बी.एस.सी./बी.ए. तृतीय वर्ष

गणित, प्रथम प्रश्नपत्र

रैखिक बीजगणित एवं संख्यात्मक विश्लेषण

(LINEAR ALGEBRA AND NUMERICAL ANALYSIS)

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

COURSE WRITERS

V K Khanna, *Formerly Associate Professor, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi*
S K Bhambri, *Formerly Associate Professor, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi*
Units: (1-3)

Dr N Datta, *Professor of Mathematics, Head - Department of Basic Sciences & Humanities, Heritage Institute of Technology, Kolkata*
Units: (4-5)

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

रैखिक बीजगणित एवं संख्यात्मक विश्लेषण

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 सदिश समष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण, उपसमष्टि, उपसमष्टियों का योग एवं प्रत्यक्ष योग, रैखिक विस्तृति, रैखिक परतंत्रता, स्वतंत्रता एवं उनके मूल गुणधर्म, आधार, परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ, आधार का अस्तित्व प्रमेय, विस्तार प्रमेय, आधार में अवयवों की संख्या की अपरिवर्तनशीलता, विमा, परिमित विमीय सदिश समष्टि की उपसमष्टि की पूरक उपसमष्टि का अस्तित्व, उपसमष्टियों के योग की विमा, विभाग (भागफल) समष्टि एवं उसकी विमा।	**इकाई 1** : सदिश समष्टि और उपसमष्टि : सिद्धांत और आयाम **(पृष्ठ 3–74)**
इकाई–2 रैखिक रूपांतरण एवं उनका आव्यूह निरूपण, रैखिक रूपांतरणों का बीजगणित, रैंक शून्यता प्रमेय, आधार का परिवर्तन, द्वैत समष्टि, द्विद्वैत समष्टि एवं प्राकृतिक तुल्याकारिता, रैखिक रूपांतरण का संलग्न रूपांतरण, रैखिक रूपांतरणों के आइगेन मान एवं आइगेन सदिश, विकर्णीकरण, द्विएकघाती, द्विघाती एवं हर्मिटियॉन रूप।	**इकाई 2** : रैखिक रूपांतरण **(पृष्ठ 75–137)**
इकाई–3 अंतर गुणन समष्टि, काउची–श्क्वार्ज असमानता, लांबिक सदिश, लांबिक पूरक, प्रसामान्य लांबिक समुच्चय एवं आधार, परिमित विमीय समष्टियों हेतु बेसेल की असमानता, ग्राम–श्मिट लांबिकता प्रक्रम।	**इकाई 3** : आंतरिक गुणन समष्टि और लाम्बिक सदिश **(पृष्ठ 139–161)**
इकाई–4 समीकरणों के हल, द्वि–विभाजन विधि, छेदक विधि, रेग्यूल–फाल्सी विधि, न्यूटन विधि, द्वितीय घात के बहुपद समीकरण के मूल, अर्न्तवेशन, लैग्रांज अर्न्तवेशन, विभाजित अंतर, अंतर के उपयोग से अर्न्तवेशन सूत्र, संख्यात्मक क्षेत्रकलन, न्युटन–कोट्स सूत्र, गाउस क्षेत्रकलन सूत्र।	**इकाई 4** : समीकरणों का समाधान और बहुपद प्रक्षेपन **(पृष्ठ 163–226)**
इकाई–5 रैखिक समीकरण, रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की प्रत्यक्ष विधियां : (गाउस विलोपन, एल–यू वियोजन, चोल्स्की वियोजन), पुनरावृत्ती विधियां (जैकोबी विधि, गाउस–सिडेल विधि), साधारण अवकल समीकरण, यूलर विधि, एकल चरण विधि, रुग्गें–कुट्टा विधि, बहुचरण विधि, मिल्ने–सिम्पसन विधि, संख्यात्मक समाकलन पर आधारित विधियां एवं संख्यात्मक अवकलन पर आधारित विधियां।	**इकाई 5** : रैखिक समीकरण, संख्यात्मक समाकलन तथा संख्यात्मक अवकलन **(पृष्ठ 227–306)**

विषय–सूची

परिचय

टिप्पणी

रैखिक बीजगणित (Linear Algebra) गणित के लगभग सभी क्षेत्रों के लिए केंद्रीय है। उदाहरण के लिए, रेखीय बीजगणित ज्यामिति की आधुनिक प्रस्तुतियों में मौलिक है, जिसमें मूल वस्तुओं जैसे कि रेखाओं, समतल और घूर्णन (Rotation) को परिभाषित करना शामिल है। इसके अलावा, कार्यात्मक विश्लेषण को मूल रूप से फलनों की समष्टि में रैखिक बीजगणित के अनुप्रयोग के रूप में देखा जा सकता है। रैखिक बीजगणित का उपयोग अधिकांशतः विज्ञानिक और इंजीनियरिंग क्षेत्रों में किया जाता है, क्योंकि यह कई प्राकृतिक घटनाओं के मॉडलिंग और ऐसे मॉडलों के साथ कुशलतापूर्वक कंप्यूटिंग की अनुमति देता है।

सदिश समष्टि (Vector Space) एक गणितीय संरचना है जो सदिश के एक संग्रह से बनती है, जिसे एक साथ जोड़ा जा सकता है और अदिश (Scalar) के रूप में ज्ञात संख्याओं से गुणा किया जा सकता है या बढ़ाया जा सकता है। अदिशों को प्रायः वास्तविक संख्या माना जाता है, लेकिन किसी भी सदिश समष्टि को जटिल संख्याओं, परिमेय संख्याओं या यहां तक कि अधिक सामान्य क्षेत्रों द्वारा गुणा किया जा सकता है। सदिश जोड़ और अदिश गुणन के संचालन को कुछ आवश्यकताओं को संतुष्ट करना होता है जिन्हें स्वयंसिद्ध (Axioms) कहा जाता है। सदिश समष्टि, रैखिक समीकरणों (Linear Equations) की प्रणालियों को संबोधित करने के लिए उपयुक्त रैखिक बीजगणितीय धारणा हैं। एक सदिश समष्टि एक सदिश की धारणा से उत्पन्न होती है जिससे हम यांत्रिकी (Mechanics) या ज्यामिति (Geometry) में परिचित हो चुके हैं।

रैखिक बीजगणित में एक आंतरिक गुणन समष्टि (Inner Product Space) एक सदिश समष्टि है जिसमें एक अतिरिक्त संरचना होती है जिसे आंतरिक गुणन (Inner Product) कहा जाता है। यह अतिरिक्त संरचना समष्टि में प्रत्येक सदिश की जोड़ी को एक अदिश मात्रा के साथ जोड़ती है जिसे सदिश के आंतरिक गुणन के रूप में जाना जाता है। आंतरिक गुणन सहज ज्यामितीय धारणाओं जैसे कि एक सदिश की लंबाई या दो सदिशों के बीच के कोण के निश्चित परिचय की अनुमति देते हैं। वे सदिश (शून्य आंतरिक गुणन) के बीच लंबकोणीयता या लाम्बिकता (Orthogonality) को परिभाषित करने के साधन भी प्रदान करते हैं। आंतरिक गुणन समष्टि विशेष रूप से यूक्लिडियन समष्टि (Eucledean Space) (जिसमें आंतरिक गुणन डॉट गुणन (Dot Product) है, जिसे अदिश गुणन (Scalor Product) भी कहा जाता है) को किसी भी (संभवतः अनंत) आयाम के सदिश समष्टि के लिए सामान्यीकृत करते हैं, और कार्यात्मक विश्लेषण में भी अध्ययन किया जाता है। एक आंतरिक गुणन के साथ एक सदिश समष्टि की अवधारणा का पहला उपयोग 19वीं शताब्दी के इटली के गणितज्ञ गिउसेप्पी पियानो (Giuseppe Peano) के कारण 1898 में संभव हुआ।

संख्यात्मक विश्लेषण (Numerical Analysis) निरंतर गणित की समस्याओं के समाधान खोजने के लिए एल्गोरिदम (Algorithm) का अध्ययन है। यह त्रुटियों पर उचित सीमा बनाए रखते हुए अनुमानित समाधान प्राप्त करने में मदद करता है। यद्यपि संख्यात्मक विश्लेषण में इंजीनियरिंग और भौतिक विज्ञान के सभी क्षेत्रों में अनुप्रयोग हैं,

टिप्पणी

फिर भी 21वीं सदी में जैविक विज्ञान ने वैज्ञानिक संगणना के तत्वों को अपनाया है। खगोलीय और अन्तरिक्ष संबंधी पिंडों, अर्थात् ग्रहों, तारों और आकाशगंगाओं की गति की गणना के लिए साधारण अवकल समीकरणों का उपयोग किया जाता है। इसके अलावा, यह दवा और जीव विज्ञान से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए अवकल समीकरणों की गणना भी करता है। एयरलाइंस टिकट की कीमतों, हवाई जहाज और चालक दल को सौंपे गये कार्यों और ईंधन की जरूरतों को अंतिम रूप देने के लिए परिष्कृत अनुकूलन एल्गोरिदम का उपयोग करती है। बीमांकिक विश्लेषण के लिए बीमा कंपनियाँ संख्यात्मक विश्लेषणों का भी उपयोग करती हैं। संख्यात्मक विश्लेषण का मूल उद्देश्य अद्वितीय समस्याओं के लिए अनुमानित और सटीक समाधानों की गणना करने के लिए तकनीकों का प्रारूप या अभिकल्पना और विश्लेषण करना है। संख्यात्मक विश्लेषण में, दो विधियाँ शामिल होती हैं, अर्थात् प्रत्यक्ष विधियाँ और पुनरावृत्ति विधियाँ। प्रत्यक्ष विधियाँ किसी समस्या के हल को चरणों की एक सीमित संख्या में गणना करती हैं जबकि पुनरावृत्ति विधियाँ एक प्रारंभिक अनुमान से शुरू होकर क्रमिक सन्निकटन (Successive Approximation) बनाती हैं। त्रुटियों (Errors) का अध्ययन संख्यात्मक विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण भाग है। किसी समस्या के समाधान में होने वाली त्रुटियों का पता लगाने और उन्हें ठीक करने के लिए अलग–अलग विधियाँ हैं।

इस पुस्तक 'रैखिक बीजगणित एवं संख्यात्मक विश्लेषण' को एक सरल पुस्तक के रूप में व्यवस्थित किया गया है जिसमें रैखिक बीजगणित और संख्यात्मक विश्लेषण की मूल अवधारणाओं का विस्तार से वर्णन किया गया है। यह सदिश समष्टि और उपसमष्टि के सिद्धांत और आयाम, रैखिक फैलाव या विस्तार, रैखिक निर्भरता, रैखिक स्वतंत्रता और उनके मूल गुण, विस्तार प्रमेय, एक आधार में अवयवों की संख्या के व्युत्क्रम, उपसमष्टि के आयाम, रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन और उन का आव्यूह या मेट्रिक्स के रूप में प्रतिनिधित्व, रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के बीजगणित, रैंक–शून्यता प्रमेय और आधार के परिवर्तन, दोहरी या द्वैत समष्टि, रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन के आइगेन मान और आइगेन सदिश, द्विघात और हर्मिटियान समष्टि (Hermitian Space) के रूप, आंतरिक गुणन समष्टि, लाम्बिक सदिश और लाम्बिक पूरक, परिमित आयामी समष्टि के लिए बेसेल (Bessel) की असमानता, लाम्बिक समुच्चय, काउची–श्क्वार्ज (Cauchy-Schwarz) असमानता, ग्राम–श्मिट (Gram Schmidt) लाम्बिकता प्रक्रिया, समीकरणों का समाधान, प्रक्षेप, अंतराल व्यवस्था, न्यूटन–कोटे (Newton-Cote's) के सूत्र, गॉउस (Gauss) क्षेत्रफलन सूत्र, रेखीय समीकरण, पुनरावृत्ति विधियाँ (जैकोबी (Jacobi), गॉउज–सीडेल (Gauss-Seidel)), साधारण अवकल समीकरण, संख्यात्मक समाकलन, और संख्यात्मक अवकलन की मूल बातें समझने में पाठकों की मदद करेगा।

पुस्तक में स्वाध्याय प्रणाली का प्रयोग किया गया है, जिसमें प्रत्येक इकाई का आरंभ उस इकाई के परिचय से होता है, तत्पश्चात इकाई के उद्देश्य आते हैं। पाठ के बीच–बीच में अपनी प्रगति जांचिए के प्रश्न समाविष्ट किये गए हैं। प्रभावी पुनर्कथन के लिये प्रत्येक पाठ के अंत में सारांश, मुख्य शब्दावली और स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास दिए गए हैं।

हमें विश्वास है कि यह पुस्तक विषय के सांगोपांग अध्ययन में विद्यार्थियों के लिये उपयोगी साबित होगी।

टिप्पणी

इकाई 1 सदिश समष्टि और उपसमष्टि : सिद्धांत और आयाम

संरचना

1.0 परिचय

सदिश समष्टि या वेक्टर समष्टि (Vector Space) एक गणितीय संरचना है जो सदिश के एक संग्रह से बनती है, जो कि एक ऐसी वस्तु है जिसे एक साथ जोड़ा जा सकता है और अदिश (Scalar) के रूप में ज्ञात संख्याओं से गुणा किया जा सकता है या बढ़ाया जा सकता है। अदिशों (Scalars) को अक्सर वास्तविक संख्या (Real Numbers) माना जाता है, लेकिन किसी भी सदिश समष्टि को जटिल या सम्मिश्र संख्याओं (Complex Numbers), तर्कसंगत संख्याओं (Rational Numbers) या यहां तक कि अधिक सामान्य क्षेत्रों द्वारा गुणा किया जा सकता है। सदिश जोड़ और अदिश गुणन के संचालन को कुछ नियमों को संतुष्ट करना होता है जिन्हें स्वयंसिद्ध (Axioms) कहा जाता है। सदिश समष्टि रैखिक समीकरणों की प्रणालियों को संबोधित करने के लिए उपयुक्त रैखिक बीजगणितीय धारणा हैं। एक सदिश समष्टि एक सदिश की धारणा से उत्पन्न होता है जिसे हम यांत्रिकी या ज्यामिति में भी प्रयोग कर सकते हैं।

एक सदिश को एक निर्देशित रेखा खंड के रूप में परिभाषित किया गया है, जो बीजगणितीय (Algebraic) शब्दों में एक क्रमित युग्म (Ordered Pair) (a, b) के रूप में परिभाषित किया गया है जो एक निश्चित या स्थायी निर्देशांक प्रणाली (Fixed Coordinates System) के सापेक्ष अंतिम बिंदु (Terminal Point) के निर्देशांक हैं। एक उपसमष्टि (Subspace) एक सदिश समष्टि है जो एक और सदिश समष्टि में समाहित है। इसलिए प्रत्येक उपसमष्टि अपने आप में एक सदिश समष्टि है, लेकिन यह किसी अन्य सदिश समष्टि के सापेक्ष भी परिभाषित जा सकता है।

सदिश समष्टि या वेक्टर समष्टि को अमूर्त करने में हमें जो लाभ होता है, वह वस्तुओं के किसी विशेष विकल्प के बिना समष्टि के बारे में बताने का एक तरीका है (जो हमारे सदिश को परिभाषित करता है), संक्रियायें (जो हमारे सदिश पर कार्य करती है), या निर्देशांक (जो समष्टि में हमारे सदिश की पहचान करते हैं)। आगे के परिणाम अधिक सामान्य समष्टि पर प्रयोग हो सकते हैं, जिसमें अनंत आयाम (Infinite Dimension) हो सकते हैं, जैसे कि कार्यात्मक विश्लेषण (Functional Analysis)।

रैखिक बीजगणित (Linear Algebra) में, सदिश समष्टि में एक समुच्चय S का रैखिक फैलाव या रैखिक विस्तार (Linear Span) सदिश का सबसे छोटा रैखिक उपसमष्टि होता है जिसमें समुच्चय होता है। यह या तो प्रतिच्छेदन के सभी रैखिक उपसमष्टि के रूप में चित्रित किया जा सकता है जिसमें S शामिल हैं, या S के अवयवों के रैखिक संयोजनों के समुच्चय के रूप में।

इस इकाई में आप सदिश समष्टि (Vector Space), उपसमष्टि (Subspace), रैखिक फैलाव या रैखिक विस्तार (Linear Span), रैखिक निर्भरता (Linear Dependence), रैखिक स्वतंत्रता (Linear Independence) और उनके मूल गुण, विस्तार प्रमेय (Extension Theorem), एक आधार के अवयवों की संख्या की अपरिवर्तनीयता (Invariance), तथा उपसमष्टि के आयामों (Dimensions) के बारे में अध्ययन करेंगे।

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- सदिश समष्टि को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- उपसमष्टि की व्याख्या कर पाएंगे;
- रैखिक फैलाव या विस्तार (विस्तृति) की चर्चा कर सकेंगे;
- रैखिक निर्भरता, स्वतंत्रता और उनके मूल गुणों को परिभाषित कर सकेंगे;
- विस्तार प्रमेय का वर्णन कर पाएंगे;
- एक आधार के अवयवों की संख्या की अपरिवर्तनीयता का वर्णन कर पाएंगे;
- उपसमष्टि के योग के आयामों की व्याख्या कर पाएंगे।

1.2 सदिश समष्टि की परिभाषाएं और उदाहरण

वलय या रिंग (Ring) में प्रेरक कारक पूर्णांक का समुच्चय (Set) और समूहों में एक समुच्चय के सभी क्रमचयों (Permutations) का समुच्चय होता है। सदिश समष्टि (Vector Space) एक सदिश (Vector) की धारणा से उत्पन्न होता है जिससे हम यांत्रिकी (Mechanics) या ज्यामिति (Geometry) में परिचित हो चुके हैं। आपको याद होगा कि एक सदिश को एक निर्देशित रेखा खंड (Directed Line Segment) के रूप में परिभाषित किया गया है, जिसे बीजगणितीय शब्दों में एक क्रमित समुच्चय (a, b) की एक अचर (निश्चित) निर्देशांक निकाय के सापेक्ष अंतिम बिंदु (Terminal Point) के

निर्देशांक के रूप में परिभाषित किया गया है। सदिश का योग निम्नलिखित नियम द्वारा दिया गया है,

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

टिप्पणी

आप आसानी से सत्यापित (Verify) कर सकते हैं कि सदिश के समुच्च के इस रूप से एबेलियन समूह (Abelian Group) बनता हैं। इसके अलावा, अदिश गुणन (Scalar Multiplication) के नियम को $\alpha\,(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ द्वारा परिभाषित किया गया है जो कुछ गुणों (Properties) को संतुष्ट करता है। इस अवधारणा को समान रूप से त्रिआयाम (Three Dimension) में भी विस्तारित किया जा सकता है। आप एक सदिश समष्टि की परिभाषा के माध्यम से पूरी धारणा का सामान्यीकरण (Generalize) कर सकते हैं और अदिश को न केवल वास्तविक के समुच्चय में, बल्कि किसी भी क्षेत्र F में बदल सकते हैं। इस प्रकार एक सदिश समष्टि समूह, रिंगों या वलयों (Rings) से इस तरह भिन्न होता है कि यह बाहर से भी अवयवों को शामिल कर सकता हैं।

परिभाषाः मान लीजिए कि $< V, + >$ एक एबेलियन समूह (Abelian Group) है और $< F, +, \cdot >$ एक क्षेत्र (Field) है। एक फलन $\times$ को $F \times V \to V$ से (जिसे अदिश गुणन कहा जाता है) परिभाषित करें जो कि सभी $\alpha \in F, v \in V, \alpha \cdot v \in V$ के लिए मान्य हो। तब V को F पर सदिश समष्टि कहा जाता है यदि सभी $x, y \in V, \alpha, \beta \in F$ के लिए निम्नलिखित नियम प्रयोग होते हैं:

(*i*) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$

(*ii*) $\alpha\,(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(*iii*) $(\alpha\beta)\, x = \alpha\,(\beta x)$

(*iv*) $1 \cdot x = x$, 1, F की एकात्मकता (Unity) है।

तब, F के अवयवों को **अदिश (Scalars)** और V के उन अवयवों को **सदिश (Vectors)** कहा जाता है।

नोटः आप सुविधा के लिए, V और F की दो अलग–अलग द्विआधारी संरचनाओं (Binary Compositions) के लिए एक ही प्रतीक + का उपयोग कर सकते हैं। इसी तरह, क्षेत्र F के अदिश गुणन (Scalar Multiplication) और गुणन (Product) लिए एक ही प्रतीक का उपयोग किया जा सकता है।

चूंकि $< V, + >$ का एक समूह है, इसके **तत्समक अवयव (Identity Element)** को 0 द्वारा दर्शाया गया है। इसी तरह, क्षेत्र F में शून्य अवयव भी होगे जिसे 0 द्वारा दर्शाया जाता है। संदेह या दुविधा (Doubt) की स्थिति में, आप 0_v और 0_F आदि, जैसे विभिन्न प्रतीकों का उपयोग कर सकते हैं।

चूंकि आप सामान्य तौर पर एक अचर क्षेत्र के साथ काम करते हैं, इसलिए आप सदिश समष्टि को केवल V (या कभी–कभी $V(F)$ या V_F) के रूप में लिख सकते हैं। यह हमेशा समझा जाएगा कि यह F पर एक सदिश समष्टि है (अन्यथा जब तक की बताया नहीं गया हो)।

आपने अदिश गुणन को $F \times V \to V$ से परिभाषित किया है। आप इसे $V \times F \to V$ से भी परिभाषित कर सकते हैं और एक समान परिभाषा प्राप्त कर सकते हैं। पहले वाले

टिप्पणी

को बायाँ सदिश समष्टि (Left Vector Space) कहा जाता है और दूसरे को दायाँ सदिश समष्टि (Right Vector Space) कहा जाता है। यह कहना आसान होगा कि यदि V, F पर एक बाएं सदिश समष्टि के रूप में है, तो यह F पर एक दाएँ सदिश समष्टि के रूप में भी होगा। इस परिणाम को देखते हुए, यह बाएँ या दाएँ सदिश समष्टि के बारे में बात करना अनावश्यक हो जाता है। इसलिए हम F पर केवल सदिश समष्टि के बारे में विचार करेंगे।

आप उपरोक्त प्रणाली को तभी परिभाषित कर सकते हैं जब अदिश के मान को क्षेत्र की बजाय रिंग या वलय (Ring) में लिया जा सकता है, जो मापांकों (Modules) की परिभाषा की सत्यता को सिद्ध करता है।

प्रमेय 1.1: किसी भी सदिश समष्टि V(F) में, निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं:

(*i*) $0.x = 0$

(*ii*) $\alpha.0 = 0$

(*iii*) $(-\alpha)x = -(\alpha x) = \alpha(-x)$

(*iv*) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x,\ \alpha, \beta \in F,\ x \in V$

प्रमाण: (*i*) $0.x = (0 + 0).x = 0.x + 0.x$

$\Rightarrow \quad 0 + 0.x = 0.x + 0.x$

$\Rightarrow \quad 0 = 0.x$ (V में निरसन या रद्द (Cancellation) करना)

(*ii*) $\alpha.0 = \alpha.(0 + 0) = \alpha.0 + \alpha.0 \Rightarrow \alpha.0 = 0$

(*iii*) $(-\alpha)x + \alpha x = [(-\alpha) + \alpha]x = 0\ .\ x = 0$

$\Rightarrow (-\alpha x) = -\alpha x$

(*iv*) ऊपर के अनुसार है।

निम्नलिखित उदाहरण प्रमेय 1.1 का वर्णन करते हैं:

(i) यदि $< F, +, . >$ एक क्षेत्र हो, तो F पर F एक सदिश समष्टि होगा क्योंकि $< F, + > = < V, + >$ एक योगशील एबेलियन समूह (Additive Abelian Group) है। अदिश गुणन (Scalar Multiplication) को F के गुणनफल के रूप में लिया जा सकता है। सभी गुण (Properties) सभी नियमों को पूरा करते है। इस प्रकार $F(F)$ एक सदिश समष्टि है।

(ii) मान लीजिए कि $< F, +, . >$ एक क्षेत्र है,

मान लीजिए कि $V = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in F\}$

यहाँ हम '+' और '.' के अदिश गुणन (Scalar Multiplication) को निम्न रूप से परिभाषित करेंगे,

$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$

$\alpha(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2)$

टिप्पणी

आप परीक्षण कर सकते हैं कि परिभाषा के सभी नियम पूरे हो रहे हैं। यहाँ,

$$V = F \times F = F^2$$

इसे F^3 तक बढ़ाया जा सकता है और उसके आगे भी बढ़ाया जा सकता है। सामान्य तौर पर हम n–टपलों (Tuples) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i \in F$ को लेते है और F^n या $F^{(n)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \mid \alpha_i \in F\}$ को F पर सदिश समष्टि के रूप में परिभाषित करते हैं।

(iii) यदि $F \subseteq K$ दो क्षेत्र हैं तो $K(F)$ एक सदिश समष्टि बनाएगा, जहाँ $K(F)$ का योग K का + है और किसी भी $\alpha \in F, x \in K$ के लिए $\alpha . x$ को K में α और x का गुणन माना जाता है।

इस प्रकार **C**(**R**), **C**(**C**), **R**(**Q**) सदिश समष्टि के कुछ उदाहरण हैं, जहां **C** = सम्मिश्र संख्या (Complex Number), **R** = वास्तविक संख्या (Real Number) और **Q** = परिमेय संख्या (Rational Number) है।

(iv) मान लीजिए कि V = सभी वास्तविक मानों के सतत फलनों (Real Valued Continous Functions) के समुच्चय है जिसे $[0, 1]$ पर परिभाषित किया गया है। यहाँ V योग और अदिश गुणन के तहत वास्तविक **R** के क्षेत्र में एक सदिश समष्टि बनाता है, इसे निम्न रूप से परिभाषित किया जाता हैः

$(f + g)x = f(x) + g(x) \quad f, g \in V$

$(\alpha f)x = \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbf{R}$ सभी $x \in [0, 1]$ के लिए।

यहाँ शायद यह स्मरण करना चाहिए कि दो सतत फलनों (Continuous Functions) का योग सतत होता है और एक सतत फलन का अदिश गुणन (Scalar multiple) भी सतत होता है।

(v) क्षेत्र F पर सभी बहुपदों के समुच्चय $F[x]$, किसी अनिश्चित (Indeterminate) x के लिए, F पर एक सदिश समष्टि बनाता है, तो बहुपदों के योग और अदिश गुणन को निम्नलिखित तरीके से परिभाषित किया जाता हैः

$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in F[x], \quad \alpha \in F$ के लिए

$\alpha.(f(x)) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + ... + \alpha a_n x^n$

(vi) $M_{m \times n}(F)$ सभी $m \times n$ आव्यूह का समुच्चय क्षेत्र F से प्राप्त प्रविष्टियों (Entries) के द्वारा, योग और अदिश गुणन के तहत आव्यूह F पर एक सदिश समष्टि बनाता है।

हम $M_{n \times n}(F)$ के लिए चिन्ह $M_n(F)$ का उपयोग करते हैं।

(vii) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र और X एक गैर–रिक्त (Non-Empty) समुच्चय है।

मान लीजिए कि $F^X = \{f \mid f : X \to F\}$, X से F तक सभी मानचित्रण या मैपिंग (Mapping) का समुच्चय है। तब F^X, योग और अदिश गुणन के तहत F पर एक सदिश समष्टि बनाता है, जिसे निम्नानुसार परिभाषित किया जाता हैः

$f, g \in F^X, \alpha \in F$ के लिए।

$f + g : X \to F, \alpha F : X \to, F$ को परिभाषित इस तरह करे कि,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \;\; \forall\, x \in X$

(viii) मान लीजिए कि V त्रिआयाम समष्टि (Three Dimensional Space) में सभी सदिश का समुच्चय है। V में योग को ज्यामिति और अदिश गुणन के सामान्य तौर पर सदिश के योग की तरह लिया जाता है,

$\alpha \in \mathbf{R}, \vec{v} \in V \Rightarrow \alpha \vec{v}$ जो V में एक सदिश है और जिसका परिमाण (Magnitude) V से $|\alpha|$ गुणा है। तब V, $\mathbf{R}$ पर सदिश समष्टि बनाता है।

1.3 उपसमष्टि

परिभाषा: एक सदिश समष्टि $V(F)$ में एक गैर–रिक्त उपसमुच्चय W को V का उपसमष्टि (Subspace) कहा जाता है यदि W के संचालनों के अंतर्गत W उपसमष्टि बनाता है।

प्रमेय 1.2: किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के अरिक्त उपसमूह W को उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक और जरूरी नियम यह है कि W योग और अदिश गुणन (Scalar Multiplication) के अंतर्गत बंद या संवृत (Closed) हो।

हल: यदि W एक उपसमष्टि है, तो परिणाम परिभाषा के अनुसार होना चाहिए।

इसके विपरीत, मान लीजिए कि W योग और अदिश गुणन के सापेक्ष संवृत है।

मान लीजिए कि $x, y, \in W$ चूंकि $1 \in F, -1 \in F$

$\therefore \quad -1.\, y \in W \Rightarrow -y \in W$

$\quad\;\; x, -y \in W \Rightarrow x - y \in W$

$\Rightarrow \quad < W, + > < V, + >$ का उपसमूह बनाता है

परिभाषा में बाकी नियम तुच्छ रूप (Trivially) में अनुसरण करते हैं।

प्रमेय 1.3: सदिश समष्टि $V(F)$ का अरिक्त उपसमूह W सदिश उपसमष्टि V का उपसमष्टि है यदि और केवल यदि $\alpha x + \beta y \in W,\ \alpha, \beta \in F, x, y \in W$ के लिए है।

हल: यदि W एक उपसमष्टि है, तो परिणाम परिभाषा के अनुसार होता है।

इसके विपरीत, यदि W परिभाषा के नियमों को पूरा करता है।

तो मान लीजिए कि $x, y \in W$ कोई अवयव है चूंकि $1 \in F$

$1 . x + 1 . y = x + y \in W$

$\Rightarrow W$ सदिश योग के सापेक्ष संवृत है।

फिर से $x \in W, \alpha \in F$ तब,

$\alpha x = \alpha x + 0 . y$ सभी $y \in W, 0 \in F$ के लिए।

जो W में है (ध्यान दें यहां 0, W में नहीं हो सकता है)

यहाँ W अदिश गुणन के सापेक्ष संवृत है।

इस प्रकार, परिणाम पिछले प्रमेय के अनुसार है।

टिप्पणी

टिप्पणी: V और $\{0\}$ किसी भी सदिश समष्टि $V(F)$ का तुच्छ उपसमष्टि (Trivial Subspace) होगा।

उदाहरण के लिए, सदिश समष्टि $\mathbf{R}^2(\mathbf{R})$ पर विचार करें।

तब $W_1 = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$

$W_2 = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$

$\mathbf{R}^2$ के उपसमष्टि है।

जैसे किसी भी $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, (a_1, 0), (a_2, 0) \in W_1$, के लिए हम प्राप्त करते हैं,

$\alpha (a_1, 0) + \beta (a_2, 0) = (\alpha a_1, 0) + (\beta a_2, 0)$

$= (\alpha a_1 + \beta a_2, 0) \in W_1$

इसलिए W_1 उपसमष्टि है। इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि W_2 भी $\mathbf{R}^2$ का उपसमष्टि है।

उदाहरण 1.1: दो उपसमष्टिों का संघ (Union) एक उपसमष्टि नहीं हो सकता है।

हल: दिए गए प्रमेय के अंतर्गत 1.3 प्रमेय पर विचार करें।

$W_1 \cup W_2$ समुच्चय है जिसमें सभी $(a, 0), (0, b)$ प्रकार के युग्म होंगे।

विशेष रूप से $(1, 0), (0, 1) \in W_1 \cup W_2$

लेकिन $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$ है,

इसलिए $W_1 \cup W_2$ एक उपसमष्टि नहीं है।

उपसमष्टिों के संघ (Union) और प्रतिच्छेदन (Intersection) से संबंधित अधिक जानकारी के लिए निम्न उदाहरणों को देखें।

उपसमष्टि के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं:

(i) मान लीजिए कि $V = \mathbf{R}[x]$ और $W = \{f(x) \in V \mid f(x) = f(1-x)\}$

तब W, V का उपसमष्टि होगा क्योंकि,

$W \neq \phi$ क्योंकि $0 \in W, f(x) = 0 = f(1-x)$

फिर, अगर $f(x), g(x) \in W$, तब $f(x) = f(1-x), g(x) = g(1-x)$

मान लीजिए कि $f(x) + g(x) = h(x)$

तब $h(1-x) = f(1-x) + g(1-x)$

$= f(x) + g(x) = h(x)$

$\Rightarrow \quad h(x) \in W$ या $f(x) + g(x) \in W$

फिर, $\alpha \in \mathbf{R}$, के लिए, मान लीजिए कि $\alpha f(x) = r(x)$

तब $\quad r(1-x) = \alpha f(1-x) = \alpha f(x) = r(x)$

$\Rightarrow \quad r(x) \in W \Rightarrow \alpha f(x) \in W$

इसलिए W एक उपसमष्टि है।

(ii) मान लीजिए कि $V = F^X$ (प्रमेय 1.1 उदाहरण (vii) देखिए) और मान लीजिए कि, $Y \subseteq X$

तब $W = \{f \in V \mid f(y) = 0 \ \forall \ y \in Y\}$ का V उपसमष्टि है।

स्पष्ट रूप से $0 \in W$ और $f, g \in W$,

$f(y) = 0 = g(y) \quad \forall \ y \in Y$

इसलिए $(f+g)(y) = f(y) + g(y) = 0 \quad \forall \ y \in Y$

$\Rightarrow \quad f + g \in W$

पुनः, यदि $\alpha \in F$, तब

$(\alpha f)y = \alpha(f(y)) = 0 \ \ \forall \ y \in Y$

$\Rightarrow \quad \alpha f \in W$

(iii) यदि $V = \mathbf{R}^n$ तब,

$W = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 + x_2 + ... + x_n = 1\}$, V का उपसमष्टि नहीं होगा।

