संबंध में $[a, b]$ स्पष्ट रूप से है।

हम जानते हैं कि सभी संख्याओं के समुच्चय $L(P, f)$ सभी संभावित विभाजनों के संबंध में $P[a, b]$ के ऊपर $M(b-a)$ से घिरा है और इसलिए $L(P, f)$ का एक उच्चतम (Supremum) मौजूद है $[a, b]$ से निचली रीमान समाकलन $L(P, f)$ का उच्चतम है।

सभी विभाजनों पर p और इसे दर्शाया गया है,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

उसी तरह, संख्याओं का समूह $U(P, f), m(b-a)$ के नीचे से घिरा हुआ है और इसलिए एक निम्नतम (Infimum) मौजूद है। $[a, b]$ का ऊपरी रीमान समाकलन, सभी p विभाजनों पर $U(P, f)$ का निम्नतम भाग है और इसे निम्न द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

प्रमेय 1.1 (डार्बोक्स प्रमेय [Darboux Theorem]) : माना कि f, $[a, b]$ पर परिभाषित एक बाध्य फलन है, तब $\forall \in \rangle 0$, इस प्रकार वहाँ एक बंधे हुए कार्य को परिभाषित किया जाए , फिर वहाँ $\partial \succ 0$ और $U(P,f) \prec \overline{\int_a^b} f + \in$ उपस्थित हैं, तथा $|P| \leq \partial$ के साथ सभी विभाजन P के लिए $L(P,f) \succ \underline{\int_a^b} f - \in$ ।

प्रमाण :

माना कि $\in \succ 0$ दिया गया है। जैसा कि सभी विभाजन P के लिए, $\overline{\int_a^b} f$ न्यूनतम है $U(P,f)$ का तथा $\int_a^b f$ उच्चतम है $L(P,F)$ का, इस प्रकार, दिये गये $\in \succ 0$ के लिए वहाँ P_1 तथा P_2 इस तरह उपस्थित हैं,

$$U(P_1,f) \prec \overline{\int_a^b} f + \in \tag{1.1}$$

और
$$L(P_2,f) \succ \underline{\int_a^b} f - \in \tag{1.2}$$

माना कि P_3, P_1 तथा P_2 का सामान्य परिशोधन है, तब न्यूनतम व उच्चतम के गुण से, हमारे पास है,

$$U(P_3, f) \leq U(P_1, f) \text{ और } L(P_3, f) \geq L(P_2, f) \tag{1.3}$$

अब समीकरणों (1.1), (1.2) और (1.3) से, हमारे पास है

और $U(P,f) \prec \overline{\int_a^b} f + \in$ सभी $L(P,f) \succ \underline{\int_a^b} f - \in$, विभाजनों के लिए P के साथ $|P| \leq \partial$ है।

टिप्पणी

1.3 सतत और एकदिष्ट फलनों की समाकलनीयता

हम जानते हैं कि एक फलन अपने डोमेन (Domain) **D** में एक बिंदु c पर निरंतर या सतत है हम जानते हैं कि एक फलन अपने डोमेन **D** में, एक बिन्दु c पर सतत है, यदि किसी दिये गये $\varepsilon>0$ के लिए वहाँ एक $\delta>0$ उपस्थित है, जैसे किः

यदि $x \in \mathbf{D}$ और $|x-c|<\delta$ तब $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$

एक फलन अपने डोमेन (Domain) **D** में सतत (Continuous) है यदि वह अपने डोमेन के प्रत्येक बिंदु पर सतत है।

केवल स्मरण रखने के लिए बता दें कि एकदिष्ट फलन वह फलन है जिसके लिए लगातार परिवर्तनशील चर के रूप में क्रमिक मान बढ़ते, घटते या स्थिर होते हैं।

एकदिष्ट व्यवहार के दृष्टिकोण से, हम निम्नलिखित श्रेणियों में फलन को वर्गीकृत करते हैं:

1. **अचर फलन (Constant Function)** : स्वतंत्र चर के रूप में फलन मान नहीं बदलते हैं।

   $f(x_1)=f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$

2. **दृढ़ता से बढ़ना (Strictly Increasing)** : स्वतंत्र चर के रूप में फलन मान परिवर्तन निम्न स्थिति के अनुसार बदलता रहता है,

   $f(x_1)\prec f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$

3. **गैर–ह्रासमान या वर्धमान (Non-Decreasing or Increasing)** : स्वतंत्र चर के रूप में फलन मान परिवर्तन निम्न स्थिति के अनुसार बदलता रहता है,

   $f(x_1)\le f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$

4. **दृढ़ता से कम होना (Strictly Decreasing)** : स्वतंत्र चर के रूप में फलन मान परिवर्तन, निम्न स्थिति के अनुसार बदलता रहता है,

   $f(x_1)\succ f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$

5. **गैर–वर्धमान या ह्रासमान** : स्वतंत्र चर के रूप में फलन मान परिवर्तन निम्न स्थिति के अनुसार बदलता रहता है,

   $f(x_1)\ge f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2,\ \forall x_1, x_2 \in X$

प्रमेय 1.2: यदि f, $[a,b]$ पर निरंतर या सतत है, तो $f \in R[a,b]$ या, अंतराल पर रीमान पूर्णांक है।

प्रमाण : जैसा कि फलन निरंतर है, यह $[a,b]$ पर भी बाध्य होगा। चूँकि निरंतर है और बंद अंतराल $[a,b]$ पर बाध्य है, f समान रूप से $[a,b]$ पर निरंतर या सतत है। इसलिए परिभाषा के अनुसार, किसी दिए गए $\in \succ 0$, के लिए, एक $\partial \succ 0$, मौजूद है। ऐसे हर बिंदु के लिए x_1, x_2 का $[a,b]$ $|f(x_1)-f(x_2)| \prec \frac{\in}{b-a}$ के लिये $|x_1-x_2| \prec \partial$ (1.4)

टिप्पणी

अब P को बंद अंतराल $[a,b]$ पर कोई भी विभाजन होने दें,

$P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ जैसे बिंदुओं का एक सीमित समूह है।

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \,|\, P \,| \prec \delta$

अब माना कि फलन f के अंतराल $[X_{R-1}, X_R]$ पर न्यूनतम M_r तथा उच्चतम M_r क्रमशः a_r तथा b_r हैं, तब $m_r = f(a_r)$ तथा $M_r = f(b_r)$ (1.5)

जैसा कि $|a_r - b_r| \prec \partial$, इसलिए समीकरण (1.4) से हमारे पास है,

$|f(a_r) - f(b_r)| \prec \frac{\in}{b-a}$

लेकिन $|f(a_r) - f(b_r)| = f(b_r) - f(a_r)$ क्योंकि $f(b_r) \geq f(a_r)$

$$= M_r - m_r \prec \frac{\in}{b-a}$$

अब विभाजन P के $[a, b]$ के लिए हमारे पास है,

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) = \sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta x_r \prec \sum_{r=1}^{n}\frac{\in}{b-a}.\Delta x_r$$

$$= \frac{\in}{b-a}\sum_{r=1}^{n}\Delta x_r = \frac{\in}{b-a}.(b-a) = \in$$

इसलिए प्रमेय 1.2 द्वारा f बंद अंतराल $[a,b]$ यानी $f \in R[a,b]$ पर पूर्णांक है।

प्रमेय 1.3: यदि f $[a, b]$ पर एकदिष्ट (Monotonic) है, तो $f \in R[a,b]$ या f अंतराल पर रीमान पूर्णांक है।

प्रमाण: मान लीजिए कि f बंद अंतराल $[a,b]$ पर एकदिष्ट बढ़ता हुआ फलन है, तब,

$f(x_1) \leq f(x_2)$ जब $x_1 \prec x_2$, $\forall x_1, x_2 \in X$

जैसा कि f बाध्य है और एकदिष्ट बढ़ता जा रहा है, तब निम्नतम $f = m_r = f(a)$ और उच्चतम $f = M_r = f(b)$.

माना कि P बंद अंतराल $[a, b]$ पर कोई भी विभाजन है, $P = \{x_0, x_1, x_2, ...x_n\}$ जैसे बिंदुओं का एक सीमित समूह है।

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ के साथ $|P| \prec \frac{\in}{f(b) - f(a) + 1}$.

अब $U(P,f) - L(P,f) = \sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)\Delta x_r$

$$= \sum_{r=1}^{n}[f(x_r) - f(x_{r-1})].\Delta x_r \leq \sum_{r=1}^{n}[f(x_r) - f(x_{r-1})].\frac{\in}{f(b) - f(a) + 1}$$

$$= \frac{\in}{f(b) - f(a) + 1}.[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1)$$

$$+.........+f(x_n)-f(x_{n-1})]$$

टिप्पणी

$$=\frac{\in}{f(b)-f(a)+1}.[f(x_n)-f(x_0)]$$

$$=\frac{\in}{f(b)-f(a)+1}.[f(x_n)-f(x_0)]\prec\in$$

इसलिए प्रमेय 1.3 द्वारा, f बंद अंतराल $[a,b]$ यानी $f\in R[a,b]$ पर पूर्णांक है।

यदि $f,[a,b]$ पर एकदिष्ट कम हो रहा है, तो $-f$, $[a,b]$ पर एकदिष्ट का वर्धमान फलन है और इसलिए $f.\in R\,[a,b]$ और $\int_a^{\bar{b}}-f(x)dx=\int_a -f(x)\,dx$

या $$-\int_a^{\overline{b}} f(x)dx=-\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

या $\int_a^{\overline{b}} f(x)dx=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ या f बंद अंतराल [a,b] यानी $f\in R[a,b]$ पर पूर्णांक है।

इसलिए यदि f, $[a, b]$ पर एकदिष्ट है, तो $f\in R[a,b]$ है।

1.4 समाकलन कलन का आधारभूत प्रमेय

समाकलन का आधारभूत या मूलभूत प्रमेय समाकलन एवं अवकलज के मध्य संबंध को दर्शाता है। हम जानते हैं कि व्युत्पन्न और पूर्णांकों को व्युत्क्रम फलनों के रूप में परिभाषित कर रहे हैं।

प्रमेय 1.4: f पर एक सतत फलन (Continuous Function) $[a,b]$ और $F\,[a,b]$ पर एक अवकलनीय फलन (Differentiable Function) होना चाहिए कि इस तरह $F'(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$

तब $$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

प्रमाण : माना कि $\phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, तब $\phi'(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$ (1.6)

परिकल्पना से, $F'(x)=f(x),\forall x\in[a,b]$ (1.7)

समीकरणों (1.6) और (1.7) से हमारे पास है, $F'(x)=\phi'(x),\forall x\in[a,b]$

या $F'(x)-\phi'(x)=0,\forall x\in[a,b]$

या $(\phi-F)'(x)=0,\forall x\in[a,b]$

टिप्पणी

या $(\phi - F)(x) = c$ कुछ वास्तविक संख्या के लिए $c \in R$

या $\phi(x) - F(x) = c \Rightarrow \phi(x) = F(x) + c, \forall x \in [a,b]$

अब $\phi(b) - \phi(a) = [F(b)+c] - [F(a)+c] = F(b) - F(a)$ (1.8)

और $\phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ और $\phi(b) = \int_a^b f(t)dt$

समीकरणों (1.8) में इन मानों को रखते हुए, हम प्राप्त करते हैं, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

या $\int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a)$

उदहारण 1.2: $\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ के अवकलज ज्ञात करें।

हल: माना कि $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

समाकल के मौलिक प्रमेय से हम जानते हैं कि e^{-t^2} ,*F(x)* का एक प्रति अवकलज (Antiderivatives) है व्युत्पन्न विरोधी है अब हमारे पास है, $\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt = F(x^2) - F(x)$

श्रृंखला के नियम का अर्थ है कि,

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} e^{-t^2} dt\right) = F'(x^2).2x - F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{x2}$$

उदाहरण 1.3: माना फलन *f*(*x*), [*a,b*] पर परिभाषित तथा सतत या निरंतर है। $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$ तथा $\int_a^x f(t)dt$ की तुलना करें।

हल: गणित के मौलिक प्रमेय का अर्थ है कि $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ और हम जानते हैं कि $\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]$ का प्रति अवकलज फलन $f(x)$ है, इसलिए

$$\int_a^x \frac{d}{dx} f(t)dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$$

इसलिए, $\int_a^x \frac{d}{dx} f(t)dt = [f(t)]_a^x = f(x) - f(a)$ जब तक *f(a)=0* न हो, तो अभिव्यक्ति (Expressions) अलग होते हैं।

उदाहरण 1.4: फलन $F(x)$ का मान इस तरह से ज्ञात करें कि $F'(x) = \sin(x^2)$ और $F(1) = 2$ हो।

हलः माना कि फलन का एक प्रति अवकलज $\sin(x^2)$ है जब कि $\phi(x) = 0$ हो। इस तरह से यदि दोनों फलन $F(x)=0$ और $\phi(x)$ एक ही फलन के प्रति अवकलज हैं, तो हमारे पास होना चाहिए,

$$F(x) = \phi(x) + C$$

कुछ विवेकाधीन संख्या C के लिए, इसलिए

$$F(1) = \phi(x) + C$$

जिसका अर्थ है $C=2$ इसलिए, $F(x) = \int_1^x \sin t^2 dt + 2$

उदाहरण 1.5: सीधी रेखा के नीचे क्षेत्र की गणना करें $y = f(x) = x$ तथा $x = 0$ और $x = 1$ या $\int_0^1 xdx$

हलः फलन $f(x) = x$ का एक प्रति अवकलज फलन $\phi(x) = \frac{x^2}{2}$ और $\phi'(x) = f(x)$ द्वारा दिया जाता है। अब कलन के मौलिक प्रमेय को प्रयोग करते हुए हमारे पास है,

$$\int_0^1 xdx = \phi(1) - \phi(0) = 1/2.$$

1.5 समाकलन कलन की माध्य मान प्रमेय

इस खंड में हम समाकलन और अवकलन के संचालन/क्रिया के बीच औपचारिक रूप के विषय में जान पाएंगे। हमें पहले माध्य मान प्रमेय के नए संस्करण की और एक अतिरिक्त परिभाषा की आवश्यकता है।

प्रमेय 1.5 : (समाकलन गणना के लिए औसत/माध्य मान प्रमेय) : यदि $f(x)$, $[a,b]$ पर निरंतर या संतत है तो $\exists \xi \in [a,b]$, जैसे कि

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

प्रमाण : यदि f अंतराल पर निरंतर या संतत है, तो उस पर अधिकतम और न्यूनतम है —M और m है इसलिए हमारे पास है,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

इसलिए हम एक संख्या $\lambda \epsilon [m, M]$ संतोषजनक पा सकते हैं,

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$$

लेकिन चूँकि $\lambda \in [m, M]$ और f माध्य प्रमेय द्वारा संतत है, हम जानते हैं कि एक संख्या, $\xi \in [a,b]$ है, जैसे कि $f(\xi) = \lambda$

परिभाषा 1: $[a, b]$ पर एक सतत हो तो हम इसकी अनिश्चितकालीन अवकलन फलन को परिभाषित करते हैं,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in [a, b]$$

प्रमेय 1.6 (कलन की मूलभूत प्रमेय या टोरिसेली–बैरो प्रमेय [Torricelli-Barrow]) : यदि $f(t)$ निरंतर है, $F(x)$ निरंतर है, अवकलनीय है और $F'(x) = f(x)$ है।

प्रमाण : माना कि,

$$\Delta F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

पिछले माध्य मान प्रमेय द्वारा हमारे पास यह है कि,

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x \quad \xi \in [x, x + \Delta x]$$

और इसलिए,

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

और f की निरंतरता से

$$F'(x) = f(x)$$

अनुप्रयोग (Applications)

$f(x)$ का एक प्राथमिक फलन $g(x)$ है, जो अवकलज के रूप में $\frac{d}{dx} g(x) = f(x)$ है।

प्रायः f के एक प्राथमिक को प्रतीक $\int f(x)dx$ (समाकलन के अधिकता के बिना) द्वारा निरूपित किया जाता है। चूँकि दो फलनों में एक ही अवकलज होता है, जो एक स्थिरांक से भिन्न होता है और चूँकि हमने देखा है कि $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, हम निम्न समीकरण के साथ f की सभी प्राथमिकताओं को चिह्नित कर सकते हैं, जिसे Φ से दर्शाया गया है।

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + c \quad c = \text{नियतांक}$$

$x = a$ लेने से $c = \Phi(a)$ प्राप्त होता है और $x = b$ लेने से हमें निम्न प्राप्त होता है,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

कभी–कभी हम पिछली अभिव्यक्ति को इस प्रकार लिखते हैं,

$$\Phi(x)\Big|_a^b$$

इसलिए महत्वपूर्ण विषय जिसका हमें मूल्यांकन करने की आवश्यकता है, वह यह है कि $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ का प्राथमिक है।

1.6 आंशिक अवकलज

आंशिक अवकलज (Partial Derivatives) : माना कि $z = f(x,y)$ दो स्वतंत्र चर x और y का एक फलन है। तब x के संदर्भ में z के आंशिक अवकलज, x के संदर्भ में z के सामान्य अवकलज हैं, जहाँ y को एक स्थिरांक के रूप में माना जाता है तथा इस प्रकार निरूपित किया जाता है।

$$fx \text{ या } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ या } \frac{\partial f}{\partial x}$$

इस प्रकार यदि $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a_1 b)}{h}$ मौजूद है, तो इस सीमा को $f(x, y)$ के संदर्भ में बिंदु (a, b) पर आंशिक अवकलज कहा जाता है और इसके द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$fx\ (a,\ b) \text{ या } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a,b)} \text{ या } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$$

माना कि $f : X \to R$ और $X \subseteq R^2$ यदि फलन f में x के प्रत्येक बिंदु पर vka'kd vodyt gSrks f, X पर आंशिक अवकलन है।

रिमार्क 1 : हमने परिभाषा के द्वारा जाना,

$$fx(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

$$fy(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} = \lim_{y\to b} \frac{f(a,b) - f(a,b)}{y-b}$$

रिमार्क 2 : दो चरों के फलनों के प्रकरण में उस बिंदु पर आंशिक अवकलज के अस्तित्व को उस बिंदु पर निरंतरता की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 1.6 : यदि $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ हो, तो $(1, 2)$ पर $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ का मान निकाले।

हल : हमारे पास है,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}$$

टिप्पणी

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{2(1+h)^2-(1+h)\cdot 2+2\cdot 2^2\right\}-\left\{2\cdot 1^2-1\cdot 2+2\cdot 2^2\right\}}{h}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{2k^2+7k}{k} = \lim_{k\to 0}(2k+7) = 7$$

उदाहरण 1.7 : $fx(0,0)$ और $fy(0,0)$ का मान निकाले यदि

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{xy}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

हल : हमारे पास है,

$$f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2-h\cdot 0}{h+0}}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

और

$$f(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} = 0$$

उदाहरण 1.8 : यदि $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x-y}, x\neq y$ और 0 यदि $x = y$ है, तो पता चलता है कि f मूल पर असंगत है लेकिन आंशिक अवकलज उद्गम पर मौजूद है।

हलः यदि हम (x,y) प्रस्तावित (0,0) वक्र $y = x - mx^3$, के माध्यम से मान लेते है तो हमारे पास,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x, x-y^3\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{m}\left\{2-m^3x^6-3mx^2+3m^2x^4\right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{2}{m} - m^2 x^6 - 3x^2 + 3mx^4 \right\} = \frac{2}{m}$$

टिप्पणी

अतः संचरण सीमा नहीं है क्योंकि यह m पर निर्भर करती है। इसलिए xy की मूल (Root) में फलन $f(x,y)$ का उद्गम (Origin) नहीं है।

लेकिन

$$fx(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3}{h} 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

और

$$fx(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{k^3}{-k} 0}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} (-k) = 0$$

इस प्रकार आंशिक अवकलज उद्गम में मौजूद है।

उदाहरण 1.9 : $(x, y) \neq (0,0)$ और $f(0,0) = 0$ के लिए $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ मान लेते है। दिखाएँ कि आंशिक अवकलज fx, fy प्रत्येक उस क्षेत्र $-1 \le x \le, -1 \le y \le$, में मौजूद है, जहाँ हालांकि मूल में $f(x, y)$ है।

हल : $x \neq 0, y \neq 0$ के लिए हमारे पास है,

$$fx \quad =2xy = \frac{y^2 - x^4}{\left(x^4 + x^2\right)^2}, \quad fy = x^2 \frac{x^4 - y^2}{\left(x^4 + y^2\right)^2}$$

$x = 0, y = 0$ के लिए,

हम

$$fx = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

और

$$fy = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k \to 0} 0 = 0$$

टिप्पणी

इसके अलावा, हम यह भी दर्शा सकते हैं,

$fx\ (x_1\ y) = 0, x = 0, y \neq 0$ पर

$fx\ (x, y) = 0, x \neq 0, y = 0$ पर

$fy\ (x_1\ y) = 0, x = 0, y \neq 0$ और

$fx\ (x_1\ y) = 0, x \neq 0, y = 0$ पर।

इसलिए आंशिक अवकलज fx, fy दिए गए क्षेत्र के सभी बिंदुओं पर मौजूद हैं। हालाँकि, फलन $f(x,y)$ मूल पर $x-y$ में स्थिर नहीं है क्योंकि युगपत् सीमा (Simultaneous Limit) विद्यमान नहीं है।

उच्चतर श्रेणी या कोटि का आंशिक अवकलज (Partial Derivatives of Higher Order) : प्रतिलोम फलन fx, fy सामान्य रूप से x और y के फलन में होते हैं और इसलिए ये आंशिक अवकलज को x,y के संदर्भ में हल कर सकते हैं।

इससे हमें उच्च श्रेणी के अंशिक अवकलज प्राप्त हुए हैं। द्वितीय कोटि (Second Order) के आंशिक अवकलज को f के द्वारा दर्शाया जाता है,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = fxx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = fyy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = fxy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = fyx$$

किसी विशेष बिंदु (a, b) पर दूसरे श्रेणी में आंशिक अवकलज को प्रायः चिह्नित किया जाता है।

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(a,b)}, \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \text{ या } fxx\ (a,b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(a,b)}, \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \text{ या } fxy\ (a,b) \text{ इत्यादि}$$

इस प्रकार से,

$$fxx(a,\ b) = \lim_{h \to 0} \frac{fx(a+h,b) - fx(a,b)}{h}$$

$$fxy(a,\ b) = \lim_{h \to 0} \frac{fy(a+h,b) - fy(a,b)}{h}$$

टिप्पणी

$$fyx(a,\,b) = \lim_{k\to 0}\frac{fx(a,b+k)-fx(a,b)}{k}$$

$$fyy(a,\,b) = \lim_{k\to 0}\frac{fy(a,b+k)-fy(a,b)}{k}$$

प्राप्त होता है कि सीमा उपस्थित है, हमारे पास है,

$$fxx(a,b) \quad = \lim_{h\to 0}\frac{fx(a+h,b)-fx(a,b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+2h,b)-2f(a+h,b)f(a,b)}{h}\right.$$

$$\left.-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-(a,b)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h,b)-2f(a+h,b)+f(a,b)}{h^2}$$

इसी प्रकार,

$$fyy\ (a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+2k)-2f(a,b+k)+f(a,b)}{k^2}$$

$$fxy\ (a,b) = \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to\infty}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)}{hk}\right]$$

$$fyx\ (a,b) = \lim_{h\to 0}\left[\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b+k)+f(a,b)}{hk}\right]$$

नोटः उच्च अवकलजों के अस्तित्व के लिए, निम्न कोटि के संगत अवकलजों का अस्तित्व आवश्यक है। इस प्रकार, उसी क्रम में *fyx* एक बिंदु पर उपस्थित होना चाहिए, यह आवश्यक है कि उस बिंदु के प्रतिवेश में आंशिक अवकलज *fx* उपस्थित होना चाहिए। लेकिन, यह *fyx* के द्वारा परिभाषित सीमा के लिए संभव है, जो कि बिना आंशिक अवकलज *fx* के अस्तित्व में है। ऐसी स्थिति में कहा जा सकता है कि उच्च अवकलज अस्तित्व में नहीं है।

नोटः *fxy* में *fyx* की आवश्यकता नहीं है।

नोटः *fyx* और *fxy* हमेशा समान मान नहीं देते हैं। हालाँकि, कुछ के तहत समान *fyx* = *fxy* को स्थायी रख सकते हैं। हम बाद में इन स्थितियों की जांच करेंगे।

उदाहरण 1.10: माना $f(x,y) = x\sin\frac{1}{x} + y\sin\frac{1}{y}$, $(x, y) \neq (0,0); f(0, y)$ $= y\sin\frac{1}{y}$, $y \neq 0; f(x, 0) = x\sin\frac{1}{y}, x \neq 0$ है। (0,0) पर *fx* और *fyx* के स्थिति की जाँच करें।

टिप्पणी

हल : हमारे पास है,

$$fx(0, 0) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{h\sin 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to\infty} \sin 1/h$$

जिसका कोई अस्तित्व नहीं है। इसलिए $fx(0, 0)$ मौजूद नहीं है।

अब $\lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h,k)-f(h,0)-f(0,k)+f(0,0)}{hk}\right\}\right]$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{h\sin 1/h + k\sin 1/k - h\sin 1/h - k\sin 1/k + 0}{hk}$$

$$= \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{0}{hk} = 0$$

इस प्रकार, निश्चित रूप से दूसरे अवकलज fyx के लिए उपयोग की जाने वाली सीमा मौजूद है। इस तथ्य के बावजूद, अवकलज $fyx(0,0)$ को अस्तित्व में नहीं कहा जा सकता है, क्योंकि $fx(0,0)$ मौजूद नहीं है।

उदाहरण 1.11: माना $f(x, y) = y(x)$, जहां y कहीं भी अवकलनीय नहीं है। दिखाओ कि fxy मौजूद है और fx निरंतर है और मौजूद नहीं है।

हल : हमारे पास है,

$$f(x, y) = y(x), \qquad \therefore \quad fx = \frac{\partial f}{\partial x} = y'(x),$$

जो मौजूद नहीं है क्योंकि y कहीं नहीं है फिर से अंतर $y(x)$ केवल x का एक फलन है, इसलिए, आंशिक व्युत्पन्न इसके संबंध में शून्य है

$$\therefore \qquad fy = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} y(x) = 0$$

अभी $fyx = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} fy = 0$

इस प्रकार fxy मौजूद है और हर बिंदु पर मान 0 है। एक अचर फलन होने के कारण, fxy निरंतर या सतत है।

अवकलज के क्रम का अंतर परिवर्तन

यदि $z = f(x, y)$ दो स्वतंत्र चर x और y का एक फलन है, तो $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ और $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ हमेशा समान मान नहीं देते हैं।

टिप्पणी

हालांकि, कुछ नियमों के अनुसार समानता $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ हो सकती है। इन स्थितियों की हम जांच करेंगे।

कुल अवकलज

यदि $f : R \to R$ एक फलन है,

$$f'(a) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

हम इसे फिर से लिख सकते हैं,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

इस तरह से लिखे जाने पर हम कह सकते हैं कि f a पर अवकलनीय है यदि कोई संख्या $\lambda \in \mathbb{R}$ है, तो

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda h}{h} = 0$$

यह अवकलज को थोड़ा सा घुमा–फिराकर परिभाषित करने का तरीका प्रतीत होता है, लेकिन यह एक से अधिक चरों के फलनों का भली–भाँति सामान्यीकरण करता है। इस परिभाषा की व्याख्या करने का तरीका यह है कि $f'(a)$, $f(x)$ का a पर सर्वश्रेष्ठ रैखिक सन्निकटन (Linear Appromimation) है (या अधिक सटीक रूप से, $f(x+a) - f(a)$, के लिए शून्य पर, सबसे अच्छा रैखिक सन्निकटन है।)

अब यदि $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ एक फलन है और $\overline{a} \in D$ है तो ऊपर दिए गए विचार को सामान्य करते हुए हम चाहते हैं कि $\overline{a}$ पर $\overline{f}$ का अवकलज एक रेखीय आलेख हो जो कि लगभग $\overline{a}$ पर $\overline{f}$ हो। स्मरण करे, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ से एक रेखीय आलेख $m \times n$ आव्यूह (Matrix) T द्वारा दिया जा सकता है।

वास्तव में हम कहते हैं $\overline{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ एक $\overline{a}$ पर भिन्न है अगर कोई $n \times m$ आव्यूह (Matrix) T है, जिसे हम एक रेखीय आलेख $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ के रूप में मानते हैं, जैसे कि

$$\lim_{h \to \overline{0}} \frac{\left\| \overline{f}(\overline{a} - \overline{h}) - \overline{f}(\overline{a}) - T\overline{h} \right\|}{\left\| \overline{h} \right\|} = 0$$

यदि T मौजूद है, तो इसे a पर $\overline{f}$ का **कुल अवकलज** कहा जाता है और हम इस प्रकार लिखते हैं,

$$D\overline{f}(\overline{a}) = T$$

टिप्पणी

उदाहरण 1.12 : यदि $f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$ और $f(0,0)=0$ तो दर्शायें कि $fxy(0,0)\neq fyx(0,0)$.

हल : इसे परिभाषित करते है, $fxy=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ और $fyx = fyx=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ से

इसलिए, $fxy(0,\ 0)=\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{fy(0+h,0)-fy(0,0)}{h}$

अब, $fy(0+h,\ 0)=fy(h,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k}$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{h(h^2-k^2)}{h^2-k^2}=h,$$

और $fy(0,\ 0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0}{k}=\lim\limits_{k\to 0}(0)=0$

$\therefore$ $fxy(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

पुनः, $fxy(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{fx(0,0+k)-fx(0,0)}{k}$

लेकिन $fx(0+k)=fx(0,k)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,k)-f(0,k)}{h}$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k(h^2-k^2)}{h^2+k^2}=-k$$

और $fx(0,\ 0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

$\therefore$ $fyx(0,\ 0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{-k-0}{k}=\lim\limits_{k\to 0}(-1)=-1$

अतः इस प्रकरण में $fxy(0,0)\neq fyx(0,0)$ ।

उदाहरण 1.13: यदि $f(x,y)=\dfrac{xy(y^2-x^2)}{y^2+x^2}$ जब $(x,y)\neq(0,0)$, और $f(0,0)=0$ तो $fxy(0,0)$ और $fyx(0,0)$ गणना करे कि क्या वे समान हैं?

हलः हमें परिभाषित करते हैं,

$$fxy=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ और } fyx=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

टिप्पणी

तब, $fxy(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{fx(0,0+k) - fx(0,0)}{k}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{hk(k^2-h^2)}{k^2+h^2} - 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k(k^2-h^2)}{k^2+h^2} = k,$$

और $fx(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

पुनः, $fyx(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{fy(0+h,0) - (0,0)}{h}$

लेकिन, $fy(0+h, 0) = fy(h,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(h,0+k) - f(h,0)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(h,k) = f(h,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left[\frac{hk(k^2-h^2)}{k^2+h^2} - 0\right]$$

और $fy(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

$\therefore \quad fyx(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1,$

हम यहां पाते हैं कि, $fxy(0,0) \neq fyx(0,0)$

उदाहरण 1.14: फलन के लिए $fxy(0,0)$ और $fyx(0,0)$ की समानता की जाँच करें।

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\tan^{-1}(y/x), & x \neq 0 \\ \pi(y^2/2), & x = 0 \end{cases}$$

हलः हम परिभाषित करते है, $fxy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ और $fyx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

टिप्पणी

तब, $fxy(0,0) = \lim_{k\to 0}\dfrac{fx(0,0+k)-fx(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\dfrac{fx(0,k)-fx(0,0)}{k}$

अब, $fx(0,k) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,k)-f(0,k)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,k)-f(0,k)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+2)\tan^{-1}(k/h)-\pi(k^2/2)}{h} \qquad \left(\text{from } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+2)\dfrac{1}{1+(k^2/h^2)}\cdot\left(-\dfrac{k}{h^2}\right)+2h\tan^{-1}\left(\dfrac{k}{h}\right)-0}{1}$$

[L′ हॉस्पिटल के नियम से]

$$= \lim_{h\to 0}\left[-k+2h\tan^{-1}\left(\frac{k}{h}\right)\right] = -k$$

और, $fx(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

$\therefore \qquad fyx(0,0) = \lim_{k\to 0}\dfrac{-k-0}{k} = \lim_{k\to 0}(-1) = -1 \qquad \text{...(i)}$

पुनः, $fyx(0,0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{fy(0+h,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{fy(h,0)-fy(0,0)}{h}$$

लेकिन, $fy(\text{h},0) = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(h,0+k)-f(h,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(h,k)-f(h,0)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{(h^2+k^2)\tan^{-1}(k/h)}{k} = \lim_{k\to 0}\left(h+\frac{k^2}{h}\right)\cdot\frac{\tan^{-1}(k/h)}{k/h}$$

$$= \left[\because \lim_{k\to 0}\frac{\tan^{-1}(k/h)}{k/h} = \lim_{t\to 0}\frac{\tan^{-1}t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1+(1+t^2)}{1} = 1\right]$$

और $fy(0,0) = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\pi\left(k^2/2\right)-0}{k} = \lim_{k\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot k = 0$$

टिप्पणी

इसलिए $fyx\,(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{k} = \lim_{k\to 0} 1 = 1$ (ii)

समीकरणों (i) और (ii) से हम देखते है $fxy(0,0) \neq fyx(0,0)$

fxy और fyx की समानता के लिए पर्याप्त प्रतिबंध

हम पढ़ रहे हैं कि $fxy = fyx$ सदैव धारण नहीं करता है। अब हम दो प्रमेयों को दे रहे हैं, जिनका उद्देश्य यह दर्शाना है कि किन परिस्थितियों में यह कल्पना करना ठीक है कि किसी बिंदु पर $fxy = fyx$ है, अर्थात् fxy और fyx के समानता के लिए पर्याप्त स्थितियां क्या है?

प्रमेय 1.7 श्वार्ज प्रमेय (Schwarz's Theorem): यदि $f{:}x \to R, X \subseteq R^2$ और (a,b) $\in X$ ऐसा है (i) fx मौजूद है $N(a,b)$ में और $(ii)\, fxy$ में निरंतर या सतत है (a,b) पर तब $fyx(a,b)$ मौजूद और $fxy(a,b)$ के बराबर है।

प्रमाण: चूँकि $fx(a,b)$ पर निरंतर या सतत है, fy और fxy हर बिंदु पर मौजूद है। $N(a,b)$ में।

माना कि $\phi\,(h,k) = f(a+h,\, b+k) - f(a+h,\, b) - f(a,b+k) + f(a,b)$ (1.9)

जहां $(a+h, b+k) \in N(a,b)$

अगर हम लेते हैं $g(y) = f(a+h,\, y) - f(a,y)$

तब $g(b+k) = f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b+k)$

$g(b) = f(a+h,\, b) - f(a,\, b)$

$\therefore\ \phi(h,\, k) = g(b+k) - g(b)$ ...(1.10)

चूँकि $N(a,b)$ में $f(a+h,y) - f(a,y)$ के प्रत्येक बिंदु पर fy मौजूद है, $N(a,b)$ अर्थात, $g(y)$, $[b,b+k] \subseteq (a,b)$ के बिंदु पर भिन्न है।

$\therefore$ $[b,b+k]$, में $g(y)$ के लिए मध्य मान प्रमेय का उपयोग करने पर हमें मिलता है:

$y(b+k) - y(b) = kg'(b+\Phi k)$ जहां $0 < \Phi < 1$

$$\therefore\quad \phi(h,k) = k\left[fy(a+h, b+\Phi k\right] - fy\left(a, b+\Phi k\right)\Big] \quad ...(1.11)$$

[समीकरण (1.9), $g'(y) - fy(a+h,\, y) - fy(a,\, y)$]

अब $N(a,b)$ के प्रत्येक बिंदु पर fxy मौजूद है, इसलिए $f\left(x, b+\Phi k\right)$ के प्रत्येक बिंदु पर $N(a,b)$ अवकलनीय है, अर्थात, $fy\left(x, b+\Phi k\right)[a,\, a+h] \subseteq N(a,\, b)$ में

टिप्पणी

अवकलनीय है। $\therefore$ $[a, a+h]$ में $fy(x, b+\Phi k)$ के लिए मध्य मान प्रमेय का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$fy(a + h, b + \Phi k) - fy(a, b + \Phi k) = hfxy(a + \Phi_1 < 1$$

जहां $0 < \Phi, \Phi_1 < 1$

$\therefore$ $\phi(h,k) = k[h\, fxy\, (a + \Phi_1 h, b + \Phi k)]; 0 < \Phi, \Phi_1 < 1$

या $$\frac{\phi(h,k)}{hk} = fxy\left(a+\Phi_1 h, b+\Phi k\right)$$

या $$\frac{1}{k}\left[\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h} - \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\right]$$

$$= fxy\,(a + \Phi_1\, h, b + \Phi k)$$

सीमा को $h \to 0$ के रूप में सीमा को लेते हुए, हम प्राप्त करते हैं।

$$\frac{1}{k}\left[fx(a,b+k) - fx(a,b)\right] = \lim_{h\to 0} fxy\left(a+\Phi_1 h, b+\Phi k\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to -} \frac{fx(a,b+k) = (a,b)}{k} = \lim_{k\to -0}\left[\lim_{h\to 0} fxy\left(a+\Phi_1 h, b+\Phi k\right)\right] = fxy(a,b).$$

इस प्रकार fxy मौजूद है और $fyx(a,b) = fxy(a,b)$

इसी तरह से, हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि अगर $N(a,b)$ में fy में मौजूद है, और fyx, सतत है (a,b) पर, तो $fxy(a,b)$ मौजूद है और $fxy(a,b)$ के बराबर है।

प्रमेय 1.8 यंग प्रमेय (Young's Theorem) : यदि $f : X \to R, X \subseteq R^2$ और $(a,b) \in X$ इस प्रकार कि fx, और fy (a,b) पर अवकलनीय होते हैं तब $fxy\,(a,b) = fyx(a,b)$ है।

प्रमाण : चूँकि fx, और fy (a,b) में अवकलनीय हैं, तो fx, fy मौजूद हैं $N(a,b)$ में और (a, b) पर fxx, fyx, fxy, fyy में मौजूद हैं।

माना कि $\phi(h, h) = f(a + h, b + h) - f(a + h, b) - f(a, b + h) + f(a, b)$

और $g(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$

तब $\phi(h, h) = g(b + h) - g(b)$

अब, मध्य मान प्रमेय का उपयोग करने के लिए $g(y)$ में $[b, b+h]$,

$$g(b + h) - g(b) = hg'\,(b + \Phi h),\ 0 < \Phi < 1$$

$$\therefore\ \phi(h, h) = h[fy(a + h, b + \Phi h) - fy(a, b + \Phi h)] \qquad ...(1.12)$$

चूँकि परिभाषा के अनुसार, (a, b) पर fy अवकलनीय है हमारे पास $fy(a +$

$$h, b + \Phi h) - fy(a, b) = hfxy(a, b) + \Phi h\, fyy(a, b) + \sqrt{\left(h^2 + \Phi^2 h^2\right)}\, \phi_1(h,h)$$

है। ...(1.13)

और $fy(a, b + \Phi h) - fy(a, b) = \Phi h\, fyy\,(a, b) + \Phi h\, \phi_2(h, h)$ ...(1.14)

जहां $\Phi_1 \to 0$ और $\Phi_2 \to 0$ जैसे $h \to 0$

समीकरणों (1.12), (1.13) और (1.14) से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं।

$$\frac{\phi(h,h)}{h^2} = fxy(a,b) + \sqrt{1+\Phi^2}\,\phi_1(h,h) - \Phi\phi_2(h,h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\phi(h,h)}{h^2} = fxy(a,b)$$

उसी प्रकार, अगर $g(y)$ के स्थान पर हम लेते हैं

$$F(x) = f(x, b + h) - f(x, b)$$

हम यह सिद्ध कर सकते हैं,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(h,h)}{h^2} = fyx(a,b)$$

अतः

$$fxy(a, b) = fyx(a, b)$$

उदाहरण 1.15 : माना $(x,y) \neq (0,0)$ और $f(0,0) = 0$ के लिए

$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$ ले सकते हैं। (x, y) के सभी बिंदु पर $fxy = fyx$ को दिखाएं। यह भी बताएं कि मूल में $x - y$ में से कोई भी अवकलज सतत नहीं है।

हल : हमारे पास है,

$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$fx = \frac{1}{2}x\left\{1+\log(x^2+y^2)\right\},\ fy = \frac{1}{2}y\left\{1+\log(x^2+y^2)\right\},$$

और इस प्रकार $fxy = fyx = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

आंशिक अवकलज की परिभाषा का उपयोग करते हुए, यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि $x = 0,\ y = 0$ के लिए

$$fx = fy = fxy = fyx = 0$$

इस प्रकार, $fxy = fyx$ सभी बिंदु पर (x,y)

हालाँकि, $fyx = fxy$ निरंतर या सतत नहीं है (0,0)

हम पाते हैं कि एक साथ सीमा, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ मौजूद नहीं है। अगर हम (x,y) के समीप (0,0) रेखा $y = mx,$ के माध्यम से, हमें मिलता है।

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{xy}{x^2+y^2} + \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

टिप्पणी

यह सीमा इस पर निर्भर करती है इसलिए यह मौजूद नहीं है। इसका तात्पर्य है कि $fxy = fyx$ मूल में स्थिर नहीं है

श्वार्ज प्रमेय (Schwarz's Theorem) और $fxy\,(0, 0) \neq fxy\,10, 0)$ की स्थिति को संतुष्ट नहीं करता है।

यदि z, दो चरों x तथा y का फलन है, तथा इन चरों को हल करने में चर t के एक फलन को देते हैं, तब कहा जा सकता है कि z, t का सम्मिश्र फलन है।

$$\text{संबंध} \begin{cases} z = (x, y) \\ x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

z को t के एक सम्मिश्र फलन के रूप में परिभाषित करता है।

$$fx = fy = fxy = fyx = 0$$

यहाँ, $\dfrac{dz}{dt}$ को t के संबंध में z के कुल अंतर गुणांक कहा जाता है।

प्रमेय 1.9 : यदि निम्न संबंध द्वारा परिभाषित, z, t का एक संयुक्त फलन है,

$$z = f(x, y);\ x = \phi(t),\ y\ \psi(t)$$

जहां x और y के संबंध में आंशिक अवकलज के साथ z की प्रथम कोटि है, और x और y के सन्दर्भ में इसके सतत अवकलज हैं,

$$\frac{dx}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

प्रमाण : माना कि, $z = f(x, y)$ ...(1.15)

मान लें कि δt, δx और δy क्रमशः t, x और y में संबंधित परिवर्तन हैं, तो समीकरणों,

$$z + \delta z = f(x + \delta x, y + \delta y) \qquad ...(1.16)$$

तो समीकरण (1.15) और समीकरण (1.16) से,

$$\delta z = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$$
$$= [f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y) + f(x, y + \delta y) - f(x, y)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{f(x+\delta x+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x}\cdot\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta t} \qquad ...(1.17)$$

अब पूर्ववर्ती $\delta t \to 0$ को सीमित करने के लिए आगे बढ़ना और इसके फलस्वरूप δx और δy भी शून्य हो जाता है, हमारे पास है,

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{dz}{dt},$$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt},$$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt},$$

और $\displaystyle \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$

उसी प्रकार $\displaystyle \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta x} = \frac{\partial z}{\partial y}$

इसलिए, समीकरण (1.17) देता है,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

दो चरों के लिए माध्य मान प्रमेय (Mean Value Theorem for Two Variable)

माना कि $s\ f\ (x, y)$ एक फलन है, जैसे कि

(i) $f\ (x, y)$ बंद डोमेन में निरंतर या सतत है।

(ii) खुले डोमेन में पहले क्रम का अवकलज गुणांक मौजूद है।

तब $f(a + h, b + k) = f(a, b) + hfx\ (a + \Phi h, b + \Phi k) + \text{kfy}\ (a + \Phi h, b + \Phi k)$

जहां $(a, b), (a + h), (b + k) \in D$ और $0 < \Phi < 1.$

प्रमाणः हमें एक नया चर t परिभाषित है।

$x = a + ht, y = b + kt, 0 < t \le 1.$

जहां h और k निरंतर हैं, तो हम एक चर t के रूप में फलन मिलता है,

$$f(t) = f(x, y) = f(a + ht, b + kt) \qquad ...(1.18)$$

एकल चर के लैंग्रांज के मध्य मान प्रमेय द्वारा हमारे पास है,

$$\frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(\Phi), \quad 0 < \Phi < 1$$

$$F(1) = F(0) + F'(\Phi), \quad 0 < \Phi < 1 \qquad ...(1.19)$$

लेकिन समीकरण, (1.18) से

$$F(1) = f(a + h, b + k)$$

$$F(0) = f(a, b)$$

टिप्पणी

$\therefore \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = F'(\Phi), \quad 0 < \Phi < 1$ ...(1.20)

यदि $x = a + ht$ और $y = b + kt$, तब

$$F(t) = f(x, y)$$

$$\Rightarrow \qquad f'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}f(x, y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial t}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$ (दिशीय अवकलज (Direction Derivatives) की परिभाषा द्वारा)

$$= h\, fx\,(x, y) + k\, fy\,(x, y) \qquad \left[\because \frac{dx}{dt} = h, \frac{dy}{dt} = k\right]$$

$$F'(t) = h\, fx\,(a + ht, b + kt) + k\, fy\,(a + ht, b + kt) \qquad ...(1.21)$$

अब F पद समीकरण (1.21) के स्थान पर प्रतिस्थापन करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$F'(\Phi) = h\, f(a + \Phi h, b + \Phi k) + k\, fy\,(a + h\Phi, b + k\Phi) \quad ...(1.22)$$

अब समीकरणों (1.20) और (1.22) से हमारे पास है,

$$f(a+h), b+k) = f(a, b) = h\, fx(a + \Phi h, b + \Phi k) + k\, fy(a + \Phi h, b + \Phi k)$$

$$\Rightarrow \quad f(a+h, b+k) = f(a, b) + h\, fx(a + \Phi h, b + \Phi k) + k\, fy(a + \Phi h, b + \Phi k)$$

उदाहरण 1.16: यदि $f(x) = x^2 + y^2 + 2x + 3y$, तब सदिश $2i + j$ की दिशा में $f(x)$ के अवकलज को (2, 1) को ज्ञात करें।

हल: चूंकि हमारे पास है,

दिशीय अवकलज $= \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\beta$

यह स्पष्ट है कि $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ और $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ और

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2,1)} = 6, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2,1)} = 5$$

इसलिए, दिए गए दिशा $f(x)$ में (2, 1) के दिशीय अवकलज हैं,

$$= 6 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \ 5 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{17}{\sqrt{5}}$$

उदाहरण 1.17: यदि $f = xy^2 + 2xy$, तब दिशा $\Phi = \pi/2$ में f (1,2) के दिशीय अवकलज को ज्ञात करें।

टिप्पणी

हलः माना

$$f = xy^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2x$$

$$\therefore \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = 8 \text{ और } \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = 6$$

इसलिए दिशीय अवकलज में दिशा $\Phi = \frac{\pi}{2}$, (1, 2) पर अवकलज होता है,

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 8\cos\frac{\pi}{2} + 6\sin\frac{\pi}{2} = 6$$

अब हम दो प्रमेय सिद्ध करते हैं जो fxy और fyx समुच्चय बिंदु (a,b) की गुणवत्ता के लिए पर्याप्त नियम प्रदान करता है।

प्रतिलोमीय फलन (व्युत्क्रम फलन) (Inverse Function)

माना डोमेन D के साथ एक वास्तविक मूल्यवान फलन (f) हो और सीमा (Range) R^n के उपसमुच्चय के रूप में सीमा E करें, हम लिख सकते हैं,

$$y = f(x), x \in D \text{ और } y \in E \qquad ...(1.23)$$

माना y_n के रूप में लिखा जा सकता है,

$$y_n = f_n(x_1, x_2) \qquad ...(1.24)$$

तब, फलन f एक रूपांतरण है, जो समूह D को समूह E में रुपांतरित करता है, अब प्रत्येक बिंदु D पर वहां E के एक बिंदु के अनुरूप होता है। अब दो प्रकरण हैं,

(1) एकैकी रूपांतरण

(2) अनेक रूपांतरण

फिर, डोमेन D और सीमा E के साथ एक–एक फलन f को लंबवत कहा जाता है। यदि $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, तब फलन g फलन f का प्रतिलोम कहा जाता है।

रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) : माना v_1 और v_2 दो सदिश समष्टि हो। एक आलेख $f!v_1 \to v_2$ को रैखिक रूपांतरण कहा जाता है।

$$f_1(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(cx) = cf(x) \ \forall \ x, x_1, x_2 \in v_1, c \in R$$

प्रमेय 1.10: यदि कोई परिमित आयाम वाले सदिश समष्टि X पर एक रैखिक प्रचालक है, तो दिखाएँ कि A एक से एक से एक यदि श्रेणी का X से भरा हुआ हैं।

प्रमाणः माना $B = \{x_1, ...x_4\}$, X के आधार है। माना $R(A)$, A की सीमा को निरूपित करते हैं। हम दिखाएंगे कि समूह $Q = \{Ax_1, ...Ax_2\}$ सीमा $R(A)$ हैं। माना $y \in R(A)$ है। तब $y = Ax$ कुछ $x \in x$ के लिए अवधि X के बाद से, इसलिए वहाँ अदिश $c_1, ...c_n$ मौजूद हैं इस तरह से,

$$x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

इसलिए $y = A(c_1x_1 + ... + c_nx_n) = C_1AX_1 + ... + C_nAX_n$, A की रैखिकता द्वारा यह दिखाया गया कि Q, $R(A)$ को फैलाता है, तो $R(A)=X$ यदि और केवल यदि Q रैखिक रूप से स्वतंत्र है। हमें यह साबित करना होगा कि यह तभी हो सकता है जब केवल एकैकी (One-One) हो। हमें लगता है कि Q रैखिक स्वतंत्र है और माना $x \in X$ चूंकि B आधार है।

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

कुछ अदिश के लिए c_i, $i = 1, 2, ... n$

तब $\quad ax = 0 \Rightarrow A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sum c_2 Ax_1 = 0$, A की रैखिकता द्वारा

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, चूंकि Q रैखिक रूप से स्वतंत्र है

$\Rightarrow \quad x = \quad 0$

इसलिये,

$$Ax = 0 \qquad \Rightarrow x = 0 \tag{1.25}$$

इसलिये,

$Ax = Ay \Rightarrow Ay = 0$, चूंकि A रैखिक है,

$\Rightarrow \quad x - y = 0$ by (1.25 से)

$\Rightarrow \quad x = y$

$\Rightarrow A$, एकैकी है।

इसके विपरीत, मान लीजिए कि A, एकैकी है।

तब $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i Ax_i = 0 \;\Rightarrow\; A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = 0$ चूंकि A रैखिक है

$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0, \quad$ चूंकि A एकैकी है।

$\Rightarrow \quad c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ चूँकि B स्वतंत्र है।

इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि Q रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

प्रमेय 1.11: माना Ω और R^n पर सभी प्रतिलोमीय संचालक (Invertible Operators) का समूह है दिखाओ कि अगर $A \in \Omega$ और $B \in L(R_n)$ इस तरह से $\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, तब $B \in \Omega$ ।

प्रमाण: लगाना $\| A^{-1} \| = \frac{1}{\alpha}$ और $\| B - A \| = \beta$ रखने पर

तब, $\|B - A\| \, \|A^{-1}\| < 1$ इसका आशय के $\beta < \alpha$ हर एक के लिए $x \in R^n$ ।

हमारे पास $|x| = A^{-1}Ax| \le = \frac{1}{\alpha}(Ax)$ है। इस प्रकार,

$(\alpha - \beta)|x| = \alpha|x| - \beta|x| \le |Ax| - \|B - A\| \, |x| \le |Ax| - |(B - A)x|$, क्योंकि $|Ax| \le \|A\| \, |x|$

$= |Ax| - |Bx - Ax| = |Ax| \le \|Ax - Bx\|$

$\le \|Ax| - (|Ax| - |Bx|)$, क्योंकि $|y_1| - |y_2| \le |y_1 - y_2|$ सबके लिए $y_1, y_2 \in R^n$

$= |Bx| \; (x \in R^n)$

इस प्रकार, $|Bx| \ge (\alpha - \beta)|x|$ सबके लिए $x \in R^n$ (1.26)

ध्यान दें कि $(\alpha - \beta)|x - y| = 0$ ऋणात्मक नहीं हो सकते, जब $\alpha - \beta > 0$

अब $Bx = By \Rightarrow Bx - By = 0$

$\Rightarrow$ $B(x - y) = 0 \Rightarrow |B\,(x - y)| = 0$

$\Rightarrow$ $(\alpha - \beta)\,(x - y) = 0$, (1.26) से

$\Rightarrow$ $|x - y| = 0$ क्योंकि $\alpha \ne \beta$

$\Rightarrow$ $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

इससे प्राप्त होता है कि B एकैकी है। B भी है इसलिए B एक प्रतिलोमीय संचालक है, इसलिए $B \in \Omega$ ।

प्रतिलोम फलन प्रमेय (Inverse Function Theorem)

स्थानीय प्रतिलोम रूपांतरण के लिए पर्याप्त मानदंड

माना कि डोमेन D तथा परास E के साथ R^n के उपसमुच्चय पर, f एक सदिश राशि फलन है। माना $a \in D, f(a) = b \in E$ । माना f, a के प्रतिवेश के मध्य में, प्रथम कोटि का आंशिक अवकलज है तथा माना कि जैकोबियन (Jacobian) $J_f(a) \ne 0$, तब फलन f स्थानीय रूप से a पर प्रतिलोम है। साथ ही, f का स्थानीय प्रतिलोम g, b के प्रतिवेश के मध्य में, प्रथम कोटि का आंशिक अवकलज है।

प्रमाण: माना f अपने डोमेन D के साथ एक सदिश मान फलन हो सकता है और E, R^n उपसमुच्चय के रूप में इस प्रकार हो सकता हैं। इस प्रकार हम दिखाते हैं कि सीमा f पर दी गई शर्त के तहत क्रमशः a और b के समीपवर्ती P और Q मौजूद हैं।

(i) $f(P) = \{f(x) : x \in P\} = Q$

टिप्पणी

(ii) P के दो अलग–अलग बिंदु V के समान बिंदु के अनुरूप नहीं हैं।

(ii) $f(a) = b$

यदि हम g को डोमेन Φ और श्रेणी P के साथ f के व्युत्क्रम के रूप में परिभाषित करते हैं तो यह है कि,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \; ; x \in P \text{ और } y \in Q$$

प्रकार्य g, Q में प्रथम कोटि के अंशिक अवकलज को अब निर्धारक के विषय में मानता है।

$$\begin{vmatrix} D_1 f_1(x_1) & D_2 f_1(x_1) & \cdots & D_n f_1(x_1) \\ D_1 f_2(x_2) & D_2 f_2(x_2) & \cdots & D_n f_2(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_n(x_n) & D_2 f_n(x_n) & \cdots & D_n f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

जहां $x_1, x_2, \ldots x_n$, a के समीपवर्ती बिंदु हैं हम इस निर्धारक पर n^2 चर के फलन के रूप में देखते हैं। n^2–बिंदुओं का निर्देशांक n–बिंदुओं में $x_1, x_2, \ldots . x_n$ जैसे कि इसका मान जब $x_1, x_2, \ldots . x_n$ सभी समान मान लेते हैं एक गैर–शून्य है निर्धारणात्मक भी अपने तत्वों में बहुपद होने के कारण एक सतत फलन है। इस प्रकार इस बिंदु का एक $\exists a$ समीपवर्ती (Neighbourhood) ऐसा है कि अगर $P_1, P_2, \ldots P_3 \ldots P_n$ इस n समीपवर्ती (Neighbourhood) के किसी भी विवेकाधीन बिंदु $\left| D_j fi(p_j) \right| \neq 0$ इस प्रकार हैं।

(1) माना $x \neq y$ गोलाकार $S(a, S)$ के दो बिंदु हैं जो हम दिखाएंगे,

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

यदि संभव हो तो, $f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow \quad fi(x) = fi(y), | \leq i \leq n$

मध्य मान प्रमेय द्वारा, $\Phi_i, 0 < \Phi_i < |$ इस तरह की वहाँ मौजूद हैं।

$$0 = f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_i - x_j \right) Dj \; fi \left[x + \Phi_i \left(y - x \right) \right]$$

हम लिख सकते हैं, $x + \Phi_i (y - x) = P_i$

ताकि हम प्राप्त करें, $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) DjFi(Pi) = 0$ इस प्रकार हम n रेखीय समीकरण को एक प्रणाली प्राप्त करते हैं।

$$\left(y_1 - x_1 \right) D_1 f_1 \left(P_1 \right) + \left(y_2 - x_2 \right) D_2 f_i \left(P_1 \right) + \cdots + \left(y_n - x_n \right) D_n f_1 \left(P_1 \right) = 0$$

$$\left(y_1-x_1\right)D_1f_n\left(P_n\right)+\left(y_2-x_2\right)D_2f_n\left(P_n\right)+\cdots+\left(y_n-x_n\right)D_nf_n\left(P_n\right)=0$$

जिसका निर्धारक (Determinent)

$$\left|D_jf_i\left(P_i\right)\right|\neq 0, \quad |\leq i\leq n, |\leq j\leq n$$

$$\Rightarrow \quad y_1-x_1=0, \cdots y_n-x_n=0 \Rightarrow x=y$$

ताकि, हम एक विरोधाभास पर पहुंचें।

इस प्रकार, हम सिद्ध करते हैं कि, $x\neq y\Rightarrow f\left(x\neq f\left(y\right)\right)$

हम $f\left(S\right)$ द्वारा समूह $\{f(x):x\in S\}$ का निरूपण करते हैं और देखते हैं कि $\overline{S}$ से $f\left(S\right)$ का एकैकी फलन है।

(ii) अब, हम यह दिखाएंगे कि $f\left(\overline{S}\right)$, $b=f(a)$ के समीपवर्ती है।

T को गोला $\overline{S}$ की सीमा को निरूपित करने पर, वह समूह है $\left\{x:\|x-a\|=S\right\}$

अब विचार करे $\|f\left(x\right)-b\|:x\in t$

यहां, हमारे पास मूल्यों के साथ एक वास्तविक मूल्यवान फलन है। $\|f\left(x\right)-f\left(a\right)\|=\|f\left(x\right)-b\|$ डोमेन T के साथ, जैसा कि फलन f डोमेन T और $a\notin T$ के साथ है। हम देखते हैं $\|f\left(x\right)-b\||$ धनात्मक $\forall x\in T$ है।

जैसा कि सघन (Compact) समूह है और वास्तविक मूल्यवान फलन निरंतर $\forall x\in T$ है। हम देखते हैं कि फलन का निम्नतम आवश्यक रूप से धनात्मक है। इस निम्नतम को 2k तक निरूपित करें ताकि हमारे पास हो,

$$2k\leq\|f\left(x\right)-b\|:\forall x\in T$$

अब हम इस प्रकार एक समूह Q को परिभाषित करते हैं।

$Q=\left\{y:\|y-p\|<k\right\}$ और यह दर्शाते हैं कि $f\left(\overline{S}\right)$ में विपरीत है। $y\in Q$ करें ताकि हमें दिखाया जाए कि $x\in\overline{S}$ ऐसा है कि $=f(x)$, मौजूद है। हमारे पास है,

$$\begin{aligned}ak&\leq\|f\left(x\right)-b\|\leq\|f\left(x\right)-y\|+\|y-b\|\\&\leq\|f\left(x\right)-y\|+k\end{aligned}$$

ताकि $\quad \|f\left(x\right)-y\|>k\forall y\in Q,\forall x\in T \quad$ ...(1.27)

तथा $\quad \|f\left(a\right)-y\|=\|y-b\|<k \quad$ ...(1.28)

नियत रूप से लेने पर, हम $\|f\left(x\right)-y\|^2, x\in\bar{S}$ के साथ एक वास्तविक मूल्यवान फलन को मानते हैं। समीकरण (1.26) तथा (1.27) से हम देखते हैं कि इस फलन का न्यूनतम आंतरिक बिंदु $\overline{S}$ पर है और जैसे कि यह न्यूनतम इसकी निम्नतम राशि है,

हमारे पास है $\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x)-f_i\right]^2 = \| f(x)-y \|$

टिप्पणी

इस प्रकार, हम सिद्ध हैं कि, $\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x)-y_i\right]D_i f_i(x)=0 \quad |\le j\le n$

समीकरण को विस्तार से फिर से लिखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\left[f_i(x)-y_1\right]D_1 f_1(x)\cdots+\left[f_n(x)-y_n\right]D_1 f_n(x)=0$$

$$\left[f_i(x)-y_1\right]D_n f_1(x)\cdots+\left[f_n(x)-y_n\right]D_n f_n(x)=0$$

रैखिक समीकरण के इस समूह का निर्धारक शून्य नहीं है,

हम देखते हैं कि,

$$f_1(x)-y_1=0, f_2(x)-y_2=0,\ldots, f_n(x)-y_n=0$$

जिसका अर्थ है $f(x)=y$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि $Q, f(S)$ में सम्मिलित है।

चरण (*i*): P खुला है, इसलिए f सतत है और Q एक खुला समुच्चय है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि एक खुला समूह P और Q एक a और $f(a) = b$ के क्रमशः समूह होते हैं जैसे कि f, P पर Q से अच्छादक (Onto) फलन है।

जैसा कि $x \in P \Rightarrow f(x) \in Q$

और $y \in Q$ से एक और केवल $x \in P$ ऐसा है कि $f(x) = y$ से मेल खाता है।

इस प्रकार डोमेन P और श्रेणी Q के साथ फलन उल्टा है। बता दें कि g फलन का व्युत्क्रम f है ताकि Q इसका, डोमेन और P का श्रेणी है।

इस प्रकार, हमारे पास है $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y), x\in P, y\in Q$

चरण (*ii*): अब, हम केवल यह दिखाते हैं कि फलन g स्वयं को पहले प्रथम क्रम आंशिक अवकलज के रूप में स्वीकार करता है। माना $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$

λ के पर्याप्त रूप से छोटे मूल्य के लिए $y = \delta u_k \in Q$

मना $x' = g(y + \lambda u_k) \Leftrightarrow y\, \lambda u_k = x'$

$\therefore \quad f(x') - f(x) = \lambda u_k$

$\Rightarrow \quad f_i(x')\, f_i(x) = \lambda \delta_{ik}, 1 \le i \le n$

अब मध्य मान प्रमेय द्वारा हम प्राप्त करते हैं,

$$f_i(x') - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{'}-x_j\right)D_j f_i\left[x+\Phi_i\left(x'-x\right)\right]$$

तो हम प्राप्त करते हैं,

टिप्पणी

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j' - x_j\right) D_j f_i\left[x + \Phi_i\left(x' - x\right)\right] = \lambda\delta_{ik}$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\left[g_j\left(y+\lambda u_k\right) - g_i\left(y\right)\right]}{\lambda} D_i\left[x + \Phi_i\left(x' - x\right)\right] = \delta_{ik}$$

रैखिक समीकरण की इस प्रणाली का निर्धारक गैर–शून्य है। हम देखते है $\frac{g_j\left(y+\lambda u_k\right) - g_i\left(y\right)}{\lambda}$ निर्धारक $| \leq j \leq n$ है।

हल किए गए इस समीकरण पर विचार करें और $x' \to x$ जो कि λ के 0 के बराबर है, हमने प्राप्त किया,

$$\sum_{j=1}^{n} D_k I_j\left(y\right) D_j f_i\left(x\right) = \delta_{ik}$$

इस प्रकार, $D_k g\left(y\right) \ \forall \left|\leq k \leq n, \right| \leq j \leq n$ और $\forall y \in Q$ में मौजूद है ताकि g, Q में आंशिक रूप से अवकलज को स्वीकार करे। क्योंकि आंशिक अवकलज $D_k g_j(y)$, $D_j f_i\left(x\right)$ के रैखिक संयोजनों के रूप में हमें ज्ञात है कि आंशिक अवकलज $D_k g_j(y)$, Q में सतत है।

अंर्तनिहित फलन *(Implicit Function)* : माना कि f, दो चरों का एक वास्तविक मान फलन है, ताकि इसका डोमेन D R^2 का एक उपसमुच्चय हो, E को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$E = \left\{\left(x, y\right) : \left(x, y\right) \in D \text{ और } f\left(x, y\right) = 0\right\}$$

अब डोमेन ACR के साथ एकल चर का वास्तविक महत्वपूर्ण फलन g मौजूद नहीं हो रहा है और न ही हो सकता है।

$$E = \left\{\left(x, g\left(y\right)\right) : x \in A\right\}$$

यदि g मौजूद है, तो $y = g(x), f(x, y) = 0$ का एक हल है।

(*i*) अंतर्निहित फलन का पहला अंतर गुणांक।

यदि $u = f(x, y)$ = नियतांक है और x और y, दोनों फलन है। जैसे t और r, तो,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}$$

जहां, $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}$$

टिप्पणी

(ii) एक अंतर्निहित फलनों का द्वितीय अवकल गुणांक :

माना $u = f(x,y) = C$ का अंतर्निहित होना चाहिए,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{q^2 r - 2pqs - p^2 t}{q^3}\right]$$

जहां $\quad p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$q = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

उदाहरण 1.18: यदि $x^y + y^x = C$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल: माना $f(x, y) = x^y + y^x - C$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-x} + y^x \log y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\left[\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}\right]$$

उदाहरण 1.19: समीकरण $x^3 + y^3 - 3xy + y = 0$ का, बिंदु $(0, 0)$ के पास अद्वितीय (Unique) हल निर्धारित करें। इसके अलावा हल का पहला अवकलज ज्ञात करें।

हल: हमारे पास है,

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + y = 0, (0, 0) \text{ पर}$$

(i) $f(0, 0) = 0$

(ii) $fx = 3x^2 - 3y, \quad fy = 3y^2 - 3x + 1$

अब fx और fy की निरंतरता या सत्यता (0, 0) पर fx की निरंतरता या सत्यता की (0, 0) पर जाँच करें।

समकालिक (Simultaneous) सीमा है,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(3x^2 - 3y\right) = 0 \text{ मौजूद है।}$$

$\because \quad fx$ निरंतर है।

समकालिक सीमा में $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(3x^2 - 3y + 1\right) = 1$ मौजूद है।

टिप्पणी

और $fy\,(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{k^3 + k}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} k^2 + 1 = 1 \neq 0$$

$\therefore \quad fy(0,0) \neq 0$

इस प्रकार समीकरण $f(x, y) = 0$ एक अद्वितीय हल निर्धारित करता है। (अंतर्निहित फलन प्रमेय द्वारा)

इसका अद्वितीय हल,

$f(x, y) = 0$ द्वारा दिया गया है

$$x^3 + y^3 - 3xy + y = 0$$

$$y^3 - y\,(3x - 1) + x^3 = 0$$

$$\therefore \quad [\phi(x)]^3 - [3x - 1] + x^3 = 0 \qquad \ldots(i)$$

क्योंकि $\phi'(0) = 0$

समीकरण (i) विभेदित करने पर,

$$3\left[\phi(x_1)\right]^2 \cdot \phi'(x) - 3\phi(x) - (3x-1)\,\phi'(x) + 3x^2 = 0$$

$$\therefore \quad 0 - 3 \times 0 - (-1)\,\phi'(0) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(0) = 0$$

अपनी प्रगति जांचिए

1. रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए।
2. सतत फलन की व्याख्या करें।
3. समाकलन का मूलभूत प्रमेय किस संबंध को दर्शाता है?
4. उच्चतर श्रेणी के आंशिक अवकलज को समझाए।
5. अवकलज के क्रम या कोटि का अंतर परिवर्तन की व्याख्या करें।
6. सम्मिश्र फलन का वर्णन कीजिए।
7. रैखिक रूपांतरण क्या है?