ध्यान दें $(1, 0, 0, ..., 0) + (0, 1, 0, ..., 0) = (1, 1, 0, ..., 0) \notin W$ है।

(iv) मान लीजिए कि $V = M_{2 \times 1}(F)$। मान लीजिए कि A, F पर एक 2×2 आव्यूह (Matrix) है।

तब $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in V \mid A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \right\}$ V का उपसमष्टि बनाता है।

$W \neq \phi$ क्योंकि $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ के लिए $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ W में हमारे पास हैं,

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in W$$

और $A\left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\alpha A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in W$

इसलिए W, V का उपसमष्टि है।

(v) मान लीजिए कि $V = F_2^2$, है, जहाँ $F_2 = \{0, 1\}$ mod 2 है।

यदि $W_1 = \{(0, 0), (1, 0)\}$
$W_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$
$W_3 = \{(0, 0), (1, 1)\}$

तब $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\} = V$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यहाँ V एक यथोचित उपसमष्टि (Proper Subspace) है जो कि सीमित या परिमित (Finite) संख्या का संयोजन है।

हालांकि, यह परिणाम तब सही नहीं होगा जब V असीमित या अपरिमित (Infinite) क्षेत्र पर सदिश समष्टि होगा।

उदाहरण 1.2: मान लीजिए कि V सीमित या परिमित क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है।

मान लीजिए $V = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_k$, W_i, V $\forall\, i$ का उपसमष्टि है। अगर $o(F) \geq k$ है, तब दिखाएं कि किसी भी i के लिए $V = W_i$ होगा।

हल: मान लीजिए कि $V \neq W_i$ किसी भी i के लिए,

तब $W_k \not\subseteq W_1 \cup W_2 \cup ..... \cup W_{k-1}$

और $W_1 \cup W_2 \cup ..... \cup W_{k-1} \not\subseteq W_k$

$\Rightarrow$ $\exists\, x \in W_k$ इस प्रकार कि, $x \notin W_1 \cup W_2 \cup ..... \cup W_{k-1}$

और $\exists\, y \in W_1 \cup ..... \cup W_{k-1}$ इस प्रकार कि, $y \notin W_k$

मान लीजिए कि $S = \{ax + y \mid a \in F\}$

तब S का कोई भी अवयव (Element) W_k में नहीं होगा क्योंकि,

$ax + y \in W_k \Rightarrow ax + y - ax = y \in W_k$, एक विरोधाभास (Contradiction) है।

तब $ax + y \notin W_k \quad \forall\, a \in F$

$\Rightarrow$ $ax + y \in W_1 \cup W_2 \cup ...... \cup W_{k-1} \quad \forall\, a \in F$

इस तरह $\exists\, \alpha, \beta \in F, \alpha \neq \beta$ इस प्रकार की,

$\alpha x + y \in W_j$, $\beta x + y \in W_j$ किसी भी j के लिए $1 \leq j \leq k-1$ होगा।

$\therefore$ $(\alpha x + y) - (\beta x + y) \in W_j$

$\Rightarrow$ $(\alpha - \beta)x \in W_j$

$\Rightarrow$ $x \in W_j \Rightarrow x \in W_1 \cup ..... \cup W_{k-1}$, एक विरोधाभास है।

$\therefore$ $V = W_i$ किसी भी i के लिए।

(आप यहाँ देख सकते हैं कि उदाहरण (v) के अनुसार उपसमष्टि $o(F) = 2$ है और आप किसी भी i के लिए लिख सकते हैं $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3, V \neq W_i$)

उपसमष्टि का योग और क्रमागत योग (Sum and Direct Sum of Subspaces)

मान लीजिए कि W_1 और W_2 किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टि हैं तो हम परिभाषित करेंगे:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

$W_1 + W_2 \neq \varphi$ जैसे कि $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$

पुनः, $x, y \in W_1 + W_2, \alpha, \beta \in F$ अर्थात,

$$x = w_1 + w_2$$

$$y = w'_1 + w'_2 \; w_1, w'_1 \in W_1, w_2, w'_2 \in W_2$$

$$\alpha x + \beta y = \alpha\,(w_1 + w_2) + \beta(w'_1 + w'_2)$$

$$= (\alpha w_1 + \beta w'_1) + (\alpha w_2 + \beta w'_2) \in W_1 + W_2$$

यह दर्शाता है कि दो उपसमष्टि का योग भी एक उपसमष्टि होता है।

आप परिभाषा का विस्तार, इसी तरह, n उपसमष्टियों के लिए भी कर सकते हैं, $W_1, W_2, ..., W_n$, जो कि उपसमष्टि ही है, तो हम लिख सकते हैं,

$$W_1 + W_2 + ... + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

परिभाषा: मान लीजिए कि $W_1, W_2,..., W_n$ किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि है, तो $W_1 + W_2 + ... + W_n$ को सरल योग कहा जायगा, अगर प्रत्येक $x \in W_1 + W_2 + ... + W_n$ को $x = w_1 + w_2 + ... + w_n, w_i \in W_i$ को अद्वितीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है तो हम इस स्थिति को ऐसे लिख सकते हैं,

$$W_1 + W_2 + ... + W_n = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$$

हम कहते हैं, एक सदिश समष्टि V अपनी उपसमष्टि $W_1, W_2, ..., W_n$ का सरल योग है अगर $V = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$, अर्थात्,

$$V = W_1 + W_2 + ... + W_n$$

और प्रत्येक $v \in V$ को विशिष्ट रूप से $v = w_1 + w_2 + ... + w_n, w_i \in W_i$ में लिखा जा सकता है।

प्रमेय 1.4: $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = (0)$

प्रमाण: मान लीजिए कि $V = W_1 \oplus W_2$

हमें $W_1 \cap W_2 = (0)$ को सिद्ध करने की आवश्यकता है।

माना कि $x \in W_1 \cap W_2$, तब $x \in W_1$ और $x \in W_2$

$$\Rightarrow \quad x = 0 + x \in W_1 + W_2 = V$$

$$\Rightarrow \quad x = x + 0 \in W_1 + W_2 = V$$

क्योंकि प्रत्येक x को $x = x + 0$ और $0 + x$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है और प्रतिनिधित्व या निरूपण अद्वितीय (Unique) है, इसलिए हम $x = 0$ प्राप्त करते हैं।

$\Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = (0)$

विलोमतः (Conversely), माना कि $v \in V$ कोई अवयव है और यदि,

$v = w_1 + w_2$

$v = w'_1 + w'_2$ v के दो प्रतिनिधित्व हैं।

तब $w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2 \; (= v)$

$\Rightarrow \quad w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2$

अब W_1 में L.H.S., है और W_2 में R.H.S., है

अर्थात, प्रत्येक $W_1 \cap W_2 = (0)$ से संबंधित है।

$\Rightarrow \quad w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 = 0$

$\Rightarrow \quad w_1 = w'_1, w_2 = w'_2$

इस प्रकार यह प्रमाण सिद्ध होता है।

नोटः उपरोक्त प्रमेय को इस तरह भी लिखा जा सकता है,

$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करेंः मान लीजिए कि एक समष्टि $V(F) = F^2(F)$ है, जहाँ F एक क्षेत्र है।

माना कि $W_1 = \{(a, 0) \mid a \in F\}$ और
$W_2 = \{(0, b) \mid b \in F\}$

तो V, W_1 और W_2 का योग होगा,
$v \in V \Rightarrow v = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \in W_1 + W_2$

इस प्रकार, $V \subseteq W_1 + W_2$

या $V = W_1 + W_2$

पुनः यदि $(x, y) \in W_1 \cap W_2$ कोई अवयव है तो,

$(x, y) \in W_1$ और $(x, y) \in W_2$

$\Rightarrow \quad y = 0$ और $x = 0$

$\Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$

$\Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = (0)$

इस तरह $V = W_1 \oplus W_2$

उदाहरण 1.3: मान लो कि $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तक सभी फलनों का सदिश समष्टि V है। मान लो कि $V_e = \{f \in V \mid f \text{ सम है}\}$, $V_0 = \{f \in V \mid f \text{ विषम है}\}$, तब V_e तथा V_0, V और $V = V_e \oplus V_0$ के उपसमष्टि है।

टिप्पणी

हलः V में जोड़ और अदिश गुणन निम्नलिखित नियम द्वारा किया जाएगा।

$(f + g)\, x = f(x) + g(x);\ (\alpha f)\, x = \alpha f(x)$

तो $V_e \neq \varphi$ इसलिए $0(x) = 0 \Rightarrow 0(x) = 0(-x)$

$\Rightarrow \quad 0 \in V_e$

फिर से $\alpha, \beta \in \mathbf{R}, f, g \in V_e$ हमारे पास,

$= \quad \alpha(f(-x)) + \beta(g(-x))$

$= \quad \alpha f(x) + \beta g(x)$

$= \quad (\alpha f + \beta g)x$

$\Rightarrow \quad \alpha f + \beta \mathrm{g} \in V_e$

$\Rightarrow \quad V_e, V$ का उपसमष्टि है

इसी प्रकार, V_0, V का उपसमष्टि है।

इसलिए, $V_e + V_0$ भी V का उपसमष्टि होगा।

हम दिखाएंगे कि $V \subseteq V_e + V_0$

मान लो कि $f \in V$ कोई अवयव या सदस्य है।

मान लो कि $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ हैं, इस तरह कि $g(x) = f(-x)$ है। तब $g \in V$ है,

तब $f = \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right) + \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g\right)$

चूंकि $\quad \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right)(-x) = \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}g(-x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}f(x)$

$$= \left(\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right)x$$

हम प्राप्त करते हैं, $\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g \in V_e$

इसी प्रकार, $\quad \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g \in V_0$

$\Rightarrow \quad f \in V_e + V_0 \Rightarrow V \subseteq V_e + V_0$

या $\quad V = V_e + V_0$

अंततः $\quad f \in V_e \cap V_0 \Rightarrow f \in V_e, f \in V_0$

$\Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$ और $f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow \quad f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow \quad f(x) + f(x) = 0 = 0(x)$

$\Rightarrow \quad 2f(x) = 0\,(x)$ सभी x के लिए

$\Rightarrow \qquad 2f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \Rightarrow \quad V_e \cap V_0 = (0).$

इस प्रकार यह सिद्ध होता है।

उदाहरण 1.4: यदि सदिश समष्टि V के तीन उपसमष्टि L, M, N हैं और $M \subseteq L$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N) = M + (L \cap N)$ है।

टिप्पणी

एक उदाहरण भी दें, जब $M \not\subseteq L$ होने पर परिणाम सिद्ध नहीं हो पायेगा।

हल: हम अभ्यास करने के लिए पहला भाग आपके लिए छोड़ देते हैं। हम आपको याद दिलाना चाहते हैं कि वलयों या रिंगों (Rings) में आदर्शों के लिए समान परिणाम प्राप्त हुए थे। इस समानता (Equality) को प्रमापीय समानता (Modular Equality) कहा जाता है।

अब समष्टि $V = \mathbf{R}^2$ पर विचार करें,

माना कि $L = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{R}\}$

$M = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$

$N = \{(0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$

यह एक नियमित (Routine) प्रकरण है यह निर्धारित करने के लिए कि L, M, N, यहाँ V के उपसमष्टि है।

$\alpha(a, a) + \beta(a', a') = (\alpha a, \alpha a) + (\beta a', \beta a')$

$= (\alpha a + \beta a', \alpha a + \beta a') \in L$, इत्यादि।

अब $(x, y) \in L \cap M \Rightarrow (x, y) \in L$ और $(x, y) \in M$

$\Rightarrow \quad y = x$ और $y = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0 = y \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (0, 0)$

इसी प्रकार, $L \cap N = \{(0, 0)\}$

$\Rightarrow \quad L \cap M + L \cap N = \{(0, 0)\}$

पुनः, $M + N = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ और क्योंकि $(1, 1) \in M + N (1, 1) \in L$

हमने प्राप्त किया $(1, 1) \in L \cap (M + N)$, किन्तु $(1, 1) \notin L \cap M + L \cap N$ है।

इस प्रकार $L \cap (M + N) \neq (L \cap M) + (L \cap N)$, जब $M \not\subseteq L$ है।

उदाहरण 1.5: मान लो कि $V = \mathbf{R}^X$ (प्रमेय 1.3 का उदाहरण देखें) और $fix\, x_0 \in X$ है।

$W = \{f \in V \mid f(x_0) = 0\}$

$W' = \{g \in \text{V} \mid g(x) = 0 \ \forall \ x \in X - \{x_0\}\}$

तब सिद्ध करें कि W, W', V के उपसमष्टि है और $V = W \oplus W'$।

हल: हम पाठकों पर यह सिद्ध करने के लिए छोड़ देते हैं कि W, W' उपसमष्टि है।

मान लो कि $f \in W \cap W'$ तब $f \in W$ और $f \in W'$

$\Rightarrow \quad f(x_0) = 0, f(x) = 0 \ \forall \ x \in X, x \neq x_0$

$\Rightarrow \quad f(x) \ = 0, \forall \ x \in X,$

$\Rightarrow \quad f = 0$ और इसलिए $W \cap W' = \{0\}$ है।

मान लो कि $f \in V$ और माना कि $f(x_0) = r$

तब $(f - r\,\delta x_0) \in W, r\,\delta x_0 \in W'$

और $f = (f - r\,\delta x_0) + r\,\delta x_0 \in W + W'$

$\therefore \quad V = W + W'$

अर्थात, $V = W \oplus W'$

ध्यान दें, δx_0 क्रोनेकर डेल्टा (Kronecker Delta) को दर्शाता है यानी,

$\delta x_0\,(x_0) = 1, \delta x_0\,(x) = 0 \ \forall \ x \neq x_0$ है।

भागफल समष्टि (Quotient Spaces)

यदि W एक सदिश समष्टि $V(F)$ का उपसमष्टि है तो $< W, + >$ से $< V, + >$ का एक एबेलियन समूह (Abelian Group) बनता है। हम V में W के सभी सहसमुच्चय (Cosets) की बात कर सकते हैं। मान लो कि $\frac{V}{W}$ सभी सहसमुच्चय $W + v$ का समुच्चय, $v \in V$ है तो हम दिखा सकते हैं कि $\frac{V}{W}$ भी F पर सदिश समष्टि बनाता है।

$(W + x) + (W + y) = W + (x + y) \quad x, y \in V$

$\alpha(W + x) \ = W + \alpha x \ \alpha \in F$

योग पूर्ण रूप से परिभाषित है इसलिए,

$W + x = W + x'$

$W + y = W + y'$

$\Rightarrow \quad x - x' \in W, y - y' \in W$

$\Rightarrow \quad (x - x') + (y - y') \in W$

$\Rightarrow \quad (x + y) - (x' + y') \in W$

$\Rightarrow \quad W + (x + y) = W + (x' + y')$

पुनः, $\quad W + x = W + x'$

$\Rightarrow \quad x - x' \in W,$

$\Rightarrow \quad \alpha(x - x') \in W \ \alpha \in F$

$\Rightarrow \quad \alpha x - \alpha x' \in W$

$\Rightarrow \quad W + \alpha x = W + \alpha x'$

$\Rightarrow \quad \alpha(W + x) = \alpha(W + x')$

इस प्रकार, अदिश गुणन (Scalar Multiplication) को भी अच्छी तरह से परिभाषित किया गया है। आप यह जांच सकते है कि सदिश समष्टि की परिभाषा की सभी स्थितियां संतुष्ट होती हैं।

$W+0, \frac{V}{W}$ का शून्य हो जायगा।

$W-x, W+x$ का व्युत्क्रम या प्रतिलोम (Inverse) है।

तथा $\alpha((W+x)+(W+y)) \quad = \alpha(W+(x+y))$

$= W + \alpha(x + y)$

$= W + (\alpha x + \alpha y)$

$= (W + \alpha x) + (W + \alpha y)$

$= \alpha(W + x) + \alpha(W + y)$, इत्यादि।

इस प्रकार, V/W भी F पर सदिश समष्टि बनाता है, V का W के सापेक्ष भागफल समष्टि (Quotient Space) कहलाता है।

1.4 रैखिक फैलाव या रैखिक विस्तार (विस्तृति)

परिभाषा: मान लीजिए कि $V(F)$ सदिश समष्टि है, और $v_i \in V, \alpha_i \in F$ क्रमशः V और F के अवयव हैं, तो अवयवों $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ के प्रकार को F पर $v_1, v_2, ..., v_n$ का रैखिक संचय (Linear Combination) कहा जाता है।

मान लीजिए कि S, V का एक गैर–रिक्त समुच्चय है तब समुच्चय,

$$L(S) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in F, v_i \in S, n \text{ सीमित (Finite)}\right\} \text{ है।}$$

अर्थात, S के अवयवों के सीमित या परिमित समुच्चय के संपूर्ण रैखिक संचयों के समुच्चय को रैखिक फैलाव या विस्तृति या विस्तार (Linear Span) कहा जाता है। इसे $<S>$ द्वारा भी निरूपित किया जाता है। यदि $S = \varphi$, तो $L(S) = \{0\}$ को परिभाषित करें।

प्रमेय 1.5: $L(S)$, S से युक्त V का सबसे छोटा उपसमष्टि है।

प्रमाण: $L(S) \neq \varphi$ क्योंकि $v \in S \Rightarrow v = 1 . v, 1 \in F$

$\Rightarrow v \in L(S)$

इस प्रकार, वास्तव में, $S \subseteq L(S)$

मान लीजिए कि $x, y \in L(S), \alpha, \beta \in F$ कोई अवयव हैं।

तब, $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

$y = \beta_1 v_1' + \beta_2 v_2' + ... + \beta_m v_m' \qquad v_i, v_j' \in S, \alpha_i, \beta_j \in F$

इस प्रकार, $\alpha x + \beta y = \alpha\alpha_1 v_1 + \alpha\alpha_2 v_2 + ... + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 v_1' + ... + \beta\beta_m v_m'$

R.H.S. एक रैखिक संचय $L(S)$ से संबंधित है।

इस प्रकार $L(S)$, S से युक्त V का सबसे छोटा उपसमष्टि है।

मान लीजिए कि W, S से युक्त V का उपसमष्टि है।

हम दर्शाते हैं $L(S) \subseteq W$

$x \in L(S) \Rightarrow x = \Sigma\alpha_i v_i \qquad v_i \in S, \alpha_i \in F$

$v_i \in S \subseteq W$ सभी i के लिए और W एक उपसमष्टि है।

$\Rightarrow \Sigma\alpha_i v_i \in W \Rightarrow x \in W$

$\Rightarrow L(S) \subseteq W$

इस प्रकार सिद्ध होता है।

प्रमेय 1.6: यदि S_1 और S_2 एक उपसमष्टि है तब,

(*i*) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow L(S_1) \subseteq L(S_2)$

(*ii*) $L(S_1 \cup S_2) = L(S_1) + L(S_2)$

(*iii*) $L(L(S_1)) = L(S_1)$.

प्रमाण: (*i*) $x \in L(S_1) \Rightarrow x = \Sigma\alpha_i v_i \;\; v_i \in S_1, \alpha_i \in F$

इसलिए $v_i \in S_1 \subseteq S_2$ सभी i के लिए।

$\Rightarrow \quad \Sigma\alpha_i v_i \in S_2 \Rightarrow x \in L(S_2)$

$\Rightarrow \quad L(S_1) \subseteq L(S_2)$.

(*ii*) $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2 \Rightarrow L(S_1) \subseteq L(S_1 \cup S_2)$

$S_2 \subseteq S_1 \cup S_2 \Rightarrow L(S_2) \subseteq L(S_1 \cup S_2)$

$\Rightarrow \quad L(S_1) + L(S_2) \subseteq L(S_1 \cup S_2)$

पुनः, $S_1 \subseteq L(S_1) \subseteq L(S_1) + L(S_2)$

$S_2 \subseteq L(S_2) \subseteq L(S_1) + L(S_2)$

$\Rightarrow \quad S_1 \cup S_2 \subseteq L(S_1) + L(S_2)$.

इस प्रकार $L(S_1 \cup S_2) \subseteq L(S_1) + L(S_2)$

क्योंकि $L(S_1 \cup S_2)$ का सबसे छोटा उपसमष्टि है, जिसमें $S_1 \cup S_2$ और $L(S_1) + L(S_2)$ है।

इस प्रकार $L(S_1 \cup S_2) = L(S_1) + L(S_2)$

(iii) मान लीजिए कि $L(S_1) = K$ तब हम दिखा देंगे कि $L(K) = L(S_1)$

क्योंकि $K \quad \subseteq L(K)$

$\therefore \; L(S_1) \subseteq L(L(S_1))$

पुनः $x \in L(L(S_1)) \Rightarrow x\, L(S_1)$ के अवयवों (Members) का एक रैखिक संचय है जोकि S_1 के अवयवों का एक रैखिक संचय है।

इसलिए x, S_1 के अवयवों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow \quad x \in L(S_1)$

तो $L(L(S_1)) \subseteq L(S_1)$

इस प्रकार $L(L(S_1)) = L(S_1)$

प्रमेय 1.7: यदि W, V का उपसमष्टि है, तो $L(W) = W$ और इसके विपरीत है।

प्रमाण: परिभाषा के अनुसार $W \subseteq L(W)$ और चूंकि $L(W)$, W से युक्त V का सबसे छोटा उपसमष्टि है, जिसमें W भी उपसमष्टि है।

$L(W) \subseteq W$

इस प्रकार, $L(W) = W$

विलोमतः या (इसके विपरीत) मान लीजिए कि $L(W) = W$

मान लीजिए कि $x, y \in W, \alpha, \beta \in F$

तब $x, y \in L(W)$

$\Rightarrow \quad x$ और y, W के अवयवों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow \quad \alpha x + \beta y$, W के अवयवों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in L(W)$

$\Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in W$

$\Rightarrow \quad W$ एक उपसमष्टि है।

परिभाषा: यदि $V = L(S)$ हो, तो हम कह सकते हैं कि S, V पर विस्तृति या विस्तार (Spans या Generates) करता है। F पर सदिश समष्टि V को परिमित आयाम (Finite Dimensional) कहा जाता है। यदि कोई V के एक परिमित उपसमुच्चय (Finite Subset) में S का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि, $V = L(S)$ है। हम परिमित आयाम सदिश समष्टि के लिए संकेतन FDVS का उपयोग करते हैं। परिणामों से, यह सिद्ध होता है कि यदि S_1 और S_2, V के दो उपसमष्टि हैं, तो $S_1 + S_2$ भी $S_1 \cup S_2$ द्वारा विस्तृति या विस्तार उपसमष्टि होंगे।

वास्तव में, $L(S_1 \cup S_2) = L(S_1) + L(S_2) = S_1 + S_2$ है।

उदाहरण 1.6: माना कि $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$, $\mathbf{R}^2(\mathbf{R})$ का उपसमष्टि है, तो दिखाएँ कि (2, 3), $L(S)$ से संबंधित है।

हलः (2, 3) $\in L(S)$ यदि इसे (1, 4) और (0,3) के रैखिक संचय के रूप में रखे, तो

अब, $(2, 3) = \alpha(1, 4) + \beta(0, 3)$

$\Rightarrow$ $(2, 3) = (\alpha + 0, 4\alpha + 3\beta)$

$\Rightarrow$ $2 = \alpha, 4\alpha + 3\beta = 3$

$\Rightarrow$ $\alpha = 2, \beta = -\frac{5}{3}$

अतः $(2, 3) = 2\ (1, 4) - \frac{5}{3}\ (0, 3)$

इस प्रकार, $(2, 3) \in L(S)$.

उदाहरण 1.7: मान लीजिए कि $V = \mathbf{R}^4(\mathbf{R})$ और $S = \{(2, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0)\}$ है, तो $L(S)$ का पता लगाएं।

हलः कोई भी अवयव $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in L(S)$, S के अवयवों या सदस्यों का एक रैखिक संचय है।

मान लीजिए कि $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha(2, 0, 0\ 1) + \beta(-1, 0, 1, 0), \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

तब $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (2\alpha - \beta, 0, \beta, \alpha)$

अर्थात, $L(S) = \{(2\alpha - \beta, 0, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

उदाहरण 1.8: दिखाएँ कि समष्टि $F[x]$ परिमित आयाम नहीं हैं।

हलः मान लीजिए कि $V = F[x]$ और माने कि यह परिमित आयाम हैं,

तब $\exists\ S \subseteq V$ इस तरह कि $V = L(S)$ और S परिमित है।

अगर $S = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ है तो हम मान सकते है कि $p_i \neq 0 \quad \forall i$

मान लीजिए कि $\deg p_i = r_i$ और $t = \text{Max}\ \{r_1, r_2, ..., r_k\}$

यहाँ $x^{t+1} \in V$ और क्योंकि $V = L(S)$,

$x^{t+1} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + ... + \alpha_k p_k,\ \alpha_i \in F$

इसलिए, $0 = (-1)\ x^{t+1} + \alpha_1 p_1 + ... + \alpha_k p_k$

चूंकि x^{t+1}, $p_1, p_2, ..., p_k$ में नहीं प्रतीत होता है।

हमें प्राप्त होता है $-1 = 0$ जो एक विरोधाभास है।

इसलिए V, F पर FDVS नहीं है।

ध्यान दें, यदि $S = \{1, x, ..., x^n, ...\}$ होगा तो $V = L(S)$ होगा।

1.5 रैखिक निर्भरता, रैखिक स्वतंत्रता और उनके मूल गुण

मान लीजिए कि $V(F)$ एक सदिश समष्टि है। V में अवयवों $v_1, v_2, ..., v_n$ एक रैखिक, निर्भरता (Linear Dependence) या LD कहलाते हैं यदि अदिशों (Scalars) $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n \in F$ है (जिसमें से सभी शून्य नहीं है) तो,

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0$ होगा।

($v_1, v_2, \ldots, v_n$ संख्या में सीमित या परिमित हैं, लेकिन अनिवार्य रूप से अलग नहीं हैं)।

इस प्रकार एक रैखिक निर्भरता के लिए $\Sigma\alpha_i v_i = 0$ और कम से कम एक $\alpha_i \neq 0$ होना चाहिए। यदि $v_1, v_2 \ldots v_n$ एक रैखिक निर्भरता नहीं है तो वे एक रैखिक स्वतंत्रता (Linear Independent) या (*LI*) कहलाते हैं।

दूसरे शब्दों में, $v_1, v_2, .., v_n, LI$ होगा यदि $\Sigma\alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$ सभी i के लिए।

एक सीमित या परिमित समुच्चय $X = \{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ को n सदस्यों के *LD* या *LI* के अनुसार *LD* या *LI* कहा जाता है।

सामान्य तौर पर $V(F)$ के कोई भी उपसमुच्चय $Y(F)$ को *LI* कहा जाता है। यदि प्रत्येक परिमित गैर–रिक्त उपसमुच्चय Y, LI है, अन्यथा इसे *LD* कहा जाता है। यदि कुछ उपसमुच्चय *LI* हैं और कुछ *LD* हैं तो Y को *LD* कहा जाता है।

अवलोकन

(*i*) एक गैर–शून्य सदिश हमेशा *LI* होता है क्योंकि $v \neq 0, \alpha v = 0$ का मतलब $\alpha = 0$ होता है।

(*ii*) एक शून्य सदिश समष्टि हमेशा *LD* होता है।

$1 \,.\, 0 = 0 \qquad 1 \neq 0, 1 \in F$

इस प्रकार, सदिश समष्टि का कोई भी संग्रह जिसमें शून्य होता है वह हमेशा *LD* होता है।

दूसरे शब्दों में, अगर $v_1, v_2, \ldots, v_n, LI$ होता है तो इनमें से कोई भी शून्य नहीं हो सकता है। (लेकिन इसके विपरीत नहीं, आगे उदाहरण देखें)।

(*iii*) v, LI होता है अगर $v \neq 0$ है।

(*iv*) *LI* समुच्चय का कोई उपसमुच्चय *LI* होता है।

(*v*) *LD* समुच्चय का कोई भी अधिसमुच्चय (Super Set) *LD* होता है।

(*vi*) अरिक्त समुच्चय φ, *LI* होता है क्योंकि इसमें कोई गैर–रिक्त परिमित उपसमुच्चय नहीं है और परिणामस्वरूप यह रैखिक स्वतंत्रता की स्थिति को संतुष्ट करता है। दूसरे शब्दों में, जब भी φ में $\Sigma\alpha_i v_i = 0$ तब कोई भी i नहीं है जिसके लिए $\alpha_i \neq 0$, होगा इसलिए समुच्चय φ, LI होता है। कभी–कभी हम यह भी कहते हैं कि गैर–रिक्त समुच्चय *LI* ही होता है।

(*vii*) सदिश का समुच्चय *LI* होगा यदि और केवल यदि इसका प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय *LI* है।

एक रैखिक स्वतंत्र और निर्भरता के कुछ उदाहरण निम्न हैं।

(*i*) $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}), \mathbf{R} =$ वास्तविक (Reals) पर विचार करें,

$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1) \in \mathbf{R}^2$, LI है

क्योंकि $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ सभी $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

(*ii*) सदिश समष्टि $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ में उपसमुच्चय

$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 4)\}$ पर विचार करे।

चूंकि $2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1) - 1(2, 3, 4) = (0, 0, 0)$

हम S को LD में प्राप्त करते हैं।

(*iii*) बहुपद के सदिश समष्टि में सदिशों

$f(x) = 1 - x, g(x) = x - x^2, h(x) = 1 - x^2$, LD होगा क्योंकि,

$f(x) + g(x) - h(x) = 0$ है।

उदाहरण 1.9: दर्शायें कि $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ में सदिश $v_1 = (0, 1, -2), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 2, 1)$, LI हैं।

हल: मान लीजिए कि $\Sigma \alpha_i v_i = 0$ के लिए $\alpha_i \in \mathbf{R}$

तब, $\alpha_1(0, 1, -2) + \alpha_2(1, -1, 1) + \alpha_3(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \quad (0, \alpha_1, -2\alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 2\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \quad 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$

$-2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

क्योंकि निर्धारकों का गुणांक $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 6 \neq 0$ है।

इसलिए उपरोक्त समीकरणों का सामान्य हल केवल शून्य है,

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$, LI है।

उदाहरण 1.10: यह दिखाएँ कि $F[x]$ में $\{f(x), g(x), h(x)\}$, LI है, जब भी $deg\, f(x), deg\, g(x), deg\, h(x)$ अलग–अलग होंगे।

हल: मान लीजिए कि $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m, \quad a_m \neq 0$

$g(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n, \quad b_n \neq 0$

$h(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_t x^t, \quad c_t \neq 0$

मान लीजिए कि $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in F$

मान लीजिए कि $m < n < t$ है (सामान्यता किसी भी हानि (Loss) के बिना)।

तब, $\gamma c_t = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ क्योंकि $c_t \neq 0$

$\therefore \quad \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$

और इसलिए $\beta b_n = 0 \Rightarrow \beta = 0$ क्योंकि $b_n \neq 0$

$\Rightarrow \alpha f(x) = 0 \Rightarrow \alpha a_m = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ क्योंकि $a_m \neq 0$

अतः F पर $F[x]$, में $\{f(x), g(x), h(x)\}$ LI है।

उदाहरण 1.11: यह दिखाएँ कि $\mathbf{R}^4(\mathbf{R})$ में सदिशों $v_1 = (1, 1, 2, 4)$, $v_2 = (2, -1, -5, 2)$, $v_3 = (1, -1, -4, 0)$ और $v_4 = (2, 1, 1, 6)$ LD हैं।

हल: माना कि $a(1, 1, 2, 4) + b(2, -1, -5, 2) + c(1, -1, -4, 0) + d(2, 1, 1, 6) = (0, 0, 0, 0)$

या $(a, a, 2a, 4a) + (2b, -b, -5b, 2b) + (c, -c, -4c, 0) + (2d, d, d, 6d) = (0, 0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a + 2b + c + 2d &= 0 \\ a - b - c + d &= 0 \\ 2a - 5b - 4c + d &= 0 \\ 4a + 2b + 0c + 6d &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - 4R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to \frac{1}{2}R_4, R_3 \to \frac{1}{3}R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -3/4 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - R_2, R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a + 2b + c + 2d &= 0 \\ -3b - 2c + d &= 0 \\ 3b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a + 2b + c + 2d &= 0 \\ -3b - 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

टिप्पणी

$$3b + 2c + d = 0$$

$a = -1, b = -1, c = 1, d = 1$ समीकरणों को संतुष्ट करता है ।

चूंकि गुणांक गैर–शून्य (Non-Zero Coefficients) हैं, इसलिए दिए गए सदिश LD हैं।

उदाहरण 1.12: यह दर्शायें कि,

(*i*) $\{1, \sqrt{2}\}$, $\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{R}$ में LI है।

(*ii*) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$, $\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{R}$ में LI है।

(*iii*) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$, $\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{R}$ में LI है।

हलः (*i*) मान लीजिए कि $a + b\sqrt{2} = 0,\ a, b \in \mathbf{Q}$

मान लीजिए कि $b \neq 0$, तो $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, एक विरोधाभास है।

इसलिए $b = 0$ और $a = 0$.