1.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. हम जानते हैं कि समाकलन की शुरुआत एक वक्र के तहत क्षेत्र खोजने के रूप में की गई है और यह समीकरण का अधिक परिष्कृत रूप है। समाकलन गणित का निर्माण बर्नहार्ड रीमान द्वारा किया गया है और यह एक अंतराल पर एक फलन के अभिन्न भाग की पहली कठोर परिभाषा थी।

टिप्पणी

2. एक फलन अपने डोमेन D में एक बिंदु c पर निरंतर या सतत है अगर किसी भी $\varepsilon>0$ को वहां $\delta>0$ मौजूद है जैसेः

   यदि $x \in D$ और $|x-c| < \delta\ |f(x)-f(c)| < \varepsilon$

   एक फलन अपने डोमेन D में संतत है यदि वह अपने डोमेन के प्रत्येक बिंदु पर निरंतर या सतत है।

3. समाकलन का मूलभूत प्रमेय समाकलन एवं अवकलज के मध्य संबंध को दर्शाता है। हम जानते हैं कि अवकलज और पूर्णांकों को प्रतिलोम फलनों के रूप में परिभाषित कर रहे हैं।

4. प्रतिलोम फलन fx, fy सामान्य रूप से x और y के फलन में होते हैं और इसलिए ये आंशिक अवकलज को x,y के संदर्भ में हल कर सकते हैं।

5. यदि $z = f\left(x, y\right)$ दो स्वतंत्र चर x और y का एक फलन है, तो $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ और

   $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ हमेशा समान मान नहीं देते हैं।

   हालांकि, कुछ नियमों के अनुसार समानता $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ हो सकती है।

6. सम्मिश्र फलनः यदि z दो चर x तथा y का फलन है और तब ये चर t का फलन दिया जाता है, तब z को t का सम्मिश्र फलन कहा जाता है।

7. माना v_1 और v_2 दो सदिश समष्टि हो। एक प्रतिचित्रण $f!v_1 \to v_2$ को रैखिक रूपांतरण कहा जाता है।

1.8 सारांश

- समाकलन गणित का प्रतिपादन बर्नहार्ड रीमान द्वारा किया गया है और यह एक अंतराल पर एक फलन के अभिन्न भाग की पहली कठोर परिभाषा थी।
- बंद अंतराल का A विभाजन P $[a, b]$ के अंकों का एक निश्चित समूह है। इस तरह से

  $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$

  $a \quad = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n\text{-}1} < x_n = b$

- विभाजन के किसी भी दो लगातार अंकों के बीच अधिकतम अंतर को मानक या विभाजन की आदर्श या जाल कहा जाता है और उसे *'P'* के रूप में चिह्नित किया जाता है। अर्थात्

  $|P| \quad = \max \{ x_j - x_{j\text{-}1}, j = 1 \ldots n \}$

- बंद अंतराल पर f एक वास्तविक और बंधे हुए फलन $[\,a\,,\,b\,]$ साथ ही माना p का $[\,a\,,b\,]$ कोई भी विभाजन हो।

टिप्पणी

- एक फलन अपने डोमेन D में एक बिंदु c पर निरंतर है अगर किसी भी $\varepsilon>0$ को वहां $\delta>0$ मौजूद है जैसेः

  यदि $x \in D$ और $|x-c| < \delta$ $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$
- एक फलन अपने डोमेन D में संतत है यदि वह अपने डोमेन के प्रत्येक बिंदु पर संतत है।
- समाकलन का मूलभूत प्रमेय अविभाज्य और अवकलज के मध्य संबंध को दर्शाता है।
- f पर एक सतत फलन $[a,b]$ और $F\,[a,b]$ पर एक अवकल फलन होना चाहिए कि इस तरह $F^{'}(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

  तब $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- यदि $f(x),[a,b]$ पर सतत है तो $\exists\, \xi \in [a,b]$, जैसे कि

  $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$
- $f(x)$ का एक प्राथमिक एक फलन $g(x)$ है, जो अवकलज के रूप में $\frac{d}{dx}g(x) = f(x)$ है।
- दो चर के फलनों के प्रकरण में उस बिंदु पर आंशिक अवकलज के अस्तित्व को उस बिंदु पर संतत की आवश्यकता नहीं है।
- प्रतिलोम फलन fx, fy सामान्य रूप से x और y के फलन में होते हैं और इसलिए ये आंशिक अवकलज को x, y के संदर्भ में हल कर सकते हैं।
- यदि $z = f(x, y)$ दो स्वतंत्र चर x और y का एक फलन है, तो $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ और $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ हमेशा समान मान नहीं देते हैं।
- यदि $f{:}x \to R, X \subseteq R^2$ और $(a,b) \in X$ ऐसा है (i) fx मौजूद है $N(a,b)$ में और $(ii)\, fxy$ में संतत है (a,b) पर तब $fyx\,(a,b)$ मौजूद और $fxy\,(a,b)$ के बराबर है।
- यदि $f: X \to R, X \subseteq R^2$ और $(a,b) \in X$ इस प्रकार कि fx, fy पर भिन्न होते हैं (a,b) तब $fxy\,(a,b) = fyx(a,b)$।
- यदि z दो चर x तथा y का फलन है और तब ये चर t का फलन दिया जाता है, तब z को t का संमिश्र फलन कहा जाता है।

1.9 मुख्य शब्दावली

- **रीमान समाकलन** : वास्तविक विश्लेषण के रूप में जानी जाने वाली गणित की शाखा में बर्नहार्ड रीमान द्वारा बनाई गई रीमान समाकलन, एक अंतराल पर एक फलन के अभिन्न भागों की पहली कठोर परिभाषा दी। इसे 1854 में गोटिंगेन विश्वविद्यालय के संकाय में प्रस्तुत किया गया था।
- **एकदिष्ट फलन** : केवल स्मरण रखने के लिए बता दें कि, एकदिष्ट फलन वह फलन है जिसके लिए लगातार परिवर्तनशील चर में क्रमिक मान बढ़ते, घटते या स्थिर होते हैं।
- **अविभाज्य समाकलन** : समाकलन का मूलभूत प्रमेय अविभाजय और अवकलज के मध्य संबंध को दर्शाता है।
- **आंशिक अवकलज** : आंशिक अवकलज उस फलन में आये हुए अन्य चरों को अपरिवर्ती मानते हुए तथा केवल किसी एक चर को परिवर्ती मानते हुए उसके सापेक्ष उस फलन के अवकलज के बराबर होता है।
- **उच्चतर श्रेणी के आंशिक अवकलज** : प्रतिलोम फलन fx, fy सामान्य रूप से x और y के फलन में होते हैं और इसलिए ये आंशिक अवकलज को x, y के संदर्भ में हल कर सकते हैं।
- **संमिश्र फलन** : यदि z दो चर x तथा y का फलन है और तब ये चर t का फलन दिया जाता है, तब z को t का संमिश्र फलन कहा जाता है।
- **निहित फलन** : एक निहित समीकरण फलन का एक संबंध है, जहां कई चर का फलन होता है जो एक वास्तविक महत्वपूर्ण फलन है।

1.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. ज्ञात करें $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, (1, 2) पर, यदि $f(x, y) = 2x^2 + 2xy - y^2$ हों।

2. ज्ञात करें $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, (–1, 1) पर, यदि $f(x, y) = 5x^2 + xy\sin x - 10y^2$ हों।

3. सम्मिश्र फलनों की चर्चा करें।
4. व्युत्क्रम प्रमेय को हल और सिद्ध करें।
5. अंतर्निहित फलनों का वर्णन करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

दिखाएं कि मूल पर आंशिक अवकलज मौजूद है।

टिप्पणी

2. यदि $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$

दर्शायें कि $fx(0, 0) = 0$ और $fy(0, 0) = 0$

3. यदि $f(x, y) = xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$ जब $x^2 + y^2 \neq 0$ और $f(0, 0) = 0$, दर्शायें

$fx(x, 0) = 0$ $fy\ (0, y)$ और $fx\ (0, y) = -y$

4. यदि $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, है तो $fx(0, 0)$ और $fy\ (0, 0)$ ज्ञात करें।

5. सिद्ध करें कि फलन $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $(0, 0)$ पर अवकलनीय नहीं है। लेकिन fx और fy दोनों मूल पर रहते है जिनका मान 0 है।

6. दर्शायें कि फलन,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

7. यह सिद्ध करें कि परिमेय संख्याओं का एक समुच्चय एक गणनीय समुच्चय बनाता है।

8. अबीजीय संख्याओं का समुच्चय एक अप्राप्त समुच्चय बनाता है।

9. सिद्ध करें कि यदि $f(x) = k\ \forall x \in [a, b]$ जहां K अचर है, तो $f \in \mathrm{R}[a, b]$ और $\int_a^b K = K(b - a)$. दिया है कि f का वर्णन $[a, b]$ पर है।

10. माना $f(x) = x^2$ on $[0, 9]$ $9 > 0$. सिद्ध करें $f \in R[0, 9]$ और ज्ञात करें $\int_0^a f$.

11. निम्नानुसार $[1, 2]$ पर परिभाषित f के लिए उच्चतम और निम्नतम पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए,

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ जब x तर्कसंगत है।

$= 1 - x$ जब x तर्कहीन है।

12. ज्ञात करो $\int_1^2 x^3 dx$

1.11 सहायक पाठ्य सामग्री

Malik, S. C. and Savita Arora. 1991. *Mathematical Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Simmons, G. F. 2004. *Introduction To Topology And Modern Analysis*. New York: Tata McGraw-Hill Education.

Ahlfors, Lars V. 1978. *Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1986. *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Gupta, S. L. and Nisha Rani. 2003. *Fundamental Real Analysis*, 4th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Carothers, N. L. 2000. *Real Analysis*, 1st Edition. UK: Cambridge University Press.

Shilov, Georgi E. 2012. *Elementary Real and Complex Analysis*. Chelmsford: Courier Corporation.

Sharma, S.C. 2006. *Metric Space*. New Delhi: Discovery Publishing House.

Appostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis.* Boston: Addison Wesley.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*, 3rd Edition. New York: Macmillan Publishing Company.

इकाई 2 असंगत समाकलन, अभिसरण और फूरियर श्रृंखला

संरचना

2.0 परिचय

एक असंगत समाकलन, समाकलन दृष्टिकोण के अन्तराल (अंतरालों) के समापन बिंदु के रूप में या तो एक वास्तविक संख्या, ∞, $-\infty$, या कुछ अन्य उदाहरणों में दोनों समापन बिंदु दृष्टिकोण सीमा के रूप में, एक निश्चित समाकलन की सीमा है। इस तरह के समाकलन को प्रायः प्रतीकात्मक रूप में मानक निश्चित समाकलन की तरह लिखते हैं, वहीं कुछ अन्य स्थितियों में, अनन्तता के साथ, समाकलन की सीमा के रूप में लिखते हैं। संभवतः असंगत समाकलन को समाकलन की सीमाओं के बीच अनन्तता के साथ, प्रतीकात्मक रूप में, प्रायः मानक निश्चित समाकलन के रूप में लिखते हैं।

फलन में एक अपूर्वता के कारण या समाकलन की एक सीमा के अनन्त होने के कारण, प्रायः कोई भी असंगत समाकलन के मूल्यों की गणना करने में तब भी सक्षम होता है, यहां तक कि जब फलन पारंपरिक अर्थों में समाकलनीय नहीं है (उदाहरण के लिए, जैसे–रीमान समाकलन)।

एक आधी श्रृंखला फूरियर श्रृंखला एक फूरियर श्रृंखला (Fourier series) है जिसे एक समान अंतराल $[0, L]$ के बजाय अधिक सामान्य $[-L, L]$ के रूप में परिभाषित किया गया है, जिसका निहितार्थ यह है कि विश्लेषण किया गया फलन (Function) $f(x), x \in [0, L]$ होना चाहिए। $[-L, 0]$ या तो सम $(f{-}x)= f(x))$ या विषम फ़ंक्शन $(f{-}x)= -f(x))$ तक बढ़ाया जा सकता है। यह पूरी तरह से ज्या (Sine) या कोज्या (Cosine) श्रृंखला में फलन के विस्तार की अनुमति देता है। विषम और सम के बीच का चुनाव आमतौर पर $f(x)$ द्वारा संतुष्ट अंतर समीकरण से जुड़ी सीमा स्थितियों से प्रेरित होता है।

इस इकाई में आप असंगत समाकलन और उनके अभिसरण, तुलना परीक्षण, एबेल (Abel) और डिरिचलेट (Dirichlet) के परीक्षण, फ्रुलानी (Frullani) की समाकलन व्युत्पत्ति और एक परिमाप (Perameter) के एक फलन के समाकलन की समाकलनीयता, पूर्ण अंतराल की फूरियर शृंखला के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- असंगत समाकलन और उनके अभिसरण की व्याख्या कर पाएंगे;
- तुलनात्मक परीक्षण का वर्णन कर पाएंगे;
- एबेल और डिरिचलेट के परीक्षण को समझ पाएंगे;
- फ्रुलानी के समाकलन का वर्णन कर पाएंगे;
- एक परिमाप के एक फलन के समाकल की व्युत्पत्ति और समाकलनीयता को समझ पाएंगे;
- अर्ध और पूर्ण अंतराल की फूरियर शृंखला को समझ पाएंगे।

2.2 असंगत समाकलन और उनके अभिसरण

हम जानते हैं कि जब आप निश्चित समाकलन $\int_a^b f(x)dx$, की परिभाषा के बारे में विचार करते हैं कि तब इस परिभाषा की दो सीमायें होती हैं। पहला यह है कि फलन $f[a, b]$ पर परिबद्ध है और दूसरा है कि समाकलन $[a, b]$ के अंतराल से बाध्य होना चाहिए। अब मान ले कि इनमे से किसी एक नियम को पूरा नहीं किया जा सकता हैं या तो फलन f बंद अंतराल पर असीमित है $n \leq 1\,[a, b]$, यदि समाकलन की सीमाएं अनंत हो जाती हैं, तो समाकलन $\int_a^b f(x)dx$ को असंगत समाकलन कहा जाता है। असंगत समाकलन दो प्रकार के होते हैं–पहली तरह का असंगत समाकलन और दूसरा तरह का असंगत समाकलन। यदि या तो एक या दोनों ही समाकलन की सीमाएं अनंत पर हैं, लेकिन समाकल्य तथा परिशुद्ध समाकलन $\int_a^b f(x)dx$ को पहली तरह का असंगत समाकल कहा जाता है। यदि समाकलन की सीमाएं सीमित हैं लेकिन f असीमित है तो समाकलन समीकरण $\int_a^b f(x)dx$ दूसरी तरह का असंगत समाकलन कहा जाता है।

असंगत समाकलन का अभिसरण (Convergence of Improper Integral)

माना f एक फलन है जो बंद अंतराल $[a,\infty)$. पर परिबद्ध और निरंतर है। हम परिभाषित करते हैं कि,

$\int_a^\infty f(x)\,dx \lim_{x\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx$

या

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \lim_{N\to\infty}\int_a^{1/N} f(x)\,dx$$

यदि यह सीमा मौजूद है और परिमित है तो हम कहते हैं कि समाकलन $\int_a^\infty f(x)dx$ अभिसारी है अन्यथा हम कह सकते हैं कि समाकलन अपसारी है।

अब f एक फलन हो जो बंद अंतराल $[-\infty, a)$ पर निरंतर है। हम परिभाषित करते हैं,

$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \lim_{N\to-\infty}\int_N^a f(x)\,dx$

यदि यह सीमा मौजूद है और परिमित है तो हम कह सकते हैं कि समाकलन $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ अभिसारी है अन्यथा हम कह सकते हैं कि समाकलन अपसारी है।

अब हम सभी वास्तविक संख्याओं के लिए इस परिभाषा को परिभाषित करते हैं कि f फलन है जो सभी वास्तविक संख्याओं के लिए निरंतर है। यदि, कुछ वास्तविक संख्या a के लिए $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ और $\int_a^\infty f(x)dx$ अभिसरण होता है, तो हम $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \lim_{N\to-\infty}\int_a^\infty f(x)\,dx$ परिभाषित करते हैं और हम कह सकते है कि समाकलन $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ अभिसारी है। अन्यथा हम कह सकते हैं कि समाकलन अपसारी है।

एक अन्य परिभाषा कहती है कि $\int_a^\infty f(x)dx$ मान 1 के लिए अभिसरण है, यदि किसी भी दिए गए $\in < 0$, के लिए $\partial \succ 0$ मौजूद है।

$\left|\int_a^N f(x)\,dx - l\right| \prec \in$, प्रत्येक $N \geq \partial$ के लिए

2.3 तुलनात्मक परीक्षण

माना कि $f(x)$ और $\psi(x)$ दो फलन हैं जो अंतराल $[a, \infty]$ में परिबद्ध और समाकलनीय हैं। माना फलन $f(x)$ धनात्मक है और $|\psi(x)| \leq f(x)$ जब $x \geq a$, तब $\int_a^\infty f(x)dx$

टिप्पणी

अभिसारी (Convergent) होती है, यह इस बात का अनुसरण करती है कि आरेख $\int_a^\infty \psi(x)dx$ अभिसारी होता है और $\int_a^\infty \psi(x)dx \le \int_a^\infty f(x)dx$ भी अभिसारी होता है।

यह भी कहा जा सकता है कि यदि $|\psi(x)| \ge f(x)$ जब $x \ge a$ और $\int_a^\infty f(x)dx$ अपसारी है फिर $\int_a^\infty \psi(x)dx$ भी अपसारी है।

तुलना परीक्षण का एक और रूप है यदि, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\psi(x)}$ एक निश्चित संख्या है $(\ne 0)$, तो समाकलन $\int_a^\infty f(x)dx$ और $\int_a^\infty \psi(x)dx$ या तो दोनों अभिसारी हैं या दोनों अपसारी हैं।

प्रमेय 2.1: समाकलन $I = \int_a^\infty \frac{dx}{x^n}, a > 0,$ अभिसारी है जब $n > 1$, और अपसारी है जब $n \le 1$ ।

हल– एक असंगत समाकलन की परिभाषा के द्वारा,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_a^\infty x^{-n}dx$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{1-n}}{1-n}\right]_a^x, \quad n \ne 1$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{a^{-n}}{1-n}\right] \tag{2.1}$$

यदि $n < 1$ तब $1-n$ सकारात्मक है और इसलिए $\lim_{x\to\infty} x^{1-n} = \infty$ इसलिए समीकरण (2.1) का उपयोग करके $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \infty$

इसलिए दिया हुआ समाकलन अपसारी है,

जब $n < 1$

यदि $n > 1$ तब $1-n$ नकारात्मक है और इसलिए $\lim_{x\to\infty} x^{-n} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$

अतः दिया हुआ समाकलन अभिसारी है,

जब $n > 1$

अगर $n = 1$, तब

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^n} = \int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_a^N \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\log x\right]_a^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\log N - \log a\right]$$

$$= \infty - \log \mathrm{a}$$

$$= \infty$$

इसलिए दिया समाकलन भिन्न है,

जब $n = 1$ है

इसलिए, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ अभिसरित है जब $n > 1$ है और भिन्न है जब $n \le 1$, $z \ne R$ है।

2.4 एबेल और डिरिचलेट के परीक्षण

प्रमेय 2.2: यदि $\Sigma f_n(x)$ एक समुच्चय S पर समान रूप से परिवर्तित होता है और $\langle g_n(x)\rangle$ पर निरसीय होता है और समान रूप से S पर बँधा हुआ है, तब शृंखला $\Sigma f_n(x)$ $g_n(x)$ समान रूप से S पर परिवर्तित होती है।

प्रमाण : माना $R_n(x) = f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x),\ \forall\ x \in S$, तो

$f_{n+1}(x)\, g_{n+1}(x) + f_{n+2}(x)\, g_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)\, g_{n+p}(x)$

$= {}_1R_n(x)\, g_{n+1}(x) + [{}_2R_n(x) - {}_1R_n(x)]\, g_{n+2}(x) + ... + [{}_pR_n(x) - {}_{p-1}R_n(x)]\, g_{n+p}(x)$

$= {}_1R_n(x)\, [g_{n+1}(x) - g_{n+2}(x) + ... + {}_{p-1}R_n(x)\, [g_{n+p-1}(x) - g_{n+p}(x)] + {}_pR_n(x)\, g_{n+p}(x)$ ...(2.2)

चूंकि ,$\Sigma f_n(x)$ समान रूप से $\varepsilon > 0\ \exists\ m \in \mathbf{N}$ के लिए अभिसरण करता है,

$|{}_pR_n(x)| < \varepsilon\ \forall\ n \ge m$ और $p \ge 1$ और $x \in S$,

इसलिए, समीकरण (2.2) देता है

$f_{n+1}(x)\, g_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)\, g_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)\, g_{n+p}(x)|$

$< \varepsilon|g_{n+1}(x) - g_{n+2}(x) + g_{n+2}(x) - ... - g_{n+p}(x)| + \varepsilon\, |g_{n+p}(x)|$

$= \varepsilon\, |g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)| + \varepsilon\, |g_{n+p}(x)|$

$< \varepsilon.2k + \varepsilon.k = 3k\varepsilon\ \forall n \ge m$ और $p \ge 1$ और $x \in S$

$\langle g_n(x)\rangle$ के लिए समान रूप से परिबद्ध हो रहा है जैसे कि $\exists k > 0$

$|g_n(x)| < k \forall x \in S$ और $n \in N$

इसलिए, $\Sigma f_n(x)\, g_n(x), S$ पर समान रूप से अभिसारी है।

टिप्पणी

फलन श्रृंखला का एकसमान अभिसरण, अनंत श्रृंखला के खण्डशः समाकलन एवं अवकलन में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

ड्रिरिचलेट का समान अभिसरण के लिए परीक्षण (Dirichlet's Test for Uniform Convergance)

प्रमेय 2.3 डिरिचलेट परीक्षण (Dirichlet's Test) : माना कि X एक आव्यूह विस्तार है यदि फलन $f_n : X \to C, g_{n:} X \to R, n \in N$ निम्नलिखित को पूरा करते हैं:

(i) $F_n(x) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)$ n और x में समान रूप से परिबद्ध है।

(ii) सभी $x \in X$ और $n \in N$ के लिए $g_{n+1} \le g_n(x)$ है।

(iii) $\{g_n(x)\}_{n \in N}, X$ पर समान रूप से शून्य में अभिसारी है।

तब $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x), X$ पर समान रूप से अभिसारी है।

प्रमाण : हम भागों के द्वारा योग सूत्र (Summation) का उपयोग करके सिद्ध करेंगे कि,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(x)$$

$$= F_1(x) g_1(x) + \sum_{k=2}^{n} [F_k(x) - F_{k-1}(x)] g_k(x)$$

$$= F_1(x) g_1(x) + \sum_{k=2}^{n} F_k(x)(g_k)(x) - \sum_{k=2}^{n} F_{k-1}(x) g_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(x) g_k(x) - \sum_{k=1}^{n-1} F_k(x) g_{k+1}(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(x)[g_k(x) - g_{k+1}(x)] + g_{n+1}(x) F_n(x)$$

तो अगर $m > n$, mवाँ और nवाँ आंशिक योगफल के बीच का अंतर

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} F_k(x)[g_k(x) - g_{k+1}(x)] + g_{m+1}(x) F_m(x) - g_{n+1}(x) F_n(x)$$

यदि $M = \sup\{|F_n(x)| \, x \in X, n \in N\}$,

$$|s_m(x) - s_n(x)| \le m| \sum_{k=1+1}^{m} [g_k(x) - g_{k-1}(x)] + M g_{m+1}(x) + M g_{n+1}(x)$$

$$= M[g_{n+1}(x) - g_{m+1}(x)] + M\, g_{m+1}(s) + M\, g_{n+1}(x) \qquad \ldots (2.3)$$

$$= 2M\, g_{n+1}(x)$$

चूँकि $g_{m+1}(x) \geq 0, g_{n+1}(x) \geq 0,$ फिर सभी $g_k(x) - g_{k+1}(x) \geq 0$

प्रत्येक स्थाई $x,$ के लिए $\lim_{n\to\infty} g_{n+1}(x) = 0$, है। तब समीकरण (2.3) निश्चित करता है कि $\{s_n(x)\}$ **कॉउची (Cauchy) अनुक्रम** है और इसलिए अभिसारी है। सीमा (Limit) को s(x) रखने पर समीकरण (2.3) की लिमिट $m \to \infty$ लेते हुए देता है,

$$|s(x) - s_n(x)| \leq 2Mg_{n+1}(x)$$

चूंकि $g_{n+1}(x)$ $n \to \infty$ के रूप में $s_n(x)$ समान रूप से शून्य में अभिसरित होता है $S_n(x)$ एकसमान रूप से $S(x)$ में अभिसरित होता कि जैसे कि $n \to \infty$ ।

उदाहरण 2.1: हम तीन अलग–अलग घातांक शृंखलाओं पर विचार करेंगे, $\sum_{n\to 0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^n, \sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{R}\right)^n$ और $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{R}\right)^n$ के लिए कुछ निश्चित $R > 0$ होता है सभी तीन शृंखलाओं के लिए, अभिसरण की त्रिज्या $R, l \in \{0, 1, 2\}$ के लिए बिल्कुल विपरीत है।

हल–

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\frac{1}{n^l}\frac{1}{R^n}} = \frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}\sup\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^l = \frac{1}{R}$$

तो सभी तीन शृंखला सभी जटिल या सम्मिश्र संख्या z के लिए $|z| < R$ के साथ अभिसरण करती हैं और $|z| > R$ के साथ सभी जटिल संख्याओं के लिए अलग होती है।

$|z| = R$ के लिए, शृंखला $\sum_{n\to 0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^n$ से शुरू करें तो हम यथार्थ रूप से आंशिक योग की गणना कर सकते हैं,

$$F_n(z) = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{z}{R}\right)^m = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{z}{R}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{R}} & \text{यदि } z \neq R \\ n+1 & \text{यदि } z = R \end{cases} \qquad ...(2.4)$$

अब यदि $|z| < R,$ यह $n \to \infty$ के रूप में $\dfrac{1}{1-\frac{z}{R}}$ में अभिसरित होता है। इसके अलावा, यह $|z| > R$ के लिए अपसरण करता है क्योंकि $\left|\left(\frac{z}{R}\right)^{n+1}\right| = \left|\frac{z}{R}\right|^{n+1} \to \infty$। हम कह सकते हैं कि यह $|z| = R$ को अपसरण करता है जब–जब $z = R$ स्पष्ट है क्योंकि

टिप्पणी

$n+1 \to \infty$ होता है। $|z| = R$ के लिए $z \neq R$, के साथ $\left(\frac{z}{R}\right)^{n+1}$ अभिसरण नहीं कर सकता, क्योंकि

$$\left|\left(\frac{z}{R}\right)^{n+2} - \left(\frac{z}{R}\right)^{n+1}\right| = \left|\frac{z}{R}\right|^{n+1}\left|\frac{z}{R}-1\right| = \left|\frac{z}{R}-1\right|$$

n से स्वतंत्र है। तो ज्यामितीय श्रृंखला $\sum_{n\to 0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^{n}$ है। जिसकी त्रिज्या अभिसरण R है, सिर्फ और सिर्फ यह $|z| < R,$ पर निर्भर करता है।

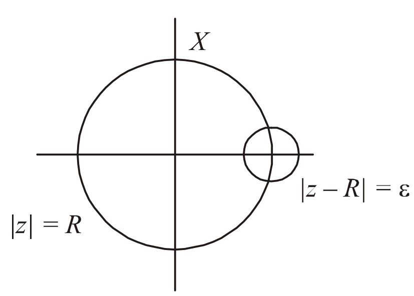
तीसरी श्रृंखला, $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{z}{R}\right)^{n}$, की $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ से तुलना करने पर, सभी $|z| \leq R$ के लिए अभिसरण है। जैसा कि, श्रृंखला की अभिसरण त्रिज्या R है, यह केवल और केवल $|z| \leq R$ पर ही अभिसरण है। मध्य श्रृंखला $\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{R}\right)^{n}$ अभिसरण का एक रोचक डोमेन रखती है। निश्चित ही अभिसरण की त्रिज्या R है, इसलिए श्रृंखला $|z| < R,$ के साथ, सभी सम्मिश्र संख्याओं z के लिए अभिसरण है तथा $|z| < R,$ के साथ सभी सम्मिश्र संख्याओं के लिए विचलन करती है। $z = R$ के लिए, श्रृंखला $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{R}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, , जो कि अभिसरण है। इसलिए, $|z| = R$ को छोड़ते हुए, लेकिन $z \neq R,$ के साथ। इस स्थान पर डिरिचलेट का परीक्षण उपयोग में आता है। किसी भी $\varepsilon > 0$ एवं समुच्चय के लिए,

$$X = \{z \in \mathbb{C} \,\|\, z \,|= R, \,|\, z - R \,|\geq \varepsilon\}$$

$$f_n(z) = \left(\frac{z}{R}\right)^{n}$$

$F_n(z) = \sum_{m=0}^{n}\left(\frac{z}{R}\right)^{m}$ जैसे समीकरण (2.4) में है।

$$g_n = \frac{1}{n}$$



टिप्पणी

$z \in X$ के लिए,

$$|F_n(z)| = \left| \frac{1-\left(\frac{z}{R}\right)^{n+1}}{1-\frac{z}{R}} \right| \le \frac{1+\left|\frac{z}{R}\right|^{n+1}}{\frac{1}{R}|R-z|} \le \frac{2R}{\varepsilon}$$

इसलिए डिरिचलेट के परीक्षण की परिकल्पना से संतुष्ट होता है और श्रृंखला X पर समान रूप से परिवर्तित होता है। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sum_{n\to 0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z}{R}\right)^n$, $|z| < R$ और $|z| = R, z \neq R,$ के लिए अभिसरण होता है और विचलन के लिए,

$$|z| > R \text{ और } z = R,$$

2.5 फ्रुलानी का समाकलन

फ्रुलानी (Frullani) के समाकलन को हम निम्न विधि द्वारा समझ सकते हैं।

माना कि जब $\int_{a+\in}^{b} f(x)dx$ अन्तराल $a \le x \le b$ पर बाध्य है तथा $\psi(x)$ अन्तराल $a \le x \le b$ पर बाध्य तथा एकदिष्ट है, $x \to a$ की भाँति शून्य में परिवर्तित करने पर, $\int_a^b f(x)dx.\psi(x)dx$ अभिसरण है।

उदाहरण 2.2: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/2}}$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– दिया हुआ है $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/2}}$

अनुचित समाकलन की परिभाषा से,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/2}} &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^{5/2}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{5/2}\, dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-3/2}}{-3/2}\right]_1^N \\
&= -\frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \left[N^{-3/2}\right]_1^N \\
&= -\frac{2}{3} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N^{3/2}} - 1\right] \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

टिप्पणी

जैसा कि सीमा एक निश्चित मान के लिए मौजूद है, दिया गया समाकलन अभिसारी है।

उदाहरण 2.3: अभिसरण $\int_0^\infty e^{3x} dx$ का परीक्षण करें।

हल– दिया हुआ है $\int_0^\infty e^{3x} dx$

असंगत समाकलन की परिभाषा से,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{3x} dx &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{3x} dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^N \\
&= \frac{-1}{3} \lim_{N\to\infty} \left[e^{-3x} \right]_0^N \\
&= \frac{-1}{3} \lim_{N\to\infty} \left[e^{-3N} - 1 \right] \\
&= \frac{-1}{3} [0-1] \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

जैसा कि सीमा एक निश्चित मान के लिए मौजूद है, दिया गया समाकलन अभिसारी है।

उदाहरण 2.4: $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ के अभिसरण का परीक्षण करे।

हल– दिया हुआ $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ है

असंगत समाकलन की परिभाषा से,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_1^N [\log x]_1^N \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_1^N [\log N - 0] \\
&= \infty
\end{aligned}$$

चूंकि सीमा मौजूद नहीं है, समाकलन अपसारी है।

उदाहरण 2.5: $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{1/3}}$ के अभिसरण का परीक्षण करे।

हल– दिया हुआ है $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{1/3}}$

असंगत समाकलन की परिभाषा से,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^{1/3}} = \lim_{x\to\infty}\int_0^N (1+x)^{1/3}\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(1+x)^{2/3}}{2/3}\right]_0^N$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\left[(1+x)^{2/3}\right]_0^N$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{N\to\infty}\left[(1+N)^{2/3}-1\right]$$

$$= \infty$$

चूंकि सीमा मौजूद नहीं है इसलिए समाकलन अपसारी है।

उदाहरण 2.6: $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– दिया हुआ है $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$

असंगत समाकलन की परिभाषा से,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^0 e^{-x}dx$$

$$= \left[e^x\right]_{-N}^0$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[1-e^N\right]$$

$$= 1-0 = 1$$

जैसा कि सीमा एक निश्चित मान के लिए मौजूद है, दिया गया समाकलन अपसारी है।

उदाहरण 2.7: $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– दिया हुआ है $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$

असंगत समाकलन की परिभाषा से,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^0 e^{-x}dx$$

टिप्पणी

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{-N}^{0}$$

$$= -\lim_{N\to\infty}\left[1-e^{-N}\right]_{N}^{0}$$

$$= \infty$$

चूंकि सीमा मौजूद नहीं है, समाकलन अपसारी है।

उदाहरण 2.8: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– दिया हुआ है $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$

हम जानते हैं कि $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$ (उदाहरण 2.6 और उदाहरण 2.7 के परिणामों का उपयोग करके)

$$= \infty + 1 = \infty$$

जैसा कि निश्चित रूप से सीमा मौजूद नहीं है, दिया गया समाकलन अपसारी है।

उदाहरण 2.9: $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– माना कि $f(x) = \frac{\cos 2x}{1+x^2}$, $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$

तब *f(x)* अंतराल (0, ∞) में धनात्मक है और हमारे पास है।

$$|f(x)| = \left|\frac{\cos 2x}{1+x^2}\right|$$

$$= \frac{|\cos 2x|}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{1}{1+x^2} \text{ क्योंकि } |\cos 2x| \leq 1$$

इसलिए, $|f(x) \leq |\psi(x)|, \ \forall x \geq 0$

और $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad = \lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_{0}^{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\tan^{-1} N - \tan^{-1} 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ वास्तविक संख्याएं (Real Number)}$$

टिप्पणी

इसलिए $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ अभिसरण है, और तुलना परीक्षण द्वारा $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{1+x^2}$ अभिसरण भी है।

उदाहरण 2.10 : $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– माना कि $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x)$ अंतराल (π,∞) में बंधा हुआ है और $\psi(x)$ अंतराल (π,∞) में धनात्मक है।

अब $$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|$$

$$= \frac{|\sin x|}{x^2}$$

$$\leq \frac{1}{x^2} \text{ क्योंकि } |\sin x| \leq 1$$

इसलिए, $|f(x) \leq |\psi(x)|$, $\forall x \geq 0$ और $\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^2}$ अभिसरण है।

इसलिए, तुलना परीक्षण $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^2}$ द्वारा भी अभिसरण है।

उदाहरण 2.11 : $\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

हल– माना कि $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$

फलन $f(x)$ अंतराल में विभाजित है $(3\ \infty)$ और $\psi(x)$ के लिए $(3, \infty)$ धनात्मक है।

अब $|f(x) = \left|\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right| > \frac{1}{x}$ जब $x \geq 3$

और $\int_3^\infty \frac{dx}{x}$ अपसारी है।

इसलिए, $\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ तुलना परीक्षण द्वारा भी भिन्न है।

टिप्पणी

उदाहरण 2.12 सिद्ध करे कि $\int_0^1 \frac{\sec 2x}{x} dx$ अपसारी है।

हल– माना कि $f(x) = \frac{\sec 2x}{x}$, $\psi(x) = \frac{1}{x}$

जैसे कि $$|f(x)| = \left|\frac{\sec 2x}{x}\right|$$

$$= \frac{|\sec 2x|}{x} \qquad \text{क्योंकि } |\sec 2x| \le 1, \ \forall x$$

$$\le \frac{1}{x}$$

और $|f(x) \le |\mathbf{g}(x)|$

और $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ अपसारी है, इसलिए तुलनात्मक परीक्षण द्वारा, $\int_0^1 \frac{\sec 2x}{x}$ अपसारी भी अपसारी है।

उदाहरण 2.13: $\int_a^\infty \left(1-e^{-x}\right).\frac{\cos 2x}{x^2}$, के अभिसरण का परीक्षण करें, जब a>0।

हल– माना कि $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^2}$ और $\psi(x) = 1-e^{-x}$

अब $$|f(x) = \left|\frac{\cos 2x}{x^2}\right|$$

$$= \left|\frac{\cos 2x}{x^2}\right|$$

$$\le \frac{1}{x^2} \quad \text{क्योंकि } |\cos 2x| \le 1$$

अब $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ अभिसरण है, इसलिए तुलनात्मक परीक्षण द्वारा $\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x^2} dx$ अभिसारी है ।

अब $\psi(x) = 1-e^{-x}$ एकदिष्ट (Monotonic) बढ़ रही है और इसके लिए बाध्य है।

इसलिए, $\int_a^\infty \left(1-e^{-x}\right).\frac{\cos 2x}{x^2}$ ऐबल (Abel's) का परीक्षण अभिसारी है।

उदाहरण 2.14: $\int_a^\infty \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx,$ समाकलन के अभिसरण का परीक्षण करें, जब $a > 0$।

हल– माना कि $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\psi(x) = \sin 2x$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ सीमित है $\forall x \geq a$ और $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ एकदिष्ट घट रहा है।

इसलिए, $\left|\int_a^x \psi(x)dx\right| = \left|\int_a^x \sin 2x\, dx\right|$

$= |\cos 2a - \cos 2x|$

≤ 2 $\quad \forall x$ के निश्चित मान से

($\therefore$ $\cos x$, -1 से 1 के बीच में आधारित है)

x के सभी $\left|\int_a^x \psi(x)dx\right|$ परिमित मूल्यों के लिए बाध्य है।

इसलिए, डिरिचलेट के परीक्षण द्वारा $\int_a^\infty \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}dx$ अभिसारी है।

उदाहरण 2.15: सिद्ध करें कि,

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}.\sin 3x}{x^2}dx$$

हल– दिए है,

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}.\sin 3x}{x^2}dx$$

माना कि $\quad f(x) = \int_a^\infty \frac{\sin 3x}{x^2}$, $\psi(x) = e^{-x}$

जैसे $\quad |f(x) = \left|\frac{\sin 3x}{x^2}\right|$

$= \frac{1}{x^2}$ $\quad$ [क्योंकि $\sin x \leq \forall a$]

और $\int_s^\infty \frac{dx}{x^2}$ अभिसारी है, इसलिए तुलनात्मक परीक्षण द्वारा $\int_s^\infty \frac{\sin 3x}{x^2}dx$ अभिसारी है।

अब e^{-x} मोनोटोनिक घटता है और $x > a$ के लिए परिबद्ध फलन है। इसलिए एबेल के परीक्षण द्वारा $\int_s^\infty \frac{e^{-x}\sin 3x}{x^2}dx$ अभिसारी है।

उदाहरण 2.16: सिद्ध करें कि समाकलन $\int_0^\infty \frac{e^{-2x}.\sin 3x}{x}dx$ अभिसारी है।

हल– हम जानते है कि,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x}.\sin 3x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-2x}.\sin 3x}{x}dx + \int_a^\infty \frac{e^{-2x}.\sin 3x}{x}dx$$

के लिए $\forall a > 0$

अब जैसा कि, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}dx$ एक संगत समाकलन है और इसलिए यह अभिसारी है।

अब हम अभिसरण $\int_0^\infty \frac{e^{-2x}.\sin 3x}{x}dx$ की जाँच करेंगे,

माना $$f(x) = \frac{e^{-2x}}{x},\ \psi(x) = \sin x$$

और $$\left|\int_a^x \psi(x)\right| = \left|\int_a^x \sin x\, dx\right|$$

$= |\cos a - \cos x| \le 2\ \ \forall\ x$ का परिमित मान है।

इसलिए, $\left|\int_a^x \psi(x)dx\right|$ x के सभी परिमित मानों के लिए बाध्य है।

और $f(x) = \frac{e^{-2x}}{x}$ परिबद्ध है और एकदिष्ट घटता है और

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{2x}} = 0$$

इसलिए, डिरिचलेट (Dirichlet's) के परीक्षण द्वारा $\int_0^\infty \frac{e^{-2x}.\sin x}{x}dx$ अभिसारी है और दो समाकलन का योग भी अभिसारी है।

2.6 एक मापदण्ड के एक फलन के समाकल की व्युत्पत्ति और समाकलनीयता

सामान्य रूप में, यह सच नहीं है कि एक मापदण्ड के सापेक्ष समाकलन चिह्न के अधीन असंगत समाकलनों का अवलकन किया जा सकता है या समाकलन किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, मूल समाकलन के क्रम में ये संक्रियाएं परस्पर परिवर्तनीय नहीं हैं।

यह निर्धारित करने के लिए कि क्या असंगत पुनरावृति वाले समाकलनों में समाकलन का क्रम प्रतिवर्ती है, हम प्रायः निम्नलिखित परीक्षण का उपयोग कर सकते हैं या फिर निम्न प्रमाण के आधार पर विशेष जांच कर सकते हैं।

टिप्पणी

यदि असंगत समाकलन

$$f(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy$$

$\alpha \le x \le \beta$, अंतराल में समान रूप अभिसरित होता है, तब

$$\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx$$

प्रमाण के लिए, हम निर्धारित करते हैं,

$$\int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^A f(x, y)dy + R_A(x)$$

तब, धारणा द्वारा $|R_A(x)| < \varepsilon(A)$, जहां $\varepsilon(A)$ एक संख्या है जो केवल A पर निर्भर करती है और x पर नहीं और शून्य $A \to \infty$ हो जाती है। साधारण समाकलन के लिए प्राथमिक प्रमेय के आधार पर हमारे पास है,

$$\int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_\alpha^\beta dx \int_0^A f(x, y)dy + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx$$

$$= \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx + \int_\alpha^\beta R_A(x)dx$$

जब समाकलन के मध्य मान प्रमेय द्वारा,

$$\left| \int_\alpha^\beta dx \int_0^\infty f(x, y)dy - \int_0^A dy \int_\alpha^\beta f(x, y)dx \right| \leqq \varepsilon(A)\,|\beta - \alpha|$$

यदि हम अब A को अनंत तक जाने देते हैं, तो हम उपरोक्त सूत्र प्राप्त करते हैं।

यदि एक परिमाप के संबंध में समाकलन भी अनंत समाकलन अंतराल पर होता है, तो क्रम में परिवर्तन सदैव संभव नहीं है, भले ही अभिसरण एकरूप हो। हालांकि, यह किया जा सकता है यदि दो असंगत समाकलन मौजूद है। इस प्रकार, उदाहरण के लिए,

$$\int_0^\infty dn \int_0^\infty f(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)dx$$

यदि वृत्त के चतुर्थ भाग में, वहाँ पहले से दो समाकलन $\iint f(x, y)dxdy$ उपस्थित हैं।

इसका प्रमाण इस तथ्य से मिलता है कि अनुचित द्वि–पूर्णांकीय समाकलन के क्षेत्र के लिए सन्निकटन विधा से स्वतंत्र है। एक प्रकरण में, हम इस सन्निकटन (Approximation) को x–अक्ष के समांतर अनंत चरण के द्वारा निष्पादित करते हैं, दूसरे प्रकरण में, चरण द्वारा y–अक्ष के समानांतर चरण के द्वारा निष्पादित करते हैं।

$$\int_a^b f(x, y)dy$$

एक समान परिणाम यह भी होता है, अगर समाकलन का अंतराल परिमित है, लेकिन समाकलन सीधी रेखाओं की परिमित संख्या $y =$ स्थिरांक के साथ या समाकलन के क्षेत्र में अधिक सामान्य वक्रों की परिमित संख्या के साथ बंद है। संबंधित प्रमेय यह है: यदि x अंतराल $\alpha \le x \le \beta$, में निहित है, तो फलन $f(x, y)$ केवल सीधी रेखाओं के परिमित संख्या $y = a_1, y = a_2, \ldots, y = a_r$, और यदि यह समाकलन है।

टिप्पणी

$$\int_a^\beta dx \int_a^b f(x, y)dy = \int_a^b dy \int_a^\beta f(x, y)dx$$

x में समान रूप से परिवर्तित होता है, फिर यह इस अंतराल में x के एक सतत फलन का निरूपण करता है, और

$$F(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy \text{ और } \int_0^\infty f(x, y)dy$$

फिर समान रूप से अभिसरण करें,

$$F'(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy$$

इस प्रकार, इन शर्तों के तहत, एक मापदण्ड के संबंध में समाकलन और अवकलन के क्रम को आपस में जोड़ा जा सकता है। वास्तव में, अगर हम निर्धारित करते हैं तो,

$$G(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy$$

तब, विनिमेयता के प्रमेय (Theorem of Interchangeability) का उपयोग करके सिर्फ सिद्ध होता है, अब हमारे पास है,

$$\int_\alpha^\xi G(x)dx = \int_\alpha^\xi dx \int_0^\infty f_\infty(x, y)dy = \int_0^\infty dy \int_\alpha^\xi f_\infty(x, y)dx$$

पूर्णांकों और दाहिने हाथ की ओर मान है।

$$\int_\alpha^\xi f_x(x, y)dx = f(\xi, y) - f(a, y)$$

जहां से,

$$\int_\alpha^\xi G(x)dx = F(\xi) - F(a)$$

इसलिए, अगर हम अंतर करते हैं और फिर x द्वारा ξ प्रतिस्थापित करते हैं, तो हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{dF(x)}{dx} = G(x) = \int_0^\infty f_x(x, y)dy$$

जैसा कि सिद्ध किया जाना था।

इसी तरह, हम सीमा के लिए नियम का विस्तार कर सकते हैं जब सीमा में से एक मापदण्ड x पर निर्भर करता है। वास्तव में, हम लिख सकते हैं,

$$\int_{\phi(x)}^\infty f(x, y)dy = \int_{\phi(x)}^a f(x, y)dy + \int_a^\infty f(x, y)dy$$

जहां समाकलन के अंतराल में कोई निश्चित मान है; तब हम दाहिने हाथ की ओर दो शब्दों में से प्रत्येक में पहले से सिद्ध नियम का प्रयोग कर सकते हैं।

जैसा कि पहले दिया गया था, हमारे अवकलन के नियम समाकलन के सीमित अंतराल के साथ असंगत समाकलन के लिए भी हैं।

समाकलन पर विचार करें,

$$\int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x}. \quad (x > 0)$$

यदि $x \geq 1$, यह समाकलन समान रूप से परिवर्तित होता है, क्योंकि हमारे पास A के धनात्मक मान हैं।

टिप्पणी

$$\int_A^\infty e^{-xy} dy \leq \int_A^\infty e^{-y} dy = e^{-A}$$

यह दाहिने हाथ की ओर अब x पर निर्भर नहीं करता है और इसे जितना चाहें उतना छोटा बनाया जा सकता है, अगर हम पर्याप्त रूप से बड़ा चुनते हैं। वही x के संबंध में फलन के आंशिक अवकलज के समाकलन अंग के बारे में सच है। बार–बार अवकलन के द्वारा, हम प्राप्त करते हैं कि,

$$\int_0^\infty ye^{-xy} dy = \frac{1}{x^2}, \int_0^\infty y^2 e^{-xy} dy = \frac{2}{x^3}, \ldots, \int_0^\infty y^n e^{-xy} dy = \frac{n!}{x^n + 1}.$$

विशेष रूप से, यदि हम $x = 1$, निर्धारित करते हैं, तो हमारे पास है,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty y^n e^{-y} dy = n!$$

अगले, समाकलन पर विचार करें।

$$\int_0^\infty \frac{dy}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x}$$

पुनः हमारे लिए यह समझना आसान है कि अगर $x \leq a$, जहाँ a कोई धनात्मक संख्या है। समाकलन संकेत के तहत अवकलन के लिए आवश्यक सभी धारणाएं संतुष्ट हैं। इसलिए, हम पुनरावृत्त अवकलन करके सूत्रों का क्रम प्राप्त करते हैं।

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3}, \int_0^\infty \frac{dy}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{x^5}, \ldots$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2 + y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3 \ldots .(2n-3)}{2.4 \ldots .(2n-2)} \cdot \frac{1}{x^{2n-1}}.$$

इन सूत्रों से, हम π के लिए वाल्लि के (Wallis's) गुणनफल का एक और प्रमाण प्राप्त कर सकते है। वास्तव में, यदि हम $x = \sqrt{n}$ रखते है, तो हमारे पास है।

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1 + y^2/n)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3 \ldots .(2n-3)}{2.4 \ldots .(2n-2)} \sqrt{n}$$

जैसे ही n बढ़ता है, बाएं हाथ की ओर समाकलन हो जाता है,

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{x}$$

वास्तव में, अंतर

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1 + y^2/n)^n}$$

असमानता को संतुष्ट करता है।

टिप्पणी

$$\left|\int_0^\infty e^{-y^2}dy - \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}\right| \le \int_0^T \left|e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right| dy$$

$$+\int_T^\infty e^{-y^2}dy + \int_T^\infty \frac{dy}{(1+y^2/n)^n}$$

हालाँकि, यदि हम T को इतना बड़ा चुनते हैं।

$$\int_T^\infty e^{-y^2}dy + \frac{1}{T} < \frac{\varepsilon}{2}$$

और फिर n इतनी बड़ी है कि,

$$\int_0^T \left|e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right| dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

जैसा कि प्रक्रिया के समरूप अभिसरण के आधार पर किया जा सकता है।

$$\lim_{n\to\infty} (1+y^2/n)^{-n} = e^{-y^2}$$

यह एक बार में इस प्रकार है।

$$\left|\int_0^\infty \left(e^{-y^2} - \frac{1}{(1+y^2/n)^n}\right) dy\right| < \varepsilon$$

यह संबंध स्थापित करता है।

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

जो वाल्लि (Wallis's) के गुणन के बराबर है।

समाकलन की गणना करने के लिए हम ले सकते हैं,

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy$$

हम फलन पर चर्चा करेंगे,

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

समाकलित रहते हुए यह समाकलन समान रूप से $x \ge 0$, हो जाता है।

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy$$

यदि समान रूप से $x \ge \delta > 0$, जहां n एक अव्यवस्थित रूप से छोटी धनात्मक संख्या है। इन दोनों कथनों को यहाँ सिद्ध किया गया है। इसलिए, यदि $x \ge 0$ और, यदि $x \ge \delta$, है, तो $F(x)$ निरंतर या सतत है।

टिप्पणी

$$F'(x) = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy .$$

हम आसानी से दो बार समाकलन करके इस अंतिम समाकलन का मूल्यांकन कर सकते हैं। हमने प्राप्त किया,

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

इसलिए, हम समाकलन द्वारा $F(x)$ का मान पा सकते हैं;

यह मान है,

$$F(x) = \text{arcot}x + C$$

जहां C एक स्थिरांक है। इस संबंध के आधार पर,

$$\left|\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy\right| \leq \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{e^{-xy}}{x}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{x}$$

जो प्राप्त करता है यदि $x \geq \delta,$ हम देखते है कि $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ तब C भी 0 होना चाहिए और हम पाते हैं,

$$F(x) = \text{arcot}x$$

$x \geq 0$ के लिए $F(x)$ की निरंतरता के कारण,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy$$

जोकि, चूंकि है,

$$\lim_{x\to 0} \text{arcot}\, x = \frac{\pi}{2}$$

आवश्यक सूत्र देता है।

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$$

अब हम इस प्रमाण पर लौटते हैं कि,

$$\int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

समान रूप से अभिसरित होता है, यदि $x \geq 0$ यदि A एक विवेकाधीन संख्या है, $k\pi$ है, π का एक न्यूनतम गुणज है, जो A से अधिक है, तो हम शेष को समाकलन के रूप में लिख सकते हैं।

$$\int_A^\infty e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy = \int_A^{k\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy + \sum_{v=k}^{\infty} \int_{v\pi}^{(v+1)\pi} e^{-xy} \frac{\sin y}{y} dy$$

दाहिने हाथ की ओर श्रृंखला के पदों में परिवर्तनशील संकेत हैं और उनका निरपेक्ष मान एकदिष्ट रूप से शून्य पर पहुंच जाता है, जहां लिबनिट्ज (Leibnitz's)

टिप्पणी

अभिसरण परीक्षण द्वारा, श्रृंखला अभिसरण करती है और इसके योग का निरपेक्ष मान इसके पहले की तुलना में कम है और हमारे पास भिन्नता है

$$\left|\int_A^\infty e^{-xy}\frac{\sin y}{y}dy\right| < \int_A^{(k+1)\pi} e^{-xy}\frac{|\sin y|}{y}dy < \int_A^{(k+1)\pi}\frac{1}{A}dy < \frac{2\pi}{A}$$

जिसमें दाईं ओर का भाग x से स्वतंत्र होता है और इसे जितना चाहें उतना छोटा बनाया जा सकता है। यह अभिसरण की एकसमानता स्थापित करता है।

एकसमान अभिसरण है।

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin y\, dy$$

निम्न संबंध का एक बार अनुसरण करता है।

$$\int_A^\infty \left|e^{-xy}\sin y\right| dy \leqq \int_A^\infty e^{-xy}dy = \frac{e^{-Ax}}{x} \leqq \frac{e^{-A\delta}}{\delta}$$

समाकलनों के एकरूप अभिसरण की पर्याप्त स्थिति है। समाकलन अभिसरण के क्रम की विनिमेयता पर्याप्त नहीं है, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण से पता चलता है।

अगर हम निर्धारित करते हैं $f(x, y) = (2-xy)xye^{-xy}$, तब, चूंकि

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2e^{-xy})$$

समाकलन $\int_0^\infty f(x,y)dy$, अंतराल $0 \le x \le 1$ में प्रत्येक x के लिए अस्तित्व में है, और तथ्यात्मक रूप में, ऐसे किसी भी x का मान, जो यह धारित करता है, का मान शून्य है, अतः

$$\int_0^1 dx\int_0^\infty f(x,y)dy = 0$$

दूसरी ओर,

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y\, e^{-xy})$$

हर $y \ge 0$ के लिए, हमारे पास है,

$$\int_0^1 f(x,y)dx = y\, e^{-y}$$

और इसीलिए,

$$\int_0^\infty dy\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^\infty y\,e^{-y}dy = \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$$

इस प्रकार,

$$\int_0^1 dx\int_0^\infty f(x,y) \neq \int_0^\infty dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

2.7 अर्ध और पूर्ण अंतराल की फूरियर श्रृंखला

फूरियर श्रृंखला (Fourier Series) का उपयोग आवधिक फलन के अनंत श्रृंखला निरुपण के रूप में किया जाता है और यह विस्तार के लिए त्रिकोणमितीय ज्या (Sine) और कोज्या (Cosine) फलनों का उपयोग करता है इसका मुख्य अनुप्रयोग साधारण और आंशिक अवकल समीकरणों का समाधान करना है। यह अवकल समीकरणों को विशेषकर आवधिक फलनों के साथ हल करने का एक शक्तिशाली साधन है जो गैर–समरूप पदों के रूप में प्रकट होता है। इसका व्यापक अनुप्रयोग होता हैं क्योंकि यह आवधिक फलनो के साथ–साथ सतत फलनो और असतत फलनो के लिए वैध होता है।

फलन $f(x)$ को आवधिक कहा जाता है यदि $f(x+T) = f(x)$, कुछ धनात्मक संख्याओं T के लिए वास्तविक x, $f(x)$ का आवधिक है। $f(x)$ की लघुतम धनात्मक अवधि, $f(x)$ की प्राथमिक या आधारभूत अवधि कहलाती है।

उदाहरण के लिए, cosec$x$, sin$x$, sec$x$, cosec$x$ आवधिक फलन हैं 2π और cot$x$, tan$x$, के साथ आवधिक π अवधि हैं सामान्य तौर पर, इसे परिभाषित किया जा सकता है,

यदि $$f(x+nT) = f(x), \quad n \neq 0$$

तब $T, f(x)$ की अवधि है और nT किसी भी पूर्णांक n के लिए f की अवधि है।

यदि $f(x)$ अवधि T का एक आवधिक फलन है, $a \neq 0$ के साथ तब $f(ax)$, एक $\frac{T}{a}$ अवधि का आवधिक फलन है।

उदाहरण के लिए, $cos 2x$ की अवधि है $\frac{2\pi}{3} = \pi$ और $sin 3x$ की अवधि $\frac{2\pi}{3}$ है

यदि $f(x)$ और $g(x)$ की अवधि T है, तब की अवधि T है, जहां a और b स्थिरांक हैं।

एक निरंतर फलन किसी भी धनात्मक अवधि T के लिए आवधिक है। एक अवधि कई आवधिक फलनो का योग, अवधियों का कम से कम सामान्य गुण है।

यदि कोई कार्य अवधि 2π है, तो त्रिकोणमितीय श्रृंखला $f(x)$ के रूप में दिया गया है।

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

जहां, $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{a_0}^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

टिप्पणी

और $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

जहां $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots$

a_0, a_n और b_n को फूरियर गुणांक (Fourier Coefficiant) कहलाता है।

जैसे,

(i) $\int_0^{2\pi} \cos mx.\cos nx\, dx = 0 \qquad m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$

(ii) $\int_0^{2\pi} \cos mx = 0$

(iii) $\int_0^{2\pi} \sin mx = 0$

(iv) $\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \qquad m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$

(v) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \qquad m \neq n, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$

(vi) $\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi$

(vii) $\int_0^{2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi$

(viii) $\int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx\, dx = 0$

उदाहरण 2.17: $f(x) = e^{2x}$ in $(0, 2\pi)$ के लिए फूरियर शृंखला प्राप्त करें।

हल– हम जानते हैं कि फूरियर विस्तार है,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin ax\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x\right)dx$$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax} dx$$

$$= \left[\frac{e^{ax}}{\pi}\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\left(e^{2a\pi} - 1\right)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax} \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax}\left[a\cos nx + n\sin nx\right]}{a^2 + n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{ae^{2a\pi} - 1}{a^2 + n^2}\right)}$$

और $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax} \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax}\left[a\sin nx + n\cos nx\right]}{a^2 + n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \boxed{b_n = \frac{n}{\pi\left(a^2 + n^2\right)}\left(1 - e^{2a\pi}\right)}$$

इसलिए, $$f(x) = \frac{\left(e^{2a\pi} - 1\right)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{a=1}^{\infty}\frac{-n\sin nx}{a^2 + n^2}\right] + \frac{\left(ae^{2a\pi} - 1\right)}{\pi}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{a^2 + n^2}$$

उदाहरण 2.18: $(0, 2\pi)$ के लिए $f(x) = x$ का फूरियर श्रृंखला ज्ञात करें और, $f(x)$ का -6π से 6π तक ग्राफ या आरेख अनुरेखित करें।

हल– हम जानते हैं कि,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

जहां $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^2 - 0\right) = 2\pi$$

$$\boxed{a_0 = 2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x.\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{(1-1)}{n^2}\right]$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

और

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n}\right)$$

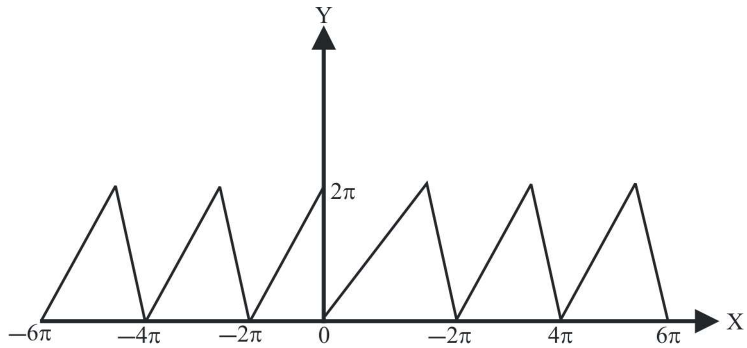
$$b_n = -\frac{2}{n}$$

इसलिए, फूरियर श्रृंखला है,

$$f(x) = \frac{2\pi}{2} + 0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$= \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

टिप्पणी



उदाहरण 2.19: $f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ में $(0, 2\pi)$ के लिए फूरियर श्रृंखला प्राप्त करें।

हल– हम जानते हैं कि,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

जहां
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{-(\pi - x)^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\pi - x)^2 \sin nx}{n} - \frac{2[-(\pi - x)](\cos nx)}{n^2} + \left(\frac{-2x \sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n^2}}$$

एवं
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[(\pi - x)^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) + 2(\pi - x)\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{2}{n^3}(-\cos nx)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}(0+0)$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

इसलिए, फूरियर शृंखला है,

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} + 0$$

$$= \frac{\pi}{12}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

उदाहरण 2.20: $f(x)$ की फूरियर शृंखला ज्ञात करें।

जहां

$$f(x) = \begin{bmatrix} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{bmatrix}$$

और इसलिए सिद्ध कीजिए $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ---- = \frac{\pi^2}{8}$

हल– हम जानते हैं कि,

जहां $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{\pi}^{0} f(x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi)dx + \int_{\pi}^{0} xdx\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{-\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x).\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-\pi}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

टिप्पणी

$$= 0+\frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]}$$

और
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x).\sin x\, dx+\int_{0}^{\pi} f(x).\sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\, dx+\int_{0}^{\pi} x\sin nx\, dx\right]$$

$$= \left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{\sin x}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\left[1-(-1)^n\right]-\frac{(-1)}{n}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{n}\left[1-2(-1)^n\right]}$$

इसलिए

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1^n-1)}{n^2}\right\}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{1-2(-1)^n\right\}\sin nx$$

अब $x=0, f(x)$ के अनिरंतर का एक बिंदु है।

जैसा कि
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(0-0)+f(0+0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-\pi+0)]$$

$$= \frac{-\pi}{2}$$

फूरियर विस्तार में $x=0$ मान रखने पर हमारे पास है,

$$\frac{-\pi}{2} = f(0)=\frac{-\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{(2n-1)^2}$$

या
$$\frac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}$$

टिप्पणी

उदाहरण 2.21: फूरियर शृंखला के रूप में $f(x)$ का विस्तार करें यदि,

$$f(x) = \begin{cases} -c & \text{for} \quad -\pi < x < 0 \\ c & \text{for} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

और इसलिए सिद्ध करें $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - - - = \frac{\pi}{4}$

हल–हम जानते हैं कि,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n nx$$

जहां

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -c\,dx + \int_{0}^{\pi} c\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}(-c)[x]_{-\pi}^{0} + \frac{c}{\pi}[x]_{0}^{\pi}$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x).\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x).\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -c.\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} c.\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{c}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{c}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x).\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x).\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-c).\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} c.\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-c}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{c}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

टिप्पणी

$$\boxed{b_n = \frac{2c}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]}$$

इसलिए

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right].\sin nx$$

$$= \frac{4c}{\pi}.\sin nx = 0 \qquad n \text{ विषम है, } n \text{ सम है।}$$

अब $x = \frac{\pi}{2}$ रखने पर

$$c = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4c}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-)\frac{\pi}{2}}{2n-1}$$

एवं

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-)\frac{\pi}{2}}{2n-1}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}----$$

उदाहरण 2.22:$(0, 2\pi)$ अंतराल के लिए $f(x) = x\,\text{sinx}$ का विस्तार करें।

हल– हम जानते हैं कि, $f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \sin nx)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \sin nx)$$

जहां

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\cos + \sin x\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_0 = -2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\left\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right\}dx$$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)}{n-1}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{-\sin(n-1)}{n-1}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\left\{\frac{-\cos(n+1)2\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)2\pi}{n-1}\right\}\right],\ n \neq 1$$

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{n^2-1}} \qquad n \neq 1 \text{ के लिए}$$

$n = 1$, पर

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\cos dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{-1}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,.\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\left[\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left\{\frac{\sin(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right\} - \left\{\frac{-\cos(n-1)x}{(n-1)^2} - \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right],\ n \neq 1$$

$$\boxed{b_n = 0} \text{ for } n \neq 1$$

$n = 1$, पर

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(1-\cos 2x)\, dx$$

टिप्पणी

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\left(\frac{x-\sin 2x}{2}\right)-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi(2\pi-0)-\left(2\pi^2+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\right]$$

$$= \pi$$

इसलिए

$$f(x) = x\sin x = \frac{1}{2}(-2)-\frac{1}{2}\cos+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cos nx+\pi\sin x+0$$

$$= -1\frac{-\cos x}{2}+\pi\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2-1}$$

सम और विषम फलन के लिए फूरियर शृंखला

फलन को सम और विषम फलनो के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। जब $f(-x) = f(x), \forall x$, तब फलन $f(x)$ को सम कहा जाता है। सम फलनों के लिए, ग्राफ $y-$ अक्ष की ओर सममित होता है। यह समाकलन के गुणों का उपयोग करता है,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

सम फलनों में केवल x की सम घातांक होती हैं और त्रिकोणमितीय शब्दों में, केवल $\cos x$ और $\sec x$ रखते हैं

उदाहरण के लिए, $-x^2, x^4+2, x^6+\cos x, 3x^8+\cos 2x$

जब $f(x)$ और $g(x)$ सम फलन होते हैं, तब दो सम फलन भी सम है, यानी, $f(x) = f_1(x) + g(x)$ भी सम है। दो समान फलनो का उत्पाद सम है, अर्थात $f_2(x)$ - $f(x).\ g(x)$

सम फलनों के लिए सभी $b_n's$ पूर्णांकों के रूप में शून्य होंगे तथा b_n = $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ एक विषम फलन बन जाता है। फलन के लिए फूरियर शृंखला को परिभाषित किया गया है,

जैसे $$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

जहां $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

टिप्पणी

और $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x).\cos nx\, dx$$

इसे फूरियर कोज्या (Cosine) शृंखला भी कहा जाता है।

जब $f(-x) = -f(x),\ \forall x$, तब फलन $f(x)$ को विषम फलन कहा जाता है।

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

विषम फलन का आरेख मूल या उद्‌गम की ओर सममित है और यह समाकलन के गुणों का उपयोग करता है।

विषम फलन में केवल x की विषम घातांक होती हैं और त्रिकोणमितीय फलन में केवल $\sin x$ और $\text{cosec} x$ होते हैं

उदाहरण के लिए $-x^3$, $3\sin x + x$, $4\sin 2x + x^2$, etc.