अतः $\{1, \sqrt{2}\}$ $\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{R}$ में LI है।

(*ii*) मान लीजिए $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0,\quad a, b, c \in \mathbf{Q}$

मान लीजिए $c \neq 0$ तब,

$$\sqrt{3} = -\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\sqrt{2} = \alpha + \beta\sqrt{2},\quad \alpha, \beta \in \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow \qquad 3 = \alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha\beta\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha\beta\sqrt{2} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \alpha\beta = 0$$

मान लीजिए $\alpha = 0$ तब $\beta = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, एक विरोधाभास है।

इसलिए, $c = 0$ दिया है,

$a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = b = 0$ नियम (*i*) से।

अतः $\{1, 2, 3\}$ $\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{R}$ में LI है।

इस प्रकार प्रमाण सिद्ध होता है।

(*iii*) मान लीजिए कि $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0,\quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}$

तब $(a + b\sqrt{2}) + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2}) = 0$

मान लीजिए कि $c + d\sqrt{2} \neq 0$

तब $\sqrt{3} = \dfrac{-(a+b\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})} = \dfrac{-(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}$

$= \alpha + \beta\sqrt{2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{Q}$

$\Rightarrow \quad \alpha.1 + \beta\sqrt{2} + (-1)\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \quad -1 = 0$ नियम (ii) से, एक विरोधाभास है।

$\therefore \quad c + d\sqrt{2} = 0 \Rightarrow c = d = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \quad a = b = 0$

इस प्रकार यह प्रमाण सिद्ध होता है।

प्रमेय 1.8: यदि $S = \{v_1, v_2, ... v_n\}$, V का एक आधार है, तो V के प्रत्येक अवयव को $v_1, v_2, ..., v_n$ के रैखिक संचयों (Linear Combination) के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

हल: चूंकि परिभाषा के आधार पर, $V = L(S)$, $v \in V$ के प्रत्येक अवयव को $v_1, v_2, ..., v_n$ रैखिक संचयों के रूप में व्यक्त किया जा सकता।

माना कि $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in F$

$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n, \quad \beta_i \in F$

तब $\quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_2 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$

$\Rightarrow \quad (\alpha_1 - \beta_1)\, v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, v_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\, v_n = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i - \beta_i = 0$ सभी i $(v_1, v_2, ... v_n, LI$ है) के लिए।

$\Rightarrow \quad$ जब $\alpha_i = \beta_i$ सभी i के लिए।

प्रमेय 1.9: मान लीजिए कि सदिश समष्टि V का परिमित उपसमुच्चय S इस प्रकार है कि $V = L(S)$ [अर्थात, V, परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) है] तो एक उपसमुच्चय S मौजूद होगा जो V का एक आधार होगा।

प्रमाण: यदि S में LI अवयव हैं तो S स्वयं V का आधार बनाता है और हमारे पास सिद्ध करने के लिए कुछ भी नहीं है। अब मान लें कि T, S का उपसमुच्चय इस प्रकार है कि T, V को विस्तृत करता है और T, S का सबसे न्यूनतम उपसमुच्चय (Minimal Subset) है (T का अस्तित्व सुनिश्चित है क्योंकि S सीमित या परिमित है)।

मान लें कि $T = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

हम दिखाएंगे कि T, LI है।

मान लें कि $\Sigma \alpha_i v_i = 0, \quad \alpha_i \in F$

यदि किसी i के लिए $\alpha_i \neq 0$ है। तो सामान्यता किसी भी हानि के बिना, हम $\alpha_1 \neq 0$ ले सकते हैं।

तब α_1^{-1} मौजूद होगा।

अब, $1\,\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_1^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = 0$

$\Rightarrow \quad v_1 = (-\alpha_1^{-1}\alpha_2)v_2 + (-\alpha_1^{-1}\ \alpha_3)v_3 + ... + (-\alpha_1^{-1}\alpha_n)v_n$

$= \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + ... + \beta_n v_n \quad \beta_i \in F$

यदि $v \in V$ कोई अवयव हो तो,

$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ...\ \gamma_n v_n \quad \gamma_i \in F$ इसलिए $V = L(T)$

$\Rightarrow \quad v = \gamma_1(\beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n) + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_n v_n$

अर्थात, V का कोई भी अवयव $v_2, v_3,..., v_n$ का रैखिक संचय (Combination) हैं।

$\Rightarrow \quad \{v_2, v_3,...v_n\}$, V का फैलाव या विस्तृति या विस्तार करता है, जो T की हमारे विकल्प के विपरीत है (क्योंकि T बहुत छोटा है)।

इसलिए $\alpha_1 = 0$

या सभी i के लिए, $\alpha_i = 0$ है।

$\Rightarrow \quad v_1, v_2,...\ v_n,\ LI$ है।

और इस प्रकार T, V का आधार है।

उपप्रमेय: एक परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) का एक आधार है।

वास्तव में, आप किसी भी सदिश समष्टि के लिए इस परिणाम को सिद्ध कर सकते हैं, अर्थात, किसी भी सदिश समष्टि का आधार होता है।

प्रमेय 1.10: माना कि V एक परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) है। मान लीजिए कि S और T, V के दो परिमित उपसमुच्चय इस प्रकार हैं कि S, V का फैलाव या विस्तार करता है और T, LI है तो $o(T) \leq o(S)$

प्रमाण: मान लीजिए कि $S = \{v_1, v_2,..., v_n\}$

$T = \{w_1, w_2,..., w_m\}$

मान लीजिए कि $m > n$

क्योंकि S, V का फैलाव या विस्तार करता है, तो हमारे पास है,

$w_1 = a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + ... + a_{1n} v_n$

$w_2 = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + ... + a_{2n} v_n$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$

$w_m = a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + ... + a_{mn} v_n$ जहां $a_{ij} \in F$ है।

समीकरणों की प्रणाली पर विचार करें।

$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m = 0$

$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m = 0$

... ...

$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m = 0$

जहां $x_1, x_2,..., x_m \in F$ अज्ञात है।

चूंकि समीकरणों की संख्या अज्ञात संख्या से कम है, तो $\exists$ में एक गैर–शून्य हल होगा $\alpha_1, \alpha_2,.., \alpha_m$ (किसी भी $(\alpha_i \neq 0)$ के लिए) F में इस प्रकार कि,

$a_{11} \alpha_1 + ... + a_{m1} \alpha_m = 0$

... ...

$a_{1n} \alpha_1 + ... + a_{mn} \alpha_m = 0$

इसलिए, $\alpha_1 (a_{11} v_1 + ... + a_{1n} v_n) + ... + \alpha_m (a_{m1} v_1 + ... + a_{mn} v_n) = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_m w_m = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \ \forall i$ इसलिए $w_1, w_2,..., w_m$ LI है।

जो एक विरोधाभास है और इस प्रकार $m \leq n$

अर्थात, $o(T) \leq o(S)$ है।

उपप्रमेय 1: परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) का कोई भी आधार सीमित या परिमित होता है।

प्रमाण: मान लीजिए कि S एक परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS), V का आधार है और S सीमित या परिमित नहीं है।

चूंकि V सीमित या परिमित आयाम है, V का सीमित या परिमित उपसमुच्चय T इस प्रकार है कि $V = L(T)$ है।

मान लीजिए $o(T) = m$

मान लीजिए S_1, LI उपसमुच्चय S इस प्रकार है कि $o(S_1) = m + 1$

उपरोक्त प्रमेय के अनुसार $o(T) \geq o(S_1)$, इससे हमें $m \geq m + 1$ मिलेगा, यह एक विरोधाभास दे रहा है। इसलिए S को सीमित या परिमित होना चाहिए।

उपप्रमेय 2: परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या सामान्य होती है।

प्रमाण: मान लीजिए कि S और T एक परिमित आयामी सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS), V के दो आधार हैं।

उपरोक्त उपप्रमेय के अनुसार, S और T सीमित या परिमित हैं और प्रमेय $o(T) \leq o(S)$ और $o(S) \leq o(T)$ के अनुसार।

इसलिए $o(T) = o(S)$ है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. एक सदिश समष्टि एक रिंग या वलय से कैसे भिन्न होता है?
2. सदिश समष्टि $V(F)$ का एक गैर–रिक्त उपसमुच्चय W का उपसमष्टि V कब बनता है?
3. उपसमष्टि में योग और क्रमागत योग की परिभाषा दीजिए।
4. रैखिक संयोजनों और रैखिक फैलाव या विस्तार को परिभाषित करें।

1.6 विस्तार प्रमेय

माना कि K, F और $a \in K$ का विस्तार (Extension) है।

माना कि $F[a] = \{f(a) \mid f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in F[x]\}, \quad a_i \in F$

तब $f(a) = a_0 + a_1a + ... + a_na^n \in K$, हम $F[a] \subseteq K$ प्राप्त करते हैं।

हम देख सकते हैं कि $F[a]$ एक समाकलन डोमेन (Integral Domain) है।

माना कि E इसके भागफल (Quotients) का क्षेत्र है। तब $E, F[a]$ से युक्त सबसे छोटा क्षेत्र होगा। हम दिखाते हैं,

$F[a] \subseteq F(a) \subseteq E$

अब $x = 0 + 1.x + 0.x^2 + ... \in F[x]$ और इस तरह,

$a = 0 + 1.a + 0.a^2 + ... \in F[a]$

अर्थात्, $a \in F[a] \subseteq E$

पुनः यदि $\alpha \in F$ कोई अवयव हो तो,

$\alpha = \alpha + 0x + 0x^2 + ... \in F[x]$

हम प्राप्त करते हैं, $\alpha \in F[a]$ या $F \subseteq F[a] \subseteq E$

इसलिए $F(a) \subseteq E$, चुंकि $F(a)$ सबसे छोटा क्षेत्र होगा जिसमें F तथा a हैं।

यदि $f(a) \in F[a]$ कोई भी अवयव या सदस्य हो जहां,

$f(a) = \alpha_0 + \alpha_1a + ... + \alpha_na^n, \alpha_i \in F$

तब, $a \in F(a), \alpha_i \in F \subseteq F(a)$, हम $f(a) \in F(a)$ प्राप्त करते हैं।

इसलिए $F[a] \subseteq F(a)$ और इस तरह,

$F[a] \subseteq F(a) \subseteq E$

लेकिन, E, $F[a]$ से युक्त सबसे छोटा क्षेत्र है।

$\therefore E \subseteq F(a)$ अर्थात् $F(a) = E$ होगा।

टिप्पणी

इस तरह, हमने स्पष्ट रूप से क्षेत्र $F(a)$ निर्धारित किया है। यह $F[a]$ के भागफल (Quotient) का क्षेत्र है।

हम लिखते हैं, $F(a) = \left\{\frac{f(a)}{g(a)} | g(a) \neq 0, f(x), g(x) \in F[x]\right\}$

सामान्य तौर पर हम ऐसा दिखा सकते है,

$$F(a_1, ..., a_n) = \left\{\frac{f(a_1, ..., a_n)}{g(a_1, ..., a_n)} | g(a_1, ..., a_n) \neq 0, \begin{matrix} f(x_1, ..., x_n) \in F[x] \\ g(x_1, ..., x_n) \in F[x] \end{matrix}\right\}$$

एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि $F[a] = F(a)$ कब होता है? इसका उत्तर देने के लिए, हम सबसे पहले यह परिभाषित करते हैं कि बीजगणितीय अवयव (Algebaric Element) क्या है। माना कि K, F का विस्तार है। $a \in K$ को F पर बीजगणितीय कहा जाता है। यदि गैर–शून्य बहुपद (Non-Zero Polynomial) इस प्रकार $f(x) \in F[x]$ तो $f(a) = 0$ होगा। अन्यथा, इसे अबीजीय अवयव (Transcendental Element) कहा जाता है। उदाहरण के लिए $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ = वास्तविक क्षेत्र $\mathbf{Q}$ पर बीजगणितीय है = वास्तविक क्षेत्र (Real Field) जैसे कि $\sqrt{2}$ गैर–शून्य बहुपद $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$ को संतुष्ट करता है। हालांकि, $\pi, e \in \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ पर बीजगणितीय नहीं हैं। F के एक विस्तार K को बीजगणितीय विस्तार कहा जाता है यदि प्रत्येक $a \in K, F$ पर बीजगणितीय हो।

यदि कुछ $a \in K$ पर a बीजगणितीय नहीं है, तो K को F का अबीजीय विस्तार कहा जाता है। उदाहरण के लिए, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ का अबीजीय विस्तार है। हम निम्नलिखित प्रमेय में देखेंगे कि परिमित विस्तार बीजगणितीय होते हैं।

तो, $\mathbf{C}$ = सम्मिश्र संख्याओं (Complex Numbers) का क्षेत्र $\mathbf{R}$ पर बीजगणितीय है जैसा कि $[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = 2$, $\{1, i\}$ $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ पर एक आधार है। हम कभी–कभी इस तथ्य को व्यक्त करने के लिए संकेतन K/F का उपयोग करते हैं कि K, F का एक विस्तार है। इसी प्रकार, K / F बीजगणितीय है। इसका अर्थ है कि K, F का बीजगणितीय विस्तार (Algebraric Extension) है।

प्रमेय 1.11: एक सीमित या परिमित विस्तार (Finite Extension) बीजगणितीय होता है।

प्रमाण: K, F का एक सीमित या परिमित विस्तार है। माना कि $[K : F] = n$। माना कि $a \in K$ तब $1, a, ..., a^n$ रैखिक रूप से F पर निर्भर करते हैं। इस प्रकार,

$\exists\, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ इस प्रकार $\alpha_0.1 + \alpha_1 a + ... + \alpha_n a^n = 0$ कुछ $\alpha_i \neq 0$ के लिए,

माना कि $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$ तब $f(x)\ F[x]$ में गैर–शून्य बहुपद है

किसी भी $\alpha_i \neq 0$ के लिए। इसके अलावा $f(a) = \alpha_0 + \alpha_1 a + ... + \alpha_n a^n = 0$ होगा।

$\therefore a$, F पर बीजगणितीय है।

$\therefore$ K, F पर बीजगणितीय है।

नोट: प्रमेय 1.11 का प्रतिलोम (Converse) सत्य नहीं है। हम इसे सिद्ध करने के लिए बाद में एक उदाहरण देंगे।

उपप्रमेय: $a \in K, F$ पर बीजगणितीय है यदि $[F(a) : F]$ = सीमित या परिमित है।

प्रमाण: प्रमेय 1.11 से $F(a)$, F पर बीजगणितीय है।

अर्थात $a \in F(a), F$ पर बीजगणितीय है।

उपरोक्त उपप्रमेय का विलोम (Converse) भी सही होता है। लेकिन हम अगले प्रमेय के बाद इसे सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1.12: माना कि $a \in K, F$ पर बीजगणितीय है। तब

(*i*) $\exists$ एक अद्वितीय एकगुणांकी अलघुकरणीय बहुपद (Unique Monic Irreducible Polynomial) $p(x) \in F[x]$ है इस प्रकार कि, $p(a) = 0$ होगा।

(*ii*) $\exists$ गैर–शून्य बहुपद $q(x) \in F[x]$ है इस प्रकार कि, $q(a) = 0$, $q(x), p(x)$ को विभाजित करता है।

(*iii*) $F(a) = F[a]$ है।

प्रमाण: (*i*) चूंकि F पर a बीजगणितीय है, $\exists$ एक गैर–शून्य बहुपद $f(x) \in F[x]$ इस प्रकार है कि,

$$f(a) = 0$$

माना कि $t(x)$, F पर लघुतम घात का गैर–शून्य बहुपद है इस प्रकार कि, $t(a) = 0$ और मान लीजिए कि,

$$t(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_i \in F$$

यदि $t(x)$ एकगुणांकी (Monic) नहीं है (एकगुणांकी बहुपद के द्वारा, हमारा मतलब एक बहुपद है जिसमें उच्चतम घात पद का गुणांक 1 है) तो मान लीजिए कि,

$$p(x) = a_n^{-1} a_0 + a_n^{-1} a_1 x + \ldots + x^n = a_n^{-1} t(x)$$

तो $\deg p(x) = n = \deg t(x)$ और $p(a) = 0$ और $p(x)$ एकगुणांकी बहुपद (Monic Polynomial) है।

इस प्रकार $\exists$ एकगुणांकी बहुपद $p(x)$ है न्यूनतम घात वाले बहुपद हैं इस तरह कि, $p(a) = 0$ होगा।

मान लीजिए कि $p(x) = p_1(x) p_2(x)$, जहाँ बहुपद p_1 और p_2, इस प्रकार है कि $\deg p$ की तुलना में ये न्यूनतम घात वाले बहुपद हैं।

तो, $0 = p(a) = p_1(a) p_2(a)$

$\Rightarrow \quad p_1(a) = 0 \quad$ और $\quad p_2(a) = 0 \quad$ [क्योंकि $F[a]$ एक समाकल डोमेन है]

लेकिन इससे विरोधाभास उत्पन्न होगा क्योंकि $p(x)$ न्यूनतम से न्यूनतम घात के साथ बहुपद है।

इसलिए $p(x)$ अलघुकरणीय (Irreducible) बहुपद है।

$p(x)$ की विशिष्टता दिखाने के लिए, मान लीजिए कि $q(x)$, F पर इस प्रकार है कि $q(a) = 0$ होगा। अलघुकरणीय एकगुणांकी बहुपद (Irreducible Monic Polynomial) है, चूंकि $F[x]$, एक यूक्लिडियन डोमेन (Euclidean Domain) है, $\exists\, h(x)$ और $r(x)$ पर इस प्रकार कि, $q(x) = p(x)h(x) + r(x)$ होगा।

जहाँ $r(x) = 0$ या $\deg r < \deg p$

अब $0 = q(a) = p(a)h(a) + r(a)$

$\Rightarrow \quad r(a) = 0$ इसलिए $p(a) = 0$

चूँकि $p(x)$ न्यूनतम घात का है इस प्रकार कि, $p(a) = 0$, तो हम पाते हैं कि $\deg r < \deg p$ संभव नहीं है।

इसलिए $\quad q(x) = p(x)h(x)$

चूंकि, $q(x)$ अलघुकरणीय (Irreducible), है, इसलिये (1.11) $h(x)$ एक अचर बहुपद होना चाहिए। कह सकते हैं कि, $h(x) = c$

तब $q(x) = cp(x)$

चूंकि $q(x)$ एकगुणांकी है, L.H.S में उच्चतम घात पद का गुणांक 1 है और इसलिए यह R.H.S में भी 1 होगा।

R.H.S. में $cp(x) = ca_n^{-1}a_0 + ca_n^{-1}a_1x + \ldots + cx^n$, $c = 1$ होगा।

इस प्रकार, $q(x) = p(x), p(x)$ की विशिष्टता (Uniquencess) सिद्ध करता है।

(*ii*) समीकरण (1.11) का अनुसरण किया गया है।

(*iii*) मानचित्रण $\theta : F[x] \to F[a]$, को परिभाषित करें। इस प्रकार कि,

$\theta(f(x)) = f(a)$

तब θ आच्छादक समरूपता (Onto Homomorphism) (सत्यापित) है।

मौलिक प्रमेय द्वारा,

$$F[a] \cong \frac{F[x]}{\text{Ker}\,\theta}$$

चूंकि $F[a]$ एक समाकल डोमेन है, इसलिए यह $\dfrac{F[x]}{\text{Ker}\,\theta}$ होगा, जिसका अर्थ है, $\text{Ker}\,\theta$ जो कि एक प्रमुख आदर्श (Prime Ideal) है। चूंकि a, K पर बीजगणितीय है, इसलिए $\exists$ एक गैर–शून्य बहुपद $f(x) \in F[x]$ इस प्रकार है कि, $f(a) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \theta(f(x)) = f(a) = 0$$

$\Rightarrow \quad f(x) \in \text{Ker } \theta \Rightarrow \text{Ker } \theta \neq (0)$

अर्थात्, Ker θ, $F[x]$ का एक गैर–शून्य प्राथमिक आदर्श है जो एक यूक्लिडियन डोमेन (Euclidean Domain) है, जो कि एक प्रमुख आदर्श डोमेन (Principle Ideal Domain या PID) में है।

इस प्रकार Ker θ एक उच्चतम आदर्श (Maximal Ideal) है।

$\Rightarrow \quad \dfrac{F[x]}{\text{Ker } \theta}$ एक क्षेत्र है।

$\Rightarrow \quad F[a]$ एक क्षेत्र है।

लेकिन $F(a)$, F और a से युक्त सबसे छोटा क्षेत्र है और इस प्रकार $F(a) \subseteq F[a]$ है।

इस कारण $F[a] \subseteq F(a)$

अतः $F(a) = F[a]$

नोटः $F(a)$, $F[a]$ के भागफल का क्षेत्र (Field of Quotients) है और जब $F[a]$ स्वयं अपने आप मे क्षेत्र होगा, तो $F[a] = F(a)$

नोटः प्रमेय (1.12) में निर्धारित $p(x)$ को by $p(x) = Irr(F, a)$ द्वारा निरूपित किया गया है। यह F पर a द्वारा संतुष्ट अद्वितीय एकगुणांकी अलघुकरणीय बहुपद है। चूँकि $p(x)$ न्यूनतम घात का है, जो कि इस प्रकार है कि, $p(a) = 0$, इसलिए $p(x)$ को a का न्यूनतम बहुपद (Minimal Polynomial) कहते हैं।

जहाँ $F(x) = \left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \middle| f, g \in K[x], g \neq 0 \right\}$

टिप्पणीः यदि $a \in K$, F पर अबीजीय है तो $F(x) \cong F(a)$ है।

प्रमाणः φ को परिभाषित करें, $F(x) \to F(a)$

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(a)}{g(a)},$$

तब φ पूर्ण तरह से परिभाषित आच्छादक समरूपता है।

तथा $\varphi\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(a)}{g(a)} = 0$

$\Rightarrow \quad f(a) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0,$ अन्यथा F पर a बीजगणितीय होगा।

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\Rightarrow \quad \varphi$ 1–1 है।

इस प्रकार $F(x) \cong F(a)$.

उपप्रमेय 1: मान लीजिए कि F पर $a \in K$ एक बीजगणितीय है। तब $[F(a) : F]$ = सीमित या परिमित (Finite) = deg $Irr(F, a)$ और इसलिए $F(a)$, F का बीजगणितीय विस्तार है।

प्रमाण: मान लीजिए कि $p(x) = Irr(F, a)$ है, मान लीजिए कि $n = \deg p(x)$ है।

हम ज्ञात करेंगे कि एक $F(a) = 1, a, a^2, ..., a^{n-1}$, F पर आधार बनता है।

मान लीजिए कि $0 \neq f(a) \in F[a] = F(a)$। तो $f(x) \in F[x]$ है।

अब $f(x), p(x) \in F[x], \exists\, q(x), r(x) \in F[x]$ के लिए इस प्रकार कि, $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ या तो $r(x) = 0$ या $\deg r < \deg p$ होगा।

किन्तु $r(x) = 0 \Rightarrow f(x) = p(x)q(x)$

$\Rightarrow f(a) = p(a)q(a) = 0$ इसलिए $p(a) = 0$

जो कि संभव नहीं है क्योंकि $f(a) \neq 0$

इसलिए $r(x) \neq 0$ है। इस प्रकार $\deg r < \deg p$ होगी।

मान लीजिए कि $r(x) = \beta_0 + \beta_1 x + ... + \beta_{n-1} x^{n-1}, \beta_i \in F$, जहां कुछ β_i शून्य हो सकते हैं।

पुनः, $f(a) = p(a)\, q(a) + r(a)$ और $p(a) = 0$

हम प्राप्त करते हैं $f(a) = r(a)$

इस प्रकार $f(a) = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 a^2 + ... + \beta_{n-1} a^{n-1}$

अर्थात्, $\{1, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ फैलाव या विस्तार या विस्तृति (Spans) $F[a] = F(a)$, F के ऊपर है तो,

हम देखते हैं कि यह LI है।

मान लीजिए ये LD है, तो $\exists\, \gamma_{ii}$ सभी शून्य नहीं हैं।

इस प्रकार कि,

$$\gamma_0 + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + ... + \gamma_{n-1} a^{n-1} = 0$$

$\Rightarrow t(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + ... + \gamma_{n-1} x^{n-1}$ गैर–शून्य बहुपद है (किसी भी $\gamma_i \neq 0$), $t(a) = 0$ के साथ।

इस तथ्य के विरोधाभास या विपरीत कि $p(x)$ अल्पतम घात का बहुपद है। इसलिये $1, a, ..., a^{n-1}$, LI है और इस तरह $F(a)$ के लिए एक आधार बनाते हैं।

इसलिए $[F(a) : F] = n$.

टिप्पणी: उपप्रमेय का प्रमेय 1.11 में उपयोग करके हम इस निर्णय पर पहुँचे हैं कि F पर $a \in K$ बीजगणितीय होगा अगर $[F(a) : F]$ = सीमित या परिमित होगा।

परिभाषा: एक अवयव $a \in K$ को F पर घात n का बीजगणितीय कहा जाता है यदि यह F पर n घात के बहुपद को संतुष्ट करता है और इसकी अल्पतम घात (n) के किसी भी बहुपद को संतुष्ट नहीं कर पाता है।

इस प्रकार a, F पर घात n का बीजगणितीय है यदि $\deg Irr\,(F, a) = n$ उस प्रकरण में भी,

$[F(a) : F] = n$ और $\{1, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ F पर $F(a)$ का एक आधार है।

उपप्रमेय 2: अगर F पर $a_1, ..., a_n \in K$ बीजगणितीय है तो $F(a_1, ..., a_n)$, F का सीमित या परिमित विस्तार है और इसलिए F पर बीजगणितीय है।

प्रमाण: हम n पर प्रवेशण (Induction) द्वारा परिणाम को सिद्ध करते हैं। यदि n = 1, परिणाम उपप्रमेय 1 से आएगा इसे n से न्यूनतम मान के लिए सत्य मान लें। मान लीजिए कि F पर $a_1, ..., a_n \in K$ एक बीजगणितीय हैं।

अब F पर $a_1, ..., a_n \in K$ एक बीजगणितीय हैं $\Rightarrow F\,(a_1, ..., a_{n-1})$, पर a_n एक बीजगणितीय हैं तो $F \subseteq F(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ है।

$\therefore$ उपप्रमेय 1 के द्वारा, $[F(a_1, ..., a_{n-1})\,(a_n) : F(a_1, ..., a_{n-1})]$ सीमित या परिमित है। प्रवेशण परिकल्पना या अवधारणा (Induction Hypothesis) द्वारा, $[F(a_1, ..., a_{n-1}) : \mathrm{F}]$ सीमित या परिमित है।

$\therefore [F(a_1, ..., a_n) : F] = [F(a_1, ..., a_n) : F(a_1, ..., a_{n-1})]\,[F(a_1, ..., a_{n-1}) : F]$ = सीमित या परिमित है।

परिणाम सभी n के लिए सही है।

प्रवेशण द्वारा, परिणाम सभी $n \geq 1$ के लिए सही है।

उपप्रमेय 3: अगर F पर $a, b \in K$ बीजगणितीय है तो F पर $a \pm b, ab, ab^{-1}$ भी बीजगणितीय होंगे (यदि $b \neq 0$)। दूसरे शब्दों में, K के अवयव F पर बीजगणितीय होकर K का एक उपक्षेत्र (Subfield) बनाते हैं। (और इस उपक्षेत्र को F का K पर बीजगणितीय संवृत (Algebraic Closure) कहा जाता है)।

प्रमाण: उपप्रमेय 2 के द्वारा, F पर $F(a, b)$ बीजगणितीय है तो F पर,

$a \pm b, ab, ab^{-1} \in F(a, b)$ भी बीजगणितीय होंगे।

टिप्पणी (1): यदि K, F का एक विस्तार क्षेत्र है और $S \subseteq K$, तब

$$F(S) = \left\{ \frac{f(u_1, ..., u_n)}{g(u_1, ..., u_n)} \,\middle|\, \begin{array}{l} f, g \in F[x_1, ..., x_n] \\ g(u_1, ..., u_n) \neq 0, n \in \mathbf{N} \\ u_1, ..., u_n \in S \end{array} \right\},$$

प्रमाण: मान लीजिए कि L $R.H.S.$ को निरूपित करता हैं। हम पहले दर्शायेंगे कि L, K का उपक्षेत्र है।

तब, L, K का उपक्षेत्र है।

मान लीजिए कि, $\dfrac{f(u_1, ..., u_m)}{g(u_1, ..., u_m)} \in L, \dfrac{f_1(v_1, ..., v_n)}{g_1(v_1, ..., v_n)} \in L$

माना कि, $Y = \dfrac{f(u_1, ..., u_m)}{g(u_1, ..., u_m)} - \dfrac{f_1(v_1, ..., v_n)}{g_1(v_1, ..., v_n)}$

$= \dfrac{f(u_1, ..., u_m)\, g_1(v_1, ..., v_n) - f_1(v_1, ..., v_n)\, g(u_1, ..., u_n)}{g(u_1, ..., u_m)\, g_1(v_1, ..., v_n)}$

परिभाषित करें, $h(x_1, ..., x_{m+n})$

$= f(x_1, ..., x_m)\, g_1(x_{m+1}, ..., x_{m+n}) - g(x_1, ..., x_m)\, f_1(x_{m+1}, ..., x_{m+n})$

$r(x_1, ..., x_{m+n}) = g(x_1, ..., x_m)\, g_1(x_{m+1}, ..., x_{m+n})$

तो, $Y = \dfrac{h(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)}{r(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)} \in L$

मान लीजिए, $\dfrac{f_1(v_1, ..., v_n)}{g_1(v_1, ..., v_n)} \neq 0$

माना कि, $Z = \dfrac{f(u_1, ..., u_m)}{g(u_1, ..., u_m)} \cdot \dfrac{g_1(v_1, ..., v_n)}{f_1(v_1, ..., v_n)}$

परिभाषित करें, $h_1(x_1, ..., x_{m+n}) = f(x_1, ..., x_m)\, g_1(x_{m+1}, ..., x_{m+n})$;

$r_1(x_1, ..., x_{m+n}) = g(x_1, ..., x_m)\, f_1(x_{m+1}, ..., x_{m+n})$.

तो, $Z = \dfrac{h_1(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)}{r_1(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)} \in L$

तब, L, K का उपक्षेत्र है।

माना कि, $u_1 \in S$. $f(x) = x, g(x) = 1$ को परिभाषित करें।

$f(u_1) = u_1, g(u_1) = 1$

तब $\dfrac{f(u_1)}{g(u_1)} \in L \Rightarrow \dfrac{u_1}{1} \in L \Rightarrow u_1 \in L$

इसलिए, $S \subseteq L$ है।

मान लीजिए कि, $\alpha \in F$ है तो $f(x) = \alpha, g(x) = 1$ को परिभाषित करें।

मान लीजिए कि, $u \in S$ है, तब $f(u) = \alpha, g(u) = 1$ होगा।

अब, $\dfrac{f(u)}{g(u)} \in L \Rightarrow \dfrac{\alpha}{1} = \alpha \in L$

इस तरह, $= F \subseteq L$

लेकिन $F(S)$, F और S से युक्त सबसे छोटा क्षेत्र है, जो कि $F(S) \subseteq L$ है।

मान लीजिए कि, $Y \in L$ है तब $Y = \dfrac{f(u_1,...,u_n)}{g(u_1,...,u_n)}, u_i \in S$

चुंकि $u_i \in S$ और f, g, F में गुणांक हैं $f(u_1, ..., u_n) \in F(S)$ और $g(u_1, ..., u_n) \in F(S)$।

तो, $Y \in F(S)$

तब, $L \subseteq F(S)$

इस प्रकार $F(S) = L$

टिप्पणी (2): यदि K, F का एक विस्तार क्षेत्र है, और K बीजगणितीय अवयवों द्वारा उत्पन्न होता है (अर्थात, $K = F(S)$, जहाँ K पर $S \subseteq K$ एक बीजगणितीय अवयवों का समुच्चय है), तब K, F का एक बीजगणितीय विस्तार क्षेत्र होगा।

प्रमाण: मान लीजिए कि, $C \in K$ तब $C = \dfrac{f(u_1, ..., u_n)}{g(u_1, ..., u_n)}, u_i \in S$

जहाँ $f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n) \in F[x_1, ..., x_n]$

स्पष्ट रूप से $C \in F(u_1, ..., u_n)$ है। लेकिन $u_1, ..., u_n$ बीजगणितीय हैं। $F \Rightarrow F(u_1, ..., u_n)$ पर।

$F \Rightarrow F(u_1, ..., u_n)$, F का एक विस्तार क्षेत्र है $F \Rightarrow C$, पर बीजगणितीय हैं।

इस प्रकार K/F बीजगणितीय हैं।

प्रमेय 1.13: यदि L, K का बीजगणितीय विस्तार है, और K, F का बीजगणितीय विस्तार है, तो L, F का बीजगणितीय विस्तार होगा।

हल: मान लीजिए कि $a \in L$ है। चूंकि L, K पर बीजगणितीय है तथा a, K पर बीजगणितीय है।

अर्थात् $\exists\ 0 \neq f(x) \in K[x]$ इस प्रकार कि, $f(a) = 0$

मान लीजिए कि $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n, \alpha_i \in K$

चूँकि K, F पर एक बीजगणितीय है। इसलिए F पर प्रत्येक $\alpha_i \in K$ बीजगणितीय होगा।

प्रमेय 1.12 के उपप्रमेय 3 द्वारा,

$[F(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) : F] =$ सीमित या परिमित (Finite) है।

मान लीजिए कि $M = F(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$

मान लीजिए कि $[M : F]$ सीमित या परिमित है और इसलिए M, F पर एक बीजगणितीय है। स्पष्ट रूप से, प्रत्येक $\alpha_i \in M$। इस प्रकार,

$f(x) \in M[x]$

अर्थात्, a, M पर एक बीजगणितीय है।

उपप्रमेय 2 द्वारा, $M(a), M$ का सीमित या परिमित विस्तार है।

$\Rightarrow \quad [M(a) : F] = [M(a) : M]\ [M : F] =$ सीमित या परिमित (Finite) है।

$\Rightarrow \quad M(a), F$ पर बीजगणितीय है।

$\Rightarrow \quad a \in M(a), F$ पर बीजगणितीय है।

चूंकि a, L का एक विवेकाधीन अवयव (Arbitrary Element) है, इसलिए L, F का बीजगणितीय विस्तार है।

परिभाषा: एक सम्मिश्र संख्या (Complex Number) को एक बीजगणितीय संख्या (Algebraic Number) तब कहा जाता है यदि यह परिमेय संख्याओं (Rational Numbers) के क्षेत्र पर बीजगणितीय हो।

एक बीजगणितीय संख्या को एक बीजगणितीय पूर्णांक (Algebraic Integer) कहा जाता है यदि यह $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + ... + \alpha_n$, के प्रकार के समीकरण को संतुष्ट करता है जहां $\alpha_1, ...\alpha_n$ पूर्णांक है, अर्थात् पूर्णांक पर एकगुणांकी बहुपद (Monic Polynomial) है।

उदाहरण 1.13: यदि a कोई बीजगणितीय संख्या है, तो सिद्ध करें $\exists$ एक (+ve) धनात्मक पूर्णांक n, ऐसा है कि na एक बीजगणितीय पूर्णांक होगा।

हल: चूंकि a एक बीजगणितीय संख्या है, इसलिए a परिमेय के क्षेत्र पर बीजगणितीय है।

इस प्रकार एक गैर–शून्य एकगुणांकी बहुपद $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ इस प्रकार है कि, $f(a) = 0$, जहाँ $\mathbf{Q} = \exists$ परिमेय का क्षेत्र।

मान लीजिए कि $f(x) = x^m + \alpha_1 x^{m-1} + ... + \alpha_{m-1}x + \alpha_m$, $\alpha_i \in \mathbf{Q}$

मान लीजिए कि $\alpha_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ जहाँ $p_i, q_i, q_i > 0$ पूर्णांक हैं।

$$\therefore \qquad a^m + \frac{p_1}{q_1}a^{m-1} + ... + \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}a + \frac{p_m}{q_m} = 0$$

मान लीजिए कि $n = q_1 ... q_m$ यहां n एक धनात्मक पूर्णांक है।

और $na^m + p_1q_2...q_m a^{m-1} + ... + p_m q_1 ... q_{m-1} = 0$

$\Rightarrow \quad n^m a^m + p_1 q_2 ... q_m a^{m-1} n^{m-1} + ... + p_m q_1 ... q_{m-1} n^{m-1} = 0$

na बहुपद को संतुष्ट करता है $x^m + p_1 q_2 ... q_m x^{m-1} + ... + p_m q_1 ... q_{m-1} n^{m-1} = 0$

जहां गुणांक (Coefficient) पूर्णांक हैं।

अर्थात na एक बीजगणितीय पूर्णांक है।

उदाहरण 1.14: यदि परिमेय संख्या r एक बीजगणितीय पूर्णांक भी है, तो सिद्ध करें कि r एक साधारण पूर्णांक होना चाहिए।.

हल: मान लीजिए कि $r = \dfrac{p}{q}$, जहां $q > 0, (p, q) = 1$

चूँकि r एक बीजगणितीय पूर्णांक है।

$r^m + \alpha_1 r^{m-1} + ... + \alpha_{m-1}r + \alpha_m = 0$

α_is पूर्णांक है।

टिप्पणी

$$\therefore \quad \frac{p^m}{q^m} + \alpha_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + ... + \alpha_{m-1} \frac{p}{q} + \alpha_m = 0$$

$\therefore p^m + q \times$ पूर्णांक $= 0$

$\Rightarrow \quad q, p^m$ को विभाजित करता है लेकिन $((p, q) = 1$ है।

$\therefore \quad q \mid 1 \quad \Rightarrow \quad q = 1 \quad \Rightarrow \quad r = p =$ पूर्णांक है।

उदाहरण 1.15: सिद्ध करें कि $\sin m^{\circ}$ प्रत्येक पूर्णांक m के लिए एक बीजगणितीय संख्या है ।

हल: अब $e^{\pi mi/180} = \cos\frac{\pi m}{180} + i \sin\frac{\pi m}{180}$

$\therefore \quad (e^{\pi mi/180})^{180} = \cos m\pi + i \sin m\pi = \pm 1$

$\therefore \quad e^{\pi mi/180}$ x^{180} का एक मूल है $= \pm 1$

$\therefore \quad e^{\pi mi/180}$ सभी पूर्णांक m के लिए एक बीजगणितीय संख्या है।

$\therefore \quad \cos\frac{m\pi}{180} + i \sin\frac{m\pi}{180}$ एक बीजगणितीय संख्या है।

इसके अलावा $\cos\frac{m\pi}{180} - i \sin\frac{m\pi}{180}$ भी एक बीजगणितीय संख्या है।

$\therefore \quad 2 \cos\frac{m\pi}{180}$ सभी पूर्णांक m के लिए एक बीजगणितीय संख्या है।

$\therefore \quad \cos\frac{m\pi}{180}$ सभी पूर्णांक m के लिए एक बीजगणितीय संख्या है।

$\therefore \quad \cos m^{\circ}$ सभी पूर्णांक m के लिए एक बीजगणितीय संख्या है।

इसके अलावा $\cos\frac{m\pi}{180}$ और $\cos\frac{m\pi}{180} + i \sin\frac{m\pi}{180}$ एक बीजगणितीय संख्या है।

$\Rightarrow \quad i \sin\frac{m\pi}{180}$ एक बीजगणितीय संख्या है।

$\Rightarrow \quad \sin\frac{m\pi}{180}$ एक बीजगणितीय संख्या है क्योंकि i भी बीजगणितीय संख्या है।

$\Rightarrow \quad \sin m^{\circ}$ बीजगणितीय संख्या है।

उदाहरण 1.16: $\mathbf{Q}$ के ऊपर $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ का एक आधार ज्ञात कीजिए।

हल: हमारे पास है,

$$[\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbf{Q}]$$

$$= [\mathbf{Q}(\sqrt{3})(\sqrt{5}) : \mathbf{Q}(\sqrt{3})]\, [\mathbf{Q}\sqrt{3} : \mathbf{Q}]$$

$= [L(\sqrt{5}) : L]\, [\mathbf{Q}(\sqrt{3}) : \mathbf{Q}]$ जहां $L = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$

$$= \deg Irr\,(L, \sqrt{5}) \times \deg Irr\,(\mathbf{Q}, \sqrt{3})$$

$$= \deg\,(x^2 - 5) \times \deg\,(x^2 - 3)$$

$= 2 \times 2 = 4$

इस प्रकार आधार में 4 अवयव हैं।

तथा, यदि $[(F(a) : F)] = n$ है तो $1, a, a^2, ..., a^{n-1}, F$ का आधार होगा, और इस तरह L पर $L(\sqrt{5})$ का आधार $\{1, \sqrt{5}\}$ होगा।

$\mathbf{Q}$ पर $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ का आधार $\{1, \sqrt{3}\}$ है।

इस तरह $[L(\sqrt{5}) : L]\,[\mathbf{Q}(\sqrt{3}) : \mathbf{Q}] = [(\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbf{Q}]$ का आधार होगा।

$1.1,\ 1.\sqrt{3},\ 1.\sqrt{5},\ \sqrt{3}\sqrt{5}$ [मानक नियमों के अनुसार]

अर्थात, $1,\ \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}$ है।

उदाहरण 1.17: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ के लिए न्यूनतम बहुपद का पता लगाएं और इसका उपयोग करके यह दिखायें की $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ । $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ के लिए आधार ज्ञात करें।

हलः अब $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$;

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 = 49 + 20\sqrt{6}$

इसलिए, $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^4 - 10(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + 1 = 0$

इस तरह, $\mathbf{Q}$ पर $a = \sqrt{2}+\sqrt{3} + f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ को संतुष्ट करता है।

मान लीजिए कि $p(x) = Irr(\mathbf{Q}, a)$

तब $p(x)$ की घातें $\sqrt{2}-\sqrt{3},\ -\sqrt{2}+\sqrt{3},\ -\sqrt{2}-\sqrt{3}$ होंगे। इसलिए $p(x)$ की घात न्यूनतम 4 होगी। किंतु $f(a) = 0$ और $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$ है।

$\Rightarrow\quad p(x), f(x)$ को विभाजित करता है।

$\Rightarrow\quad p(x) = f(x)$

इस तरह, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\ f(x)$ का न्यूनतम बहुपद (Minimal Polynomial) है।

इसलिए, $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbf{Q}] = 4$

तथा, $[\mathbf{Q}\sqrt{2} : \mathbf{Q}] = \deg Irr(\mathbf{Q}, \sqrt{2})$

$$= \deg (x^2 - 2) = 2$$

अब $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$g(x) = x^2 - 3 \in \mathbf{Q}(\sqrt{2})[x]$ पर विचार करें।

तब $g(\sqrt{3}) = 0$

$\therefore\qquad \deg Irr(\mathbf{Q}(\sqrt{2}), \sqrt{3}) \le \deg g(x) = 2$

$\Rightarrow \qquad [(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbf{Q}] \leq 2.$

इसलिए , $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbf{Q}] \leq 4$

स्पष्ट रूप से, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

$$\therefore \ [\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})] : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] \times [\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbf{Q}]$$

$$\Rightarrow \ [\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})] : \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] = 1$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

चूंकि $[\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbf{Q}] = 4$ $\{1, \sqrt{2} + \sqrt{3}, (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, (\sqrt{2} + \sqrt{3})^3\}$ का एक आधार $\mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbf{Q}$ के ऊपर है।

उदाहरण 1.18: माना कि $F(x)$ निर्धारित x में परिमेय फलन ओका क्षेत्र है। दिखाएँ कि $F(x)$ का प्रत्येक अवयव जो F में नहीं है, वो F पर अबीजीय (Transcendental) होगा।

हल: मान लीजिए कि $0 \neq \frac{f}{g} \in F(x), \frac{f}{g} \notin F, \ (f, g) = 1$ है।

मान लीजिए कि $\frac{f}{g}$ F पर अबीजीय (Transcendental) है।

तब $\frac{f}{g}, F$ पर बीजगणितीय होगा।

इसलिए $F\left(\frac{f}{g}\right) = F\left[\frac{f}{g}\right]$

$\frac{g}{f} \in F\left[\frac{f}{g}\right] = F\left(\frac{f}{g}\right)$ पर विचार करें।

(ध्यान दें $0 \neq \frac{f}{g} \in F\left[\frac{f}{g}\right]$ और $F\left[\frac{f}{g}\right]$ क्षेत्र है $\frac{g}{f} \in F\left(\frac{f}{g}\right) = F\left[\frac{f}{g}\right]$)

इसलिए, $\frac{g}{f} = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{f}{g}\right) + ... + \alpha_n \left(\frac{f}{g}\right)^n, \alpha_i \in F$

अतः $g^{n+1} = (\alpha_0 g^n + \alpha_1 f g^{n-1} + ... a_n f^n) \ f$।

चूंकि $(f, g) = 1$, $f \mid g^{n+1} \Rightarrow f \mid g \Rightarrow f =$ इकाई (Unit)

$\Rightarrow \quad g =$ इकाई $\Rightarrow \frac{f}{g} =$ इकाई $\in F$, एक विरोधाभास है।

इसलिए $\frac{f}{g}, F$ पर अबीजीय (Transcendental) है।

उदाहरण 1.19: मान लीजिए कि K, F का विस्तार है और मान ले कि $a \in K$ तब $F[a]$ को F पर एक सदिश समष्टि माना जा सकता है, यदि $F[a]$ का आयाम F पर सीमित या परिमित है, तो दिखाएँ कि $F[a] = F(a)$ है।

हल: मान लीजिए कि $0 \neq c \in F[a]$ है।

$T : F[a] \to F[a]$ को परिभाषित करें।

$T(b) = bc$

तब T एक रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है।

मान लें कि $b \in \text{Ker } T$ तब $T(b) = 0 \Rightarrow bc = 0 \Rightarrow b = 0$ क्योंकि $c \neq 0$ और $F[a]$ एक समाकलन डोमेन (Integeral Domain) है।

तो $\text{Ker } T = \{0\}$, T को 1–1 होने के लिए प्रेरित करेगा।

चूंकि $F[a]$, F पर FDVS है, T भी आच्छादक (Onto) होगा।

अब $1 \in F[a] \Rightarrow \exists\, b \in F[a]$ इस प्रकार, $T(b) = 1$

$\Rightarrow bc = 1$ या तो c प्रतिलोमीय (Invertible) होगा।

इसलिए $F[a], F$ और a से युक्त क्षेत्र है, किंतु $F(a), F$ और a से युक्त सबसे छोटा क्षेत्र है और इसलिए $F(a) \subseteq F[a]$, क्योंकि $F[a] \subseteq F(a)$, इससे $F[a] = F(a)$ मिलेगा।

उदाहरण 1.20: माना कि K, F का विस्तार है। दिखाएँ कि K/F बीजगणितीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक रिंग या वलय R, ऐसा है कि $F \subseteq R \subseteq K$ एक क्षेत्र है।

हल: K/F बीजगणितीय है और R एक रिंग या वलय है इस प्रकार कि $F \subseteq R \subseteq K$

चूंकि $R \subseteq K$ क्रमविनिमेय या क्रमचय (Commutative) होगा और K, R का एक एकरूपता होगा क्योंकि $F \subseteq R \subseteq K$

मान लीजिए कि $0 \neq a \in R$ तब $a \in K \Rightarrow a^{-1} \in K$

K/F बीजगणितीय है $\Rightarrow$ a, F पर बीजगणितीय होगा।

$\Rightarrow \quad \exists\, 0 \neq f(x) \in F(x)$ इस प्रकार, $f(a) = 0$

मान लीजिए कि $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n, \alpha_i \in F$

तब $\alpha_0 + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + ... + \alpha_n a^n = 0$ किसी भी $\alpha_i \neq 0$ के लिए। माना की $\alpha_o \neq 0,$

तब $\alpha_0 a^{-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 a + ... + \alpha_n a^{n+1}) \in R$

$\Rightarrow \quad a^{-1} \in R$ इसलिए $\alpha_0^{-1} \in F \subseteq R$

इसलिए प्रत्येक गैर–शून्य अवयव R में प्रतिलोमिय (Invertible) होता है।

विलोमतः (Conversely), मान लीजिए कि $a \in K$, मान लीजिए कि $R = F[a]$, तो R एक रिंग या वलय इस तरह है कि, $F \subseteq R \subseteq K$

परिकल्पना या अवधारणा द्वारा, R एक क्षेत्र है।

मान लीजिए कि $a \neq 0$, तब $a^{-1} \in R = F[a]$

इस प्रकार $a^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 a + ... + \alpha_n a^n, \quad \alpha_i \in F$

मान लीजिए कि $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n \in F[x]$

तो $1 = \alpha_0 a + \alpha_1 a^2 + ... + \alpha_n a^{n+1}$

$\alpha_0 a + \alpha_1 a^2 + ... + \alpha_n a^{n+1} - 1 = 0$ देता है।

इससे ज्ञात होता है कि $a, x f(x) - 1 \in F[x]$ को संतुष्ट करता है।

स्पष्ट रूप से $x f(x) - 1$ एक गैर–शून्य बहुपद है।

इस प्रकार a, F पर भी बीजगणितीय है और K/F बीजगणितीय है।

1.7 आधार के अवयवों की संख्या की अपरिवर्तनीयता

परिभाषाः मान लीजिए कि T, सदिश समष्टि V पर एक रैखिक संकारक (Linear Operator) है। यदि W, V का एक उपसमष्टि ऐसा है कि $T(W) \subseteq W$ तब हम कहते हैं कि W, T के तहत अपरिवर्तनीय है या T-अपरिवर्तनीय (Invariant) है।

उदाहरण 1.21: चूँकि $T(0) = 0$ और $T(V) = V$, V के दोनों शून्य उपसमष्टि और V अपरिवर्तनीय उपसमष्टि हैं।

उदाहरण 1.22: मान लीजिए कि $v \in \text{Ker}\, T$ तब $T(v) = 0 \in \text{Ker}\, T \Rightarrow \text{Ker}\, T, V$ का अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि है। इसके अलावा $w \in ImT \Rightarrow w = T(v) \Rightarrow Tw = T(Tv), Tv \in V \Rightarrow Tw \in ImT$

इसलिए ImT, V का अपरिवर्तनीय उपसमष्टि है।

उदाहरण 1.23: मान लीजिए कि $f(t)$ कोई बहुपद (Polynomial) है। मान लीजिए कि $v \in \text{Ker}\,(f(T))$ तब $f(T)\, v = 0$

चूंकि $f(t)\,.\,t = tf(t)$

$f(T)T = Tf(T)$

इस प्रकार, $f(T)\, Tv = Tf(T)\, v = 0$

$\Rightarrow \quad Tv \in \text{Ker}\, f(T)$

$\Rightarrow \quad \text{Ker}\, f(T)$, T के अधीन अपरिवर्तनीय होगा।

उदाहरण 1.24: माना कि $\mathbf{R}^2$ पर T एक रैखीय संकारक (Linear Operator) है, जिसमें आव्यूहों का मानक क्रमिक आधार है।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

सिद्ध करें कि T के अंतर्गत अपरिवर्तनीय $\mathbf{R}^2$ का एकमात्र उपसमष्टि $\mathbf{R}^2$ और शून्य उपसमष्टि हैं।

हलः A (या T) की अभिलक्षण (Characteristic) बहुपद है $= \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 4$, जिनके मूल वास्तविक नहीं हैं। इसलिए A (या T) का आइगेन मान (Eigen Value) $\mathbf{R}$ में मौजूद नहीं हैं अगर W, $\mathbf{R}^2$ का एक अपरिवर्तनीय उपसमष्टि ऐसा है इस प्रकार कि $W \neq 0$, तब $\dim = 1$। W को v फैलाव या विस्तार करता है। तब $Tv \in W \Rightarrow Tv = \alpha v, v \neq 0 \Rightarrow \alpha$ का आइगेन मान है। यह एक विरोधाभास है। इसलिए O और $\mathbf{R}^2$ एकमात्र $\mathbf{R}^2$ के अपरिवर्तनीय उपसमष्टि हैं।

प्रमेय 1.14: मान लीजिए कि W, V पर रैखिक संकारक T का एक अपरिवर्तनीय उपसमष्टि है। तब T पर आव्यूहों का प्रतिनिधित्व है, जहाँ A, W पर T का T_w प्रतिबंधित आव्यूह (Restriction Matrix) है।

हलः मान लीजिए कि $\{w_1, ..., w_r\}$, W का एक आधार है। मान लीजिए कि $\beta = \{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_s\}$, V का एक आधार है, जिसे W के आधार को बढ़ाकर प्राप्त किया जाएगा।

चूंकि $T(w) \in W$ सभी $w \in W$ के लिए, तो हम $T_w : W \to W$ को $T_w(x) = T(x)$ से सभी $x \in W$ के लिए परिभाषित करते हैं।

तब T_w, W में संकारक (Operator) है।

$T_w(w_1) = T(w_1) = a_{11}w_1 + ... + a_{r1}w_r$

....

$T_w(w_r) = T(w_r) = a_{1r}w_1 + ... + a_{rr}w_r$

$T(v_1) = b_{11}w_1 + ... + b_{r1}w_r + c_{11}v_1 + ... + c_{s1}v_s$

....

$T(v_s) = b_{1s}w_1 + ... + b_{rs}w_r + c_{1s}v_1 + ... + c_{ss}v_s$

इस प्रकार आधार β के सापेक्ष में T का आव्यूह का क्रम होगा,

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_{r1} & \cdots & b_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ जहां $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$

जो कि क्रमशः क्रम $r \times r$, $r \times s, s \times s$, के हैं।

स्पष्ट रूप से, $\{w_1, ..., w_r\}$ के सापेक्ष में A का आव्यूह $= W$ का आधार है। T_w, W पर T का प्रतिबंध (Restriction) कहलाता है।

अब हम दिखाते हैं कि प्रमेय (1.14) में प्राप्त आव्यूह C कुछ रैखिक संकारक का $\frac{V}{W}$ पर T से प्रेरित आव्यूह है।

टिप्पणी

$\hat{T}: \frac{V}{W} \to \frac{V}{W}$ को इस तरह परिभाषित करें कि,

$$\hat{T}(W+v) = W + T(v), \quad v \in V$$

तब $\hat{T}$ सुपरिभाषित है क्योंकि $W + v = W + v'$

$$\Rightarrow v - v' \in W$$
$$\Rightarrow T(v - v') \in W$$
$$\Rightarrow T(v) - T(v') \in W$$
$$\Rightarrow W + T(v) = W + T(v')$$

चूंकि T रैखिक रूपांतरण है, इसलिए $\hat{T}$ भी होगा। मान लें कि $\{w_1, ..., w_r\}$, W का एक आधार है।

फिर इसे V का आधार बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है। मान लीजिए $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_s\}$, V का एक आधार है। तब $\{W + v_1, ..., W + v_s\}$, $\frac{V}{W}$ का एक आधार है।

अब $\hat{T}(W + v_1) = W + T(v_1)$

$$= W + b_{11}w_1 + ... + b_{r1}w_r + c_{11}v_1 + ... + c_{s1}v_s$$
$$= W + c_{11}v_1 + ... + c_{s1}v_s$$

....

$$\hat{T}(W + v_s) = W + T(v_s) = W + b_{1s}w_1 + ... + b_{rs}w_r + c_{1s}w_1 + ... + c_{ss}v_s.$$
$$= W + c_{1s}v_1 + ... + c_{ss}v_s \qquad \text{(प्रमेय 1.14 के अनुसार)}$$

$\therefore$ $\frac{V}{W}$ के $\{W + v_1, ..., W + v_s\}$ आधार के सापेक्ष में $\hat{T}$ का आव्यूह

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & c_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & \cdots & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} = C$$

एक विशेष स्थिति जहां प्रमेय में $B = 0$ प्राप्त होता है, जब T के तहत V दो अपरिवर्तनीय उपसमष्टि का प्रत्यक्ष योग होता है।

उदाहरण 1.25: यदि F पर W और U, $F.D.V.S.$ और $V = U \oplus W$ पर एक रैखिक संकारक के अपरिवर्तनीय उपसमष्टि हैं। फिर V का एक आधार β इस प्रकार है कि आव्यूह $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ है, जहां A, W पर T_w का आव्यूह है और C, U पर T_u का आव्यूह है।

हलः माना कि $\{w_1, ..., w_r\}$, W का एक आधार है और $\{u_1, ..., u_s\}$, U का एक आधार है। तब $\{w_1, ..., w_r, u_1, ..., u_s\}$, $W \oplus U = V$ का एक आधार है।

अब, $T_w(w_1) = T(w_1) = a_{11}w_1 + ... + a_{r_1}w_r$

$T_w(w_2) = T(w_2) = a_{12}w_1 + ... + a_{r_2}w_2$

....

$T_w(w_r) = T(w_r) = a_{1r}w_1 + ... + a_{rr}w_r$

चूंकि $T(w_i) \in W$ सभी $i = 1, ..., r$ के लिए।

इसी प्रकार, $T_u(u_1) = T(u_1) = c_{11}u_1 + ... + c_{s1}u_s$

$T_u(u_2) = T(u_2) = c_{12}u_1 + ... + c_{s2}u_s$

....

$T_u(u_s) = T(u_s) = c_{1s}u_1 + ... + c_{ss}u_s$

क्योंकि $T(u_j) \in U$ सभी $j = 1, ..., s$ के लिए।

इस तरह के सापेक्ष में β का आव्यूह $=$ V का $\{w_1, ..., w_r, u_1, ..., u_r\}$ है,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{s1} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

जहाँ $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ क्रमशः $r \times r$ और $s \times s$ आव्यूह हैं। स्पष्ट रूप से A, W पर $T_{w'}$ का आव्यूह है और C, U पर T_u का आव्यूह है।

उदाहरण 1.26: मान लीजिए कि F पर V कोटि ≤ 5 का x के सभी बहुपदों का सदिश समष्टि है। मान लें $T: V \to V$ को $T(1) = x^2 + x^4$, $T(x) = x + 1$, $T(x^2) = 1$, $T(x^3) = x^3 + x^2 + 1$ से परिभाषित किया गया है। यदि W को $\{1, x^2, x^4\}$ समष्टि करता है,

(*a*) दिखाएँ कि W, T के तहत अपरिवर्तनीय (Invariant) है।

(*b*) W के उपयुक्त आधार में T_w का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

(*c*) $\frac{V}{W}$ के उपयुक्त आधार में $\hat{T}$ का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

(*d*) V के उपयुक्त आधार में T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हलः (*a*) मान लीजिए कि $w \in W$ तब $w = a + bx^2 + cx^4$ जहाँ $a, b, c \in F$

$T(w) = a \,.\, T(1) + bt(x^2) + cT(x^4)$

$= a(x^2 + x^4) + b + cx^4$

$= b + ax^2 + (a + c)\, x^4$

$\in W$, सभी $w \in W$ के लिए।

अर्थात W, T के तहत अपरिवर्तनीय (Invariant) है।

(*b*) ध्यान दें कि $\{1, x^2, x^4\}, F$ पर रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है और इसलिए W का एक आधार बनता है, और इसे V पर $\{1, x^2, x^4, x, x^3, x^5\}$ के नाम से बढ़ाकर आधार बनाया जा सकता है।

अब $T_w(1) \; = T(1) = x^2 + x^4 = 0 \,.\, 1 + 1 \,.\, x^2 + 1 \,.\, x^4$

$T_w\,(x^2) = T(x^2) = 1 = 1 \,.\, 1 + 0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x^4$

$T_w(x^4) = T(x^4) = x^4 = 0 \,.\, 1 + x^2 + 1 \,.\, x^4$

$\therefore$ आव्यूह को T_w, $\{1, x^2, x^4\}$ के संदर्भ में W का आधार मिलता है।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(*c*) अब $\{W + x,\, W + x^3,\, W + x^5\}$, $\dfrac{V}{W}$ का आधार है।

$\therefore \qquad \hat{T}\,(W + x) = W + T(x) = W + x + 1$

$= W + x = 1 \,.\, (W + x) + 0(W + x^3) + 0(W + x^5)$

$\hat{T}\,(W + x^3) = W + T(x^3)$

$= W + x^3 + x^2 + 1$

$= W + x^3$

$= 0(W + x) + 1(W + x^3) + 0(W + x^5)$

$\hat{T}\;(W + x^5) = W + T(x^5)$

$= W + 0 = W = \dfrac{V}{W}$ का शून्य।

$= 0(W + x) + 0(W + x^3) + 0(W + x^5)$

$\therefore$ आव्यूह $\hat{T}$, $\{W + x,\, W + x^3,\, W + x^5\}$ के संदर्भ में $\dfrac{V}{W}$ का आधार मिलता है।

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(*d*) $T(x) = x + 1 = 1 \,.\, 1 + 0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x^4 + 1 \,.\, x + 0 \,.\, x^3 + 0 \,.\, x^5$

$T(x^3) = x^3 + x^2 + 1 = 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x^4 + 0 \,.\, x + 1 \,.\, x^3 + 0 \,.\, x^5$

$T(x^5) = 0 = 0 \,.\, 1 + 0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x^4 + 0 \,.\, x + 0 \,.\, x^3 + 0 \,.\, x^5$

$\therefore$ आव्यूह को T, $\{1, x^2, x^4, x, x^3, x^5\}$ के संदर्भ में, V का आधार मिलता है।

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \text{ जहां } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 1.27: मान लीजिए कि F पर, *F.D.V.S.* के लिए T एक रैखिक संकारक है। माना कि W, T का एक अपरिवर्तनीय उपसमष्टि है। दिखाएँ कि T की अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial) $p_T(x)$ को निम्नलिखित द्वारा दिया जा सकता है।

$p_T(x) = p_{T_w}(x)\, p_{\hat{T}_w}(x)$, जहां $p_{T_w}(x)$, $p_{\hat{T}_w}(x)$ क्रमशः T_w और $\hat{T}_w$ के अभिलाक्षणिक बहुपद हैं।

हल: T की अभिलाक्षणिक बहुपद $p_T(x)$ को निम्नलिखित द्वारा दिया जा सकता है–

$$\left| \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} - xI \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} A - xI & B \\ 0 & C - xI \end{bmatrix} \right| \quad \begin{pmatrix} \text{यहां } A = W \text{ पर } T_w \text{ का आव्यूह} \\ C = \dfrac{V}{W} \text{ पर } \hat{T} \text{ का आव्यूह} \end{pmatrix}$$

$$= |A - xI||C - xI| = (T_w \text{ का अभिलाक्षणिक बहुपद}) \times (\hat{T} \text{ का अभिलाक्षणिक बहुपद})$$

$$= p_{T_w}(x)\ p_{\hat{T}}(w)$$

एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है कि "T के लिए न्यूनतम बहुपद T_w के न्यूनतम बहुपद के संदर्भ में क्या है?" जैसा कि हमने उपर्युक्त उदाहरण में देखा है कि T_w का अभिलाक्षणिक बहुपद T के अभिलाक्षणिक बहुपद को विभाजित करता है, हमें T के न्यूनतम बहुपद के बारे में समान परिणाम मिलता है। अर्थात यह सिद्ध हुआ।

उदाहरण 1.28: मान लीजिए कि F.D.V.S., V के लिए T पर एक रैखिक संकारक है। मान लीजिए कि W को V का अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि है। मान लीजिए कि $v_1, v_2, \ldots, v_k$, T के आइगेन सदिश (Eigen Vector) हैं जो अलग–अलग आइगेन मान के अनुरूप हैं। सिद्ध करें कि यदि $v_1 + v_2 \ldots + v_k \in W$ तब सभी i के लिए, $v_i \in W_i$ होगा।

हल: हम k पर प्रवेशण (Induction) के द्वारा परिणाम को सिद्ध करेंगे। $k = 1$ के लिए, परिणाम स्पष्ट रूप से सही है। मान लें कि परिणाम $k - 1, k > 1$ के लिए भी सही होगा।

मान लें $v_1 + v_2 \ldots + v_k \in W$

तब $T(v_1) + T(v_2) + . . . + T(v_k) \in W$ इसलिए $T(W) \subseteq W$

इसलिए $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + . . . + \lambda_k v_k \in W$

और $\lambda_k v_1 + \lambda_k v_2 + . . . + \lambda_k v_k \in W$

$(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + . . . + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} \in W$

प्रवेशण (Induction) के द्वारा,

$(\lambda_i - \lambda_k)v_i \in W_i$ सभी $i, = 1, 2, . . ., k - 1$ के लिए।

$\therefore \quad v_i \in W_i$ सभी $, = 1, 2, . . ., k$ के लिए।

$\therefore \quad v_k \in W_i$

तो, परिणाम k के लिए भी सही है।

इसलिए प्रवेशण (Induction) के द्वारा परिणाम सभी पूर्णांकों $k > 0$ के लिए सही है।

उदाहरण 1.29: सिद्ध करें कि यदि परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर T एक विकर्णनीय रैखिक ऑपरेटर या संकारक है और W, V का गैर–शून्य T–अपरिवर्तनीय उपसमष्टि है, तो T_w भी विकर्णनीय (Diagonalisable) होगा।

हलः चूंकि T एक विकर्ण है, तो V का एक क्रमित (Ordered) आधार, $\beta = \{v_1, v_2, . . ., v_k\}$ इस तरह मौजूद होगा कि प्रत्येक v_i, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) होगा।

मान लें $T(v_i) = \lambda_i v_i$ है।

मान लें $V = \{w_1, w_2, . . ., w_m\}$, W का आधार है।

मान लें $\lambda_1, \lambda_2, . . ., \lambda_k$, T की अलग–अलग आइगेन सदिश मान होंगे।

मान लें $W_1, W_2, . . ., W_k$ संबंधित आइगेन समष्टि है।

तब $V = W_1 \oplus W_2 \oplus . . . \oplus W_k$

मान लें $\beta_1 = \{x_1, . . ., x_{r_1}\}, . . ., \beta_k = \{y_1, . . ., y_{r_k}\}$ क्रमशः $W_1, . . ., W_k$ का आधार है।

तब $w_1 = (\alpha_1 x_1 + . . . + \alpha_{r_1} x_{r_1}) + . . . + (\beta_1 y_1 + . . . + \beta_{r_k} y_{r_k}) = z_1 + . . . + z_k$,

जहाँ $z_1 = \alpha_1 x_1 + . . . + \alpha_{r_1} x_{r_1}$

. . . .