यदि $f(x)$ और $g(x$ विषम फलन हैं, तो विषम फलन का योग विषम होगा, उदाहरण के लिए,

$f_1(x) = f(x) + g(x)$ विषम हैं।

$f_2(x) = f_1(x)\ .\ g(x)$ सम हैं।

विषम फलन के लिए a_n और a_0 सभी शून्य हैं क्योंकि समाकलन एक विषम फलन बन जाता है। इसलिए, विषम फलन के लिए फूरियर शृंखला को परिभाषित किया गया है

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जबकि $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin nx\, dx$$

इसे फूरियर ज्या (Sine) शृंखला कहा जाता है।

फूरियर शृंखला को तैयार करने के लिए यह पहला चरण है कि दिया गया फलन सम या विषम है या नहीं।

यदि f विषम है, तो केवल $b_n's$ की गणना की जाती है और सूत्र में घटाया जाता है यदि f सम फलन है, वहां a_0 और $a_n's$ की गणना की जाती है।

उदाहरण 2.23: फूरियर शृंखला के रूप में $f(x) = x^3$ पद का $(-\pi, \pi)$ में का विस्तार करें।

हल– जैसा कि $f(x) = x^3$ और $f(-x) = -f(x)$, इसलिए $f(x)$ विषम फलन है।

टिप्पणी

इसलिए $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

इसलिए $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} x^3 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x^3 \sin nx}{n} + \frac{3x^2 \sin nx}{n^2} + \frac{6x\cos nx}{n^3} - \frac{6\sin nx}{n^4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x^3 \cos nx}{n} + \frac{6\pi}{n^3}\cos n\pi\right]$$

$$= 2(-1)^n\left[\frac{x^2}{n} + \frac{6}{n^3}\right]$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{n^3} + \frac{\pi^2}{n}\right)(-1)^n \sin x$$

उदाहरण 2.24: फूरियर श्रृंखला के रूप में $f(x) = sinx$ पद का $(-\pi, \pi)$ में विस्तार करें।

हल– जैसा कि $f(-x) = -f(x), f(\mathrm{x})$ विषम फलन है।

इसलिए $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x).\sin x$$

जहां $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x.\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{b_n = 0},\ n \neq 1$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x.\sin x\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-\cos 2x)\,dx}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x - \sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

टिप्पणी

$$= \frac{\pi}{\pi}$$

$$\boxed{b_1 = 1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ &= b_1 \sin x \\ &= \sin x \end{aligned}$$

उदाहरण 2.25: $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, (-\pi\ \pi)$ में, फूरियर शृंखला के रूप में पद $f(x)$ को विस्तार करें।

हल– जैसा कि $f(x) = f(x), f(x)$ सम फलन है।

इसलिए
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\pi^2}{12}x - \frac{x^3}{12}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

और
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x).\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\frac{\sin nx}{n} - \left(\frac{2x}{4}\right)\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{n^2}\right)\frac{2}{\pi}.\cos n\pi$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}$$

इसलिए
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

टिप्पणी

उदाहरण 2.26 : फूरियर श्रृंखला के रूप में $f\left(x\right)=\left|x\right|$ पद में $(-\pi, \pi)$ का विस्तार करें।

हल– हम जानते हैं कि $f\left(x\right)=\left|x\right|$

और $$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

इसलिए, $f(x)$ एक समान फलन है और,

$$f(x) = \frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n \cos nx$$

जहां $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|x\right|dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \pi}$$

और $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\,x\,|.\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[\left(-1\right)^n-1\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a_n = \dfrac{-4}{\pi n^2}, & n \text{ विषम हैं।} \\ \quad = 0, & n \text{ सम हैं।} \end{array}}$$

इसलिए $$|x| = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}\cos\left(2n-1\right)x$$

उदाहरण 2.27: $(-\pi, \pi)$ के लिए $f\left(x\right)=x$ का विस्तार करें और इसलिए यह सत्यापित करें कि,

टिप्पणी

$$\frac{\pi-2}{4}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+----$$

हल– हम जानते हैं कि,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\sin(-x) \\ &= -x[-\sin x] \\ &= x\sin x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

इसलिए, $f\left(x\right)$ भी फलन है और

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

जहां
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\pi\cos\pi\right)$$

$$\boxed{a_0 = 2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left[\sin\left(n+1\right)x+\sin\left(1-n\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left\{\frac{-\cos\left(n+1\right)x}{n+1}-\frac{\cos\left(n-1\right)x}{n-1}\right\}-\left\{\frac{\sin\left(n+1\right)x}{(n+1)^2}-\frac{\sin\left(n-1\right)x}{(n-1)^2}\right\}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\cos n\nu}{n+1}+\frac{\cos n\pi}{1-n}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}.2}{n^2-1}, \qquad n\neq 1}$$

और
$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x\sin 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$$
$$\boxed{a_1 = \frac{-1}{2}}$$

इसलिए $(x\sin x) = \dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos x.$
$$= 1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ रखने पर
$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1-0+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{2}-1 = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{2}$$
$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}----$$

अवधि $2l$ के साथ फलन के लिए फूरियर श्रृंखला (Fourier Series for Functions with Period $2l$)

हमने अवधि 2π के साथ फलन के लिए फूरियर श्रृंखला पर विचार किया है। अब हम उन फलन के फूरियर विस्तार पर विचार करेंगे जो अवधि $2l$ के साथ आवधिक हैं। मान लीजिए कि $f(x)$ में परिभाषित अवधि $2l$ के साथ एक फलन $\alpha < x < \alpha + 2l$ आवधिक gSr ksQfjy; j foLr kj (Expansion) के रूप में दिया जाता है।

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\cos n\pi x}{l}+\frac{b_n\sin n\pi x}{l}\right)$$

जहां $$a_0 = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x)\,dx$$

टिप्पणी

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x).\frac{\cos n\pi x}{l}\,dx$$

और $$b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x).\frac{\sin n\pi x}{l}\,dx$$

अब मान लीजिए $f(x)$ भी $(-l, l)$ सम फलन है। फिर फूरियर कोज्या शृंखला दिया है।

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos n\pi x}{l}$$

जहां $$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

और $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x).\frac{\cos n\pi x}{l}\,dx.$$

अब मान लीजिए $f(x)$ भी $-l, l$ में विषम फलन है। फिर फूरियर ज्या शृंखला दिया है।

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n \sin n\pi x}{l}$$

जहां $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x).\frac{\sin n\pi x}{l}\,dx$$

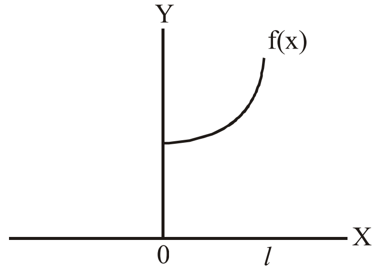
अर्ध श्रेणी शृंखला (Half Range Series)

फूरियर विस्तार को फलन के लिए परिभाषित किया गया है, जो, कि अवधि $2l$ के साथ आवधिक है। मान लीजिए कि हमें एक फलन $f(x)$ दिया गया है जो अनावर्त है और इसे आधे अंतराल $(0, l)$ लंबाई l में परिभाषित किया गया है। विस्तार के इन प्रकारों की अर्ध श्रेणी फूरियर श्रेणी के रूप में जाना जाता है। इस मामले में, $f(x)$ न तो विषम है और न ही आवधिक है केवल सूचना अंतराल $(0, l)$ में $f(x)$ के लिए फूरियर कोज्या शृंखला प्राप्त करना है। इस नकारात्मक फलन में, एक नए फलन $f_1(x)$ को परिभाषित करते हैं कि,

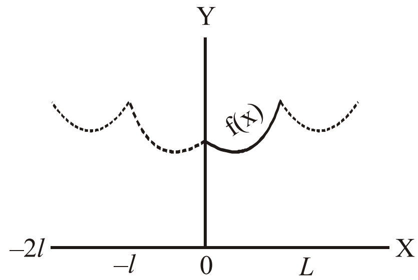
(i) $f_1(x) \equiv f(x), (0, l)$ अंतराल में और

(ii) $f_1(x)$ सम $(-l, l)$ में भी फलन करता है और आवधि $2l$ के साथ आवधिक है।

यह, $f_1(x)$ को $f(x)$ का आवधिक विस्तार भी कहा जाता है और निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है,



चित्र 2.1



चित्र 2.2

चित्र 2.1 फलन $f(x)$ का निरूपण करता है, जबकि चित्र 2.2 $f(x)$ के विस्तार का निरूपण करता है यानी, $f_1(x)$

चूँकि संरचना $f(x)$ और $f_1(x)$ में $(0,1)$ के बराबर है, $f(x)$ के लिए अर्ध श्रेणी फूरियर कोज्या शृंखला निम्नानुसार दी गई है,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos n\pi x}{l}$$

जहां $$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

और $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\frac{\cos n\pi x}{l}\,dx$$

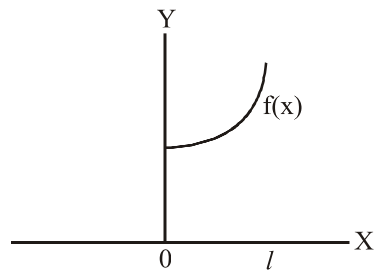
इसे $f_1(x) = f(x)$ के लिए $(0,l) = f(-x)$ के लिए $(-1,0)$ और इस के रूप में समझा जा सकता है $f(x)$ की शृंखला का विस्तार केवल अंतराल (0, l) के लिए मान्य है, लेकिन इस मध्यान्तर के बाहर के लिए मान्य नहीं है।

अब माना कि हम $f(x)$ के लिए $(0,l)$ में अर्ध श्रेणी फूरियर ज्या शृंखला प्राप्त करने में रुचि रखते हैं $f_2(x)$ एक ऐसा फलन है जिसमे,

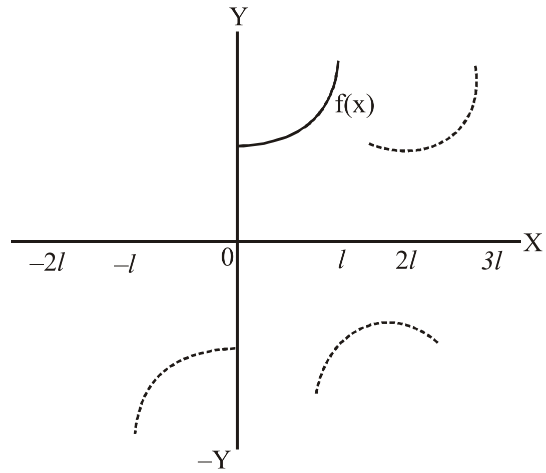
(i) $f_2(x) = f(x)$ में (0, l)

(ii) $f_2(x)$ विषम फलन $2l$ के साथ $(-l, l)$ आवधिक फलन है।

तब $f_2(x)$ को $f(x)$ की विषम आवधिक निरंतरता कहा जाता है और इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,



चित्र 2.3



चित्र 2.4

चित्र 2.3 फलन $f(x)$ का निरुपण करता है, जबकि चित्र 2.4 $f(x)$ के विस्तार का निरुपण करता है अर्थात, $f_2(x)$।

चूँकि निर्माण के द्वारा $f(x)$ और $f_2(x)$, $(0, l)$ में बराबर है, इसलिए अंतराल में $f(x)$ के अपेक्षित अर्ध फूरियर ज्या श्रेणी शृंखला के विस्तार (0, l) के रूप में दिया जाता है,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

टिप्पणी

उदाहरण 2.28: फोरियर श्रृंखला का विस्तार का मान निकाले।

$$f(x) = \frac{\pi - \pi}{2} \text{ in } 0 < x < 4.$$

हल– दिए गए अंतराल = (4–0) में,

$$2l = 0$$

$$l = 0$$

अब $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

जहां $$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\frac{\pi - x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi x - x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}[4\pi - 8]$$

$$\boxed{a_0 = (\pi - 2)}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\frac{\pi - \pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left\{(\pi - x)\left(\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\frac{2}{n\pi}\right\} - \int_0^4 (-1)\sin\frac{n\pi x}{2}.\frac{2}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left\{0 + \frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}.\frac{2\pi}{n\pi}\right]_0^4\right\}$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos 2n\pi - \cos 0)$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi^2}(1 - 1)$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

टिप्पणी

और $$b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x).\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\pi - x}{2}.\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[(\pi - x)\left(-\cos\frac{n\pi x}{2}\right).\frac{2}{n\pi}\right]_0^4 - \int_0^4(-1)\left(-\cos\frac{n\pi x}{2}\right).\frac{2}{n\pi}dx\right\}$$

$$= \frac{-2}{4n\pi}\left[(\pi-4)\cos 2n\pi - \pi\cos 0\right] - \frac{1}{2n\pi}\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^4$$

$$= \frac{-2}{4n\pi}(\pi - 4 - \pi)$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{n\pi}}$$

इसलिए,

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi-2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

उदाहरण 2.29: $f(x)$ के लिए फूरियर श्रृंखला के विस्तार का मान निकाले।

जब $$f(x) = \begin{matrix} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{matrix}$$

हल– दिए गए अंतराल में, $= 5 - (-5)$

$$2l = 10$$

$$l = 5$$

और $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{5} + b_n\sin\frac{n\pi x}{5}\right)$$

जब $$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)\,dx + \int_0^5 f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + \int_0^5 3dx\right]$$

टिप्पणी

$$= \frac{3}{5}[x]_0^5$$

$$= \frac{3}{5}[5-0]$$

$$\boxed{a_0 = 3}$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + \int_{0}^{5} 3\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[\sin\frac{n\pi x}{5}.\frac{5}{n\pi}\right]_0^5$$

$$= \frac{3}{n\pi}[\sin 5\pi - \sin 0]$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

और

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x).\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x).\frac{\sin n\pi x}{5}\,dx + \int_{0}^{5} f(x).\frac{\sin n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[0 + \int_{0}^{5} 3.\frac{\sin n\pi x}{5}\,dx\right]$$

$$= \frac{3}{5}\left[\frac{-\cos n\pi x}{5}.\frac{5}{n\pi}\right]_0^5$$

$$= \frac{-3}{n\pi}[\cos n\pi - \cos 0]$$

$$= \frac{-3}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \boxed{b_n = \frac{3}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]}$$

इसलिए, $$f(x) = \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}\left[-1(-1)^n\right]\frac{\sin n\pi x}{5}$$

टिप्पणी

उदाहरण 2.30: $f(x) = x^2$ के लिए $(-1, 1)$ में फूरियर शृंखला का मान निकाले।

हल— दिए गए अंतराल $= 1-(-1)$ में

$$2l = 2$$

$$l = 1$$

जैसे कि $$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$f(x)$ सम फलन है, इसलिए $b_n = 0$ और फूरियर शृंखला इस प्रकार दी गई है।

$$f(x) = \frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\cos n\pi x}{1}$$

जहां $$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{3}}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x).\frac{\cos n\pi x}{1}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx$$

$$= \left[x^2\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi\right]_0^1$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n}$$

इसलिए

$$f(x) = \frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x$$

टिप्पणी

उदाहरण 2.31: $f(x) = x(\pi - x)$ 0, $0 < x < \pi$ के लिए अर्ध श्रेणी ज्या शृंखला का मान निकाले।

हल—अर्ध श्रेणी साइन (sine) या ज्या शृंखला दिया गया है जिसमें,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जहां
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x(\pi - x)\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - (\pi - 2x)\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right).\left(\frac{-2}{n^3}\cos nx\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{b_n = \frac{4}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right]}$$

इसलिए,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\left[-1(-1)^n\right]\sin nx$$

उदाहरण 2.32: अर्ध श्रेणी शृंखला (ज्या और कोज्या) $0 \le x \le \pi$ के लिए मान निकाले।

$f(x) = x$ इसलिए, परिणाम निकालें $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - - -$

हल– अर्ध श्रेणी ज्या शृंखला दिया गया है जिसमें,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जहां
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{b_n = \frac{-2}{n}(-1)^n}$$

इसलिए,

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

टिप्पणी

फूरियर अर्ध श्रेणी को ज्या शृंखला है।

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

जहां
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \pi}$$

और
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x).\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x.\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]}$$

इसलिए,

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum\frac{\left[(-1)^n-1\right]}{n^2}\cos nx$$

रखने पर
$$x = 0$$

$$0 = \frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

और
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^2}----$$

उदाहरण 2.33: फूरियर ज्या और कोज्या श्रृंखला $f\left(x\right)=x^2$ में $(0,\pi)$ के लिए मान निकाले।

हल—यदि अर्ध श्रेणी साइन या ज्या श्रृंखला के रूप में,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

जहां
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x).\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x^2\cos nx}{n}+\frac{2x\sin nx}{n^2}+\frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^2\left(-1\right)^2}{n}+\frac{2\left(-1\right)^n}{n^3}-\frac{2}{n^3}\right]$$

इसलिए,

$$f(x) = x^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\pi^2\left(-1\right)^{n+1}}{n}+\frac{2\left[\left(-1\right)^n-1\right]}{n^3}\right\}\sin nx$$

फूरियर कोसाइन या कोज्या श्रृंखला है,

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

जहां
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2\pi^2}{3}}$$

और
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

टिप्पणी

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^n$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n + 0\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} + 0}$$

इसलिए $$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

खंडों में एकदिष्ट फलन का फूरियर विस्तार (Fourier Expansion of Piecewise Monotonic Function)

निम्नलिखित प्रमेय और परिणाम, फूरियर शृंखला के अस्तित्व एवं अभिसरण तथा विवक्त–समय फूरियर रूपांतरण से संबंधित हैं :

1. ; fn $f(x)$ अंतराल $(-\pi, \pi)$ में बाध्य विचलन रखता है, तो $f(x)$ से संबंधित फूरियर शृंखला अंतराल के भीतर किसी भी बिंदु पर $f(x)$ के मान में जिस पर फलन निरंतर परिवर्तित हो जाती है, यह किसी भी ऐसे बिंदु से फलन के बंद होने पर मूल्य $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ में परिवर्तित हो जाता है। बिंदुओं पर, -π, π, π, बिंदुओं पर यह $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ मूल्य में परिवर्तित होता है।
2. यदि $f(x), (-\pi, \pi)$ में बाध्य भिन्नता है, तो फूरियर शृंखला $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ अंतराल $(-\pi, \pi)$ में बाध्य है।
3. यदि $f(x), (-\pi, \pi)$ में बाध्य हुए भिन्नता है, तो फूरियर शृंखला $f(x)$, में समरूप से किसी भी अंतराल (a,b) में परिवर्तित होती है जिसमें a पर निरंतर तथा b दोनों तरफ से $f(x)$, पर निरंतर है।
4. यदि $f(x)$, सीमा परिवर्तन वाला एक फलन है, जिसे विवेकाधीन ढंग से छोटे अंक के सीमित संख्या में समीपस्थ अंक पर $f(x)$ को कोई ऊपरी सीमा से बाहर नहीं किया गया है, तब फूरियर शृंखला मान $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ के प्रत्येक बिंदु पर $(-\pi, \pi)$ में अभिसरण करता है। फलन के अनंत अनिरंतरता के बिंदुओं को छोड़कर, असंगत समाकलन प्रदान किया जाता है जिसमें $\int -\pi^{\pi} f(x)\,dx$ उपस्थित है और पूरी तरह से अभिसारी है।

5. यदि $f(x)$, बंधित है और यदि वह प्रत्येक बिंदु पर अपने डोमेन में निरंतर या सतत है, तो एक सीमित संख्या के बिंदुओं के अपवाद के साथ, जिस पर वह सामान्य रूप में बट सकती है, और यदि डोमेन को एक परिमित संख्या में विभाजित किया जा सकता है। उनमें से किसी एक में फलन एकदिष्ट (Monotonic) है, या दूसरे शब्दों में, फलन के पास अपने डोमेन में केवल अधिकतम और न्यूनतम की एक सीमित संख्या है, निरंतरता या सातत्यता के बिंदुओं पर $f(x)$, की फूरियर शृंखला $f(x)$ के लिए

   $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ के असतता / या अनिरंतर बिंदुओं पर है।

6. यदि f बाध्य विचलन का है, तो f की फूरियर शृंखला x के हर बिंदु पर मान $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ में अभिसरित हो जाती है। यदि f इसके अलावा, $I = (a, b)$ के प्रत्येक बिंदु पर निरंतर है, तो इसका फूरियर शृंखला I में समान रूप से अभिसरण है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. असंगत समाकलन क्या है?
2. असंगत समाकलन कितने प्रकार के होते हैं? इनका संक्षेप में वर्णन कीजिए।
3. फ्रुलानी के समाकलन का वर्णन करें।
4. एक मापदण्ड के एक फलन के समाकल की व्युत्पत्ति और समाकलनीयता को समझाए।
5. अर्ध और पूर्ण अंतराल की फूरियर शृंखला का वर्णन करें।
6. सम और विषम फलनों के लिए फूरियर शृंखला को परिभाषित कीजिए।
7. किन विस्तारों को अर्ध श्रेणी फूरियर श्रेणी के रूप में जाना जाता है?

2.8 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. फलन f बंद अंतराल पर असीमित है $n \leq 1\,[a, b]$ यदि समाकलन की सीमाएं अनंत हो जाती हैं, तो समाकलन $\int_a^b f(x)dx$ को असंगत समाकलन कहा जाता है।
2. असंगत समाकलन दो प्रकार के होते हैं—पहली तरह का असंगत समाकलन और दूसरा तरह का असंगत समाकलन। यदि या तो एक या दोनों ही समाकलन की

सीमाएं अनंत पर हैं, लेकिन समाकल्य तथा परिशुद्ध समाकलन $\int_a^b f(x)dx$ को पहली तरह का असंगत समाकल कहा जाता है। यदि समाकलन की सीमाएं सीमित हैं लेकिन f असीमित है तो समाकलन कलन समीकरण $\int_a^b f(x)dx$ दूसरी तरह का असंगत समाकलन कहा जाता है।

3. माना कि $\int_{a+\in}^{b} f(x)dx$ बाध्य है और $\psi(x)$ बाध्य है और अंतराल $a \le x \le b, x \to a,$ पर एकदिष्ट रूप में शून्य में परिवर्तित करता है तब $\int_a^b f(x)dx.\psi(x)dx$ जोड़ देता है।
4. सामान्य रूप में, यह सच नहीं है कि एक मापदण्ड के सापेक्ष समाकलन चिह्न के अधीन असंगत समाकलनों का अवकलन किया जा सकता है या समाकलन किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, मूल समाकलन के क्रम में ये संक्रियाएं परस्पर परिवर्तनीय नहीं हैं।
5. फूरियर शृंखला का उपयोग आवधिक फलन के अनंत शृंखला निरुपण के रूप में किया जाता है और यह विस्तार के लिए त्रिकोणमितीय साइन या ज्या और कोसाइन या कोज्या फलनों का उपयोग करता है इसका मुख्य अनुप्रयोग साधारण और आंशिक अवकलन समीकरणों का समाधान करना है। यह अवकल समीकरणों को विशेषकर आनुक्रमिक क्रियाओं के साथ हल करने का एक शक्तिशाली साधन है जो गैर–समरूपता पदों के रूप में प्रकट होता है। इसका व्यापक अनुप्रयोग होता हैं क्योंकि यह आवधिक फलनो के साथ–साथ सतत फलनो और ऐसे फलनो के लिए वैध होता है, जो असतत होते हैं।
6. फलन को सम और विषम फलनो के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। जब $f(-x)=f(x), \forall x$, तब फलन $f(x)$ को सम कहा जाता है। सम फलनो के लिए, ग्राफ $y-$ अक्ष की ओर सममित है।
7. फूरियर विस्तार को फलन के लिए परिभाषित किया गया है, जो कि अवधि $2l$ के साथ आवधिक है। मान लीजिए कि हमें एक फलन $f(x)$ दिया गया है जो अनावर्त है और इसे आधे अंतराल $(0,l)$ लंबाई l में परिभाषित किया गया है। विस्तार के इन प्रकारों को अर्ध श्रेणी फूरियर श्रेणी के रूप में जाना जाता है।

2.9 सारांश

- निश्चित समाकलन की परिभाषा के बारे में यह लगता है कि $\int_a^b f(x)dx,$ तब इस परिभाषा की दो सीमायें होती हैं। पहला यह है कि फलन $f[a, b]$ पर परिबद्ध है और दूसरा है कि समाकलन $[a, b]$ के अंतराल से बाध्य होना चाहिए।

- असंगत समाकलन दो प्रकार के होते हैं–पहली तरह का असंगत समाकलन और दूसरा तरह का असंगत समाकलन। यदि या तो एक या दोनों ही समाकलन की सीमाएं अनंत पर हैं, लेकिन समाकल्य तथा परिशुद्ध समाकलन $\int_a^b f(x)dx$ को पहली तरह का असंगत समाकल कहा जाता है।
- यदि समाकलन की सीमाएं सीमित हैं लेकिन f असीमित है तो समाकलन समीकरण $\int_a^b f(x)dx$ दूसरी तरह का असंगत समाकलन कहा जाता है।
- यदि, कुछ वास्तविक संख्या a के लिए $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ और $\int_a^\infty f(x)dx$ अभिसरण होता है, तो हम $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \lim_{N\to-\infty} \int_a^\infty f(x)\,dx$ परिभाषित करते हैं और हम कह सकते है कि समाकलन $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ अभिसारी है। अन्यथा हम कह सकते हैं कि समाकलन अपसारी है।
- समाकलन $I = \int_a^\infty \frac{dx}{x^n}, a > 0,$ अभिसारी होता है जब $n > 1$ और अपसारी जब $n \le 1$ हैं।
- यदि $\Sigma f_n(x)$ एक समुच्चय पर समान रूप से अभिसरित होता है। और $\langle g_n(x)\rangle$ पर अपसरित होता है और समान रूप से S पर बाध्य है, तब श्रृंखला $\Sigma f_n(x)\, g_n(x)$ समान रूप से S पर अभिसारी है।
- जब $\int_{a+\in}^{b} f(x)dx$ बाध्य होता और $\psi(x)$ भी बाध्य होता और अंतराल पर एकदिष्ट $a \le x \le b, x \to a,$ के रूप में शून्य में परिवर्तित करता है तब $\int_a^b f(x)dx.\psi(x)dx$ जोड़ देता है।
- यदि एक मापदण्ड के संबंध में समाकलन भी अनंत समाकलन अंतराल पर होता है, तो क्रम में परिवर्तन सदैव संभव नहीं है, भले ही अभिसरण एकरूप हो।
- फूरियर श्रृंखला का उपयोग आवधिक फलन के अनंत श्रृंखला निरुपण के रूप में किया जाता है और यह विस्तार के लिए त्रिकोणमितीय ज्या और कोज्या फलनों का उपयोग करता है इसका मुख्य अनुप्रयोग साधारण और आंशिक अवकल समीकरणों का समाधान करना है। यह अवकल समीकरणों को विशेषकर आनुक्रमिक क्रियाओं के साथ हल करने का एक शक्तिशाली साधन है जो गैर–समरूप पदों के रूप में प्रकट होता है। इसमें व्यापक अनुप्रयोग होता

टिप्पणी

हैं क्योंकि यह आवधिक फलनो के साथ–साथ सतत फलनो और ऐसे फलनो के लिए वैध होता है, जो असंतत होते हैं।

- फलन $f(x)$ को आवधिक कहा जाता है यदि $f(x+T)=f(x)$ हैं, और कुछ धनात्मक संख्या T, लिए वास्तविक x की अवधि है $f(x)$ की सबसे छोटी धनात्मक अवधि को $f(x)$ की प्राथमिक या मौलिक अवधि कहा जाता है।
- एक निरंतर फलन किसी भी धनात्मक अवधि T के लिए आवधिक है। एक अवधि कई आवधिक फलनो का योग, अवधियों का कम से कम सामान्य गुण है।
- फलन को सम और विषम फलनो के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। जब $f(-x)=f(x),\ \forall x$, तब फलन $f(x)$ को सम कहा जाता है, सम फलनो के लिए, आलेख $y-$ अक्ष की ओर सममित है। यह समाकलन के गुण का उपयोग करता है,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

- जब $f(x)$ और $g(x)$ सम फलन होते हैं, तब दो सम फलन भी सम है, अर्थात्, $f(x)=f_1(x)+g(x)$ भी सम है। दो समान फलनो का गुणन सम है, अर्थात $f_2(x)$ - $f(x).\ g(x)$
- फूरियर विस्तार को फलन के लिए परिभाषित किया गया है, जो कि अवधि $2l$ के साथ आवधिक है। मान लीजिए कि हमें एक फलन $f(x)$ दिया गया है जो अनावर्त है और इसे आधे अंतराल $(0,l)$ लंबाई l में परिभाषित किया गया है। विस्तार के इन प्रकारों को अर्थ श्रेणी फूरियर श्रेणी के रूप में जाना जाता है।
- यदि $f(x)$ के अंतराल $(-\pi, \pi)$ में बदलाव किया है, तो $f(x)$ से संबंधित फूरियर शृंखला अंतराल के भीतर किसी भी बिंदु पर $f(x)$ के मान में, जिस पर फलन निरंतर परिवर्तित हो जाता है, यह किसी भी ऐसे बिंदु से फलन के बंद होने पर मान $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ में परिवर्तित हो जाता है। बिंदुओं $-\pi, \pi$, पर, यह $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ मान में परिवर्तित हो जाता है।
- यदि $f(x), (-\pi, \pi)$ में परिबद्ध परिवर्तन है, तो फूरियर शृंखला $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ अभिसरित होती है, जोकि अंतराल $(-\pi, \pi)$ में बंधी हुई है ।
- यदि $f(x), (-\pi, \pi)$ में परिबद्ध परिवर्तन है, तो फूरियर शृंखला $f(x)$ में समरूप से किसी भी अंतराल (a,b) में परिवर्तित होती है जिसमें a पर निरंतर तथा b दोनों तरफ से $f(x)$, पर निरंतर है।

2.10 मुख्य शब्दावली

- **असंगत समाकलन** : यदि कोई फलन (f) बंद अंतराल $[a, b]$ पर असीमित है, यदि समाकलन की सीमाएं अनंत हो जाती हैं, तो समाकलन $\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ को असंगत समाकलन कहा जाता है।
- **फूरियर शृंखला** : फूरियर शृंखला का उपयोग आवधिक फलन के अनंत शृंखला निरुपण के रूप में किया जाता है और यह विस्तार के लिए त्रिकोणमितीय साइन या ज्या और कोज्या या कोसाइन फलनो का उपयोग करता है।
- **अर्थ श्रेणी शृंखला** : फूरियर विस्तार को फलन के लिए परिभाषित किया गया है, जो कि अवधि $2l$ के साथ आवधिक है। माना हमें एक फलन $f(x)$ दिया गया है जो अनावर्त है और इसे अर्ध अंतराल $(0, l)$ लंबाई l में परिभाषित किया गया है। विस्तार के इन प्रकारों को अर्ध श्रेणी फूरियर शृंखला के रूप में जाना जाता है।
- **फ्रुलानी का समाकलन** : जब $\int_{a+e}^{b} f(x)\mathrm{dx}$ और $\phi(x)$ बाध्य होता है और अंतराल $a \leq x \leq b; x \to a$ पर एकदिष्ट रूप में शून्य में परिवर्तित करता है।

2.11 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. अभिसरण $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ का परीक्षण करें।
2. $\int_1^\infty x^{-3/2}dx$ का मान ज्ञात करें।
3. $\int_0^\infty e^{5x}dx$ का अभिसरण का परीक्षण करें।
4. $\int_0^\infty e^{-8x}dx$ का अभिसरण का परीक्षण करें।
5. $\int_4^\infty \frac{dx}{(x-3)^2}$ का अभिसरण का परीक्षण करें।
6. $\int_4^\infty \frac{dx}{(1+x)^{2/3}}$ का अभिसरण का परीक्षण करें।
7. सिद्ध करें कि $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$ अभिसारी है।

8. $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$ का मान ज्ञात करें।

9. $\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{x^2+16}dx$ का अभिसरण का परीक्षण करें।

10. (i) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ (ii) $\int_0^\infty \frac{1-\cos^2 x}{x^2}dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

11. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-1}}$ के अभिसरण के परीक्षण के लिए तुलनात्मक परीक्षण का प्रयोग करें।

12. $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

13. $\int_a^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$, जब $\alpha > 0$ के अभिसरण का परीक्षण करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. $(-\pi, \pi)$ के लिए $f(x) = x - x^2$ की फूरियर शृंखला को ज्ञात करें और $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ को ज्ञात करें।

2. $$f(x) = \begin{cases} 1+\frac{2x}{\pi}, & -\pi \le x \le 0 \\ 1+\frac{2x}{\pi}, & 0 \le x \le 0 \end{cases}$$ की फूरियर शृंखला ज्ञात करें।

3. $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < 0 \end{cases}$$

   फूरियर शृंखला ज्ञात करें और सिद्ध करें कि,

   $$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} ----$$

4. $$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

   फूरियर शृंखला ज्ञात करें और सिद्ध करें कि,

   $$\frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} ----$$

टिप्पणी

5. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x, & \pi \le x \le 2\pi x \end{cases}$

फूरियर श्रृंखला ज्ञात करें।

6. फूरियर श्रृंखला ज्ञात करें, यदि

(i) $f(x) = x^2 \quad (-\pi, \pi)$

(ii) $f(x) = |x| \quad (-\pi, \pi)$

(iii) $f(x) = x \quad (-\pi, \pi)$

(iv) $f(x) = |\sin x| \quad (-\pi, \pi)$

(v) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$

(vi) $f(x) = x\sin x, \quad (-\pi, \pi)$

7. फूरियर श्रृंखला ज्ञात करें, यदि

(i) $f(x) = e^x \quad (-l, l)$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 3, & 2 < x < 4 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} \pi x & 0 \le x \le 1 \\ \pi(2-x) & 1 \le x \le 4 \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\mathrm{L} \le t \le 0 \\ \mathrm{E}\sin \omega t, & 0 \le t \le \mathrm{L} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2cx}{L}, & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2c(L-x)}{L}, & \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - x, & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{3}{4}, & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

9. निम्न की फूरियर ज्या और कोज्या श्रृंखला ज्ञात करें,

(i) $f(x) = 1, \quad 0 < x < \mathrm{L}$

(ii) $f(x) = x, \quad 0 < x < 4$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$

(iv) $f(x) = x - x^2 \quad (0, 1)$

2.12 सहायक पाठ्य सामग्री

Malik, S. C. and Savita Arora. 1991. *Mathematical Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Simmons, G. F. 2004. *Introduction To Topology And Modern Analysis*. New York: Tata McGraw-Hill Education.

Ahlfors, Lars V. 1978. *Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1986. *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Gupta, S. L. and Nisha Rani. 2003. *Fundamental Real Analysis*, 4th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Carothers, N. L. 2000. *Real Analysis*, 1st Edition. UK: Cambridge University Press.

Shilov, Georgi E. 2012. *Elementary Real and Complex Analysis*. Chelmsford: Courier Corporation.

Sharma, S.C. 2006. *Metric Space*. New Delhi: Discovery Publishing House.

Appostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis.* Boston: Addison Wesley.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*, 3rd Edition. New York: Macmillan Publishing Company.

इकाई 3 दूरीक समष्टि

टिप्पणी

संरचना

3.0 परिचय

एक दूरीक समष्टि (Metric Space), समुच्चय पर एक आव्यूह के साथ एक समुच्चय है। आव्यूह एक फलन (Function) है जो समुच्चय के किसी भी दो अवयवों के बीच की दूरी की अवधारणा को परिभाषित करता है, जिसे आमतौर पर समुच्चय कहा जाता है। आव्यूह कुछ सरल गुणों को संतुष्ट करता है। अनौपचारिक रूप से एक बिंदु से स्वयं की दूरी शून्य है, जो दो अलग–अलग बिंदुओं के बीच की दूरी धनात्मक है, A से B की दूरी B से A की दूरी के समान है, और A से B की दूरी से कम है या किसी भी तीसरे बिंदु C। A के माध्यम से A से B की दूरी के बराबर। एक आव्यूह विवृत और संवृत समुच्चय जैसे सामयिक गुणों को प्रेरित करता है, जो अधिक अमूर्त संस्थानिक समष्टि (Topological Spaces) के अध्ययन की ओर ले जाता है। सबसे परिचित या समष्टि दूरीक समष्टि 3–आयामी यूक्लिडियन समष्टि है।

वास्तव में, एक आव्यूह यूक्लिडियन आव्यूह (Euclidean Metric) का सामान्यीकरण है जो यूक्लिडियन दूरी के चार दीर्घ–ज्ञात गुणों से उत्पन्न होता है। यूक्लिडियन आव्यूह उन्हें जोड़ने वाली सीधी रेखा खंड की लंबाई के रूप में दो बिंदुओं के बीच की दूरी को परिभाषित करता है। अन्य आव्यूह रिक्त समष्टि, उदाहरण के लिए दीर्घवृत्तीय ज्यामिति और अतिपरवलय (Hyperbolic) ज्यामिति में होते हैं, जहाँ कोण द्वारा मापी

गई गोले पर दूरी एक आव्यूह होती है, और अतिपरवलय ज्यामिति के अतिपरवलयज (Hyperboloid) प्रतिरूप (Model) का उपयोग विशेष सापेक्षता द्वारा वेग के आव्यूहों समष्टि के रूप में किया जाता है।

टिप्पणी

इस इकाई में आप दूरीक समष्टि, समीपत्व और सीमा बिंदु, विवृत और संवृत समुच्चय (Set), आव्यूह, आंतरिक भाग और सीमा बिंदु, दूरीक समष्टि का उप–भाग, पूर्णता और कैंटर के प्रतिच्छेदन या सर्वनिष्ठ प्रमेय, संकुचन सिद्धांत, पूर्ण क्रम संगत के अनुसार वास्तविक संख्या, क्षेत्र, सघन उपसमुच्चय, बैयर श्रेणी प्रमेय, वियोज्य द्वितीय गणनीय और प्रथम गणनीय समष्टि (Space) के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- दूरीक समष्टि का वर्णन कर पाएंगे;
- समीपवर्ती और सीमा बिंदु की व्याख्या कर पाएंगे;
- संवृत और विवृत समुच्चय को समझ पाएंगे;
- आंतरिक भाग और सीमा बिंदु की व्याख्या कर पाएंगे;
- सामयिक समष्टि के उपसमष्टि को समझ पाएंगे;
- संपूर्ण और कैंटर के सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन प्रमेय का वर्णन कर पाएंगे;
- सघन उपसमुच्चय की व्याख्या कर पाएंगे;
- बैयर श्रेणी प्रमेय को समझ पाएंगे;
- वियोज्य प्रथम एवं द्वितीय गणनीय समष्टि की व्याख्या कर पाएंगे।

3.2 दूरीक समष्टि

X एक गैर–रिक्त समुच्चय हैं। एक फलन $d{:}X \times X \to R$ (वास्तविक समुच्चय) को एक आव्यूह या दूरी फलन कहा जाता है यदि सभी $x, y, z \in X$, के लिए निम्न स्थितियां संतुष्ट हैं।

[m 1]: $d(x, y) \geq 0$.

[m 2]: $d(x, y) = 0$ यदि और केवल यदि $x = y$.

[m 3]: $d(x, y) = d(y, x)$, (सममित) (Symmetry).

[m 4]: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (त्रिकोणीय असमानता) (Triangle Inequality)

(i) युग्म (X, d) को दूरीक समष्टि (Metric Space) कहा जाता है और $d(x, y)$ को बिंदु x और y के बीच की दूरी कहा जाता है।

अन्य परिभाषा, एक दूरीक समष्टि X के उपसमुच्चय A का व्यास, जिसे, $\delta(A)$, द्वारा दर्शाया गया है, इसे निम्न द्वारा परिभाषित किया गया है

$\delta(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$.

(ii) $d(A, B)$ द्वारा निरूपित X के दो उपसमुच्चय A, B के बीच की दूरी को परिभाषित किया गया है,

टिप्पणी

$d(A, B) = \inf\{d(x, y): x \in A, y \in B\}$.

(iii) बिंदु $a \in X$ और समुच्चय $A \subset X$ के बीच की दूरी द्वारा परिभाषित किया गया है,

$d(a, A) = \inf\{d(a, x): x \in A\}$.

(iv) X का एक उपसमुच्चय A को $\delta(A)$ परिमित (Finite) होने पर बाध्य किया जाता है। यह निम्नानुसार है, कि यदि कोई A वास्तविक संख्या M में मौजूद है और एक बिंदु $q \in X$ है तो $P \in A$ ऐसे सभी के लिए जहाँ वह $d(p, q) < M$ दूरीक समष्टि हैं।

हमारे उद्देश्यों के लिए दूरीक समष्टि के सबसे महत्वपूर्ण उदाहरण हैं, यूक्लिडियन समष्टि R^n, विशेष रूप से वास्तविक रेखा (Real Line) R और सम्मिश्रित तल (Complex Plane) R^2 है। R^n में दूरी द्वारा परिभाषित किया गया है,

$$d(x, y) = |\mathrm{x} - \mathrm{y}| \; (\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{R}^n) \qquad \text{(i)}$$

परिस्थितियाँ $[m1]$, $[m2]$, $[m3]$ और $[m4]$ प्रमेय 3.1 से संतुष्ट हैं और इस प्रकार R^n एक दूरीक समष्टि है।

एक अन्य उदाहरण है कि X किसी भी गैर–रिक्त समुच्चय के रूप में लेकर $x, y \in X$ के लिए, परिभाषित करें

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ यदि } x = y \\ 1 \text{ यदि } x \neq y. \end{cases}$$

पुनः यह देखना आसान है कि X पर d एक आव्यूह है जिसे विविक्त आव्यूह (Discrete Metric) कहा जाता है।

इसे भी निम्न रूप द्वारा परिभाषित किया जा सकता है,

(i) $i=1,\ldots, n$ के लिए $a_i < b_i$ को लेकर। पुनः R^n में सभी बिंदुओं के समुच्चय $x = (x_1,\ldots,x_n)$ जिनके निर्देशांक असमानताओं को संतुष्ट करते हैं $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(1 \leq i \leq n)$ एक n–कक्षा (n-cell) कहा जाता है।

इस प्रकार 1–कक्षा एक अंतराल है, और 2–कक्षा एक आयत आदि है।

(ii) $a \in \mathrm{R}^n$ और $r > 0$ को लेकर त्रिज्या r पर केंद्र के साथ एक खुला या संवृत बंद या विवृत गेंद को सभी $x \in \mathrm{R}^n$ के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है जैसे $|x - a| < r$ (या $|x - a| \leq r$

और (a, r) (या $B[\mathrm{a}, r]$), द्वारा निरूपित किया जाएगा,

इस प्रकार $B(a, r) = \{x \in \mathrm{R}_n: |x - a| < r\}$

और $B[\mathrm{a}, r] = \{x \in \mathrm{R}_n: |\mathrm{x} - \mathrm{a}| \leq r\}$

(iii) R^n का एक उपसमुच्चय A उत्तल (Convex) कहा जाता है यदि $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$

जब भी $x \in A, y \in A$ और $0 < \lambda < 1$ हो तो।

टिप्पणी

3.3 समीपवर्ती और सीमा बिंदु

बता दें, कि X एक दूरीक समष्टि है। यहां वर्णित सभी बिंदुओं और समुच्चयों को X के अवयव और उपसमुच्चय समझा जाता है।

(i) यदि $r > 0$, समुच्चय $N(p, r) = \{x \in X: d(p, x) < r\}$ को बिंदु p का समीपवर्ती (Neighbourhood) बिंदु कहा जाता है। संख्या r को $N(p, r)$ का त्रिज्या कहा जाता है।

उदाहरण 3.1 : दूरीक समष्टि R,$\in$ में

$N(p, r) = \{x \in R : |x - p| < r)$

$= \{x \in R : p - r < x < p + r\} = [p - r, p + r]$

इस प्रकार इस प्रकरण में, p के समीपवर्ती एक मध्य बिंदु के रूप में p के साथ एक खुला या विवृत अंतराल है।

(ii) एक बिंदु p को समुच्चय A का एक परिमित बिंदु कहा जाता है, यदि p के प्रत्येक समीपवर्तता में p के अलावा A का बिंदु होता है।

A के सभी सीमा बिंदुओं के समुच्चय को A का व्युत्पन्न समुच्चय कहा जाता है, और $D(A)$ द्वारा निरूपित किया जाएगा।

उदाहरण 3.2 : उपसमुच्चय $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} ...\}$ R में प्रत्येक $r > 0$ के लिए सीमा बिंदु के रूप में 0 है, हम एक धनात्मक पूर्णांक n_0 नियुक्त कर सकते हैं जैसे कि $1/n_0 < r$ और $1/n_0 \neq 0$, के बाद से 0, हम देखते हैं, कि 0 के प्रत्येक समीपवर्ती $N(0, r)$ में 0 के अलावा A का बिंदु है।

पूर्णांकों के समुच्चय 1 का कोई सीमा बिंदु नहीं है, जबकि सीमा बिंदुओं का समुच्चय f, Q (परिमेय संख्याओं के समुच्चय) (The Set of Rationals) R का सभी है क्योंकि पाठक आसानी से सत्यापित कर सकता है।

(iii) A बिंदु p को समुच्चय A का पृथक बिंदु (Isolated Point) कहा जाता है, यदि $p \in A$ A का सीमा बिंदु न हो।

इस प्रकार उदाहरण 3.3 में समुच्चयों A का प्रत्येक बिंदु A का एक पृथक बिंदु है।

(iv) समुच्चय A को संवृत या बंद कहा जाता है, कि यदि $D(A) \subset A$, अर्थात् A में इसके सभी सीमा बिंदु से अंतर्विष्ट (Contain) हैं।

उदाहरण के लिए, R में प्रत्येक बंद या संवृत अंतराल एक बंद या संवृत समुच्चय A है जो बंद या संवृत नहीं है।

(v) एक बिंदु p को A का एक आंतरिक (Interior) बिंदु कहा जाता है यदि कोई p का समीपर्वता N उपस्थित है, जैसे कि $N \subset A$

A के सभी आंतरिक (Interior) बिंदुओं के समुच्चय को A का आंतरिक बिंदु कहा जाता है और इसे $A°$ द्वारा निरूपित किया जाएगा।

उदाहरण के लिए, यदि $A = [0, 1]$, तो $A° =]0, 1[$

(vi) कहा जाता है, कि एक समुच्चय A खुला विवृत (Open) होता है यदि उसके प्रत्येक बिंदु का समीपवर्ती होते है, अर्थात् यदि प्रत्येक $p \in A$ में, p का एक समीप $N(p)$ स्थित होता है, जैसे कि $N(p) \subset A$|

इस प्रकार A खुला या विवृत है, यदि A का प्रत्येक बिंदु A का आंतरिक (Interior) बिंदु है।

उदाहरण 3.3 : प्रत्येक $r > 0$ के लिए, खुला या विवृत अंतराल $[p - r, p + r]$ एक बिंदु $p \in R$ का एक समीपस्थ है, इसलिए R का एक उपसमुच्चय A खुला है यदि प्रत्येक $p \in A$, स्थित है, तो $r > 0$ माना कि,

$[p - r, p + r] \subset A$|

विशेष रूप से, प्रत्येक खुला या विवृत अंतराल $[a, b]$ एक खुला या विवृत समुच्चय है।

अगर $p \in [a, b]$ के लिए, $r = \min \{p - a, b - p\}$ लेने पर। तब $[p - r, p + r$ $[\subset] a, b]$ जो दिखा रहा है, कि $[a, b]$ खुला है।

(vii) यदि A संवृत है तो A को A सही माना जाता है, और यदि A का प्रत्येक बिंदु A का सीमा बिंदु है।

(viii) समुच्चय A का संवृत या संवृत A के व्युत्पन्न समुच्चय $D(A)$ का संगठन है और इसे $\overline{A}$ से निरूपित किया जाएगा।

(ix) एक समुच्चय A को दूसरे समुच्चय B में सघन कहा जाता है, यदि $\overline{A} \supset B$ है|

साथ ही, A को X में या हर जगह सघन कहा जाता है, यदि $\overline{A} = X$ है|

(x) एक समुच्चय A को कहीं भी सघन या गैर–सघन नहीं कहा जा सकता है यदि $\overline{A}$ का कोई समीपस्थ नहीं है। यह देखना आसान नहीं है, कि समुच्चय सघन नहीं है और केवल यदि $(\overline{A})^o = \emptyset$ हो।

(xi) एक समुच्चय A को कहा जाता है कि यदि कोई वास्तविक संख्या M है और बिंदु $q \in X$ है तो वह $d(p, q) < M$ सभी $p \in A$ के लिए है।

प्रमेय 3.1 : एक दूरीक समष्टि में, प्रत्येक निकटता एक खुला या संवृत समुच्चय है।

प्रमाण : $N(a, r)$ को किसी बिंदु $a \in X$ का निकटता मानें ताकि

$N(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$ हो, $< r$,

यदि $p \in N(a, r)$ विवेकाधीन (Arbitrary) हो, तो $d(a, p) < r$

माना कि $\delta = r - d\,(a, p) > 0$

हम दर्शाएंगे कि $N\,(p, \delta) \subset N(a, r)$

वास्तव में, $y \in N(p, \delta)$ का तात्पर्य $d(p, y) < \delta$ है और त्रिकोणीय विषमता दर्शाती है कि

टिप्पणी

$$d(a, y) \leq d(a, p) + d(p, y) < d(a, p) + \delta$$

$$= d(a, p) + r - d(a, p) = r$$

इसका तात्पर्य है कि $y \in N(a, r)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि,

$y \in N(p, \delta) \Rightarrow y \in N(a, r)$ और इसलिए $N(p, \delta) \subset N(a, r)$। इसलिए, $N(a, r)$ का समीपस्थ p है और चूंकि $N(a, r)$ में कोई बिंदु p था, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $N(a, r)$ एक खुला या विवृत समुच्चय है।

प्रमेय 3.2 : मान लें कि p एक दूरीक समष्टि के उपसमुच्चय A का एक सीमा बिंदु है। तब p के प्रत्येक समीपस्थ में असीम रूप से कई बिंदु होते हैं।

प्रमाण : मान लीजिए कि p का एक समीपस्थ N है, जिसमें केवल A एक परिमित संख्या है। माना कि $q1,...,qn$ के $N \cap A$ वे बिंदु हैं, जो p से विशिष्ट (Distinct) हैं।

माना कि $r = \min \{d(p, q) : 1 \leq i \leq n\}$

फिर $r > 0$ धनात्मक संख्याओं के परिमित समुच्चय का न्यूनतम होना। समीपस्थ $N(p, r)$ में p से अलग A का कोई बिंदु नहीं है, इसलिए A का सीमित बिंदु p नहीं है जो कि विरोधाभास है। इसलिए, p के प्रत्येक समीपस्थ में A के असीम रूप से कई बिंदु होने चाहिए, इस प्रकार प्रमेय की स्थापना करनी चाहिए।

परिणाम 1 : एक परिमित बिंदु समुच्चय में कोई सीमा बिंदु नहीं है।

प्रमेय 3.3 : एक समुच्चय A अगर खुला या विवृत है और अगर केवल इसका पूरक बंद या संवृत हो गया है।

प्रमाण : मान लीजिए कि A खुला है। यह दिखाने के लिए कि इसका पूरक A' बंद है। x को A' का कोई सीमा बिंदु बताया जाए। तब x के प्रत्येक समीपस्थ में A' का एक बिंदु होता है। इसका तात्पर्य है कि x का कोई भी समीपस्थ A में समाहित नहीं हो सकता है और इसलिए A का आंतरिक बिंदु x नहीं है क्योंकि A खुला या संवृत है, इसका मतलब है वह $x \in A'$ और फलस्वरूप A' बंद या विवृत है।

इसके विपरीत, माना A' बंद है तथा माना x, A का एक स्वैच्छिक बिंदु है। तब, $x \notin A'$। चूंकि A' बंद है, x को A' का सीमा बिंदु नहीं माना जा सकता है। अतः वहां x का एक समीपत्व N इस प्रकार है कि N में A' का कोई बिंदु नहीं है, अर्थात् $N \subset A$। इस प्रकार, A अपने सभी बिंदुओं का समीपत्व रखता है, और इसलिए A खुला है।

प्रमेय 3.4 : R का एक बंद या संवृत उपसमुच्चय A है जो ऊपर परिबद्ध (Bounded) है। यदि u, A के l, u, b हैं, तो $u \in A$ हैं।

प्रमाण : मान लीजिए $u \notin A$ हर $h > 0$ के लिए, एक बिंदु $x \in A$ है जैसे कि $u - h < x \leq u$ अन्यथा के लिए $u - h$ की ऊपरी बंध A होगा। इस प्रकार u के प्रत्येक समीपस्थ में A का बिंदु x होता है, क्योंकि $u \notin A$ से $x \neq u$ भी है। यह इस प्रकार

है कि A का एक सीमा बिंदु u है, जो A का बिंदु नहीं है। इसलिए, A संवृत नहीं है जो परिकल्पना का खंडन करता है। अतः इसी कारण $u \in A$ है।

रिमार्क : यदि A बंद या संवृत है और नीचे बँधा है और यदि l की glb है, तो $l \in A$

सत्यापन पूर्ववर्ती प्रमेय के समान है।

प्रमेय 3.5 : माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है। तब,

(i) रिक्त समुच्चय ϕ और संपूर्ण समष्टि X विवृत होने के साथ–साथ बंद या संवृत भी हैं।

(ii) खुले समुच्चयों के स्वैच्छिक संग्रह का समुच्चय खुला है।

(iii) बंद समुच्चयों की परिमित संख्या का समुच्चय खुला है।

(iv) बंद समुच्चयों के स्वैच्छिक संग्रह के सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन का बंद समुच्चय है।

प्रमाण : (i), को सिद्ध करने के लिए $\{A_\lambda : \lambda \in A\}$ विवृत समुच्चयों का एक स्वेच्छ संग्रह होना चाहिए।

माना कि, $A = \cup \{A_\lambda : \lambda \in A\}$

कुछ $\lambda \in A$ के लिए $x \in A \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow$ वहां मौजूद है $\in\ > 0$ जैसे कि $N(x, \in) \subset A_\lambda$ [$\because A\lambda$ खुला है,]

$\Rightarrow N(x, \in) \subset A \in$ $\qquad$ [$\because A\lambda \subset A$]

$\Rightarrow A$ खुला है (परिभाषा के अनुसार)।

(ii) और (iii) के प्रमाण एक बार पूरक के लिए डी–मॉर्गन नियमों (De-Morgan Laws) का उपयोग कर पालन करके। इस प्रकार साबित करने के लिए (ii) माना कि $A_i, i = 1, 2, ... n$ संवृत समुच्चय का एक परिमित संग्रह हो। तब

Ai संवृत है

$\Rightarrow X - Ai$ खुला है $\forall\, i = 1, 2, ...n$

$\Rightarrow \cap \{X - A_i : i = 1, 2, ... n\}$ खुला है (iii) द्वारा

$\Rightarrow X - \cup \{Ai : i = 1, 2, ..., n\}$ खुला है

[डी–मॉर्गन नियम द्वारा]

$\Rightarrow \{A_i : i = 1, 2, ... n\}$ संवृत है।

3.4 बंद या संवृत और खुले या विवृत समुच्चय

R के एक उपसमुच्चय G को खुला या विवृत कहा जाता है यदि हर बिंदु $p \in G$ के लिए, एक खुला अंतराल I मौजूद हो जैसे कि $p \in \subset$ G।

यह कहने के समतुल्य है कि G खुला है यदि प्रत्येक $p \in G$, और वहां उपस्थित है $\varepsilon\, nhd$ $N(p, \in) =]p - \in, p + \in[$, जैसे कि $N(p, \in) \subset G$।

टिप्पणी

उदाहरण 3.4:

(i) प्रत्येक खुला अंतराल एक खुला समुच्चय (Open Set) है।

(ii) रिक्त समुच्चय f और पूर्णतः वास्तविक पंक्ति R खुले या विवृत समुच्चय हैं। चूंकि f में कोई बिंदु अंतर्विष्ट नहीं है, इसलिए पूर्ववर्ती परिभाषा संतुष्ट है। इसलिए f खुला या विवृत है।

यह दर्शाने के लिए कि R खुला है, हम देखते हैं कि प्रत्येक $p \in R$ और सभी $\varepsilon > 0$,के लिए, हमारे पास, $[p-\in, p+\in] \subset \mathrm{R}$ है। इसलिए, R खुला या विवृत है।

उदाहरण 3.5

(i) संवृत खुला अंतराल $[2, 3]$ खुला नहीं है, चूँकि $[2, 3]$ में निहित 2 का कोई ε-*nhd* मौजूद नहीं है $[2, 3]$ में।

(ii) समुच्चय $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ तब से खुला नहीं है, जब A का कोई बिंदु ε-*nhd* में निहित नहीं है।

प्रमेय 3.6 : खुला समुच्चय के किसी भी संग्रह का सम्मिलन एक खुला समुच्चय है।

प्रमाण : C को विवृत समुच्चय का कोई भी संग्रह होने दें और S को उनका संघ बनाएं, माना कि $S = \cup \{G : G \varepsilon C\}$

माना कि $p \varepsilon S$

तब p को C में समुच्चय में से कम से कम एक से संबंधित होना चाहिए, जिसे $p \subset G$ कहते हैं। चूंकि G खुला है और वहां मौजूद है ε-*nhd* $N(p, \varepsilon)$ का p जैसे कि $N(p, \varepsilon) \subset G$ लेकिन $G \in S$, और इसलिए $\mathrm{N(p, \varepsilon)} \subset S$। इसलिए S खुला है।

प्रमेय 3.7 : विवृत समुच्चयों के परिमित संग्रह का सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन (Intersection) खुला या विवृत (Open) है।

प्रमाण : $\mathrm{S} = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ 1 जहाँ प्रत्येक G_i खुला है। मान लें कि $p \in S$

(यदि S खाली है, तो सिद्ध करने के लिए कुछ भी नहीं है)। पुनः सभी i=1, 2,....n के लिए $p \in G$ है।

चूंकि G_i खुली है, इसलिए $\varepsilon_i > 0$ मौजूद है जैसे कि $N(p, \varepsilon_i) \subset G_i$ हर $i = 1$, 2,..., n के लिए।

माना कि $\varepsilon = \min [\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n]$

तब $N(p, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = S$ इसलिए S खुला या विवृत है।

टिप्पणी : विवृत समुच्चयों के अपरिमित संग्रह का सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन आवश्यक रूप से खुला नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि $G_n =]-1/n, 1/n]$ $(n \in N)$, तो प्रत्येक

G_n खुला है (एक खुला अंतराल होने के नाते), लेकिन $\bigcap_{i=1}^{n} G_n = \{0\}$ जो तब से खुला नहीं है जब तक मौजूद नहीं है $\varepsilon > 0$ जैसे कि,$]-\varepsilon, \varepsilon[\subset\{0\}$

टिप्पणी

उदाहरण 3.6 : दिखाएँ कि R में प्रत्येक एकल समुच्चय (Singlton set) का पूरक खुला या विवृत है। आम तौर पर, एक परिमित समुच्चय का पूरक खुला होता है

हल– माना कि R में एक एकल समुच्चय $\{x\}$ है। यह दिखाने के लिए कि इसका पूरक $\{x\}'$ खुला है। $y\in\{x\}'$ लेने पर। यदि $\{x\}' = f$ तो प्रमाणित करने के लिए कुछ भी नहीं है, तब $y \neq x$ समुच्चय$|x-y| = r > 0$ हो। तो $0 < \varepsilon < r$ लें। तब $N(y, \varepsilon)=]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$ में x अंतर्विष्ट नहीं है और इसलिए $N(y, \varepsilon)\subset\{x\}'$ है। इसी कारण से $\{x\}'$ खुला है। पुनः, यदि $A = \{x_1, x_2..., x_n\}$ का कोई परिमित उपसमुच्चय R है, तो हम $A=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup...\cup\{x_n\}$ लिख सकते हैं। फिर $A'=[\{x_1\}\cup...\cup\{x_n\}]'=\{x_1\}'\cap...\cap\{x_n\}'$ है। चूंकि प्रत्येक $\{x_1\}'$ खुला है, यह प्रमेय 3.7 से निम्नानुसार है कि A' खुला है।

बंद या संवृत समुच्चय (Closed Sets)

परिभाषा : यदि F का पूरक खुला है तो R में एक समुच्चय F को बंद या संवृत कहा जाता है।

उदाहरण 3.7 : (i) प्रत्येक संवृत अंतराल $[a,b]$ बंद है, चूंकि इसका पूरक $[a,b]'=]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ खुला है, दो खुले अंतरालों का एक सम्मिलन है।

(ii) R में प्रत्येक एकलत्व समुच्चय संवृत है। अधिक सामान्य रूप से, R में प्रत्येक परिमित समुच्चय बंद है।

(iii) संवृत–खुला अंतराल $[a,b[$ संवृत है।

प्रमेय 3.8 : (i) बंद समुच्चयों (Closed Sets) के परिमित संग्रह का सम्मिलन बंद है।

(ii) बंद समुच्चयों के एक विवेकाधीन (Arbitary) संग्रह का सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन बंद है।

प्रमाण

(i) माना कि $F_i\,(i=1,2,...,n)$ संवृत समुच्चयों के परिमित संग्रह होता है। फिर प्रत्येक F_i' खुला है। डी–मॉर्गन नियम द्वारा, (By De-Morgan Law) हमारे पास $F^{i\prime}$ है जो खुला है, विवृत समुच्चयों के परिमित संग्रह का सर्वनिष्ठ (Intersection) है। इसलिए F_i बंद है।

C को संवृत समुच्चयों को एक स्वेच्छ संग्रह नियम माना जाता है। फिर प्रत्येक $F\in C$ संवृत है और इसलिए इसका पूरक F' खुला है। डी–मॉर्गन नियम द्वारा, हमारे पास $(\cap F)' = (F\in C)$, है, जो प्रमेय 3.7 द्वारा खुला है। इसलिए $\cap F' = (F\in C)$ संवृत है।

उदाहरण 3.8 : यदि A खुला है और B संवृत है, तो दिखाएँ कि $A-B$ विवृत हुए समुच्चय हैं और $B\text{-}A=B\cap A'$, जो दो बंद या संवृत समुच्चय का प्रतिच्छेदन है। इसलिए, $A-B$ खुला है और $B-A$ बंद है।

संचय बिंदु : अनुवर्ती बिंदु (Accumulation Points: Adherent Points)

यदि $A \subset R$,तो एक बिंदु $p \in R$ को A का संचय बिंदु (या एक सीमा बिंदु) कहा जाता है यदि p के प्रत्येक $e\text{-}nhd\ N(p,\in)$ में P से विशिष्ट A के बिंदु निहित हैं।

टिप्पणी

A के सभी संचय बिंदुओं के समुच्चय को A का पहला अवकलज समुच्चय (First Derived Set) (या सरल अवकलज समुच्चय) (Simply Derived Set) कहा जाता है और A को $D(A)$ द्वारा दर्शाया जाता है। $D(A)$ के पहले अवकलज समुच्चय को A का दूसरा अवकलज समुच्चय कहा जाता है और $D^2(A)$ द्वारा निरूपित किया जाता है। सामान्य तौर पर, A के अवकलज समुच्चय को $D^n(A)$ द्वारा दर्शाया जाता है।

उदाहरण 3.9

(i) संवृत अंतराल का प्रत्येक बिंदु $[a,b]$ विवृत अंतराल में बिंदुओं के समुच्चय का एक संचय बिंदु है, $]a,[b$ तो इस प्रकरण में $D]a,b[=a,b]$

(ii) 0 समुच्चय $A=\left\{\frac{1}{n}: n \in N\right\}$ का केवल संचय बिंदु है।

इसलिए $D(A)=\{0\}$ ।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या (Real Number) परिमेय संख्याओं (Rational Number) के समुच्चय Q का एक संचय बिंदु है और इसलिए $D(Q) = R$ ।

(iv) यदि $A = [2,3[$, तो $D\ (A) = [2,3]$

यदि $A \subset R$, तो एक बिंदु $p \in R$ को A का अनुवर्ती बिंदु (Adherent Point) कहा जाता है यदि p के प्रत्येक $\in\text{-}nhd$ में A का बिंदु होता है। A के सभी अनुवर्ती बिंदुओं के समुच्चय को $Adh\ (A)$ द्वारा निरूपित A का अवलम्बन(अनुवर्ती) कहा जाता है।

प्रमेय 3.9 : यदि A का एक संचय बिंदु (Accumulation Point) p है, तो p के प्रत्येक $\in\text{-}nhd$ में असीम रूप से A के कई बिंदु होते हैं।

प्रमाण : इसके विपरीत, मान लीजिए कि वहाँ p का एक $\in\text{-}nhd\ (b, \in) = p + \in$ मौजूद है जो केवल p से अलग बिंदु की एक परिमित संख्या को $p_{1,} p_{2\,,\,\dots} p_{,}$ कहते है। r धनात्मक संख्याओं में से सबसे छोटे को निरूपित करते हैं।

$$|p - p_1|,\ |p - p_Z|\ , \dots,\ |p - p_n|.$$

पुनः $N(p, r/2) =]p–r/2, p + r/2[$ का एक $\varepsilon\text{-}nhd$ है जिसमें p से अलग A का कोई सुनिश्चित बिंदु नहीं है। जो कि एक विरोधाभास है। इसलिए हर $\varepsilon\text{-}nhd$ के p में असीम रूप से A के कई बिंदु होने चाहिए।

एक समुच्चय को **पहले प्रकार** (First Species) का कहा जाता है यदि इसमें केवल अवकलज समुच्चयों की एक **परिमित संख्या** (Finite Number) होती है। यदि इसकी अवकलज समुच्चयों की संख्या अपरिमित (Infinite) है, तो इसे दूसरे प्रकार (Second Species) का कहा जाता है।

ध्यान दें कि यदि एक समुच्चय पहले प्रकार का है, तो उसका अंतिम व्युत्पन्न समुच्चय खाली होना चाहिए। दूरीक समष्टि एक समुच्चय जिसका $(n+1)$ वें व्युत्पन्न समुच्चय खाली होता है, इसे **nth** व्यवस्था का एक समुच्चय कहा जाता है।

उदाहरण 3.10 : सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q दूसरे प्रकारों का है, क्योंकि

$$D(Q) = R, D^2(Q) = D(R) = R.$$

$$D^3(Q) = D(R) = R, \text{ आदि।}$$

इसलिए, Q के सभी व्युत्पन्न समुच्चय R के बराबर हैं।

उदाहरण 3.11 : माना कि $A = \{1/n : n \in N\}$ फिर $D(A) = \{0\}$ चूंकि $D(A)$ में एकल बिंदु (Single Point) होता है, इसलिए इसमें कोई सीमा बिंदु नहीं हो सकता है और इसलिए $D^2(A) = \phi$ इसलिए A पहले प्रकार (First Species) और प्रथम कोटि (First Order) का है।

उदाहरण 3.12: माना कि $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5} ....\}$ तब A की सीमा बिंदु 0 है और उपसमुच्चय के लिए भी सीमा बिंदु $\frac{1}{2}$ है, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ मूल में सघन है और $\frac{1}{2}$ पर उपसमुच्चय $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, ...\}$ सघन (Dense) है। इसलिए $\mathrm{D}(A) = \{0, \frac{1}{2}\}$ और $\mathrm{D}^2(A) = \phi$ इसलिए A पहले प्रकार और प्रथम कोटि का है।

उदाहरण 3.13 : माना कि $A = \{1, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3, (\frac{1}{2})^4, \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^5, ...\}.$

फिर यह निरीक्षण से स्पष्ट है कि

$\mathrm{D}(A) = \{0, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, ...\}, \mathrm{D}^2(A) = \{0\}$ और $\mathrm{D}^3(A) = \phi$

इसलिए इस प्रकरण में, A पहले प्रकार और द्वितीय कोटि का है।

उदाहरण 3.14 : माना कि एक समुच्चय A के बिंदुओं को निम्न द्वारा दिया गया है,

$$\frac{1}{3^{S_1}} + \frac{1}{5^{S_2}} + \frac{1}{7^{S_3}} + \frac{1}{11^{S_4}},$$

जहां S_1, S_2, S_3, S_4 प्रत्येक में सभी धनात्मक समाकलन मान हों।

इसलिए $\mathrm{D}(A)$ में निम्न द्वारा दिए गए चार समुच्चय होते हैं,

$$\frac{1}{3^{S_1}} + \frac{1}{5^{S_2}} + \frac{1}{7^{S_3}}, \frac{1}{3^{S_1}} + \frac{1}{5^{S_2}} +, \frac{1}{11^{S_4}}, \frac{1}{3^{S_1}} + \frac{1}{7^{S_3}}, \frac{1}{11^{S_4}}$$

टिप्पणी

$\frac{1}{5^{S_2}}+\frac{1}{7^{S_3}}+\frac{1}{11^{S_4}}$ और बिंदुओं के छः समुच्चय होंगे।

$\frac{1}{3^{S_1}}+\frac{1}{5^{S_2}}$, $\frac{1}{3^{S_1}}+\frac{1}{7^{S_2}}$, $\frac{1}{3^{S_1}}+\frac{1}{11^{S_4}}$, $\frac{1}{5^{S_2}}+\frac{1}{7^{S_3}}$

$\frac{1}{5^{S_2}}+\frac{1}{11^{S_4}}$, $\frac{1}{7^{S_3}}+\frac{1}{11^{S_4}}$ और बिंदुओं के चार समुच्चय होंगे।

$\frac{1}{3^{S_1}}$, $\frac{1}{5^{S_2}}$, $\frac{1}{7^{S_3}}$, $\frac{1}{11^{S_4}}$ एकल बिंदु 0 के साथ है।

$D^2(A)$ में इन समुच्चयों में से अंतिम दस शामिल हैं और बिंदु 0, $D^3(A)$ में अंतिम चार समुच्चय और बिंदु 0 शामिल हैं, और $D^4(A)$ में केवल बिंदु 0 शामिल हैं। इस प्रकार, समुच्चय A पहले प्रकार और चतुर्थ कोटि का है।

उदाहरण 3.15 : दर्शाये कि, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ का शून्य प्रथम कोटि का एक समुच्चय बनाता है, $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)$ का शून्य द्वितीय कोटि का एक समुच्चय बनाता है, $\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\right)$ के शून्य तृतीय कोटि का एक समुच्चय बनाते हैं इत्यादि।

हल– $\sin\frac{1}{x}$ का शून्य $\sin\frac{1}{x}=0$ द्वारा दिया जाता है, जो $\frac{1}{x}=n\pi$ या $x=\frac{1}{np}$, देता है, जहाँ n एक पूर्णांक है। इसलिए यदि $\sin\frac{1}{x}$ शून्य का समुच्चय A है, तो सभी रूप $\frac{1}{np}$ में A शामिल हैं, जहाँ n एक पूर्णांक है। स्पष्ट रूप से $D(A) = \{0\}$ और इसलिए A प्रथम कोटि का है।

पुनः $\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}=0$, $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}=n\pi$, देता है, जहाँ n एक पूर्णांक है।

तब $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{np}$, जिसमें से सामान्य मान (General Value) $\frac{1}{x}$ है जिसे $\frac{1}{x}=n\pi + \sin^{-1}=\frac{1}{np}$ द्वारा दिया जाता है जहाँ m एक पूर्णांक है।

टिप्पणी

या $x = \dfrac{1}{m\pi + \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)}$ ...(i)

इस प्रकार $\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}\right)$ का शून्य एक बिंदुओं का समुच्चय बनाते हैं, जिसे B कहते हैं।

यह स्पष्ट है कि $D(B)$ रूप $\dfrac{1}{m\pi}$ के अंक और बिंदु 0 के होते हैं और इसलिए $D^2(B)$में एकल बिंदु 0 शामिल हैं। इसलिए B द्वितीय कोटि का है।

इसी तरह हम दिखा सकते हैं कि $\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}}\right)$ का शून्य तृतीय कोटि का एक समुच्चय है, इत्यादि।

प्रमेय 3.10 बोलजानो–वेइरास्ट्रास प्रमेय (Bolzano-Weierstrass Theorem): एक सीमित अनंत समुच्चय में वास्तविक संख्याओं का कम से कम एक सीमा बिंदु होता है।

प्रमाण : A, R की एक अनंत सीमित उपसमुच्चय है। फिर, परिमित स्थिरांक m और M मौजूद हैं, जो $m \le a \le M$ सभी के लिए $a \in A$ कम से कम एक अंतराल $[m, (m+M), M]$ में A के अंकों की एक अनंत संख्या होनी चाहिए। हम इस rjg dsvajky dks $[a_1+b_1]$ नाम देते हैं। इसी तरह, अंतराल में से एक $[a_{1,} \frac{1}{2}(a_1+b_1), [a_1+b_1], [\frac{1}{2}(a_1+b_1), b_1]$ में A के असीम रूप से कई बिंदु होते हैं और हम इसे $[a_2,b_2]$ के रूप में देखते हैं।

अब $[a_2,b_2]$ के साथ आगे बढ़ेंगे जैसा हमने $[a_1, b_1]$ के साथ किया था। इस तरह से जारी रखते हुए, हम एक बंद अंतराल $\{I_n\}=\{[a_n, b_n]\}$ जैसे कि $I_n \in I_{n+1}$ और $[I_n] = b_n - a_n = \dfrac{M-m}{2^n} \to 0$ को $n \to \infty$ के रूप में अनुक्रम प्राप्त करते हैं।

इसलिए नेस्टेड अंतराल प्रमेय (Nested Interval Theorem) द्वारा, I_n में एक ही बिंदु होता है, जिसे x_0 कहतें है। हम n को ऐसे चुनते हैं कि $b_n - a_n < \varepsilon$। तब, $I_n \subset [x_o - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ और फलस्वरूप अंतराल, $[x_o - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ के अपरिमित बिंदु A होते हैं। यह इस प्रकार है कि x_0 का एक सीमा बिंदु A है। यह प्रमाण को पूरा करता है।

टिप्पणी

3.5 संवृत आव्यूह

R में समुच्चय A का संवरण, A को शामिल किए हुए लघुतम बंद समुच्च्य होता है और इसे $\overline{A}$ के द्वारा दर्शाया जाता है।

इस परिभाषानुसार, $A\subset\overline{A}$। इसके अलावा $\overline{A}$ हमेशा A का बंद समुच्चय (Closed Set) है।

प्रमेय 3.11 : माना R में A एक समुच्चय है। तब, $\overline{A} = A\cup D(A)$, अर्थात् A के सभी अनुवर्ती बिंदुओं का समुच्चय A है।

प्रमाण : हम पहली बार मानते हैं कि $A\cup D(A)$ है। यदि p के लिए $A\cup D(A)$ की कोई सीमा है। तब या तो A का एक सीमा बिंदु p है या $p\in D(A)$ की सीमा है। यदि A का एक सीमा बिंदु p है, तो $p\in D(A)$ है। यदि $D(A)$ का एक सीमा बिंदु p है, तो $p\in D(A)$ चूंकि $D(A)$ संवृत है। या तो प्रकरण पर, $p\in D(A)$ और निश्चित रूप से $p\in A\cup D(A)$ है इसलिए $A\cup D(A)$ संवृत है।

अब $A\cup D(A)$ से युक्त एक संवृत समुच्चय A है, और A के बाद से $\overline{A}$ में सबसे छोटा समुच्चय है, हमारे पास,

$$\overline{A}\subset A\cup D(A) \qquad ...(3.1)$$

तथा, $\overline{A}\subset\overline{A}\Rightarrow D(A)\subset D(\overline{A})$ ... (3.2)

चूंकि $\overline{A}$ संवृत है, हमारे पास $\mathrm{D}(\overline{A})\subset\overline{A}$ है। ... (3.3)

$\therefore$ समीकरणों (3.2) और (3.3) से, $D(A)\subset\overline{A}$

इसके अतिरिक्त, $A\subset\overline{A}$ और $\mathrm{D(A)\,A}\subset\overline{A}\Rightarrow A\cup D(A)\subset\overline{A}$ ... (3.4)

समीकरणों (3.1) और (3.4) से, $\overline{A}=A\cup D(A)$

प्रमेय 3.12 : यदि A एवं B, R के उपसमुच्चय हों तब,

(i) $\mathrm{A}\subset\mathrm{I}\ \ \mathrm{B}\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$, (ii) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(iii) $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$, (iv) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

प्रमाण : (i) दिए गए $A\subset B$ लेकिन $B\subset\overline{B}$ हमेशा। इसलिए, $A\subset B$ इस प्रकार $\overline{B}$ एक बंद समुच्चय है जिसमें A है। लेकिन $\overline{A}$ में सबसे छोटा बंद समुच्चय A है। इसलिए $\overline{A}\subset\overline{B}$

(ii) प्रमाण (i) द्वारा $\mathrm{A}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ और $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\Rightarrow\overline{B}\ \overline{A\cup B}$ है।

इसलिए, $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. ... (3.5)

पुनः $A\subset\overline{A}$ और $B\subset\overline{B}\Rightarrow A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$ लेकिन $\overline{A}\cup\overline{B}$ बंद है, दो बंद समुच्चयों का संघ (Union) है। इस प्रकार $\overline{A}\cup\overline{B}$ एक बंद समुच्चय है जिसमें

$A \cup B$ होता है। लेकिन $\overline{A \cup B}$ सबसे छोटा बंद समुच्चय है जिसमें $A \cup B$ होता है। इसलिए $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ ... (3.5)

$\therefore$ समीकरणों (3.5) और (3.6) से, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(iii) प्रमाण (i) द्वारा $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ और $A \cap B \subset B \Rightarrow A \cap B \subset \overline{B}$ है। इसलिए $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(iv) चूंकि $\overline{A}$ संवृत है, हमारे पास प्रमेय 3.12 (ii) है कि $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

उदाहरण 3.16

(i) यदि Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है, तो

$D(Q) = R$ और इसलिए $\overline{Q} = Q \cup D(Q) = Q \cup R = R$

(ii) $A =]2, 3[$ फिर $D(A) = [2, 3]$ और इसलिए

$\overline{A} = A \cup D(A) = [2, 3]$

(iii) **R** में कोई भी परिमित समुच्चय A है। चूंकि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक परिमित समुच्चय संवृत है, हमारे पास $\overline{A} = A$ है।

3.6 आंतरिक और सीमा बिंदु

(i) माना **R** एक उपसमुच्चय है तथा माना $p \in A$। तब p को A का एक आंतरिक बिंदु कहा जाता है, यदि वहां A में p का एक ε-*nhd* उपस्थित रहता है, अर्थात् यदि वहां $\varepsilon > 0$ इस प्रकार उपस्थित रहता है कि $]p-\varepsilon, p+\varepsilon[\subset A$। A के सभी आंतरिक बिंदुओं का समुच्चय, A का आंतरिक कहलाता है तथा इसे $A°$ या int A के द्वारा दर्शाया जाता है।

(ii) बिंदु p को A का बाहरी बिंदु (Exterior Point) कहा जाता है यदि A के पूरक A' में निहित p का *e-nhd* मौजूद है। A के सभी बाहरी बिंदुओं के समुच्चय को A का बाहरी कहा जाता है और इसे *ext A* से दर्शाया जाता है।

(iii) एक बिंदु p को A का एक सीमा बिंदु (या सीमांत बिंदु) (or Frontier Point) भी कहा जाता है यदि यह न तो आंतरिक है और न ही A का बाहरी बिंदु है। A के सभी सीमा बिंदुओं का समुच्चय A का सीमा (या सीमांत) कहलाता है जिसे $b(A)$ [या $Fr(A)$] द्वारा चिह्नित किया जाता है।

प्रमेय 3.13 : A को R का उपसमूह बनाते हैं, तब

(i) $A°$ एक खुला समुच्चय है,

(ii) A में निहित सबसे बड़ा खुला समुच्चय $A°$ है

(iii) A खुला है और यदि केवल $A° = A$ है तो।

टिप्पणी

प्रमेय 3.14 : माना कि R के कोई भी उपसमुच्चय A, B हों तब, सिद्ध करें

$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

प्रमाण

$A \cap B \subset A \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ और $A \cap B \subset B \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subset B^\circ$

$\therefore$ $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. ...(3.7)

पुनः $A^\circ \subset A$ और $B^\circ \subset B \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$

इसके अलावा $A^\circ \cap B^\circ$ खुला है, दो विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection) है।

इस प्रकार $A \cap B$ में निहित एक खुला समुच्चय $A^\circ \cap B^\circ$ है। लेकिन $A \cap B$ में निहित सबसे बड़ा खुला समुच्चय $(A \cap B)^\circ$ है। इसलिए

$A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)$. ...(3.8)

समीकरणों (3.7) और (3.8) से, $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

उदाहरण 3.17 : (i) माना कि $A =]0, 1[$ चूँकि A खुला है $A^\circ = A =]0, 1[$ है।

चूँकि $A' =]-\infty, 0] \cup [1, \infty,[$, $\text{ext}\, A = (A')^\circ =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$ है।

(ध्यान दें कि A') के आंतरिक बिंदु 0 और 1 नहीं हैं,।

$\therefore$ $b(A) = \{0, 1\}$, A की सीमा (Boundary) के बाद से A के उन बिंदुओं के होते हैं जो A के न तो आंतरिक बिंदु हैं और न ही बाहरी अंक है।

(ii) Q सभी तर्कसंगत बिंदुओं का समूह है। तब $Q^\circ = \phi$, Q के किसी भी बिंदु के पास Q में निहित ε-*nhd* नहीं हो सकता है।

$\text{ext}\, Q = (Q')^\circ = \phi$ क्योंकि Q' में सभी अपरिमेय बिंदु होते हैं और ε-*nhd* एक अपरिमेय बिंदु का कोई Q में समाहित नहीं किया जा सकता है। (ध्यान दें कि हर ε-*nhd* बिंदु पर हमेशा एक अनंत संख्या में परिमेय होते हैं साथ ही तर्कहीन बिंदु होते है। इसलिए $b(Q) = R$

3.7 दूरीक समष्टि का उपसमष्टि

संबद्धता (Connectedness) की धारणा विश्लेषण में मौलिक महत्व की है। एक सामयिक (आव्यूह) समष्टि में संबद्धता की औपचारिक परिभाषा देने से पूर्व, हम उपसमष्टि (उप–विचार) की धारणा का परिचय देते हैं।

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा माना कि A, X का एक उपसमुच्चय है। माना कि d^*, $A \times A$ के लिए d के प्रतिबंध को दर्शाता है, अर्थात्,

$$d^*(x, y) = d(x, y)$$

जहां A के बिंदु x, y हैं। तो A के लिए एक आव्यूह d^* है जिसे उत्प्रेरित आव्यूह (Induced Metric) कहा जाता है और आव्यूह A के साथ समुच्चय A को d^* का उपसमष्टि कहा जाता है।

इस प्रकार, प्रेरित आव्यूह से लैस X का एक सबसमुच्चय A अपने आप में एक दूरीक समष्टि है और निकटता, खुले समुच्चय और बंद समुच्चय को किसी भी दूरीक समष्टि के रूप में परिभाषित किया गया है। लेकिन एक खुला समुच्चय (संवृत समुच्चय) X के एक उपसमूह के रूप में माना जाने पर A की जरूरत का खुला (संवृत) नहीं होना चाहिए।

उदाहरण के लिए, यदि हम R के उपसमष्टि के रूप में बंद अंतराल [0, 1] को मानते हैं, तो अर्ध खुला अंतराल (Semi-Open Interval) [0, 1] में [0, 1[खुला है, लेकिन R में नहीं। वास्तव में, यदि X और $B \subset A$ का उपसमष्टि A है, तब

(i) B खुला है, यदि X में एक समुच्चय G मौजूद है, तो

$B = G \cap A$

(ii) A में B मौजूद है यदि X में एक समुच्चय H संवृत मौजूद है तो जैसे कि,

$B = H \cap A$

ध्यान दें कि, वाक्यांश 'A में B खुला है' का अर्थ है कि A पर प्रेरित आव्यूह के सापेक्ष B खुला है। साथ ही, 'X में B खुला है' का अर्थ है कि X पर आव्यूह के संदर्भ में B खुला है।

ध्यान दे: (i) यदि $A \subset X$ खुला है, तो $B \subset A$ में A खुला है यदि X खुला हो तब।

(ii) यदि $A \subset X$ संवृत है, तो X में संवृत होने पर $B \subset A$ संवृत है, यदि X में संवृत है।

एक अन्य परिभाषा है, एक दूरीक समष्टि X का उपसमुच्चय A को असंगत करने के लिए कहा जाता है यदि यह दो अरिक्त असंयुक्त समुच्चयों (Non-Empty Disjoint Sets) C एवं D का सम्मिलन है जो दोनों A में खुले हैं,

$$C \cap \mathrm{D} = \phi \text{ और } C \cup D = A$$

पूर्ववर्ती परिभाषा से यह निकलता है कि दूरीक समष्टि X का एक उपसमुच्चय असंगत हो जाता है यदि यह दो अरिक्त संयुक्त समुच्चयों का सम्मिलन है जो दोनों A में संवृत है।

हम A को पृथक्करण (Separation) (या विसंबंधन) (Disconnection) का $C \cap D$ कहते हैं।

यह परिभाषा से एक बार में आता है कि प्रत्येक एकल समुच्चय एक जुड़ा हुआ समुच्चय (Connected Set) है।

प्रमेय 3.15: R संबद्ध (जुड़ा) है।

प्रमाण : मान लीजिए, यदि संभव हो, R असंबद्ध हो गया है। तब वहां दो अरिक्त, असंयुक्त, संवृत समुच्चय A और B उपस्थित हैं जैसे कि $\mathrm{R} = A \cup B$। चूंकि A, B अरिक्त हैं, हम $a_1 \in A$ और $b_1 \in B$ का मान निकाल सकते हैं। चूंकि $A \cup B = \phi, a_1 \neq b_1$, और इसलिए $a_1 > b_1$ या $a_1 < b_1$। मान लीजिए $a_1, < b_1$। माना कि $I_1 =]a_1, b_1]$ ताकि I_1 एक संवृत अंतराल है। I_1 को द्विविभाजित करते है और इसका मध्य बिंदु $\frac{a_1 + b_1}{2}$ निरीक्षण करते हैं कि A या B से संबंधित होना चाहिए, लेकिन A और B दोनों

से असंयुक्त (Disjoint) नहीं हैं। यह निम्नानुसार है कि दो हिस्सों में से A में इसका बायां अंत बिंदु (Left End Point) होना चाहिए और B में इसका दायां अंत बिंदु (Right End Point) है। हम इस अंतराल को $I_2 = [a_2, b_2]$ द्वारा निरूपित करते हैं।

टिप्पणी

हम I_2 को द्विविभाजित करते हैं और पहले की तरह आगे बढ़ते हैं। हम इस प्रक्रिया को जारी रखते हैं। स्पष्ट रूप से $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ इस प्रकार हम एक नेस्टेड (Nested) अनुक्रम प्राप्त करते हैं $<I_n>$ जैसे अंतराल उनकी लंबाई $|I_n| \to 0$ के रूप में, $n \to \infty$ इसलिए, नेस्टेड अंतराल प्रमेय के द्वारा, एक अद्वितीय बिंदु c मौजूद है जो प्रत्येक I_n, के अंतर्गत आता है, अर्थात

$c \in \cap \{In : n \in \mathrm{N}\}$

यह देखना आसान है कि A और B दोनों का एक सीमा बिंदु c है, यदि $\mathrm{V}(c, \in) =]c - \in, c + \in[$ कोई भी c का ε-*nhd* है, हम एक धनात्मक पूर्णांक m_0 को इतना बड़ा पा सकते हैं कि $I_n \subset N(c, \varepsilon)$ सभी $n \geq m_0$ के लिए और फलस्वरूप $N(c, \in)$ में A और B दोनों के बिंदुओं की अपरिमित संख्या है क्योंकि A और B संवृत हैं, $c \in A$ और $c \in B$ जो कि $A \cap B = \phi$ के बाद से एक विरोधाभास है। इसलिए, R से संबद्ध (जुड़ा) होना चाहिए।

प्रमेय 3.16 : R का एक उपसमुच्चय A जुड़ा हुआ है यदि और केवल यदि यह एक अंतराल है।

प्रमाण : 'केवल यदि' भाग। माना A संबद्ध है तथा यदि संभव हो तो मान लीजिए A एक अंतराल नहीं है। तब, वहां $a < p < b$ के साथ वास्तविक संख्याएं a, p, b इस प्रकार उपस्थित हैं कि $a, b \in A$ लेकिन $\mathrm{p} \notin A$ माना कि

$G =]-\infty, p[$ और $H =]p, x[$

तब G, H R में असंयुक्त, अरिक्त खुले समुच्चय हैं। वे अरिक्त हैं क्योंकि $a \in G$ तथा $b \in H$। माना कि

$C = A \cap G$ और $D = A \cap H$

फिर, हमारी पहले की टिप्पणियों से, A में C और D खुला है, आगे $a \in C$ और b और D में, ताकि वे अरिक्तता हों। इसके अलावा

$C \subset G, D \subset H$ और $G \cap H = \phi \Rightarrow C \cap D = \phi,$

और $C \cup D = (A \cap G) \cup (B \cap H)$

$= A \cap (G \cup H) = A \cap (\mathrm{R} - \{p\}) = A$

$[\because p \notin A \Rightarrow A \subset \mathrm{R} - \{p\}]$

इसलिए, A का $C \cup D$ एक पृथक्करण है और परिणामस्वरूप A असंगत कर दिया जाता है जो कि एक विरोधाभास है। इसलिए, A को एक अंतराल होना चाहिए।

'यदि' भाग। इस भाग का प्रमाण ठीक उसी तर्ज पर है जैसा कि पिछले छोटे प्रमेयों में मामूली संशोधनों के साथ होता है और इसे अभ्यास के रूप में छोड़ दिया जाता है।

3.8 पूर्णता और कैंटर के सर्वनिष्ठ या प्रतिच्छेदन प्रमेय

दूरीक समष्टि (X, d) में अनुक्रम $< x_n >$, का $x_0 \in X$, अभिसरण करता है यदि यह अंततः x_0 के हर *nhd* में एकगुणित रहता है तो इस प्रकार यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए ऐसा धनात्मक पूर्णांक $n(\in)$ होता है जैसे कि

$$n \geq n(\in) \Rightarrow d(x_n, x_0) < \in$$

एक अन्य परिभाषा है, दूरीक समष्टि (X, d) में अनुक्रम $< x_n >$ एक काउची (Cauchy) अनुक्रम माना जाता है, यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक $n(\in)$ मान लिया जाता है जैसे

$$m, n \geq n(\in) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \in$$

यह देखना आसान है कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसरण अनुक्रम काउची अनुक्रम (Cauchy Sequence) है।

एक दूरीक समष्टि X को पूर्ण कहा जाता है यदि X में प्रत्येक काउची अनुक्रम X में एक बिंदु पर परिवर्तित हो जाता है।

प्रमेय 3.17 कैंटर का प्रतिच्छेदन प्रमेय (Cantor's Intersection Theorem) : (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि हो और $<F_n>$ को X के अरिक्त संवृत उपसमुच्चय का एक नेस्टेड अनुक्रम (Nested Sequence) हो जैसे कि,

$\delta(F_n) \to 0$ जैसे $n \to \infty$ के रूप में।

तो $\bigcap\limits_{n=1}^{\subset} F_n$ बिल्कुल एक बिंदु के होते हैं।

प्रमाण : प्रत्येक n के लिए, हम $x_n \in F_n$ चुनते हैं। चूँकि $\delta(F_n) \to 0$, प्रत्येक $\in > 0$ के लिए, वहाँ एक धनात्मक पूर्णांक m_0 उपस्थित है जैसे कि $d(F_{m0}) < \in$ पुनः चूंकि $<F_n>$ नेस्टेड (Nested) है, हमारे पास है,

$n, m \geq m_0 \Rightarrow F_n, F_m\, F_{m0} \Rightarrow x_n, x_m \in F_{m0} \Rightarrow d(x_n, x_m) < \in$

इस प्रकार $< x_n >$ एक काउची अनुक्रम है। चूंकि X कुछ $x_0 \in X$ के लिए $x_n \to x_0$ तब पूरा हो जाएगा। हम $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ का दावा करते हैं। यह साबित करने के लिए, m कोई धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए।

पुनः

$n > m \Rightarrow x_n \in F_m$ ... (i)

$[\because\ x_n \in F_n$ और $n > m \Rightarrow F_n \subset F_m]$.

$x_n \to x_0$ के बाद से, अनुक्रम अंततः x_0 के प्रत्येक *nhd* में होता है और समीकरण (i) के द्वारा, x_0 के प्रत्येक *nhd* में अपरिमित संख्या में F_m अंक होते हैं। इस प्रकार F_m का एक सीमा बिंदु x_0 है।

चूंकि F_m संवृत है, $x_0 \in F_m$ और चूंकि m स्वेच्छ (Aritary) है, इसलिए हमारे पास $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ है।

अब मान लीजिए कि वहाँ एक और बिंदु $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ है। तब प्रत्येक n के लिए $d(x_0, x_0^*) \leq \delta(F_n)$। इसलिए, $\delta(x_0, x_0^*) = 0$ क्योंकि $n\infty$ के रूप में $\delta(F_n) \to 0$। इसलिए $x_0 = x_0^*$ और इसलिए $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$।

टिप्पणी

3.9 संकुचन सिद्धांत

माना कि, (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि (Metric Space) हो। मानचित्रण (Mapping) को X पर एक संकुचन मानचित्रण (Contraction Mapping) या संकुचन (Contraction) कहा जाता है यदि कोई वास्तविक संख्या $0 \leq \alpha < 1$ के साथ α मौजूद है। जैसे कि प्रत्येक $x, y, \in X$ के लिए,

$$d(f(x), f(y))\ \alpha d(x, y) < d(x, y)$$

इस प्रकार संकुचन मानचित्रण में, किन्हीं दो बिंदुओं के प्रतिबिंबों (Images) के बीच की दूरी बिन्दुओं (Points) के बीच की दूरी से कम होती है। इसलिए यदि दो में से प्रत्येक के लिए अनुप्रयोग 'अनुबंध' (Contracts) के बीच की दूरी है।

स्पष्ट रूप से, किसी भी दूरीक समष्टि का संकुचन X पर समान रूप से निरंतर होता है। एक बिंदु $p \in X$ को f का निश्चित बिंदु (Fixed Point) कहा जाता है यदि $(p) = p$।

उदाहरण 3.18 : R_2 और मानचित्रण के लिए सामान्य आव्यूह (Usual Metric) d पर विचार करें जहाँ $x = (x_1, x_2)$। तब, R_2 पर एक संकुचन f है। इसके लिए, हमारे पास

$d[f(x), f(y)] = d(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ है।

प्रमाण : माना दूरीक समष्टि X का एक सघन उपसमुच्चय A है। हम सिद्ध करेंगे कि $X \to A$, X का एक खुला उपसमुच्चय है। माना $p \in X \to A$।

माना कि $I_n = [a_n, b_n,]$ और मान लीजिए कि A सभी a_n का समुच्चय है। तब A अरिक्तता है और ऊपर (b_1 द्वारा) बंधा हुआ है। इसलिए, A के पास कम से कम ऊपरी सीमा होनी चाहिए, u कहेंगे। यदि m और n धनात्मक पूर्णांक हैं, तो

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m$$

ताकि $u \leq b_m$ प्रत्येक m के लिए। इसके अलावा स्पष्ट रूप से $a_m \leq u$ प्रत्येक m के लिए।

यह इस प्रकार है कि $u \in I_m$ के लिए $m = 1, 2, 3, ...$

अतः $\cap \{I_n : n \in \mathrm{N}\} \neq \phi$

लैमा (Lemma) 1: माना कि k एक धनात्मक पूर्णांक हो। यदि $< I_n >$ k-कक्ष का एक क्रम है जैसे कि $\supset \mathrm{I}_n \mathrm{I}_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$

तो $\cap \{I_n : n \in \mathrm{N}\} \neq \phi$

टिप्पणी

प्रमाण : सभी बिंदुओं से मिलकर $x = (x_1,..., x_k)$ जैसे कि, $a_{n,i} \leq x_i \leq b_{n',i}$ $(1\ i \leq k : n = 1, 2, 3,...)$,

और $I_n, i = [a_{n,i,}\ b_{n,i}]$

प्रत्येक के लिए i अनुक्रम $< I_{n,i}$ पूर्व प्रमेय की स्थिति को संतुष्ट करता है।

इसलिए, वास्तविक संख्याएँ मौजूद हैं xi^* $(1 \leq i \leq k)$ जैसे कि

$a_n,i \leq xi^* \leq b_n,i\ (1 \leq i \leq k\ ;\ n = 1, 2, 3,...)$

अगर हम समुच्चय करते हैं $x^* = (x_1^*,..., xk^*)$,

हम देखते है कि $x^* \in I_n$ for $n = 1, 2, 3,...,$

ताकि $\bigcap \{I_n : n \in \mathrm{N}\}$

प्रमेय 3.18 : प्रत्येक k-कक्ष निहित या सघन (Compact) है।

प्रमाण : I को k-कक्ष (k- cell) से युक्त सभी बिंदुओं

$$x = (x_1,..., xk)$$

जैसे कि $a_i \leq xi \leq b_i, (1 \leq i \leq k)$

समुच्चय $$\delta = \left[\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i)^2\right]^{1/2}$$

तब $x \in I$, अर्थात् $|x - y| \leq \delta$। मान लीजिए, यदि संभव हो, तो I सघन (Compact) नहीं है। फिर I का एक खुला आवरण $C = \{G_\lambda : \lambda \in A\}$ उपस्थित होता है जिसमें कोई परिमित उपआच्छादित नहीं होता है। $C_i = (a_i + b_i)\ 2$ का मान रखने पर, अंतराल $[a_i, c_i]$ और $[c_i, b_i]$ फिर 2^k k-प्रकोष्ठ Q_i निर्धारित करें जिसका सम्मिलन I है। इनमें से कम से कम एक समुच्चय Q_i कह सकते हैं कि I_1, C के किसी भी परिमित उपसंग्रह द्वारा आच्छादन नहीं किया जा सकता है (अन्यथा I को इतना आच्छादित किया जा सकता है)। हम अगले I_1 को विभाजित करते हैं और प्रक्रिया अनन्तता जारी रखते हैं। हम इस प्रकार निम्नलिखित गुणों के साथ k–कक्षों का एक अनुक्रम $< I_n >$ प्राप्त करते हैं।

(i) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset ...;$

(ii) C के किसी परिमित उपसंग्रह द्वारा I_n कवर नहीं किया गया है;

(iii) $x \in I_n, y \in I_n$ का तात्पर्य है कि $|x - y| \leq 2^{-n}\,\delta$।

(i) और लैमा (II) द्वारा, प्रत्येक I_n में एक बिंदु x^* है। चूँकि $C, I, x^*\ G_\lambda$ का एक आच्छादन है, इसलिए कुछ G_λ के लिए x^*, G_λ खुला है, $r > 0$ ऐसा है कि y है। $|y - x^*| < r$ का अर्थ है कि $y \in G_\lambda$, n को इतना बड़ा चुनें कि $2^{-n}\,\delta < r$। तब (iii) का तात्पर्य है कि $I_n \subset G_\lambda$, जो संकुचन (ii) है। प्रमाण अब पूर्ण है।

प्रमेय 3.19 वेयरस्ट्रैस (Weierstrass Theorem): R^a के प्रत्येक सीमाबद्ध अपरिमित उपसमुच्चय (Bounded Infinite Subset) A का सीमा बिंदु R^n में होता है।

प्रमाण : चूँकि A से सीमाबद्ध है, k-कक्ष $I \subset R^n$ का उपसमूह A है। पूर्व प्रमेय द्वारा I सघन (Compact) है। फिर प्रमेय 3.42 द्वारा, A का I में एक सीमा बिंदु है और इसके परिणामस्वरूप R^n में एक सीमा बिंदु है।

टिप्पणी

प्रमेय 3.20 : A को R^n का उपसमुच्चय बनाते हैं। तब निम्नलिखित कथन समतुल्य हैं।

(i) A संवृत और सीमित है।

(ii) A सघन है।

(iii) A के प्रत्येक अनंत उपसमूह का सीमा बिंदु A में है।

प्रमाण : (i) $\Rightarrow$ (ii) A को संवृत और सीमाबद्ध होने दें। फिर कुछ k–कक्ष I के लिए $A \subset I$ । इसके बाद यह 3.40 और 3.19 प्रमेयों से है कि A सघन (Compact) है।

(ii) $\Rightarrow$ (iii)। यह प्रमेय 3.42 से है।

(iii) $\Rightarrow$ (i) A बता दें कि A के प्रत्येक असीमित उपसमुच्चय का A में एक सीमा बिंदु है। यह दर्शाने के लिए कि A सीमाबद्ध नहीं है, तब A में के $|x_n| > n$ $(n = 1, 2, 3...)$ साथ बिंदु x_n होते हैं

इन बिंदुओं से मिलकर समुच्चय x_n अनंत है और जाहिर है कि R^n में कोई सीमा बिंदु नहीं है और इसलिए A में कोई भी सीमा बिंदु नहीं है। लेकिन यह परिकल्पना का खंडन करता है। इसलिए A को सीमाबद्ध किया जाना चाहिए।

फिर से यदि A संवृत नहीं है, तो एक बिंदु $x_0 \in R^n$ है जो A का एक सीमा बिंदु है, लेकिन A का बिंदु नहीं है। सीमा बिंदु की परिभाषा के अनुसार, प्रत्येक $n = 1, 2, 3,...,$ के लिए, बिंदु $x_n \in A$ हैं जैसे कि,

$$|x_n - x_0| < 1/n$$

माना कि, S को इन बिंदु x_n का समुच्चय करेंगे। तब स्पष्ट रूप से S अपरिमित है (अन्यथा $\left|x_n - x_0\right|$ का अपरिमित रूप से कई n के लिए एक निरंतर धनात्मक मान होगा)। इसके अलावा S का एक सीमा बिंदु x_0 है और यह स्पष्ट है कि S का R^n में कोई अन्य सीमा बिंदु नहीं है। मानने के लिए $y \in R^n, y \neq x_0$

समुच्चय $|x - y| = r$ ताकि $r > 0$ तब

$$\begin{aligned} |y - x_n| &= |y - x_0| - (x_n - x_0) \\ &\leq |y - x_n| - |x_n - x_0| \\ &\geq r - \frac{2.}{n} \qquad \left[\because \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

चूंकि r स्थिर होते हैं, अतः सभी $n \geq m_0$ के लिए $\frac{1}{n} \leq \frac{r}{2}$ जैसे धनात्मक पूर्णांक m_0 होता है। यह इस प्रकार है कि

$$|y - x_n| \geq r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2}$$

सभी $n \geq m_0$ के लिए। इससे पता चलता है कि निकटता $N(y, r/2)$ में S का केवल एक परिमित संख्या है और इसलिए y, S का एक सीमा बिंदु नहीं है। इस प्रकार S का A में कोई सीमा बिंदु नहीं है जो फिर से परिकल्पना के विपरीत है। इसलिए इसे बंद या संवृत अवश्य किया जाना चाहिए।

प्रमेय 3.21 : यदि A कहीं भी सघन (Dense) नहीं है, तो दूरीक समष्टि $\overline{A}$ का संपूर्ण समष्टि X नहीं है।

प्रमाण : चूँकि X संवृत है, $\overline{X} = X$। फिर से X खुला है, हमारे पास $(\overline{X})^\circ = X^\circ = X$ है। चूंकि A गैर–सघन (Non-Dense) है, $(\overline{A})^\circ = \phi$ इस प्रकार से $A \neq X$

प्रमेय 3.22 : यह दो गैर–सघन समुच्चयों के प्रकरण में प्रमेय सिद्ध करने के लिए पर्याप्त है, A और B कहते हैं कि आसानी के लिए, हम $G = \overline{[A \cup B]}^\circ$ का मान रखते हैं ताकि $G \subset \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup B$ यदि वह अनुसरण करता है। अगर इस प्रकार है कि

$$G \cap (\overline{B}) \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{B})' = [\overline{A} \cap (\overline{B})'] \cup [\overline{B} \cap (\overline{B})']$$

[वितरण नियम]

$$= \overline{A} \cap (\overline{B}) [\because \quad \overline{B} \cap (\overline{B}) = \phi]$$

$$\subset \overline{A} \text{।}$$

$$\because \quad [G \cap (\overline{B})']^\circ \subset (\overline{A})^\circ = \phi \qquad [\because \ B \text{ गैर सघन है।}]$$

लेकिन $G^\circ \ \overline{A \cup B}^{\circ\circ} = \overline{[A \cup B]}^\circ$ इसलिए $[A \cup B]^\circ = \Phi$

इसलिए $A \cup B$ गैर–सघन है।

प्रमेय 3.23 : $S(x, r), A\, X$ में गैर–सघन है, फिर प्रत्येक विवृत क्षेत्र में एक संवृत क्षेत्र होता है जिसमें A का कोई बिंदु नहीं होता है।

प्रमाण : माना कि, $S(x, r)$ को समष्टि X में कोई भी खुला गोला न हो। चूंकि A गैर–सघन है, इसलिए (A) हर जगह सघन है ताकि ext (A)।

[ext(A)] $= X$ इसलिए हर बिंदु ext (A) का एक सुसंगत बिंदु $x \in X$ है और परिणामस्वरूप $S(x)$ में ext (A) का एक बिंदु y अंतर्विष्ट होना चाहिए। लेकिन चूंकि $S(y, r')$ एक खुला समुच्चय है, इसलिए $S(x, r)$ में एक खुला क्षेत्र $S(y, r')$ मौजूद है जैसे कि $S(y, r') \subset$ ext (A)। इसका तात्पर्य यह है कि $S(y, r')$ में $A.\,e$ का कोई बिंदु नहीं है।

यह इस प्रकार है कि यदि $0 < r' < r'$, संवृत क्षेत्र $S(x, r)$ में $S[y, r']$ समाहित है, लेकिन A की समाहित बिंदु नहीं है।

3.10 पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में वास्तविक संख्या

क्रमित क्षेत्र

परिभाषा : हम कहते हैं कि यदि कोई क्षेत्र F को क्रमित किया जाता है, तो निम्नलिखित स्थितियों को पूरा करने वाला F का उपसमुच्चय P मौजूद होता है।

P_1 : प्रत्येक $a \in F$ के लिए, निम्नलिखित में से कोई एक पद रखे जाते हैं।

$a=0$, $a \in P$ अथवा $-a \in P$

P_2 : $a \in P$ और $b \in P \Rightarrow a+b \in P$ और $ab \in P$

टिप्पणी

समुच्चय P को F के धनात्मक अवयवों का समुच्चय कहा जाता है। एक आदेशित क्षेत्र F में एक अवयव एक ऋणात्मक अवयव कहलाता है यदि a न तो धनात्मक या शून्य है। हम कहते हैं कि a, b से कम है, $a < b$ या $b > a$ अगर $b-a \in P$ लिखा जाता है, तो इस प्रकार, तत्व $b \in F$ धनात्मक है यदि $b-0 \in P$ तो यह है कि $0 < b$ या $b > 0$ हम एक $a < b$ गलत है यह इंगित करने के लिए $b \leq a$ लिखें। निम्नलिखित गुणों को आसानी से स्थापित किया जा सकता है।

Q_1: प्रत्येक दो अवयवों a,b के लिए F में एक, एक और संबंधों में से केवल एक $a<b$, $a=b$ या $b < a$ संतुष्ट है।

Q_2: $a < b$ और $b < c \Rightarrow a < c.$

Q_3: $a < b \Rightarrow a+c < b+c, \ \forall \ c$

Q_4: $0 < a, 0 < b \Rightarrow 0 < ab.$

Q_5: $a < b, 0 < c \Rightarrow ac < bc.$

डेडेकिंड गुण (Dedekind Property) (या पूर्णता गुण) : एक क्रमित किया गया क्षेत्र F को डेडेकिंड गुण रखने के लिए कहा जाता है।

क्रमित क्षेत्रों की तुल्याकारिता (Isomorphism of Ordered Fields) : दो F और K दो क्रमबद्ध क्षेत्र हैं। एक K पर F का तुल्याकारिता K पर F का एक–एक मानचित्रण f है, जो +,... और > को इस अर्थ में संरक्षित करता है कि F में प्रत्येक x और y के लिए, हमारे पास है।

(*i*) $f(x+y)=f(x)+f(y)$,

(*ii*) $f(x,y)=f(x),f(y)$,

(*iii*) $x>y \Rightarrow \mathrm{f}(x)>f(\mathrm{y})$.

पूर्ण क्रमित क्षेत्र की विशिष्टता (Uniqueness of Complete Ordered Field)

प्रत्येक दो पूर्ण क्रमित क्षेत्र तुल्याकारी होते हैं। ये क्षेत्र अनिवार्य रूप से इस अर्थ में समान हैं कि वे सभी एक–दूसरे के समरूपी हैं।

एक पूर्ण क्रमित क्षेत्र के रूप में R

हम सभी स्वयंसिद्धों को सत्यापित करेंगे। यदि α, β, γ तथा 1 सभी वास्तविक संख्याएं हैं तथा क्रमशः डेडेकिंड कटाव $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2), (O_1, O_2)$ तथा (I_1, I_2), के द्वारा दर्शायीं जातीं हैं, तब

A_1 : $\alpha, \beta \in \mathrm{R} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathrm{R}$ दो वास्तविक संख्याओं का योग एक वास्तविक संख्या है और इसलिए इसके अलावा संवृत स्वयंसिद्ध संतुष्ट है।

A_2 : $\alpha + \beta + \alpha \ + \beta$ अर्थात् योग क्रमविनिमेय है।

A_3: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ अर्थात योग साहचर्य है।

A_4: $\alpha + 0 = \alpha \ \forall \ \alpha \in R$ अर्थात् 0 योगशील तत्समक है।

A_5: यदि $\alpha \in \mathrm{R}$ तो $-\alpha \in R$ ऐसा कि $\alpha + (-\alpha) = 0$ यानी R के प्रत्येक तत्व में एक योगशील व्युत्क्रम होता है।

M_1: $\alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha, \beta \in R$ यानी दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल फिर से एक वास्तविक संख्या है और इसलिए गुणन के समापन को संतुष्ट किया जाता है।

M_2: $\alpha, \beta = \alpha, \beta$ अर्थात् गुणन क्रम विनिमेय है।

M_3: $(\alpha, \beta)\ \gamma = (\beta, \gamma)$ अर्थात् गुणन साहचर्य है।

M_4: $\alpha, 1 = \alpha \ \forall \ \alpha \in R$ अर्थात् वास्तविक संख्या 1 गुणनात्मक तत्समक है।

M_5: प्रत्येक $\alpha \in R$ को छोड़कर $\alpha = 0$ में एक अद्वितीय वास्तविक संख्या मौजूद है α^{-1} वह $\alpha\alpha^{-1} = 1$ अर्थात् प्रत्येक गैर–शून्य वास्तविक संख्या में गुणनात्मक व्युत्क्रम होता है।

D: प्रत्येक तीन वास्तविक संख्या के लिए (α, β, γ),

$\alpha\ , (\beta + \gamma) = \alpha, \beta + \alpha, \gamma,$

$(\alpha, \beta), \gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma,$

अर्थात् वितरण का नियम प्रयोग होता है।

इसलिए R एक क्षेत्र है।

आगे R एक क्रमित क्षेत्र है। क्योंकि हमने दिखाया है कि यदि $\alpha \in R$, तो संभवतः संबंधों में से एक $\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$ धारण करता है। यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि यदि $\alpha, \beta \in R, \alpha > 0, \beta > 0$, तो $\alpha + \beta > 0$ इसलिए R एक क्रमित किया गया क्षेत्र है। स्वयंसिद्ध के बाद R एक पूर्ण क्रमित किया हुआ क्षेत्र है।

***R* की पूर्णता स्वयंसिद्ध** : R के प्रत्येक गैर–रिक्त उपसमूह जिसमें ऊपरी सीमा होती है, में एक उच्चतम (Supremum) होता है। दूसरे शब्दों में R के पास डेडेकिंड गुण है।

नोट : परिमेय संख्याओं का क्षेत्र Q, डेडेकिंड गुण का पक्ष लेता है। उदाहरण के लिए समुच्चय पर विचार करें

$$S = (1, 1.4, 1.41, 1.414, ...)$$

तब उदाहरण के अनुसार S की ऊपरी सीमा है, लेकिन इसका Q में कोई उच्चतम नहीं है। तथ्यात्मक रूप से $Sup\ S = \sqrt{2}$, जो कि परिमेय संख्या नहीं है।

प्रमेय 3.24 : R के प्रत्येक गैर–रिक्त उपसमूह S जिसमें कम सीमा होता है, में एक इन्फिनम (Infimum) होता है।

प्रमाण : T, R का एक उपसमुच्चय है, जिसमें S के तत्वों के सभी ऋणात्मक अवयव हैं,

$$T = \{-x : x \in S\}$$

टिप्पणी

हम दर्शाते हैं कि T की एक ऊपरी सीमा है। माना कि m, S के लिए निचली सीमा है, ताकि $m \le x$ प्रत्येक $x \in S$ के लिए। तब $-m \ge -x$ या $-x \le -m$ जहां $-x \in T$। चूंकि $-x \le -m$ प्रत्येक $-x \in T$ के लिए, यह इस प्रकार है कि $-m$, T की एक ऊपरी सीमा है। पूर्णता स्वयंसिद्ध के अनुसार, T का एक उच्चतम है, जिसे M कहा जाता है। तब $-M$, S के लिए निचली सीमा है। यह सरलता से दर्शाया जा सकता है कि $-M$, S का निम्नतम है। यह दर्शाने के लिए हम निरीक्षण करते हैं कि यदि u, S की निचली सीमा है, तब $-u$, T की ऊपरी सीमा है, ताकि $M \le -u$, अर्थात $-M \ge u$, यह दर्शाता है कि $-M$, S का निम्नतम है। इस प्रकार प्रमेय सिद्ध होती है।

प्रमेय 3.25 : यदि a और b वास्तविक संख्याएँ हैं जैसे कि $a \le b + e$ प्रत्येक $e > 0$ के लिए, तो $a \le b$।

प्रमाण : यदि $b < a$ तो $e = (a-b)/2$ लेते हुए, हमारे पास जो विरोधाभास है वह परिकल्पना है। तब हमारे पास होना चाहिए $a \le b$।

प्रमेय 3.26 : यदि S एक उच्चतम (Supremum) के साथ वास्तविक संख्याओं का एक गैर–रिक्त समुच्चय है, तो $\sup S = u$ कहा जा सकता है। फिर हर $p < u$ के लिए कुछ $x \in S$ मौजूद है जैसे कि $p < x \le u$।

प्रमाण : चूंकि $u = \sup S$, हमारे पास हर $x \le u$ के लिए $x \in S$ है। अब यदि हम S में प्रत्येक x के लिए $x \le p$ है तो p वर्धमान u की तुलना में S के लिए एक ऊपरी सीमा होगी। लेकिन यह उच्चतम की परिभाषा के विपरीत है। इसलिए कम से कम एक $x \in S$ ऐसा होना चाहिए कि $p < x \le u$.

एक और कथन : यदि $u = \sup S$, तो प्रत्येक $\in > 0$ के लिए $x \in S$ मौजूद है जैसे कि $u - \in < x \le u$।

प्रमेय 3.27 : यदि $v = \inf S$ तो प्रत्येक $p > v$ के लिए, कुछ $x \in S$ मौजूद है जैसे $v \le x < p$

प्रमाण : पूर्व प्रमेय के समान।

प्रमेय 3.28 (योजक गुण) : A और B के गैर–रिक्त R उपसमूह हैं, C को समुच्चय को निरूपित करते हैं।

$$C = (x + y : x \in A, y \in B)$$

यदि A और B में से प्रत्येक का एक उच्चतम (Supremum) है, तो C का भी एक उच्चतम है और $\sup C = \sup A + \sup B$

प्रमाण : न $u = \sup A$ और $v = \sup B$। यदि z कोई तत्व C है, तो $z = x+y$ है। जहाँ $x \in A$, $y \in B$ और $z = x+y \le u+v$। इस प्रकार $u+v$, C के लिए एक ऊपरी सीमा है। इसलिए C का उच्चतम होना चाहिए, कहना $\omega = \sup C$ फिर $\omega \le u + v$ (उच्चतम के द्वारा)। जहां $u + v \le \omega$ कोई भी $\in > 0$ फिर, वहाँ एक $x \in A$ और $y \in B$ मौजूद है।

$u - \in < x$ और $v - \in < y$

इनको जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है।

$u - v - 2\in < x+y \leq \omega$

इस प्रकार $u + v \leq \omega + 2\in$ प्रत्येक के लिए $\in < 0$ अतः $u + v \leq \omega$ प्रमाण पूरा करना।

प्रमेय 3.29 : प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N ऊपर से घिरा हुआ नहीं है।

प्रमाण : मान लीजिए, N ऊपर बंधा है। पुनः N का एक उच्चतम है, $u = \sup N$ कहें। कुछ $n \in N$ मौजूद है जैसे कि $u-1 < n$ पुनः इस n के लिए $n+1 > u$। $n + 1 \in N$ के बाद से, यह इस तथ्य का खंडन करता है कि $u = \sup N$। इसलिए N को ऊपर से असिमित होना चाहिए।

प्रमेय 3.30 : प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, एक धनात्मक पूर्णांक (Positive Integer) n मौजूद है। जैसे कि, $n > x$।

प्रमाण : यदि हमारे पास प्रत्येक $n \in N$ के लिए $x \geq n$ था, तो x के लिए N एक ऊपरी सीमा होगा, जो पूर्ववर्ती प्रमेय का खंडन करता है, इसलिए वहाँ कुछ $n \in N$ मौजूद होना चाहिए, जैसे कि, $n > x$

प्रमेय 3.31 आर्कमिडीज के स्वयंसिद्ध (Axiom of Archimedes) : यदि x एक वास्तविक संख्या है और y कोई धनात्मक वास्तविक संख्या है, तो एक धनात्मक पूर्णांक n मौजूद है। जैसे $ny > x$

प्रमाण : यदि कोई $n \in N$ ऐसा नहीं होता है, तो $ny > x'$ होगा तो हम सभी n के लिए $ny \leq x'$ होगा। लेकिन फिर, $1 \frac{x}{y} \geq n$, दिखा रहा है कि $\frac{x}{y}$ के लिए एक ऊपरी बाध्य है, प्रमेय 3.30 का विरोध करता है।

3.11 सघन उपसमुच्चय

परिभाषा : A, B को R का उपसमुच्चय बनाएं।

(*i*) A को B में निहित कहा जाता है यदि $B \subset \overline{A}$ हो।

(*ii*) A को R या हर जगह सघन कहा जाता है यदि $\overline{A} = R$ हो।

(*iii*) A को गैर–सघन (Non-Dense) या अनीहित कहा जाता है यदि $(\overline{A})° = \phi$, हो और संवृत का आंतरिक भाग खाली है।

इस प्रकार, A गैर–सघन है यदि A में कोई भी (गैर–रिक्त) या खुला अंतराल नहीं है। एक संवृतसमुच्चय का अनुसरण करती है, और यह गैर–सघन है यदि इसमें कोई खुला अंतराल नहीं है।

(*iv*) A को स्वयं $A \subset D(A)$ के लिए सघन कहा जाता है, यदि A का प्रत्येक बिंदु A के लिए सीमित है।

(*v*) A को परिपूर्ण कहा जाता है यदि A स्वयं सघन और संवृत है।

टिप्पणी

माना A, R का उपसमुच्चय है और $p \in A$ है, तब p को A का पृथक बिंदु कहा जाता है अगर वहाँ ε-nhd मौजूद है जिसमें p के अलावा A का कोई बिंदु नहीं है। A समुचय को पृथक या असतत कहा जाता है यदि इसके सभी बिंदु पृथक बिंदु हैं।

एक समुच्चय के इस पृथक बिंदु के तथ्य की विशेषता यह है कि यह उस समुच्चय बिंदु की एक सीमा नहीं हैं।

यह इस परिभाषा से है कि एक समुचय सही है अगर और केवल अगर यह संवृत है और कोई पृथक अंक नहीं है।

प्रमेय 3.32 : एक समुच्चय सही है अगर और केवल अगर $A = D(A)$ है।

प्रमाण : A परिपूर्ण है $\Leftrightarrow A$ अपने आप में निहित और संवृत है।

$\Leftrightarrow A$ का प्रत्येक बिंदु A का एक सीमा बिंदु है और A का प्रत्येक सीमा बिंदु A से संबंधित है

$\Leftrightarrow A \subset D(A)$ और $D(A) \subset A$

$\Leftrightarrow A \subset D(A)$

प्रमेय 3.33 : प्रत्येक गणनीय समुच्चय पहली श्रेणी का है।

प्रमाण : A को एक गिनने योग्य समुचय होने दें, ताकि हम इसे लिख सकें,

$$A = \{x_1, x_0, x_3, ..., x_n, ...\}$$

A को एक बिंदु समुच्चय के एक गणनीय संघ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$A = \bigcup_{i=1}^{¥} \{x_i\}$$

चूँकि हर एक बिंदु समुच्चय $\{x_n\}$ कहीं नहीं है, और हम देखते हैं कि A पहले का समूह है।

उदाहरण 3.19 : (1) $\overline{Q} = R$ के बाद से, सभी परिमेय बिंदुओं का समुच्चय Q हर जगह निहित $x \in X$ है $Q \subset D(Q) = R$ के बाद से यह भी निहित है। हालांकि, यह सही नहीं है चूंकि यह संवृत नहीं है। यह प्रथम श्रेणी का है क्योंकि यह गणनीय है।

(2) माना कि $A = [0, 1]$ तब $A = D(A)$ के बाद यह परिपूर्ण है।

(3) माना कि $A = \{1/n : n \in N\}$ तब A का प्रत्येक बिंदु एक पृथक बिंदु है तथा A की सीमा बिंदु नहीं है। इसलिए A असतत है। A गैर–सघन है चूंकि $\overline{A} = A \cup \{0\}$ है और इसलिए कोई खुला अंतराल $\overline{A}$ का उपसमुच्चय नहीं हो सकता है।

प्रमेय 3.34 : यदि A और B पहली श्रेणी के समुच्चय हैं, तो $A \cup B$ भी पहली श्रेणी का है।

प्रमाण : माना कि $A = \bigcup_{n=1}^{¥} A_n$ तथा $B = \bigcup_{n=1}^{¥} B_n$, जहां प्रत्येक A_n और प्रत्येक B_n कहीं सघन नहीं है। तब $A \cup B$ तथा सभी A_n's और B_n's का समूह है। लेकिन सभी समुच्चय A_n और B_n एक गणनीय संग्रह का रूप है इसलिए $A \cup B$ पहली श्रेणी का है।

इस प्रकार यह कल्पना अस्वीकार्य है।

आक्षेप के लिए, एक ही आवश्यक प्रमाण के साथ पहले अनुच्छेद में अंतर प्रयोग होगा।

प्रमेय 3.35 : यदि एक समुच्चय A अपने आप में सघन है, तो इसका पहला व्युत्पन्न समुच्चय $D(A)$ एकदम सही है।

प्रमाण : चूँकि A अपने आप में सघन है, इसलिए हमारे पास $A \subset D(A)$ है। इसका अर्थ यह है कि

$$A \cup D \qquad (A) = D(A)$$

$$\therefore \quad D[A \cup D(A)] = D(D(A))$$

या $D(A) \cup D(D(A)) = D(D(A)$

या $D(A) \cup D^2(A) = D^2(A)$. .. (i)

चूंकि $D(A)$ संवृत है हमारे पास है $D^2(A) \cup D(A) = D(A)$

जिसका तात्पर्य है $D(A) \cup D^2(A) = D(A)$

इसलिए समीकरण (i) से $D(A) = D^2(A)$

इसलिए $D(A)$ एकदम सही है।

प्रमेय 3.36 : बिंदु का प्रत्येक पृथक समुच्चय गणनीय है।

प्रमाण : माना कि A एक पृथक समुच्चय है। तब A का प्रत्येक बिंदु एक पृथक बिंदु है, और इसलिए समुच्चय को किसी अन्य बिंदु वाले अंतराल में संलग्न किया जा सकता है। यदि कोई दो इन अंतरालों को विभाजित करता है, तब एक या दोनों को छोटा किया जा सकता है ताकि वे असंयुक्त बन जाए। अब हम स्पष्ट करते हैं कि इन अंतरालों का संग्रह C गणनीय है। यह दिखाने के लिए, माना $\{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$ को परिमेय संख्याओं की गिनती करने योग्य समुच्चय बताए। संग्रह C के प्रत्येक अंतराल में, असीम रूप से कई x_n होंगे, लेकिन इन के बीच सबसे छोटे सूचकांक n के साथ सिर्फ एक होगा। अब हम समीकरण $f{:}\to N$ द्वारा आकलन $f(I)=n$, को परिभाषित करते हैं यदि x_n में सबसे छोटी निर्देशांक (Index) I के साथ परिमेय संख्या है। यह आकलन $I, J \subset C$ और $f(I)=F(J)=n$ है, जिसका अर्थ है कि सामान्यतः I और J में x_n है और इसका तात्पर्य $I = J$ है (ध्यान दें कि C में अंतराल असंतुष्ट हैं, इसलिए जब तक वे समान नहीं होते हैं, तब तक उनके पास एक बिंदु नहीं हो सकता है)।

इस प्रकार f ने C और N का एक उपसमुच्चय के अंतराल के बीच एक–एक सामंजस्य स्थापित किया (प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय) इसलिए C गणनीय है।

चूंकि C के प्रत्येक अंतराल में A का एक और केवल एक बिंदु होता है, इसलिए यह इस प्रकार है कि A गणनीय है।

3.12 बैयर श्रेणी प्रमेय

दूरीक समष्टि का उपसमुच्चय प्रथम श्रेणी का कहा जाता है अगर यह सघन गणनीय समूह के संघ के रूप में लिखा जा सकता है।

टिप्पणी

बेयर श्रेणी प्रमेय (Baire Category Theorem) सिद्ध करने से पहले, हम कुछ प्रारंभिक प्रमेयों को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 3.37 : माना कि X एक आव्यूह उपसमुच्चय है। फिर निम्नलिखित कथन समतुल्य हैं।

(i) A, X में गैर–सघन है (ii) A में कोई समीपवर्ती नहीं है, (iii) $(\bar{A}), X$ में नीहित है।

प्रमाण : हम पहले (i) $\Leftrightarrow$ प्रमाणित करेंगे और अब हमारे पास हैं।

A अनीहित है जब $\Leftrightarrow (\bar{A}) = \phi$

$\Leftrightarrow X$ का कोई बिंदु $\bar{A}$ का आंतरिक बिंदु नहीं है।

$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ इसके किसी भी बिंदु का समीपवर्ती नहीं है।

$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ में कोई समीपवर्ती नहीं है।

अब हम सिद्ध करते हैं कि (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) हमारे पास है,

$\bar{A}$ में कोई समीपवर्ती नहीं है।

$x \in X$ सभी के लिए $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ और सभी $r > 0, S(x, r) \not\subset \bar{A}$

सभी $x \in X$ के $\Leftrightarrow S(x, r) \cap (\bar{A})' \neq \phi$ लिए और $r > 0$

$\Leftrightarrow x$ के प्रत्येक समीपवर्ती में प्रत्येक $x \in X$ के लिए (A) बिंदु होता है,

$X, \Leftrightarrow [(\bar{A})] = X \Leftrightarrow (\bar{A})$ में निहित होता है

नोट : (i) चूंकि $(\bar{A}) = \text{ext}(\bar{A})$ है यह पूर्ववर्ती प्रमेय से निम्नानुसार है कि A अनीहित है अगर और केवल अगर $\text{ext}(\bar{A})$ प्रत्येक जगह सघन है

(ii) चूंकि $A \subset \bar{A}$ हमारे पास है $A' \supset (\bar{A})'$। इसलिए यदि $(\bar{A})'X$ में नीहित है, तो A' है। पूर्ववर्ती प्रमेय से यह निकलता है कि यदि A, X गैर–सघन है, तो $A'X$ में नीहित है।

प्रमेय 3.38 : यदि A कहीं सघन (Dense) नहीं है, तो $\bar{A}$ का संपूर्ण समष्टि X नहीं है।

प्रमाण : चूंकि X संवृत है, $\bar{X} = X$। फिर X खुला है, हमारे पास $(\bar{X})^\circ = X^\circ = X$ है। चूंकि A गैर–सघन है, $(\bar{A})^\circ = \Phi$ में इस प्रकार, यह निम्न है कि $\text{A} \neq X$।

प्रमेय 3.39 : दो A और B कहे जाने वाले अरिक्त समुच्चयों की स्थिति के लिए प्रमेय को सिद्ध करने के लिए यह पर्याप्त है। सरल रूप में, हम रखते हैं $G = [\overline{A \cup B}]^\circ$ ताकि $G \subset \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup B$ जो कि इस प्रकार है

$$G \cap (\bar{B}) \subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{B})' = [\bar{A} \cap (\bar{B})'] \cup [\bar{B} \cap (\bar{B})']$$

[वितरण का नियम]

$= \bar{A} \cap (\bar{B}) [\because \ \bar{B} \cap (\bar{B}) = \phi]$

$\subset \bar{A}$.