$z_k = \beta_1 y_1 + . . . + \beta_{r_k} y_{r_k}$

अब $z_1 + . . . + z_k \in W$ और प्रत्येक z_i, T का आइगेन सदिश है।

पिछले उदाहरण के द्वारा, $z_i \in W$ सभी $i = 1, 2, . . ., k$ के लिए।

इस तरह मान लें,

$W_m = u_1 + ... + u_k$, जहाँ प्रत्येक u_i, T का अलग–अलग आइगेन सदिश मान के सापेक्ष में आइगेन सदिश है।

$\therefore \{z_1, z_2, ..., z_k, ..., u_1, ..., u_k\}$, W को रैखिक करता है।

$\therefore$ इसके कुछ उपसमुच्चय T_w के आइगेन सदिश से युक्त W का आधार होते हैं अर्थात T_w विकर्णनीय (Diagonalizable) है।

प्रमेय 1.15: T_w का न्यूनतम बहुपद T के न्यूनतम बहुपद को विभाजित करता है, जहां W, V का अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि है और V पर T एक रैखिक संकारक है।

प्रमाण: मान लीजिए कि $p(x)$, T के लिए न्यूनतम बहुपद है।

मान लीजिए कि $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1} x^{n-1} + x^n$

क्योंकि $T(w) = T_w(w)$ सभी $w \in W$ के लिए।

$T^2(w) = T(T_w(w))$

$= T_w(T_w(w))$ इसलिए $T_w(w) \in W$

इस तरह $T^r(w) = T_w^r(w)$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\therefore \quad p(T_w)(w) = p(T)(w)$ सभी $w \in W$ के लिए।

$= 0$ इसलिए $p(T) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\therefore \quad p(T_w) = 0$

मान लीजिए कि $q(x)$, T_w के लिए न्यूनतम बहुपद है।

तब $p(x) = q(x)\, r(x) + h(x)$

जहां $h(x) = 0$ या $\deg h(x) < \deg q(x)$

$\therefore \quad 0 = p(T_w) = q(T_w)\, r(T_w) + h(T_w)$

$\therefore \quad h(T_w) = 0$

अगर $h(x) \neq 0$, तब $h(x)$ गैर–शून्य बहुपद होकर T_w से संतुष्ट है लेकिन जिसकी घात $\deg q(x)$ से कम हैं, विरोधाभास है क्योंकि $q(x)$ न्यूनतम है।

$\therefore \quad h(x) = 0 \Rightarrow q(x)$, $p(x)$को विभाजित करता है।

परिभाषा: F पर एक $F.D.V.S.$ $V(F)$ पर एक रैखिक संकारक T को त्रिकोणीय या त्रिकोणाकार (Triangulable) या (Triangularizable) कहा जाता है यदि V का क्रमबद्ध आधार इस तरह मौजूद हो कि $[T]_\beta$ त्रिकोणीय (Triangular) हो।

प्रमेय 1.16: मान लीजिए कि T एक $F.D.V.S.$ $V(F)$ पर एक रैखिक संकारक है। T त्रिकोणीय यदि और केवल यदि $F[x]$ पर T के लिए अभिलाक्षणिक बहुपद रैखिक अलग–अलग का गुणन हो (समान रूप से, T त्रिकोणीय होता है यदि और केवल यदि जब T के आइगेन मान F में हों)।

प्रमाण: मान लीजिए कि यदि $F[x]$, पर T के लिए अभिलाक्षणिक बहुपद रैखिक कारकों (Linear Factors) का गुणन हैं।

टिप्पणी

मान लीजिए कि F में $c_1, c_2, ..., c_n$, T की आइगेन मान (Eigen Values) है।

हम n पर प्रवेशण का उपयोग करेंगे।

यदि $n = 1$ है, तो परिणाम स्पष्ट है क्योंकि 1×1 आव्यूह हमेशा त्रिकोणीय होता है।

यदि $n > 1$, तो मान लें कि F पर n से कम आयाम पर सभी सदिश समष्टि के लिए परिणाम सही होगा। मान लीजिए कि विमा (dim) $V = n$ है और v_1, T का, c_1 के लिए आइगेन सदिश (Eigen Vector) है। तब $T(v_1) = c_1 v_1$

मान लें कि $W = < v_1 >$

तब W, V का T-अपरिवर्तनीय (T-Invariant) उपसमष्टि होगा।

$\frac{V}{W}$ विमा $\frac{V}{W} = n - 1$ पर विचार करें।

तब $\hat{T} : \frac{V}{W} \to \frac{V}{w}$ इस तरह है कि,

$\hat{T}\ (W + v) = W + T(v)$

$\frac{V}{W}$ पर सुपरिभाषित रैखिक संकारक है।

मान लें कि $f(x)$, T का अभिलाक्षणिक बहुपद और $g(x)$, $\hat{T}$ का अभिलाक्षणिक बहुपद है।

तब $g(x)$, $f(x)$ को विभाजित करता है (उदाहरण 1.27 से)।

तो $g(x)$ में $F[x]$ भी रैखिक कारकों का गुणन है।

प्रवेशण या इंडक्शन अवधारणा (Induction Hypothesis) $\exists$ द्वारा आधार (Basis) $\bar{\beta} = \frac{V}{W}$ का $\{W + v_2, ..., W + v_n\}$, इस तरह कि,

$$\left[\hat{T}\right]_{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} \in F$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & \hat{T}(W + v_j) = a_{2j}\ (W + v_2) + ... + a_{nj}(W + v_n) \\
\Rightarrow \quad & W + T(v_j) = a_{2j}(W + v_2) + ... + a_{nj}(W + v_n) \\
& = W + a_{2j}\ v_2 + ... + a_{nj} v_n \\
\Rightarrow \quad & T(v_j) = a_{2j} v_2 + ... + a_{nj}\ v_n + a_{1j}\ v_1 \quad , \quad a_{1j} \in F
\end{aligned}$$

अब $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, V का आधार है,

$$\therefore \qquad [T]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ जहां } a_{11} = c_1$$

जोकि त्रिकोणीय आव्यूह [Triangular Matrix) हैं और इस तरह T त्रिकोणीय है। इस तरह परिणाम प्रवेशण के माध्यम से मिलता है।

विलोमतः, यदि T त्रिकोणीय है, तो V का एक आधार (Basis) β इस तरह होगा कि $[T]_\beta = A$ भी त्रिकोणीय होगा और T की आइगेन मान (Eigen Values) A में विकर्ण की प्रविष्टि होगी।

अर्थात $F[x]$ में A और T के लिए अभिलाक्षणिक बहुपद रैखिक कारकों का गुणन होता है।

टिप्पणी: हम इस प्रकार प्राप्त करते हैं कि T त्रिभुज होगा यदि और केवल यदि जब $F[x]$ में T न्यूनतम बहुपद रैखिक कारकों का गुणन होता है।

उपप्रमेय: यदि A सम्मिश्र संख्याओं (Complex Numbers) के क्षेत्र पर $n \times n$ आव्यूहों है, तो A त्रिकोणीय है।

प्रमाण: बीजगणित के मूलभूत प्रमेय द्वारा (अर्थात **C** क्षेत्र में सम्मिश्र संख्याओं के प्रत्येक बहुपद के सभी मूल **C** में होंगे), A का न्यूनतम बहुपद $p(x) = (x - c_1)^{r1} \ldots (x - c_k)^{rk}$ होगा, जहां $c_i \in \mathbf{C}$ उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार A त्रिकोणीय है।

उदाहरण 1.30: मान लीजिए कि W, V एक परिमित आयाम सदिश समष्टि $V(F)$ पर एक रैखिक संकारक है। मान लीजिए कि T की सभी आइगेन मान F में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि V के प्रत्येक गैर–शून्य T-अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि में T आइगेन सदिश है।

हल: मान लीजिए कि W, F का एक गैर–शून्य T-अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि है। तब W पर T का प्रतिबंध T_w, W पर एक रैखिक संकारक होगा। चूंकि T_w की अभिलाक्षणिक बहुपद T की अभिलाक्षणिक बहुपद को विभाजित करती है, इसलिए T_w के आइगेन मान भी F से संबंधित होगें। मान लीजिए कि $c \in F$, T_w के आइजन मान है। तब $\exists\, 0 \neq x \in W$ इस प्रकार कि $T_w(x) = cx \Rightarrow T(x) = cx \Rightarrow x$ का भी आइगेन सदिश होगा।

उदाहरण 1.31: मान लीजिए कि V पर T एक रैखिक संकारक है। यदि V का प्रत्येक उपसमष्टि T के अंतर्गत अपरिवर्तनीय (Invariant) है, तो दिखाएँ कि T तत्समक संकारक (Identity Operator) का एक अदिश गुणन (Scalar Multiple) है।

हल: मान लीजिए कि $0 \neq v \in \mathrm{V}$ है। मान लीजिए कि W, V का उपसमष्टि V द्वारा फैलाव या विस्तार या विस्तृति है क्योंकि W, T के तहत अपरिवर्तनीय (Invariant) है, $v \in W \Rightarrow T(v) \in W \Rightarrow T(v) = \alpha v$. $w \in W \Rightarrow w = av \Rightarrow T(w) = aT(v) = a\alpha v = \alpha av = \alpha w$ है। मान लीजिए कि $v' \notin W, v' \in V$। इसके बाद v, v' लगभग स्वतंत्र हैं।

मान लीजिए कि W' उपसमष्टि को v' द्वारा फैलाव या विस्तार (विस्तृत) किया जा रहा है। चूंकि W', T के तहत अपरिवर्तनीय (Invariant) है, $T(v') \in W'$

$\therefore\ T(v') = \alpha' v'$। मान लीजिए $v - v'$, V' समष्टि द्वारा फैलाव या विस्तार (विस्तृत) है तब पहले की तरह $T(v - v') = \beta(v - v')$

$$\Rightarrow \qquad T(v) - T(v') = \beta v - \beta v' \Rightarrow \alpha v - \alpha' v' = \beta v - \beta v'$$

टिप्पणी

$\Rightarrow$ $(\alpha - \beta)v = (\alpha' - \beta)v' \Rightarrow \alpha = \beta = \alpha'$ as v, v' रैखिकीय स्वतंत्र (Linearly Independent) है।

$\Rightarrow$ $T(v') = \alpha(v')$

सभी $v \in V$ के लिए, $T(v) = \alpha v$

$\Rightarrow$ $T = \alpha I$

उदाहरण 1.32: मान लीजिए की $\mathbf{R}^3$ पर T एक रैखिक संकारक है जो आव्यूहों द्वारा मानक क्रमबद्ध (Standard Ordered) आधार में दर्शाया गया है,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

मान लीजिए कि $W = \text{Ker}\,(T - 2I)$ है। सिद्ध करें कि W का कोई पूरक T-अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि नहीं है।

हल: अब $w \in W$ का मतलब है कि $(T - 2I)\,(w) = 0$

इस तरह, $T(w) = 2w$, मान लीजिए कि $w = (x, y, z)$ है।

तब $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

इसलिए, $x + 2y = 2y, 3z = 2z$

तो, $x = 0 = z$ और $w = (0, y, 0)$

इसलिए, $W = <(0, 1, 0)> = <\in_2>$

मान लीजिए कि, $V = W \oplus W'$, $T(W') \subseteq W'$

मान लीजिए कि, $T' = T - 2I$, माना $v \in N(T') \cap R(T')$

इसलिए, $T'(v) = 0, v = T'(y) = (T - 2I)(w + w'), w \in W, w' \in W'$

$= (T - 2I)(w') \in W'$

और $T'(v) = 0$ का तात्पर्य है कि $v \in N(T') = W$

इस तरह, $v \in W \cap W' = \{0\}$

इसलिए, $v = 0$ का तात्पर्य है कि $N(T') \cap R(T') = \{0\}$

अब $(T - 2I)(\in_1) = T(\in_1) - 2\in_1 = 2\in_1 + \in_2 - 2\in_1 = \in_2 \in W = N(T')$

इस तरह $(T - 2I)(\in_1) = T'(\in_1) \in R(T')$

उपयुक्त नियम से, $(T - 2I)(\in_1) \in N(T') \cap R(T') = \{0\}$

इस तरह, $\in_2 = 0$, एक विरोधाभास है।

टिप्पणी

इसलिए, W का कोई पूरक (Complementary) T-अपरिवर्तनीय (Invariant) उपसमष्टि नहीं है।

उदाहरण 1.33: मान लीजिए कि T एक परिमित आयाम सदिश समष्टि पर एक रेखीय संकारक है। यह सिद्ध करें कि पूर्णांक $k > 0$ इस तरह मौजूद है कि,

$$V = R(T^k) \oplus N(T^k)$$

हल: अब $V \supseteq R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq \ldots$, V की उपसमष्टि की अवरोही शृंखला है।

चूंकि V परिमित आयाम है, इसलिए पूर्णांक $k > 0$ इस तरह मौजूद है कि $R(T^k) = N(T^{k+1})$

चूंकि विमा या (dim) $V =$ विमा $R(T^k)$, विमा $N(T^k)$

$=$ विमा $R(T^{k+1})$ विमा $N(T^{k+1})$

विमा $N(T^k)$ $=$ विमा $N(T^{k+1})$

इस तरह, $x \in R(T^k) \cap N(T^k)$

$\Rightarrow T^k(x) = 0, x = T^k(v)$

$\Rightarrow T^{2k}(v) = 0 \Rightarrow v \in N(T^{2k}) = N(T^k)$

$\Rightarrow T^k(v) = 0 \Rightarrow x = 0$

इस तरह $R(T^k) \cap N(T^k) = \{0\}$

उदाहरण 1.34: मान लीजिए कि T एक परिमित आयाम सदिश समष्टि पर एक रेखीय संकारक है और R, T की रेंज (Range) है। सिद्ध करें कि R एक पूरक T-अपरिवर्तनरीय (Invariant) उपसमष्टि है यदि और केवल यदि R, T के शून्य समष्टि से स्वतंत्र होगा।

हल: मान लीजिए कि R का एक पूरक T-अपरिवर्तनरीय (Invariant) समष्टि W है।

इसलिए, $V = R \oplus W, T(w) \subseteq W$

मान लीजिए कि $x \in R \cap N$

तब $x = T(y), T(x) = 0$

अब $y \in V$ का तात्पर्य है कि $y = r + w, r \in R, w \in W$

इस तरह, $x = T(y) = T(r) + T(w) = T(r) + w', w' = T(w) \in W$

इसलिए, $w' = x - T(r) \in R$

इस तरह, $w' \in R \cap W = \{0\}$ का तात्पर्य है कि,

$w' = 0$ और इसलिए, $x = T(r), r \in R$

इस तरह, $x = T^k(r_1) \in R(T^k)$

तथा $x \in N(T)$ का अर्थ है कि $x \in N(T^k)$

टिप्पणी

इसलिए, $x \in R(T^k) \cap N(T^k) = \{0\}$

इस प्रकार, $x = 0$ जिसका अर्थ है कि $R \cap N = \{0\}$

इस तरह, R, N से स्वतंत्र है।

विलोमतः, मान लीजिए कि R, N से स्वतंत्र है।

$R \cap N = \{0\}$

तब विमा (dim) $(N + R)$ = विमा N + विमा R –विमा $(R \cap N)$,

= विमा N + विमा R = विमा V

इसलिए, $V = R \oplus N$

किंतु $T(N) \subseteq N$

इस प्रकार, R में एक पूरक T-अपरिवर्तनरीय समष्टि (Invariant Space) N है।

उदाहरण 1.35: यदि एक परिमित आयाम सदिश समष्टि V और R पर T एक रैखिक संकारक है। N, V का स्वतंत्र उपसमष्टि है, तो यह सिद्ध करें कि N, R का अद्वितीय T-अपरिवर्तनरीय (Invariant) उपसमष्टि पूरक है।

हल: ऊपरी उदाहरण के द्वारा, $V = R \oplus N, T(N) \subseteq N$

मान लीजिए $V = R \oplus W, T(W) \subseteq W$

हम दिखाएंगे कि $W = N$

अब विमा N = विमा W

मान लीजिए कि $w \in W$

इसलिए $T(w) \in R \cap W = \{0\}$

इसका अर्थ है कि $T(w) = 0$

इस प्रकार $w \in N$

इसलिए, $W \subseteq N$ और विमा W = विमा N

इस तरह $W = N$

उदाहरण 1.36: मान लीजिए कि T समिश्र संख्याओं के क्षेत्र में परिमित आयाम सदिश समष्टि पर एक रैखिक संकारक है। सिद्ध करें कि T-विकर्णनीय (Diagonalisable) है, यदि और केवल यदि T को $\mathbf{C}$ पर कुछ बहुपद से विलोपित (Annihilated) किया जाता है, जिसके अलग–अलग मूल हैं।

हल: मान लीजिए कि T- विकर्णनीय है। मान लीजिए कि $p(x)$, T का न्यूनतम बहुपद है। मानक नियम के अनुसार, $p(x)$ के अलग–अलग मूल हैं और $p(T) = 0$

विलोमतः, माना कि $q(x)$, $\mathbf{C}$ पर एक बहुपद इस प्रकार है कि $q(T) = 0$ और $q(x)$, के अलग–अलग मूल है।

अर्थात $p(x)$, $q(x)$ को विभाजित करता है।

टिप्पणी

और इस प्रकार $p(x)$ के अलग–अलग मूल हैं।

मानक नियम के अनुसार, T-विकर्णनीय (Diagonalisable) है।

उदाहरण 1.37: यदि A शून्यभावी (Nilpotent) है, तो दिखाएँ कि A त्रिकोणीय आव्यूहों के समान है जिसकी विकर्ण में सभी प्रविष्टियाँ (Entries) शून्य हैं।

हल: A शून्यवाचक है $\Rightarrow A^m = 0 \Rightarrow$। A का न्यूनतम बहुपद $p(x)\, A, x^r$ का $r \leq m$ है तो, A का आइगेन मान केवल 0 होगा। क्योंकि $0 \in F$, प्रमेय 1.16 के द्वारा, A त्रिकोणीय आव्यूहों B के समान है।

$\therefore A = P^{-1}BP$

चूँकि A का आइगेन मान केवल 0 है, B का आइगेन मान केवल 0 है और ये B पर विकर्ण प्रविष्टियाँ (Entries) हैं।

1.8 उपसमष्टि के योग का आयाम

परिभाषा: एक FDVS, V को n का आयाम कहा जाता है। यदि V के किसी भी आधार में n अवयवों की संख्या होती है।

हम संकेतन (Notation) विमा या (dim) $_F V = n$ या केवल विमा या (dim) $V = n$ का उपयोग करते हैं और कहते हैं कि V, n-आयाम सदिश समष्टि है।

पहले किए गए एक उदाहरण के संकेतन विमा $\mathbf{R}^2 = 2$, वास्तव में विमा $\mathbf{R}^n = n$ है।

उपप्रमेय: यदि विमा $V = n$ है, तो V में कोई भी $n + 1$ सदिश रैखिक रूप से निर्भर हैं।

हल: माना कि $T \subseteq V$ एक LI समुच्चय इस तरह हैं कि, $o(T) = n + 1$

माना कि S, V का आधार हैं। तब S, V द्वारा फैलाव या विस्तार या विस्तृति होगा और $o(S) = n$ हैं।

प्रमेय 1.10 द्वारा, $o(T) \leq o(S)$

$n + 1 \leq n$ मिलता है जो एक विरोधाभास है।

इस प्रकार V में कोई $n + 1$ सदिश LD होते हैं।

प्रमेय 1.17: एक सदिश समष्टि का आधार अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है और इसके विपरीत, सदिश समष्टि में प्रत्येक अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय इसका आधार होता है।

हल: माना कि S, एक सदिश समष्टि V का आधार S है, तो S, V में रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है। मान ले कि T, V में एक रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय इस प्रकार है कि $S \subseteq T$, यदि $S \neq T$ तो $t \notin T$ इस प्रकार कि $t \notin S$

तब $t \in T \Rightarrow t \in V \Rightarrow t = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n, \quad \alpha_i \in F, s_i \in S$ क्योंकि S, V द्वारा फैलाव या विस्तार या विस्तृति होता है।

$\Rightarrow (-1)\,t + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + ... + \alpha_n s_n = 0$, जहाँ $t \neq s_i$ किसी भी i के लिए।

$\Rightarrow -1 = 0$

क्योंकि $\{t, s_1, s_2,..., s_n\} \subseteq T$ एक रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है। तो हमें विरोधाभास मिलता है।

इसलिए S एक अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है।

इसके विपरीत, मान ले कि $S \subseteq V$ एक अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है।

मान लीजिए कि $v \in V$ और $v \notin L(S)$

तब $S \not\subseteq S \cup \{v\}$ क्योंकि $v \notin L(S) \Rightarrow v \notin S$

और इसलिए $S \cup \{v\}$ एक LD समुच्चय है और इस प्रकार $S \cup \{v\}$ एक परिमित उपसमुच्चय है जो LD समुच्चय है।

अर्थात, $\exists\, s_1, s_2,...\, s_n \in S$ क्योंकि, $\{v, s_1, s_2,..., s_n\}$, LD समुच्चय है।

अर्थात, $\alpha v + \alpha_1 s_1 + ... + \alpha_n s_n = 0,\ \ \alpha \in F, \alpha_i \in F$

जहां α या कोई भी α_i शून्य नहीं है।

अगर $\alpha = 0$ तब $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + ... + \alpha_n s_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall\ i$

इसलिए $\alpha \neq 0$

इस प्रकार $v = (-\alpha^{-1}\alpha_1)s_1 + ... + (-\alpha^{-1}\alpha_n)\, s_n$

$\Rightarrow v \in L(S)$, (एक विरोधाभास है)।

इस तरह $V = L(S)$ और इस तरह S, V का आधार है।

उपप्रमेय: मान लीजिए कि किसी भी सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय में LI सदिश की अधिकतम संख्या n है। तब विमा $V = n$ है।

प्रमाण: मान लीजिए कि S, V में LI उपसमुच्चय इस प्रकार है कि $o(S) = n$

तब S, V में एक अधिकतम LI समुच्चय है। ऊपरी प्रमेय के द्वारा, तब S, V का आधार है।

इस तरह विमा $V = o(S) = n$ है।

प्रमेय 1.18: मान लीजिए कि $V(F)$ एक सदिश समष्टि है। V का न्यूनतम जनित या जेनरेटिंग समुच्चय (Minimal Generating Set) V का एक आधार है और विलोमतः (इसके विपरीत), V का प्रत्येक आधार, V का न्यूनतम जनित या जेनरेटिंग समुच्चय होता है।

प्रमाण: S, V का एक न्यूनतम जनित या जेनरेटिंग उपसमुच्चय है।

तब $V = L(S)$ होगा और S का कोई उचित उपसमुच्चय V नहीं बनाता है। हम दिखाएंगे कि S_1, LI समुच्चय है। मान लीजिए कि यह नहीं है, तो S का एक सीमित या परिमित उपसमुच्चय S_1, LI इस तरह मौजूद है, कि S_1, LI नहीं है।

टिप्पणी

तो $\exists\, s \in S_1$ इस प्रकार है कि s, S_1 के अवयवों का रैखिक संचय, और इसलिए S का भी है।

मान लीजिए कि $T = S - \{s\}$

तब $V = L(T)$ और $T \subsetneq S$, एक विरोधाभास क्योंकि S, V का न्यूनतम जनित या जेनरेटिंग समुच्चय है। इसलिए S, V का एक आधार है।

इसके विपरीत, मान लीजिए कि B, V का एक आधार है हम दिखाएंगे की B का कोई भी उचित उपसमुच्चय V को जनित या जेनरेट नहीं कर सकता है।

मान लीजिए कि $B' \subsetneq B$ और $V = L(B')$। तब $\exists\, b \in B$, इस प्रकार कि, $b \notin B'$

तब $b \in B \;\; \Rightarrow b \in V \;\; = L(B') \Rightarrow b = \sum_{1}^{n} \alpha_i b_i', \;\; b_i' \in B'$

$\Rightarrow \quad 0 = (-1)\, b + \sum_{1}^{n} \alpha_i b'_i,\, b \neq b'_i$ किसी भी i के लिए।

$\Rightarrow \quad -1 = 0$ as $\{b, b'_1, ..., b'_n\} \subseteq B, LI$ उपसमुच्चय है, एक विरोधाभास है।

इस प्रकार B, V का न्यूनतम जनित या जेनरेटिंग समुच्चय (Minimal Generating Set) है।

प्रमेय 1.19: यदि V एक FDVS है और $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, V के LI उपसमुच्चय है, तो इसे V का आधार बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है।

हल: यदि $\{v_1, v_2, ...\, v_r\}$, V से फैलाता या विस्तारित करता है, तो यह स्वयं V का एक आधार बनाता है और सिद्ध करने के लिए कुछ भी नहीं है।

मान लीजिए कि $S = \{v_1, v_2, ...\, v_r, v_{r+1}, ...\, v_n\}$, V का अधिकतम LI उपसमुच्चय है, जिसमें $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ है।

हम दिखाते हैं कि S, V का आधार है, जिसके लिए यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि S, V से फैलाव या विस्तार होता है।

मान लीजिए $v \in V$ कोई भी अवयव है।

तब $T = \{v_1, v_2, ... v_n, v\}$, S के कारण (के चयन से) LI है।

$\Rightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha \in F$ (सभी शून्य नहीं), इस तरह कि,
$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n + \alpha v = 0$

हम दावा करते हैं $\alpha \neq 0$ मान लीजिए $\alpha = 0$

तब $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0$ सभी i के लिए क्योंकि $_1, v_2, ..., v_n$, LI है।

$\therefore \quad \alpha = \alpha_i = 0$ सभी i के लिए जो सत्य नहीं है।

इस तरह $\alpha \neq 0$ और और इसलिए α^{-1} मौजूद है।

टिप्पणी

चूंकि $v = (-\alpha^{-1}\alpha_1)v_1 + (-\alpha^{-1}\alpha_2)v_2 + \ldots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)v_n$

$v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ का एक रैखिक संचय है।

जो हमारे कथन (Assertion) को प्रमाणित करता है।

अन्य विकल्प (Aliter): मान लीजिए कि विमा या dim $V = n$ और $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$। यदि S, V में अधिकतम LI समुच्चय है तो प्रमेय 1.17 द्वारा, यह V का एक आधार है। यदि S, V में अधिकतम LI समुच्चय नहीं है, तो एक समुच्चय $T \supsetneq S$ ऐसा है कि V में T, LI समुच्चय है। क्योंकि LI समुच्चय में n सदिशों से अधिक नहीं हो सकते है, इसलिए सीमित चरणों के बाद, V में एक अधिकतम LI समुच्चय $B \supseteq S$ होगा। प्रमेय 1.17 द्वारा, B, V का एक आधार होगा। इसलिए S को V में आधार B बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है।

नोट: यह परिणाम तब भी सिद्ध हो सकता है जब सदिश समष्टि परिमित आयाम नहीं हो।

प्रमेय 1.20: यदि विमा $V = n$ और $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, V से जनित या जेनेरेटेड फैलाव या विस्तृति (विस्तार) होता है तो S, V का एक आधार है।

प्रमाण: चूंकि विमा $V = n$, V के किसी भी आधार में n अवयव होते हैं। मानक नियमों द्वारा, S का एक उपसमुच्चय, V का एक आधार होगा, क्योंकि S में n अव्यव हैं, यह अपने स्वयं पर V का आधार बनएगा।

प्रमेय 1.21: यदि विमा $V = n$ और $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, V का LI उपसमुच्चय है तो S, V का एक आधार है।

प्रमाण: चूंकि $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, LI$ है, इसे V का आधार बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है, लेकिन विमा V, n होने के कारण यह स्वयं V का एक आधार होगा।

अन्य विकल्प (Aliter): मान लीजिए कि $v \in V$, तब

प्रमेय 1.12 की उपप्रमेय 3 द्वारा, $v, v_1, v_2, \ldots, v_n, LD$ होंगे।

इस प्रकार,

$\exists\ \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$

इसलिए, $\alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

जहाँ कोई भी α_i या α शून्य नहीं है।

यदि $\alpha = 0$, तब $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0\ \forall i$ क्योंकि $v_1, v_2 \ldots, v_n, LI$ है।

इस प्रकार $\alpha \neq 0$ और,

$v = (-\alpha^{-1}\alpha_1)v_1 + \ldots.. + (-\alpha^{-1}\alpha_n)v_n \in L(S)$

$\Rightarrow V \subseteq L(S)$

$\Rightarrow V = L(S)$ और क्योंकि S, LI है; S, V का आधार है।

उदाहरण 1.38: यदि $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ का आधार FDVS, V है, विमा n और $v = \Sigma\alpha_i v_i$, $\alpha_r \neq 0$ तो सिद्ध करो कि $\{v_1, v_2, ..., v_{r-1}, v, v_{r+1} ..., v_n\}$, V का एक आधार है।

हलः हमारे पास है,

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + ... + \alpha_n v_n \quad \alpha_r \neq 0, \therefore \alpha_r^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad v_r = (-\alpha_r^{-1}\alpha_1)\, v_1 + ... + (-\alpha_r^{-1}\,\alpha_{r-1})\, v_{r-1} + \alpha_r^{-1} v + ... + (-\alpha_r^{-1}\alpha_n)v_n$$
$$= \beta_1 v_1 + ... + \beta_{r-1} v_{r-1} + \beta_r v + \beta_{r+1}\, v_{r+1} + ... + \beta_n v_n$$

अगर $x \in V$ कोई अवयव है तब,

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \quad \alpha_i \in F$$
$$\Rightarrow \quad x = a_1 v_1 + ... + a_{r-1} v_{r-1} + a_r(\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n) + ... + a_n v_n$$

या x, $(v_1, ..., v_{r-1}, v, v_{r+1}, ..., v_n)$ का एक रैखिक संचय है।

और यदि x कोई भी अवयव होने पर, हम प्राप्त करते हैं कि $\{v_1, ..., v_{r-1}, v, v_{r+1}, ... v_n\}$, V द्वारा फैलाव या विस्तार है और प्रमेय 1.21 के द्वारा यह V का एक आधार बनाता है।

प्रमेय 1.22: F के दो परिमित आयाम सदिश समष्टि तुल्याकारी (Isomorphic) हैं, यदि उनका आयाम (Dimension) समान है।

हलः मान लीजिए कि V और W, F पर दो सदिश समष्टि तुल्याकारी हैं और $\theta : V \to W$ तुल्याकारी हैं।

मान लीजिए कि विमा $V = n$ और $\{v_1, v_2, .., v_n\}$, V का एक आधार हो।

हम दावा या क्लैम कर सकते हैं कि $\{\theta(v_1), \theta(v_2), ..., \theta(v_n)\}$, W का एक आधार होगा।

अब $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \;\theta(v_i) \;\; = 0 \quad \alpha_i \in F$,

$$\Rightarrow \quad \sum \theta(\alpha_i v_i) = 0 = \theta(0)$$
$$\Rightarrow \quad \sum \alpha_i v_i = 0 \; (\theta \text{ is } 1\text{–}1)$$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0$ सभी i के लिए $v_1, v_2, ..., v_n$, LI है,

$\Rightarrow \quad \theta(v_1), \theta(v_2), ..., \theta(v_n)$, LI है,

पुनः, यदि $w \in W$ कोई अवयव है, तो θ आच्छादक (Onto) है, $\exists$ कुछ $v \in V$ इस तरह हैं कि $\theta\,(v) = w$ हो।

अब $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ किसी भी $\alpha_i \in F$ के लिए।

$$\Rightarrow \quad w = \theta(v) = \theta\left(\sum \alpha_i v_i\right)$$

टिप्पणी

$$\Rightarrow \qquad w = \sum \theta(\alpha_i v_i) = \alpha_1\theta(v_1) + \alpha_1\theta(v_2) + ... + \alpha_n\theta(v_n)$$

या w, $\theta(v_1), \theta(v_2), ..., \theta(v_n)$ का एक रैखिक संचय है।

इसलिए $\theta(v_1), \theta(v_2),..., \theta(v_n)$, में फैलाव या विस्तार W से जनित या जेनरेटेड है और इसलिए, W का एक आधार बनाते हैं तो,

विमा $W = n$ होगा।

इसके विपरीत, मान लीजिए कि विमा V = विमा $W = n$ और मान लीजिए $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ और $\{w_1, w_2, ...,w_n\}$ क्रमशः V और W का आधार हैं।

$\theta : V \rightarrow W$ को इस तरह परिभाषित करें कि,

$\theta(v) = \theta(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n)$

$= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$

तब θ आसानी से अच्छी तरह से परिभाषित किया जा सकता है। (वास्तव में कोई भी $v \in V$ आधार के सदस्यों का अद्वितीय रैखिक संचय है)।

यदि $v, v' \in V$ कोई अवयव है तब,

$v = \sum \alpha_i v_i,\ v' = \sum \beta_i v_i \quad \alpha_i, \beta_i \in F$

$\theta(v + v') = \theta\left(\sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i v_i\right)$

$= \theta\left(\sum (\alpha_i + \beta_i) v_i\right)$

$= \sum (\alpha_i + \beta_i) w_i$

$= \sum \alpha_i w_i + \sum \beta_i w_i = \theta(v) + \theta(v')$

और $\theta(\alpha v) = \theta\left(\alpha \sum \alpha_i v_i\right) = \theta\left(\sum \alpha\alpha_i\, v_i\right) = \sum (\alpha\alpha_i)\, w_i$

$= \alpha \sum \alpha_i w_i = \alpha\theta(v)$

θ समरूपता (Homomorphism) हैं।

अब अगर $v \in \text{Ker}\ \theta$

तो $\theta(v) = 0$

$\Rightarrow \quad \theta\left(\sum \alpha_i v_i\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \sum \alpha_i w_i = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0$ सभी i के लिए $w_1, w_2, ..., w_n,$ LI होगा

$\Rightarrow \quad v = 0$

$\Rightarrow \quad \text{Ker}\ \theta = \{0\}$

$\Rightarrow \quad \theta$ एकैकी (One-One) है।

इस प्रकार स्पष्ट तौर पर θ आच्छादक (Onto) होगा। इसलिए θ तुल्याकारी (Isomorphism) हैं।

उपप्रमेयः एक तुल्याकारिता के तहत एक आधार को एक आधार पर मानचित्रित किया जाता है। यह प्रमेय के उस पहले भाग को अनुसरण करता है।

टिप्पणी

उदाहरण 1.39: दिखाएँ कि सभी वास्तविक सतत फलन $y = f(x)$ के समुच्चय अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है तो यह $\mathbf{R}$ पर सदिश समष्टि होगा। इसका एक आधार ज्ञात करें।

हल: हम जाँच कर सकते है कि $V = \{f \mid f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f \text{ Cont.}\}$, $\mathbf{R}$ पर एक सदिश समष्टि है,

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)x = \alpha(f(x))$$

मान लीजिए कि $W = \{f \in V \mid f$ दिए गए अवकल समीकरण का एक हल है$\}$

दिया गया अवकल समीकरण है,

$$(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)\,y = 0$$

$$(D + 1)(D + 2)(D + 3)\,y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad D = -1, -2, -3$$

और सामान्य हल (General Solution) होगा,

$$y = Ae^{-x} + be^{-2x} + Ce^{-3x}$$

अगर $S = \{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}\}$ तब स्पष्ट रूप से S, W से फैलाव या विस्तार (Span) है।

मान लीजिए $Ae^{-x} + Be^{-2x} + Ce^{-3x} = 0$

तब $-Ae^{-x} + (-2)\,Be^{-2x} + (-3C)\,e^{-3x} = 0$

$$Ae^{-x} + (4B)\,e^{-2x} + (9C)\,e^{-3x} = 0 \quad \forall\, x$$

$x = 0$ रखने पर,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow M \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