$\because \quad [G \cap (\bar{B})']^\circ \subset (\bar{A})^\circ = \phi$ [$\because$ B गैर–सघन है]

लेकिन $G^\circ\ \overline{A \cup B}^{\circ\circ} = \overline{[A \cup B]}^\circ$ so the $[A \cup B]^\circ = \Phi$

इसलिएए $A \cup B$ गैर–सघन है।

टिप्पणी

प्रमेय 3.40 : $S(x, r)\, A$ में गैर–सघन है, फिर प्रत्येक खुला क्षेत्र संवृत क्षेत्र भी रखता है जिसमें A का कोई बिंदु नहीं है।

प्रमाण : $S(x, r)$ को समष्टि X में किसी भी विवृत क्षेत्र में रहने दें। चूँकि A गैर–सघन है, ext (A) हर जगह सघन है। प्रमेय 3.38 है ताकि,

$[\mathbf{ext}(\mathrm{A})] = X$ इसलिए, प्रत्येक बिंदु ext (A) और $x \in X$ का एक सुसंगत बिंदु है परिणामस्वरूप $S(x)$ में ext (A) का एक बिंदु y होना चाहिए। लेकिन ext (A) एक खुला आव्यूह है $S(x, r)$ में समाहित $S(y, r') \subset$ ext (A) एक खुला क्षेत्र $S(y, r')$ मौजूद है जैसे कि A तात्पर्य है कि $S(y, r')$ में $S(x, r)$ का कोई बिंदु नहीं है

यह इस प्रकार है कि यदि क्षेत्र में समाहित है $0 < r' < r'$, लेकिन इसमें $S[y, r']$ का $S(x, r)$ कोई बिंदु नहीं है।

प्रमेय 3.41 (बैयर श्रेणी प्रमेय): हर आव्यूह पूरा समष्टि होता है खुद के दूसरी श्रेणी में उपसमुच्चय के रूप होता है ।

प्रमाण : माना (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है। हम यह दिखाएंगे कि X दूसरी श्रेणी का है मान लीजिए, यदि संभव हो तो, X दूसरी श्रेणी का नहीं है। तब X पहली श्रेणी का होना चाहिए ताकि X कहीं भी निहित समुच्चय के एक गणनीय समूह का मिलन न कर पाएं हम इस समूह को एक अनुक्रम $<A_n>$ के रूप में व्यवस्थित करते हैं। चूंकि $<A_n>$ गैर–सघन है, प्रमेय 3.41 द्वारा त्रिज्या $r_1 < 1$ के साथ एक संवृत क्षेत्र K_1 मौजूद है ऐसा है कि $K_1 \cap A_1 = \phi$ माना S_1 को K_1 जहां K_1 में S_1, के समान केंद्र और त्रिज्या वाले विवृत क्षेत्र को निरूपित करते हैं। S_1 में, हम कर सकते हैं त्रिज्या $r_2 < \dfrac{1}{2}$ के एक संवृत गोले K_2 का पता लगा सकते है जैसे कि $K_2 \cap A_2 = \phi$ इस तरीके से, हम एक स्थिर स्थिति का निर्माण करते हैं $< K_n >$ संवृत गोले के निम्नलिखित दो गुण हैं:

(i) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n, K_n के लिए $A_1, A_2, ..., A_n$ को प्रतिच्छेद नहीं करता है।

(i) K_n कि त्रिज्या $n \to \infty$ के रूप में शून्य हो जाता है।

चूंकि X पूरा हो गया है, यह कैंटर (Cantor's) के प्रतिच्छेदन प्रमेय द्वारा अनुसरण करता है

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

एक एकल बिंदु x_0 से बना होता है जो किसी सघन A_n समुच्चय से संबंधित नहीं है। लेकिन यह संभव नहीं है क्योंकि X पहली श्रेणी का है। इसलिए X दूसरी श्रेणी का होना चाहिए।

पूर्ववर्ती प्रमेय को निम्नलिखित उपयोगी रूपों में रखा जा सकता है:

(i) यदि $< A_n >$ एक पूर्ण दूरीक समष्टि X में कहीं भी सघन समुच्चय का अनुक्रम है, तो X में एक बिंदु मौजूद है जो किसी भी $A_n's$ में नहीं है।

(ii) यदि एक पूर्ण दूरीक समष्टि अपने उपसमुच्चय के अनुक्रम का संघ है, तब अनुक्रम में कम से कम एक समुच्चय को संवृत करने के लिए आंतरिक भाग खाली होना चाहिए

टिप्पणी

3.13 प्रथम एवं द्वितीय गणनीय समष्टि

एक संस्थानिक समष्टि को **वियोज्य** (अलग करने योग्य) कहा जाता है यदि इसमें एक गणनीय आच्छादन/सघन उपसमुच्चय होता है; इसमें समष्टि के अवयवों के अनुक्रम $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ उपस्थित होते हैं, जिससे समष्टि के प्रत्येक गैर–रिक्त विवृत उपसमुच्चय में अनुक्रम का कम–से–कम एक अवयव निहित रहता है। विशेष रूप से, गणनीय सघन उपसमुच्चय पर, जिसका वियोज्य समष्टि पर प्रत्येक सतत फलन, जिसका वियोजन हॉसडॉर्फ समष्टि का उपसमुच्चय है, इसके मानों द्वारा निर्धारित किया जाता है।

सामान्य रूप से, पृथकता एक ऐसे समष्टि पर एक तकनीकी परिकल्पना है जो काफी उपयोगी है और ज्यामिति तथा चिरसम्मत विश्लेषण में पढ़ाए गए विस्तारों के वर्गों में सामान्य रूप से बहुत हल्के माने जाते हैं। दूसरी गण्यता के संबद्ध सिद्धांत के साथ विभेद की तुलना करना आवश्यक है, जो सामान्य तौर पर सामान्य रूप से अधिक किन्तु दूरीक समष्टि के वर्ग के बराबर होता है। अब हम वियोज्य समष्टि के कुछ उदाहरण पर विचार करें।

1. प्रत्येक सघन दूरीक समष्टि (या दूरीकनीय समष्टि) वियोज्य है।
2. कोई भी संस्थानिक समष्टि (Topological Space) जो पृथक्करणीय उपसमष्टि के गणनीय संख्या का समुच्चय है, पृथक्करणीय है। इन प्रथम दो उदाहरणों में n–आयामी युक्लिडियन समष्टि पृथक्करणीय होना एक भिन्न प्रमाण दिया जाता है।
3. $\mathbf{R}^n$ में R के एक सघन उपसमुच्चय से सभी निरंतर कार्यों का समष्टि वियोज्य है।
4. वीयरस्ट्रैस सन्निकटन (Weierstrass Approximation) प्रमेय का अनुसरण करने पर यह सरलता से पता चलता है कि परिमेय गुणांक वाला बहुपद का समुच्चय $Q[t]$, इकाई अंतराल $[0,1]$ पर, एकसमान अभिसरण की मीट्रिक के साथ, सतत फलन के समष्टि $C[0,1]$ का एक गणनीय सघन उपसमुच्चय है। बनाच–मजूर प्रमेय (Banach-Mazur theorem) इस बात पर जोर देती है कि कोई भी वियोज्य बनाच समष्टि, $C[0,1]$ के बंद रैखिक उपसमष्टि के लिए, सममितीय रूप से तुल्यकारी है।
5. लीबेज्यूज (Lebesuge) रिक्त समष्टि L^p किसी $1 \leq p \leq \infty$ के लिए अलग करने योग्य हैं।
6. एक हिल्बर्ट समष्टि चर है अगर और केवल अगर इसका गणनीय सामान्य लांबिक आधार (Countable Orthonormal Basis) है, तो यह निम्नानुसार है कि कोई भी वियोज्य, अनंत–आयामी हिल्बर्ट समष्टि तुल्याकारिक ℓ^2 है।

7. एक वियोज्य समष्टि का उदाहरण जो दूसरा–गणनीय नहीं है, R_{llt} है, निम्नतम सीमा संस्थानिक (Lower Limit Topology) से सुसज्जित वास्तविक संख्याओं का समूह है।

टिप्पणी

8. एक संस्थानिक समष्टि X, यदि और केवल यदि जब X का उपसमुच्चय A परिमित या प्रगणनीय है, इस प्रकार कि A का संवृत संपूर्ण समष्टि है अर्थात्

   $\overline{Q} = R.\overline{A} = X$

9. सामान्य संस्थानिक के साथ वास्तविक रेखा $\boldsymbol{R}$ वियोज्य है चूंकि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q अगणनीय है और R में सघन है अर्थात $\overline{Q} = R$ सघन या आच्छादित है।

10. प्रत्येक दूसरा गणनीय समष्टि वियोज्य है, लेकिन प्रत्येक वियोज्य समष्टि द्वितीय गणनीय है। उदाहरण के लिए, बंद–खुला अंतराल $[a, b)$ के द्वारा उत्पन्न, टोपोलॉजी के साथ वास्तविक रेखा R, वियोज्य समष्टि का एक चिरसम्मत उदाहरण है, जो कि गणनीयता के द्वितीय स्वयंसिद्ध को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रथम गणना योग्य समष्टि

संस्थानिक समष्टि X को प्रथम गणनीय समष्टि कहा जाता है, यदि यह निम्नलिखित स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है, जिसे गणनीय का पहला स्वयंसिद्ध (Axiom) कहा जाता है।

दूसरे शब्दों में, एक संस्थानिक (Topological) समष्टि X, एक प्रथम गणनीय समष्टि है यदि और केवल यदि वहाँ प्रत्येक बिंदु peX पर एक गणनीय स्थानीय आधार विद्यमान है।

एक प्रथम गणनीय, वियोज्य हॉसडॉर्फ समष्टि (विशेषरूप से एक वियोज्य मीट्रिक समष्टि) अधिकतम सातत्य प्रमुखता c रखता है। इस प्रकार के समष्टि में, संवरण का निर्धारण अनुक्रमों की सीमा द्वारा होता है, और कोई भी अनुक्रम अधिकतम एक सीमा रखता है, इसलिए वहाँ अभिसरण अनुक्रमों के समुच्चय से प्राप्त आच्छादी मानचित्र प्राप्त होता है, जिसका मान गणनीय सघन उपसमुच्चय में X के बिंदुओं के लिए होता है। एक वियोज्य हॉसडॉर्फ समष्टि अधिकतम 2^c प्रमुखता रखता है, जहां c सातत्य की प्रमुखता है। अतएव, संवरण को निस्पंदन आधार की सीमा के रूप में विशेषीकृत करते हैंः यदि Y, X का उपसमुच्चय है तथा Z, X का बिंदु है, तब Z, Y के संवरण में है, यदि और केवल यदि वहाँ निस्पंदन आधार B विद्यमान है, जो कि Z की ओर अभिसरण हैं, Y के उपसमुच्चय को धारण किए हो।

इस प्रकार के निस्पंदन आधार के समुच्चय $S(Y)$ की अधिकतम प्रमुखता (कार्डिनेलिटी) $2^{2^{|y|}}$ है। इसके अतिरिक्त, एक हॉसडॉर्फ समष्टि में, प्रत्येक निस्पंदन आधार के लिए वहाँ अधिकतम एक सीमा होती है। इस प्रकार, वहाँ एक आच्छादन $S(Y) \rightarrow X$ होता है, जब $\overline{Y} = X$। एक अभिन्न तर्क और अधिक सामान्य परिणाम को स्थापित करता हैः माना कि एक हॉसडॉर्फ संस्थानिक समष्टि X, कार्डिनेलिटी k के साथ एक सघन उपसमुच्चय को समाहित किए हुए है। तब, X की अधिकतम कार्डिनेलिटी 2^{2k} तथा 2^k है, यदि यह प्रथम गणनीय है। अधिकतम सातत्यों वाले कई वियोज्य

टिप्पणी

समष्टिों का गुणन एक वियोज्य समष्टि है। विशेषरूप में, स्वयं में वास्तविक रेखा से प्राप्त सभी फलनों का समष्टि R^R, संस्थानिक गुणन के साथ संपन्न, कार्डिनेलिटी 2^c के साथ एक वियोज्य हॉसडॉर्फ समष्टि है। अधिक सामान्य रूप में, यदि k कोई अनंत कार्डिनल है, तब आकार के सघन उपसमुच्चय के साथ, अधिकतम 2^k समष्टिों का गुणन, अधिकतम k है।

उदाहरण 3.20 : बता दें कि X एक दूरीक समष्टि है। peX विवृत की गणना करने योग्य वर्ग गोले $\{S(p, 1), S(p, 1/2), S(p, 1/3),..... \}$ के साथ केंद्र मेंच पर एक समष्टीय आधार है। इस प्रकार प्रत्येक दूरीक समष्टि गणनीयता का पहला स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 3.21 : X को किसी भी असतत समष्टि (Discrete Space) हो और $p \in X$ को बिंदु p पर एक समष्टीय समष्टि आधार दें एकल समुच्चय $\{p\}$ है, जो गणना योग्य है। इस प्रकार हर असतत समष्टि गणना के पहले स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है।

इसके क्रम टोपोलॉजी में पहला अगणनीय (Uncountable) क्रमवाचक (ordinal) ω_1 वियोज्य नहीं है।

उच्चतम (Supremum) वाले प्रतिमान के साथ सभी बंधे हुए वास्तविक अनुक्रमों का बानाच समष्टि l^∞ अलग नहीं है।

द्वितीय गणनीय समष्टि

टोपोलॉजी τ के साथ संस्थानिक समष्टि X को दूसरी गणना योग्य समष्टि कहा जाता है, यदि यह निम्नलिखित स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है, जिसे गणना योग्य का दूसरा स्वयंसिद्ध कहा जाता है। संस्थानिक τ के लिए एक गणनीय आधार B मौजूद है। उदाहरण के लिए, परिमेय अंत बिंदुओं के साथ विवृत अंतराल (A, दूरीक समष्टि B) का वर्ग अर्थात् $a, b\, \varepsilon\, Q$ जहां Q परिमेय संख्याओं का उपसमुच्चय है, गणना योग्य है और वास्तविक जीवन R पर सामान्य संस्थानिक के लिए एक आधार है। इस प्रकार R गणना के दूसरे स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है और इस प्रकार एक दूसरा गणना समष्टि (Countable Space) है।

असतत संस्थानिक के साथ वास्तविक रेखा R पर विचार करें, अब एक उपसमुच्चय X पर असतत संस्थानिक के लिए एक और केवल आधार यह है कि X के सभी एकल (Singleton) उपसमुच्चयों का संग्रह B, अब हम ध्यान दें कि R गैर गणना योग्य है और इस प्रकार R के एकल उपसमुच्चय $\{p\}$ का वर्ग गैर गणनीय है। इस प्रकार असतत संस्थानिक D के साथ संस्थानिक समष्टि (Topological Space) R गणना की दूसरी स्वयंसिद्ध को संतुष्ट नहीं करता है। उसी तर्क से, असतत संस्थानिक D के साथ परिमेय संख्याओं के संस्थानिक समष्टि Q से गणना की दूसरी स्वयंसिद्ध होती है।

यदि B किसी समष्टि X के लिए एक गणनीय आधार है, और यदि B_p में B के अवयव हैं, जिसमें बिंदु $p\, \varepsilon\, X$ है, तो p पर एक गणनीय समष्टि आधार B_p है। कोई भी दूसरी–गणनीय समष्टि वियोज्य हैः यदि $\{U_n\}$ विस एक गणनीय आधार, किसी भी $x_n \in U_n$ का चयन करने से एक गणनीय सघन उपसमूह बन जाता है। इसके

विपरीत, एक दूरीकनीय समष्टि (Metrizable Space) वियोज्य है यदि और केवल यदि यह दूसरी गणना योग्य है यदि और केवल यदि यह लिंडेलॉफ है।

एक दूसरे गणनीय समष्टि का एक स्वेच्छ उप–समष्टि दूसरा गणनीय है, अलग–अलग समष्टि के उप–भागों को अलग करने की आवश्यकता नहीं है।

अधिकतम सातत्य वाले कई वियोज्य समष्टिों का गुणन वियोज्य होता है। द्वितीय गणनीय समष्टि का एक गणनीय गुणन, द्वितीय गणनीय होता है, लेकिन द्वितीय गणनीय समष्टि के अगणनीय गुणन के लिए प्रथम गणनीय होना आवश्यक नहीं है।

पृथक्करण के गुणधर्म अपने आप में और किसी संस्थानिक समष्टि की गणनीयता (Cardinality) पर कोई सीमा नहीं देते है, नगण्य संस्थानिक के साथ संपन्न कोई भी समुच्चय अलग करने योग्य है, साथ ही दूसरा गणनीय, अर्ध–सघन और जुड़ा हुआ है। नगण्य संस्थानिक के साथ 'दुविधा' इसका खराब पृथक्करण गुण है, इसका कोलमोगोरोव (Kolmogorov) भागफल (अनुपात) एक–बिंदु समष्टि है।

प्रमेय 3.42 : पहला गणना योग्य समष्टि X पर परिभाषित एक फलन $p \varepsilon X$ पर निरंतर होता है अगर और केवल अगर यह क्रमिक रूप से p पर निरंतर होती है।

दूसरे शब्दों में, यदि कोई संस्थानिक समष्टि X गणना योग्य के पहले स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है, तो $f: X \to Y$ पर निरंतर है अगर और केवल हर अनुक्रम के लिए $\{a_n\}$ को p में परिवर्तित करने पर, अनुक्रम $\{f(a_n)\}$ में Y को $f(p)$ में परिवर्तित करता है, अर्थात

$$a_n p \Rightarrow f(a_n) \to f(p)$$

प्रमेय 3.43 : एक दूसरा गणनीय समष्टि भी प्रथम गणनीय है।

माना S एक समुच्चय है। माना A, S का उपसमुच्चय है। तब, S के उपसमुच्चय का संग्रह C, A का आवरण है, यदि A, C के अवयवों के संघ का एक उपसमुच्चय है। अर्थात्

$$A \subset \bigcup \{c : c \in C\}$$

यदि C का प्रत्येक अवयव का एक खुला उपसमूह है, तो C को A का खुला आवरण कहा जाता है। यदि C में एक गणनीय उप–वर्ग समाहित है, जो A का एक आवरण भी है, तो C को A के गणना योग्य आवरण के लिए फिर से कहा जाता है।

प्रमेय 3.44 : A को किसी दूसरे गणनीय समष्टि X के किसी भी उपसमुच्चय पर ले जाने दें A तब A का प्रत्येक खुले आवरण गणनीय आवरण के लिए लघुकरणीय करने योग्य है।

प्रमेय 3.45 : माना X एक दूसरी गणनीय समष्टि है। तब प्रत्येक आधार B के लिए, X एक गणनीय आधार पर लघुकरणीय (Reducible) करने योग्य है।

लिंडेलोफ़ समष्टि: एक संस्थानिक समष्टि X को लिंडेलॉफ का समष्टि कहा जाता है अगर X के हर विवृत आवरण को गणनीय आवरण के लिए फिर से प्रयोग किया जाए।

इस प्रकार, हर दूसरा गणनीय लिंडेलॉफ (Lindelof) का समष्टि है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. एक आव्यूह से आप क्या समझते हैं?
2. विवृत समुच्चय का संक्षेप में वर्णन करें।
3. संवृत समुच्चय से आप क्या समझते हैं?
4. अनुवर्ती बिंदु की व्याख्या करें।
5. संवृत करना या संवरण से आप क्या समझते हैं?
6. आंतरिक और सीमा बिंदु की व्याख्या करें।
7. दूरीक समष्टि के उपसमष्टि को संक्षेप में समझाएं।
8. संकुचन सिद्धांत क्या है?
9. क्रमित क्षेत्र से आप क्या समझते हैं?
10. डेडेकिंड गुण से आप क्या समझते हैं?
11. क्रमित क्षेत्रों की तुल्याकारिता का वर्णन करें।
12. बैयर श्रेणी प्रमेय को परिभाषित करें।
13. वियोज्य की व्याख्या करें।
14. लिंडेलॉफ समष्टि का वर्णन करें।

3.14 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. X को एक गैर–रिक्त समुच्चय हैं। एक फलन $d: X\times X\to R$ (वास्तविक का समुच्चय) को एक आव्यूह (या दूरी फलन) कहा जाता है।
2. R के एक उपसमुच्चय G को खुला कहा जाता है यदि हर बिंदु $p\,\varepsilon\, G$ के लिए, एक खुला अंतराल I मौजूद हो जैसे कि $p\varepsilon \mathrm{C}\, \mathrm{G}|$

   यह कहने के बराबर है कि G खुला है अगर हर $p\,\varepsilon\, G$ के लिए, मौजूद है और ε *nhd* $\mathrm{N}(p,\varepsilon) = [p–\varepsilon, p + \varepsilon]$ जैसा कि $N(p, \varepsilon)\mathrm{C}G$

   यदि F का पूरक खुला है तो R में एक समुच्चय F को संवृत किया जाता है।
3. यदि F का पूरक खुला है तो R में एक समुच्चय F को संवृत किया जाता है।
4. यदि $A{\in}R$,तो एक बिंदु $p{\in}R$ को A का संचय बिंदु (या एक सीमा बिंदु) कहा जाता है यदि p के प्रत्येक $\in$-*nhd* $N(p,\in)$ में p से भिन्न A का बिंदु होता है।
5. A में R के समुच्चय को संवृत करना A वाला सबसे छोटा संवृत समुच्चय है और $\overline{A}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।
6. माना $\mathbf{R}$ एक उपसमुच्चय है और माना कि $p{\in}A$। तब p को A का एक आंतरिक बिंदु कहा जाता है अगर वहाँ A में p का एक ε-*nhd* उपस्थित रहता है, अर्थात्, अगर वहाँ $\varepsilon>0$ मौजूद है जैसा कि, $[p–\varepsilon, p+\varepsilon]\subset A$ के सभी आंतरिक बिंदुओं

टिप्पणी

का समुच्चय है A का आंतरिक भाग कहलाता है और इसे $A°$ या $\text{int}\, A$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

(ii) बिंदु p को A का बाहरी बिंदु कहा जाता है

(iii) एक बिंदु p को A का एक आधारभूत बिंदु (या सीमा बिंदु) भी कहा जाता है

7. संबद्धता (कनेक्टिविटी) की धारणा विश्लेषण में मौलिक महत्व की है। एक सामयिक दूरीक समष्टि में संबद्धता की औपचारिक परिभाषा देने से पूर्व, हम उपसमष्टि की धारणा का परिचय देते हैं।

8. (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि हो। मानचित्रण को X पर एक संकुचन मानचित्रण या संकुचन कहा जाता है यदि कोई वास्तविक संख्या $0 \leq \alpha < 1$ के साथ α मौजूद है।

9. हम कहते हैं कि यदि कोई क्षेत्र F का आदेश दिया जाता है, तो निम्नलिखित स्थितियों को पूरा करने वाला F का उपसमुच्चय P मौजूद होता है।

10. डेडेकिंड गुण (या पूर्णता गुण) : एक क्रमित किया गया क्षेत्र F को डिडेकिंड गुण (या पूर्णता गुण) रखने के लिए कहा जाता है। यदि F के प्रत्येक गैर–रिक्त उपसमुच्चय में ऊपरी सीमा होती है।

11. क्रमित क्षेत्रों की समरूपता : माना कि F और K दो क्रमबद्ध क्षेत्र हैं। एक K पर F का समरूपतावाद K पर F का एक–एक मानचित्रण f है, जो $+, \ldots$ और $>$ को इस अर्थ में संरक्षित करता है कि F में प्रत्येक x और y के लिए, हमारे पास है।

12. दूरीक समष्टि का उपसमुच्चय प्रथम श्रेणी का कहा जाता है अगर यह सघन गणनीय समूह के संघ के रूप में लिखा जा सकता है।

13. एक संस्थानिक समष्टि को वियोज्य (अलग करने योग्य) कहा जाता है यदि इसमें एक गणनीय आच्छादन/सघन उपसमुच्चय होता है; इसमें समष्टि के अवयवों के अनुक्रम $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ उपस्थित होते हैं, जिससे समष्टि के प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय में अनुक्रम का कम–से–कम एक तत्व निहित रहता है। विशेष रूप से, गणनीय सघन उपसमुच्चय पर, जिसका वियोज्य समष्टि पर प्रत्येक सतत फलन, जिसका वियोजन हॉसडॉर्फ समष्टि का उपसमुच्चय है, इसके मानों द्वारा निर्धारित किया जाता है।

14. एक संस्थानिक समष्टि X को लिंडेलॉफ का समष्टि कहा जाता है अगर X के हर विवृत आवरण को गणनीय आवरण के लिए फिर से प्रयोग किया जाए।

3.15 सारांश

- X एक गैर–रिक्त समुच्चय हैं। एक फलन $d: X \times X \rightarrow R$ (वास्तविक समुच्चय) को एक आव्यूह (या दूरी फलन) कहा जाता है यदि सभी $x, y, z \in X$, के लिए निम्न स्थितियां संतुष्ट हैं।

टिप्पणी

[m 1]: $d(x, y) \geq 0$.

[m 2]: $d(x, y) = 0$ यदि और केवल यदि $x = y$.

[m 3]: $d(x, y) = d(y, x)$, (समरूपता).

[m 4]: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (असममित त्रिकोण)

- युग्म (X, d) को दूरीक समष्टि कहा जाता है और $d(x, y)$ को बिंदु x और y के बीच की दूरी कहा जाता है।
- यदि $r > 0$, समुच्चय $N(p, r) = \{x \in X: d(p, x) < r\}$ को बिंदु p का निकटतम कहा जाता है। संख्या r को $N(p, r)$ का त्रिज्या कहा जाता है।
- एक बिंदु p को समुच्चय A का एक सीमित बिंदु कहा जाता है, यदि p के प्रत्येक निकटता में p के अलावा A का अंक होता है।
- समुच्चय A को कहा जाता है कि यदि $D(A) \subset A$, अर्थात् A को बंद कर दिया गया है, तो A में इसके सभी सीमा बिंदु हैं।
- एक बिंदु p को A का एक आंतरिक (Interior) बिंदु कहा जाता है यदि कोई p का निकटता N मौजूद है, जैसे कि $N \subset A$
- एक दूरीक समष्टि में, प्रत्येक निकटता एक खुला समुच्चय है।
- R के एक उपसमुच्चय G को खुला कहा जाता है यदि हर बिंदु $p \in G$ के लिए, एक खुला अंतराल I मौजूद हो जैसे कि $p \in \subset G$ |
- विवृत समुच्चयों के अपरिमित संग्रह का सर्वनिष्ठ आवश्यक रूप से खुला नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि $G_n =]-1/n, 1/n] \ (n \in N)$, तो प्रत्येक G_n खुला है (एक खुला अंतराल होने के लिए), लेकिन $\bigcap_{i=1}^{n} G_n = \{0\}$ जो तब से खुला नहीं है जब तक मौजूद नहीं है $\varepsilon > 0$ जैसे कि,$]-\varepsilon, \varepsilon[\subset\{0\}$
- यदि $A \in R$,तो एक बिंदु $p \in R$ को A का संचय बिंदु (या एक सीमा बिंदु) कहा जाता है यदि p के प्रत्येक $\in$-*nhd* $N(p, \in)$ में p से भिन्न A का बिंदु होता है।
- यदि A का एक संचय बिंदु p है, तो p के प्रत्येक $\in$-*nhd* में असीम रूप से A के कई बिंदु होते हैं।
- एक समुच्चय को पहले प्रकार का कहा जाता है यदि इसमें केवल अवकलज समुच्चयों की एक परिमित संख्या होती है। यदि इसकी अवकलज समुच्चय की संख्या अपरिमित है, तो इसे दूसरी प्रजाति का कहा जाता है।
- संबद्धता की धारणा विश्लेषण में मौलिक महत्व की है। एक संस्थानिक दूरीक समष्टि में संबद्धता की औपचारिक परिभाषा देने से पूर्व, हम उपसमष्टि की धारणा का परिचय देते हैं।
- R का एक उपसमुच्चय A जुड़ा हुआ है यदि और केवल यदि यह एक अंतराल है।

टिप्पणी

- दूरीक समष्टि (X, d) में अनुक्रम $< x_n >$ अभिसरण करता है $x_0 \in X$, यदि यह अंततः x_0 के हर *nhd* में एकगुणित रहता है तो इस प्रकार यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए ऐसा धनात्मक पूर्णांक $n(\in)$ होता है जैसे कि

$$n \geq n(\in) \Rightarrow d(x_n, x_0) < \in$$

- एक अन्य परिभाषा है, दूरीक समष्टि (X, d) में अनुक्रम $< x_n >$ एक काउची अनुक्रम माना जाता है, यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिए ऐसे धनात्मक पूर्णांक $n(\in)$ मान लिया जाता है जैसे

$$m, n \geq n(\in) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \in$$

- (X, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि हो। मानचित्रण को X पर एक संकुचन मानचित्रण या संकुचन कहा जाता है यदि कोई वास्तविक संख्या $0 \leq \alpha < 1$ के साथ α मौजूद है। जैसे कि प्रत्येक $x, y, \in X$ के लिए,

  $d(f(x), f(y))\, \alpha d(x, y) < d(x, y)$

- R^a के प्रत्येक सीमाबद्व अपरिमित उपसमुच्चय A का सीमा बिंदु R^n में होता है।
- समुच्चय P को F के धनात्मक अवयवों का समुच्चय कहा जाता है। एक आदेशित क्षेत्र F में एक तत्व एक ऋणात्मक तत्व कहलाता है यदि a न तो धनात्मक या शून्य है। हम कहते हैं कि a, b से कम है, $a < b$ या $b > a$ अगर $b–a \in P$ लिखा जाता है, तो इस प्रकार, तत्व $b \in F$ धनात्मक है यदि $b–0 \in P$ तो यह है कि $0 < b$ या $b > 0$ हम एक $a < b$ गलत है यह इंगित करने के लिए $b \leq a$ लिखें।
- एक क्रमित किया गया क्षेत्र F को डेडेकिंड गुण (या पूर्णता गुण) रखने के लिए कहा जाता है, यदि F के हर गैर–रिक्त उपसमुच्चय में ऊपरी सीमा होती है।
- R के प्रत्येक गैर–रिक्त उपसमूह जिसमें ऊपरी सीमा होती है, में एक उच्चतम होता है। दूसरे शब्दों में R के पास डेडेकिंड गुण है।
- प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए, एक धनात्मक पूर्णांक n मौजूद है। जैसे कि, $n > x$।
- यदि एक समुच्चय A अपने आप में सघन है, तो इसका पहला व्युत्पन्न समुच्चय $D(A)$ एकदम सही है।
- दूरीक समष्टि का उपसमुच्चय प्रथम श्रेणी का कहा जाता है अगर यह सघन गणनीय समूह के संघ के रूप में लिखा जा सकता है।
- एक संस्थानिक समष्टि को वियोज्य (अलग करने योग्य) कहा जाता है यदि इसमें एक गणनीय आच्छादन/सघन उपसमुच्चय होता है; इसमें समष्टि के अवयवों के अनुक्रम $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ उपस्थित होते हैं, जिससे समष्टि के प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय में अनुक्रम का कम–से–कम एक तत्व निहित रहता है। विशेष रूप से, गणनीय सघन उपसमुच्चय पर, जिसका वियोज्य समष्टि पर प्रत्येक सतत फलन, जिसका वियोजन हॉसडॉर्फ समष्टि का उपसमुच्चय है, इसके मानों द्वारा निर्धारित किया जाता है।

टिप्पणी

- सामान्य रूप से, पृथकता एक ऐसे समष्टि पर एक तकनीकी परिकल्पना है जो काफी उपयोगी है और ज्यामिति तथा चिरसम्मत विश्लेषण में पढ़ाए गए समष्टिों के वर्गों में सामान्य रूप से बहुत मामूली माने जाते हैं। दूसरी गणनीयता के संबद्ध सिद्धांत के साथ विभेद की तुलना करना आवश्यक है, जो सामान्य तौर पर सामान्य रूप से अधिक किन्तु दूरीक समष्टि के वर्ग के बराबर होता है।
- सामान्य संस्थानिक के साथ वास्तविक रेखा $\boldsymbol{R}$ वियोज्य है चूंकि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q अगणनीय है और R में सघन है अर्थात $\bar{Q} = R$ सघन या आच्छादित है।
- टोपोलॉजी τ के साथ टोपोलॉजिकल समष्टि X को दूसरी गणना योग्य समष्टि कहा जाता है, यदि यह संबंधित स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है, जिसे गणना योग्य का दूसरा स्वयंसिद्ध कहा जाता है। टोपोलॉजी τ के लिए एक गणनीय आधार B मौजूद है।

3.16 मुख्य शब्दावली

- **दूरीक समष्टि** : X को एक गैर–रिक्त समुच्चय हैं। एक फलन $d: X \times X \rightarrow R$ (वास्तविक का समुच्चय) को एक आव्यूह (या दूरी फलन) कहा जाता है।
- **बंद समुच्चय** : यदि F का पूरक खुला है तो R में एक समुच्चय F को संवृत किया जाता है।
- **खुले समुच्चय** : R के एक उपसमुच्चय f को खुला कहा जाता है यदि यह बिंदु PEG के लिए एक खुला अंतराल I मौजूद है।
- **संचय–बिंदु** : यदि AER, तो एक बिंदु PER का संचय बिंदु (यह एक सीमा बिंदु) कहा जाता है।
- **संवरण** : A में R के समुच्चय को संवृत करना A करना A वाला सबसे छोटा संवृत समुच्चय है और A द्वारा निरूपित किया जाता है।
- **संबद्धता** : संबद्धता की धारणा विश्लेषण में मौलिक महत्व की है। एक संस्थानिक समष्टि में संबद्धता परिभाषा देने से पूर्व, हम उस समष्टि की धारणा का परिचय देते हैं।
- **क्रमित क्षेत्र** : हम कहते हैं कि यदि कोई क्षेत्र F को क्रमित किया जाता है, तो स्थितियों को पूरा करने वाला F का उपसमुच्चय P मौजूद होता है।
- **डेडेकिंड गुण (Dedekind Property) (या पूर्णता गुण)** : एक क्रमित किया गया क्षेत्र F को डेडेकिंड गुण रखने के लिए कहा जाता है।

3.17 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. ज्ञात करें कि R का निम्नलिखित उपसमुच्चय खुला है या संवृत है :

   (i) $[0, 1]$

(ii) $[1, 2]$

(iii) $1[0, 2]$

(iv) $[0, 1] \cup [2, 3]$

(v) $\{1/2^n : n \in N)$

(vi) $\{1, 2, 3, 4\}$

(vii) N

(viii) Q

(ix) 0

(*x*) *R*.

2. यह बताएं कि क्या R का निम्नलिखित उपसमुच्चय संवृत, खुला, परिपूर्ण या परिबद्ध हुआ है

   (i) सभी पूर्णांकों का समुच्चय

   (ii) वास्तविक 1 संख्या $\frac{1}{n}$ से मिलकर समुच्चय बनता है। $(n = 1, 2, 3,...)$,

   (iii) खंड $[a, b]$.

3. निम्नलिखित को उदाहरण देकर समझाएं :

   (i) एक खुला समुच्चय जो एक अंतराल नहीं है।

   (ii) एक संवृत समुच्चय जो एक अंतराल नहीं है।

   (iii) एक अंतराल जो खुला नहीं है।

   (iv) एक अंतराल जो संवृत नहीं है।

   (v) एक अंतराल जो खुला समुच्चय है।

   (vi) एक अंतराल जो संवृत समुच्चय है।

   (vii) एक समुच्चय जो ना ही खुला अंतराल है और ना ही खुला समुच्चय है।

   (viii) एक समुच्चय जो ना ही संवृत अंतराल है और ना ही संवृत समुच्चय है।

4. हां या ना में उत्तर दें, प्रत्येक प्रकरण में या तो प्रमाण द्वारा या विपरीत उदाहरण द्वारा अपने उत्तर को सही बताएं।

   (i) क्या एक अनंत समुच्चय खुला हो सकता है?

   (ii) क्या एक अनंत समुच्चय खुला हो सकता है?

   (iii) एक अनंत गैर–खाली समुच्चय खुला हो सकता है?

   (iv) संवृत समुच्चयों के विवेकाधीन संग्रह का संघ बंद है?

   (v) क्या खुले समुच्चओं का विवेकाधीन संग्रह प्रतिच्छेदन पर खुला है?

5. क्या अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय खुला या बंद होता है?

6. क्या R के उपसमुच्चय दोनों खुले या बंद हैं।

टिप्पणी

7. समुच्चय $A = \{1/2^n, n \in N\}$ पर अनुवर्ती बिंदु को ज्ञात कीजिए, जोकि यहां A के संचय बिंदु पर भी है?
8. दिखाएं कि x संवृत होने का एक बिंदु है, (अर्थात् अनुवर्ती बिन्दु) समुच्चय A का यदि ओर केवल यदि $s_n \in A$ और $x = \lim s_n$ के साथ अनुक्रम $\{s_n\}$ हो।
9. दिखाए की अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय प्रत्येक जगह सघन है।
10. क्या परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q स्वयं में सघन है?
11. समुच्चय का उदाहरण दीजिए जोकि संवृत है लेकिन सघन नहीं है।
12. समुच्चय का उदाहरण दीजिए जोकि उत्तम है लेकिन गैर–सघन नहीं है।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित उपसमुच्चय के सभी संचय बिंदु के समुच्चय को 1 में निर्धारित करें और तय करें कि समुच्चय विवृत हैं या संवृत हैं।
   (i) I सभी पूर्णांकों का समुच्चय,
   (ii) $\{(-l)^n + (l/m) : m, n \in \mathrm{N}]$,
   (iii) $\{(1/\mathrm{n}) + (l/m) : m, n\ n \in \mathrm{N}\}$.
   (iv) $\{(-1)^n [1 + (1/\mathrm{n})] : n \in N\}$,
   (v) $\{3^{-n} + : n \in \mathrm{N}\} \cup \{5^{-n} : \mathrm{n} \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$.
2. माना समुच्चय A के बिंदु दिए गए हैं,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a^n},$$

   जहाँ n एक निश्चित धनात्मक पूर्णांक है और संख्या A प्रत्येक धनात्मक अभिन्न मान लेती है। दिखाएं कि A प्रथम वर्ग और nवी क्रम या कोटि का है।

3. दिखाएं की बिंदु 1/12 कैंटर समुच्चय (Cantor's Set) के बिंदु $\frac{1}{12}$ पर है।

   [संकेत $\frac{1}{12} = 0_3$' 00202020].

4. C को गुण के साथ वास्तविक संख्याओं के संवृत समुच्चओं का एक संग्रह मानें, जो C के प्रत्येक परिमित उपसंग्रह में एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन है, और मान ले कि C का इनमें से कोई एक समुच्चय परिबद्ध है। सिद्ध करो कि $\cap\{F : F \in C\} \neq \varnothing$.

   [संकेतः हेइन–बोरेल प्रमेय और डी–मॉर्गन नियमों का उपयोग करें].

5. माना$\{F_n\}$ वास्तविक संख्याओं के गैर–रिक्त संवृत समुच्चयों $F_n \supset F_{n+1}$ का एक क्रम या कोटि है। दिखाएं कि F_n का इनमें से कोई एक समुच्चय सीमित है, तो

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_1 \neq \varnothing$ उदाहरण देकर दिखाएं कि यह निष्कर्ष गलत है यदि हमें इनमें से सीमित समुच्चय की आवश्यकता नहीं है।

6. सिद्ध करें कि प्रत्येक गैर–रिक्त खुला समुच्चय परिमेय और अपरिमेय दोनों में शामिल होता है।
7. यह सिद्ध करे कि R में प्रत्येक संवृत समुच्चय विवृत समुच्चयों की गणना योग्य संग्रह का प्रतिच्छेदन या सर्वनिष्ठ है।
8. यह सिद्ध करे कि R में प्रत्येक गैर–रिक्त, बंधे हुए संवृत समुच्चय, बंधे हुए संवृत समुच्चय A या तो एक संवृत अंतराल है या फिर A को एक अंतराल में विवृत अंतराल के एक गणना योग्य असंबद्ध संग्रह को हटाकर प्राप्त किया जा सकता है, जिसका अंतिम बिंदु S से संबंधित है।
9. दिखाए कि धनात्मक लम्बाई असंबद्ध अंतराल का कोई भी संग्रह गणनीय है।

3.18 सहायक पाठ्य सामग्री

Malik, S. C. and Savita Arora. 1991. *Mathematical Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Simmons, G. F. 2004. *Introduction To Topology And Modern Analysis*. New York: Tata McGraw-Hill Education.

Ahlfors, Lars V. 1978. *Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1986. *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Gupta, S. L. and Nisha Rani. 2003. *Fundamental Real Analysis*, 4th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Carothers, N. L. 2000. *Real Analysis*, 1st Edition. UK: Cambridge University Press.

Shilov, Georgi E. 2012. *Elementary Real and Complex Analysis*. Chelmsford: Courier Corporation.

Sharma, S.C. 2006. *Metric Space*. New Delhi: Discovery Publishing House.

Appostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis.* Boston: Addison Wesley.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*, 3rd Edition. New York: Macmillan Publishing Company.

इकाई 4 निरंतर या सतत फलन और सघनता

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय

एक सतत या निरंतर फलन (Continuous Function) एक ऐसा फलन (Function) है जिसके मान (Value) में कोई अचानक परिवर्तन नहीं होता है, और जिसे विच्छेदन के रूप में जाना जाता है। अधिक सटीक रूप से, एक निरंतर फलन के निविष्ट (Input) में पर्याप्त रूप से छोटे परिवर्तन इसके निर्गत मान (Output) में मनमाने ढंग से छोटे परिवर्तन होते हैं। यदि फलन निरंतर नहीं है, तो एक फलन को बंद करने के लिए कहा जाता है। 19 वीं शताब्दी तक, गणितज्ञ बड़े पैमाने पर निरंतरता की सहज धारणाओं पर भरोसा करते थे, जिसके दौरान एप्सिलॉन–डेल्टा (Epsilon–Delta) परिभाषा जैसे प्रयास इसे औपचारिक रूप देने के लिए किए गए थे।

फलन की सतत् संस्थानिक (Continuous Topology) की मुख्य अवधारणाओं में से एक है। जो कि कोटि सिद्धांत में है, विशेष रूप से डोमेन सिद्धांत में, एक निरंतरता की धारणा को स्कॉट निरंतरता (Scots Continuous) के रूप में जाना जाता है। विशेष रूप से सामान्य संस्थानिक में, सघनता (Compactness) या संयुक्तता एक गुण है जो यूक्लिडियन विस्तार के बंद होने की धारणा को सामान्य करता है (अर्थात, इसकी सभी सीमा बिंदुओं से युक्त) और सीमित (अर्थात् इसके सभी बिंदु एक दूसरे के कुछ निश्चित दूरी पर स्थित होते हैं)। उदाहरणों में एक बंद अंतराल, एक आयत या बिंदुओं का एक निर्धारित समुच्चय शामिल है। यह धारणा विभिन्न तरीकों से यूक्लिडियन समष्टि की तुलना में अधिक सामान्य संस्थानिक समष्टि (Topology Space) के लिए परिभाषित की गई है।

इस इकाई में, आप निरंतर फलन, विस्तार प्रमेय, एकसमान निरंतरता और सघनता, पूर्णतः बाध्य समष्टि, सघन समुच्चय और संयुक्तता के बारे में अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

4.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- निरंतर या सतत फलन का वर्णन कर पाएंगे;
- विस्तार प्रमेय की व्याख्या कर पाएंगे;
- एकसमान सातत्य या निरंतरता को समझ पाएंगे;
- सघनता का वर्णन कर पाएंगे;
- परिमित प्रतिच्छेदन गुणों की व्याख्या कर पाएंगे;
- निरंतर या सतत फलन का संयुक्त और उसके सघन समुच्चय को समझ पाएंगे।

4.2 निरंतर या सतत फलन

माना दूरीक समष्टि Y में, एक सघन दूरीक समष्टि X का सतत मानचित्रण F है। दूसरे शब्दों में, सघन समष्टि का सघन चित्र, सघन है।

प्रमाण : माना कि $\{H_\lambda : \lambda \in A\}$, $f[X]$ का एक खुला आवरण है। चूंकि f सतत् है, $f^{-1}[H_\lambda]$ X में एक खुला समूह है। यह निम्नानुसार है कि संग्रह $\{f^{-1}[H_\lambda] : \lambda \in A\}$ X का एक खुला आवरण है। चूंकि X सघन है, बहुत सी सूचियां या सूचकांक (Indices) $\lambda_1 .....,\lambda_n$ मौजूद हैं। ऐसा है कि,

$$X = f^{-1}[H_{\lambda 1}] \cup ... \cup f^{-1}[H\lambda_n) = f^1 [H_{\lambda 1} ... H\lambda_n].$$

यह इस प्रकार है कि

$$f = [X] = f[f^{-1}(H_{\lambda 1} \cup ... \cup H_{\lambda 1}] \subset H_{\lambda n}) \cup ... \cup H_{\lambda n}$$

इसलिए $f[X]$ सघन है।

R^n में एक समुच्चय A का मानचित्रण F बाध्य कहा जा सकता है यदि वहाँ एक वास्तविक संख्या M इस प्रकार विद्यमान हो कि $|f(x)| \leq M$ प्रत्येक $x \in A$ के लिए।

4.3 विस्तार प्रमेय

मुख्य प्रमेय में जाने से पहले, लैमा 1 माना जाता है

लैमा 1: यदि X एक सामान्य संस्थानिक समष्टि (Topological Space) है और A, X में बंद है, फिर किसी भी सतत् फलन के लिए $f : A \to R$ है इस प्रकार से है $|f(x)| \leq 1$, एक सतत् फलन (Continuous Function) g है,

टिप्पणी

$g: X \rightarrow R$ इस प्रकार से है जो $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$ के लिये $x \varepsilon X$, और $|f(x)-g(x)| \leq \frac{2}{3}$ के लिये $X \varepsilon A$ है।

प्रमाण : यह समुच्चयों (Sets) $f^{-1}\left((-\infty-\frac{1}{3}]\right)$ और $f^{-1}\left([\frac{1}{3},\infty)\right)$ A में असंयुक्त (Disjoint) और बंद (Closed) हैं। चूंकि A बंद है, वे X में भी बंद हैं। चूँकि X सामान्य है, फिर "उरीसोहन" (Urysohn's) के द्वारा लैमा और यह तथ्य कि [0, 1], $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, के समरूप है। $g: X \rightarrow \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ एक सतत फलन है। जो इस प्रकार से $g\left(f^{-1}(-\infty,-\frac{1}{3}c]\right)=-\frac{1}{3}$ और $g\left(f^{-1}[\frac{1}{3},\infty)\right)=\frac{1}{3}$ है। इस प्रकार $|g(X)| \leq \frac{1}{3}$ के लिये $x \varepsilon X$। अब, अदि $-\leq f(X) \leq -\frac{1}{3}$, पुनः $|g(x)| \leq -\frac{1}{3}$ और इस प्रकार $\left|f(x)-g(x) \leq \frac{2}{3}\right|$। इसी प्रकार यदि $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$, पुनः $g(x)=\frac{1}{3}$ और इस प्रकार $\left|f(x)-g(x) \leq \frac{2}{3}\right|$। अंत में, $\left|f(x)-g(x) \leq \frac{2}{3}\right|$, के लिए हमारे पास |*g*(*x*)| £ $\frac{1}{3}$, है इसलिए $\left|f(x)-g(x) \leq \frac{2}{3}\right|$। अतः $\left|f(x)-g(x) \leq \frac{2}{3}\right|$ सभी के लिए $x \in A$ रखती है।

प्रमेय 4.2: पहले मान लीजिए कि किसी बंद उपसमूह पर किसी भी सतत फलन के लिए एक निरंतर या सतत विस्तार (Continuous Extension) होता है। C और D को असंयुक्त होने दें और X में बंद कर दें तथा F को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$C \cup D \rightarrow R$ से $f(x)=0$ के लिये $x \in C$ और $f(x)=1$ के लिये $x \in D$ अब *f* निरंतर या सतत है और हम इसे एक निरंतर या सतत फलन तक बढ़ा सकते हैं। $F: X \rightarrow R.$ उरीसोहन के लैमा (Urysohn's Lemma), *x* सामान्य है क्योंकि *F* निरंतर कार्य है जैसे कि $F(x) = 0$ के लिये $x \in C$ और $f(x) = 1$ के लिए $1\ x \in D$.

इसके विपरीत, *X* को सामान्य होने दें और *A* को *X* में बंद या संवृत किया जाए। लैमा द्वारा, एक निरंतर या सतत फलन $g_0: X \rightarrow R$ होता है इस तरह से $\left|g_0(x) \leq \frac{1}{3}\right|$ के लिये $x \in X$ और $\left|f(x)-g_0(x)\right| \leq \frac{1}{3}$ के लिये $x \in A.$ चूंकि $(f-g_0): A \rightarrow R$

टिप्पणी

निरंतर (Continuous) या सतत है, लैमा हमें बताती है कि एक सतत फलन $g_1 : X \to R$ है। इस तरह से $|g_1(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$ के लिये $x \in X$ और $|f(x) - g_0(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$ के लिये $x \in A.$

लैमा के बार–बार अनुप्रयोग द्वारा हम निरंतर या सतत फलन का अनुक्रम निर्मित कर सकते हैं।

$g_0, g_1, g_2, ...$ इस तरह से $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ सभी के लिए $x \in X$ है, और

$|f(x) - g_0(x) - g_1(x) - g_2(x) - ....| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ के लिये $x \in A.$

परिभाषित करें $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ क्योंकि $|g_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ और $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ एक ज्यामितीय शृंखला के रूप में परिवर्तित होता है, फिर $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ पूरी तरह से और समान रूप से, इसलिए F हर जगह परिभाषित एक सतत फलन है। इसके अलावा, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ इसका आशय $|F(x)| \leq 1$ है।

अब, $x \in A,$ के लिए, हमारे पास वह है $\left|f(x) \sum_{n=0}^{k} g_n(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$ और जैसा कि K अनंत तक जाता है, दाईं ओर शून्य और इसलिए योग F (*x*) में जाता है। इस प्रकार $|f(x) - F(x)| = 0$ इसलिए F, F का विस्तार करता है।

टिप्पणी: यदि एक फलन f संतोष जनक था। $|f(x)| <,$ फिर प्रमेय को सुदृढ़ (Strengthened) किया जा सकता है। F के एक विस्तार f प्राप्त करें। वह समुच्चय $BF^{-1}(\{-1\} \cup \{1\})$ बंद है और A से असंयुक्त है क्योंकि $|F(x)| = |f(x)| < 1$ के लिये $x \in A$ उरीसोहन के लैमा द्वारा एक सतत फलन f है इस तरह से $\phi(A) = \{1\}$ और $\phi(B) = \{0\}$. अतः $\phi(x)\phi(x)$, $\phi(x)$ का निरंतर या सतत विस्तार है, और यह गुण भी है जो कि $|F(x) f(x)| < 1.$ है।

4.4 एक समान निरंतरता या सातत्य

टिप्पणी

दिए गए दूरीक समष्टि (Metric Space) (X, d_1) और (Y, d_2), एक फलन (Function) $f : X \to Y$ हर वास्तविक संख्या (Real Number) के लिए समान रूप से निरंतर कहा जाता है $\varepsilon > 0$ वहाँ उपस्थित $\delta > 0$ ऐसा हर x के लिए, $y \in X$ के साथ $d_1\{x, y\} < \delta$, हमारे पास वह $d_2\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon$. है।

यदि X और Y वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय (Subsets) हैं, d_1 और d_2 मानक यूक्लिडियन मानदंड (Euclidean Norm) हो सकते हैं, |•|, परिभाषा देते हुए: सभी के लिए $\varepsilon > 0$ वहाँ एक $\delta > 0$ उपस्थित है। जैसे कि सभी के लिए $x, y \in X, |x - y| < \delta$ का तात्पर्य $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. से है।

प्रत्येक बिंदु पर, एकसमान रूप से सतत होने तथा सामान्य रूप से सतत होने में अंतर यह है कि एकसमान सततता में δ का मान केवल s पर निर्भर करता है न कि डोमेन में किसी बिंदु पर।

किसी विशेष बिंदु पर स्वयं सततता (Continuity) एक विस्तारीय (अधिक बारीकी से, बिंदुओं के आधार पर) गुण है, अर्थात फलन f सतत रहता है या नहीं। जब हम किसी फलन की एक अंतराल पर निरंतर होने की बात करते हैं, तो हमारा तात्पर्य केवल यह है कि यह अंतराल के प्रत्येक बिंदु पर जारी है। इसके विपरीत, समान निरंतरता एक सार्वभौमिक गुण (Global Property) है, इस अर्थ में कि मानक परिभाषा व्यक्तिगत बिंदुओं के बजाय अंकों के जोड़े को संदर्भित करती है। दूसरी ओर, प्राकृतिक विस्तार f^{*} के संदर्भ में एक विस्तारीय परिभाषा देना संभव है, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों में दर्शाया गया है:

1. दो दूरीक समष्टि के बीच प्रत्येक लिपस्चिट (Lipschitz) सतत मानचित्र समान रूप से निरंतर है। विशेष रूप से प्रत्येक फलन जो अवकलनीय (Differentiable) है और जिसके अवकलज सीमाबद्ध है, एक समान रूप से सतत है। आमतौर पर, हर धारक का निरंतर फलन समान रूप से निरंतर है।
2. समान रूप से समानांतर गतिशील फलनों का प्रत्येक अवयव एक समान रूप से सतत है।
3. स्पर्शरेखा फलन अंतराल (Tangent Function Interval) $(-\pi/2, \pi/2)$ पर निरंतर या सतत है लेकिन उस अंतराल पर समान रूप से निरंतर या सतत नहीं है।
4. यह घातीय फलन (Exponential Function) $x \to e^x$ पूर्व वास्तविक रेखा पर हर जगह निरंतर या सतत है लेकिन रेखा पर समान रूप से निरंतर या सतत नहीं है।
5. यह परिभाषाओं का तात्कालिक परिणाम है कि प्रत्येक समान रूप से सतत फलन (Continuous Function) निरंतर या सतत है।

टिप्पणी

6. व्युत्क्रम (Converse) फलन का प्रयोग नहीं होता है। उदाहरण के लिए फलन $f: R \to R, x \to x^2$. पर विचार करें किसी भी धनात्मक वास्तविक संख्या (Positive Real Number) है। फिर समान निरंतरता के लिए एक धनात्मक संख्या के अस्तित्व की आवश्यकता होती है δ जैसे कि सभी के लिए $X_1 X_2$ के साथ $|X_1 - X_2| < \delta,$ हमारे पास $|f(X_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$ है लेकिन किसी भी धनात्मक संख्या के लिए δ, हमारे पास
$f(x+\delta) - f(x) = 2x\delta + \delta^2 = (\delta)(2x+\delta),$ है और पर्याप्त रूप से बड़े x के लिए यह मात्रा ε से अधिक है।
7. यदि $X \subset R, f: X \to R$ समान रूप से सतत (Uniformly Continuous) है और $S \subset A$ सीमित है, तब $f(S), R$ का एक सीमित उपसमुच्चय (Subset) है।
विशेष रूप से, फलन $x \to \dfrac{1}{x}$ से $(0,1)$ R के लिए सतत है लेकिन समान रूप से सतत नहीं है।
8. सामान्यतः, समान रूप से सतत फलन के अंतर्गत एक संपूर्णतः परिबद्ध उपसमुच्चय (Totally Bounded Subset) का चित्र पूरी तरह से परिबद्ध होता है। इस बात से सावधान रहें कि समान रूप से सतत फलन के अंतर्गत विवेकाधीन (Arbitrary) दूरीक समष्टि के परिबद्ध उपसमुच्चय की चित्र को परिबद्ध होने की आवश्यकता नहीं है। उदाहरण के लिए, पूर्णांक आव्यूह के साथ संपन्न पूर्णांक से तत्समक फलन (Identity Function) पर विचार करें जो सामान्य यूक्लिडियन (Euclidean) आव्यूह से संपन्न है।
9. हेइन–कैंटोर (Heine-Cantor) प्रमेय का दावा है कि यदि X सघन है, तो प्रत्येक निरंतर $f: X \to Y$ समान रूप से निरंतर है। विशेष रूप से, यदि फलन वास्तविक रेखा के सीमित परिबद्ध अंतराल पर सतत रहता है तो यह उस अंतराल पर समान रूप से सतत रहता है। डार्बोक्स (Darboux) की पूर्णात्मकता एक एकसमान सातत्य प्रमेय (Uniform Continuity Theorem) से लगभग तत्काल ही काम करती है।
10. यदि एक वास्तविक–मान फलन (Real Valued Function) f सतत है, $[0,\infty)$ और $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (और परिमित है), तो f समान रूप से सतत है। विशेष रूप से, $\mathbf{C_0(R)}$ का प्रत्येक अवयव, **R** पर सतत फलनों का वह विस्तार, जो अनंत में नष्ट हो जाता है, एक समान रूप से सतत होता है। ध्यान दें कि यह ऊपर वर्णित हेइन–कैंटोर प्रमेय का एक सामान्यीकरण है, चूंकि $C_c(R) \subset C_0(R)$ ।

गैर–मानक विश्लेषण (Non-Standard Analysis) में, एक वास्तविक मान फलन f एक वास्तविक चर (Real Variable) का एक बिंदु पर सतत a बिंदु पर है। अगर अंतर हो जब भी $f(a+\delta) - f(a)$ अनंत होता है δ अनंत है, इस प्रकार f, R के समुच्चय A पर ठीक है यदि ऐसी गुण हर वास्तविक बिंदु $a \varepsilon A$ पर संतुष्ट है। समरूप की

सततता को इस पद के रूप में व्यक्त किया जा सकता है कि केवल वास्तविक बिंदुओं A में ही सही है, लेकिन अपने गैर–मानक समकक्ष (प्राकृतिक विस्तार) (Natural Extension) $^*A$ में $^*R$ में सभी बिंदुओं पर है।

उदाहरण 4.1 : त्रिकोणमितीय स्पर्शरेखा फलन (Trigonometric Tangent Function) खुले अंतराल पर सतत $(-\pi/2, \pi/2)$ उस समुच्चय पर समान रूप से सतत रहने में विफल रहता है क्योंकि इसमें अनंत रूप से छोटी धनात्मक वास्तविक संख्याएँ होती हैं, जैसे कि $\tan(\pi/2-2\delta)$ और $\tan(\pi/2-2\delta)$ एक अनंत रूप से छोटी राशि से अधिक भिन्न होती है।

उदाहरण 4.2 : घातीय फलन, वास्तविक रेखा R पर सतत, R पर समान रूप से सतत होने में विफल रहता है क्योंकि अनंत रूप से बड़े गैर–मानक वास्तविक संख्याएँ हैं x और अनंत रूप से छोटी गैर–मानक वास्तविक संख्याएँ δ हैं जैसे कि $\exp(x + \delta) - \exp(x)$ अनंत रूप से छोटी नहीं है। द्विघातीय फलन (Squaring Function) x^2 के संदर्भ में एक अधिक स्पष्ट गणना गैर–मानक कलन (Non-Standard Calculus) पर दिखाई देती है।

यूक्लिडियन समष्टि (Euclidean Space) के मध्य फलन के लिए, एकसमान सातत्य इस अर्थ में व्याख्यायित की जा सकती है कि फलन अनुक्रम के अनुसार कैसे कार्य करता है। विशेष रूप से, A को R^n का उपसमुच्चय (Subset) माना जाता है। एक फलन $f: A \to \boldsymbol{R}^m$ एक समान रूप से सतत है, यदि और केवल यदि, अनुक्रमों x_n और y_n के प्रत्येक युग्म के लिए, जो इस प्रकार है कि,

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| \quad = 0$$

हमारे पास है $\lim_{n\to\infty}|f(x_n) - f(y_n)| \quad = 0$

4.5 सघनता

दूरीक समष्टि (Metric Space) में परिबद्ध समुच्चय होने का गुण समरूपता (Homomorphism) द्वारा संरक्षित नहीं है, उदाहरण के लिए, अंतराल (0, 1) और पूरे **R** सामान्य सांस्थिति के तहत समरूपक (Homomorphism) हैं। इसलिए प्रमेयों को वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis) में सामान्य करने के लिए, जैसे संवृत परिबद्ध अंतराल पर सतत फलन सीमाबद्ध होता है, हमें एक नई अवधारणा की आवश्यकता है।

यह सघनता (Compactness) का विचार है। हम एक परिभाषा देंगे जो बाद में दूरीक समष्टि पर लागू होती है, लेकिन इस बीच, हमारे पास केवल खुले समुच्चयों के संदर्भ में तर्क है।

सांस्थितिक समष्टि तब सुगठित होता है, जब प्रत्येक खुले आवरण में परिमित उपआवरण (Sub-Covering) होता है।

टिप्पणी

एक समष्टि X का खुला आच्छादन, $\bigcup_{j\in I} U_i = X$ के साथ एक खुले समुच्चय का संग्रह $\{U_i\}$ है तथा यह एक परिमित उप–आवरण रखता है यदि $U_i's$ की एक निश्चित संख्या का चयन किया जा सकता है जो कि अभी भी X को आच्छादित करती हो।

सबसे महत्वपूर्ण बात यह है कि इसका सामान्य आव्यूह के साथ **R** के लिए इसका क्या मतलब है।

प्रमेय 4.3 : अंतराल [0, 1] R पर सामान्य आव्यूह (Usual Metric) के तहत सघन है।

प्रमाण : माना $\{U_i\}$, [0, 1] का एक खुला आवरण है। यह विधि समूह A पर विचार करने के लिए है $A = \{x \in [0,1] | [0,x]$ में से कई परिमित के द्वारा आच्छादित (Cover) किया जा सकता है $U_i's\}$। तब R की पूर्णता गुण का उपयोग A की कम से कम ऊपरी सीमा होने के लिए करें।

माना $\alpha < 1$, तब एक कुछ खुले समुच्चय U_{i0} में निहित होता है और इसलिए U_{i0} में एक c–समीपवर्ती में स्थित होता है।

पर अब $[0, \alpha - \varepsilon/2]$ $U_i's$ से परिमित के द्वारा आच्छादित किया गया है, और इसलिए यह संग्रह, के साथ साथ U_{i0} आच्छादित $[0, \alpha + \varepsilon/2]$ जो α की परिभाषा का खंडन करता है। इसी तरह के प्रमाण से पता चलता है कि **R** का कोई भी बंद बंधा हुआ अंतराल सघन है। हम बाद में देखेंगे कि वास्तव में **R** (इसकी सामान्य आव्यूह के साथ) का कोई भी बंद परिबद्ध उपसमूह सघन है।

प्रमेय 4.4: इसकी सामान्य आव्यूह (Usual Metric) के साथ **R** का एक सघन उपसमुच्चय बंद और परिबद्ध है।

प्रमाण : यदि एक समुच्चय $A \subset \mathbf{R}$ बंद नहीं है तो एक सीमा बिंदु (Limit Point) $p \notin A$ है। फिर बंद के पूरक द्वारा आच्छादित p के ε- समीपवर्ती के लिये $p = 1, 1/2, 1/3, ...$

उदाहरण के लिए यदि $A = (0, 1)$ और $p = 0$ फिर $(0, 1) = (^1/_2, 1) \cup (^1/_3, 1) \cup (1/4, 1) \cup ...$

हम A को आवरण करने के लिए एक परिमित उपआवरण नहीं ले सकते।

इसी तरह के प्रमाण से पता चलता है कि एक परिबद्ध (Unbounded) समुच्चय सघन नहीं है।

सघनता के गुण

1. सघन समूह की सतत चित्र सघन हैं।

अर्थात, यदि $f: C \to Y$ सतत है, और C सघन है, फिर $f(C)$ भी सघन होगा।

प्रमाण : बता दें कि $\{U_i\}$ $f(C)$ का खुला आवरण है। फिर $\{f^{-1}(U_i)\}$ C का खुला आवरण है और इसलिए इसे सीमित उपआवरण में घटाया जा सकता है। $U_i's$ का संगत संग्रह $f(C)$ का परिमित उपआवरण होगा।

टिप्पणी

उपप्रमेय : यदि X सघन है, और ~ कोई समानता संबंध है तो $X/\sim$ सघन है।

प्रमाण : प्राकृतिक मानचित्र $p. X \to X/\sim$ सतत और आच्छादिक (Continuous and Onto) है।

2. सघन स्पेस का कोई भी बंद उपसमूह सघन है।

प्रमाण : यदि $\{U_i\}$ $A \subset C$ का खुला आवरण है, तो प्रत्येक $U_i = V_i \cap A$ के साथ $V_i C$ में खुला है। फिर संग्रह (Collection) $\{V_i\}$ के साथ में खुले समुच्चय $C - A$ आवरण C और इसलिए एक परिमित उपआवरण है। इसके अनुसार $U_i^{'}s$ तो A को आवरण करें।

उपप्रमेय : हेइन–बोरेल प्रमेय (Heine-Borel Theorem) : इसकी सामान्य आव्यूह के साथ R के किसी भी बंद बाध्य उपसमुच्चय सघन है।

प्रमाण : ऐसा कोई भी उपसमुच्चय, संवृत परिबद्ध अंतराल (Closed Bounded Interval) का संवृत उपसमुच्चय होता है, जिसे हमने ऊपर देखा है, वह सघन होता है।

उपप्रमेय (Corollary) : सीमित बद्ध अंतराल पर किसी वास्तविक मान फलन (Real Valued Function) को सीमाबद्ध किया जाता है और इसकी सीमा प्राप्त होता है।

प्रमाण : संवृत परिबद्ध अंतराल सुगठित होता है और इसलिए इसका प्रतिबिंब सघन होता है और इसलिए संयोजकता द्वारा वास्तव में एक अंतराल भी होता है। इस प्रकार फलन बाध्य है और इसका प्रतिबिंब एक अंतराल $|p, q|$ है, इसकी सीमा माप किए गए शीर्ष और q अंकों पर प्राप्त होती है।

3. हॉसडॉर्फ (Hausdorff) समष्टि का कोई सघन उपसमुच्चय बंद है।

प्रमाण : माना $C \subset X$ सघन है, यह दिखाने के लिए कि $X - C$ खुला है, हम $x \in X - C$ लेते हैं और दर्शाते हैं कि $X - C$ खुले उपसमुच्चय (Subset) में है।

प्रत्येक $y \varepsilon C$ के लिए, हम x तथा $y : x \in U_y y \in V_y$ को अलग करते हुए, असंबद्ध खुले समुच्चयों U_y तथा V_y को प्राप्त कर सकते हैं। समुच्चय $\cap U_y$, जहाँ प्रतिच्छेदन व्यापक रूप से $y \in C$ है, जो कि C पर नहीं मिलता है तथा इस प्रकार $X - C$ में है। दुर्भाग्य से, यह आवश्यक रूप से खुला नहीं है क्योंकि अपरिमित प्रतिच्छेदनों के अंतर्गत एक सांस्थानिक (Topology) τ बंद नहीं है। तथापि, चूंकि C सघन है, हम सब त्याग सकते हैं लेकिन परिमित रूप से कई $V_y s$ तथा संगतरूप से $V_y s$ का प्रतिच्छेदन खुला समुच्चय होगा जो कि हमारे लिए आवश्यक है।

4. कोई भी सघन हॉसडॉर्फ समष्टि (Hausdorff Space) भी सामान्य है।

प्रमाण

5. सघन समष्टि का गुणन (Product) सघन है।

एंड्री टाइकोनोफ (Andrei Tychonoff) के बाद इस प्रमेय को टाइकोनॉफ प्रमेय (Tychonoffs Theorem) कहते हैं, जिन्होंने इसे अनंत रूप से कई विस्तारों के गुणन के रूप में सिद्ध किया था। यहाँ तक कि दो विस्तारों के लिए प्रमाण आश्चर्यजनक रूप से मुश्किल है।

टिप्पणी

उपप्रमेय : बंद इकाई वर्ग (Closed Unit Square) $[0, 1] \times [0, 1]$ सघन है।

इसलिए भी मोबिअस बैंड (Mobius Band) वास्तविक प्रक्षेप्य तल (Real Projective Plane), वृत्तज वलय, गोला (Torus Sphere) जैसी जगहों को पहचान से बनाया गया है।

संबद्ध समुच्चय एक समुच्चय है, जिसे दो गैर–रिक्त उपसमुच्चय में विभाजित नहीं किया जा सकता है, जो समूह पर प्रेरित सापेक्ष सांस्थिति में खुले रहते हैं। समान रूप से, यह एक समूह है जिसे दो गैर–रिक्त उप–भागों में विभाजित नहीं किया जा सकता है जैसे कि प्रत्येक उपसमूह में दूसरे के समूह बंद होने के साथ सामान्य रूप से कोई बिंदु नहीं होता है।

माना X एक सांस्थितिक समष्टि है। X में जुड़ा समुच्चय एक समुच्चय $A \subseteq X$ है जिसे दो गैर–रिक्त उपसमूह में विभाजित नहीं किया जा सकता है जो समूह A पर प्रेरित सापेक्ष सांस्थिति (Induced Relative Topology) में खुले हैं। समान रूप से, यह एक समुच्चय है जिसे दो गैर–रिक्त उपसमूहों में विभाजित नहीं किया जा सकता है, इस प्रकार प्रत्येक उपसमुच्चय के अन्य समूह बंद होने पर समान बिंदु नहीं होते हैं। विस्तार X, यदि यह स्वयं का संबद्ध उपसमुच्चय है तो संबद्ध सांस्थितिक समष्टि है।

वास्तविक संख्या, वास्तविक संख्याओं के खुले या बंद मध्यान्तर के रूप में एक जुड़ा समूह हैं। (वास्तविक या जटिल) तल जुड़ा हुआ है, जैसा कि सतह में कोई खुला या बंद चक्र या कोई वलय है। स्थलाकृतिक की ज्या वक्र (Sine Curve) सतह का एक जुड़ा हुआ उपसमूह है। सतह के उपसमूह का एक उदाहरण जो जुड़ा नहीं है, निम्न द्वारा दिया जाता है।

$B = \{z \in C : |z| <$ या $|z - 2| < 1|$

ज्यामितीय दृष्टि से समुच्चय B दो खुले हुए चक्र (Open Disks) का समुच्चय है, जिनकी सीमाएँ 1 पर स्पर्शरेखा हैं।

संयोजकता और निरंतरता (Connectedness and Continuity)

निरंतरता यह एक सतत के रूप में एक सतत फलन के अधिक सहज गुणों से मेल खाती है एक जुड़े समूह को एक जुड़े समुच्चय में बदल देती है।

पथ संयोजकता (Path Connectedness)

एक सांस्थितिक समष्टि X में, A से B का पथ बंद मध्यान्तर [0,1] से X तक का एक सतत फलन है जो इस प्रकार है

$$f(0) = a$$

और $$f(1) = b$$

एक उपसमूह Y को पथ जुड़ा हुआ कहा जाता है जब Y के भीतर इस तरह का पथ उपस्थित है, जो कि Y के प्रत्येक युग्म बिंदु $\{a, b\}$ के लिए है।

प्रमेय 4.5: प्रत्येक पथ–संबद्ध समुच्चय संबद्ध है।

प्रमाण : दो विवेकाधीन (Arbitrary) बिंदुओं a और b एक पथ से जुड़े समूह Y पर विचार करें। माना P को एक से दूसरे तक एक पथ होने दो। यदि वे दो बिंदु क्रमशः दो अलग–अलग खुले समुच्चयों में थे तो U और V जिनके संघ में Y था, तो इस तरह के खुले समुच्चय उसी तरह P को विभाजित करेंगे और साबित करेंगे कि यह जुड़ा नहीं है। चूंकि हम जानते हैं कि p (संबद्ध समुच्चय [0,1] के सतत प्रतिबिंब के रूप में) से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि a और b संभवतः Y के आवरण के दो संयुक्त खुले समूहों में नहीं हो सकते। यह Y के किसी भी दो बिंदुओं के लिए सच है, इसलिए Y के संयुक्त खुले समुच्चयों में Y के दो खाली–रहित भाग नहीं हो सकते हैं।

इसलिए, Y जुड़ा (Connected) हुआ है।

प्रमेय 4.6: एक आदर्श समष्टि का प्रत्येक जुड़ा हुआ खुला समूह पथ से जुड़ा हुआ है।

प्रमाण : किसी बिन्दु a के लिए गैर–रिक्त खुले या विवृत समुच्चय U है, तथा हम समुच्चय V के बिन्दुओं b, u के उपथ a, b होते हैं तथा समुच्चय V एक खुला या विवृत समुच्चय है जिसका सामान्य विस्तार पथ जुड़ा हुआ है (संकेत– कोई बिंदु C का केन्द्रीय पथ b पर तथा U में अंतर्विष्ट है जो V में अंतर्विष्ट है क्योंकि उसका पथ है जो a से c तक B से होकर गुजरता है)।

इसी तरह, समूह W, U के बिंदु z से मिलकर बनता है, जिसके लिए z से कोई पथ नहीं है, वह भी खुला है। तो, U दो असंबद्ध खुले समुच्चयों का V और W संघ है। यदि U जुड़ा हुआ है, तो यह केवल तभी संभव है जब W खाली हो (चूँकि V गैर–रिक्त है क्योंकि इसमें a है)। इसलिए, $U = V$, जो यह कहना है कि U के किसी भी अन्य बिंदु से एक रास्ता है।

लैमा : एक दूरीक समष्टि सघन है, यदि और केवल यदि यह पूर्ण और पूरी तरह से घिरा हुआ है।

पहले मान लें कि (S, d) एक अनुक्रमिक रूप से सघन दूरीक समष्टि है। हम पहले दिखाते हैं कि (a, d) में किसी भी काउची अनुक्रम (a_k) की सीमा होती है, वास्तव में, अनुक्रमिक (Sequentially) रूप से अनुक्रम में कुछ बिंदु $a \in S$; में परिवर्तित होने के बाद अनुक्रम होता है, लेकिन चूंकि अनुक्रम काउची (Cauchy) है, इसका मतलब यह है कि पूरे अनुक्रम की सीमा a है। तो (S, d) पूरा हो गया है।

माना $\in > 0$ यह दिखाने के लिए कि एक सघन समष्टि पूरी तरह से सीमाबद्ध है। तब खुले समुच्चय $\in$-गेंदों $\{N_\in(x) : x \in S]$ S का खुला आवरण बनाता है। सघनता द्वारा, एक सीमित उपआवरण विद्यमान है। अर्थात, वहाँ बिंदु $x_0, ...x_n$ जैसे कि आवश्यक है।

$$S = \bigcup_{0 \le i \le n} N_\in(x)$$

अब मान लें कि (S, d) पूर्ण और पूरी तरह से बाध्य है, हम यह दर्शाएंगे कि (S, d) क्रमिक रूप से सघन है। यह सिद्ध होगा कि (S, d) वास्तव में सघन है क्योंकि अनुक्रमिक रूप से सघन दूरीक समष्टि (Compact Metric Space) भी सघन है।

हम पहले दावा करते हैं कि कुल परिबद्धता (Total Boundedness) का तात्पर्य निम्नलिखित है:

टिप्पणी

यदि (a_k), S में कोई अनुक्रम है और $\in > 0$ तो वहाँ किसी भी $x \in S$ है इस तरह से अनंत रूप से कई n के लिए $d(a_k, x) \leq \in$ है।

वास्तव में, माना $x_0, ..., x_n$ कुल परिबद्ध की परिभाषा के रूप में हो। तो प्रत्येक k के लिए, यहाँ कुछ है $j_k \in \{0, ..., n\}$ इस तरह से $d\left(a_k, x_{jk}\right) \leq \in$, कुछ j के लिए, हमारे पास $j_k = j$ होना चाहिए अनंत रूप से कई k के लिए, और दावे के अनुसार $x :$ $= x_{k_k}$ होता है। अब माना (a_k) में एक विवेकाधीन (Arbitrary Sequence) अनुक्रम है। दावे (Claim) के अनुसार, कुछ $x_1 \in S$ है, इस तरह से $d\left(a_k, x\right) \leq \frac{1}{2}$ अनंत रूप से कई k के लिये।

अब हम (a_k) के बाद के दावे का प्रयोग कर सकते हैं उन अवयवों से मिलकर जिनके लिए $d\left(a_k, x\right) \leq \frac{1}{2}, x_2 \in S$ सिद्ध करने के लिए कि अनंत रूप से कई k दोनों $d(a_k, x) \leq 1/4$ और $d(a_k, x) \leq 1/2$, को संतुष्ट करता है।

अब हम विवेचनात्मक रूप से आगे बढ़ते हैं, स्वभाव के साथ एक अनुक्रम (x_m) प्राप्त करने के लिए जिसमें अनंत रूप से कई k उपस्थित हों, जैसे कि $1 \leq j \leq m$:

$$d\left(a_k, x_j\right) \leq 2^{-j} \qquad ....(4.1)$$

अब k_0 को विवेकाधीन मानकर एक अनुवर्ती (a_{k_m}) को एक प्रेरक रूप से परिभाषित करें, और चुने k_{m+1} न्यूनतम है। इस तरह से $k_{m+1} > k_m$ तथा ऐसा है कि (4.1) $k = k_m$ के लिए और सभी के लिए $1 \leq j \leq m$ होते हैं।

हम दावा करते हैं कि यह काउची एक अनुक्रम है। वास्तव में, $\in > 0$ और n को पर्याप्त रूप से बड़ा चुनें कि $1/2^{n-1} < \in$ हो तब

$$d\left(a_{k_j}, a_{k_i}\right) \leq d\left(a_{k_j}, x_n\right) + d\left(a_{k_j}, x_n\right) \leq 2.2^{-n} < \in$$

जब कभी, $j, j' \leq n$ हैं, क्योंकि (S, d) धारणा से सघन है, हम देखते हैं कि (a_k) के रूप में एक अभिसरणीय आवश्यकता है।

प्रमेय 4.7: दूरीक समष्टि का प्रत्येक उपसमुच्चय पूर्ण रूप से परिबद्ध होता है।

प्रमाण : माना कि के दूरीक समष्टि का पूरी तरह से बँधा हुआ उपसमुच्चय है। माना $x, y \in K$ हम दर्शाएंगे कि $M > 0$ उपस्थित है जैसे कि किसी भी x, y के लिए हमारे पास $d(x - y) < M$ है।

पूरी तरह से बंधी हुई परिभाषा से, हम एक $\in > 0$ और एक परिमित उपसमुच्चय प्राप्त कर सकते हैं। $\{x_1, x_2 ..., x_n\}$ k का इस तरह से $K \subseteq = \bigcup_{nk=1B(xk,\in)}$,

अतः $x \in B(xl - l)$, $y \in B(xl, \in)$, $i, l \in \{1, 2, .., n\}$ तो हमारे पास वह है

$d(x - y) \leq < d(x, xi) + d(xi, xl) + d(xi, y)$

$\in + \max 1 \leq_{s-t} \leq nd(xs, xt) + \in = M$ है।

परिमित प्रतिच्छेदन गुण (Finite Intersection Property)

यदि प्रत्येक परिमित उपसमूह में एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन होता है तो समुच्चय C के समूह के पास परिमित प्रतिच्छेदन गुण होता है।

1. सांस्थितिक समष्टि X सुसंबद्ध है, यदि और केवल तभी जब परिमित प्रतिच्छेदन गुण के बंद उपसमूहों के प्रत्येक समूह में एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन होता है।
2. मान लीजिए कि X सघन है। यह दिखाने के लिए कि परिमित प्रतिच्छेदन की गुण के साथ बंद उपसमुच्चय के प्रत्येक समूह के पास एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन है, हम किसी भी समूह को बंद उपसमुच्चय का C मानते हैं, $\cap C = \theta$ के साथ और दिखाओ कि वहाँ एक परिमित उपसमूह $(C_i)_{i=1}^{n} \subset c$ मौजूद है, इस तरह से $(C_i)_{i=1}^{n} CC$ जो ये दर्शाता है $\cap_{i=1}^{n} C_i = \theta.$
3. मान लें कि परिमित प्रतिच्छेदन की गुण के साथ हर समूह के बंद उपसमुच्चय में एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन है। यह दिखाने के लिए कि X सघन है, हम सिर्फ ऊपर दिए गए तर्क को परिवर्तित कर देते हैं।
4. मान लीजिए कि u, X का खुला आवरण है। फिर $\cup u = X$ का तात्पर्य $\bigcap_{C \in u}(X/U) = X \backslash \bigcup_{C \in u} U = X \setminus \cup u = \theta$ लेकिन चूंकि प्रत्येक $X \setminus U$ बंद है, वहाँ एक परिमित उपसमूह (Finite Family) होना चाहिए $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subset u$ इस तरह से $X \backslash \bigcup_{i-1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X \backslash U_i) = \theta$ अन्यथा $\{X \backslash U\}_{U \varepsilon u}$ परिमित प्रतिच्छेदन गुण है लेकिन $\bigcap_{U \in u}(X \backslash U) \neq \theta$ इसलिए, $\bigcup_{i-1}^{n} U_i = X$.
5. माना $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ सघन उपसमुच्चय का एक अनुक्रम है इस तरह से $C_{i+1} \subset C_i$ के लिये $i = 1, 2, ...$ है, तो $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \theta$

पूर्व प्रस्ताव से तुरंत पालन करते हैं।

परिबद्धता (Boundedness)

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है। A उपसमुच्चय एक X के लिए यदि कुछ $K > 0$ के लिए परिबद्ध है, वहां पर $x \in X$ है इस तरह से $A \subset N_K(x)$ है।

1. यदि उपसमुच्चय A, X से पूर्ण रूप से परिबद्ध है यदि सभी के लिए $\in > 0$ है, वहाँ परिमित समुच्चय $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ इसी प्रकार $A \subset U_{i=1}^{n} N_{\in}(x_i)$ है।

   यदि A पूर्ण रूप से परिबद्ध है, तो A सीमित है।
2. मान लीजिए कि A पूरी तरह से परिबद्ध है। फिर एक परिमित समूह $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ है इस तरह से $A \subset \cup_{i=1}^{n} N_1(x_i)$. कोई भी $x \, \varepsilon \, X$ चुनें और यदि

$K = \max \{d(x, x_i) : i,..., n\}$ अब किसी भी $z \varepsilon A$ पर विचार करें। फिर कुछ j के लिए $z \varepsilon N_1(x_j)$ है। इसलिये $d(z, r) \le d(z, x_j) + d(x_j, z) < K + 1$, जिसका तात्पर्य $A \subset N_{K+1}(x)$ है।

टिप्पणी

इस कथन के विपरीत यह जरूरी नहीं कि यह सच है:

1. यदि $A \subset R^n$ परिबद्ध है, तब A पूरी तरह से सीमित है।
2. $x, y \in [0,1]^\infty$ के लिये परिभाषा $d(x, y) = \sup_{i\in N} \{|x_i, y_i|\}$. तो $([0,1]^\infty, d)$ पूरी तरह से परिबद्ध नहीं है।
3. प्रमाण एक अभ्यास के रूप में छोड़ दिया।
4. यदि C सघन है, तो C पूरी तरह से परिबद्ध है और इसलिए यह सीमित है।
5. मान लीजिए कि C सघन है। $\varepsilon > 0$ नियत है, और खुले आवरण $\{N_\in(x)\}_{x\in C}$ पर विचार करें फिर $C \subset \cup_{x\in x} N_\in(x)$ का तात्पर्य एक परिमित समुच्चय $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ इस तरह से $C \subset \cup_{x\varepsilon x} N_\in(x)$ इसलिए C पूरी तरह से घिरा है।

अनुक्रमिक सघनता (Sequential Compactness)

प्रमेय 4.8: एक सघन दूरीक समष्टि क्रमिक रूप से सघन है।

प्रमाण : माना एक सघन दूरीक समष्टि में एक अनंत समूह X है। यह साबित करने के लिए कि A का एक सीमा बिंदु है, हमें एक बिंदु p प्राप्त होगा जिसके लिए p के प्रत्येक खुले समीपवर्ती में अनंत रूप से A के कई बिंदु हों। तो x के हर बिंदु के पास एक खुला समीपवर्ती है जिसमें केवल A के बहुत से परिमित बिंदु हैं। ये समूह X का एक खुला आवरण बनाते हैं और एक परिमित खुला (Finite Open) आवरण निकालने से X, A का आवरण केवल कुछ ही बिंदु में मिलता है। यह असंभव है क्योंकि $A \subset X$ और A अनंत है।

उपप्रमेय : सघन दूरीक समष्टि में प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम (Bounded Sequence) में एक अभिसरण उपअनुक्रम (Sub-Sequence) होता है।

प्रमाण : उपरोक्त सीमा बिंदु (Limit Point) p को देखते हुए, x_{i1} को p के समीपवर्ती-1 में ले जाएँ x_{i2}, p के 1/2 समीपवर्ती में होगा p,...... और हमें p को परिवर्तित करने वाला उपअनुक्रम मिलता है।

हेइन–बोरेल प्रमेय (Heine-Borel Theorem) के साथ, यह बोल्जानो–वीयरस्ट्रैस (Balzano-Weierstrass) प्रमेय का अर्थ है।

सघनता बनाम अनुक्रमिक सघनता

K सघन है यदि K के प्रत्येक खुले आवरण में एक परिमित उपआवरण है। K अनुक्रमिक रूप से सघन होता है अगर k के प्रत्येक अनंत उपसमुच्चय में k कोई सीमा बिंदु होता है।

प्रमेय 4.9: K सघन है, $\Leftrightarrow$ K क्रमिक रूप से सघन है।

प्रमाण के लिए दो सहायक धारणाओं की आवश्यकता होती है,

समष्टि X पृथक्करणीय है यदि यह गणनीय सघन उपसमुच्चय को मानते हैं।

X के खुले उपसमुच्चय का एक संग्रह $\{V_a\}$ को X के लिए एक आधार कहा जाता है यदि निम्न सत्य है: प्रत्येक के लिये $x \in X$ और हर खुले समूह के लिए $G \subset X$ इस तरह से $x \in G$, इस तरह से वहाँ उपस्थित है।

$x \in V_\alpha \subset G$

दूसरे शब्दों में, X का प्रत्येक खुला उपसमुच्चय V_α's – के – V_α's के उत्पन्न के सभी खुले उपसमुच्चय के एक संघटन के रूप में वियोजित (Decomposes) होता है। समूह $\{V_\alpha\}$ में लगभग हमेशा अनंत रूप से कई अवयव होते हैं (एकमात्र अपवाद यदि X परिमित है)। तथापि, यदि X अलग होने योग्य है, तो निश्चित रूप से कई खुले उपसमुच्चय एक आधार बनाने के लिए पर्याप्त हैं (विवेचना कथन भी सत्य है और एक आसान अभ्यास है)।

लैमा 1: प्रत्येक वियोज्य दूरीक समष्टि (Metric Space) का एक गणनीय आधार है।

प्रमाण : माना कि X वियोज्य (Separable) है, परिभाषा के अनुसार इसमें एक गणनीय सघन उपसमुच्चय है, $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$, समीपवर्ती के गणना योग्य संग्रह पर विचार करें $\{N_r(x), r \in Q, i = 1, 2, \ldots\}$ हम देखते हैं कि यह परिभाषा की जाँच करने के लिए एक आधार है।

किसी भी खुले समूह $G \subset X$ और किसी भी बिंदु $x \subset G$ पर विचार करें, चूंकि G खुला है, वहां उपस्थित $r > 0$ है, इस तरह से $N_r(x) \subset G$, r को कम करना यदि आवश्यक हो तो हम सामान्यता की हानि के बिना मान सकते हैं कि r परिमेय है। चूंकि P सघन है, परिभाषा के द्वारा x, p की एक सीमा बिंदु है, इसलिए $N_{r/2}(x)$ P का एक बिंदु होता है। इसलिए वहाँ i मौजूद है इस तरह से $d(x, p_i) < \dfrac{r}{2}$ चूंकि r तर्कसंगत है, समीपवर्ती $N_{r/2}(p_i)$ चुने हुए संग्रह के अंतर्गत आता है। इसके अलावा, $N_{r/2}(p_i) \subset N_r(x)$ $\subset G$ अंततः में, चूँकि हमारे पास $d(x, p_i) < \dfrac{r}{2}$ भी है $x \in N_{r/2}(p_i)$ तो चुना संग्रह x के लिए एक आधार है।

लैमा 2: यदि X क्रमिक रूप से सघन है तब यह वियोज्य (Separable) है।

प्रमाण : नियत $\delta > 0$ और माना $x_1 \in X$ चुनें $x_2 \in X$ इस तरह से $d(x_1, x_2) > \delta$, अगर संभव हो तो। चुना हुआ $x_1, \ldots, x_j$, चुनें x_{j+i} (अगर संभव हो तो) इस तरह से $d(x_i, x_{j+i}) > \delta$ सबके लिए $i = 1, \ldots, j$. हम पहले देखते हैं कि इस प्रक्रिया को परिमित संख्या के बाद रुकना होगा। फिर से, अन्यथा हम कम से कम δ पारस्परिक रूप से दूर अंक x_i के अनंत अनुक्रम प्राप्त करेंगे; चूंकि X क्रमिक रूप से अनंत उपसमूह $\{x_i, i = 1,2,\ldots\}$ को संकुचित करता है, एक सीमा बिंदु y को स्वीकार करेगा, और समीपवर्ती $N_{\delta/2}(y)$ इसमें x_i's, के अनंत रूप से कई शामिल होंगे, इस तथ्य को जिक्र करते हुए कि उनमें से कोई भी दो कम से कम d से दूर हैं। इसलिए पुनरावृत्तियों की एक सीमित संख्या के बाद हम प्राप्त करते हैं $x_1, \ldots, x_j$ इस तरह से $N_\delta(x_1) \cup \ldots N_\delta(x_j) = X$ (X का प्रत्येक बिंदु $< \delta$ दूरी पर है एक से x_i's का है।)

टिप्पणी

अब हम इस निर्माण को $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ के लिए मानते हैं। $n = 1$ के लिये निर्माण अंक (Construction Point) $x_{11}, ..., x_{1j1}$ देता है, इस तरह से $N_1(x_{11}) \cup ...... \cup N_1(x_{1j1}) = X$, $n = 2$ के लिए $x_{21}, . ., x_{2j2}$ हमें मिला, इस तरह से $N_{1/2}(x_{21} \cup ... \cup N_{1/2}(x_{2j2}) X$, इत्यादि। माना $S = \{x_{ki}, k \geq 1, 1 \leq i \leq jk\}$ स्पष्ट रूप से S गणना योग्य है, हम दावा करते हैं कि S सघन है (अर्थात $\bar{S} = X$)। वास्तव में, यदि $x \in X$ और $r > 0$ के आस–पास $N_r(x)$ हमेशा कम से कम S का एक बिंदु होता है, (n को चुना ताकि $\frac{1}{n} < r$, में से एक x_{ni}'s r से कम दूरी पर है x से), तो X का प्रत्येक बिंदु या तो S से संबंधित है या S का एक सीमा बिंदु है, अर्थात $\bar{S} = X$ इस बिंदु पर हम जानते हैं कि प्रत्येक अनुक्रमिक रूप से सघन समुच्चय का एक गणना योग्य आधार होता है। अब हम दिखाते हैं कि यह किसी भी खुले आवरण के गणना उपआवरण को प्राप्त करने के लिए पर्याप्त है।

लैमा 3: यदि X का गणनीय आधार (Countable Base) है, तो x के प्रत्येक खुले आवरण में सर्वाधिक गणनीय उपआवरण माना जाता है।

लैमा 4: यदि $\{F_n\}$ एक अनुक्रमिक रूप से सघन समुच्चय κ के गैर–रिक्त बंद उपसमुच्चय का अनुक्रम है, इस तरह से $F_n \supset F_{n+1}$ के लिये $n = 1, 2, ...,$ तो $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \theta$ है।

प्रमाण: प्रत्येक पूर्णांक n के लिए $x_n \in F_n$ लें, और $E = \{x_n, n = 1, 2, ... \}$ दें। यदि E परिमित है, तो एक x_i अनंत रूप से कई F_n's से संबंधित है। चूंकि $F_1 \supset F_2 \supset ....$, इसका मतलब है कि x_i प्रत्येक F_n, से संबंधित है, और हमें ये मिलता है कि $y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ रिक्त नहीं है।

अब मान लें कि E अनंत है। चूंकि k अनुक्रमिक रूप से सघन (Compact) है, E में सीमा बिंदु y है, n का मान ठीक करें: Y के प्रत्येक समीपवर्ती में E के अनंत बिंदु होते हैं; उनमें से हम एक को ढूँढ सकते हैं जो कि $i > n$ के लिए Xi से और इसलिए F_n का है (क्योंकि $x_i \in F_i \subset F_n$)। चूंकि y के प्रत्येक समीपवर्ती में F_n का एक बिंदु होता है, हम प्राप्त करते हैं कि या तो $y \in F_n$, या F_n की एक सीमा बिंदु है; तथापि, चूंकि F_n बंद है, F_n की प्रत्येक सीमा बिंदु F_n से संबंधित है। तो दोनों ही स्थितियों में हम निष्कर्ष $y \in F_n$ निकालते हैं, चूंकि यह प्रत्येक n के लिए है, हम $y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ प्राप्त करते हैं, जो सिद्ध करता है कि प्रतिच्छेदन रिक्त (Intersection Empty) नहीं है।

हम अब प्रमेय सिद्ध कर सकते हैं। मान लें कि K अनुक्रमिक रूप से सघन है, और $\{G_\alpha\}, K$ का खुला आवरण हो। लैमा 1 और लैमा 2 के द्वारा, K का एक गणनीय आधार (Countable Base) है, इसलिए लैमा 3 $\{G_\alpha\}$ द्वारा सबसे अधिक गिनती करने योग्य उपकेंद्र पर स्वीकार किया जाता है कि हम $\{G_i\}_{i \geq 1}$ को निरूपित करेंगे। हमारा उद्देश्य यह दिखाना है कि $\{G_i\}$ एक परिमित उपकेंद्र स्वीकार करता है (जो $\{G_\alpha\}$ का परिमित उपकेंद्र भी होगा। इसलिए मान लें कि अनंत रूप से कई $G_i s$ हैं, और मान लें

कि n के प्रत्येक मान के लिए, हमारे पास $G_1 \cup ..... \cup G_n \not\subset K$ है (और हमने एक परिमित उपकेंद्र पाया है)।

माना $F_n = \{x \in K, x \in G_1 \cup ..... \cup G_n\} = K \cap G_n^c \cap .... \cap G_n^c$ क्योंकि G_i खुली है, F_n बंद है; धारणा द्वारा F_n गैर–रिक्त (Non Empty) है; और स्पष्ट रूप से सभी n के लिए $F_n \supset F_{n+1}$। इसलिए, लैमा 4 का प्रयोग करने से हमें $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \theta$ प्राप्त होता है, एक बिंदु $y \in K$ मौजूद है इस तरह से $y \notin G_1 \cup ..... \cup G_n$ प्रत्येक n के लिए। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $y \notin \cup_{i=1}^{n} G_i$, जो एक विरोधाभास है क्योंकि खुले समूह में G_i के आवरण K है।

इसलिए n का मान उपस्थित है जैसे $G_1,..., G_n$ आवरण K। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि K का प्रत्येक खुला आवरण एक परिमित उपकेंद्र को स्वीकार करता है, और इसलिए कि K सघन है।

4.6 पूर्णतः परिबद्ध समष्टि

परिभाषा का सामान्य तार्किक रूप है कि : स्पेस X का एक उपसमुच्चय S पूर्णतः परिबद्ध समुच्चय है, यदि और केवल यदि दिये गये किसी आकार E के लिए, वहाँ एक प्राकृतिक संख्या n तथा X के उपसमुच्चय का परिवार $A_1, A_2, ... A_n$ विद्यमान है, इस प्रकार की S परिवार के संघ में निहित है (अन्य शब्दों में, परिवार S का निश्चित आवरण है) तथा इसी प्रकार कि परिवार में प्रत्येक समुच्चय Ai का आकार E (या कम) है। गणितीय प्रतीकों के रूप में :

समष्टि X एक पूर्ण परिबद्ध विस्तार है, यदि और केवल तभी जब यह स्वयं का एक उपसमुच्य माना जाता है।

एक दूरीक समष्टि (Metric Space) X का एक उपसमूह S पूरी तरह से परिबद्ध (Bounded) है यदि और केवल यदि, किसी भी धनात्मक वास्तविक नंबर E को दिया जाए, तो X के उपसमुच्चय (Subset) के S का एक परिमित आवरण मौजूद होता है, जिसके व्यास E से कम होते हैं। (दूसरे शब्दों में, यहां एक 'आकार' धनात्मक वास्तविक संख्या है, और यदि इसका व्यास E से कम है तो एक उपसमुच्चय आकार E है), समतुल्य रूप में, S पूरी तरह से परिबद्ध है यदि और केवल यदि, पहले की तरह कोई E दिया गया हो, वहाँ अवयव $a_1, a_2,..., a_n$ मौजूद हैं, X में से एक ऐसा है जो a_t बिंदुओं के चारों ओर त्रिज्या E के खुले बॉल्स (Balls) गेंदों के संघ में निहित है।

एक सांस्थितिक सदिश विस्तार का एक उपसमुच्चय S, या अधिक सामान्य तौर पर सांस्थितिक एबेलियन समूह (Topological Abelian Group), x पूरी तरह से बँधा हुआ है अगर और केवल अगर, पहचान के किसी भी समीपवर्ती E (शून्य) तत्व को देखते हुए, X के उपसमुच्चय द्वारा S का एक परिमित आवरण मौजूद है। जिनमें से प्रत्येक E का उपसमुच्चय का अनुवाद है। (दूसरे शब्दों में, एक 'आकार' यहाँ तत्समक अवयव का समीपवर्ती है, और एक उपसमूह E का आकार है यदि यह E के उपसमुच्चय का अनुवाद है) समतुल्य रूप से, S पूरी तरह से बद्ध है यदि और केवल यदि, पहले की तरह

कोई E दिया गया हो, वहाँ अवयव $a_1, a_2,..., a_n$ का x मौजूद हैं, इस तरह से S, बिंदु के द्वारा E के n अनुवादों के मिलन में निहित है।

टिप्पणी

एक संस्थानिक (Topological) समूह X यदि पूर्ण रूप से परिबद्ध (Bounded) है और केवल तभी इसे बाएं अनुवाद का उपयोग करते हुए संस्थानिक एबेलियन समूहों (Topological Abelian Group) की परिभाषा को संतुष्ट करता है। अर्थात $E + a_i$ के विस्तार पर $a_i E$ का उपयोग करें। वैकल्पिक रूप से, X सही तरह से परिबद्ध (Bounded) है यदि और केवल तभी यह सही अनुवाद का उपयोग करते हुए संस्थानिक एबेलियन समूहों की परिभाषा को संतुष्ट करता है।

अर्थात $E + a_i$ के स्थान पर Ea_i का उपयोग करें। (दूसरे शब्दों में, यहाँ एक 'आकार' स्पष्ट रूप से तत्समक अवयव का समीपवर्ती है, लेकिन दो धारणाएँ हैं कि क्या एक समुच्चय किसी दिए गए आकार का है] बाएँ अनुवाद के आधार पर एक बाईं धारणा और सही अनुवाद के आधार पर एक सही धारणा है।)

उपर्युक्त परिभाषाओं को सामान्य करते हुए, एक समान विस्तार X का एक उपसमुच्चय S पूरी तरह से परिबद्ध है यदि और केवल यदि, X में किसी भी प्रतिवेश (Entourage) E को दिया जाए, तो X के उपसमुच्चय द्वारा S का एक परिमित आवरण मौजूद है, जिसके प्रत्येक कार्टेशियन वर्ग (Cartesian Squares) E का एक उपसमूह है। (दूसरे शब्दों में, एक 'आकार' यहाँ एक प्रतिवेश है, और एक उपसमुच्चय E का है यदि इसका कार्टेशियन वर्ग E का उपसमूह है।) समान रूप से, S पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल यदि, किसी E को पहले की तरह दिया गया हो, तो मौजूद उपसमुच्चय $A_1, A_2,..., A_n$ ..., X में से एक ऐसे S, A_i के संघ में समाहित है और, जब भी X के X और Y दोनों अवयव (Element) समान समुच्चय A_i, पर होते हैं, तब (x, y) E से संबंधित होता है (ताकि x और y, E द्वारा मापे गए E करीब हों)।

नीचे वर्णित पूर्वसहतता गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए, सघनता संघ एवं काउची समापन के साथ, किसी भी वर्ग के सोसों के लिए, परिभाषा में अभी और वृद्धि की जा सकती है।

कोई भी पूर्णतः परिबद्ध समष्टि को सीधे परिभाषित कर सकता है, और फिर एक समुच्चय को पूरी तरह से बंधे होने के लिए परिभाषित कर सकता है यदि और केवल यदि यह पूरी तरह से बंधे हो तो उप–समष्टि के रूप में माना जाता है। पूरी तरह से बंधी हुई जगह एक ऐसा समष्टि है जिसे किसी भी निश्चित 'आकार के कई उपसमुच्चय (जहां आकार का अर्थ दिए गए संदर्भ पर निर्भर करता है) द्वारा बंद किया जा सकता है। आकार जितना छोटा होता है, उतने ही अधिक उपसमुच्चयों की आवश्यकता हो सकती है, लेकिन किसी भी विशिष्ट आकार के लिए केवल बहुत से उपसमुच्चय की आवश्यकता होती है। एक संबंधित धारणा पूरी तरह से बंधे हुए समुच्चय है, जिसमें केवल विस्तार के उपसमुच्चय को आवरण (Cover) करने की आवश्यकता है। एक पूर्णतः परिबद्ध समष्टि का हर उपसमूह एक पूरी तरह से बंधा हुआ समुच्चय है, लेकिन यहाँ तक कि अगर एक जगह पूरी तरह से बाध्य नहीं है, फिर भी इसके कुछ उपसमुच्चय होंगे। पूर्वसंहत (या पूर्व–निहित) शब्द का उपयोग भी इसी अर्थ के साथ

टिप्पणी

किया जाता है, लेकिन इस शब्द का उपयोग अपेक्षाकृत सीमित होने के लिए भी किया जाता है।

परिभाषा का सामान्य तार्किक रूप है, एक समष्टि X का एक उपसमुच्चय S एक पूरी तरह से सीमाबद्ध समुच्चय है यदि और केवल यदि, किसी भी आकार E को देखते हुए, एक प्राकृतिक संख्या n और एक समूह उपस्थित है, $A_1A_2,......\ A_n$, X के उपसमुच्चय, जैसे कि S समूह के संघ में निहित है (दूसरे शब्दों में, परिवार S का 'परिमित आवरण' है), और ऐसे परिवार में प्रत्येक समुच्चय A_i का आकार E (या उससे कम) है)। गणितीय प्रतीकों में सभी $\{E\}$ के लिए; समष्टि X एक पूरी तरह से सीमाबद्ध समष्टि है अगर और केवल अगर यह एक पूरी तरह से बँधा हुआ समुच्चय है जब स्वयं का उपसमुच्चय माना जाता है। (एक व्यक्ति पूरी तरह से बंधे हुए स्थान को सीधे परिभाषित कर सकता है, और फिर एक समुच्चय को पूरी तरह से बाध्य करने के लिए परिभाषित कर सकता है यदि और केवल अगर यह पूरी तरह से बंधे हो तो उप–समष्टि माना जाता है।)

यहां 'समष्टि' और 'आकार' शब्द अस्पष्ट हैं, और उन्हें विभिन्न तरीकों से सटीक बनाया जा सकता है। एक उपसमुच्चय S जो कि एक दूरीक समष्टि X पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल यदि, किसी भी धनात्मक वास्तविक संख्या E को दिया जाए, तो X के उपसमुच्चय के द्वारा S का एक परिमित आवरण मौजूद है जिसके व्यास E से कम हैं। (दूसरे शब्दों में, यहां एक 'आकार' एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, और एक उप–आकार E का है यदि इसका व्यास E से कम है) तो समान रूप से, एस पूरी तरह से परिबद्ध अवयव है अगर और केवल अगर, पहले से कोई E दिया जाता है, तो मौजूद अवयव $a_1, a_2, ...\ a_n$ का X ऐसा है कि S, अंक a_i त्रिज्या E के n खुली बॉल्स के संघात में समाहित है।

एक उपसमुच्चय S जो कि एक संस्थानिक सदिश समष्टि (Topological Vector Spaces) या अधिक आम तौर पर संस्थानिक एबेलियन समूह (Topological Abelian Group) X पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल यदि, किसी भी तत्समक के (शून्य) अवयव के समीपवर्ती E को देखते हुए, X के प्रत्येक के उपसमुच्चय द्वारा S का एक परिमित आवरण मौजूद है। जो E के उपसमुच्चय का अनुवाद है। (दूसरे शब्दों में, एक 'आकार' यहाँ तत्समक अवयव का समीपवर्ती है, और एक उपसमूह E का आकार है यदि यह E के उपसमूह का अनुवाद है)। समान रूप से, S पूरी तरह से सीमाबद्ध है यदि और केवल यदि, पहले की तरह कोई भी E दिया गया है, तो इसमें मौजूद अवयव $a_1,a_2,....\ a_n$ का X मौजूद हैं, जैसे कि S, E के n अनुवादों के संघ a_i में मौजूद है।

एक सांस्थानिक समूह X 'वाम'–पूर्वतः बाह्य है यदि और केवल यदि वह 'वाम' अनुवाद का प्रयोग करते हुए, ऊपर वर्णित टोपोलॉजिकल एबेलियन समूहों की परिभाषा को संतुष्ट करता है। अर्थात् a, E के स्थान पर $E+ai$ का प्रयोग करें। वैकल्पिक रूप से, X 'दायाँ'–पूर्णतः बाध्य है, यदि और केवल यदि यह दाएँ अनुवाद का प्रयोग करते हुए टोपोलॉजिकल एबेलियन समूहों की परिभाषा को संतुष्ट करता है। अर्थात् $E + ai$ के स्थान पर Eai का प्रयोग करें। (दूसरे शब्दों में, एक 'आकार' यहाँ स्पष्ट रूप से समरूप अवयव का समीपत्व है, लेकिन वहाँ दो धारणाएं हैं, कौन–सा समुच्चय दिये गए

आकार का है : बायीं धारणा, बाएं अनुवाद पर आधारित है और दायीं धारणा, दाएं अनुवाद पर आधारित है।)

टिप्पणी

पूर्ववर्ती परिभाषाओं को सामान्य करते हुए, एक समान समष्टि X का एक उपसमुच्चय S पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल यदि, X में कोई भी प्रतिवेश E दिया जाता है, तो X के उपसमुच्चय द्वारा S का एक परिमित आवरण मौजूद है, जिसके प्रत्येक कार्टेशियन वर्ग E का एक उपसमूह है। (दूसरे शब्दों में, एक 'आकार' यहाँ एक प्रतिवेश है, और एक उपसमुच्चय E का है यदि इसका कार्टेशियन वर्ग E का उपसमूह है।) समान रूप से, S पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल यदि, किसी E को पहले की तरह दिया गया हो, तो मौजूद उपसमुच्चय $A_1, A_2, ..., A_n$, X का S, A के संघ में समाहित है, और, जब भी X के x और y दोनों के अवयव एक ही समुच्चय A से संबंधित होते हैं, तब (x, y) का संबंध होता है E (ताकि x और y, E द्वारा मापे गए संवृत हों)।

परिभाषा को अभी भी आगे बढ़ाया जा सकता है, सघनता और काउची पूरा होने की धारणा के साथ श्रेणी के समष्टि (Category of Spaces) के किसी भी वर्ग के लिए, एक विस्तार पूरी तरह से घिरा हुआ है अगर और केवल अगर इसकी पूर्णता सघन है, उदाहरण के लिए,

- वास्तविक रेखा का एक उपसमुच्चय, या अधिक आम तौर पर (परिमित–आयामी (Finite Dimensional)) यूक्लिडियन समष्टि, पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल अगर यह परिबद्ध है।
- एक हिल्बर्ट समष्टि (Hilbert Spaces) में इकाई गोला, या आमतौर पर एक बनाच (Banach) विस्तार में, पूरी तरह से परिबद्ध होता है यदि और केवल यदि विस्तार में परिमित आयाम हो।
- जब भी अवधारणा को परिभाषित किया जाता है, हर सघन समुच्चय पूरी तरह से बँधा होता है।
- हर पूरी तरह से परिबद्ध दूरीक समष्टि परिबद्ध है। हालाँकि, प्रत्येक बंधी हुई दूरीक समष्टि पूरी तरह से बंधी हुई नहीं है।
- पूर्ण दूरीक समष्टि (Metric Spaces) का एक उपसमुच्चय पूर्णतः परिबद्ध है यदि और केवल यदि यह अपेक्षाकृत सघन है (इसका मतलब है कि इसका बंद होना निहित है)।
- विस्तारीय रूप से उत्तल विस्तार (Convex Space) कमजोर संस्थानिक (Weak Topology) के साथ संपन्न होता है जो पूर्वसंहत समुच्चय बिल्कुल बंधे हुए समुच्चय होते हैं।
- एक दूरीक समष्टि वियोज्य आव्यूह (Separable) है और केवल अगर यह पूरी तरह से बंधे हुए वियोज्य आव्यूह के लिए समरूपक है।
- असतत आव्यूह के साथ एक अनंत दूरीक समष्टि (किसी भी दो अलग–अलग बिंदुओं के बीच की दूरी 1 है) पूरी तरह से बाध्य नहीं है, भले ही यह बाध्य हो।

टिप्पणी

सघनता और पूर्णता के साथ संबंध

कुल सीमाबद्धता और सघनता के बीच एक अच्छा संबंध है, एक समान समष्टि सघन है यदि और केवल यदि यह दोनों पूरी तरह से बाध्य है और काउची पूर्णता है। इसे यूक्लिडियन (Euclidean) विस्तारित से लेकर एक समान विस्तारित तक हेइन–बोरेल प्रमेय के सामान्यीकरण के रूप में देखा जा सकता है, हमें सीमा को कुल सीमाबद्धता के साथ बदलना होगा (और पूर्णता के साथ निकटता को भी बदलना होगा)।

कुल सीमाबद्धता और काउची पूर्णता की प्रक्रिया के बीच एक पूरक संबंध है। एक समान स्थान या समष्टि पूरी तरह से घिरा हुआ है यदि और केवल यदि उसकी काउची पूर्णता पूरी तरह से बाध्य है। (यह इस तथ्य से मेल खाता है कि, यूक्लिडियन समष्टि में, एक समुच्चय को बाध्य किया जाता है यदि और केवल, यदि इसका अन्त सीमाबद्ध हो।)

इन प्रमेयों को मिलाकर, एक समान विस्तार पूरी सीमाबद्ध है यदि और केवल यदि इसका पूरा होना निहित है। इसे कुल सीमाबद्धता की वैकल्पिक परिभाषा के रूप में लिया जा सकता है। वैकल्पिक रूप से, इसे 'पूर्वसंहतता (Precompactness)' की परिभाषा के रूप में लिया जा सकता है, जबकि अभी भी कुल सीमाबद्धता की एक अलग परिभाषा का उपयोग कर रहा है। फिर यह एक प्रमेय बन जाता है कि एक विस्तार पूरी तरह से सीमाबद्ध है यदि और केवल अगर यह पूर्वसंहत (Precompact) है।

4.7 परिमित प्रतिच्छेदन गुण

परिमित प्रतिच्छेदन गुण (Finite Intersection Property), समुच्चय X के उपसमुच्चय के संग्रह की गुण है। संग्रहण में इस गुण का समुच्चय होता है यदि संग्रह के किसी परिमित उपसंग्रह (Sub Collection) का प्रतिच्छेद गैर–रिक्त है। समूहों का एक केन्द्रित प्रणाली परिमित प्रतिच्छेदन गुण के साथ समूहों का एक संग्रह है।

माना X के साथ एक समुच्चय $A = \{A_i\}_{i \in Ia}$ हो x के उपसमुच्चय का एक समुच्चय फिर संग्रह A परिमित प्रतिच्छेदन गुण (FIP) है, अगर कोई परिमित उपसंग्रह (Finite Sub Collection) $J \subset I$ गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन (Non-Empty Intersection) $\bigcap_{i \in J} A_i$ है।

प्रमेय 4.10: माना कि X एक सघन हॉसडॉर्फ समष्टि (Hausdorff Space) है जो उस गुण (Property) को संतुष्ट करता है जो एक बिंदु समुच्चय नहीं है। यदि X में एक से अधिक बिंदु हैं, तब X अगणनीय (Uncountable) है।

यह सिद्ध करने से पूर्व, हम कुछ उदाहरण देते हैं:

(*i*) हम हॉसडॉर्फ की स्थिति को खत्म नहीं कर सकते, असावधानीपूर्ण सांस्थिति के साथ एक गणनीय समुच्चय सुसंबद्ध है, एक से अधिक बिन्दु रखता है, और गुण को संतुष्ट करता है, जिसकी कोई एक बिंदु समुच्चय खुले या संवृत (One Point Sets are Open) नहीं है, लेकिन यह अगणनीय नहीं है।

टिप्पणी

(*ii*) हम सभी परिमेय संख्याओं (Rational Number) के समुच्चय के रूप में सघनता स्थिति को समाप्त नहीं कर सकते।

(*iii*) हम इस पद को समाप्त नहीं कर सकते हैं कि एक बिंदु समुच्चय असतत सांस्थिति (Discrete Topology) दिखाने के रूप में एक परिमित विस्तार के रूप में नहीं खुल सकता है।

प्रमाण : बता दें कि X एक सघन हॉसडॉर्फ समष्टि है। हम दिखाएंगे कि अगर u एक खाली नहीं है, X का खुला उपसमुच्चय और यदि X, X का बिंदु है, उसके बाद U के पास V सम्मिलित है जिसके बंद होने में x नहीं है (x, U में हो सकता है या नहीं भी हो सकता है)। सबसे पहले, x से अलग U में y चुनें (यदि x U में है, तो ऐसे y का अस्तित्व होना चाहिए अन्यथा U एक खुला एक बिंदु समुच्चय होगा, यदि x U में नहीं है, तो यह संभव है क्योंकि U गैर–रिक्त है)। फिर हॉसडॉर्फ स्थिति द्वारा, क्रमशः x और y के असंतुष्ट समीपवर्ती w और k चुनें। तब $(K \cap U)$ U में निहित y के पास होगा, जिसके बंद होने में वांछित x नहीं है।

अब मान लीजिए कि f, Z (धनात्मक पूर्णांक) से X तक का एक विशेषण है। Z के चित्र के बिंदुओं का $\{x_1, x_2, ...\}$ के रूप में निरूपित करें। माना X पहला खुला समुच्चय हो और x में निहित पास में U_1 का चयन करें, जिसका समापन x_1 शामिल नहीं है। दूसरे, U_1 में निहित समीपवर्ती U_2 चुनें, जिनके समापन में x_2 शामिल नहीं है। इस प्रक्रिया को जारी रखें, जिसमें उन लोगों को शामिल किया गया है जो U_{n+1} को U_n में सम्मिलित करते हैं, जिनके बंद होने में x_{n+1} नहीं है। ध्यान दें कि धनात्मक पूर्णांकों में $\{U_i\}$ के लिए धनात्मक पूर्णांकों i में संग्रहण परिमित प्रतिच्छेदन गुण को संतुष्ट करता है और इसलिए उनके बंद का प्रतिच्छेद शून्य है (एक्स की सघनता द्वारा)। इसलिए इस प्रतिच्छेदन में एक बिंदु x है। कोई भी x_i इस प्रतिच्छेदन से संबंधित नहीं हो सकता क्योंकि x_i, U_i के बंद होने से संबंधित नहीं है। इसका मतलब यह है कि x सभी के लिए x_i के बराबर नहीं है और f आच्छादित (Surjective) नहीं एक विरोधाभास है। इसलिए, x अगणनीय है।

उपप्रमेय : 1 प्रत्येक बंद अंतराल $[a, b]$ $(a < b)$ अगणनीय है। इसलिए, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अगणनीय है।

उपप्रमेय : 2 प्रत्येक विस्तारीय रूप से सघन हॉसडॉर्फ समष्टि जो भी पूर्ण है, अगणनीय है।

प्रमाण : मान लीजिए कि X एक विस्तारीय रूप से सघन हॉसडॉर्फ (Hausdorff) समष्टि है जो एकदम सही और सघन है। फिर यह तुरंत अनुसरण करता है कि x अगणनीय (प्रमेय द्वारा) है। यदि X विस्तारीय रूप से सघन हॉसडॉर्फ है, सही समष्टि जो सघन नहीं है, फिर x का एक सूत्रीय संकलन एक सघन हॉसडॉर्फ समष्टि है जो एकदम सही भी है। यह निम्नानुसार है कि x का एक बिंदु संकलन अगणनीय है। इसलिए x अगणनीय है (एक अगणनीय समुच्चय से किसी बिंदु को हटाना अभी भी उस समुच्चय की अस्थिरता को बरकरार रखता है)।

टिप्पणी

समुच्चय X के उपसमुच्चय के संग्रह $A\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ को परिमित प्रतिच्छेदन गुणों वाला कहा जा सकता है, संक्षेप में *FIP*, यदि A का प्रत्येक परिमित उपसंग्रह $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\bigcup_{ni=1A_i/=\theta}$ को संतुष्ट करता है।

परिमित प्रतिच्छेदन गुण का उपयोग सबसे अधिक बार संस्थानिक समष्टि (यहाँ एक प्रमाण के रूप में पाया जा सकता है) के लिए निम्नलिखित समकक्ष पद देने के लिए किया जाता है।

कथन : एक टोपोलॉजिकल समष्टि X सघन है, यदि और केवल यदि X के बंद उपसमुच्चय के प्रत्येक संग्रह $C = \{C_\alpha\}_{\alpha\in J}$, जो कि परिमित प्रतिच्छेदन गुणधर्म वाला है, के लिए $\bigcup_{\infty=1C_i/=\theta}$।

पूर्ववर्ती का एक महत्वपूर्ण विशेष संदर्भ यह है कि जिसमें C गैर–शून्य स्थिर समूह का एक संग्रहणीय संग्रह है, अर्थात्, जब हमारे पास $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset ....$ इस संदर्भ में, G में स्वचालित रूप से परिमित प्रतिच्छेदन का गुण है, और यदि प्रत्येक एक सघन संस्थानिक समष्टि का बंद उपसमूह है, फिर, प्रस्ताव द्वारा, $\bigcup_{\infty=1C_i/=\theta}$।

सघनता के विलक्षण का प्रयोग कुछ सुसंबद्ध हॉसडोर्फ समष्टि की अगणनीयता पर सामान्य परिणाम को साबित करने के लिए किया जा सकता है, और यह टाइकोनॉफ प्रमेय (Tychonoffs Theorm) के प्रमाण में भी प्रयोग किया जाता है।

प्रमेय 4.11: सांस्थितिक समष्टि, यदि और केवल तभी संस्थित होता है जब परिमित प्रतिच्छेदन गुण वाले इसके बंद समुच्चयों के किसी समुच्चय में रिक्त प्रतिच्छेदन होता है।

पूर्ववर्ती प्रमेय अनिवार्य रूप से डी–मॉर्गन के नियमों (De Morgan Law) का उपयोग करके फिर से लिखे गए सघन समष्टि की परिभाषा है। सघन समष्टि की सामान्य परिभाषा खुला समूह और संगठन पर आधारित होती है। इसकी दूसरी ओर उपरोक्त अभिलक्षण बंद समुच्चयों तथा अंतर्धाराओं के आधार पर लिखा गया है।

प्रमाण : मान लीजिए कि X सघन है, X को आवरण करने वाले खुले उपसमुच्चय के किसी भी संग्रह में एक सीमित संग्रह है जो x को भी आवरण करता है। आगे, मान लीजिए $\{Fi\}_{i\in I}$, परिमित प्रतिच्छेदन के गुण के साथ बंद उपसमुच्चयों का एक विवेकाधीन संग्रह है। हम दावा करते हैं कि $\cap_{i\in I} Fi$ खाली नहीं है।

मान लीजिए, अन्यथा, माना $\cap_{i\in I} Fi = \theta$

तब, $X = \left(\bigcap_{i\in IFi}\right)_c \bigcap_{i\in IFic}$ (यहाँ, एक समुच्चय (Set) A में X के पूरक (Complement) को A_c के रूप में लिखा जाता है) चूंकि प्रत्येक Ft बंद है, संग्रह $\{Fic\}_{i\in I}$, X के लिए एक खुला आवरण है, सघनता द्वारा, परिमित उपसमुच्चय $\subset I$

टिप्पणी

होता है, इस तरह से $X = \cup_{i \in J} Fic$ है, परन्तु फिर $X = \left(\cup_{i \in J} Fi\right)_c$, अतः $\cup_{i \in J} F_i = \theta$, जो अनुक्रम $\{Fi\}_{i \in I}$ के परिमित प्रतिच्छेदन गुण के विपरीत है। दूसरी दिशा में प्रमाण एक ही दिशा में प्रकट होता है। मान लीजिये कि X में परिमित प्रतिच्छेदन गुण है। यह साबित करने के लिए कि X सघन है, माना $\{Fi\}_{i \in I}$, X में खुले समुच्चय का एक संग्रह हो जो X आवरण करता है। हम दावा करते हैं कि इस संग्रह में एक परिमित उपसंग्रह है जो X को भी आवरण करता है। यह सबूत अंतर्विरोध से है। मान लो कि $X/ = \cup_{i \in J} Fi$ सभी परिमित $J \subset I$ के लिये है , आइए हम पहले दिखाते हैं कि बंद उपसमुच्चयों के संग्रह $\{Fic\}_{i \in I}$ में परिमित प्रतिच्छेदन का गुण है। यदि J, I का एक सीमित उपसमुच्चय है, फिर $\bigcap_{i \in J} Fic = \left(\bigcap_{i \in J} Fi\right)_c / = \theta$ जहाँ पूर्व अभिकथन के बाद से J परिमित था। फिर, चूँकि X के पास $\theta / = \bigcap_{i \in J} F_{ic} = \left(\bigcap_{i \in J} F_i\right)_c$ परिमित प्रतिच्छेदन गुण है,

यह इस धारणा का खंडन करता है कि $\{F_i\}_{i \in I}$ X के लिए एक आवरण है।

4.8 निरंतर फलन और सघन समुच्चय, संबद्धता

$D \cup R$ सघन है यदि और केवल यदि किसी भी D के खुले आवरण के लिए हम परिमित अच्छादित को घटा (Subtract) सकते हैं। जो दिया गया है $(G_\alpha)\alpha \in A\ a$, R की खुले उपसमुच्चय का संग्रह सूचकांकों का एक स्वैच्छित समुच्चय) जैसे कि A तब $D \subset \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$, में परिमित रूप से कई सूचकांक मौजूद होते हैं $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ इस प्रकार कि $D \subset \cup_{i=1}^{N} G_{\alpha_1}$.

माना कि D एक स्वैच्छिक उपसमुच्चय है R का। तब ACD, D में खुला है (या D से संबंधित या खुला–D) यदि और केवल यदि वहाँ R का खुला उपसमुच्चय G विद्यमान है, इस प्रकार कि $D = G \cap D$। इसी प्रकार, हम बंद–D समुच्चय की धारणा को प्राप्त कर सकते हैं। ध्यान रखें कि, D, D में खुला और बंद दोनों है, और इसलिए शून्य (o) है।

$D \subset R$ संबद्ध है यदि और केवल यदि θ और D, D के एकमात्र उपसमुच्चय है, जो कि D में बंद एवं खुले दोनों हैं। दूसरे शब्दों में, यदि $D = A \cup B$ तथा A, B असंबद्ध रूप से D के, खुले–D उपसमुच्चय हैं, तब या तो $A = \theta$ या $B = 0$।

माना कि $f : D \to R$ को विवेकाधीन फलन (Arbitrary Function) $D \subseteq R$, a $\in$ D एक निश्चित अवयव है और परिभाषा के अनुसार यदि a पर f निरंतर है तो यह निम्नलिखित गुण को दर्शाता है,

$$\forall \in 0, \exists \delta_a(\in) > 0$$

इस प्रकार $|x - a| < \delta_a(\in) \wedge x \in D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \in$

टिप्पणी

अंतिम निहितार्थ (Last Implication) समुच्चय के संदर्भ में फिर से निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

$$f\left(B_a\left(\delta_a(\in)\right)\cap D\right)\subseteq B_{f(a)}(\in)$$

यहाँ, हम संकेतन $B_x(r) := (x - r, x + r)$ का उपयोग कर सकते हैं।

पूर्व आकृतियों का प्रयोग करते हुए प्राप्त सतत फलनो की विशेषताएं (Characterization of Continuous Functions Using Preimages)

प्रमेय 4.12: माना $D \subseteq R$ और $f : D \to R$ एक फलन है इसके बाद नीचे दिए गए प्रस्ताव समकक्ष हैं।

(1) f सतत है (D पर)।

(2) $\forall G \subseteq R$ खुले या विवृत (Open) है तथा $f^{-1}(G)$, D में खुले या विवृत (Open) है।

(3) $\forall F \subseteq R$ बंद या संवृत (Closed) है तथा $f^{-1}(F), D$ में संवृत या बंद (Closed) है।

प्रमाण : $a \Rightarrow b$। माना $G \subset R$ खुला है। $a \in f^{-1}(G)$ लेने पर। तब $f(a) \in G$, और चूंकि G खुला है, वहाँ निश्चित रूप से $\varepsilon > 0$ विद्यमान होना चाहिए, इस प्रकार कि $B_{f(a)}(\in)\subseteq G$ । सातत्यता के द्वारा, इस $\varepsilon > 0$ के संगत वहां $\delta > 0$ विद्यमान है, इस प्रकार कि $f\left(B_a(\delta)\cap D\right)\subset B_{f(a)}(\in)$ । लेकिन यह $f^{-1}(G)$ के अंदर संपूर्ण समुच्चय $B_a(\delta)\cap D$ को स्थापित करता है :

जैसे– $B_a(\delta)\cap D\subseteq f^{-1}(G)$

a पर δ और $a \in f^{-1}(G)$ को परिवर्तन करते हुए, निर्भरता को चिह्नित करने के लिए अब हम $\delta = \delta_a$ लिखते हैं, तो हमें निम्न प्राप्त होता हैं,

$$f^{-1}(G)=\left(\cup_{a\in f^{-1}(G)}B_a(\delta_a)\right)\cap D$$

जो दर्शाता है कि $f^{-1}(G), D$ में खुला है।

$b \Leftrightarrow c$ माना $F \subseteq R$ एक बंद समुच्चय है, जो कहता है $G = CF$ (R में पूरक) खुला है।

तब,

$$f^{-1}(F)=\left\{x\in D\mid f(x)\in F\right\}=\left\{x\in D\mid f(x)\notin G\right\}=D-f^{-1}(G)$$

चूँकि खुले D के उपसमुच्चय का पूरक D में बंद है, इसका अर्थ है कि $f^{-1}(F), D$ में बंद है और यदि और केवल यदि $c \Rightarrow a$: $f^{-1}(G), D$ में खुला है।

गुणधर्म के प्रयोग से हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि संतत फलनों की संरचना एक सतत फलन (Continuous Function) है।

प्रस्ताव (Proposition) माना $f: D \to R$ सतत है, $g: E \to R$, और $f(D) \subseteq E$ भी सतत है। तब फलन $h := g \circ f: D \to M$, $h(x) = g(f(x))$ द्वारा परिभाषित किया गया है, जो सतत है।

प्रमाणः माना कि $G \subseteq R$ खुला समुच्चय (Open Set) है फिर $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G)$ लेकिन $g^{-1}(G) = V \cap E$, के लिए $V \subseteq R$ है, कुछ खुले समुच्चय है, लेकिन फिर $h^{-1}(G) = f^{-1}(V \cap E) - f^{-1}(V)$, D में खुला है, इसलिए यहां h सतत है।

उदाहरण 4.3: माना $f: D \to R$ एक सतत फलन है, जैसे कि $f(x) \neq 0$, $\forall x \in D$ तब $h: D \to R$ द्वारा $h(x) = 1/f(x)$ दिया जाता है, जो सतत है।

प्रमाणः $: R - \{0\} \to R\ g(x) = 1/x$ जो सतत है, $f(D) \subseteq R - \{0\}$, इसलिए $h = g \circ f$ सतत है।

सतत फलन के सामान्य गुण (General Properties of Continuous Function)

प्रमेय 4.13: एक सतत फलन समुच्चय सघन समुच्चय का प्रतिचित्रण करता है।

प्रमाणः दूसरे शब्दों में, मान लें कि $f: D \to R$ सतत है और D सघन है, फिर हमें यह सिद्ध करने की आवश्यकता है कि प्रतिबिंब $f(D)$, R का एक उपसमुच्चय है। उसके लिए, हम $f(D)$ का एक स्वैच्छित खुला आवरण $f(D) \subseteq \cup_\alpha G_\alpha$ पर विचार करें और हम निम्न उपश्रेणी ज्ञात करने का प्रयास करेंगे। हमारे पास $D \subseteq \cup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$ पूर्व की प्रतिबिंब है। लेकिन $f^{-1}(G_\alpha)$ में खुला है, इसलिए वहां मौजूद $V_a \subseteq R$ को ऐसे खुला होना चाहिए जैसे कि $f^{-1}(G_\alpha) = V_\alpha \cap D$ तब $\subseteq \cup_\alpha.(V_\alpha, \cap D)$ जिसका सीधा सा मतलब है कि $D \subseteq \cup_\alpha, V_\alpha$ ज्ञात करते है। इस प्रकार हम D के खुले आच्छादन के समक्ष पहुँच गए। इसलिए वहाँ परिमित के कई $\alpha_1, ..., \alpha_N$ सूचकांक उपस्थित होना चाहिए। इस तरह से $D \subseteq \cup_{i=1}^{N} G_{\alpha_i}$ जिसका अर्थ है समानता $D = \cup_{i=1}^{N}(V_{\alpha_i} \cap D) = \cup_{i=1}^{N} f^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right)$ लेकिन इसका मतलब है कि यह सघन है।

प्रमेय 4.14: संबद्ध समुच्चय में एक सतत फलन मानचित्रण संबद्ध समुच्चय। अन्य शब्दों में, माना कि $f: D \to$ सतत है तथा D संबद्ध है। तब, $f(D)$ भी संबद्ध है।

प्रमाण : माना $f(D)$ संबद्ध नहीं है ,तो यहाँ $A, B, f(D)$ के उपसमुच्चय में असंतुष्ट तथा अरिक्त नहीं होना चाहिए, $f(D)$ के उपसमुच्चय दोनों $f(D)$ के सापेक्ष खुलते हैं, जैसे कि $f(D) = A \cup B$ तो लेकिन इसका तात्पर्य यह है $f(D)$ के सापेक्ष खुले होने का मतलब है कि वहाँ $U, V \subseteq R$ मौजूद है जैसे कि $A = f(D) \cap U$, $B = f(D) \cap V$ इसलिए लेकिन $f(D) \subseteq U \cup V$ इसका तात्पर्य है कि $D \subset f^{-1}(U)\, D\, f^{-1}(V)$ होगा। चूंकि U, V खुले हैं। यह निम्नानुसार है कि $f^{-1}(U)$ और $f^{-1}(V)\, D$ के सापेक्ष खुले हैं। लेकिन वे भी असंतुष्ट हैं। चूंकि D जुड़ा हुआ है, इसलिए यह निम्न में से एक है और $f^{-1}(U)$ खाली है। लेकिन $A \subseteq U$, इसलिए यह $f^{-1}(A) = \theta$ को भी बल प्रदान करता है, जो कि असंभव है जब तक कि $A = \theta$ (ध्यान दें कि A, f के चित्र का उपसमुच्चय है), जो कि विरोधाभासी है।

टिप्पणी

प्रमेय 4.15: एक सघन (Compact) समुच्च्य पर एक सतत फलन समान रूप से सतत (Continuous) है।

प्रमाणः माना D सघन है और $f : D \to R$ सतत है। दिया है $(\in) > 0$, तो हमें $\delta(\in) > 0$ ज्ञात करना है, इस प्रकार कि यदि $x, y \in D$ और $|x - y| < \delta(\in)$, तब $|f(x) - f(y)| < \in$। इस तरह निरंतरता की परिभाषा से, $\in > 0$ और $x \in D$ दिए गए हैं, वहां विद्यमान $d_x(\in)$ ऐसा है कि यदि $|y - x| < d_x(\in)$ तब $|f(y) - f(x)| < \in$। स्पष्ट रूप से $D \subseteq \cup_{x \in D} B_x \left(\frac{1}{2}\delta_{xN}(\ni/2)\right)$। इस खुले आवरण से हम एक परिमित निकाल सकते हैं जहां (D निहित है) इस तरह से $D \subseteq \cup_{i=1}^{N} B_x, (\frac{1}{2}\delta_{x_i}(\in/2))$। अर्थात् वहाँ $x_1, x_2, ..., x_N \in D$ कई परिमित मौजूद होना चाहिए।

माना अब $\delta(\in) = \min\{\frac{1}{2}\delta_{xN}(\in/2)\}$। हम देखेंगे कि $\delta(\in)$ कार्य करता है।

इस तरह $|y - z| < \delta(\in)$ को स्वैच्छिक से $y, z \in D$ लिया विचार यह है कि y किसी भी x_j के पास होगा, जो बदले में उसी x_j के पास z रखता है। लेकिन यह दोनों $f(y), f(z)$ को $f(x_j)$ (x_j पर निरंतरता द्वारा) के करीब होने के लिए फोर्स (Force) करता है, और इसलिए एक दूसरे के अनुपात है।

चूंकि $y \in D,\ 1 \le j \le N,$ इस तरह यहां कुछ

$y \in B_{xj}(\frac{1}{2}\delta_{x_j}(\in/2))\ 1 \le j \le N, j$ में मौजूद होना चाहिए।

इस प्रकार,

$$|y - x_j| < \frac{1}{2}\delta_{x_j}(\in/2)$$

$$|y - z| < \delta(\in) \le \frac{1}{2}\delta_{x_j}(\in/2)$$

त्रिभुज असमानता (Triangle Inequality) से यह निम्नानुसार $|z - x| < \delta_{x_j}(\in/2)$ है। इसलिए x का $\delta_{x_j}(\in/2)$: y, z के मध्य में है, इसे इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$|f(y) - f(x_j)| < \in/2$$
$$|f(z) - f(x_j)| < \in/2$$

पुनः त्रिकोण असमानता द्वारा $|f(y) - f(z)| < \in$ हमारे पास है।

अनुक्रमों का उपयोग कर वैकल्पिक प्रमाणः माना कि f समान रूप से सतत नहीं है, इसका अर्थ है कि वहाँ $\in > 0$ उपस्थित है जैसे कि कोई $\delta > 0$ कार्य नहीं करता है।

टिप्पणी

$\delta = \dfrac{1}{n}$ का क्या अर्थ है, यह जाँचने के लिए हम देखते हैं कि इसके लिए $3n \geq 1$ में कोई $x_n, y_n \in D3$ है या नही। इस प्रकार से $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ और जबकि $|f(x_n) - f(y_n)| > \in$ में सघन है। यद्यपि D सघन है, विशेष रूप से D में कोई भी अनुक्रम, अभिसारी अनुगामिता रखता है, जिसकी सीमा D से संबंधित है। इस सिद्धांत को दो बार लागू करने पर हम पाते हैं कि वहाँ $n_1 < n_2 < ...$, उपस्थित होने चाहिए, इस प्रकार अनुगामी $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ तथा $\left(y_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ अभिसारी हैं, तथा $x = \lim_{x\to\infty} x_{n_k} \in D, y = \lim_{x\to\infty} y_{n_k} \in D$। हमारे पास निम्नलिखित हैं:

(*i*) सघनता द्वारा निर्माण, $\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \dfrac{1}{n_k} \leq \dfrac{1}{k}$ सीमा लेते हुए, हमें $x = y$ प्राप्त होती हैं।

(*ii*) सततता द्वारा, $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x)$,चूंकि $x \in D$।

$\lim_{k\to\infty} f\left(y_{n_k}\right) = f(y)$

(*iii*) द्वारा निर्माण, $\left|f\left(x_{n_k}\right) - \left(y_{n_k}\right)\right| > \in$ इसलिए सीमा में $|f(x) - f(y)| > \in$

हम इस प्रकार एक विरोधाभास तक पहुँचते हैं।

प्रस्ताव: माना कि $D \in R$ फिर निम्नलिखित प्रस्ताव समकक्ष हैं।

(*i*) D सघन (Compact) है।

(*ii*) D परिबद्ध एवं संवृत या बंद (Bounded and Closed) है।

(*iii*) D के प्रत्येक अनुक्रम में एक अभिसरणीय उपानुक्रम (Convergent Subsequence) होती है जिसकी सीमा D से कम होती है।

प्रमाण: $a \Rightarrow b, D \subseteq R = \cup_{n=1}\infty(-n, n)$, D का खुला आवरण है, चूंकि $\exists N \geq 1$ इस प्रकार $D \subseteq \cup_{n=1}\infty(-n, n) = (-N, N)$ इससे पता चलता है कि D परिबद्ध (Bounded) हुई है। यह साबित करने के लिए D बंद है,

हम सिध्द कर सकते हैं कि $R - D$ खुला है,

माना कि, $y = \in R - D$ है, तब $D \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}\left(R - [y - \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}]\right)$ इस खुले आवरण का परिमित आवरण होना चाहिए। इसलिए $\exists N \geq 1$ इस प्रकार यह

$D \subseteq R-[y-\frac{1}{N}, y+\frac{1}{N}$ लेकिन इसका मतलब है कि $\left(y-\frac{1}{N}, y+\frac{1}{N}\right) \subseteq R-D$ लेकिन y को $R-D$ में विवेकाधीन चुना गया, इसलिए यह समुच्चय $b \Rightarrow c$ खुला है, और इसलिए D स्वयं बंद है। यह इस तथ्य के साथ करना है कि प्रत्येक बंधे अनुक्रम में एक अभिसरणीय परिणाम है। यहाँ $c \Rightarrow b$ एक $D = \bar{D}$ को दर्शाता है और इसका इस तथ्य से लेना है कि D अभिसारी क्रमों की सीमाओं का D समुच्चय है। इत्यादि,

$$\mathrm{c} \Rightarrow a$$

$D \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} G_k$, D का एक विवेकाधीन खुला आवरण है। (ध्यान दें खुले समुच्चय का एक गणतीय आवरण संग्रहणीय संग्रह है जो कि सामान्य अनंत, खुला आवरण नहीं हो सकता है। निश्चित रूप से, हम यह साबित करने के लिए आवश्यक कदम उठाते हैं कि D के किसी भी आवरण से हम एक गणनीय उपअच्छादित (Countable Subcovering) निकाल सकते हैं, और इस तथ्य को समाप्त करना होगा। R एक गणना करने योग्य सघन समुच्चय को स्वीकार करता है। इस चरण के पाठ्यपुस्तक में इस कदम का विवरण पढ़ें।) आइए सिद्ध करें कि $n \geq 1$ मौजूद है जैसे कि, $D \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} G_k$ माना कि इस परिणाम में तब $\forall N \geq 1$ वहाँ मौजूद है $x_n \in D - \cup_{k=1}^{\infty} G_k$ । लेकिन x_n एक अनुक्रम D है, इसलिए इसमें $\left(x_{n_j}\right)_{j \geq 1}$ पद D में सीमा के साथ। एक अभिसरणीय परिणाम होना चाहिए, $\lim_{j \to \infty} x_{n_n} = a \in D$ लेकिन G_i, s में से एक के अंतर्गत आता है, एक G_i, s खुला है, यह इस प्रकार है कि $x_{n_j} \in G_N$, $j \geq j_0$ के लिए (j काफी बड़ा) हैं। विशेष रूप से यह दर्शाता है कि j के लिए पर्याप्त है (j_0 से बड़ा और N से बड़ा) हमारे पास $x_{n_j} \in G_N \subseteq \cup_{k=1}^{n_j}$, ,चूंकि दर $n_j \geq j > N$ यह x_n's की परिभाषित संपत्ति का खंडन करता है।

प्रमेय 4.16: R जुड़ा हुआ है।

प्रमाण: वस्तुतः कथन यह है कि θ तथा R स्वयं में, R के एकमात्र उपसमुच्चय हैं, जो कि खुले एवं बंद दोनों हैं। इसे सिद्ध करने के लिए, माना कि इस गुणधर्म के साथ E, R का एक अरिक्त उपसमुच्चय है। हम सिद्ध करेंगे कि $E=R$। इसके लिए, एक स्वैच्छित $c \in R$ लेते हैं। यह सिद्ध करने के लिए कि $C \in E$, हम कल्पना करते हैं कि $c \in E$ और देखते हैं कि अंतर्विरोध है। चूँकि E अरिक्त है, तब यह इस प्रकार अनुसरण करता है कि E या तो c के बाएं या c के दाएं, बिंदुओं को रखता है।

पूर्व धारण मान लें,

(1) समुच्चय का निर्धारण करें $S = \{x \in E | x < c\}$ के ऊपर से, S से परिबद्ध (Bounded) है (c, S के लिए एक ऊपरी बाध्य है)। इसलिए हम $y = l.u.b.(S) \in R$ निर्धारण कर सकते हैं।

टिप्पणी

(2) निविष्ट (Input): E बंद है। तब $S = E \cap (-\infty, c]$ तब $y \in \overline{S} = S$, इसलिए $y < c$ होगा।

(3) निविष्ट (Input): $y \in S \subseteq E$ और E खुला है इसका मतलब है कि इसमें $\in > 0$ मौजूद है इस तरह $(y - \in, y + \in) \subseteq E$ पर्याप्त छोटा $\in$ चुनें ताकि $\in < c - y$ हो। उस स्थिति में $z = y + \in/2 \in (y - \in, y + \in) \subseteq E$ का एक तत्व गुण E है।

(4) $z < c$, इसलिए $z \in S$

(5) $z > y$

जो y की परिभाषित गुण के साथ विरोधाभास (Contradiction) में है।

प्रमेय 4.17: R का एकल संबद्ध उपसमुच्चय (Connected Subsets), अंतराल (न ही खुला न ही बंद) होते हैं।

प्रमाण: पहले हम यह सिद्ध करते हैं कि R का जुड़ा उपसमुच्चय एक अंतराल होना चाहिए।

माना $E \subseteq R$ को एक जुड़ा उपसमुच्चय बनाते हैं। हम सिद्ध करते हैं यदि $a \in b \in E$, तब $[a,b] \subseteq E$ है। दूसरे शब्दों में, किसी भी दो अवयवों (Elements) के साथ, E के बीच पूर्ण अंतराल होता है। इसे देखने के लिए, a और b के बीच एक वास्तविक संख्या c दें। माना $c \notin E$ फिर $E = A \cup B$ जहाँ $A = (-\infty, c) \cap E$ और $B = (c, +\infty) \cap E$ ध्यान दें कि A और B, D के योग्य उपसमुच्चय हैं, दोनों D के सापेक्ष खुले हैं, क्योंकि S जुड़ा हुआ है, इनमें एक कम से कम खाली होना चाहिए, क्योंकि $a \in A$ और $b \in B$ इस प्रकार है, जो कि $c \in E$ विरोधाभास है।

यह दर्शाने के लिए E वास्तव में एक अंतराल है, $\inf E$, तथा $\sup E$ पर विचार करते हैं। E बाध्य है। तब $m = inf\, E$, $M = \sup E \in R$, तथा स्पष्टतः $E \subseteq [m, M]$। दूसरी ओर, किसी भी दिये गये $x \in (m, M)$ के लिए, वहाँ $a, b \in E$ विद्यमान है, इस प्रकार कि $a < x < b$। वह इस कारण, क्योंकि m, $M \in E$ तथा m के करीब (क्रमशः M) E के किसी बिंदु को भी प्राप्त किया जा सकता है, जो कि वांछित है। (अंतराल (m, M)) के साथ एक चित्र का रेखांकन करें तथा इसके अंदर एक बिंदु x को स्थापित करें)। लेकिन तब, $[a, b] \subseteq E$, तथा विशेषतः $x \in E$। चूंकि x का चुनाव (m, M) में स्वैच्छिक रूप से किया गया था, हमारे पास $(m, M) \subseteq E \subseteq [m, M]$ होना चाहिए, इसलिए E निश्चित रूप से एक अंतराल है। द्वितीय स्थितिः E असंबद्ध है। इस समान धारणा के साथ दिखाएं कि E एक असंबद्ध अंतराल है।

प्रमेय 4.18: माना कि $D \subseteq R$ सघन है और $f : D \to R$ एक सतत फलन हैं। तब y_1, $y_2 \in D$ विद्यमान है जैसे कि $f(y_1) \leq f(x) \leq f(y_2)$, $\forall x \in D$।

प्रमाण: $f(D)R$ का एक सघन उपसमुच्चय (Compact Subset) है, इसलिए यह बाध्य और बंद है। इसका तात्पर्य यह है कि $g.l.b(f(D)) \in f(D)$ और $l.u.b.(f(D)) \in f(D)$

भी। लेकिन तब $y_1, y_2 \in E\ D$ विद्यमान होना चाहिए जैसे कि $f(y_1) = g.l.b.f(D)$ और $f(y_2) = l.u.b.\ f(D)$। लेकिन इसका तात्पर्य है $f(D) \subseteq [f(y_1), f(y_2)]$ है।

टिप्पणी

ध्यान दे: एक l.u.b. को सूचित करने के लिए अंकन $f(D)$, $f(x)$ का उपयोग करता है। MhA की चित्र दूसरे शब्दों में, $\sup_{x \in D}$, $f(x) = l.u.b.\{f(y) \mid y \in D\}$। प्रमेय कहती है कि यदि D निहित है और f सतत है, तो $\text{up}_{x \in D} f(x)$ परिमित है, और इससे भी अधिक इसमें $y_1 \in D$ विद्यमान है जैसे $f(y_1) = \sup_{x \in D} f(y)$। यदि अनुक्षेत्र निहित नहीं है, तो व्यक्ति सतत फलनों (Continuous Function) के उदाहरण पा सकता है जैसे कि i) sup $f = +\infty$ या ऐसा है कि ii) sup f एक वास्तविक संख्या है लेकिन f की प्रतिबिंब में नहीं है। प्रकरण (i) के लिए, $f(x) = 1/x$ को $(0,1]$ पर परिभाषित करें। प्रकरण (ii) के लिए, $f(x) = x$ लें। $[0,1)$ पर परिभाषित किया गया।

प्रमेय 4.19 : R में एक अंतराल पर परिभाषित एक सतत (वास्तविक मान) फलन में मध्यवर्ती मान गुण (Intermediate Value Property) होता है।