जहाँ $\det M = 1(-18 + 12) - 1(-9 + 3) + 1(-4 + 2) = -2 \neq 0$

इसलिए M^{-1} मौजूद है और इसलिए $A = B = C = 0$

$\Rightarrow \quad S, LI$ है और इसलिए W का आधार है।

नोट: W एक सदिश समष्टि है क्योंकि यह V का उपसमष्टि है।

[$y_1, y_2 \in W \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ दिए गए अवकल समीकरण का एक हल है,
$\Rightarrow \qquad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in W$]

उदाहरण 1.40: यदि $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, V एक LI उपसमुच्चय है, और $v \in V$ ऐसा है कि $v \notin L(S)$, तो दिखाएँ कि $S \cup \{v\}$, V का एक LI उपसमुच्चय है।

हल: $S \cup \{v\} = \{v_1, v_2, ..., v_r, v\}$

मान लीजिए कि $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r + \alpha v = 0 \quad \alpha_i \in F, \alpha \in F$

टिप्पणी

अगर $\alpha \neq 0$ तब α^{-1} मौजूद है और हम प्राप्त करते हैं,
$\alpha^{-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r + \alpha v) = 0$

$\Rightarrow \quad v = (-\alpha^{-1}\alpha_1)v_1 + (-\alpha^{-1}\alpha_2)v_2 + ... + (\alpha^{-1}\alpha_r)v_r$

$\Rightarrow \quad v \in L(S)$ एक विरोधाभास है।

इसलिए, $\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0$ सभी i के लिए क्योंकि $(v_1, v_2,..., v_r)$, LI है।

$\Rightarrow \quad \alpha = \alpha_i = 0$ सभी i के लिए।

$(v_1, v_2,..., v_r, v)$ LI हैं।

इस प्रकार यह सिद्ध होता है।

प्रमेय 1.23: मान लीजिए कि W, FDVS, V का एक उपसमष्टि है, तो W परिमित आयाम और विमा $W \leq$ विमा V होगा। वास्तव में, विमा $V =$ विमा W होगा यदि $V = W$ है।

हल: मान लीजिए कि विमा $V = n$, तब n, v के किसी भी उपसमुच्चय में LI अवयवों की अधिकतम संख्या है। चूंकि W का कोई भी उपसमुच्चय V का भी उपसमुच्चय होगा, n, W में LI अवयवों की अधिकतम संख्या है।

$(w_1, w_2,..., w_m)$, W में LI अवयवों की अधिकतम संख्या है, तब $m \leq n$ है।

हम देखेंगे कि $\{w_1, w_2,..., w_m\}$, W का एक आधार हैं। ये पहले से ही LI हैं। यदि $w \in W$ कोई अवयव है तो उपसमुच्चय $\{w_1, w_2, ..., w_m, w\}$ LD है।

$\Rightarrow \quad F$ (सभी शून्य नहीं है) में $\exists\ \alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_m, \alpha$ इस तरह है कि,

$\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m + \alpha w = 0$

अगर $\alpha = 0$, हम प्राप्त करते हैं, $\alpha_i = 0$ सभी i के लिए, क्योंकि $w_1,..., w_m$, LI है। यह सत्य नहीं है इसलिए $\alpha \neq 0$ और इसलिए α^{-1} मौजूद है।

उपयुक्त समीकरण से हम प्राप्त करते हैं,
$w = (-\alpha^{-1}\alpha_1)w_1 + ... + (-\alpha^{-1}\ \alpha_m)\ w_m$

यह दर्शाता है कि $\{w_1, w_2,..., w_m\}$, W का विस्तार या फैलाव है (और इसलिए सीमित या परिमित आयाम है)।

$\Rightarrow \quad \{w_1, w_2,..., w_m\}$, W का आधार है।

विमा $W = m \leq n =$ विमा V

आखिर में, अगर विमा $V =$ विमा $W = n$

और $\{w_1, w_2,..., w_n\}$, W का आधार है तो जैसे W में $\{w_1, w_2,..., w_n\}$, LI है, उसी तरह यह V में LI होगा और जैसे विमा $V = n$, $\{w_1, w_2,..., w_n\}$, V का आधार है,

टिप्पणी

अगर $v \in V$ कोई भी अवयव है तब,

$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n \in W$

$\Rightarrow \quad V \subseteq W \Rightarrow V = W$

इसके विपरीत, निश्चित रूप से, $V = W \Rightarrow$ विमा $V =$ विमा W।

नोटः

(*i*) यदि W, V का एक उपसमष्टि है जहाँ $W = (0)$ है तो W का आयाम शून्य माना जाता है।

(*ii*) $\mathbf{C}$ ($\mathbf{Q}$) परिमित आयाम नहीं है यदि ऐसा है तो इसका उपसमष्टि $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ भी परिमित आयाम होगा, जो कि सत्य नहीं है, क्योंकि हमने माना कि विमा $\mathbf{R}(\mathbf{Q}) = n$ है।

माना कि $x_1, x_2,..., x_n$, $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ का एक आधार है, तो

$\mathbf{R} = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \mid \alpha_i \in \mathbf{Q}\}$

चूंकि $\mathbf{Q}$ गणनीय समुच्चय (Countable Set) है, प्रत्येक α_i में गणनीय विकल्प (Countable Choices) हैं। तो $\mathbf{R}$ भी गणनीय होगा, जो सत्य नहीं है। इसलिए विमा $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ सीमित या परिमित नहीं है।

(*iii*) प्रमेय का परिणाम सही नहीं आए, अगर V सीमित या परिमित आयाम नहीं होगा। $V = F[x]$, और $W = F[x^2]$, पर विचार करें तो W, V का उपसमष्टि होगा, $W \neq V$ क्योंकि $x \in V, x \notin W$

यहाँ $S = \{1, x, x^2,..., x^n,...\}$, V का आधार है और $T = \{1, x^2,..., x^{2n},...\}$, W का एक आधार है। मानचित्रण $\theta : S \to T$, इस प्रकार कि, $\theta(x^i) = x^{2i}$, 1–1 सही है और इस प्रकार S और T की एक ही गणनीयता (Cardinality) है $\Rightarrow$ विमा $V =$ विमा W

प्रमेय 1.24: मान लीजिए कि W, FDVS, V का उपसमष्टि है तो,

$$\text{विमा } \frac{V}{W} = \text{विमा } V - \text{विमा } W$$

हलः मान लीजिए कि विमा $W = m$ और $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, W का एक आधार है।

$w_1, w_2,..., w_m$, W में LI होने पर V में भी LI होगा और इस प्रकार $\{w_1, w_2,..., w_m\}$ को V का आधार बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है।

मान लीजिए कि $\{w_1, w_2,..., w_m, v_1, v_2,..., v_n\}$, V का विस्तारित आधार है।

तब $\quad W + (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = W$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \in W$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ $(w_1,..., w_m)$ का रैखिक संचय है।

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m \quad \beta_j \in F$

टिप्पणी

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n - \beta_1 w_1 - ..... - \beta_m w_m = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = \beta_j = 0$ सभी i, j के लिए,

$\Rightarrow \quad \{W + v_1, W + v_2, ..., W + v_n\}, LI$ है।

पुनः, किसी भी $W + v \in \frac{V}{W}, v \in V$ का मतलब है कि $v, w_1, ..., w_m, v_1, ..., v_n$ के साथ रैखिक संचय है।

अर्थात, $v = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m + \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \quad \alpha_i, \beta_j \in F$

हमें प्राप्त है, $W + v = W + (\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)$

$= W + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n)$

$= (W + \beta_1 v_1) + ... + (W + \beta_n v_n)$

$= \beta_1(W + v_1) + \beta_2(W + v_2) + ... + \beta_n(W + v_n)$

इस प्रकार $\frac{V}{W}$, S से विस्तृति या फैलाव है और इसलिए आधार है।

अर्थात विमा (dim)$\frac{V}{W} = n$

इस तरह विमा $\frac{V}{W}$ = विमा $V -$ विमा W

नोटः इस प्रकार हमें प्राप्त है कि अगर V, FDVS है तो $\frac{V}{W}$ भी होगा।

इसका प्रतिलोम (Converse) जरूरी नहीं कि सही हो।

$V = F[x], \ W = \{x^2 f(x) \mid f(x) \in V\}$ पर विचार करें।

तब W, V का उपसमष्टि है और तब,

$\frac{V}{W} = \{W + a_0 + a_1 x \mid a_i \in F\}$

जिसे $\{W + 1, W + x\}$ द्वारा विस्तृत या विस्तार किया गया है।

और इस प्रकार $\frac{V}{W}$ सीमित या परिमित आयाम है जबकि V नहीं है।

प्रमेय 1.25: अगर FDVS, V के A और B दो उपसमष्टि हैं तब,

विमा $(A + B)$ = विमा A + विमा $B -$ विमा $(A \cap B)$

प्रमाणः हमने पहले ही सिद्ध किया है कि,

$$\frac{A+B}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}$$

$$\therefore \quad \text{विमा } \frac{A+B}{A} = \frac{B}{A \cap B}$$

= विमा $(A + B) -$ विमा A = विमा $B -$ विमा $(A \cap B)$

या विमा $(A + B)$ = विमा A + विमा B – विमा $(A \cap B)$

नोटः आपको एक अभ्यास के रूप में उपरोक्त प्रमेय का अपने आप हल निकालने का प्रयास करना चाहिए।

उपप्रमेयः यदि $A \cap B = (0)$ तब विमा $(A + B)$ = विमा A + विमा B

अर्थात, विमा $(A \oplus B)$ = विमा A + विमा B

उदाहरण 1.41: मान लीजिए कि W_1, W_2, W_3 एक FDVS के उपसमष्टि हैं। दिखाएंगे कि

विमा $(W_1 + W_2 + W_3) \leq$ विमा W_1 + विमा W_2 + विमा W_3 – विमा $(W_1 \cap W_2)$

– विमा $(W_1 \cap W_3)$ – विमा $(W_2 \cap W_3)$ + विमा $(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$

हलः हमारे पास है,

विमा $(W_1 + W_2 + W_3)$ = विमा W_1 + विमा $(W_2 + W_3)$ – विमा $(W_1 \cap (W_2 + W_3))$

= विमा W_1 + विमा W_2 + विमा W_3 – विमा $(W_2 \cap W_3)$ – विमा $(W_1 \cap (W_2 + W_3)) \leq$ विमा W_1 + विमा W_2 + विमा W_3 – विमा $(W_2 \cap W_3)$

– विमा $(W_1 \cap W_2)$ – विमा $(W_1 \cap W_3)$ + विमा $(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$

क्योंकि $(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3)$

उदाहरण 1.42: मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ पर P_n सभी बहुपदों की घात (Degree) $\leq n$ का सदिश समष्टि हैं, जो P_4/P_2 का आधार प्रदर्शित करता है।

इसलिए विमा $\frac{P_4}{P_2}$ = विमा P_4 –विमा P_2 को सत्यापित करें।

हलः यह देखना आसान है कि $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, P_4 का एक आधार है और इस प्रकार विमा $P_4 = 5$। इसी प्रकार विमा $P_2 = 3$ क्योंकि $P_2 = \{1, x, x^2\}$ का एक आधार है।

मान लीजिए कि $S = \{P_2 + x^3, P_2 + x^4\}$ तब S, $\frac{P_4}{P_2}$ का एक आधार है।

$$P_2 + f \in \frac{P_4}{P_2} \Rightarrow P_2 + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 = P_2 + f$$

$$\Rightarrow \qquad P_2 + f = \alpha_3(P_2 + x^3) + \alpha_4(P_2 + x^4)$$

$\Rightarrow \qquad S, \frac{P_4}{P_2}$ से फैलाव या विस्तृति (विस्तार) है।

पुनः, $\alpha(P_2 + x^3) + \beta(P_2 + x^4)$ = शून्य $= P_2$

$$\Rightarrow \quad P_2 + \alpha x^3 + \beta x^4 = P_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha x^3 + \beta x^4 = a + bx + cx^2 \in P_2$$

$\Rightarrow \quad a = b = c = \alpha = \beta = 0$ क्योंकि बहुपद शून्य है।

अगर सभी गुणांक शून्य है।

टिप्पणी

इस प्रकार $S, \frac{P_4}{P_2}$ का आधार होगा।

इसलिए विमा $\frac{P_4}{P_2} = 2 = 5 - 3 =$ विमा $P_4 -$ विमा P_2

प्रमेय 1.26: मान लीजिए कि W एक FDVS, V का उपसमष्टि है, तो V का एक उपसमष्टि W' इस तरह मौजूद होगा कि $V = W \oplus W'$

हलः $\{w_1, w_2,..., w_m\}$, W का एक आधार है, तो $w_1, w_2,..., w_m$ में LI होने के कारण W में भी LI होगा। V का आधार बनाने के लिए हम इन LI आवयवों का विस्तार करते हैं। जैसे,

$\{w_1,..., w_m, v_1,..., v_n\}$

मान लीजिए कि $W' = L(\{v_1, v_2,..., v_n\})$, अर्थात, W' उपसमुच्चय की $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ द्वारा विस्तृति या विस्तार किया गया है।

हम दिखाएंगे कि $W \oplus W' = V$

मान लीजिए कि $v \in V$ कोई अवयव है तब,

$v = (\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n), \ \ \alpha_i, \beta_j \in F$

जहां पहला कोष्ठक शब्द W का है और दूसरा W' का है,

$\therefore \quad v \in W + W'$ और इस प्रकार $V \subseteq W + W'$

$\Rightarrow \quad V = W + W'$

पुनः, अगर $x \in W \cap W'$ कोई अवयव है,

तब $x \in W$ और $x \in W'$

$\Rightarrow \quad x = a_1 w_1 + ... + a_m w_m \qquad a_i, b_j \in F$

$\quad\quad x = b_1 v_1 + ... + b_n v_n$

$\Rightarrow \quad a_1 w_1 + ... + a_m w_m + (-b_1) v_1 + ... + (-b_n) v_n = 0$

$\Rightarrow \quad a_i = b_j = 0$ सभी i, j के लिए $w_1,..., w_m, v_1,..., v_n, LI$ है।

इस प्रकार $x = 0$

$\Rightarrow \quad W \cap W' = (0)$

या $V = W \oplus W'$

नोटः

(*i*) W' को W का पूरक (Complement) कहा जाता है। इस प्रकार हमने यह सिद्ध कर दिया है कि FDVS के प्रत्येक उपसमष्टि में एक पूरक होता है।

(*ii*) उपरोक्त प्रमेय को किसी भी सदिश समष्टि के लिए सिद्ध किया जा सकता है (अनिवार्य रूप से परिमित आयाम होना जरूरी नहीं है)।

उपप्रमेयः यदि V में W, W' का कोई पूरक है तो विमा $W' =$ विमा $V -$ विमा W

चूँकि $V = W \oplus W' \Rightarrow$ विमा $V =$ विमा $(W \oplus W') =$ विमा $W +$ विमा W'

$\Rightarrow \quad$ विमा $W' =$ विमा $V -$ विमा W

यद्यपि उपसमष्टि के प्रत्येक पूरक का एक ही आयाम होता है, लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि एक उपसमष्टि का एक अद्वितीय पूरक होगा।

परिभाषा: मान लीजिए कि $V(F)$ एक सदिश समष्टि है। V की उपसमष्टि $W_1, W_2,..., W_m$ को स्वतंत्र कहा जा सकता है अगर,

$w_1 + w_2 + ... + w_m = 0 \Rightarrow w_i = 0 \quad \forall i,\ w_i \in W_i$ है।

प्रमेय 1.27: मान लीजिए कि V, FDVS है। मान लीजिए कि $W_1, W_2,..., W_m$, V की उपसमष्टि है, जहां $W = W_1 + W_2 + ... + W_m$ तब निम्नलिखित समतुल्य (Equivalent) होंगे,

(*i*) $W_1, W_2,..., W_m$ स्वतंत्र हैं।

(*ii*) $W_j \cap (W_1 + W_2 + ... + W_{j-1}) = \{0\}, \quad \forall j,\ 2 \le j \le m$

(*iii*) यदि β_i, W_i, का क्रमिक आधार है। $1 \le i \le m$, तब $\beta = \{\beta_1, \beta_2,..., \beta_m\}$, W का क्रमिक आधार होगा।

प्रमाण: नियम (*i*) $\Rightarrow$ नियम (*ii*)

मान लीजिए कि $x \in W_j \cap (W_1 + W_2 + ... + W_{j-1})$ कोई अवयव है।

$\Rightarrow \quad x \in W_j$ और $x \in W_1 + W_2 + ... + W_{j-1}$

$\Rightarrow \quad x = w_j, \quad x = w_1 + w_2 + ... + w_{j-1} \quad w_i \in W_i$

$\Rightarrow \quad w_1 + w_2 + ... + w_{j-1} = w_i$

तब $\quad w_1 + w_2 + ... + w_{j-1} + (-1)\, w_j + 0 + 0 ... + 0 = 0$

$\Rightarrow w_i = 0 \quad \forall i$ (*i*) के प्रयोग से।

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ परिणाम।

नियम (*ii*) $\Rightarrow$ नियम (*iii*)

मान लीजिए कि $\beta_i = \{x_{i_1},..., x_{i_{d_i}}\}$, W_i का आधार है।

मान लीजिए कि $\sum_{i=1}^{k} a_{i1}x_{i1} + a_{i2}x_{i2} + ... + a_{id_1}x_{id_i} = 0$ है।

तब $\sum_{i=1}^{k} w_i = 0 \Rightarrow w_i = 0$ सभी i के लिए (क्योंकि, अगर j सबसे बड़ा पूर्णांक है जैसे कि $w_j \neq 0$,, तब $w_1 + ... + w_j = 0 \Rightarrow w_j \in W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}$ $\Rightarrow w_j = 0$, एक विरोधाभास है)।

$\therefore\ \beta = \{\beta_1,..., \beta_k\}$, W में एक स्वतंत्र समुच्चय है। चूंकि β_i, W_i से विस्तृति है सभी i, β, W से विस्तृति या फैलाव या विस्तार है।

$\therefore\ \beta$ का एक आधार है।

नियम (*iii*) $\Rightarrow$ नियम (*i*)

मान लीजिए कि $x_1 + ... + x_m = 0,\ x_i \in W_i$

तब $\alpha_{1_1} x_{1_1} + ... + \alpha_{1d_1} x_{1_{d_1}} + ... + \alpha_{k_1} x_{k_1} + ... + x_{k_{d_k}} = 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक गुणांक (Coefficient) $\alpha_{ij} = 0$ क्योंकि β रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

$\Rightarrow$ सभी $x_i = 0$ के लिए।

$\Rightarrow$ $W_1,..., W_m$ स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 1.43: मान लीजिए कि V एक परिमित आयाम है और $W_1,..., W_m$, V की उपसमष्टि है तो $V = W_1 + ... + W_m$ और विमा $V =$ विमा $W_1 + ... +$ विमा W_m है। तो सिद्ध करें कि $V = W_1 \oplus ... \oplus W_m$ है।

हल: मान लीजिए कि सभी i के लिए β_i, W_i का क्रमिक आधार है। मान लीजिए कि विमा $W_i = d_i$ और $x \in \mathrm{V}$ है।

तब $x = x_1 + ... + x_m, x_i \in W_i, x_i \in W_i \Rightarrow x_i$ सदिश का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow$ $x, \beta = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ में सदिशों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow$ β, V से विस्तृति या विस्तार या फैलाव होता है।

$\Rightarrow$ β, V का आधार है (यदि β, V का आधार नहीं है, तो β के कुछ उपसमुच्चय, V के आधार होंगे विमा $V < o(\beta_1) + ... + o(\beta_m) =$ विमा $W_1 + ... +$ विमा $W_k =$ विमा V, एक विरोधाभास है)।

$\Rightarrow$ $W_1, ..., W_m$, प्रमेय 1.27 द्वारा स्वतंत्र हैं।

$\Rightarrow$ $W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}$ सभी j के लिए, $2 \le j \le m$ प्रमेय 1.27 द्वारा

$\Rightarrow$ $V = W_1 \oplus W_2 + ... + \oplus W_m$

अपनी प्रगति जांचिए

5. बताएं कि कैसे एक परिमित विस्तार बीजगणितीय है?
6. T–अपरिवर्तनीय क्या है?
7. $F.D.V.S., V(F)$ पर एक रैखिक संकारक T कब F पर त्रिकोणीय होता है?
8. सिद्ध करें कि अगर दो सदिश LD हैं, तो उनमें से एक अदिश गुणक है।
9. माना की यदि $V = M_2(R)$ और माना की यदि $W = \{A \in V | A = A'\}$ V का उपसमष्टि है तो W का आधार ज्ञात करें।

1.9 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. रिंग या वलय (Ring) में प्रेरक कारक पूर्णांक का समुच्चय और समूहों में सभी क्रमचय के समुच्चय का समुच्चय होता था। सदिश समष्टि एक सदिश की धारणा से उत्पन्न होता है जिससे हम यांत्रिकी या ज्यामिति में परिचित हो चुके हैं।

2. एक सदिश समष्टि $V(F)$ में एक अरिक्त उपसमुच्चय W को V का उपसमष्टि कहा जाता है। यदि W के परिचालनों के अंतर्गत W उपसमष्टि बनाता है।

3. मान लीजिए कि $W_1, W_2,..., W_n$ किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि है तो $W_1 + W_2 + ... + W_n$ को सरल योग कहा जायगा। अगर प्रत्येक $x \in W_1 + W_2 + ... + W_n$ को $x = w_1 + w_2 + ... + w_n, w_i \in W_i$ को अद्वितीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

4. मान लीजिए कि $V(F)$ सदिश समष्टि है, $v_i \in V, \alpha_i \in F$ क्रमशः V और F के अवयव हैं, तो इस तरह के अवयवों $v_1, v_2, ..., v_n$ (F पर) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ को रैखिक संचय कहा जाता है।

5. K, F का एक परिमित विस्तार है। माना कि $[K : F] = n$। माना कि $a \in K$ तब $1, a, ..., a^n$ रैखिक रूप से F पर निर्भर करते हैं।

6. T, सदिक समष्टि V पर एक रैखिक संकारक है। यदि W, V का एक उपसमष्टि ऐसा है कि $T(W) \subseteq W$ तब हम कहते हैं कि W, T के तहत अपरिवर्तनीय है या T-अपरिवर्तनीय है।

7. F पर एक *F.D.V.S.*, $V(F)$ पर एक रैखिक संकारक T को त्रिकोणीय कहा जाता है यदि V का क्रमबद्ध आधार इस तरह मौजूद हो कि $[T]_\beta$ त्रिकोणीय हो।

8. एक FDVS, V को n आयाम कहा जाता है। यदि V के किसी भी आधार में n अवयवों की संख्या होती है।

   हम संकेतन विमा $_F V = n$ या केवल विमा $V = n$ का उपयोग करते हैं और कहते हैं कि V, n-आयाम सदिश समष्टि है।

9. W एक सदिश समष्टि है क्योंकि यह V का उपसमष्टि है।

   $[y_1, y_2 \in W \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ दिए गए अवकल समीकरण का एक हल है।
   $\Rightarrow \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in W]$

1.10 सारांश

- एक सदिश को एक निर्देशित रेखा खंड के रूप में परिभाषित किया गया है, जो बीजगणितीय शब्दों में एक क्रमित समुच्चय (a, b) की एक अचर (निश्चित) निर्देशांक निकाय के सापेक्ष अंतिम बिंदु के निर्देशांक के रूप में परिभाषित किया गया है।
- V और F की दो अलग–अलग द्विआधारी संक्रिया के लिए एक ही प्रतीक धनात्मक (+) का उपयोग कर सकते हैं। इसी तरह, क्षेत्र F के लिए एक ही प्रतीक, का उपयोग अदिश गुणन और गुणन के लिए किया जा सकता है।

- अदिश गुणन को $F \times V \to V$ से परिभाषित किया है। आप इस $V \times F \to V$ से भी परिभाषित कर सकते हैं और एक समान परिभाषा हो सकती हैं। पहले वाले को बाएं सदिश समष्टि कहा जाता है और दूसरे को दाएँ सदिश समष्टि कहा जाता है।
- किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के अरिक्त उपसमूह W को उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक और जरूरी नियम यह है कि W सदिश योग और अदिश गुणन के अंतर्गत बंद या संवृत हो।
- रिंगों या वलयों में आदर्शों के लिए एक समान परिणाम प्राप्त हुए थे समानता को प्रमापीय समानता कहा जाता है।
- यदि W एक सदिश समष्टि $V(F)$ का उपसमष्टि है तो $< W, + >$ से $< V, + >$ का एक एबेलियन समूह बनता है, हम V में W के सभी सहसमुच्चय की बात कर सकते हैं।
- मान लीजिए कि $V(F)$ सदिश समष्टि है, $v_i \in V, \alpha_i \in F$ क्रमशः V और F के अवयव हैं, तो इस तरह के अवयवों $v_1, v_2, ..., v_n$ (F पर) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ को रैखिक संचय कहा जाता है।
- S के अवयवों के परिमित समुच्चय के संपूर्ण रैखिक संचयों के समुच्चय को रैखिक फैलाव या विस्तार कहा जाता है। इसे $< S >$ द्वारा भी निरूपित किया जाता है।
- यदि $V = L(S)$, तो हम कहेंगे S, V को फैलाव या विस्तार करता है। F पर सदिश समष्टि V को सीमित या परिमित आयाम कहा जाता है। यदि कोई V के एक सीमित या परिमित उपसमुच्चय में S का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $V = L(S)$ है। हम सीमित या परिमित आयाम सदिश समष्टि के लिए संकेतन FDVS का उपयोग करते हैं।
- सामान्य तौर पर $V(F)$ के कोई भी उपसमुच्चय $Y(F)$ को LI कहा जाता है। यदि प्रत्येक सीमित या परिमित अरिक्त उपसमुच्चय Y, LI है, अन्यथा इसे LD कहा जाता है तो, अगर कुछ उपसमुच्चय LI हैं और कुछ LD हैं तो Y को LD कहा जाता है।
- (*i*) एक गैर–शून्य सदिश हमेशा LI होता है क्योंकि $v \neq 0, \alpha v = 0$ का अर्थ $\alpha = 0$ होता है।

  (*ii*) एक शून्य सदिश समष्टि हमेशा LD होता है।
- $a \in K$ को F पर बीजगणितीय कहा जाता है यदि $\exists$ एक गैर–शून्य बहुपद $f(x) \in F[x]$ इस प्रकार है कि, $f(a) = 0$। अन्यथा, इसे अबीजीय अवयव कहा जाता है।

- कुछ $a \in K$ पर a बीजगणितीय नहीं है, तो K को F का अबीजीय विस्तार या विस्तार कहा जाता है। उदाहरण के लिए, **R**, **Q** का अबीजीय विस्तार है।
- (i) $\exists$ एक अद्वितीय एकगुणांकी अलघुकरणीय बहुपद है $p(x) \in F[x]$ इस प्रकार, $p(a) = 0$ है।
- (ii) $\exists$ गैर–शून्य बहुपद $q(x) \in F[x]$ इस प्रकार, $q(a) = 0$, $q(x), p(x)$ को विभाजित करता है।
- $p(x)$ की विशिष्टता दिखाने के लिए, मान लीजिए कि $q(x)$, F इस प्रकार, $q(a) = 0$ पर कोई अलघुकरणीय एकगुणांकी बहुपद है, चूंकि $F[x]$, एक यूक्लिडियन डोमेन है।
- निर्धारित $p(x)$ को y $p(x) = Irr(F, a)$ के द्वारा निरूपित किया गया है। यह F पर a द्वारा संतुष्ट अद्वितीय एकगुणांकी अलघुकरणीय बहुपद है। चूँकि $p(x)$ न्यूनतम घात इस प्रकार, $p(a) = 0$, इसलिए $p(x)$ को a का न्यूनतम बहुपद कहते हैं।
- एक अवयव $a \in K$ को F पर घात n का बीजगणितीय कहा जाता है यदि यह F पर के घात n के बहुपद को संतुष्ट करता है और इससे कम घात (n) के किसी भी बहुपद को संतुष्ट नहीं कर पाता है।
- F पर $a, b \in K\, a1, \ldots \text{an} \in K$ बीजगणितीय है तो F पर $a \pm b, ab, ab^{-1}$ (यदि $b \neq 0$) भी बीजगणितीय होंगे। दूसरे शब्दों में, K के अवयव F पर बीजगणितीय होकर K का एक उपक्षेत्र बनाते हैं। (और इस उपक्षेत्र को F का K पर बीजगणितीय संवृत कहा जाता है)।
- T, सदिश समष्टि V पर एक रैखिक संकारक है। यदि W, V का एक उपसमष्टि ऐसा है कि $T(W) \subseteq W$ तब हम कहते हैं कि W, T के तहत अपरिवर्तनीय है या T-अपरिवर्तनीय है।
- A या T का आईगेन मान **R** में मौजूद नहीं हैं अगर W, $\mathbf{R}^2$ का एक अपरिवर्तनीय उपसमष्टि ऐसा है कि $W \neq 0$, तब माध्य $W = 1$ है। W को v फैलाव या विस्तार करता है। तब $Tv \in W \Rightarrow Tv = \alpha v$, $v \neq 0 \Rightarrow \alpha$ का आईगेन मान है। यह एक विरोधाभास है। इसलिए O और $\mathbf{R}^2$ एकमात्र $\mathbf{R}^2$ के अपरिवर्तनीय उपसमष्टि हैं।
- W, V पर रैखिक संकारक T का एक अपरिवर्तनीय उपसमष्टि है। तब T पर आव्यूहों का प्रतिनिधित्व है, जहाँ A, W पर T का T_w प्रतिबंधित आव्यूह है।
- $F[x]$ पर T के लिए अभिलाक्षणिक बहुपद रैखिक कारकों का गुणन हैं।
- बीजगणित के मूलभूत प्रमेय द्वारा (अर्थात **C** क्षेत्र में सम्मिश्र संख्याओं के प्रत्येक बहुपद के सभी मूल **C** में होंगे), A का न्यूनतम बहुपद $p(x) = (x - c_1)^{r1} \ldots (x - c_k)^{rk}$ होगा, जहां $c_i \in \mathbf{C}$ मानक प्रमेय के अनुसार A त्रिकोणीय है।

- एक FDVS, V को n आयाम कहा जाता है यदि V के किसी भी आधार में n अवयवों की संख्या होती है।

  हम संकेतन विमा $_F V = n$ या केवल विमा $V = n$ का उपयोग करते हैं और कहते हैं कि V n-आयाम सदिश समष्टि है।
- एक सदिश समष्टि का आधार अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय है और इसके विपरीत, सदिश समष्टि में प्रत्येक अधिकतम रैखिक रूप से स्वतंत्र समुच्चय इसका आधार होता है।
- एक तुल्याकारीता के तहत एक आधार को एक आधार पर मानचित्रित किया जाता है। यह प्रमेय के उस पहले भाग का अनुसरण करता है।
- W एक सदिश समष्टि है क्योंकि यह V का उपसमष्टि है।

  [$y_1, y_2 \in W \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ दिए गए अवकल समीकरण का एक हल है। $\Rightarrow \quad \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in W$]

1.11 मुख्य शब्दावली

- **सदिश समष्टि** : सदिश समष्टि एक गणितीय संरचना है जो सदिश के एक संग्रह से बनती है, जो कि एक ऐसी वस्तु है जिसे एक साथ जोड़ा जा सकता है और अदिश के रूप में ज्ञात संख्याओं से गुणा किया जा सकता है या बढ़ाया जा सकता है।
- **उपसमष्टि** : एक सदिश उपसमष्टि $V(F)$ में एक गैर–रिक्त उपसमुच्चय W को V का उपसमष्टि कहा जाता है यदि V के अंतर्गत W सदिश समष्टि बनाता है।
- **परिमित आयामों वाला सदिश समष्टि** : यदि $V = L(S)$, तो हम कहेंगे S, V को विस्तृत या फैलाव या विस्तार करता है। F पर सदिश समष्टि V को सीमित या परिमित आयामों वाला कहा जाता है यदि किसी भी V के एक सीमित या परिमित उपसमुच्चय में S का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि $V = L(S)$। हम सीमित या परिमित आयामों वाले सदिश समष्टि के लिए संकेतन FDVS का उपयोग करते हैं।

1.12 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. सदिश समष्टि क्या हैं? उपयुक्त उदाहरण देकर परिभाषित करें।
2. एक गैर–रिक्त उपसमुच्चय के उपसमष्टि होने के लिए क्या शर्त है?
3. रैखिक फैलाव या विस्तार को परिभाषित करें।
4. रैखिक निर्भरता और रैखिक स्वतंत्रता के मूल गुणों को बताएं।
5. विस्तार प्रमेय को उदाहरण देकर परिभाषित करें।

6. $a \in K$ को कब घात n का F बीजगणितीय कहा जाता है?
7. यदि a एक बीजगणितीय पूर्णांक है और m एक साधारण पूर्णांक है, तो सिद्ध कीजिए कि $a + m$ एक बीजगणितीय पूर्णांक है।
8. सिद्ध कीजिए कि दो बीजगणितीय पूर्णांको का योग और गुणन एक बीजगणितीय पूर्णांक है।
9. माना कि T एक रैखिक संकारक है एक परिमित आयामों वाले सदिश समष्टि V पर है, तो सिद्ध कीजिए कि T विकर्ण है यदि केवल V एक आयामी T-अपरिवर्तनीय उपसमष्टि का प्रत्यक्ष योग है।
10. उपसमष्टि के योगों के आयाम बताइए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. माना की V एक सदिश समष्टि है C पर। V पर अदिश गुणन को αov द्वारा परिभाषित करें। सिद्ध कीजिए कि एक नए अदिश या अदिश गुणन के सन्दर्भ में V भी C पर सदिश समष्टि बनाता है।
2. सिद्ध कीजिए कि कोई रैखिक परिवर्तन या रूपान्तरण $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ वास्तव में $T(x) = \alpha x$ का एक प्रकार है किसी $\alpha \in \mathbf{R}$ के लिए।
3. रैखिक निर्भरता और रैखिक स्वतंत्रता के मूल गुणों की उदाहरण देकर व्याख्या करें।
4. यदि $a \in K$ बीजगणितीय है F पर क्रमशः घात m और n के और यदि m और n तुलनात्मक रूप से अभाज्य हैं, तो सिद्ध करें कि $F(a, b)$ की घात mn F पर है।
5. यदि $a \in K$ बीजगणितीय है F पर जो कोई विषम घात हैं, तो सिद्ध करें कि $F(a) = F(a^2)$।
6. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ की घात 4 है Q पर और $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ की घात 6 है Q पर।
7. $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ पर Q का आधार ज्ञात कीजिए।
8. माना कि V एक सदिश समष्टि है सभी बहुपदों का वास्तविक संख्या R के क्षेत्र में। और माना कि W उपसमष्टि है V का जो फैलाव या विस्तार है $\{1, x, x^2\}$ के द्वारा और माना कि T एक रैखिक संकारक है V पर जो कि $T(f(x)) = x f(x)$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि W, T के अन्दर अपरिवर्तनीय नहीं है।
9. यदि सदिश समष्टि V के तीन उपसमष्टि L, M, N हैं और $M \subseteq L$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N) = M + (L \cap N)$ होगा।
10. सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ सदिशों में $v_1 = (0, 1, -2)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 1)$, LD होंगे।
11. FDVS का कोई भी आधार सीमित या परिमित होता है। इस कथन की सत्यता को उदाहरण सहित सिद्ध कीजिए।

टिप्पणी

12. सिद्ध कीजिए कि एक अवयव $a \in K$ को F पर, घात n का बीजगणितीय कहा जाता है यदि यह F पर घात n के बहुपद को संतुष्ट करता है और इससे निम्नतम घात (n) के किसी भी बहुपद को संतुष्ट नहीं कर पाता है।

1.13 सहायक पाठ्य सामग्री

Datta, K. B. 2002. *Matrix and Linear Algebra*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

S. S. Sastry. 2012. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: PHI Learning Pvt. Ltd.

S. K. Jain, A. Gunawardena and P. B. Bhattacharya. 2001. *Basic Linear Algebra with MATLAB*. New York: Key College Publishing: Springer-Verlag, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2nd Edition. New York: John Wiley and Sons.