प्रमाण: मान लें कि R और f में एक अंतराल है $f: E \to R$ एक सतत फलन है। $a, b\ \in$ (कहते हैं $a < b$) और y को $f(aa)$ और $f(b)$ के बीच की संख्या कहते हैं। मध्यवर्ती मान गुण वह कथन है जो a और b के बीच मौजूद है जैसे कि $f(c) = y$। लेकिन यह तुरंत इस तथ्य से आता है कि $f(E)$ एक अंतराल है। (E, $R \Rightarrow E$ से जुड़ा एक अंतराल है $E\ f \Rightarrow R$ का एक जुड़ा हुआ उपसमुच्चय है) $E\ R \Rightarrow R$ में एक अंतराल है)।

अपनी प्रगति जांचिए

1. एकसमान निरंतरता की व्याख्या कीजिए।
2. सार्वभौमिक गुण से आप क्या समझते हैं?
3. एकसमान सातत्य की सामान्यतः की व्याख्या कीजिए।
4. सघनता से आप क्या समझते हैं? संक्षेप में इसकी व्याख्या करें।
5. संयोजकता और निरंतरता से आप क्या समझते हैं?
6. पथ संयोजकता की व्याख्या करे।
7. परिमित प्रतिच्छेदन के गुणों की व्याख्या करें।
8. सघन को परिभाषित करें।

4.9 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. दिए गए दूरीक समष्टि (Metric Space) (X, d_1) और (Y, d_2), एक फलन (Function) $f : X \to Y$ हर वास्तविक संख्या (Real Number) के लिए समान

टिप्पणी

रूप से निरंतर कहा जाता है $\varepsilon > 0$ वहाँ उपस्थित $\delta > 0$ ऐसा हर x के लिए, $y \in X$ के साथ $d_1\{x, y\} < \delta$, हमारे पास वह $d_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$. है।

2. समान निरंतरता एक सार्वभौमिक गुण (Global Property) है, इस अर्थ में कि मानक परिभाषा व्यक्तिगत बिंदुओं के बजाय अंकों के जोड़े को संदर्भित करती है।
3. सामान्यतः, समान रूप से सतत फलन के अंतर्गत एक पूर्णत: परिबद्ध उपसमुच्चय (Totally Bounded Subset) का चित्र पूरी तरह से परिबद्ध होता है। इस बात से सावधान रहें कि समान रूप से सतत फलन के अंतर्गत विवेकाधीन (Arbitrary) दूरीक समष्टि के परिबद्ध उपसमुच्चय की चित्र को परिबद्ध होने की आवश्यकता नहीं है। उदाहरण के लिए, पूर्णांक आव्यूह के साथ संपन्न पूर्णांक से तत्समक फलन (Identity Function) पर विचार करें जो सामान्य यूक्लिडियन (Euclidean) आव्यूह से संपन्न है।
4. दूरीक समष्टि (Metric Space) में परिबद्ध समुच्चय होने का गुण समरूपता (Homomorphism) द्वारा संरक्षित नहीं है, उदाहरण के लिए, अंतराल (0, 1) और पूरे **R** सामान्य सांस्थिति के तहत समरूपक (Homomorphism) हैं।
5. निरंतरता यह एक सतत के रूप में एक सतत फलन के अधिक सहज गुणों से मेल खाती है एक जुड़े समूह को एक जुड़े समुच्चय में बदल देती है।
6. एक सांस्थितिक समष्टि X में, A से B का पथ बंद मध्यान्तर [0,1] से X तक का एक सतत फलन है जो इस प्रकार है

   $$f(0) = a$$

   और $$f(1) = b$$

   एक उपसमूह Y को पथ जुड़ा हुआ कहा जाता है जब Y के भीतर इस तरह का पथ उपस्थित है, जो कि Y के प्रत्येक युग्म बिंदु $\{a, b\}$ के लिए है।
7. परिमित प्रतिच्छेदन गुण (Finite Intersection Property), समुच्चय X के उपसमुच्चय के संग्रह की गुण है। संग्रहण में इस गुण का समुच्चय होता है यदि संग्रह के किसी परिमित उपसंग्रह (Sub Collection) का प्रतिच्छेद गैर–रिक्त है। समूहों का एक केन्द्रित प्रणाली परिमित प्रतिच्छेदन गुण के साथ समूहों का एक संग्रह है।
8. $D \cup R$ सघन है यदि और केवल यदि किसी भी D के खुले आवरण के लिए हम परिमित अच्छादित को घटा (Subtract) सकते हैं। जो दिया गया है $(G_\alpha)\alpha \in A\, a, R$ की खुले उपसमुच्चय का संग्रह सूचकांकों का एक स्वैच्छित समुच्चय) जैसे कि A तब $D \subset \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$, में परिमित रूप से कई सूचकांक मौजूद होते हैं $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$

4.10 सारांश

टिप्पणी

- माना एक सतत मानचित्रण की एक सतत दूरीक समष्टि X दूरीक समष्टि Y में हो। तब $f[X]$ सघन है।
- यदि X एक सामान्य दूरीक समष्टि है और A, X में बंद है, फिर किसी भी सतत फलन के लिए $f: A \to R$ इस तरह से $|f(x) \leq 1$, एक सतत फलन g है, $X \to R$ इस तरह से $|g(x)| \leq \frac{1}{3}$ के लिये $x \varepsilon X$, और $|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}$ के लिये $X \varepsilon A$ है।
- दिए गए दूरीक समष्टि (X, d_1) और (Y, d_2), एक फलन $f: X \to Y$ हर वास्तविक संख्या के लिए समान रूप से निरंतर कहा जाता है $\varepsilon > 0$ वहां मौजूद $\delta > 0$ ऐसा हर x के लिए, $y \in X$ के साथ $d_1\{x, y\} < \delta$, हमारे पास वह $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. है।
- यदि X और Y वास्तविक संख्याओं के उपवर्ग हैं, d_1 और d_2 मानक यूक्लिडियन प्रतिमान हो सकते हैं, $|\bullet|$, परिभाषा देते हुए: सभी के लिए $\varepsilon > 0$ वहाँ एक $\delta > 0$ मौजूद है। जैसे कि सभी के लिए $x, y \in X, |x - y| < \delta$ का तात्पर्य $|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$
- दो दूरीक समष्टि के बीच प्रत्येक लिपस्चिट सतत मानचित्र समान रूप से सतत है। विशेष रूप से प्रत्येक फलन जो विभेदक है और जिसके व्युत्पन्न सीमाबद्ध है, एक समान रूप से सतत है। आमतौर पर, हर धारक का सतत फलन समान रूप से सतत है।
- हेइन–कैंटोर प्रमेय का दावा है कि यदि X सघन है, तो प्रत्येक सतत $f: X \to Y$ समान रूप से सतत है। विशेष रूप से, यदि फलन वास्तविक रेखा के सीमित परिबद्ध अंतराल पर सतत रहता है तो यह उस अंतराल पर समान रूप से सतत रहता है। डार्बोक्स की पूर्णात्मकता एक सम सातत्य प्रमेय से लगभग तत्काल ही काम करती है।
- यदि एक वास्तविक मान फलन f सतत है, $[0, \infty)$ और $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (और परिमित है), तो f समान रूप से निरंतर है। विशेष रूप से, $\mathbf{C_0(R)}$ का प्रत्येक अवयव, $\mathbf{R}$ पर सतत फलनों का वह विस्तार, जो अनंत में नष्ट हो जाता है, एक समान रूप से सतत होता है। ध्यान दें कि यह ऊपर वर्णित हेइन–कैंटोर प्रमेय का एक सामान्यीकरण है, चूंकि $C_c(R) \subset C_0(R)$।
- A को R^n का उपसमुच्चय माना जाता है। इस फलन $f: A \to \boldsymbol{R}^m$ में, इस प्रकार के अनुक्रम x_n तथा y_n के प्रत्येक युग्म के लिए इस प्रकार का फलन एक समान रूप से लगातार चलता रहता है।

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - y_n| \quad = 0$$

हमारे पास है $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)| \quad = 0$

टिप्पणी

- दूरीक समष्टि में परिबद्ध समुच्चय होने का गुण समरूपता द्वारा संरक्षित नहीं है, उदाहरण के लिए, अंतराल (0, 1) और पूरे **R** सामान्य सांस्थिति के तहत समरूपक हैं। इसलिए प्रमेयों को वास्तविक विश्लेषण में सामान्य करने के लिए, जैसे संवृत परिबद्ध अंतराल पर सतत फलन सीमाबद्ध होता है।
- संबद्ध समुच्चय एक समुच्चय है, जिसे दो गैर–रिक्त उपसमुच्चयों में विभाजित नहीं किया जा सकता है, जो समुच्चय पर प्रेरित सापेक्ष सांस्थिति में खुले रहते हैं। समान रूप से, यह एक समुच्चय है जिसे दो गैर–रिक्त उप भागों में विभाजित नहीं किया जा सकता है जैसे कि प्रत्येक उपसमुच्चय में दूसरे के समुच्चय बंद होने के साथ सामान्य रूप से कोई बिंदु नहीं होता है।
- माना X एक सांस्थितिक विस्तार हो। X में जुड़ा समुच्चय एक समुच्चय $A \subseteq X$ है जिसे दो गैर–रिक्त उपसमुच्चय में विभाजित नहीं किया जा सकता है जो समुच्चय A पर प्रेरित सापेक्ष सांस्थिति में खुले हैं। समान रूप से, यह एक समुच्चय है जिसे दो गैर–रिक्त उपसमुच्च्यों में विभाजित नहीं किया जा सकता है, इस प्रकार प्रत्येक उपसमुच्चय के अन्य समूह बंद होने पर समान बिंदु नहीं होते हैं। समष्टि X, यदि यह स्वयं का संबद्ध उपसमुच्चय है तो संबद्ध सांस्थितिक समष्टि है।
- वास्तविक संख्या, वास्तविक संख्याओं के खुले या बंद मध्यान्तर के रूप में एक जुड़ा समूह हैं। (वास्तविक या सम्मिश्रण) समतल जुड़ा हुआ है, जैसा कि सतह में कोई खुला या बंद चक्र या कोई वलय है। स्थलाकृतिक की ज्या वक्र सतह का एक जुड़ा हुआ उपसमुच्चय है।
- एक उपसमुच्चय Y को पथ–जुड़ा हुआ कहा जाता है जब Y के भीतर इस तरह का पथ मौजूद है, जो कि Y के प्रत्येक युग्म बिंदु $\{a, b\}$ के लिए है।
- सांस्थितिक समष्टि X सुसंबद्ध है, यदि और केवल तभी जब परिमित प्रतिच्छेदन गुण के बंद उपसमुच्चयों के प्रत्येक समूहों में एक गैर–रिक्त प्रतिच्छेदन होता है।
- X के खुले उपसमुच्चय का एक संग्रह $\{V_a\}$ को X के लिए एक आधार कहा जाता है यदि निम्न सत्य है: प्रत्येक के लिये $x \in X$ और हर खुले समुच्चय के लिए $G \subset X$ इस तरह से $x \in G$, इस तरह से वहाँ मौजूद है।
- विस्तार X के एक उपसमुच्च्य S एक पूरी तरह से परिबद्ध समुच्च्य समूह है अगर और केवल अगर, किसी भी आकार E दिया, वहाँ एक प्राकृतिक संख्या n और एक समूह $A_1, A_2, ..., A_n$ मौजूद है X के उपसमुच्चयों में से एक, ऐसा है कि S समूह के संघ में निहित है (दूसरे शब्दों में, समूह S का एक परिमित आवरण है), और ऐसा है कि समूह में प्रत्येक समुच्चय A_i आकार E (या कम) का है। गणितीय प्रतीकों में, समष्टि X एक पूर्ण परिबद्ध समष्टि है, यदि और केवल तभी जब यह स्वयं का एक उपसमुच्च माना जाता है।

टिप्पणी

- एक संस्थानिक समुच्चय X यदि पूरी तरह से परिबद्ध हुआ रहता है और केवल तभी इसे बाएं अनुवाद का उपयोग करते हुए संस्थानिक एबेलियन समुच्चयों की परिभाषा को संतुष्ट करता है। अर्थात $E + a_i$ के विस्तार पर $a_i E$ का उपयोग करें। वैकल्पिक रूप से, X सही तरह से परिबद्ध हुआ है यदि और केवल यदि यह सही अनुवाद का उपयोग करते हुए संस्थानिक एबेलियन समुच्चयों की परिभाषा को संतुष्ट करता है।
- वास्तविक रेखा का एक उपसमुच्चय, या अधिक आम तौर पर (परिमित आयामी) यूक्लिडियन विस्तार, पूरी तरह से बँधा हुआ है यदि और केवल अगर यह परिबद्ध है।
- एक हिल्बर्ट समष्टि में इकाई गोला, या आमतौर पर एक बनाच समष्टि में, पूरी तरह से परिबद्ध होता है अगर और केवल समुच्चय में परिमित आयाम हो।
- परिमित प्रतिच्छेदन गुण, समुच्चय X के उपसमुच्चय के संग्रह के गुण है। संग्रहण में इस गुण का समुच्चय होता है यदि संग्रह के किसी परिमित उपसंग्रह का प्रतिच्छेद गैर–रिक्त है। समुच्चयों का एक केन्द्रित प्रणाली परिमित प्रतिच्छेदन गुण के साथ समुच्चयों का एक संग्रह है।
- $D \cup R$ निहित है यदि और केवल यदि किसी भी D के खुले आवरण के लिए हम परिमित अच्छादित को घटा सकते हैं। जो दिया गया है $(G_\alpha)\alpha \in A\ a, R$ की खुले उपसमुच्चय का संग्रह सूचकांकों का एक स्वैच्छित समुच्चय) जैसे कि A फिर $D \subset \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$, में सूक्ष्म रूप से कई सूचकांक मौजूद होते हैं $\alpha_1, ..., \alpha_n$ $\in A$ ऐसा कि $D \subset \cup_{i=1}^{N} G_{\alpha_1}$.
- एक निरंतर या सतत फलन से सम्बद्ध समुच्चय में निहित समुच्चय का आकलन किया जा सकता है।

  दूसरे शब्दों में, मान लें $f: D \to R$ सतत है और D से जुड़ा हुआ है। तब इससे $f(D)$ भी जुड़ा हुआ है।
- R में एक अंतराल पर परिभाषित एक सतत (वास्तविक मान) फलन में मध्यवर्ती मान गुण होता है।

4.11 मुख्य शब्दावली

- **एकसमान निरंतरता या सततता** : किसी विशेष बिंदु पर स्वयं निरंतरता या सततता एक विस्तारीय गुण है, अर्थात f फलन सतत रहता है या नहीं जब हम किसी फलन को एक अंतराल पर निरंतर होने की बात करते हैं, तो हमारा मतलब केवल यह है कि यह प्रत्येक बिंदु पर जारी रहे।
- **घातीय फलन** : $x \to c^x$ पूर्व वास्तविक रेखा पर हर जगह निरंतर या सतत है लेकिन रेखा पर समान रूप से निरंतर या सतत नहीं है।

- **हेइन–कैंटर प्रमेय** : यदि X सघन है, तो प्रत्येक निरंतर या सतत फलन $f:X \to Y$ समान रूप से निरंतर या सतत है। विशेष रूप से यदि फलन वास्तविक रेखा के सीमित परिबद्ध अंतराल पर सतत रहता है तो यह उस अंतराल पर समान रूप से सतत रहता है।
- **सघनता** : दूरीक समष्टि में परिबद्ध समुच्चय के गुण समरूपता द्वारा संरक्षित नहीं है। उदाहरण के लिए अंतराल $(0, 1)$ और पूरे R सामान्य सास्थिति के तहत समरूपता है। इसलिए प्रमेयों को वास्तविक विश्लेषण में सामान्य करने के लिए जैसे संवृत परिबद्ध अंतराल पर सतत फलन सीमाबद्ध होता है।
- **सततता** : यह एक सतत के रूप में एक सतत फलन के अधिक सहज गुणों से मेल खाती है एक जुड़े समुच्चय को एक जुड़े समुच्चय में बदल देती है।
- **पथ संयोजकता** : एक सांस्थितिक समष्टि X में, a से b का पथ बंद मध्यान्तर $[0, 1]$ से X तक का एक सतत फलन है।

4.12 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. सतत या निरंतर फलन क्या है?
2. विस्तार प्रमेय को परिभाषित करें।
3. तुल्याकारिता और समरूपता में क्या अंतर है, व्याख्या करें।
4. सघनता क्या है? सघनता को उदाहरण देकर परिभाषित करें।
5. पूर्णतः परिबद्ध समष्टि को उदाहरण देकर परिभाषित करें।
6. परिमित प्रतिच्छेदन गुण को परिभाषित करें।
7. निरंतर फलन का संयुक्ता और उसके निहित समुच्चय की व्याख्या करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. सतत या निरंतर फलन की उपयुक्त उदाहरण देकर व्याख्या करें।
2. एकसमान सततता के बारे में चर्चा करें और उपयुक्त उदाहरण देकर स्पष्ट करें।
3. सघनता के गुणों का वर्णन उदाहरण देकर करें।
4. विस्तार प्रमेय की व्याख्या उदाहरण देकर करें।
5. सघन समुच्चय और सघनता या संयुक्तता को विस्तार से उदाहरण सहित समझाइए।
6. हॉसडॉर्फ़ स्थितियों के बारे में उपयुक्त उदाहरण देकर व्याख्या करें।
7. "सामान्य संस्थानिक में, सघनता या संयुक्तता एक गुण है जो यूक्लिडियन विस्तार के उपसमुच्चय के बंद होने की धारणा को सामान्य करता है"। इस कथन की सत्यता का औचित्य सिद्ध कीजिए।

4.13 सहायक पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

Malik, S. C. and Savita Arora. 1991. *Mathematical Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Simmons, G. F. 2004. *Introduction To Topology And Modern Analysis*. New York: Tata McGraw-Hill Education.

Ahlfors, Lars V. 1978. *Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1986. *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Gupta, S. L. and Nisha Rani. 2003. *Fundamental Real Analysis*, 4th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Carothers, N. L. 2000. *Real Analysis*, 1st Edition. UK: Cambridge University Press.

Shilov, Georgi E. 2012. *Elementary Real and Complex Analysis*. Chelmsford: Courier Corporation.

Sharma, S.C. 2006. *Metric Space*. New Delhi: Discovery Publishing House.

Appostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis.* Boston: Addison Wesley.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*, 3rd Edition. New York: Macmillan Publishing Company.

इकाई 5 सम्मिश्र संख्याएं और विश्लेषणात्मक फलन

टिप्पणी

संरचना

5.0 परिचय

एक सम्मिश्र या जटिल संख्या (Complex Number) एक संख्या है जिसे $a+bi$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers) हैं, और i समीकरण $x^2=-1$ का एक हल है। क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या (Real Number) इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करती है, इसलिये i को एक काल्पनिक संख्या (Imaginary Number) कहा जाता है। सम्मिश्र संख्या $a+bi$ के लिए, a को वास्तविक भाग (Real Part) कहा जाता है, और b को काल्पनिक भाग (Imaginary Part) कहा जाता है। ऐतिहासिक नामकरण काल्पनिक होने के बावजूद, सम्मिश्र संख्याओं को गणितीय विज्ञानों में वास्तविक संख्याओं के समान वास्तविक माना जाता है, और प्राकृतिक दुनिया के वैज्ञानिक विवरण के कई पहलुओं में मौलिक हैं।

एक विश्लेषणात्मक फलन एक फलन है जिसे स्थानीय रूप से एक अभिसारी घात श्रृंखला (Convergent Power Series) द्वारा दिया जाता है। जब वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन और सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन दोनों मौजूद हैं, तब श्रेणियां कुछ तरीकों से समान हैं, लेकिन कुछ समीकरणों में अलग हैं। प्रत्येक प्रकार के फलन असीम रूप से भिन्न होते हैं, लेकिन सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन (Complex Analytic Function) उन गुणों को प्रदर्शित करते हैं जो आम तौर पर वास्तविक विश्लेषणात्मक फलन (Real Analytic Function) के लिए नहीं होते हैं।

इस इकाई में आप सम्मिश्र संख्याओं जैसे कि क्रमित युग्म, विश्लेषणात्मक फलन, कॉउची–रीमान समीकरण, मोबियस रूपांतरण और अनुकोणी प्रतिचित्रण (Conformal Mapping) के बारे में अध्ययन करेंगे ।

5.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- क्रमबद्ध जोड़े के रूप में सम्मिश्र संख्याओं की व्याख्या कर पाएंगे;
- विश्लेषणात्मक फलन का वर्णन कर पाएंगे;
- कॉउची–रीमान समीकरण की व्याख्या कर पाएंगे;
- मोबियस रूपांतरण को समझ पाएंगे;
- कनफॉर्मल मानचित्र की व्याख्या कर पाएंगे।

5.2 क्रमबद्ध जोड़े के रूप में सम्मिश्र संख्याएं

सम्मिश्र संख्याएं (Complex Number)

परिभाषा: एक सम्मिश्र या जटिल संख्या को वास्तविक संख्याओं (Real Numbers) की एक जोड़ी के रूप में परिभाषित किया जा सकता है और प्रतीक (x, y) द्वारा चिह्नित किया जा सकता है। यदि हम $z = (x, y)$ लिखते हैं, तो x को वास्तविक भाग (Real Part) कहा जाता है और y को सम्मिश्र संख्या z का काल्पनिक भाग कहा जाता है और क्रमशः $R(x)$ और $I(x)$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

इस परिभाषा से स्पष्ट है कि दो सम्मिश्र संख्याएं (x, y) और (x', y') बराबर हैं यदि और केवल यदि $x = x'$ और $y = y'$ है।

हम प्रतीक **C** द्वारा सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करेंगे।

दो सम्मिश्र संख्याओं का योग (Sum of Two Complex Number): दो सम्मिश्र संख्याओं का योग (x,y) और (x', y') समानता (Equality) द्वारा परिभाषित किया गया है।

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन (Product of Two Complex Numbers): समानता द्वारा गुणन को परिभाषित किया गया है,

$$(x, y) \times (x', y') = (x - yy', xy + yx').$$

प्रतीक *i* : यह प्रतीक (Symbol) i द्वारा सम्मिश्र संख्या (0, 1) को निरूपित करने के लिए प्रथागत है

इस संकेतन (Notation) के साथ

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0)$$

ताकि i को वास्तविक संख्या –1 का वर्गमूल समझा जा सके।

प्रतीक i का उपयोग करके, हम सम्मिश्र संख्या (x, y) को $x + iy$ के रूप में लिख सकते हैं। इसके लिये हमारे पास है,

$$(x + iy) = (x, 0) + (0, 1).(y, 0)$$

$$= (x, 0) + (0.\, y - 1.\, 0, 0.0 + 1.\, y)$$
$$= (x, 0) + (0, y)$$
$$= (x + 0, 0 + y) = (x, y)$$

एक क्षेत्र के रूप में C (C as a Filed)

योग का क्रम विनिमय नियम (Commutative Law of Addition)– हमारे पास है

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y).$$

योग का साहचर्य नियम (Associative Law of Addition): हमारे पास है,

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'')$$
$$= (x + x', y + y') + (x'', y'') = (\overline{x+x'} + x'', \overline{y+y'} + y'')$$
$$= (x + \overline{x' + x''}, y + \overline{y' + y''}) = (x, y) + (x' + x'', y' + y')$$
$$= (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')].$$

योगात्मक तत्समक (Additive Identity): हमारे पास है,

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$

इसलिए जटिल संख्या (0, 0) योगात्मक समरूपता है और परिणामस्वरूप इसे सम्मिश्र संख्याओं की प्रणाली के लिए शून्य कहा जाता है।

योगात्मक प्रतिलोम (Additive Inverse): हमारे पास है,

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$$

संख्या $(-x, -y)$ है, इसलिए, (x, y) के योगात्मक प्रतिलोम को सम्मिश्र संख्या (x, y) का ऋणात्मक कहा जाता है और हम लिखते हैं: $(x,y) = (-x, -y)$।

गुणन का क्रम विनमिय नियम (Commutative Law of Multiplication): हमारे पास है,

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') = (x'x' - y'y, y'x + x'y)$$
$$= (x', y')(x, y).$$

गुणन का साहचर्य नियम (Associative Law of Multiplication): हमारे पास है,

$$[(x, y)(x', y')]\,(x'', y'')$$
$$= (xx' - yy', xy' + yx'\,(x'', y'')$$
$$= [(xx' - yy')\,x'' - (xy' + yx')\,y'', (xx' - yy')\,y'' + (xy' + yx')\,x'']$$
$$= [x(x'x'' - y'y'') - y(x'y'' + y'x''), x(x'y'' + y'x') + y(x'x'' - y'y'')]$$
$$= (x, y)\,[x'x'' - y'y'', x'y'' + y'x'']$$
$$= (x, y)\,[(x', y')\,(x', y'')].$$

गुणात्मक तत्समक (Multiplicative Idenlity): हमारे पास है,

$$(x, y)(1, 0) = (x.1 - y.0, x.0 + y.1) = (x, y)$$

टिप्पणी

इसलिए सम्मिश्र संख्या (1, 0) गुणात्मक तत्समक है और इसे सम्मिश्र संख्याओं की प्रणाली के लिए एकरूपता कहा जाता है।

गुणात्मक व्युत्क्रम (Multiplicative Inverse): सम्मिश्र संख्या (x', y') को सम्मिश्र संख्या (x, y) का व्युत्क्रम (Inverse) कहा जाता है: यदि,

$$(x, y).(x', y') = (1, 0)$$

या $\quad (xx' - yy', xy' + yx') = (1, 0)$

इस प्रकार $\quad xx' - yy' = 1, xy' + yx' = 0$

ये $x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, y' = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ प्रदान करते हैं, (x, y) सम्मिश्र संख्या (Complex Number) (0, 0) का निरूपण (Represent) नहीं करता है।

इस प्रकार एक गैर–शून्य जटिल संख्या में एक अद्वितीय गुणक है जो सम्मिश्र संख्या से व्युत्क्रम (Inverse) है

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

और $(x, y)^{-1}$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

गुणन के वितरण के नियम (Distributive Law of Multiplication): हमारे पास है,

$$\begin{aligned}
&(x, y)\,[(x', y') + (x'', y'')] \\
&\quad = (x, y)\,[x' + x'', y' + y''] \\
&\quad = [x\,(x' + x'') - y\,(y' + y''), x\,(y' + y'') + y\,(x' + x'')] \\
&\quad = [xx' + xx'' - yy' - yy'', xy' + xy'' + yx' + yx''] \\
&\quad = [xx' - yy' + xx'' - yy'', xy' + yx' + xy'' + yx''] \\
&\quad = (xx' - yy', xy' + yx') + (xx'' - yy'', xy'' + yx'') \\
&\quad = (x, y)(x', y') + (x, y)(x'', y'').
\end{aligned}$$

इस प्रकार सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय ऊपर के रूप में जोड़ और गुणा के तहत एक क्षेत्र बनाता है।

अब हम दो सम्मिश्र संख्याओं के अंतर और विभाजन को परिभाषित करते हैं।

दो सम्मिश्र संख्याओं का अंतर और विभाजन (Difference and Division of Two Complex Numbers)

दो सम्मिश्र संख्याओं $z = (x, y)$ और $z'\,(x', y)$ का अंतर समानता से परिभाषित होता है।

$$\begin{aligned}
z - z' &= z + (-z') = (x, y) + (-x', -y') \\
&= (x + (-x'), y(-y') = (x - x', y - y')).
\end{aligned}$$

विभाजन को समानता $z / z' = z.(z')^{-1}$ द्वारा परिभाषित किया गया है। $z' \neq (0, 0)$ दिया गया है।

हम पाते हैं,

$$\frac{z}{z'} = (x, y)(x'y')^{-1}$$

$$= (x, y)\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$$= \left(\frac{xx'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yy'}{x'^2 + y'^2}, -\frac{xy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$$= \left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}, \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}\right)$$

$x'^2 + y'^2 \neq 0$ दिया गया है।

एक सम्मिश्र संख्या के मापांक और तर्क (Modulus and Argument of Complex Number)

माना $z = x + iy$ कोई भी सम्मिश्र संख्या है।

यदि, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, तो $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ को सम्मिश्र संख्या z का मापांक कहा जाता है तथा $|z|$ के रूप में लिखा जाता है और $\theta = \tan^{-1} y/x$ को मूल से z का तर्क या आयाम (Argument or Amplitude)कहा जाता है।

इसके अलावा, एक सम्मिश्र संख्या का तर्क अद्वितीय (Unique) नहीं है, क्योंकि यदि θ तर्क का महत्व है, तो $2n\pi + \theta$ भी है, जहाँ n = 0, ±1, ±2 ......

तर्क का महत्व जो असमानता को संतुष्ट करता है,

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

को तर्क का प्रमुख (Principal) महत्व कहा जाता है। हम टिप्पणी (Remark) करते हैं कि 0 का तर्क परिभाषित नहीं है।

ध्यान दें: यह अंतर और मापांक की परिभाषाओं से स्पष्ट है कि $|z_1 - z_2|$ अंक, z_1 और z_2 के बीच की दूरी है। यह इस प्रकार है कि निश्चित सम्मिश्र संख्या z_0 और वास्तविक संख्या r के लिए, समीकरण $|z - z_0| = r$ केंद्र z_0 और त्रिज्या (Radius) r के साथ एक वृत्त (Circle) का निरूपण करता है।

सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical Representation of Complex Number)

हम एक बिन्दु P द्वारा सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का निरूपण करते हैं। जिसका कार्टेशियन निर्देशांक (Cartesian Coordinates) (x, y) आयताकार अक्ष OX और OY से संदर्भित किया जाता है, जिसे आमतौर पर क्रमशः वास्तविक और काल्पनिक अक्ष कहा जाता है। स्पष्ट रूप से P के ध्रुवीय निर्देशांक (Polar Coordinate) हैं (r, θ), जहाँ r मापांक है और θ जो कि जटिल z का तर्क है। जिस सतह के बिन्दुओं को सम्मिश्र संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है, उसे अर्गंड सतह या अर्गंड आरेख (Argand Plane or Argand Diagram) कहा जाता है।

इसे जटिल सतह या गॉउसियन सतह (Complex Plane or Gaussian Plane) भी कहा जाता है।

टिप्पणी

ध्यान दें: सम्मिश्र संख्या z को बिन्दु (x, y) के प्रत्यय (Affix) के रूप में जाना जाता है जो इसे दर्शाता है।

संयुग्मित सम्मिश्र संख्या (Conjugate Complex Numbers)

यदि, $z = x + iy$ तो सम्मिश्र संख्या $x - iy$ को सम्मिश्र संख्या z का संयुग्म कहा जाता है और इसे $\bar{z}$ के रूप में लिखा जाता है। यह आसानी से देखा जाता है कि संख्याएँ $z_1 + z_2$ और z_1z_2 से क्रमशः $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ और $\bar{z}_1\bar{z}_2$ संयुग्मित (Conjugate) हैं।

हमारे पास भी है,

$$|z|^2 = z\bar{z}, 2R(z) = z + \bar{z}$$

और $\quad 2iI(z) = z - \bar{z}. |\bar{z}| = |z|$ ।

ज्यामितीय रूप से, z का संयुग्म वास्तविक अक्ष (Real Axis) में z का प्रतिबिंब (या इमेज) है। यदि (r, θ), P के ध्रुवीय निर्देशांक हैं, तो इसके परावर्तन (Reflection) P' के ध्रुवीय निर्देशांक $(r, -\theta)$ हैं तब हमारे पास हैं,

$$\text{amp } z = -\text{amp } \bar{z} \text{ ।}$$

मापांको के गुण (Properties of Moduli)

अब हम मापांको (Moduli) के कुछ बुनियादी परिणामों को साबित करते हैं।

प्रमेय 5.1: दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणन का मापांक, मापांको का गुणनफल है।

प्रमाण: हमारे पास है $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

तो $\quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

इसी तरीके से यह सिद्ध किया जा सकता है कि,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \quad (z_2 \neq 0).$$

प्रमेय 5.2: दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक कभी भी उनके मापांक के योग से अधिक नहीं हो सकता है।

प्रमाण: हम यह साबित करेंगे $|z_1 + z_2| \le |z_1| |z_2|$

हमारे पास,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \qquad \text{...(5.1)}$$

$$z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_1 z_2 = z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)}$$

$$= 2\text{R}(z_1\bar{z}_2) \le 2|z_1\bar{z}_2|$$

टिप्पणी

चूंकि एक सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग (Real Part) कभी भी अपने मापांक (Modulus) से अधिक नहीं हो सकता है।

तब (5.1) द्वारा दिया गया $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2R(z_1\bar{z}_2)$

$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|,$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|,$

क्योंकि $|z_1\bar{z}_2| = |z_1 z_2|$.

$\therefore \quad |z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$

अत:] $\quad |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

टिप्पणी: चूंकि $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2R(z_1\bar{z}_2)$ योग द्वारा (By Addition)

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + z_2|^2)$ है।

अन्य विधियां (Alternative Methods)

$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ और $z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, लिखने पर हम

$z_1 = z_2 = (r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2)$; पाते हैं

ताकि $|z_1+z_2| = \sqrt{[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)]}$

$\leq \sqrt{[r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2]} \qquad [\because \cos(\theta_1-\theta_2) \leq]$

$= r_1 + r_2 = |z_1| + z_2|$.

अतः, $|z_1| + z_2| \leq |z_1| + z_2|$

ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical Interpretation)

माना कि, P, Q प्रत्यय (Affix) z_1, z_2 के बिन्दु है। समांतर चतुर्भुज (Parallelogram) OPRQ को पूरा करें, तब R प्रत्यय (z_1+z_2) का बिन्दु है।

अब $\quad |z_1| = OP$

$\quad |z_2| = OQ = PR$

और $\quad |z_1+z_2| = OR$

हम जानते हैं कि किसी भी त्रिभुज (Triangle) में, किसी भी दो भुजाओं (Sides) का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

इसलिए OP + PR > OR

या $\quad |z_1|+|z_2| > |z_1+z_2|$

या $\quad |z_1+z_2| < |z_1+z_2|$

यदि O, P और Q एक सीधी रेखा (Straight Line) में हैं तो समानता होगी।

तो हमारे पास हैं $|z_1+z_2| \leq |z_1+z_2|$ ।

टिप्पणी: उपरोक्त प्रमेय से हमारे पास है,

$$|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1 + z_2| + |z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

गुण को आसानी से इस रूप में शामिल करके बढ़ाया जा सकता है,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} zk\right| \le \sum_{k=1}^{n} |zk| \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

प्रमेय 5.3: दो सम्मिश्र संख्याओं (Complex Number) के अंतर का मापांक कभी भी उनके प्रतिरूप के अंतर से कम नहीं हो सकता।

प्रमाण: जैसे–जैसे हम आगे बढ़ते हैं,

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2R(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$\le |z_1|^2 - 2R(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 - 2|z_1 z_2| + |z_2|^2$$

$$= (|z_1| - |z_2|)^2$$

ताकि $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

अन्य विधि: हमारे पास है,

$$z_1 - z_2 = (r_1 \cos\theta_1 - r_1 \cos\theta_2) + i(r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2);$$

इसलिए $|z_1 - z_2| = \sqrt{[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]}$

$$\ge \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2)} \qquad [\because \cos(\theta_1 - \theta_2) \le 1]$$

$$= r_1 - r_2 = |z_1| - |z_2|$$

एक ही कारण के लिए $|z_2 - z_1| \ge |z_2| - |z_1|$

अत: $|z_2 - z_1| \ge |z_1| - |z_2|$

ज्यामितीय व्याख्या (Geometrical Interpretation)

यहां $OP = |z_1|, OQ = |z_2|, OP = |z_1 - z_2|$

चूंकि किसी त्रिकोण अंतर में कोई भी दो भुजा तीसरे भुजा से कम होता है, हमारे पास Δ OPQ, OP – OQ < QP है।

या $|z_1| - |z_2| < |z_1 - z_2|$

या $|z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$

टिप्पणी: हमारे पास है

$$|z_1| = |z_1 - z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$$

या $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$

तर्कों के गुण (Properties of Arguments)

अब हम सम्मिश्र संख्या के तर्कों पर निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 5.4: किसी भी सम्मिश्र संख्या के गुणनफल का तर्क, तर्कों के योग के बराबर होता है।

प्रमाण: माना कि $z_1, z_2, z_3, ..., z_n$ गैर–शून्य सम्मिश्र संख्या (Non-Zero Complex Numbers) हो। $r_1, r_2, ..., r_n$ को उनके मोडुली और $\theta_1, \theta_2, ...\theta_n$ को उनके तर्क के रूप में बताएं।

तब हमारे पास है,

$$z_1 z_2 .... z_n = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_n) r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

$$= r_1 r_2 ... r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)]$$

$\therefore$ $\arg\ (z_1 z_2 ... z_n) = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n = \arg\ z_1 + \arg\ z_2 + ... + \arg\ z_n$

जो प्रमेय सिद्ध करता है।

प्रमेय 5.5: दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल का तर्क उनके तर्कों के अंतर के बराबर है।

प्रमाण: हमारे पास है,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$\therefore$ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg\ z_1 - \arg\ z_2$

सम्मिश्र संख्याओं को क्रम देने की असंभवता (Impossibility of Ordering the Complex Numbers)

रैखिक क्रम की धारणा < सम्मिश्र संख्याओं पर लागू नहीं होती है। यदि संभव हो तो, कल्पना करें कि हम एक क्रम संबंध < को परिभाषित कर सकते हैं, जो कि 2 के Q_1 से Q_5 तक के स्वयंसिद्ध को संतुष्ट करता है। तब, चूँकि $i \neq 0$, हमारे पास या तो $i > 0$ या $i < 0$ है, जो कि स्वयंसिद्ध Q_1 के अनुसार है। विचार करें कि, $i > 0$ तब स्वयंसिद्ध Q_4 में $a = b = i$ लेने पर, हमें i प्राप्त होता है। $i > 0$ अर्थात –|>0| दोनों ओर 1 जोड़ने पर (स्वयंसिद्ध Q_3), हमें प्राप्त होता है $0 > 1$ तथा $1 > 0$। पुनः $-1 > 0$ तथा $1 > 0$ पर स्वयंसिद्ध Q_4 को लागू करने पर, हम देखते हैं कि $(-1) > 0$ या $1 > 0$। इस प्रकार हमारे पास दोनों $0 > 1$ तथा $1 > 0$ हैं जो कि अंतर्विरोधी स्वयंसिद्ध Q_1 है। इसी प्रकार हमारे पास $i > 0$ नहीं है। अतः सम्मिश्र संख्याओं को इस रूप में क्रमबद्ध नहीं किया जा सकता है कि स्वयंसिद्ध Q_2 से Q_5 तक को संतुष्ट किया जा सके।

चूंकि |z|, **R** (z) और **I** (z) वास्तविक संख्या हैं, जैसे कथन

$|z_1| > |z_2|$, **R** $(z_1) <$ **R** (z_2) और **I** $(z_1) >$ **I** (z_2) सार्थक हैं। इसके बाद से

$|z|^2 = \mathbf{R}^2(z) + \mathbf{I}^2(z)$, यह देखना आसान है।

$|z| \geq |\mathbf{R}(z)| \geq \mathbf{R}(z)$ और $|z| \geq |\mathbf{I}(z)| \geq \mathbf{I}(z)$

टिप्पणी

रीमान गोला और अनंत पर बिन्दु (Riemann Sphere and the Point At Infinity)

एक गोले पर बिन्दुओं द्वारा सम्मिश्र संख्याओं का भी निरूपण किया जा सकता है, इसके लिए, एक गोले पर बिन्दुओं और एक सतह पर बिन्दुओं के बीच एक–एक समानता स्थापित करने के लिए पर्याप्त है।

यह समानता त्रिविम आलेखी प्रक्षेपण (Stereographic Projection) के माध्यम से स्थापित किया गया है। इसके लिए हम प्रक्षेपण के शीर्ष (Vertex) के रूप में गोले पर एक बिन्दु लेते हैं और प्रक्षेपण की सतह के रूप में इसके भूमध्यवर्ती तल को लेते हैं। तब किसी भी बिन्दु पर गोले के शीर्ष स्थान के अलावा सतह का एक अद्वितीय बिन्दु (Unique Point) “A” है, इसके विपरीत, सतह के प्रत्येक बिन्दु के लिए, गोले के एक अद्वितीय बिन्दु से मेल खाती है।

विश्लेषणात्मक रूप से हम निम्नानुसार आगे बढ़ सकते हैं,

माना कि गोला,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \qquad ...(5.2)$$

और प्रक्षेपण की सतह (Plane of Projection) हो,

$$Z = 0 \qquad ...(5.3)$$

हम प्रक्षेपण के शीर्ष V को (0, 0, 1) के रूप में लेते हैं।

माना कि, (X, Y, Z) गोले पर किसी बिन्दु A का निर्देशांक है और सहसंबद्ध बिन्दु (Corresponding Point) “A” के निर्देशांक हो जहाँ रेखा V A प्रक्षेपण के सतह से मिलता है।

चूँकि अंक (0, 0, 1), (X, Y, Z), (x, y, 0) एक सीधी रेखा में हैं। हमारे पास है

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z-1}{-1}$$

ये देते हैं $x = \frac{X}{1-Z'}$ $y = \frac{Y}{1-Z}$ ...(5.4)

$$\therefore \qquad z = x + iy = \frac{X+iY}{1-Z} \qquad ...(5.5)$$

और इसके विपरीत, हम (5.2) की मदद से (5.4) से प्राप्त करते हैं।

5.3 विश्लेषणात्मक फलन

जटिल चर (Complex Variable)

$z = x + iy$ को एक सम्मिश्र चर (Complex Variable) कहा जाता है, जहाँ x और y दो स्वतंत्र वास्तविक चर (Independent Real Variables) होते हैं।

अर्गंड सतह (Argand Plane) जिसमें चर z को बिन्दुओं द्वारा दर्शाया जाता है, इसे z–सतह (z-Plane) कहा जाता है। वह बिन्दु जो सम्मिश्र चर का प्रतिनिधित्व करता है, बिन्दु के रूप में जाना जाता है।

एक सम्मिश्र चर का फलन (Function of a Complex Variable)

यदि एक समुच्चय S में प्रत्येक z के लिए, एक अद्वितीय मान (Unique Value) w जुड़ा हुआ है, तो w को z का एक फलन (Function) कहा जाता है और निम्नलिखित द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$w = f(z)$$

S को f की परिभाषा के डोमेन के रूप में जाना जाता है। f की सीमा (Range) के सभी मानों की समग्रता समुच्चय (Totality Set) $f(z)$ है जो कि z से S के अनुसार है।

चूँकि w सम्मिश्र है, इसलिए इसे लिखा जाता है

$$w = f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$$

यहाँ $u\,(x, y)$ और $v\,(x, y)$, x और y के वास्तविक मान फलन (Real Valued Function) हैं और इन्हें w या $f(z)$ फलनों के वास्तविक और काल्पनिक भागों के रूप में जाना जाता है।

उदाहरण 5.1: यदि $w = z^2$ तब,

$$u + iv = (x + iy)^2$$
$$= x^2 - y^2 + i2xy$$

इस प्रकार $u = x^2 - y^2$ और $v = 2xy$

यदि z को ध्रुवीय (Polar) रूप में व्यक्त किया जाता है तो u और v, r और θ के फलन हैं। यदि z के प्रत्येक मान के लिए w का एक अद्वितीय मान (Unique Value) है, तो w को z का एकल मान फलन (Single Valued Function) कहा जाता है।

उदाहरण 5.2: $w = z^2$ और $w = \dfrac{1}{z}$, z के एकल मान फलन हैं।

यदि z के हर मान के लिए w का एक से अधिक मान है, तो w को z का बहु मान फलन (Multi-Valued Function) कहा जाता है।

उदाहरण 5.3: $w = z^{1/4}$ और $w = \text{amp}\,(z)$ के बहु मान फलन हैं। $w = z^{1/4}$ चार मान है और $w = \text{amp}\,(z)$ असीम रूप से $z \neq 0$ के लिए कई मान है।

एक सम्मिश्र चर के एक फलन की सीमा (Limit of a Function of a Complex Variable)

L को $f(z)$ की सीमा के रूप में कहा जाता है क्योंकि z, z_0 के समीप आता है और इसके द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

यदि हर $\in > 0$ के लिए $\delta > 0$ मौजूद है तो ऐसा है $|f(z) - L| < \in$ जब भी $|z - z_0| < \delta$।

यहाँ z किसी भी दिशा से z_0 पर समीप आ सकता है।

$f(z)$ की निरंतरता (Continuity)

एकल मान फलन (Single Valued Function $f(z)$ को एक बिन्दु z_0 पर निरंतर या सतत होना कहा जाता है यदि,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

अर्थात z के रूप में $f(z)$ के मान को सीमित करना z_0 मान $f(z_0)$ के साथ मेल खाता है।

किसी फलन को z–सतह के एक क्षेत्र R में निरंतर या सतत होना कहा जाता है यदि यह क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर निरंतर है।

एक फलन जो z_0 $\lim_{z \to z_0} f(z) \neq f(z_0)$ पर निरंतर नहीं है, को z_0 पर असंतत (Discontinuous) कहा जाता है।

अवकलनीयता (Differentiablility)

एक फलन $f(z)$ को एक बिन्दु z_0 पर अवकलनीय कहा जाता है यदि सीमा,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ with } z = z_0 + \Delta z$$

विद्यमान है। सीमा $f'(z_0)$ को z_0 पर $f(z)$ के व्युत्पन्न के रूप में जाना जाता है। उपरोक्त सीमा z से z_0 तक किसी भी मार्ग के समान होनी चाहिए।

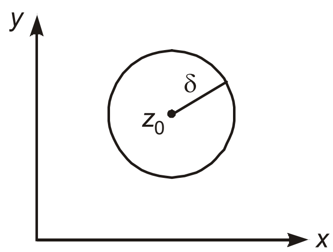
विश्लेषणात्मकता (Analyticity)

एक फलन $f(z)$ को एक बिन्दु z_0 पर विश्लेषणात्मक कहा जाता है अगर यह z_0 पर अवकलज (Derivative) है और z_0 के निकट प्रत्येक बिन्दु पर है।

एक फलन $f(z)$ एक क्षेत्र R में विश्लेषणात्मक (Analytic) है यदि यह क्षेत्र R के प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषणात्मक है।

एक विश्लेषणात्मक फलन को एक नियमित फलन या पूर्णसममितिक फलन (Holomorphic Function) या मोनोजेनिक फलन (Monogenic Function) के रूप में भी जाना जाता है।

एक बिन्दु जिस पर एक फलन $f(z)$ विश्लेषणात्मक नहीं है, अर्थात, इसमें अवकलज नहीं है, एक विलक्षण (Singular) बिन्दु या $f(z)$ की विलक्षणता (Singularity) कहलाता है।



ध्यान दें: एक बिन्दु z_0 के समीपस्थ (Neighbourhood), z के सभी बिन्दुओं का समुच्चय है जिसके लिए $|z-z_0|<\delta$ जहाँ δ एक धनात्मक स्थिरांक (Positive Constant) है।

z_0 का हटाया हुआ समीपवर्ती $0<|z-z_0|<\delta$ है।

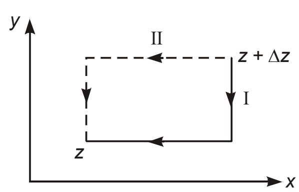
z_0 का वलय (Annulus) $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$

5.4 कॉउची–रीमान समीकरण

कॉउची–रीमान समीकरणों (Cauchy-Riemann Equations) का उपयोग यह सिद्ध करने के लिए किया जाता है कि एक सम्मिश्र फलन विश्लेषणात्मक (Complex Function Analytic) है या नहीं।

प्रमेय 5.6: यदि फलन $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, z–सतह के क्षेत्र (Region) R में विश्लेषणात्मक है तो इस बिन्दु पर पहली कोटि में u और v का आंशिक अवकलज (Partial Derivatives) होता है और कॉउची रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ और } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$



प्रमाण: परिकल्पना के द्वारा (By Hypothesis), f अवकलीय (Differentiable) है इसलिए f'

मौजूद है।

अर्थात,
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

R में हर जगह, जहाँ Δz किसी भी पथ (Path) पर शून्य के निकट (Approach) जा सकता है। हम लिख सकते हैं,

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

पथ I पर विचार करें: $\Delta y\to 0$ और $\Delta x\to 0$

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

$$= u_x + i\, v_x \qquad \ldots(5.6)$$

टिप्पणी

पथ II पर विचार करें: $\Delta x \to 0$ और $\Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i} u_y + v_y$$

$$= -iu_y + v_y \qquad \ldots(5.7)$$

पथ I और पथ II के साथ समीकरणों (5.6) और (5.7) से हमें मिलता है,

$u_x + iv_x = -iu_y + v_y$

इस प्रकार, $u_x = v_y$ और $u_y = -v_x$

ध्यान दें:

1. यदि एक क्षेत्र R में f विश्लेषणात्मक (Analytic) है, तो u, v में सभी बिन्दुओं पर C–R की पदों को पूरा करता है।
2. अवकलज f' समीकरणों (5.6) और (5.7) का उपयोग करके पाया जा सकता है।
3. C–R की स्थिति आवश्यक है लेकिन पर्याप्त नहीं है।
4. आंशिक अवकलज निरंतर होने पर C–R स्थितियाँ पर्याप्त हैं।

किसी फलन के विश्लेषणात्मक होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध (Sufficient Condition For a Function to be Analytic): एकल मूल्यवान सतत फलन (Continuous Function) $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ एक क्षेत्र R के z–सतह पर विश्लेषणात्मक है, यदि चार आंशिक अवकलज u_x, u_y, v_x और v_y में निम्नलिखित विशेषताएं हैं:

(*i*) वे मौजूद हैं।

(*ii*) वे निरंतर हैं।

(*iii*) वे C–R समीकरणों $u_x = v_y$ और $u_y = -v_x$ को संतुष्ट करते हैं, R के प्रत्येक बिन्दु पर।

ध्रुवीय निर्देशांक में कॉउची–रीमान समीकरण (Cauchy-Riemann Equation in Polar Coordinates)

माना $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ तो $z = x + iy$

$\therefore \qquad z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,e^{i\theta}$

इसलिए $\qquad u + iv = f(z) = f(r\,e^{i\theta})$

अर्थात $\qquad u + iv = f(r\,e^{i\theta})$

r और θ के संबंध में आंशिक रूप से अंतर करने पर, हमें मिलता है,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r} = f'(r\,e^{i\theta})\cdot e^{i\theta} \qquad \ldots(5.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = f'(r\,e^{i\theta})\cdot i\,r\,e^{i\theta}$$

$$= ir\left[f'(re^{i\theta})\cdot e^{i\theta}\right] \qquad \ldots(5.9)$$

समीकरण (5.8) को समीकरण (5.9) में प्रतिस्थापित (Substituting) कर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta} = ir\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= ir\frac{\partial u}{\partial r} - r\frac{\partial v}{\partial r}$$

हमें मिलने वाले वास्तविक और काल्पनिक भागों (Real and Imaginary Parts) की तुलना करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ और } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ध्यान दें: अवकल f' का उपयोग करके गणना की जा सकती है,

$$f' = e^{-i\theta}(u_r + i\,v_r)$$

या $\qquad f' = \dfrac{-i}{r\,e^{i\theta}}(u_\theta + i\,v_\theta)$

यदि $w = f(z)$ है तो $f'(z)$ को $\dfrac{dw}{dz}$ के रूप में भी निरूपित किया जाता है,

इस प्रकार, $\qquad \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(u+iv) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

तथा $\qquad \dfrac{dw}{dz} = -i\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$= -i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv) = -i\frac{\partial w}{\partial y}$$

हरात्मक फलन (Harmonic Function)

परिभाषा: एक फलन $f(x, y)$ को एक हरात्मक फलन (Harmonic Function) कहा जाता है यदि यह लाप्लास समीकरण (Laplace Equation) को संतुष्ट करता है, अर्थात,

$\nabla^2 f = 0$

अर्थात, $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

टिप्पणी

5.5 मोबियस रूपांतरण

रूपांतरण (Transformation) को निम्न रूप द्वारा करते हैं,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ...(5.10)$$

जहां z, w सम्मिश्र चर (Complex Variable) होते हैं, a, b, c, d सम्मिश्र स्थिरांक (Complex Constant) होते हैं और $ad - bc \neq 0$ को मोबियस रूपांतरण (Mobius Transformation) कहा जाता है।

समीकरण (5.10) को इस रूप में लिखा जा सकता है,

$$cwz + dw - az - b = 0$$

जो w और साथ ही z में रैखिक (Linear) है; यही कारण है कि समीकरण (5.10) में संबंध को एक द्विरेखीयन रूपांतरण (Bilinear Transformation) कहा जाता है। इसे कभी–कभी रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) भी कहा जाता है। ए.एफ. मोबियस (A.F. Mobius) (1790–1868) के नाम के बाद द्विरेखीय रूपांतरण को मोबियस रूपांतरण (Mobius Transformation) के रूप में जाना जाता है।

समीकरण (5.10) से हमें मिला,

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + b/a}{z + d/c} \qquad ...(5.11)$$

हम देखते हैं कि यदि $b/a = d/c$, अर्थात यदि $ad - bc = 0$ है, तो हमें z के भिन्न मान के लिए w का समान मान मिलता है और यदि $ad - bc \neq 0$ है, तो हमें z के भिन्न मान के लिए का भिन्न मान मिलते हैं।

$\therefore$ $ad - bc$ को रूपांतरण का निर्धारक (Determinant) कहा जाता है।

समीकरण (5.10) से, हम प्राप्त करते हैं $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a} = -\dfrac{d}{c} \cdot \dfrac{w - \frac{b}{d}}{w - \frac{a}{c}}$ ...(5.12)

समीकरण (5.11) से, z-सतह के प्रत्येक बिन्दु को $z = -d/c$ को छोड़कर w-सतह में एक अद्वितीय बिन्दु पर आकलन (Mapped) किया जाता है।

समीकरण (5.12) से, w-सतह के प्रत्येक बिन्दु को $w = a/c$ के अलावा z-सतह में एक अद्वितीय बिन्दु (Unique Point) में आकलन किया जाता है।

उदाहरण के लिए, रूपांतरण $w = \dfrac{3z+5}{z+4}$ एक द्विरेखीय रूपांतरण है क्योंकि (3 . 4 – 5 . 4) = 12 – 5 = 7 ≠ 0

प्रमेय 5.7: प्रत्येक द्विरेखीय रूपांतरण तीन मूल द्विरेखीय रूपांतरणों का परिणाम है।

टिप्पणी

प्रमाण: माना कि, द्विरेखीय रूपांतरण है,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad ...(5.13)$$

जहाँ $ad - bc \neq 0$ और $c \neq 0$।

या $$w = \frac{a}{c}\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\left[\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} - 1\right]$$

$$= \frac{a}{c} + \left[\frac{z+\frac{b}{a}-z-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right]\frac{a}{c}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{z+\frac{d}{c}}\frac{a}{c}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)}{ac\left(z+\frac{d}{c}\right)}\cdot\frac{a}{c}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$$

यह रूपांतरण तीन रूपांतरणों का परिणाम है,

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = \frac{bc-ad}{c^2} z_2$$

$$\therefore \qquad w = \frac{a}{c} + z_3$$

जिसे उसी तरह से प्रभावित किया जा सकता है जैसे $z_1 = \frac{d}{c} + z$ को प्रभावित किया जाता है। उपरोक्त तीन सहायक रूपांतरण के रूप हैं,

$$w = z + \alpha, w = \frac{1}{z}, w = \beta z$$

जो द्विरेखीय रूपांतरण हैं।

इसलिए दिए गए द्विरेखीय रूपांतरण रूप के द्विरेखीय रूपांतरणों का परिणाम है,

$$w = z + \alpha, \ w = \beta z, \ w = \frac{1}{z}$$

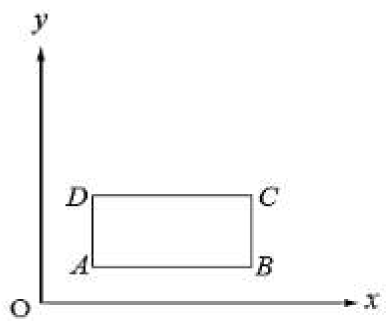
मूल रूपांतरण (Basic Transformations)

अनुवाद: रूपांतरण $w = z + \alpha$ को अनुवाद कहा जाता है, जहाँ $\alpha = a + ib$

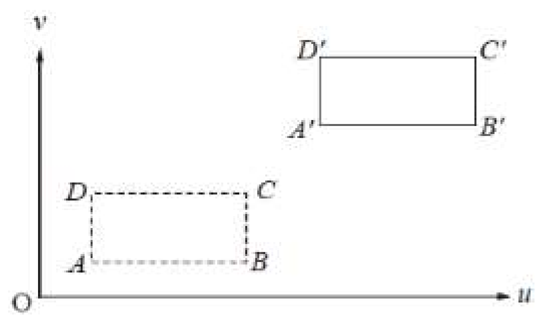
$\therefore \quad w = u + iv = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i\,(y + b)$

$\therefore \quad u = x + a, \ v = y + b$

इसलिए, z-सतह में बिन्दु $P(x, y)$ को w-सतह में बिन्दु $P'(x+a, y+b)$ पर अंकित किया जाता है। इसी तरह, z-सतह के अन्य बिन्दुओं को w-सतह पर अंकित (Mapped) किया जाता है। इस प्रकार अगर w-सतह को z-सतह पर अधिरोपित (Superposed) किया जाता है, तो w-सतह का आकृति सदिश (Vector) α के माध्यम से परिवर्तित किया जाता है।



z-सतह (z-Plane)



w-सतह (w-Plane)

आवर्धन और घूर्णन

रूपांतरण $w = \beta z$ को आवर्धन (Magnification) और घूर्णन (Rotation) कहा जाता है जहां w, β, z सम्मिश्र संख्या (Complex Number) हैं।

माना कि, $w = Re^{i\phi}, \beta = ae^{i\alpha}, z = re^{i\theta}$ है,

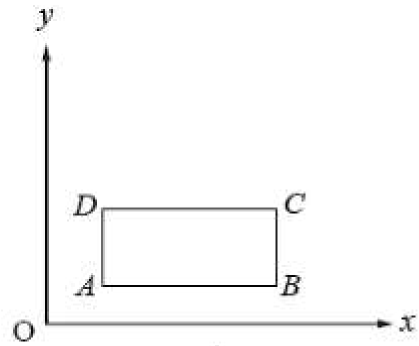
तब हम $w = \beta z$, से प्राप्त करते हैं,

$$Re^{i\phi} = (ae^{i\alpha})(re^{i\theta}) = (ar)\, e^{i(\theta+\alpha)}$$

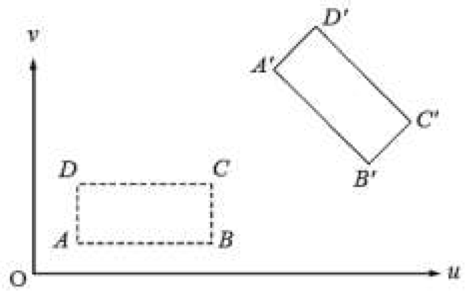
$\therefore \quad R = ar$ और $\phi = \theta + \alpha$

इससे पता चलता है कि रूपांतरण $w = \beta z$, आवर्धन के साथ एक घूर्णन के अनुरूप है।

टिप्पणी



z-सतह



w-सतह

व्युत्क्रम (Inversion)

रूपांतरण $w = \frac{1}{z}$ को व्युत्क्रम (Inversion) कहा जाता है।

माना कि, $z = re^{i\theta}$ और $w = Re^{i\phi}$ तो हम प्राप्त करते हैं,

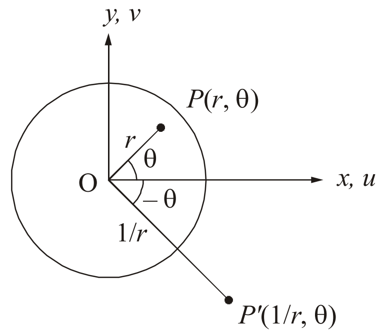
$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{r} \text{ and } \phi = -\theta$$

इसलिए z-सतह में बिन्दु $P(r, \theta)$ को w-सतह में बिन्दु $P'\left(\frac{1}{r}, -\theta\right)$ पर अंकित किया जाता है।

इसलिए, रूपांतरण z का व्युत्क्रम है और वास्तविक अक्ष (Real Axis) में प्रतिबिम्ब के बाद होता है। इकाई वृत्त (Unit Circle) के अंदर के बिन्दु ($|z| = 1$) इसके बाहर के बिन्दुओं पर अंकित करते हैं, और इकाई वृत्त के बाहर के बिन्दुओं को इसके अंदर बिन्दुओं में रखते हैं।

टिप्पणी



प्रमेय 5.8: द्विरेखीय रूपांतरण,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

वृत को $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \lambda$ को एक समान वृत (Similar Circle) $\arg \frac{w-w_1}{w-w_2} =$ स्थिरांक (Constant) में बदल देता है जहाँ w_1, w_2 क्रमशः z_1, z_2 के अनुसार होते हैं।

प्रमाण: यहाँ, $w = \frac{az+b}{cz+d}$

चूंकि w_1, w_2 क्रमशः z_1, z_2 के अनुसार है, तो

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d} \text{ और } w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

$$\therefore \qquad \frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}} = \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \; \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

$$= \beta \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ जहाँ } \beta = \frac{cz_2+d}{cz_1+d}$$

$$\therefore \quad \arg\left(\frac{w-w_1}{w-w_2}\right) = \arg\left(\beta \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}\right)$$

$$= \arg \beta + \arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)$$

$$= \arg \beta + \lambda$$

$$\therefore \quad \arg\left(\frac{w-w_1}{w-w_2}\right) = k$$

जहाँ k वास्तविक है जो एक w–सतह में एक वृत्त है जो दो निश्चित बिन्दुओं (Fixed Point) w_1, w_2 से होकर गुजरता है, जो z_1, z_2 के प्रतिबिंब (Image) हैं।

क्रॉस अनुपात (Cross Ratio)

माना कि z_1, z_2, z_3, z_4 कोटि में लिए गए चार बिन्दु हैं, तब अनुपात को निम्न द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)} \qquad \ldots(5.14)$$

z_1, z_2, z_3, z_4 का अनुप्रस्थ अनुपात (Cross Ratio) कहलाता है जिसे (z_1, z_2, z_3, z_4) द्वारा निरूपित किया जाता है।

प्रमेय 5.9: प्रत्येक द्विरेखीय रूपांतरण अनुप्रस्थ अनुपात को संरक्षित करता है।

प्रमाण: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ एक द्विरेखीय रूपांतरण है जहाँ w_1, w_2, w_3, w_4 क्रमशः z_1, z_2, z_3, z_4 के प्रतिबिंब हैं, तो हम यह सिद्ध करेंगे कि w_1, w_2, w_3, w_4 का अनुप्रस्थ अनुपात z_1, z_2, z_3, z_4, के अनुप्रस्थ अनुपात से बराबर है, अर्थात,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

चूंकि w_1, w_2, w_3, w_4 क्रमशः z_1, z_2, z_3, z_4 के प्रतिबिंब हैं, फिर

तब $\quad w_1 = \dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d}, w_2 = \dfrac{az_2 + b}{cz_2 + d}, w_3 = \dfrac{az_3 + b}{cz_3 + d}$

और $\quad w_4 = \dfrac{az_4 + b}{cz_4 + d}$

$$\therefore \qquad w_1 - w_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \qquad \ldots(5.15)$$

उसी प्रकार, $w_2 - w_3 = \dfrac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}$ $\qquad$ ...(5.16)

$$w_3 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_3 - z_4)}{(cz_3 + d)(cz_4 + d)} \qquad \ldots(5.17)$$

और, $\quad w_4 - w_1 = \dfrac{(ad - bc)(z_4 - z_1)}{(cz_4 + d)(cz_1 + d)}$ $\qquad$ ...(3.18)

समीकरणों (5.15), (5.16), (5.17) और (5.18) से हम प्राप्त करते हैं,

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_3)(w_4 - w_1)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

और $\qquad (w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$

उदाहरण 5.4: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं, जो z-सतह के क्रमशः z_1, z_2, z_3 को w-सतह के w_1, w_2, w_3 के बिन्दुओं में बदल देता है।

हल : माना $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ एक द्विरेखीय रूपांतरण है।

चूंकि w_1, w_2, w_3, क्रमशः z_1, z_2, z_3, के प्रतिबिंब हैं, फिर

$$w_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d},\ w_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \text{ और } w_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}$$

$$\therefore \qquad w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)} \qquad \ldots(i)$$

टिप्पणी

उसी प्रकार, $w_1 - w_2 = \dfrac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$ ...(ii)

$$w_2 - w_3 = \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)} \quad \text{...(iii)}$$

और $w_3 - w = \dfrac{(ad-bc)(z_3-z)}{(cz_3+d)(cz+d)}$ ...(iv)

समीकरणों (i), (ii), (iii) और (iv) से

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$$

यह आवश्यक रूपांतरण है। इस रूपांतरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है,

$w = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ जहाँ α, β, γ और δ सम्मिश्र स्थिरांक हैं।

उदाहरण 5.5: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं, जो क्रमशः $z = \infty, i, 0$ को बिन्दु w $w = 0, i, \infty$ में बदलता है।

हलः हम जानते हैं कि द्विरेखीय रूपांतरण, प्रतिचित्रण $z = z_1, z_2, z_3$ में $w = w_1, w_2, w_3$ क्रमशः है,

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$$

यहाँ $z_2 = i,\ z_3 = 0, w_1 = 0, w_2 = i, z_1 \to \infty$ और $w_3 \to \infty$

$$\therefore \frac{(w-o)(i-w_3)}{(o-i)(w_3-w)} = \frac{(z-z_1)(i-o)}{(z_1-i)(o-z)}$$

और $\dfrac{w\left(\dfrac{i}{w_3}-1\right)}{(-i)\left(1-\dfrac{w}{w_3}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{z}{z_1}-1\right)(i)}{\left(1-\dfrac{i}{z_1}\right)(0-z)}$

और $\dfrac{w}{i} = \dfrac{i}{z}$ $(\because\ z_1 \to \infty, w_3 \to \infty)$

और $w = -\dfrac{1}{z}$

जो आवश्यक रूपांतरण है।

उदाहरण 5.6: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं, जो $z = 2, 1, 0$ को $w = 1, 0, i$ में बदलता है।

हल: हम जानते हैं कि द्विरेखीय रूपांतरण जो बिन्दुओं को $z = z_1, z_2, z_3$ रूपांतरित रूप से $w = w_1, w_2, w_3$ में बदल देता है।

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$$

और $\dfrac{i-iw}{i-w} = \dfrac{2-z}{z}$

$(i - iw)z = (i - w)(2 - z)$

और $iz - iwz = i(2 - z) - w(2 - z)$

और $\{-iz + 2 - z\}w = i(2 - z) - iz = 2i - 2iz$

टिप्पणी

और $w = \dfrac{2i - 2iz}{2 - (1+i)z} = \dfrac{2i(z-1)}{z(1+i) - 2}$

जो आवश्यक रूपांतरण है।

उदाहरण 5.7: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं जो प्रतिचित्र $z = 1, z = i$ और $z = -1$ को बिन्दुओं $w = i, w = 0$ और $w = -i$ में प्रदर्शित करता है।

हल: हम जानते हैं कि द्विरेखीय रूपांतरण जो प्रतिचित्रों को क्रमशः $z = z_1, z_2, z_3$ को $w = w_1, w_2, w_3$ में बदल देता है,

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}$$

यहां $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, w_1 = i, w_2 = 0$ और $w_3 = -i$

$\therefore \quad \dfrac{(w-i)(0+i)}{(i-0)(-i-w)} = \dfrac{(z-1)(i+1)}{(1-i)(-1-z)}$

और $\dfrac{i(w-i)}{-i(w+i)} = \dfrac{(z-1)(1+i)}{(z+1)(i-1)}$

और $(w - i)(z + 1)(i - 1) = -(w + i)(z - 1)(1 + i)$

और $(wi - i^2 - w + i)(z + 1) = (1 - z)(w + wi + i^2 + i)$

और $(wi - w + 1 + i)(z + 1) = (1 - z)(w + wi + i - 1)$

और $w\{(i - 1)(z + 1) - (1 - z)(1 + i)\} = \{(i - 1)(1 - z) - (z + 1)(1 + i)\}$

और $w\{zi - z + i - 1 - 1 - i + z + zi\} = \{i - 1 - zi + z - z - zi - 1 - i\}$

और $w\{2zi - 2\} = \{-2 - 2zi\}$

और $w = \dfrac{-(zi+1)}{zi - 1}$

जो आवश्यक रूपांतरण है।

एक वृत्त का द्विरेखीय रूपांतरण (Bilinear Transformation of a Circle)

प्रमेय 5.10: द्विरेखीय रूपांतरण $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ z-सतह के एक वृत्त को w-सतह के एक वृत्त में बदल देता है और व्युत्क्रम बिन्दु, व्युत्क्रम बिन्दुओं में बदल जाते हैं।

प्रमाण: यहाँ रूपांतरण $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ है। …(5.19)

हम जानते हैं कि $\left|\dfrac{z-p}{z-q}\right| = r$ …(5.20)

व्युत्क्रम बिन्दु (Inverse Point) p, q के साथ z–सतह में एक वृत्त का प्रतिनिधित्व करता है। यदि $r = 1$, समीकरण एक रेखा का निरूपण करता है जो कि बिन्दु p, q के सम्मिलित होने का सही द्विभाजक (Bisector) है।

समीकरण (5.19) से, हम देखते हैं कि z-सतह में बिन्दु p, q क्रमशः w-सतह (w-Plane) में $\frac{ap+b}{cp+d}$ और $\frac{aq+b}{cq+d}$ के बिन्दुओं के अनुसार हैं।

टिप्पणी

समीकरणों (5.18) और (5.19) से, हम प्राप्त करते हैं

$$\left|\frac{w-\frac{ap+b}{cp+d}}{w-\frac{aq+b}{cq+d}}\right| = k\left|\frac{cq+d}{cp+d}\right| \qquad ...(5.21)$$

जहां $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$

यह समीकरण दिखाता है कि यह w-सतह में एक वृत्त का निरूपण करता है, जिसके व्युत्क्रम बिन्दु हैं,

$\frac{ap+b}{cp+d}$ और $\frac{aq+b}{cq+d}$

इसलिए z-सतह में एक वृत्त w-सतह में एक वृत्त में बदल जाता है, और व्युत्क्रम बिन्दु व्युत्क्रम बिन्दुओं में बदल जाते हैं।

उदाहरण 5.8: इस स्थिति का पता लगाएं कि रूपांतरण $w = \frac{az+b}{cz+d}$ w-सतह में इकाई वृत्त को z-सतह में एक सीधी रेखा में रूपांतरित करता है।

हल: यहाँ रूपांतरण है,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$$

इसलिए इकाई वृत $|w| = 1$, w-सतह में देता है,

$$|w| = 1 = \left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right|$$

और $$\left|\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right| = \left|\frac{c}{a}\right|$$

जो एक रेखा का निरूपण करता है जब $\left|\frac{c}{a}\right| = 1$ या $|a| = |c|$ होता है।

अतः आवश्यक स्थिति $|a| = |c|$ है।

ध्यान दें:

1. समीकरण

$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k$ है।

$k = 1$ या $k \neq 1$ के अनुसार एक रेखा या वृत्त का निरूपण करता है।

2. द्विरेखीय रूपांतरण $w = \frac{az+b}{cz+d}$, z-सतह में एक वृत को w-सतह में एक सीधी रेखा में बदल देता है और व्युत्क्रम बिन्दु इस रेखा के बारे में सममित (Symmetrical) रूप में रूपांतरण होता है।

उदाहरण 5.9: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं जो सतह $I(z) > 0$ को इकाई वृत $|w| \leq 1$ में बदल देता है।

हल: द्विरेखीय रूपांतरण है,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \qquad ...(i)$$

जो $I(z) = 0$ को $|w| = 1$ में बदल देता है।

इसलिए, z-सतह में वास्तविक अक्ष w-सतह में इकाई वृत में बदल जाता है। इसलिए, बिन्दु w, $1/\overline{w}$ (इकाई वृत के संबंध में व्युत्क्रम) क्रमशः z, $\overline{z}$ (z-सतह में वास्तविक अक्ष (Real Axis) के संबंध में व्युत्क्रम) में बदल जाता है। बिन्दु $w = 0$, $w = \infty$ बिन्दु α, $\overline{\alpha}$ के अनुरूप है।

इसलिए समीकरण (i) से हम $\frac{-b}{a} = \alpha$, $-\frac{d}{c} = \overline{\alpha}$ प्राप्त करते हैं

$$\therefore \qquad w = \frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \qquad ...(ii)$$

बिन्दु $z = 0$ बिन्दु $|w| = 1$ से मेल खाती है; तब समीकरण (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$|w| = 1 = \left|\frac{a}{c}\right| \left|\frac{-\alpha}{-\alpha}\right| \text{ or } 1 = \left|\frac{a}{c}\right| \left|\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\right|$$

या $\quad 1 = \left|\frac{a}{c}\right| \qquad (\because\ |\alpha| = |\overline{\alpha}|)$

या $\quad \frac{a}{c} = e^{i\lambda} \qquad ...(iii)$

जहाँ λ वास्तविक है।

समीकरणों (ii) और (iii) से

$$w = e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$$

प्रतिचित्रण (Mapping) $I(z) = 0$ में $|w| = 1$ के लिए आवश्यक परिवर्तन है।

पुनः $\quad w\overline{w} - 1 = \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} e^{i\lambda} \frac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{z}-\alpha}\ e^{-i\lambda} - 1$

या $\quad |w|^2 - 1 = \frac{(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})}{(z-\overline{\alpha})(\overline{z}-\alpha)} - 1 = \frac{(z-\overline{z})(\alpha-\overline{\alpha})}{|z-\overline{\alpha}|^2}$

$$= \frac{2i\,I(z)\,2i\,I(\alpha)}{|z-\overline{\alpha}|^2} = -\frac{4I(z)\,I(\alpha)}{|z-\overline{\alpha}|^2}$$

टिप्पणी

चूँकि, $w = 0, \alpha$ से मेल खाता है, तो $I(\alpha) > 0$।

इसलिए, $|w|^2 - 1 < 0$ के लिए $I(z) > 0$

या $|w|^2 < 1,\ I(z) > 0$

इसलिए, $w = e^{i\lambda}\, \dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ जो आवश्यक रूपांतरण है।

उदाहरण 5.10: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं जो अर्ध सतह $Re\,(z) \geq 0$ को इकाई वृत्त $|w| \leq 1$ में बदल देता है।

हल: द्विरेखीय रूपांतरण है,

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} \qquad \text{...(i)}$$

जो $Re(z) = 0$ को $|w| = 1$ में बदल देता है। इसलिए, z-सतह में काल्पनिक अक्ष w-सतह में इकाई वृत्त में बदल जाता है।

इसलिए w-सतह में $w,\ 1/\bar{w}$ (इकाई वृत्त के संबंध में व्युत्क्रम) को z-सतह में बिन्दु $z, -\bar{z}$ (काल्पनिक अक्ष के संबंध में व्युत्क्रम) में बदल दिया जाता है।

बिन्दु $w = 0, \infty$ बिन्दु $\alpha, -\bar{\alpha}$ के अनुरूप हैं।

इसलिए समीकरण (i) से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{-b}{a} = \alpha,\ \frac{-d}{c} = -\bar{\alpha}$$

$$\therefore \qquad w = \frac{a}{c}\,\frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}} \qquad \text{...(ii)}$$

बिन्दु $z = 0$ बिन्दु $|w| = 1$, से मेल खाता है, फिर समीकरण (ii) से, हम प्राप्त करते हैं

$$|w| = 1 = \left|\frac{a}{c}\right| \left|\frac{-\alpha}{\bar{\alpha}}\right|$$

या $$1 = \left|\frac{a}{c}\right| \qquad (\because |\alpha| = |\bar{\alpha}|)$$

या $$\left|\frac{a}{c}\right| = e^{i\lambda} \qquad \text{...(iii)}$$

जहाँ λ वास्तविक (Real) है।

समीकरणों (ii) और (iii) से, हम प्राप्त करते हैं

$$w = e^{i\lambda}\,\frac{z-\alpha}{z-\bar{\bar{\alpha}}}$$

$|w| = 1$ में $Re(z)$ आंकलन के लिए आवश्यक रूपांतरण है।

चूँकि $w = 0, \alpha$ से मेल खाता है, तो $Re(z) \geq 0$।

$$\therefore \qquad w\bar{w} - 1 = \frac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}} e^{i\lambda} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{z}+\alpha}\; e^{-i\lambda} - 1$$

या $$|w|^2 - 1 = \frac{(z-\alpha)}{(z+\bar{\alpha})}\frac{(\bar{z}-\bar{\alpha})}{(\bar{z}+\alpha)} - 1$$

$$= -\frac{(z-\bar{z})(\alpha+\bar{\alpha})}{|(z+\bar{\alpha}|^2}$$

$$= -\frac{2\,\text{Re}(z)\, 2\,\text{Re}(\alpha)}{|(z+\bar{\alpha}|^2} \quad \text{जहाँ } \text{Re}(\alpha) > 0$$

$\therefore \quad |w|^2 - 1 \quad < 0$ के लिए $\text{Re}(z) > 0$।

इसलिए $w = \dfrac{z-\alpha}{z+\bar{\alpha}}$ आवश्यक रूपांतरण है।

उदाहरण 5.11: उन सभी द्विरेखीय रूपांतरणों का पता लगाएं, जो इकाई वृत्त $|z| \le 1$ को इकाई वृत्त $|w| \le 1$ में बदलते हैं।

हल: द्विरेखीय रूपांतरण है

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\;\frac{z+\dfrac{b}{a}}{z+\dfrac{d}{c}} \qquad \text{...(i)}$$

जो वृत्त $|z| = 1$ को वृत्त $|w| = 1$ में बदल देता है।

इसलिए w-सतह में w, $1/\bar{w}$ (वृत्त $|w| = 1$ के संबंध में व्युत्क्रम) z-सतह में z, $\dfrac{1}{\bar{z}}$ (वृत्त $|z| = 1$ के संबंध में व्युत्क्रम) के अनुसार हैं।

बिन्दु $w = 0, \infty$ बिन्दु $\alpha, \dfrac{1}{\bar{a}}$, के अनुरूप हैं, फिर समीकरण (i) से हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{-b}{a} = \alpha, \quad \frac{-d}{c} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

$$\therefore \qquad w = \frac{a}{c}\;\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}} \qquad \text{...(ii)}$$

बिन्दु $z = 1$ बिन्दु $|w| = 1$ से मेल खाती है; तब समीकरण (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$|w| = 1 = \left|\frac{a}{c}\cdot\frac{1-\alpha}{1-\dfrac{1}{\bar{\alpha}}}\right| = \left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\right| \left|\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right| = \left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\right| \left|\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}\right|$$

या $$1 = \left|\frac{a\bar{\alpha}}{c}\right| \qquad (\because |1-\alpha| = |1-\bar{\alpha}|)$$

या $\left|\dfrac{a\bar{\alpha}}{c}\right| = e^{i\lambda}$ जहां λ वास्तविक है। $\qquad$ …(iii)

समीकरणों (ii) और (iii) से, हम प्राप्त करते हैं,

$$w = e^{i\lambda}\,\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}$$

टिप्पणी

यह वह रूपांतरण (Transformation) है जो $|z|=1$ को $|w|=1$ में मानचित्रित करता है।

$$w\bar{w}-1 = e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}\; e^{-i\lambda}\frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{\bar{z}\alpha-1}-1$$

$$|w|^2-1 = \frac{(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})}{(z\bar{\alpha}-1)(\bar{z}\alpha-1)}-1$$

$$= -\frac{(1-z\bar{z})(1-\alpha\bar{\alpha})}{|z\bar{\alpha}-1|^2}$$

$$= -\frac{(1-|z|^2)(1-|\alpha|^2)}{|z\bar{\alpha}-1|^2} \text{ जहां } |\alpha|<1$$

या $|w|<1, |z|<1$ से मेल खाती है।

इसलिए $w = e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}$ आवश्यक रूपांतरण है।

उदाहरण 5.12: दर्शाएँ कि रूपांतरण $w=\dfrac{2z+3}{z-4}$ वृत्त $x^2+y^2-4x=0$ को रूपांतरित करता है सीधी रेखा $4u+3=0$ में जहाँ $w=u+iv$ है।

हल: यह रूपांतरण है,

$$w = \frac{2z+3}{z-4}$$

या $\quad wz-4w = 2z+3$

या $\quad (wz-2z) = 4w+3$

या $\quad z = \dfrac{4w+3}{w-2}$

$\therefore \quad \bar{z} = \dfrac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}$

दिए गया वृत्त $x^2+y^2-4x=0$ है

या $\quad (x+iy)(x-iy)-4x=0$

या $\quad z\bar{z}-2(z+\bar{z})=0 \qquad [\because z+\bar{z}=2x]$

या $\quad \dfrac{4w+3}{w-2}\cdot\dfrac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}-2\left(\dfrac{4w+3}{w-2}+\dfrac{4\bar{w}+3}{\bar{w}-2}\right)=0$

या $\quad (4w+3)(4\bar{w}+3)-2[(4w+3)(\bar{w}-2)+(4\bar{w}+3)(w-2)]=0$

या $\quad 16w\bar{w}+12w+12\bar{w}+9-8w\bar{w}+16w-6\bar{w}+12-8w\bar{w}+16\bar{w}-6w+12=0$

या $\quad 22w+22\bar{w}+33=0$

या $\quad 2(2+\bar{w})+3=0$

या $4u + 3 = v,\ w = u + iv$ लिखेंगे।

जो कि w-सतह में एक सीधी रेखा (Straight Line) है।

टिप्पणी

उदाहरण 5.13: w-सतह पर, $w = \dfrac{i - z}{i + z}$ रूपांतरण के तहत, x-अक्ष का प्रतिचित्रण प्राप्त कीजिए।

हल: दिया गया रूपांतरण $w = \dfrac{i-z}{i+z}$ है।

$$u + iv = \frac{i - x - iy}{i + x + iy} = \frac{-x - i(y-1)}{x + i(y+1)}$$

$$= \frac{-x - i(y-1)}{x + i(y+1)} \cdot \frac{x - i(y+1)}{x - i(y+1)}$$

$$= \frac{-x^2 + ix + ix - y^2 + 1}{x^2 + (y+1)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 1 + i(2x)}{x^2 + (y+1)^2}$$

वास्तविक और काल्पनिक भागों को बराबर करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$u = \frac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + (y+1)^2}, \quad v = \frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}$$

x अक्ष का प्रतिचित्रण प्राप्त करने के लिए, हमने उपरोक्त समीकरण में $y = 0$ प्रतिस्थापित किया और इस प्रकार हमें मिलता है,

$$u = \frac{-x^2 + 1}{x^2 + 1} \qquad ...(i)$$

और

$$v = \frac{2x}{x^2 + 1} \qquad ...(ii)$$

समीकरण (i) से, हमें $ux^2 + u = -x^2 + 1$ मिलता है,

या $x^2 (u + 1) = 1 - u$

या $x^2 = \dfrac{1-u}{1+u}$

समीकरण (ii) में x का मान रखते हुए हम प्राप्त करते हैं,

$$v = \frac{\sqrt{\dfrac{1-u}{1+u}}}{\dfrac{1-u}{1+u} + 1} = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} \cdot \frac{1+u}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1-u)(1+u)}$$

या $v^2 = \dfrac{1-u^2}{4}$

या $4v^2 + u^2 = 1$

या $\dfrac{u^2}{4} + \dfrac{v^2}{1} = 1$

जो एक दीर्घवृत्त (Ellipse) का निरूपण करता है।

टिप्पणी

क्रांतिक बिन्दु: एक बिन्दु जिस पर $f'(z) = 0$ रूपांतरण का एक क्रांतिक बिन्दु (Critical Point) कहा जाता है।

कुछ विशेष रूपांतरण

1. रूपांतरण, $w = z^n$ जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है:

यहां $w = z^n$, तो $\dfrac{dw}{dz} = nz^{n-1}$

$\therefore \quad \dfrac{dw}{dz} = 0$ पर $z = 0$

इसलिए रूपांतरण $z = 0$ को छोड़कर सभी बिन्दुओं पर संकलित है।

माना कि $z = re^{i\theta}$ और $w = Re^{i\phi}$, तो $w = z^n$ देता है,

$Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta}$

$\therefore R = r^n$ ...(5.22)

और $\phi = n\theta$ ...(5.23)

समीकरणों (5.22) और (5.23) से, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं:

(i) z-सतह में उद्‌गम के संबंध में वृत $r = a =$ स्थिरांक, w-सतह में उत्पत्ति के संबंध में वृत $R = a^n =$ स्थिरांक पर रूपांतरित होता है।

(ii) z-सतह में उद्‌गम के संबंध में पंक्तियाँ $\theta = \beta =$ स्थिरांक, w-सतल में उद्‌गम के संबंध में $\phi = n\beta =$ स्थिरांक में बदल जाती है और ϕ-रेखा का ढलान (Slope) θ-रेखा के ढलान से n गुना होता है।

(iii) z-सतह में मूल रूप से अपने शीर्ष के साथ वृत्ताकार क्षेत्र (Circular Sector) मूल और n केंद्रीय कोण पर अपने शीर्ष के साथ एक वृत्ताकार क्षेत्र में बदल जाता है।

(iv) केंद्रीय कोण π/n के साथ वृत्ताकार क्षेत्र का आंतरिक भाग, ऊपरी अर्धतल $i(w) > 0$ की अनुरूपता से रूपांतरित होता है।

2. रूपांतरण $w = z^2$:

यहाँ $w = z^2$, तो $\dfrac{dw}{dz} = 2z$

$\therefore \quad \dfrac{dw}{dz} = 0$ के लिए $z = 0$

इसलिए रूपांतरण $z = 0$ को छोड़कर सभी बिन्दुओं पर संकलित (Conformat) है।

अब $w = z^2$ देता है।

$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + i\,(2xy)$

$\therefore \quad u = x^2 - y^2$ ...(5.24)

और $\quad v = 2xy$ ...(5.25)

टिप्पणी

समीकरणों (5.24) और (5.25) से, हम रूपांतरण के निम्नलिखित तथ्यों को शामिल कर सकते हैं।

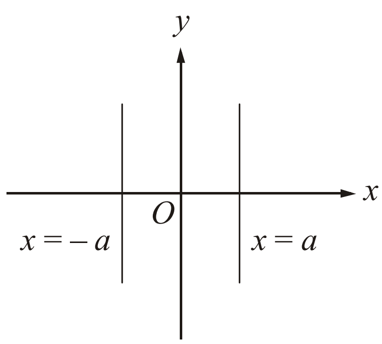
(i) जब x = स्थिर $= a$, तब समीकरणों (5.24) और (5.25) से, हम प्राप्त करते हैं,

$u = a^2 - y^2$ और $v = 2ay$

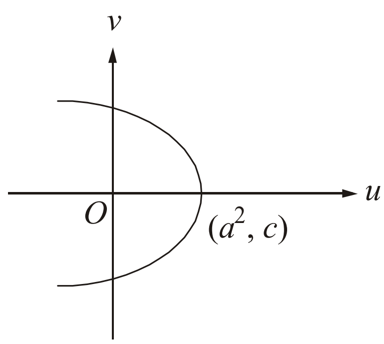
उपरोक्त संबंधों से y को विस्थापित करते (Eliminating) हुए, हम प्राप्त करते हैं,

$v^2 = 4a^2y^2 = 4a^2\ [a^2 - u^2]$

इसलिए z-सतह में रेखा $x = a$, w-सतह में परवलय (Parabola) में बदल जाता है जिसका शीर्ष (Vertex) (a^2, c) होता है और केन्द्र मूल पर होता है। $a = -a$ के लिए, हमें समान परवलय मिलता है।

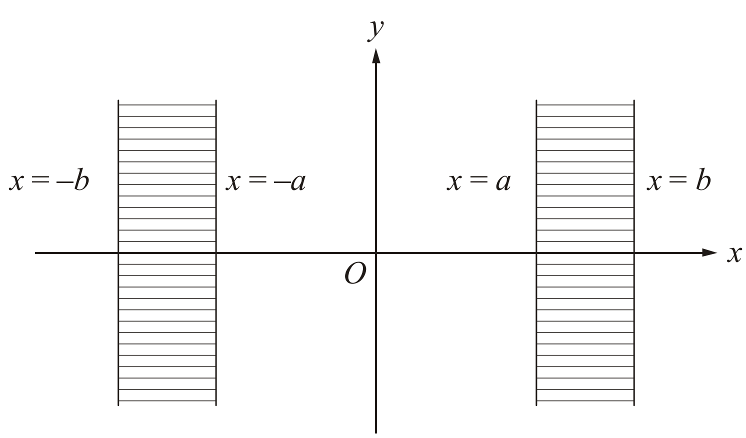


z–सतह

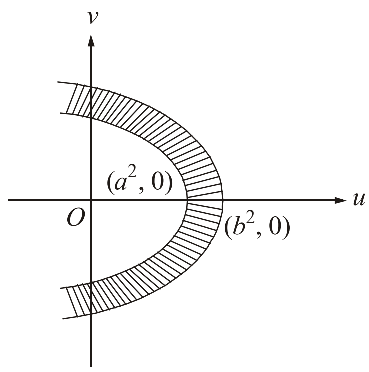


w–सतह

(ii) z–सतह में रेखाओं के बीच की पट्टी के लिए $x = a$ और $x = b$,w–सतह में $x = \lambda$ जहाँ $a \le \lambda \le b$ को परवलय $v^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - u)$ में बदल दिया जाता है। इसलिए, z–सतह में रेखाएं $x = a$ और $x = b$ द्वारा घिरे क्षेत्र को w–सतह में परवलय $v^2 = 4a^2\ (a^2 - u)$ और $v^2 = 4b^2\ (b^2 - u)$ से घिरे क्षेत्र में बदल दिया जाता है। $x - a$ और $\lambda = -b$, के लिए, हमें समान परवलय मिलता है।

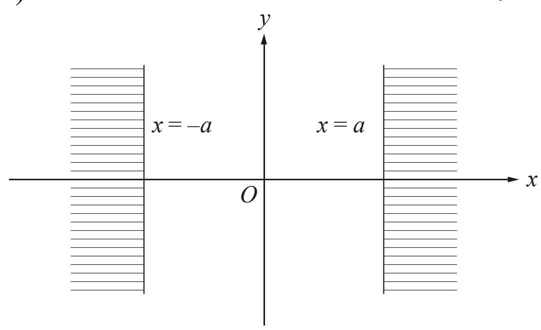


z–सतह

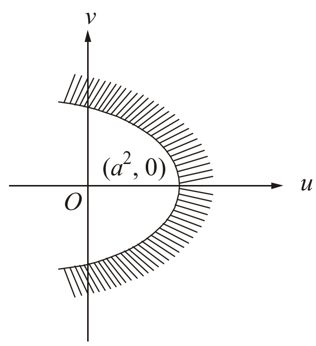


w–सतह

(iii) *z*–सतह में क्षेत्र $x \geq a$ और $x \leq -a$ को *w*–सतह में परवलय $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ के बाहरी हिस्से में बदल दिया जाता है।

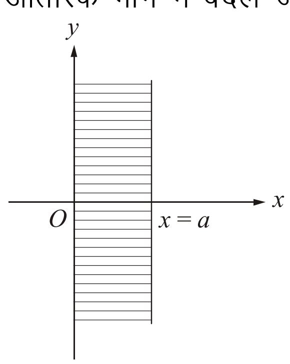


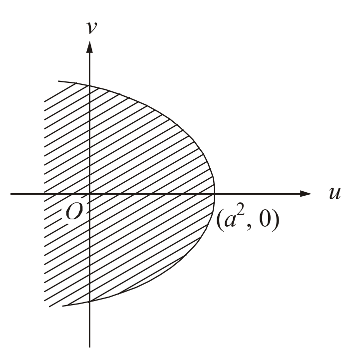
z–सतह



w–सतह

(iv) *z*–सतह में क्षेत्र $0 \leq x \leq a$ पर *w*–सतह परवलय $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ के आंतरिक भाग में बदल जाता है।





z–सतह *z*–सतह

टिप्पणी

3. रूपांतरण $z = \sqrt{w}$ (जो $w = z^2$ का व्युत्क्रम प्रतिचित्रण है),

अब $z = \sqrt{w}$ तो $w = z^2$ or $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,(2xy)$

$\therefore \qquad u = x^2 - y^2 \qquad ...(5.26)$

और $\qquad v = 2xy \qquad ...(5.27)$

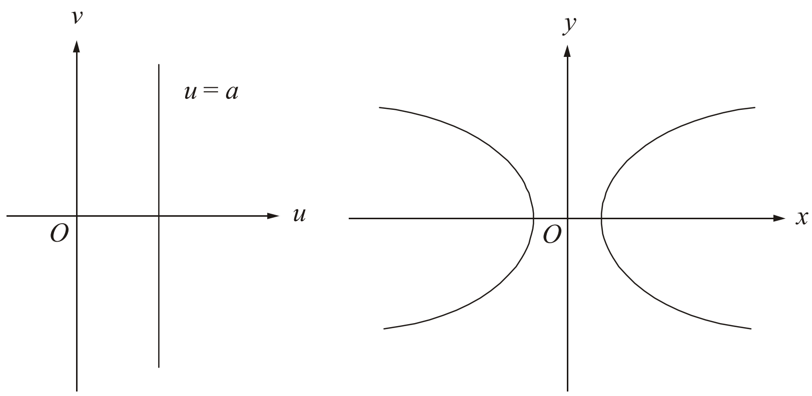
समीकरणों (5.26) और (5.27) से, हम रूपांतरण के निम्नलिखित तथ्यों का निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

(i) जब u = स्थिरांक $= a\ (> 0)$, तब समीकरण (5.26) से हम प्राप्त करते हैं

$$x^2 - y^2 = a$$

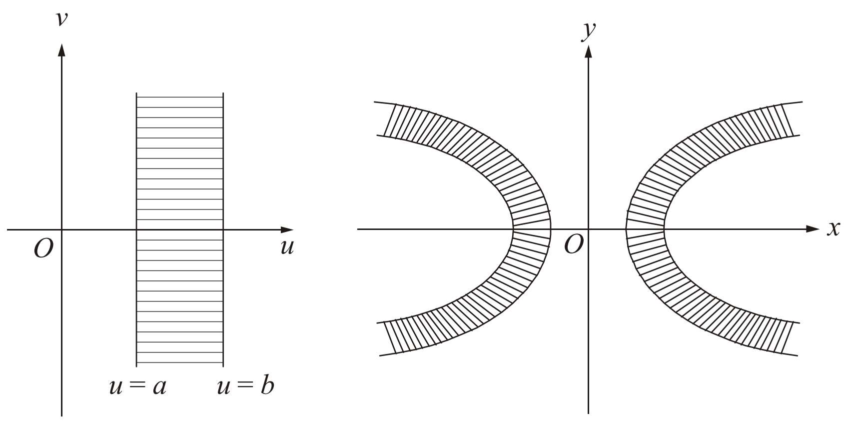
जो एक आयताकार अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola) है।

इसलिए w-सतह में रेखा, $u = a$, आयताकार अतिपरवलय $x^2 - y^2 = u$ में z-सतह में रूपांतरित हो जाता है।



w–सतह $\qquad$ z–सतह

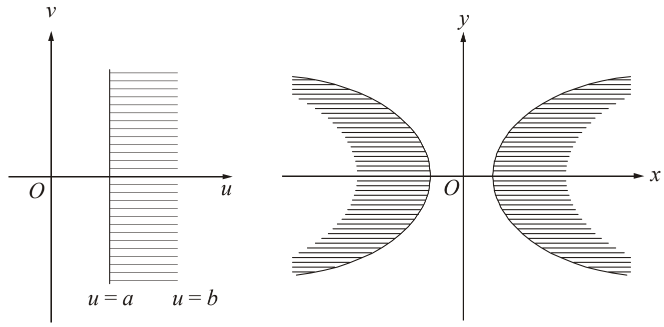
(ii) w-सतह में रेखाओं $u = a$ और $u = b$ के बीच की पट्टी (Strip) z–सतह में आयताकार अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a$ और $x^2 - y^2 = b$ के बीच संलग्न क्षेत्र में बदल जाती है।



w–सतह $\qquad$ z–सतह

टिप्पणी

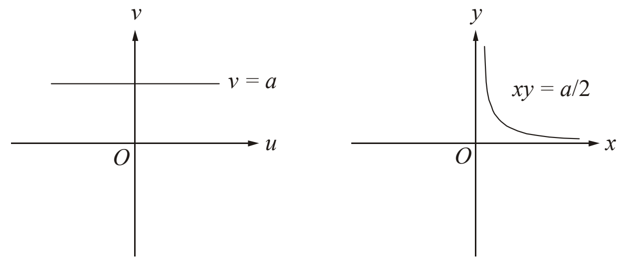
(iii) w–सतह में क्षेत्र $u \geq a$, z–सतह में आयताकार अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ के आंतरिक क्षेत्र में बदल जाता है।



w–सतह z–सतह

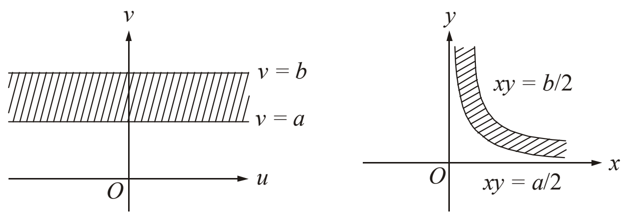
(iv) जब v = स्थिरांक $= a\ (> 0)$, तो हम समीकरण (5.27) से, $xy = a/2$ प्राप्त करते हैं जो एक आयताकार अतिपरवलय है।

इसलिए w–सतह में रेखा $v = a$, z–सतह में आयताकार अतिपरवलय $xy = a/2$ में बदल जाता है।



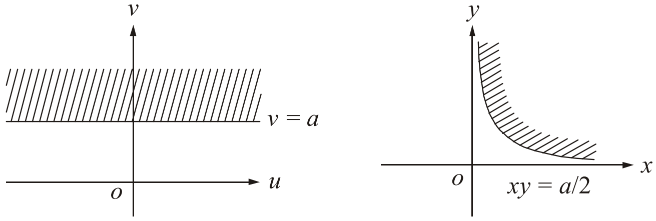
w–सतह z–सतह

(v) w–सतह में रेखाओं $v = a$ और $v = b$ के बीच का क्षेत्र z–सतह में आयताकार अतिपरवलय $xy = a/2$ और $xy = b/2$ से घिरे क्षेत्र में बदल जाता है।



w–सतह z–सतह

(vi) w–सतह में क्षेत्र $v \geq a$ z–सतह के आयताकार अतिपरवलय $xy = a/2$ के आंतरिक क्षेत्र में बदल जाता है।



w–सतह z–सतह

4. रूपांतरण, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

यहाँ, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, तो $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$

$\therefore \quad \frac{dw}{dz} = 0$ के लिए $z = \pm 1$

इसलिए, दिया गया परिवर्तन $z = \pm 1$ को छोड़कर संकलित है।

माना $z = re^{i\theta}$, तो

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right]$$

और $u + iv \;= \frac{1}{2}\left[r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)\right]$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\theta\left(r + \frac{1}{r}\right) + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\right]$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad ...(5.28)$$

और $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \qquad ...(5.29)$

तब हम रूपांतरण के निम्नलिखित मामलों पर विचार करते हैं:

प्रकरण (i) जब $r =$ स्थिरांक, तब समीकरणों (5.28) और (5.29) से, हम प्राप्त करते हैं

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2}$$

या $$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

जब $r > 1, z$–सतह में वृत $|z| = r$ को दीर्घवृत्त में बदल दिया जाता है

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

w–सतह में।

जब $r = 1$, सतह में वृत्त $|z| = 1$ वास्तविक अक्ष के भाग में बदल जाता है, तो w–सतह में –1 से 1 के बीच दो बार वर्णित किया जाता है।

टिप्पणी

प्रकरण (ii) जब θ = स्थिरांक, तब समीकरणों (5.28) और (5.29) से, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2 = 1$$

इसलिए z–सतह में अर्धव्यास रेखा (Radial Line) θ = स्थिरांक, w–सतह में अतिपरवलय में बदल जाती है।

5. रूपांतरण, $w = e^z$

यहाँ, $w = e^z$, तो $\frac{dw}{dz} = e^z$

$\therefore \quad \frac{dw}{dz} \neq 0$ सभी z के लिए

इसलिए दिया गया रूपांतरण z–सतह में z के सभी मानों के लिए अनुकोणी है।

माना $w = Re^{i\phi}$ और $z = x + iy$, तो $Re^{i\phi} = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$

$$\therefore \quad R = e^x \qquad ...(5.30)$$

$$\text{और} \quad \phi = y \qquad ...(5.31)$$

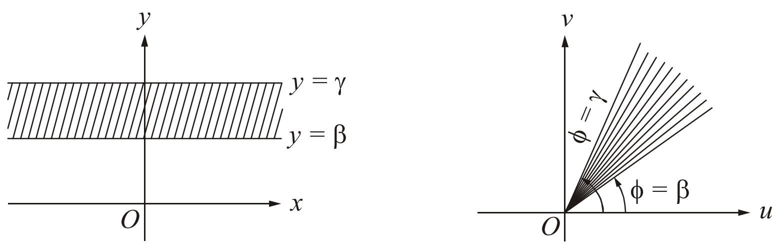
अब हम रूपांतरण की निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करते हैं:

(*i*) जब y = स्थिरांक = β, तब समीकरण (5.31) से, हम प्राप्त करते हैं

$$\phi = \beta$$

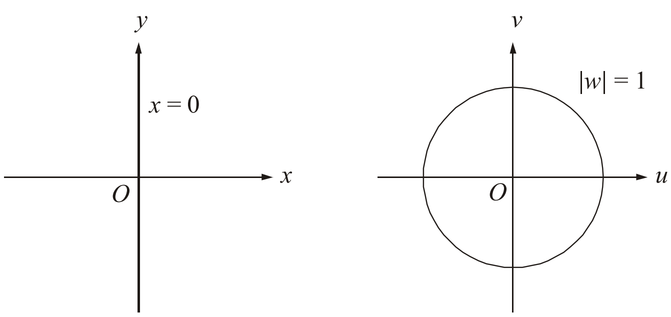
इस प्रकार, z–सतह में रेखा $y = \beta$, w–सतह में रेखा $\phi = \beta$ में बदल जाती है।

(*ii*) z–सतह में $y = \beta$ और $y = \gamma$ से घिरा क्षेत्र रूपांतरित होता है w–सतह पर जो $\phi = 0$, अर्धव्यास रेखाओं $\phi = \beta$ और $\phi = \gamma$ क्षेत्र से घिरा होता है।



z–सतह $\qquad$ w–सतह

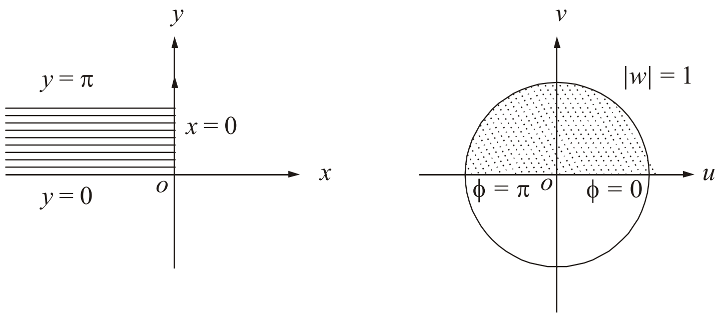
(*iii*) जब $x = 0$, तब समीकरण (5.31) से हमें $R = e^0 = 1$, मिलता है अर्थात् $|w| = 1$। इसलिए, z–सतह में काल्पनिक अक्ष (अर्थात्, $x = 0$) को इकाई वृत $|w| = 1$ सतह में बदल दिया जाता है।



z–सतह $\qquad$ w–सतह

टिप्पणी

(*iv*) z–सतह में रेखाओं $y = 0, y = \pi$ और $x = 0$ से घिरा क्षेत्र है w–सतह में से जब $\phi = 0, \phi = \pi$ और $|w| = 1$ में परिबद्ध क्षेत्र में रूपांतरित होता है।



z–सतह w–सतह

उदाहरण 5.14: द्विरेखीय रूपांतरण का पता लगाएं जो वृत्त को बदलता है $|z| = 1$ पर $|w| = 1$ और बिन्दु $z = 1$ बनाता है, -1 क्रमशः $w = 1, -1$ से मेल खाता है।

हल: हम जानते हैं कि रूपांतरण जो वृत्त को परिवर्तित करता है $|z| = 1$ में $|w| = 1$ है,

$$w = e^{i\lambda}\,\frac{z-\alpha}{z\bar{\alpha}-1}$$

जहाँ λ वास्तविक है और $|\alpha| < 1$

चूँकि अंक $z = 1, -1$ मानचित्र $w = 1, -1$ में मिलते हैं, हमें मिलता है

$$1 = e^{i\lambda}\,\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1} \qquad ...(i)$$

और $$-1 = e^{i\lambda}\,\frac{-1-\alpha}{-\bar{\alpha}-1}$$

या $$1 = e^{i\lambda}\,\frac{(-1-\alpha)}{\bar{\alpha}+1} \qquad ...(ii)$$

समीकरणों (i) और (ii) से हम प्राप्त करते हैं,

$$e^{i\lambda}\frac{(1-\alpha)}{\bar{\alpha}-1} = e^{i\lambda}\,\frac{(-1-\alpha)}{\bar{\alpha}+1}$$

या $$\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1} = \frac{-(1+\alpha)}{1+\bar{\alpha}}$$

या $$1 + \bar{\alpha} - \alpha - \alpha\bar{\alpha} = -\bar{\alpha} + 1 - \alpha\bar{\alpha} + \alpha$$

या $$2\bar{\alpha} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \bar{\alpha}$$

इसलिए, आवश्यक रूपांतरण है $w = e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{z\alpha-1}$

उदाहरण 5.15: प्रतिचित्रण $w = \dfrac{1}{z}$ के अंतर्गत, $|z\text{-}\ 2i\,| = 2$ की छवि को प्राप्त करें।

हल: यहाँ, $w = \dfrac{1}{z}$; तो $z = \dfrac{1}{w}$

टिप्पणी

या $$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{-v}{u^2 + v^2}i$$

$\therefore$ $$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \text{ और } y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \qquad ...(i)$$

अब $|z - 2i| = 2$ या $|x + iy - 2i| = 2$

या $|x + i(y - 2)| = 2$

या $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

या $$\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2 + v^2} - 2\right)^2 = 4 \qquad \text{[समीकरण (i)]}$$

या $u^2 + [v + 2(u^2 + v^2)]^2 = 4(u^2 + v^2)^2$

या $u^2 + v^2 + 4u^2v + 4v^3 + 4(u^2 + v^2)^2 = 4(u^2 + v^2)^2$

या $u^2 + v^2 + 4u^2v + 4v^3 = 0$

या $u^2 + v^2 + 4v(u^2 + v^2) = 0$

या $(u^2 + v^2)(1 + 4v) = 0$ $\qquad (\because u^2 + v^2 \neq 0)$

उदाहरण 5.16: परिवर्तन $w = z^2$ के तहत सीधी रेखा $x + y = 1$ का प्रतिबिंब ज्ञात करें।

हल: यहाँ,

$w = z^2$, तो $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$\therefore$ $$u = x^2 - y^2 \text{ और } v = 2xy \qquad ...(i)$$

$x + y = 1$ or $(x + y)^2 = 1$

या $x^2 + y^2 + 2xy = 1$ और $x^2 + y^2 = 1 - 2xy = 1 - v$ $\qquad$ (समीकरण (i) से)

या $(x^2 + y^2)^2 = (`1 - v)^2$ $\qquad$ (वर्ग करने पर)

या $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (1 - v)^2$

या $u^2 + v^2 = 1 - 2u + v^2$ $\qquad$ (समीकरण (i) से)

या $u^2 + 2v = 1$

इसलिए, आवश्यक रूपांतरण $u^2 + 2v = 1$ है।

उदाहरण 5.17: रूपांतरण $w = 1/z$ के तहत अनंत पट्टी $1/6 < y < 1/3$ का प्रतिचित्रण प्राप्त करें और आलेखी क्षेत्र (Graphical Region) का रेखांकन करें।

हल: यहाँ, $w = \frac{1}{z}$

$\therefore$ $$z = \frac{1}{w} = \frac{1}{u + iv}$$

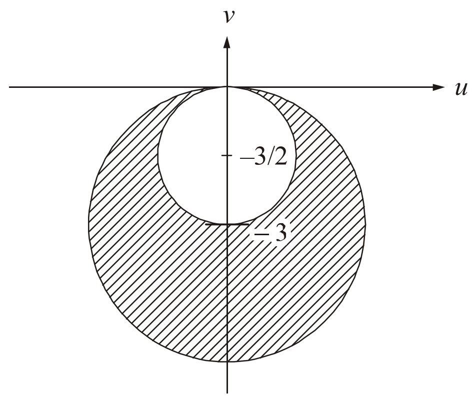
या $$x + iy = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} + \frac{-v}{u^2 + v^2}i$$

$\therefore$ $$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \text{ और } y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

जब $y < \frac{1}{3}$: $\frac{-v}{u^2+v^2} < \frac{1}{3}$ या $u^2 + v^2 + 3v > 0$ या $u^2 + \left(v+\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}$ जो 3/2 और केंद्र (0, –3/2) के साथ वृत्त के बाहरी क्षेत्र का निरूपण करता है।

जब $y > \frac{1}{6}$: $\frac{-v}{u^2+v^2} > \frac{1}{6}$ या $u^2 + v^2 + 6v < 0$ या $u^2 + (v+3)^2 < 9$

जो त्रिज्या 3 और केंद्र (0,-3) के साथ वृत्त के आंतरिक क्षेत्र का निरूपण करता है। आलेखी क्षेत्र है,



उदाहरण 5.18: सिद्ध कीजिए कि वृत्त $w| = 1$ रूपांतरण $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ के तहत वृत्त $x^2 + y^2 \pm 2y - 1 = 0$ के अनुसार है।

हल: दिया गया रूपांतरण है,

$$w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

यहां, $|w| = 1$

या $\left|\frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)\right| = 1$

या $\left|\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| = 2$

या $\left|\left(z + \frac{1}{z}\right)\right|^2 = 4$

या $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = 4$ $[\because z\bar{z} = |z|^2]$

या $\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = 4$

या $(z^2 + 1)(\bar{z}^2 + 1) = 4z\bar{z}$

या $z^2\bar{z}^2 + z^2 + \bar{z} - 4z\bar{z} + 1 = 0$

या $(z^2\bar{z}^2 - 2z\cdot\bar{z} + 1) + (z^2 + \bar{z}^2 - 2z\bar{z}) = 0$

टिप्पणी

या $(z\bar{z} - 1)^2 + (z - \bar{z}^2) = 0$

या $(x^2 + y^2 - 1)^2 + (2iy)^2 = 0$ $[\because z - \bar{z} = 2yi]$

या $(x^2 + y^2 - 1) - 4y^2 = 0$

या $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 4y^2 = (2y)^2$

या $x^2 + y^2 - 1 = \pm 2y$

इस प्रकार परिणाम प्राप्त हुआ।

उदाहरण 5.19: सिद्ध कीजिए कि परिवर्तन $w = \sin z$, रेखाओं $x =$ स्थिरांक तथा $y =$ स्थिरांक के परिवारों का, मुखर शंकुओं के दो परिवारों में प्रतिचित्रण करता है।

हल: यहाँ, $w = \sin z$

या $u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$\therefore$ $u = \sin x \cosh y$ ...(i)

और $v = \cos x \sinh y$ ...(ii)

समीकरणों (i) और (ii) से y को विस्थापित करते हुए, हम प्राप्त करते हैं,

$$1 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x}$$

और $$\frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

यह दर्शाता है कि z-तल में सीधी रेखाएं $x =$ स्थिरांक, w–तल में, मुखर अतिपरवलय में मानचित्रित की जाती हैं।

फिर, x को समीकरणों (i) और (ii) से हटाकर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

और $$\frac{u^2}{\cosh^2 xy} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$

इससे पता चलता है कि z-सतह में सीधी रेखा $y =$ स्थिरांक को w–सतह में कन्फोकल दीर्घवृत्त (Confocal Ellipse) में मानचित्र किया जाता है।

उदाहरण 5.20: $w = \cosh z$ का परिवर्तन खोजें।

हल: यहाँ $w = \cosh z$

और $u + iv = \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$\therefore$ $u = \cosh x \cos y$ ...(i)

और $v = \sin x \sin y$
...(ii)

समीकरणों (i) और (ii) से y को विस्थापित करते हुए, हम प्राप्त करते हैं,

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

और $$\frac{v^2}{\sinh^2 x} + \frac{u^2}{\cosh^2 x} = 1$$

टिप्पणी

इससे पता चलता है कि z-सतह में y–अक्ष (अर्थात्, x = स्थिरांक) के समानांतर रेखाएँ w–समतल में दीर्घवृत्त में बदल जाती है।

फिर, x को समीकरणों (1) और (2) से हटाकर, हम प्राप्त करते हैं,

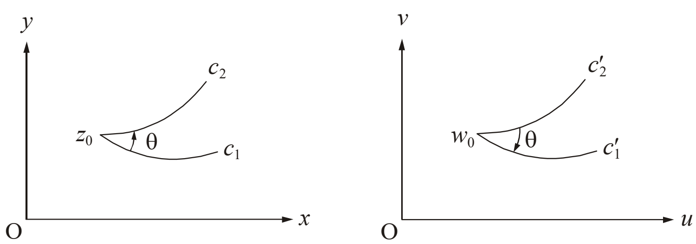
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

और $$\frac{u^2}{\cos^2 y} - \frac{v^2}{\sin^2 y} = 1$$

यह दर्शाता है कि z–सतह में x–अक्ष (अर्थात्, y = स्थिरांक) के समानांतर रेखाएँ w–सतह में अतिपरवलय में बदल जाती है।

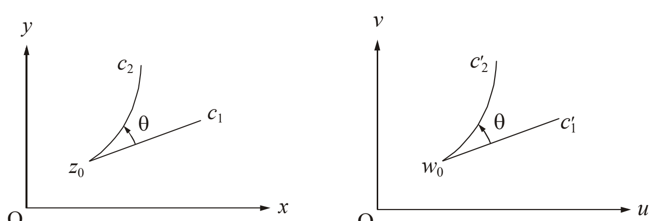
5.6 अनुकोणी प्रतिचित्रण या कनफॉर्मल मैपिंग

एक रूपांतरण तुल्यकोणी (Isogonal) कहा जाता है, यदि θ कोण पर, z–तत्व में दो वक्र बिन्दु z_0 पर प्रतिच्छेदन करते हुए w तत्व में, बिन्दु w_0 पर प्रतिच्छेदन करने वाले दो संगत वक्रों में रूपांतरित हो जाते हैं, जो कि समान कोण θ के साथ, बिन्दु z_0 पर संगत है। इस प्रकार, यदि केवल कोण के परिमाप को परिरक्षित किया जाता है, तो रूपांतरण तुल्यकोणी (Isogonal) कहलाता है।



z-सतह w-सतह

यदि घूर्णन का बोध, साथ ही साथ कोण का परिमाण परिरक्षित है, तब रूपांतरण, अनुकोण (Conformal) कहलाता है।



z-सतह w-सतह

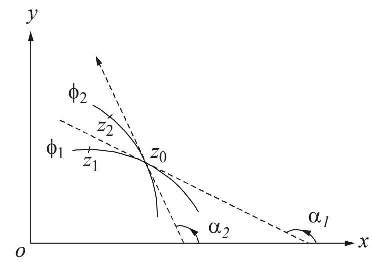
प्रमेय 5.11: यदि $f(z)$ विश्लेषणात्मक है, तब प्रतिचित्रण अनुकोणी है।

प्रमाण: माना ϕ_1 तथा ϕ_2, z तल में दो सतत वक्र हैं, बिन्दु z_0 पर प्रतिच्छेदन करते हैं तथा माना इस बिन्दु पर स्पर्श रेखाएं, वास्तविक अक्ष के साथ, कोण $\propto_1$ तथा $\propto_2$ बनाती है। माना z_1 तथा z_2, z_0 के निकट ϕ_1 तथा ϕ_2 पर दो बिन्दु है, तथा वे z_0 से समान दूरी r पर स्थिति है, इसलिए हमारे पास है,

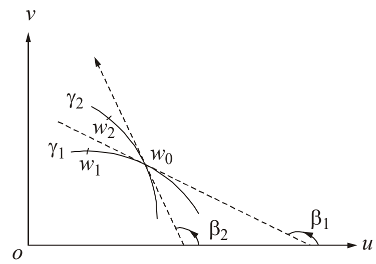
$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}, \; z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}$$

जब $r \to 0$, और $\theta_1 \to \alpha_1$ और $\theta_2 \to \alpha_2$

टिप्पणी



z-सतह



w-सतह

माना w_0 w-तल में, z_0 के संगत कोई बिन्दु है, और को w–सतह में w_1 और w_2 के बिन्दुओं के अनुसार होने देते हैं जो सतह में वक्र γ_1 और γ_2 का वर्णन करता है।

माना $w_1 - w_0 = \rho e^{i\varphi 1},\ w_2 - w_0 = \rho e^{i\varphi 2}$

$$\therefore \qquad f'(z_0) = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}$$

और $Re^{i\lambda} = \lim \dfrac{\rho_1 e^{i\phi_1}}{re^{i\theta_1}}$ (चूंकि $f'(z_0)$ को $Re^{i\lambda}$ के रूप में लिखा जा सकता है)

अर्थात,

$$Re^{i\lambda} = \lim \frac{\rho_1}{r} e^{i(\phi_1 - \theta_1)}$$

इसलिए, $\lim \left[\dfrac{\rho_1}{r}\right] = R = |f'(z_0)|$ और $\lim(\phi_1 - \theta_1) = \lambda$ या $\lim \phi_1 - \lim \theta_1 = \lambda$

और, $\beta_1 - \alpha_1 = \lambda$ या $\beta_1 = \alpha_1 + \lambda$

इसी तरह यह सिद्ध किया जा सकता है कि $\beta_2 = \alpha_2 + \lambda$

इसलिए वक्रों γ_1 और γ_2 में w_0 कोण $\alpha_1 + \lambda$ और $\alpha_2 + \lambda$ के साथ वास्तविक अक्ष के साथ स्पर्श रेखाएँ हैं और w_0 पर γ_1 और γ_2 के बीच का कोण $\beta_1 - \beta_2 = (\alpha_1 + \lambda) - (\alpha_2 + \lambda) = \alpha_1 - \alpha_2$ है जो कि z_0 पर ϕ_1 और ϕ_2 के बीच के कोण के समान है। इसलिए वक्र γ_1 और γ_2 के समान कोण पर ϕ_1 और ϕ_2 प्रतिच्छेद घटता है। यह भी γ_1 और γ_2 के बीच के कोण ϕ_1 और ϕ_2 के बीच के कोण के समान है। इसलिए रूपांतरण अनुकोणी है।

प्रमेय 5.12: विपरीत (Converse): यदि कोई $w = f(z)$ संकलित है, तो यह विश्लेषणात्मक है।

प्रमाण: माना $u = u(x, y)$ और $v = v(v, y)$ xy- के uv- सतह दो अनुसार रूपांतरण हैं।

टिप्पणी

माना कि dr और ds क्रमशः uv – सतह और xy– सतह में प्रारंभिक लंबाई हैं और $w = u + iv = f(z)$ है, जहाँ $z = x + iy$, u और v,x और y के अलग–अलग फलन हैं,

तब $$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad ...(5.32)$$

$$dr^2 = du^2 + dv^2$$

चूंकि u और v दोनों x, y के फलन हैं, तब

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \text{ और } dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$\therefore \qquad du^2 + dv^2 = \left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right]^2$$

या, $$dr^2 = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}dx^2 + 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right\}dx\,dy + \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad ...(5.33)$$

चूंकि प्रतिचित्रण अनुकोणी है, तो अनुपातः $dr : ds$ के दिशा से स्वतंत्र है; तब समीकरणों (5.32) और (5.33) से मिलता है।

$$\therefore \quad \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}{0} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{1} \qquad ...(5.34)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \qquad ...(5.35)$$

और $$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad ...(5.36)$$

समीकरण (5.35) संतुष्ट है जब,

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \qquad ...(5.37)$$ (कॉउची–रीमान समीकरण)

समीकरण (5.35) संतुष्ट है जब,

$$u_x = -v_y,\ v_x = u_y \qquad ...(5.38)$$

समीकरण (5.38) को समीकरणों (5.37) में परिवर्तित (Reduce) करके लिखते हैं $-v$ के लिए v, अर्थात, w– सतह की वास्तविक धुरी में परावर्तन द्वारा आंकलन आकृति के रूप में लेते हुए। इसलिए, समीकरण (5.38) एक तुल्यकोणी के अनुसार हैं, लेकिन अनुसार रूपांतरण नहीं।

हम देखते हैं कि यदि w–सतह के लिए–सतह की आकलन कनफॉर्मल या अनुकोणी है, तो परिवर्तन का एकमात्र रूप $w = f(z)$ है जहां $f(z), z$ का एक विश्लेषण फलन है।

रूपांतरण जो तुल्यकोणी हैं लेकिन कनफॉर्मल या अनुकोणी नहीं हैं।

इस परिस्थिति में, रूपांतरण के कोण का परिमाण संरक्षित रहता है, लेकिन उनके संकेत बदल जाते हैं। उदारहण के लिए, रूपांतरण पर विचार करें,

$$w = x - iy \text{ और } z = x + iy$$

टिप्पणी

इसलिए, $w = x - iy$ का प्रतिबिंब है जहाँ कोणों को संरक्षित किया जाता है लेकिन उनके संकेत बदल दिए जाते हैं।

सामान्य तौर पर, यह रूप के हर रूपांतरण के लिए सच है।

$$w = f(\bar{z}) \qquad \text{...(5.39)}$$

जहाँ $f(z)$ विश्लेषणात्मक है क्योंकि ऐसा रूपांतरण दो रूपांतरणों का संयोजन है,

$$\xi = \bar{z} \qquad \text{...(5.40)}$$

और $$w = f(\xi) \qquad \text{...(5.41)}$$

समीकरण (5.40) में कोणों को संरक्षित किया जाता है, लेकिन उनके संकेतों को समीकरण (5.41) कोणों में बदल दिया जाता है और उनके संकेतों का संरक्षण किया जाता है। इसलिए, परिणामी रूपांतरण समीकरण (5.39) में, कोणों को संरक्षित किया जाता है और उनके संकेत बदल दिए जाते हैं।

इसलिए यह रूपांतरण तुल्यकोणी है, पर अनुकोणी नहीं है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. सम्मिश्र संख्याओं से आप क्या समझते हैं?
2. वृत्त का निरूपण किस प्रकार किया जाता है?
3. सम्मिश्र संख्याओं के ज्यामितीय निरूपण की व्याख्या कीजिए।
4. रीमान स्थिति का वर्णन करें।
5. सम्मिश्र चर से आप क्या समझते हैं? संक्षेप में इसकी व्याख्या करें।
6. किसी फलन की निरंतरता या सततता से आप क्या समझते हैं?
7. विलक्षण बिन्दु या विलक्षणता से आप क्या समझते हैं?
8. कॉउची–रीमान समीकरणों का उपयोग क्यों किया जाता है?
9. क्रांतिक बिन्दु की व्याख्या करें।
10. तुल्यकोणी से आप क्या समझते हैं?

5.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. एक सम्मिश्र संख्या को वास्तविक संख्याओं की एक युग्म के रूप में परिभाषित किया जा सकता है और प्रतीक (x, y) द्वारा चिह्नित किया जा सकता है। यदि हम $z = (x, y)$ लिखते हैं, तो x को वास्तविक भाग कहा जाता है और y को सम्मिश्र संख्या z का काल्पनिक भाग कहा जाता है और क्रमशः $R(x)$ और $I(x)$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है।
2. यह अंतर और मापांक की परिभाषाओं से स्पष्ट है कि $|z_1 - z_2|$ अंक, z_1 और z_2 के बीच की दूरी है। यह इस प्रकार है कि निश्चित सम्मिश्र संख्या z_0 और वास्तविक संख्या r के लिए, समीकरण $|z - z_0| = r$ केंद्र z_0 और त्रिज्या r के साथ एक वृत्त का प्रतिनिधित्व करता है।

3. हम एक बिन्दु P द्वारा सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का निरूपण करते हैं जिसका कार्टेशियन निर्देशांक (x, y) आयताकार अक्ष OX और OY को संदर्भित किया जाता है, जिसे आमतौर पर क्रमशः वास्तविक और काल्पनिक अक्ष कहा जाता है। स्पष्ट रूप से P के ध्रुवीय निर्देशांक हैं (r,θ), जहाँ r मापांक है और θ जो कि जटिल z का तर्क है। जिस सतह के बिन्दुओं को सम्मिश्र संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है, उसे अर्गंड सतह या अर्गंड आरेख कहा जाता है।
4. एक गोले पर बिन्दुओं द्वारा सम्मिश्र संख्याओं का भी निरूपण किया जा सकता है, इसके लिए, एक गोले पर बिन्दुओं और एक सतह पर बिन्दुओं के बीच एक–एक समानता स्थापित करने के लिए पर्याप्त है।
5. अर्गंड सतह जिसमें चर को बिन्दुओं द्वारा दर्शाया जाता है, को z–सतह कहा जाता है। वह बिन्दु जो सम्मिश्र चर का निरूपण करता है, बिन्दु के रूप में जाना जाता है।
6. एकल मान फलन $f(z)$ को एक बिन्दु z_0 पर निरंतर या सतत होना कहा जाता है यदि,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

   अर्थात z के रूप में $f(z)$ के मान को सीमित करना z_0 मान $f(z_0)$ के साथ मेल खाता है।

   किसी फलन को z–सतह के एक क्षेत्र R में निरंतर या सतत होना कहा जाता है यदि यह क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर निरंतर है।

   एक फलन जो z_0 $\lim_{z \to z_0} f(z) \neq f(z_0)$ पर निरंतर नहीं है, को z_0 पर असतत या अनिरंतरता कहा जाता है।
7. एक बिन्दु जिस पर एक फलन $f(z)$ अवकलनीय नहीं है, अर्थात, इसमें अवकलज नहीं है, एक विलक्षण बिन्दु या $f(z)$ की विलक्षणता कहलाता है।
8. कॉउची–रीमान समीकरणों का उपयोग यह खोजने के लिए किया जाता है कि एक सम्मिश्र फलन विश्लेषणात्मक है या नहीं।
9. क्रांतिक बिन्दुः एक बिन्दु जिस पर $f'(z) = 0$ रूपांतरण का एक क्रांतिक बिन्दु कहा जाता है।
10. एक रूपांतरण को तुल्यकोणी कहा जाता है यदि बिन्दु z_0 पर एक कोण θ पर z–सतह में दो वक्र घटते हैं, तो बिंदु w_0 पर सतह में दो संबंधित वक्रों में रूपांतरित होते हैं जो समान कोण θ पर बिन्दु z_0 से मेल खाते हैं। इसलिए यदि केवल कोण के परिमाण को संरक्षित किया जाता है तो रूपांतरण को तुल्यकोणी कहा जाता है।

5.8 सारांश

- एक सम्मिश्र संख्या को वास्तविक संख्याओं की एक जोड़ी के रूप में परिभाषित किया जा सकता है और प्रतीक (x, y) द्वारा चिह्नित किया जा सकता है। यदि हम $z = (x, y)$ लिखते हैं, तो x को वास्तविक भाग कहा जाता है और y को

टिप्पणी

सम्मिश्र संख्या z का काल्पनिक भाग कहा जाता है और क्रमशः $R(x)$ और $I(x)$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

- सम्मिश्र संख्या (x', y') को सम्मिश्र संख्या (x, y) का व्युत्क्रम कहा जाता हैः यदि,

  $(x,y).(x',y') = (1,0)$

- दो सम्मिश्र संख्याओं z = (x, y) और z' (x', y) का अंतर समानता से परिभाषित होता है।
- यदि, $z = x + iy$ तो सम्मिश्र संख्या $x - iy$ को सम्मिश्र संख्या z का संयुग्म कहा जाता है और इसे $\bar{z}$ के रूप में लिखा जाता है। यह आसानी से देखा जाता है कि संख्याएँ $z_1 + z_2$ और $z_1 z_2$ से क्रमशः $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ और $\bar{z}_1 \bar{z}_2$ संयुग्मित हैं।
- दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक कभी भी उनके मापांक के योग से अधिक नहीं हो सकता है।
- दो सम्मिश्र संख्याओं के अंतर का मापांक कभी भी उनके प्रतिरूप के अंतर से कम नहीं हो सकता।
- एक गोले पर बिन्दुओं द्वारा सम्मिश्र संख्याओं का भी निरूपण किया जा सकता है, इसके लिए, एक गोले पर बिन्दुओं और एक सतह पर बिन्दुओं के बीच एक–एक समानता स्थापित करने के लिए पर्याप्त है।
- $z = x + iy$ को एक सम्मिश्र चर कहा जाता है, जहाँ x और y दो स्वतंत्र वास्तविक चर होते हैं।
- L को $f(z)$ की सीमा के रूप में कहा जाता है क्योंकि z, z_0 के समीप आता है और इसके द्वारा निरूपित किया जाता है,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

  अगर हर $\in > 0$ के लिए $\delta > 0$ मौजूद है तो ऐसा है $|f(z) - L| < \in$ जब भी $|z - z_0| < \delta$।

- एक फलन $f(z)$ को एक बिन्दु z_0 पर अवकलनीय कहा जाता है अगर यह z_0 पर व्युत्पन्न है और z_0 के निकट प्रत्येक बिन्दु पर है।
- कॉउची–रीमान समीकरणों का उपयोग यह खोजने के लिए किया जाता है कि एक सम्मिश्र फलन विश्लेषणात्मक है या नहीं।
- यदि फलन $f(z) = u\,(x, y) + iv\,(x, y)$, z–सतह के क्षेत्र R में विश्लेषणात्मक है तो इस बिन्दु पर पहली कोटि में u और v का आंशिक अवकलन होता है और कॉउची–रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है,

  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ और $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

- रूपांतरण $w = \beta z$ को आवर्धन और घूर्णन कहा जाता है जहां w, β, z सम्मिश्र संख्या हैं।
- एक बिन्दु जिस पर $f'(z) = 0$ रूपांतरण का एक क्रांतिक बिन्दु कहा जाता है।

- एक रूपांतरण को तुल्यकोणी कहा जाता है यदि बिन्दु z_0 पर एक कोण θ पर z–सतह में दो वक्र घटते हैं, तो बिंद w_0 पर सतह में दो संबंधित वक्रों में परिवर्तित होते हैं जो समान कोण θ पर बिन्दु z_0 से मेल खाते हैं। इसलिए यदि केवल कोण के परिमाण को संरक्षित किया जाता है तो रूपांतरण को तुल्यकोणी कहा जाता है।

5.9 मुख्य शब्दावली

- **सम्मिश्र संख्या** : एक सम्मिश्र संख्या को वास्तविक संख्याओं की एक जोड़ी के रूप में परिभाषित किया जाता है और इसको (x, y) द्वारा चिह्नित किया जाता है।
- **योगात्मक समानता** : सम्मिश्र संख्या (0, 0) योगात्मक समानता है और परिणामस्वरूप इसे सम्मिश्र संख्याओं की प्रणाली के लिए शून्य कहा जाता है।
- **काल्पनिक और वास्तविक अक्ष** : एक बिन्दु P द्वारा सम्मिश्र संख्या $x=x+iy$ का निरूपण करते है जिसका कार्टेशियन निर्देशांक (x, y) आयताकार अक्ष OX और OY से संदर्भित किया जाता है, जिसे आमतौर पर क्रमशः वास्तविक और काल्पनिक अक्ष कहा जाता है।
- **अर्गंड सतह** : जिस सतह के बिन्दुओं को सम्मिश्र संख्याओं द्वारा दर्शाया जाता है, उसे अर्गंड सतह या अर्गंड आरेख कहा जाता है।
- **सम्मिश्र चर** : $z=x+iy$ को एक सम्मिश्र चर कहा जाता है, जहाँ x और y दो स्वतंत्र वास्तविक चर होते हैं।
- **निरंतरता या सततता** : किसी फलन को z-सतह के एक क्षेत्र R में निरंतर या सतत होना कहा जाता है यदि यह क्षेत्र के प्रत्येक बिन्दु पर निरंतर या सतत है।
- **विलक्षण बिन्दु** : एक बिन्दु जिस पर एक फलन $f(z)$ विश्लेषणात्मक नहीं है, अर्थात, इसमें अवकलज नहीं है, एक विलक्षण बिन्दु या $f(z)$ की विलक्षणता कहलाता है।
- **हरात्मक फलन** : एक फलन $f(x, y)$ को एक हरात्मक फलन कहा जाता है यदि यह लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है, अर्थात $\nabla^2 b = 0$
- **मोबियस रूपांतरण** : जहाँ z, w सम्मिश्र चर होते हैं, a,b,c,d सम्मिश्र स्थिरांक होते हैं और $ad\text{-}bc \neq 0$ को मोबियस रूपांतरण कहा जाता है।
- **क्रांतिक बिन्दु** : एक बिन्दु जिस पर $f'(2)=0$ है रूपांतरण का एक महत्वपूर्ण बिन्दु कहा जाता है।
- **अनुकोण या कनफॉर्मल** : यदि घूर्णन का बोध, साथ ही साथ कोण का परिमाण परिरक्षित है, तब रूपांतरण, अनुकोण या कनफॉर्मल कहलाता है।

5.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. एक सम्मिश्र चर के फलन से आपका क्या अभिप्राय है?
2. सम्मिश्र संख्याओं में गुणात्मक व्युत्क्रम क्या है?
3. संयुग्म सम्मिश्र संख्या क्या है?

4. रीमान वृत्त क्षेत्र को परिभाषित करें।
5. विश्लेषणात्मकता से क्या अभिप्राय है?
6. किसी फलन को विश्लेषणात्मक होने के लिए पद लिखें।
7. अनुप्रस्थ अनुपात को परिभाषित करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. "एक सम्मिश्र संख्या एक संख्या है जिसे $a + bi$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ a और b वास्तविक संख्याएँ हैं, और i समीकरण $x^2 = -1$ का एक हल है"। इस कथन की सत्यता के पद सिद्ध कीजिए।
2. ऐतिहासिक नामकरण काल्पनिक होने के बावजूद, सम्मिश्र संख्याओं को गणितीय विज्ञानों में वास्तविक संख्याओं के समान वास्तविक माना जाता है, क्यों? उपयुक्त उदाहरण देकर व्याख्या करें।
3. सम्मिश्र संख्याओं में विभिन्न क्रमविनिमेय समीकरण नियम की उदाहरण देकर व्याख्या करें।
4. संयुग्म सम्मिश्र संख्या की उदाहरण देकर व्याख्या करें।
5. विभिन्न कॉउची–रीमान समीकरणों की उपयुक्त उदाहरण देकर व्याख्या करें।
6. सम्मिश्र विश्लेषणात्मक फलन कौन से गुणों को प्रदर्शित करते हैं? उदाहरण देकर व्याख्या करें।
7. अनुकोणी या कनफॉर्मल प्रतिचित्रण की व्याख्या कीजिए।

5.11 सहायक पाठ्य सामग्री

Malik, S. C. and Savita Arora. 1991. *Mathematical Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Simmons, G. F. 2004. *Introduction To Topology And Modern Analysis*. New York: Tata McGraw-Hill Education.

Ahlfors, Lars V. 1978. *Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1986. *Real and Complex Analysis*, 3rd Edition. London: McGraw-Hill Education – Europe.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Gupta, S. L. and Nisha Rani. 2003. *Fundamental Real Analysis*, 4th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Carothers, N. L. 2000. *Real Analysis*, 1st Edition. UK: Cambridge University Press.

Shilov, Georgi E. 2012. *Elementary Real and Complex Analysis*. Chelmsford: Courier Corporation.

Sharma, S.C. 2006. *Metric Space*. New Delhi: Discovery Publishing House.

Appostol, Tom M. 1974. *Mathematical Analysis.* Boston: Addison Wesley.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*, 3rd Edition. New York: Macmillan Publishing Company.