P. B. Bhattacharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul. 1983. *First Course in Linear Algebra*. New Delhi: Wiley Eastern.

Balaguruswamy, E. 1999. *Numerical Methods*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

Datta, N. 2007. *Computer Oriented Numerical Methods*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambari. 2016. *A Course in Abstract Algebra*, 5th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Prasad, Chandrika. 2017. *Text Book on Algebra and Theory of Equations*, 11th Edition. Allahabad: Pothishala Private Ltd.

Conte, Samuel D. and Carl de Boor. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill.

इकाई 2 रैखिक रूपांतरण

टिप्पणी

संरचना

2.0 परिचय

गणित में, एक रैखिक मानचित्र (Linear Map) (जिसे रैखिक मानचित्रण भी कहा जाता है, रैखिक रूपांतरण या, कुछ संदर्भों में, रैखिक फलन (Linear Function) दो मापांकों (Modulus) के बीच एक मैप या मानचित्र $V \to W$ है जो अदिश या स्केलर के जोड़ और गुणन सिद्धांत को संरक्षित करता है। एक महत्वपूर्ण विशेष प्रकरण तब होता है जब $V = W$, V का एक अंतराकारिता (Endomorphism) होता है। कभी–कभी रैखिक संकारक (Liner Operator) शब्द इस प्रकरण को संदर्भित करता है। एक अन्य कथन के अनुसार, रैखिक संकारक V और W को पृथक करने की अनुमति देता है, जबकि उन्हें वास्तविक सदिश समष्टि (Vector Space) होने की आवश्यकता होती है। कभी–कभी रैखिक फलन शब्द का अर्थ रैखिक मै मानचित्र के समान होता है, जबकि विश्लेषणात्मक ज्यामिति में ऐसा नहीं होता है। एक रैखिक मानचित्र हमेशा एक रैखिक उपसमष्टि पर रैखिक उपसमष्टि (संभवतः कम आयाम) को मानचित्र करता है उदाहरण के लिए, यह एक समतल के मूल से एक समतल सीधी रेखा या बिंदु का मैप करता है। रैखिक मानचित्रों को प्रायः आव्यूह या मेट्रिक्स (Matrix) के रूप में दर्शाया जा सकता है, और सरल उदाहरणों में घूर्णन (Rotation) या नियमित आवर्तन और परावर्तन रैखिक रूपांतरण (Reflection Linear Transformation) समाविष्ट हैं। अमूर्त बीजगणित (Abstract Algebra) की भाषा में, एक रैखिक मानचित्र एक मापांक समरूपता (Module Homomorphism) है। श्रेणी सिद्धांत की भाषा में, यह किसी दिए गए रिंग या वलय (Ring) के ऊपर मापांकों की श्रेणी में एक रूपवाद है।

किसी भी सदिश समष्टि (Vector Space) V में, V पर सभी रैखिक फलनों से मिलकर एक समान दोहरा या द्वैत समष्टि (Dual Vector Space) (या संक्षेप में केवल दोहरा या द्वैत समष्टि) है, जिसमें क्रम से स्थिरांक द्वारा जोड़ और अदिश गुणन के सदिश समष्टि की संरचना भी है। अस्पष्टता से बचने के लिए इसे बीजगणितीय दोहरा

टिप्पणी

या द्वैत समष्टि भी कहा जा सकता है। जब इसे एक संस्थानिक सदिश समष्टि (Topological Vector Space) के लिए परिभाषित किया जाता है, तो इसे निरंतर दोहरा समष्टि (Continuous Dual Space) कहा जाता है, जो निरंतर रैखिक फलनों के अनुरूप दोहरे समष्टि का एक उपसमष्टि है।

इस इकाई में आप रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन (Linear Transformation) और उन का आव्यूह (Matrix) के रूप में निरूपण, रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के बीजगणित, रैंक–शून्यता प्रमेय (Rank-Nullity Theorem) और आधार के परिवर्तन, दोहरा या द्वैत समष्टि (Dual Space), रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन के आइगेनमान (Eigen Value) और आइगेन सदिश (Eigen Vector) द्विघात (Quadratic Form) और हर्मिटियन समष्टि (Hermitian Form) के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- रैखिक रूपांतरण और उन के आव्यूह को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के बीजगणित की व्याख्या कर पाएंगे;
- रैंक–शून्यता प्रमेय और आधार के परिवर्तन की चर्चा कर सकेंगे;
- दोहरा या द्वैत समष्टि को परिभाषित कर सकेंगे;
- रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन के आइगेन मान और आइगेन सदिश का वर्णन कर पाएंगे;
- द्विघात और हर्मिटियन रूपों की व्याख्या कर पाएंगे।

2.2 रैखिक रूपांतरण एवं उनका आव्यूह निरूपण

मान लीजिए कि $U(F)$, $V(F)$ क्षेत्र F पर क्रमशः n और m आयाम सदिश समष्टि हैं। मान लीजिए कि $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$, $\beta' = \{v_1, ..., v_m\}$ क्रमशः क्रमिक आधार है। मान लीजिए कि $T: U \to V$ रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है, क्योंकि $T(u_1)$, ..., $T(u_n) \in V$ और $\{v_1, ..., v_m\}$, विस्तृति या विस्तार (Span) V, है, जहाँ प्रत्येक $T(u_i)$ सदिश $v_1, ..., v_m$ का एक रैखिक संचय (Combination) है।

मान लीजिए कि
$$T(u_1) = \alpha_{11}v_1 + ... \alpha_{m1}v_m$$
$$T(u_2) = \alpha_{12}v_1 + ... + \alpha_{m2}v_m$$
....
$$T(u_n) = \alpha_{1n}v_1 + ... + \alpha_{mn}v_m$$

जहां प्रत्येक $\alpha_{ij} \in F,$ है, तब $m \times n$ आव्यूह होगा,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & ... & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & ... & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & ... & \vdots \\ \vdots & \vdots & ... & ... & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & ... & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

इस को क्रमशः क्रमिक आधार β, β', के सापेक्ष T का आव्यूह (Matrix) कहा जाता है। A को विशिष्ट रूप से T द्वारा निर्धारित किया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक $\alpha_{ij} \in F$ विशिष्ट (Uniquely) रूप से निर्धारित होता है।

इसलिए हम लिख सकते हैं,

$$A = [T]_{\beta, \beta'}$$

क्रमिक (Ordered) आधार शब्द बहुत महत्वपूर्ण है, क्योंकि आधार का क्रम बदल गया है, प्रविष्टियाँ (Entries) α_{ij} उनकी स्थिति (Position) को बदल देगा और इसलिए संगत आव्यूह (Corresponding Matrices) अलग होगा।

विशेष रूप से यदि $U = V$, $\beta = \beta'$ तो $[T]_{\beta, \beta'}$ लिखने के बजाय, हम $[T]_\beta$ लिखेंगे।

मान लीजिए कि F पर $M_{m\times n}(F)$ सभी $m \times n$ आव्यूह के सदिश समष्टि को निरूपित करता है और Hom (U, V), $U(F)$ से $V(F)$ तक सभी सदिश समष्टि के रैखिक रूपांतरणों को दर्शाता है। अब हम निम्न प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2.1: Hom $(U, V) \cong M_{m\times n}(F)$ है।

प्रमाण: θ को परिभाषित करें : Hom $(U, V) \to M_{m\times n}(F)$, इस प्रकार कि,

$$\theta(T) = [T]_{\beta, \beta'}$$

जहां $\beta = \{u_1, \ldots u_n\}$, $\beta' = \{v_1, \ldots v_m\}$, U, V, के क्रमशः क्रमिक आधार है। θ इस प्रकार सुपरिभाषित किया गया है कि $[T]_{\beta, \beta'}$ होगा, जिसे विशिष्ट रूप से T द्वारा निर्धारित किया जाता है। यह सत्यापित (Verify) करना मुश्किल नहीं है कि θ एक रैखिक रूपांतरण है।

मान लीजिए कि $\theta(S) = \theta(T), \quad S, T \in$ Hom (U, V)

तब $[S]_{\beta, \beta'} = [T]_{\beta, \beta'}$

$\Rightarrow \quad (a_{ij}) = (b_{ij})$

$\Rightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}$ सभी i, j के लिए।

$\Rightarrow \quad S(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i = T(u_j)$, सभी $j = 1, \ldots n$ के लिए।

$\Rightarrow \quad S = T \Rightarrow \theta$, 1-1 या एकैकी (One-One) है।

मान लीजिए कि $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)$ है। तब रैखिक रूपांतरण $T \in$ Hom (U, V) इस तरह है कि,

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad , j = 1, \ldots, n \text{ के लिए।}$$

$\therefore \quad A = [T]_{\beta, \beta'} = \theta(T) \Rightarrow \theta$ आच्छादक (Onto) है।

इस प्रकार θ समरूपता (Isomorphism) और Hom $(U, V) \cong M_{m\times n}(F)$ है।

उपप्रमेयः विमा Hom $(U, V) = mn$ है।

प्रमाण: माना कि $S =$ सभी $m \times n$ आव्यूह के समुच्चयों में केवल एक प्रविष्टि 1 है और अन्य सभी प्रविष्टियाँ शून्य है, $M_{m\times n}(F)$ के आधार पर है।

स्पष्ट रूप से, $o(S) = mn \Rightarrow$ विमा $M_{m\times n}(F) = mn$

विमा Hom $(U, V) = mn$

प्रमेय 2.2: मान लें S, और T दो रैखिक रूपांतरण $V(F)$ से $V(F)$ तक है। मान लें β, V का एक क्रमिक आधार है, तब $[ST]_\beta = [S]_\beta[T]_\beta$ होगा।

प्रमाण: मान लीजिए कि $\beta = \{v_1, \ldots v_n\}$

मान लीजिए कि $S(v_1) = a_{11}v_1 + \ldots a_{n1}v_1$

....

$S(v_n) = a_{1n}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n$

जहाँ $a_{ij} \in F$

सामान्य तौर पर, $S(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i$ सभी $j = 1, \ldots, n$ के लिए।

$\therefore \quad [S]_\beta = (a_{ij})$

इसी प्रकार,

$T(v_1) = b_{11}v_1 + \ldots + b_{n1}v_n$

....

$T(v_n) = b_{1n}v_1 + \ldots + b_{nn}v_n$ जहां $b_{ij} \in F$ है।

सामान्य तौर पर, $T(v_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, v_j$, सभी $k = 1, \ldots, n$ के लिए।

$\therefore \quad [T]_\beta = (b_{jk})$

$$\therefore \quad ST(v_k) = S\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\, S(v_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)v_i$$

$[ST]_\beta = (c_{ik})$, जहां $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

तथा (i, k)वीं प्रविष्टि $[S]_\beta\,[T]_\beta$ में,

$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = c_{ik} = (i, k)$वीं प्रविष्टि $[ST]_\beta$ में,

$\therefore \quad [ST]_\beta = [S]_\beta\,[T]_\beta$

उपप्रमेय: यदि S, $V(F)$ से $V(F)$, में प्रतिलोमीय रैखिक रूपांतरण (Invertible Linear Transformation) है, तो ऐसा $[S]_\beta$ के साथ भी होगा जिसका सदिश V और आधार β है और विलोमतः।

प्रमाण: चूँकि S प्रतिलोमीय (Invertible) है, $\exists T : V \to V$ इस प्रकार कि, $ST = I = TS$ है। मान लीजिए कि β, V का क्रमिक आधार है। तब उपयुक्त प्रमेय द्वारा,

$[ST]_\beta = [I]_\beta = I$, जहाँ $T = S^{-1}$

$\Rightarrow \quad [S]_\beta[T]_\beta = I$

$\Rightarrow \quad [S]_\beta[S^{-1}]_\beta = I$

$\Rightarrow \quad [S^{-1}]_\beta = [S]^{-1}{}_\beta$, V के किसी आधार β के लिए।

विलोमतः मान लीजिए कि $[S]_\beta$ प्रतिलोमीय है। तब $\exists$ आव्यूह $A = (a_{ij})$ पर F इस तरह है कि, $[S]_\beta\, A = I$

मान लीजिए कि $T : V \to V$ रैखिक रूपांतरण इस तरह है कि,

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad \text{सभी } (j = 1, \ldots n) \text{ के लिए।}$$

$$\therefore \quad [T]_\beta = A$$

$$\therefore \quad [S]_\beta\, [T]_\beta = I$$

$$\Rightarrow \quad [ST]_\beta = I$$

$$\Rightarrow \quad (ST)(v_j) = v_j \quad \text{सभी } (j = 1, \ldots, n) \text{ के लिए।}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (ST)(x) &= (ST)(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \\ &= x \quad \text{सभी } x \in V \text{ के लिए} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad ST = I \Rightarrow S \text{ प्रतिलोमीय है।}$$

अब हम एक सदिश समष्टि के दो अलग–अलग आधारों के सापेक्ष में रैखिक रूपांतरणों (Linear Transformations) के आव्यूह (Matrices) के बीच के संबंध को समझाएंगे।

प्रमेय 2.3 : यदि $T : V(F) \to V(F)$ तक रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है। मान लीजिए कि $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\beta' = \{v_1, \ldots, v_n\}$

V का एक क्रमिक आधार है।

तब F पर $\exists$ एक गैर–विलक्षण (Non-Singular) आव्यूह P इस प्रकार है कि,

$$[T]_{\beta'} = P^{-1} [T]_\beta P.$$

प्रमाण: मान लीजिए $S : V \to V$ रैखिक रूपांतरण इस प्रकार है कि $S(u_i) = v_i$ सभी $i = 1, \ldots n$ के लिए।

अब $x \in \text{Ker } S \Rightarrow S(x) = 0$, $x = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, $\alpha_i \in F$

$$\Rightarrow \quad S(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 S(u_1) + \ldots + \alpha_n S(u_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \text{सभी } i \text{ के लिए।}$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ker } S = \{0\}$$

$\Rightarrow$ S, 1-1 या एकैकी (One-One) है और इसलिए आच्छादक (Onto) भी है।

अर्थात S तुल्याकारिता (Isomorphism) है। माना कि $[T]_\beta = (a_{ij})$

तब $$T(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$$

$$\therefore \quad (STS^{-1})(v_j) = ST(u_j)$$

$$= S\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

टिप्पणी

$$\therefore \quad [STS^{-1}]_{\beta'} = (a_{ij}) = [T]_{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad [S]_{\beta'}[T]_{\beta'}[S^{-1}]_{\beta'} = [T]_{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad [S]_{\beta'}[T]_{\beta'}[S]_{\beta}^{-1} = [T]_{\beta}$$

$$\Rightarrow \quad [T]_{\beta'} = [S]_{\beta'}^{-1}[T]_{\beta}[S]_{\beta'}$$

$$= P^{-1}[T]_{\beta}\, P, \text{ जहाँ } P = [S]_{\beta'}.$$

उदाहरण 2.1: मान लीजिए कि $\mathbf{C}^2$ पर परिभाषित $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ एक रैखिक रूपांतरण है। मान लीजिए कि $\beta = \{\in_1 = (1, 0), \in_2 = (0, 1)\}$, $\beta' = \{\alpha_1 = (1, i), \alpha_2 = (-i, 2)\}$, $\mathbf{C}^2$ पर क्रमिक आधार है। आव्यूह T, β, β' के सापेक्ष में क्या होगा?

हल: अब

$$T(\in_1) = T(1, 0)$$

$$= (1, 0)$$

$$= a(1, i) + b(-i, 2)$$

$$\Rightarrow \quad a - bi = 1 \text{ जहां } a, b \in \mathbf{C}$$

$$ai + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = 2, b = -i$$

$$\Rightarrow \quad T(\in_1) = 2\alpha_1 - i\alpha_2$$

तथा

$$T(\in_2) = T(0, 1) = (0, 0) = 0\alpha_1 + 0\alpha_2$$

$$\therefore \quad [T]_{\beta\,\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

उदाहरण 2.2: F पर A एक $n \times n$ आव्यूह है। यह दिखाएँ कि A प्रतिलोमीय होगा यदि और केवल यदि जब F पर स्तंभ (Columns), A रैखिक रूप से स्वतंत्र होगा।

हल: $V(F)$ n आयाम सदिश समष्टि हैं। मान लीजिए कि $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ का V एक क्रमिक आधार है। मान लीजिए कि $A = (a_{ij})$, $T : V \to V$, $\exists$ रैखिक रूपांतरण इस तरह है कि,

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$$\therefore \quad [T]_{\beta} = A \text{ है।}$$

मान लीजिए कि $M_n(F)$, F पर सभी $n \times n$ आव्यूह को निरूपित करता है।

मान लीजिए कि $A \in M_n(F)$ प्रतिलोमीय है। तब T भी प्रतिलोमीय होगा (उपप्रमेय से लेकर प्रमेय 2.2 तक) और इसलिए T, 1–1 एकैकी (One-One) तथा आच्छादक (Onto) है।

मान लीजिए कि $\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ : \\ a_{n1} \end{bmatrix} + ... + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ : \\ a_{nn} \end{bmatrix} = 0, \ \alpha_i \in F$

टिप्पणी

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} & \cdots & +\alpha_n a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 a_{n1} + & \cdots & +\alpha_n a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n} = 0$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 a_{11}\, v_1 + \ldots + \alpha_n a_{1n}\, v_1 = 0$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\alpha_1 a_{n1}\, v_n + \ldots + \alpha_n a_{nn}\, v_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{n1}v_n) + \ldots + \alpha_n(a_{1n}v_1 + \ldots + \alpha_{nn}v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ इसलिए T 1-1 एकैकी है।

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0$ सभी i के लिए

$\Rightarrow \quad A$ के स्तंभ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

विलोमतः

F पर A के स्तंभ रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

अब, $x \in Ker\ T$

$$\Rightarrow \quad T(x) = 0,\ x \in V$$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v_j) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j a_{ij}) \right) v_i = 0$$

$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0$ सभी $i = 1, \ldots, n$ के लिए।

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ : \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ : \\ a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $\alpha_i = 0$ क्योंकि स्तंभ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

$\Rightarrow \quad x = 0 \Rightarrow \text{Ker } T = \{0\}$

$\Rightarrow$ इसलिए T एकैकी और आच्छादक (Onto) है।

$\Rightarrow \quad T$ प्रतिलोमीय है।

2.3 रैखिक रूपांतरण का बीजगणित : रैंक–शून्यता प्रमेय और आधार में परिवर्तन

टिप्पणी

माना कि क्षेत्र F पर V और W दो सदिश समष्टि हैं और $T : V \to W$ और $S : V \to W$ दो रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है। हम $T + S$, को परिभाषित करेंगे , तो T और S का योग होगा,

$T + S : V \to W$, इस प्रकार कि,

$$(T + S)v = T(v) + S(v), \quad v \in V$$

तब $T + S$ का भी $V \to W$ तक रैखिक रूपांतरण होगा,

$$(T + S)(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x + \beta y) + S(\alpha x + \beta y)$$
$$= \alpha T(x) + \beta T(y) + \alpha S(x) + \beta S(y)$$
$$= \alpha(T + S)x + \beta(T + S)y$$

पुनः $\alpha \in F$ के लिए, हम रैखिक रूपांतरण $T : V \to W$ को α के गुणन (Product) को परिभाषित करेंगे $(\alpha T) : V \to W$ के द्वारा इस प्रकार की, $(\alpha T)v = \alpha(T(v))$ होगा।

यह आसानी से देखा जा सकता है कि αT भी रैखिक रूपांतरण $V \to W$ है तथा मान लीजिए कि Hom (V, W) $V \to W$ से सभी रैखिक रूपांतरण का समुच्चय है । फिर हम दिखाएंगे की Hom (V, W) उपयुक्त परिभाषित योग और अदिश गुणनफल के तहत क्षेत्रफल F पर एक सदिश समष्टि बनाता है। हम पहले ही देख चुके हैं कि जब $T, S \in$ Hom (V, W), $\alpha \in F$ है तो $T + S, \alpha T \in$ Hom (V, W) होगा, इस प्रकार से इस संक्रिया के लिए यह संवृत (Closure) होगा।

इस प्रकार हम परिभाषा की कुछ अन्य नियमों को भी सत्यापित करेंगे।

$(T + S)v = T(v) + S(v) = S(v) + T(v) = (S + T)v$ सभी $v \in V$ के लिए।

$\Rightarrow \qquad T + S = S + T$ सभी $S, T \in$ Hom (V, W) के लिए।

मानचित्र $O : V \to W$, इस प्रकार है कि, $O(v) = 0$ रैखिक रूपांतरण है और,

$(T + O)v = T(v) + O(v) = T(v) = (O + T)\, v$ सभी v के लिए।

इस प्रकार Hom (V, W) का O शून्य है।

किसी भी $T \in$ Hom (V, W), मानचित्र $(-T) : V \to W$, इस प्रकार होगा कि,

$$(-T)v = -T(v)$$

T का योगात्मक व्युत्क्रम (Additive Inverse) होगा।

पुनः, $\quad [\alpha(T + S)]v = \alpha[(T + S)v] = \alpha[T(v) + S(v)] = \alpha T(v) + \alpha S(v)$

$= (\alpha T)v + (\alpha S)v = (\alpha T + \alpha S)v$ सभी $v \in V$ के लिए।

$\Rightarrow \qquad \alpha(T + S) = \alpha T + \alpha S$

$[(\alpha\beta)T]v = (\alpha\beta)T(v) = \alpha[\beta T(v)] = [\alpha(\beta T)]v$ सभी v के लिए

$\Rightarrow \qquad (\alpha\beta)T = \alpha(\beta T)$

$(1T)v = 1 \,.\, T(v) = T(v)$ सभी v के लिए।

$\Rightarrow \qquad 1 \,.\, T = T$

इसलिए हम प्राप्त करते हैं कि Hom (V, W), F क्षेत्र पर एक सदिश समष्टि बनाता है।

नोट: संकेतन या नोटेशन (Notation) $L(V, W)$ का उपयोग Hom (V, W) को दर्शाने के लिए भी किया जाता है।

परिभाषा: दो रैखिक परिवर्तनों की गुणन (सं. रचना)

माना कि V, W, Z, F क्षेत्र पर तीन सदिश समष्टि है।

माना कि $T: V \to W$, $S: W \to Z$ रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है।

हम $ST: V \to Z$ को इस तरह परिभाषित करेंगे कि,

$$(ST)v = S(T(v))$$

तब ST का एक रैखिक रूपांतरण होगा (सत्यापित करें), जिसे S और T का गुणन (Product) कहा जाता है।

नोट: TS को परिभाषित नहीं किया जा सकता है और सम्भावित ही इसे परिभाषित किया गया हो, यह ST के बराबर नहीं हो सकता है।

परिभाषा: एक रैखिक रूपांतरण $T: V \to V$ को V पर एक रैखिक संकारक (Linear Operator) कहा जाता है,

जबकि एक रैखिक रूपांतरण $T: V \to F$ को एक रैखिक क्रियात्मक (Linear Functional) भी कहा जाता है। हम $T.T$ के लिए T^2 और $T^n = T^{n-1}T$, आदि संकेतन (Notation) का उपयोग करते हैं।

प्रमेय 2.4: मान लीजिए कि T, T_1, T_2, रैखिक रूपांतरण हैं V पर, और माना कि $I: V \to V$ तत्समक मानचित्रण (Identity Map) $I(v) = v$ है, सभी v के लिए (जो स्पष्ट रूप से एक रैखिक रूपांतरण है)। तब,

(*i*) $IT = TI = T$

(*ii*) $T(T_1 + T_2) = TT_1 + TT_2$

$(T_1 + T_2)T = T_1T + T_2T$

(*iii*) $\alpha(T_1T_2) = (\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2) \quad \alpha \in F$

(*iv*) $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$.

प्रमाण: (*i*) निश्चित या स्पष्ट रूप से।

(*ii*)
$$\begin{aligned}[T(T_1 + T_2)]x &= T[(T_1 + T_2)x] = T[T_1(x) + T_2(x)] \\ &= T(T_1(x)) + T(T_2(x)) = TT_1(x) + TT_2(x) \\ &= (TT_1 + TT_2)x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T(T_1 + T_2) = TT_1 + TT_2$$

अन्य परिणाम भी इसी तरह आएंगे।

(*iii*)
$$\begin{aligned}[\alpha(T_1T_2)]x &= \alpha[(T_1T_2)x] = \alpha[T_1(T_2(x))] \\ [(\alpha T_1)T_2]x &= (\alpha T_1)\,[T_2(x)] = \alpha[T_1(T_2(x)] \\ [T_1(\alpha T_2)]x &= T_1(\alpha T_2)x = T_1(\alpha T_2(x)) = \alpha T_1(T_2(x))]\end{aligned}$$

इस प्रकार प्रमाण सिद्ध होता है।

(iv) परिभाषा के अनुसार परिणाम मिलेगा।

उपरोक्त प्रमेय के आधार पर निम्न उदाहरणों को देखें।

टिप्पणी

प्रमेय 2.5: माना कि F पर, V और W क्रमशः विमा m और विमा n के दो सदिश समष्टि है। तो Hom (V, W) का विमा mn होगा।

प्रमाण: माना कि $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ और $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ क्रमशः V और W का आधार है।

मानचित्रण (Mappings) $T_{ij} : V \to W$ को इस प्रकार परिभाषित करें कि,

$$T_{ij}(v) = \alpha_i w_j \quad 1 \le i \le m$$
$$1 \le j \le n$$

जहां $v \in V$ कोई अवयव है और इसलिए,

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... \alpha_m v_m$ किसी भी $\alpha_i \in F$ के लिए।

तथा, ध्यान दें कि $T_{ij}(v_k) = 0$ यदि $k \ne i$

$= w_j$ यदि $k = i$

हम दिखाएंगे कि T_{ij} रैखिक रूपांतरण है।

मान लीजिए कि $x, y \in V$ तब $\quad x = \sum_1^m \alpha_i v_i, \quad y = \sum_1^m \beta_i v_i \quad \alpha_i, \beta_i \in F$

अब $T_{ij}(x + y) = T_{ij}[(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) + (\beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m)]$

$= T_{ij}[(\alpha_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_m + \beta_m)v_m]$

$= T_{ij}(\gamma_1 v_1 + ... + \gamma_m v_m)$

$= \gamma_i w_j$

$= (\alpha_i + \beta_i)w_j = \alpha_i w_j + \beta_i w_j = T_{ij}(x) + T_{ij}(y)$

तथा, $T_{ij}(\lambda x) = T_{ij}(\lambda(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m))$

$= T_{ij}(\lambda\alpha_1 v_1 + ... + \lambda\alpha_m v_m)$

$= (\lambda\alpha_i)w_j = \lambda(\alpha_i\, w_j) = \lambda T_{ij}(\Sigma\alpha_i v_i)$

$= \lambda T_{ij}(x)$

इस प्रकार $T_{ij} \in$ Hom (V, W) है। हमने प्रमाणित किया था कि $S = \{T_{ij} \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$, Hom (V, W) का एक आधार बनाता है।

मान लीजिए कि,

$\beta_{11}T_{11} + \beta_{12}T_{12} + ... + \beta_{1n}T_{1n} + \beta_{21}T_{21} + \beta_{22}T_{22} + ... + \beta_{2n}T_{2n} + ... + \beta_{m1}T_{m1} + \beta_{m2}T_{m2} + ... + \beta_{mn}T_{mn} = 0,\ \beta_{ij} \in F$

[जहां 0 संभवत्, Hom (V, W) का शून्य है।]

v_1 से समाधान द्वारा हमें प्राप्त होगा,

$\beta_{11}T_{11}(v_1) + \beta_{12}T_{12}(v_1) + ... + \beta_{1n}T_{1n}(v_1) + \beta_{21}T_{21}(v_1) + ... = 0$

$\Rightarrow \beta_{11}w_1 + \beta_{12}w_2 + ... + \beta_{1n}w_n + 0 + ... + 0 + ... = 0$

किंतु $w_1, w_2 ..., w_n$, LI है।

$\Rightarrow \beta_{11} = \beta_{12} = ... \beta_{1n} = 0$

इसी प्रकार, v_2 से समाधान द्वारा हमें प्राप्त होगा $\beta_{21} = \beta_{22} = ... \beta_{2n} = 0$

इसी प्रकार v_3, v_4 ... से समाधान द्वारा हम प्राप्त करते हैं कि सभी गुणांक (Coefficient) शून्य हैं और इस प्रकार S, LI है। इसलिए $o(S) = mn$ है।

मान लीजिए कि $T \in \text{Hom}(V, W)$ कोई अवयव (Element) है तब,

$T : V \to W$ रैखिक रूपांतरण है।

टिप्पणी

हम दिखाएंगे कि T, T_{ij} का रैखिक संचय (Linear Combination) है।

v_1 पर विचार करें, तब $T(v_1) \in W$ और इस प्रकार $w_1, w_2, \ldots w_n$ का रैखिक संचय है।

मान लीजिए कि $T(v_1) = \alpha_{11}w_1 + \alpha_{12}w_2 + \ldots + \alpha_{1n}w_n$

$T_0 = \alpha_{11}T_{11} + \alpha_{12}T_{12} + \ldots + \alpha_{1n}T_{1n} + \alpha_{21}T_{21} + \alpha_{22}T_{22} + \ldots + a_{mn}T_{mn}$ रखने पर (जहां α_{11}, α_{12} ... संभवत् पहले के बराबर हैं)

तब $T_0(v_1) = \alpha_{11}T_{11}(v_1) + \alpha_{12}T_{12}(v_1) + \ldots$

$$= \alpha_{11}w_1 + \alpha_{12}w_2 + \alpha_{2n}w_n + 0 + 0 + \ldots + 0$$

$$\Rightarrow T_0(v_1) = T(v_1)$$

इसी प्रकार $v_2, v_3, \ldots v_m$, के साथ कार्य करने पर, हमें प्राप्त होता है,

$$T_0(v_2) = T(v_2)$$

....

$$T_0(v_m) = T(v_m)$$

इस प्रकार T_0 और T, V के आधार के सभी अवयवों पर सहमत हैं।

$\Rightarrow T_0$ और T, $V \Rightarrow T_0 = T$ के सभी अवयवों पर सहमत हैं।

लेकिन Ta, S के सदस्यों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow T$, S के सदस्यों का एक रैखिक संचय है।

$\Rightarrow S$ का विस्तार या विस्तृती है Hom (V, W) तक।

या कि S, Hom (V, W) का एक आधार बनाता है।

इसलिए विमा या dim Hom $(V, W) = mn$ होगा।

उपप्रमेय : स्पष्ट रूप से विमा Hom (V, V) $= \text{m}^{\text{L}}$ है जहां विमा V = M और विमा HOM (V, F) = m.1 = m चूंकि विमा F(F)=1 क्योंकि F, 1 द्वारा उत्पन्न होता है और इस प्रकार {1}, F(F) का आधार है।

उदाहरण 2.3 : रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) की रेंज या सीमा (Range), श्रेणी (Rank), अष्टि या Ker और शून्यता (Nullity) को ज्ञात कीजिए।

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, इस प्रकार है कि,

$$T(x, y, z) = (x + z, \quad x + y + 2z, \quad 2x + y + 3z)$$

हलः मान लीजिए कि $(x, y, z) \in \text{Ker } T$ का कोई अवयव है, तब,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (x + z, \ x + y + 2z, \ 2x + y + 3z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \quad x + 0 + z = 0$$

$$x + y + 2z = 0$$

$$2x + y + 3z = 0$$

इससे हमें $x = -z,\ -z + y + 2z = 0$ प्राप्त होता है, अर्थात्, $y = -z$

पुनः, T, की परिभाषा के अनुसार, हम $(x + z,\ x + y + 2z, 2x + y + 3z)$ के अवयवों को देखने पर इन्हें रेंज या सीमा (Range) T में प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी

अब $(x + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z) = (x + 0 + z, x + y + 2z, 2x + y + 3z)$

$$= (x, x, 2x) + (0, y, y) + (z, 2z, 3z)$$
$$= x(1, 1, 2) + y(0, 1, 1) + z(1, 2, 3)$$

इस प्रकार रेंज या सीमा T, $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ द्वारा विस्तारित या विस्तृती है।

क्योंकि $(1, 1, 2) + (0, 1, 1) = (1, 2, 3)$ हम इन सदिशों को LD द्वारा प्राप्त करते हैं।

इसलिए विमा रेंज या सीमा $T \le 2$

पुनः (1, 1, 2) और (0, 1, 1) LI है तो हम प्राप्त करते हैं, विमा रेंज या सीमा T = 2 श्रेणी T

उदाहरण 2.4: यदि $T_1, T_2 \in \text{Hom}\,(V, W)$ तब दिखाएं की

(i) $r(\alpha T_1) = r(T_1)$ सभी $\alpha \in F, \alpha \ne 0)$ के लिए।

(ii) $|\, r(T_1) - r(T_2)\,| \le r(T_1 + T_2) \le r(T_1) + r(T_2)$

जहां $r(T)$ का अर्थ है कि यह T की सीमा या रेंक (Rank) है।

हलः (i) $T_1 : V \to W$

इस प्रकार $T_1(V)$ = रेंज या सीमा (Range) T_1, W का सदिश समष्टि हैं।

इस प्रकार $(\alpha T_1)v = \alpha(T_1(v)) \in T_1(V)$ $v \in V$ सभी के लिए

$$\Rightarrow (\alpha T_1)V \subseteq T_1\,(V) \qquad ...(i)$$

पुनः क्योंकि $\alpha \ne 0$, α^{-1} मौजूद है और इस प्रकार,

$$(\alpha^{-1}T_1)\ V \subseteq T_1(V)$$
$$\alpha(\alpha^{-1}T_1)V \subseteq \alpha T_1(V)$$
$$\Rightarrow \quad T_1(V) \subseteq \alpha T_1(V)$$
$$\Rightarrow \quad T_1(V) = \alpha T_1(V),$$ समीकरण (i) द्वारा।
$$\Rightarrow \quad \text{विमा } T_1(V) = \text{विमा } \alpha T_1(V)$$
या $$r(T_1) = r(\alpha T_1)$$ है।

(ii) क्योंकि $(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x)$ सभी $x \in V$ के लिए।

$$(T_1 + T_2)V \subseteq T_1(V) + T_2(V)$$
$$\Rightarrow \text{विमा } [(T_1 + T_2)V] \le \text{विमा } [T_1(V) + T_2(V)]$$
$$\le \text{विमा } T_1(V) + \text{विमा } T_2(V)$$
$$\Rightarrow \quad r(T_1 + T_2) \le r(T_1) + r(T_2)$$

पुनः $T_1 = (T_1 + T_2) - T_2 = (T_1 + T_2) + (-T_2)$

$$\Rightarrow \quad r(T_1) = r[(T_1 + T_2) + (-T_2)]$$
$$\leq r(T_1 + T_2) + r(-T_2) = r(T_1 + T_2) + r(T_2)$$

(समीकरण (i) का प्रयोग करते हुए $\alpha = -1$)

$$\Rightarrow \quad r(T_1) - r(T_2) \leq r(T_1 + T_2)$$

इसी प्रकार $r(T_2) - r(T_1) \leq r(T_1 + T_2)$

$$\Rightarrow \quad |\, r(T_1) - r(T_2)\,| \leq r(T_1 + T_2) \leq r(T_1) + r(T_2).$$

प्रतीलोमीय रैखिक रूपांतरण (Invertible Linear Transformations)

हम आपको बता दें कि एक मानचित्र $T : V \to W$ प्रतिलोमीय होगा यदि और केवल यदि यह एकैकी (1–1), आच्छादक (Onto), और T का व्युत्क्रम है, तो मानचित्रण $T^{-1}: W \to V$ इस तरह होगा कि,

$$T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$$

हम दिखाएंगे कि रैखिक रूपांतरण (एकैकी 1–1, आच्छादक (Onto) का प्रतिलोमीय भी रैखिक रूपांतरण होता है।

मान लीजिए कि : $V \to W$ एक रैखिक रूपांतरण (एकैकी 1–1 , आच्छादक (Onto) है और इसका प्रतीलोमीय $T^{-1}: W \to V$ है।

हमें सिद्ध करना है,

$$T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2) \quad \alpha, \beta \in F, w_1, w_2 \in W$$

क्योंकि T आच्छादक है, $w_1, w_2 \in W$, $\exists\ v_1, v_2 \in V$ के लिए $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$

$$\Leftrightarrow \quad v_1 = T^{-1}(w_1),\ v_2 = T^{-1}(w_2)$$

अब
$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) &= T^{-1}(\alpha T(v_1) + \beta T(v_2)) \\ &= T^{-1}(T(\alpha v_1) + T(\beta v_2)) \\ &= T^{-1}(T(\alpha v_1 + \beta v_2)) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &= \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2). \end{aligned}$$

परिभाषा: एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to W$ गैर–विलक्षण (Non-Singular) होगा यदि Ker $T = \{0\}$ अर्थात्, यदि T 1-1 एकैकी है।

प्रमाण 2.6: एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to W$ गैर–विलक्षण (Non-Singular) होगा यदि T में V के प्रत्येक एक LI उपसमुच्चय को आच्छादक (Onto) W के प्रत्येक LI उपसमुच्चय से मान चित्रण करते हैं।

प्रमाण : मान लीजिए T गैर–विलक्षण है और $\{v_1, v_2 ..., v_n\}$, V के LI समुच्चय है, हम दिखाएंगे कि $\{T(v_1), T(v_2) ..., T(v_n)\}$ W के उपसमुच्चय है।

अब $\quad \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0 \quad \alpha_i \in F$

$$\Rightarrow \quad T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... \alpha_n v_n \in \text{Ker } T = \{0\}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 + ... \alpha_n v_n = 0$$

$\Rightarrow\ \alpha_i = 0$ सभी i के लिए क्योंकि $v_1, v_2..., v_n$ यहाँ LI हैं।

विलोमतः, मान लीजिए कि $v \in \text{Ker } T$ कोई भी अवयव है।

तब $T(v) = 0$

$\Rightarrow \{T(v)\}$, W में LI नहीं है।

$\Rightarrow v$, V में LI नहीं है (परिकल्पना या अवधारणा द्वारा)।

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow \text{Ker } T = \{0\}$

$\Rightarrow T$ गैर–विलक्षण (Non-Singular) है।

प्रमेय 2.7: एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to W$ है, जहां V और W दो समान आयाम FDVS है। तब निम्न कथन समतुल्य (Equivalent) होंगे :

(*i*) T का प्रतिलोमीय (Invertible) है।

(*ii*) T गैर–विलक्षण (Non-Singular) है (अर्थात, T एकैकी (1-1) है)।

(*iii*) T आच्छादक (Onto) है (अर्थात्, रेंज (Range) $T = W$)।

(*iv*) यदि If $\{v_1, v_2,..., v_n\}$, का आधार है या सीमा तब $\{T(v_1), T(v_2),..., T(v_n)\}$, W का आधार होगा।

प्रमाण: (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) परिभाषा के अनुसार।

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) T गैर–विलक्षण (Non-Singular) है।

$\Rightarrow$ (Ker) $T = \{0\}$

$\Rightarrow$ विमा (Ker) $T = 0$

क्योंकि विमा रेंज या सीमा (Range) T + विमा अष्टि (Ker) T = विमा V तब हम प्राप्त करते हैं,

विमा रेंज या सीमा (Range) T = विमा V

$\Rightarrow$विमा रेंज या सीमा (Range) T = विमा W (दिया हुआ है)

किन्तु रेंज या सीमा (Range) T W, का उपसमुच्चय है।

रेंज या सीमा (Range) $T = W$

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) T आच्छादक (Onto) का अर्थ रेंज (Range) या सीमा $T = W$ है

$\Rightarrow$ विमा रेंज या सीमा (Range) T = विमा W = विमा V

और क्योंकि विमा रेंज या सीमा (Range) T + विमा अष्टि या Ker T = विमा V, तब हम प्राप्त करते हैं,

विमा Ker $T = 0$

$\Rightarrow \text{Ker } T = \{0\}$

इस प्रकार T एकैकी (1-1) है और क्योंकि यह आच्छादक है इसलिए T प्रतिलोमीय (Invertible) होगा।

(*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) T प्रतिलोमीय (Invertible) है $\Rightarrow T$ एकैकी (1-1) आच्छादक (Onto) है।

अर्थात्, T तुल्याकारिता (Isomorphism) है, इस प्रकार परिणाम मिला,

(*iv*) $\Rightarrow$ (*i*)

मान लीजिए कि $\{T(v_1),..., T(v_n)\}$, W का आधार है जहां $\{v_1,...v_n\}$, V का आधार है। किसी भी $w \in W$ को

$w = \alpha_1 T(v_1) +...+ \alpha_n T(v_n)$ के रूप में रखा जा सकता है,

$= T(\alpha_1 v_1 +...+ \alpha_n v_n) = T(v)$ किसी भी $v \in V$ के लिए।

$\therefore$ T आच्छादक (Onto) है। इस प्रकार (iii) सिद्ध होता है।

इस प्रकार प्रकरण (i) सिद्ध होता है।

उदाहरण 2.5: मान लीजिए कि $\mathbf{R}^3$पर T एक रैखिक रूपांतरण है जो

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

द्वारा परिभाषित किया गया है। दिखाए कि T प्रतिलोमीय (Invertible) है और उस नियम को ज्ञात करे जिसके द्वारा T^{-1} परिभाषित है।

हल: $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

मान लीजिए कि $(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker } T$ कोई अवयव है।

तब $\quad T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 0, \; x_1 - x_2 = 0, \; 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ या Ker } T = \{(0, 0, 0)\}$$

$\Rightarrow T$ गैर–विलक्षण (Non-Singular) है और इस प्रकार प्रतिलोमीय (Invertible) है (प्रमेय 2.7 देखें)।

अब अगर $\mathbf{R}^3$ पर (z_1, z_2, z_3) कोई अवयव है तब T के अंतर्गत (x_1, x_2, x_3) उसका प्रतिरूप (Image) होगा अगर,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3)$$

$$\Rightarrow \quad 2x_1 = z_1$$

$$x_1 - x_2 = z_2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = z_3$$

हमें प्राप्त होगा, $x_1 = \frac{z_1}{3}$, $x_2 = \frac{z_1}{3} - z_2$, $z_3 = z_3 - z_1 + z_2$

इस प्रकार $T^{-1} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ को निम्न तरीके से परिभाषित किया जाता है,

$$K_2 \; T^{-1} (z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_1}{3}, \frac{z_1}{3} - z_2, z_3 - z_1 + z_2\right)$$

उदाहरण 2.6: यदि एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to V$ इस तरह है कि T आच्छादक (Onto) नहीं है, तो यह दिखाएं कि V में कोई $0 \neq v$ इस तरह मौजूद होंगे कि $T(v) = 0$ होगा।

हल: चूंकि T आच्छादक नहीं है, यह एकैकी 1–1 नहीं है।

मान लीजिए $\exists$ में कोई $0 \neq v$ इस प्रकार है कि $T(v) = 0$ हो।

तब $T(v) = 0$ केवल तब होगा जब $v = 0$ हो।

$\Rightarrow \text{Ker } T = \{0\} \Rightarrow T$ एकैकी 1-1, एक विरोधाभास है।

प्रमेय 2.8: मान लीजिए $T : V \to W$ और $S : W \to U$ दो रैखिक रूपांतरण हैं। तो

(*i*) यदि S और T एकैकी (1-1), आच्छादक (Onto) हैं तो ST भी एकैकी (1.1), आच्छादक (Onto) और $(ST)^{-1} = T^{-1}\ S^{-1.}$

(*ii*) यदि ST एकैकी (1–1) है तो T भी एकैकी (1-1) होगा।

(*iii*) यदि ST आच्छादक (Onto) हैं तो S भी आच्छादक (Onto) होगा।

प्रमाण: (*i*) क्योंकि S और T एकैकी 1-1 आच्छादक है, इसलिए S^{-1} और T^{-1} भी मौजूद होगा।

मान लें $ST(x) = ST(y)$

तब $S(T(x)) = S(T(y))$

$\Rightarrow$ $T(x) = T(y)$ क्योंकि S एकैकी $(1 - 1)$ है।

$\Rightarrow$ $x = y$ क्योंकि T एकैकी $(1 - 1)$ है।

$\Rightarrow$ ST एकैकी $(1 - 1)$ है।

पुनः $ST : V \to U$, मान लीजिए कि $u \in$ U कोई अवयव है क्योंकि तब S आच्छादक होगा, $\exists\ w \in W$ इस प्रकार है कि, $S(w) = u$ और क्योंकि $T : V \to W$ आच्छादक है $\exists\ v \in V$ इस प्रकार है कि, $T(v) = w$

अब $T(v) = w \Rightarrow S(T(v)) = S(w) \Rightarrow ST(v) = u$

इसलिए ST आच्छादक है।

इसी प्रकार $(ST)(T^{-1}S^{-1}) = S(T(T^{-1}S^{-1})) = S(TT^{-1})S^{-1} = S(IS^{-1}) = SS^{-1} = I$

$\Rightarrow$ $(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}(ST)) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}(IT) = T^{-1}T = I$

इसलिए $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ है।

(*ii*) मान लीजिए कि $v \in$ Ker T कोई अवयव है।

तब $T(v) = 0$

$\Rightarrow S(T(v)) = S(0)$

$\Rightarrow ST(v) = 0$

$\Rightarrow v \in$ Ker ST और Ker $ST = (0)$ क्योंकि ST एकैकी (1-1) है।

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow$ Ker $T = (0) \Rightarrow T$ एकैकी (1-1) है।

(*iii*) मान लीजिए कि $u \in U$ कोई अवयव है।

क्योंकि $ST : V \to U$ आच्छादक है, कुछ $v \in V$ इस प्रकार है कि, $ST(v) = u$

अर्थात, $S(T(v)) = u$

मान लीजिए कि $T(v) = w$ और $w \in W$ इस प्रकार है कि,

$S(w) = u$

तब S आच्छादक है।

उदाहरण 2.7 : F पर V_1 और V_2 सदिश समष्टि है। यह दिखाएँ कि $V_1 \times V_2$, FDVS है यदि और केवल यदि V_1 और V_2, FDVS हैं।

हल: माना कि $V_1' = \{(v_1, 0) \mid v_1 \in V_1\}$

$V_2' = \{(0, v_2) \mid v_2 \in V_2\}$

तब V_1' और V_2', $V_1 \times V_2$ के सदिश समष्टि होंगे।

$\theta_1 : V_1 \to V_1'$ को इस तरह परिभाषित करें कि,

$\theta_1(v_1) = (v_1, 0)$

तब θ_1 तुल्याकारिता (Isomorphism) होगा।

इसी तरह $\theta_2 : V_2 \to V_2'$ को भी परिभाषित करें।

$\theta_2(v_2) = (0, v_2)$

तब यह भी तुल्याकारिता होगा।

इसी तरह $V_1 \cong V_1'$, $V_2 \cong V_2'$

मान लीजिए कि $V_1 \times V_2$ यहाँ FDVS है, तब V_1' और V_2' भी FDVS होंगे $V_1 \times V_2$ के उपसमष्टि होने के कारण)।

$\Rightarrow$ V_1 और V_2 यहाँ FDVS है।

विलोमतः यदि V_1 और V_2 यहाँ FDVS है तब $V_1 \times V_2$ भी FDVS होगा और विमा $(V_1 \times V_2)$ = विमा V_1 + विमा V_2 होगा (ध्यान दें: अगर $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ और $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ क्रमशः V_1 और V_2 के आधार हैं, तब $\{(e_1, 0), ..., (e_m, 0), (0, f_1), ..., (0, f_n)\}$ $V_1 \times V_2$ के भी आधार होंगे)।

2.4 दोहरा या द्वैत समष्टि

पहले हम परिभाषित कर चुके हैं कि Hom (V, W), सभी रैखिक रूपांतरण का समुच्चय सदिश समष्टि V से F पर सदिश समष्टि W, से F पर तो इसे F पर एक सदिश समष्टि कहते हैं। यदि विमा $V = m$, विमा $W = n$, तो विमा Hom $(V, W) = mn$ होगा। विशेषकर, यदि $W = F$, हो।

तब F पर V का Hom (V, F) को दोहरा या द्वैत समष्टि (Dual Space) कहते हैं। इसे $\hat{V}$ के रूप में प्रदर्शित करते हैं और V द्विक या दोहरा (Dual) पढ़ते हैं।

हमारा पहला कार्य दिए गए V के आधार से $\hat{V}$ का आधार बनाना है।

प्रमेय 2.9: मान लीजिए कि $\{v_1, ..., v_n\}$ V का आधार है।

$\hat{v}_i : V \to F$ को इस तरह परिभाषित करें कि,

$\hat{v}_i\,(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_i \quad i = 1, 2, ..., n$

तब $\hat{v}_i$ सभी $i = 1, ..., n$ के लिए रैखिक रूपांतरण है और $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_n\}$, V का आधार है।

इस कारण विमा V = विमा $\hat{V}$ होगा।

प्रमाण: मान लीजिए कि $v, v' \in V$

मान लीजिए कि
$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$
$$v' = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n, \quad \alpha_i, \beta_i \in F$$

यदि $v = v'$, तब $\alpha_j = \beta_j$ सभी $j = 1, ..., n$ के लिए।

$$\therefore \quad \hat{v}_i(v) = \alpha_i = \hat{v}_i\,(v')$$

टिप्पणी

$\therefore\ \hat{v}_i$ पूर्णतः स्पष्ट है सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

और $\hat{v}_i(v + v') = \hat{v}_i(\overline{\alpha_1 + \beta_1} v_1 + ... + \overline{\alpha_n + \beta_n} v_n)$

$$= \alpha_i + \beta_i$$
$$= \hat{v}_i(v) + \hat{v}_i(v')$$

और $\hat{v}_i(\alpha v) = \hat{v}_i(\alpha\alpha_1 v_1 + ... + \alpha\alpha_n v_n)$

$$= \alpha\alpha_i = \alpha\hat{v}_i(v)$$

$\therefore\ \hat{v}_i$ रैखिक रूपांतरण है सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

परिभाषा के अनुसार, $\hat{v}_i(v_j) = (0v_1 + ... + 1v_j + ... + 0v_n) = 0$ यदि $j \neq i$

$= 1$ यदि $j = i$

$\therefore \qquad \hat{v}_i(v_j) = \delta_{ij}$ सभी $i, j = 1, ..., n$ के लिए।

मान लीजिए कि $\qquad \alpha_1\hat{v}_1 + ... + \alpha_n \hat{v}_n = 0 \quad \alpha_i \in F$

तब $(\alpha_1\hat{v}_1 + ... + \alpha_n\hat{v}_n)(v_j) = 0(v_j) = 0$

$\Rightarrow \qquad \alpha_j\hat{v}_j(v_j) = 0$

$\Rightarrow \qquad \alpha_j = 0$ सभी $j = 1, ..., n$ के लिए।

$\therefore\ F$ पर $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_n\}$, LI है।

मान लीजिए कि $f \in \hat{V}$. है माना कि, $\qquad f(v_i) = \alpha_i \quad i = 1, ..., n$

तब $\qquad (\alpha_1\hat{v}_1 + ... + \alpha_n\hat{v}_n)(v_i) = \alpha_i\hat{v}_i(v_i)$

$$= \alpha_i \quad i = 1, ..., n$$

$\therefore\ f$ और $\alpha_1\hat{v}_1 + ... + \alpha_n\hat{v}_n$ दोनों V के सभी आधार अवयवों पर सहमत हैं।

इसलिए, $\qquad f = \alpha_1\hat{v}_1 + ... + \alpha_n\hat{v}_n$

$\therefore\ \{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_n\}$ V की विस्तृति या विस्तार करता है।

इसलिए, $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_n\}$ यहाँ $\hat{V}$ का आधार है, और इसे $\{v_1, ..., v_n\}$ का दोहरा या द्वैत आधार कहा जाता है जब $\hat{v}_i(v_j) = \delta_{ij}$ होता है।

उपप्रमेयः माना की F पर V एक सीमित या परिमित आयाम सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space) है माना कि $0 \neq v \in V$ है। तब $\exists f \in \hat{V}$ इस प्रकार अवश्य होगा कि $f(v) \neq 0$ यहाँ

प्रमाणः क्योंकि $v \neq 0$, $\{v\}$, LI का समुच्चय है। अतः इसे विस्तारित करके V का आधार बनाया जा सकता है।

मान लीजिए कि $\{v = v_1, v_2, ..., v_n\}$, V का आधार है।

मान लीजिए कि $\{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_n\}$ संगत दोहरा आधार है। तब $\hat{v}_i(v_j) = \delta_{ij}$ होगा।

$\therefore \qquad \hat{v}_1(v_1) = 1$

मान लीजिए कि $\qquad f = \hat{v}_1 \in \hat{V}$

तब $\quad f(v) = f(v_1) = \hat{v}_1(v_1) = 1 \neq 0$ है।

प्रमेय 2.10: माना की F पर V सीमित या परिमित आयाम सदिश समष्टि है।

$$\theta : V \to \hat{\hat{V}} \text{ को इस तरह परिभाषित करें कि,}$$

$$\theta(v) = T_v \text{ सभी } v \in V \text{ के लिए}$$

जहां $T_v : \hat{V} \to F$ इस तरह है कि,

$$T_v(f) = f(v) \text{ सभी } f \in \hat{V} \text{ के लिए।}$$

तब θ, V से $\hat{\hat{V}}$ तक तुल्याकारिता है (यहां $\hat{\hat{V}} = \hat{V}$ का दोहरा या द्वैत है, जिसे V का दुगुना दोहरा या द्वैत (Double Dual) कहते हैं)।

प्रमाण: मान लीजिए कि $f, g \in \hat{V}$

तब $T_v(f + g) = (f + g)(v)$

$$= f(v) + g(v)$$

$$= T_v(f) + T_v(g)$$

मान लीजिए कि $\alpha \in F$

तब $$T_v(\alpha f) = (\alpha f)(v)$$

$$= \alpha f(v)$$

$$= \alpha T_v(f)$$

$\therefore$ $$T_v \in \hat{\hat{V}}$$

θ पूर्णतः स्पष्ट है क्योंकि $v = v' \Rightarrow T_v(f) = f(v)$

$$= f(v') = T_{v'}(f) \text{ सभी } f \in \hat{V} \Rightarrow T_v = T_{v'} \text{ के लिए।}$$

θ रैखिक रूपांतरण है क्योंकि,

$$\theta(v + v') = T_{v+v'} = T_v + T_{v'} = \theta(v) + \theta(v')$$

क्योंकि, $$T_{v+v'}(f) = f(v + v')$$

$$= f(v) + f(v')$$

$$= T_v(f) + T_{v'}(f)$$

$$= (T_v + T_{v'})(f) \text{ सभी } f \in \hat{V} \text{ के लिए।}$$

$$\mathrm{T}_{v+v'} = T_v + T_{v'}$$

तथा $$\theta(\alpha v) = T_{\alpha v} = \alpha T_v = \alpha\theta(v)$$

क्योंकि, $$T_{\alpha v}(f) = f(\alpha v)$$

$$= \alpha f(v)$$

$$= \alpha T_v(f) \text{ सभी } f \in \hat{V} \text{ के लिए।}$$

$\therefore$ $$T_{\alpha v} = \alpha T_v$$

मान लीजिए कि $0 \neq v \in \text{Ker } \theta \Rightarrow \theta(v) = 0 \Rightarrow T_v = 0$

प्रमेय 2.9 के उपप्रमेय से द्वारा $\exists f \in \hat{V}$ इस प्रकार है कि, $f(v) \neq 0$

$\therefore$ $$T_v(f) \neq 0$$

एक विरोधाभास है क्योंकि $T_v = 0 \Rightarrow T_v(f) = 0$

टिप्पणी

$\therefore$ Ker $\theta = \{0\} \Rightarrow \theta$ एकैकी 1-1 है।

$\therefore$ $V \cong \theta(V) \subseteq \hat{V}$

$\Rightarrow$ विमा $\theta(V)$ = विमा V = विमा $\hat{V}$ = विमा $\hat{\hat{V}}$ (प्रमेय 2.9 के द्वारा)

$\therefore$ $\theta(V) = \hat{V}$ से $\theta(V)$ $\hat{\hat{V}}$ तक आच्छादक (Onto) है।

$\therefore$ θ, V से $\hat{\hat{V}}$ तक आच्छादक (Onto) है।

इस प्रकार θ तुल्याकारिता (Isomorphism) है।

उपप्रमेय 1 : माना की F पर V सीमित या परिमित आयाम सदिश समष्टि है। अगर $\hat{V}$, पर L रैखिक फलन है, तब प्रत्येक $v \in V$ के लिए इस तरह होगा कि, $L(f) = f(v)$ सभी $f \in \hat{V}$ के लिए अद्वितीय है।

प्रमाण: L, $\hat{V}$ का रैखिक फलन है।

$\Rightarrow L \in \hat{\hat{V}} \Rightarrow \exists$ अद्वितीय (Unique) $v \in V$ इस तरह है कि,

$\theta(v) = L$ क्योंकि θ एकैकी (1-1), आच्छादक (Onto) है।

$\therefore$ $T_v = L$

$\Rightarrow L(f) = T_v(f) = f(v)$ सभी $f \in \hat{V}$ के लिए।

उपप्रमेय 2 : माना की F पर V परिमित या सीमित आयाम सदिश समष्टि है। तो $\hat{V}$ का प्रत्येक आधार V के किसी भी आधार का दोहरा या द्वैत होगा।

प्रमाण : मान लीजिए कि $\{f_1, ..., f_n\}$, $\hat{V}$ का आधार है।

प्रमेय 2.9 द्वारा, $\exists$ का आधार $\{L_1, ..., L_n\}$ यहाँ $\hat{\hat{V}}$ पर इस प्रकार होगा कि, $L_i(f_j) = \delta_{ij}$ है। पहले सिद्ध किए गए प्रमेय 2.9 के उपप्रमेय (1) से $\exists$ अद्वितीय होगा प्रत्येक i के सापेक्ष $v_i \in V$ के लिए।

इस प्रकार होगा कि, $L_i = T_{v_i} = \theta(v_i)$ है।

क्योंकि $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$, आधार है, $\hat{\hat{V}}$ का $\{\theta^{-1} L_1, ..., \theta^{-1} L_n\} = \{v_1, ..., v_n\}$ जो कि V का आधार है क्योंकि θ तुल्याकारिता है।

इसके अलावा $\delta_{ij} = L_i(f_j) = T_{v_i}(f_j) = f_j(v_i)$

$\{f_1, ..., f_n\}$, V के आधार $\{v_1, ..., v_n\}$ के लिए दोहरा या द्वैत आधार होगा।

उदाहरण 2.8: मान लीजिए कि V, R से R तक के सभी बहुपद फलनों का सदिश विस्तार है, जिसकी घात 2 या उससे कम है। माना कि t_1, t_2, t_3 अलग–अलग वास्तविक संख्याएं हैं और मान लीजिए कि $L_i : V \to F$ ऐसे हों, कि, $L_i(p(x)) = p(t_i)$, $i = 1, 2, 3$ है। दिखाएं कि $\{L_1, L_2, L_3\}$, $\hat{V}$. का एक आधार है। V के लिए एक आधार निर्धारित करें ताकि $\{L_1, L_2, L_3\}$ इसका दोहरा या द्वैत हो।

हल: $L_i(p(x) + q(x))$

$= L_i(r(x)), \; r(x) = p(x) + q(x)$

$= r(t_i) = p(t_i) + q(t_i)$

$= L_i(p(x)) + L_i(q(x))$

तथा $L_i(\alpha p(x)),\ \alpha \in F$

$= L_i(q(x)),\ q(x) = \alpha p(x)$

$= q(t_i)$

$= \alpha p(t_i) = \alpha\, L_i(p(x))$ सभी $i = 1, 2, 3$ के लिए

$L_i \in \hat{V}$ सभी $i = 1, 2, 3$ के लिए।

मान लीजिए कि, $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0$

इसे बहुपदों $1, x, x^2$ पर प्रयोग कर के हमें प्राप्त होता है।

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_3 = 0$$

$$a_1 t_1^2 + \alpha_2 t_2^2 + \alpha_3 t_3^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (t_1 - t_2)\ (t_2 - t_3)\ (t_3 - t_1)$$

$\neq 0$ इसलिए t_1, t_2, t_3 अलग (Distinet) है।

इस प्रकार $A^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ पर मौजूद है।

इस प्रकार $\{L_1, L_2, L_3\}$ का LI समुच्चय है।

क्योंकि विमा $V = 3$ और, $\{L_1, L_2, L_3\}$, $\hat{V}$ का आधार है।

मान लीजिए कि, $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, V का आधार है इस प्रकार कि, $\{L_1, L_2, L_3\}$ इसका दोहरा या द्वैत आधार हो।

तब $L_1(p_1) = 1,\ L_2(p_1) = 0,\ L_3(p_1) = 0$

$L_2(p_1) = 0 \quad \Rightarrow p_1(t_2) = 0$

$\Rightarrow t_2, p_1(x)$ का एक मूल (Root) है।

$L_3(p_1) = 0 \quad \Rightarrow p_1(t_3) = 0$

$\Rightarrow t_3, p_1(x)$ का एक मूल (Root) है।

क्योंकि, Deg $p_1(x) \leq 2$,

$p_1(x) = \alpha(x - t_2)\ (x - t_3)$, $\alpha =$ अचर (Constant)

$L_1\ (p_1) = 1 \quad \Rightarrow p_1(t_1) = 1$

$\Rightarrow \alpha(t_1 - t_2)\ (t_1 - t_3) = 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{(t_1 - t_2)\,(t_1 - t_3)}$$

$$\therefore \qquad p_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$

इसी प्रकार, $p_2(x) = \dfrac{(x-t_1)(x-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$, $p_3(x) = \dfrac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$.

उदाहरण 2.9: मान लीजिए कि V, $\mathbf{R}$ से $\mathbf{R}$ तक सभी बहुपद फलनों p की सदिश समष्टि है, जिसकी घात 2 से कम या बराबर है। V पर तीन रैखिक फलनों को परिभाषित करें।

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx,\ f_2(p) = \int_0^1 p(x)\,dx,$$

$$f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx$$

दिखाइए कि $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\hat{V}$ का आधार है। V के लिए आधार निर्धारित करें इस प्रकार कि, $\{f_1, f_2, f_3\}$ इसका दोहरा या द्वैत आधार हो।

हलः यह आसानी से देखा जा सकता है कि $f_1, f_2, f_3 \in \hat{V}$ है।

मान लीजिए कि $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0, \quad \alpha_i \in \mathbf{R}$

इसे $1, x, x^2$ पर प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{4}{2}\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{8}{3}\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{3} = 0$$

मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

तब $$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0, \text{(det) } A \neq 0$$

$$\therefore \qquad A^{-1}A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$\therefore$ $\{f_1, f_2, f_3\}$, LI का समुच्चय है।

चूंकि विमा $V = 3$, $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\hat{V}$ का एक आधार है।

मान लीजिए कि $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, V का आधार इस तरह है कि, $\{f_1, f_2, f_3\}$ इसका दोहरा या द्वैत आधार (Dual Basis) हो।

$$\therefore \qquad f_1(p_1) = 1, f_2(p_1) = 0, f_3(p_1) = 0$$

मान लीजिए कि $\qquad p_1(x) = c_o + c_1 x + c_2 x^2$

$$f_2(p_1) = 0 \Rightarrow \left. c_o x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 0$$

टिप्पणी

$$\Rightarrow\ c_o x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 = 0 \text{ जब } x = 2$$

$$f_3(p_1) = 0 \Rightarrow \left. c_o x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3}\right|_0^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow\ c_o x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 = 0 \text{ जब } x = -1$$

$$\therefore\quad c_o x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 = \alpha x(x-2)(x+1)$$

$$f_1(p_1) = 1 \Rightarrow c_o x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 = 1 \text{ जब } x = 1$$

$$\Rightarrow\ \alpha\,.\,1\,(-1)\,(2) = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$c_o x + \frac{c_1}{2}x^2 + \frac{c_2}{3}x^3 = -\frac{1}{2}x(x-2)(x+1)$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$\therefore\quad \frac{c_2}{3} = -\frac{1}{2},\ \frac{c_1}{2} = \frac{1}{2},\ c_o = 1$$

$$\therefore\quad c_o = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad p_1(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2$$

इसी तरह हम ज्ञात करते हैं, $p_2(x), p_3(x)$ को।

परिभाषा: मान लीजिए कि W V का उपसमुच्चय (Sub Set) है।

परिभाषित करें कि $A(W) = \{f \in \hat{V}\ 1\ f(w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

तब $A(W)$, $\hat{V}$ का उपसमष्टि है, क्योंकि $\alpha, \beta \in F$,

$$f, g \in A(W) \Rightarrow f(w) = 0 = g(w) \quad \text{सभी } w \in W \text{ के लिए।}$$

$$\Rightarrow \alpha f(w) + \beta g(w) = 0 \quad \text{सभी } w \in W \text{ के लिए।}$$

$$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)(w) = 0 \quad \text{सभी } w \in W \text{ के लिए।}$$

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in A(W)$$

$A(W)$, W को शून्यकारी *(Annihilator)* कहा जाता है।

उदाहरण 2.10: मान लीजिए कि U, W, V का उपसमुच्चय है। यदि $U \subseteq W$, दिखाएं कि $A(U) \subseteq A(W)$ है।

हल: मान लीजिए कि $f \in A(W)$ तब, $f(w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$$\Rightarrow \quad f(u) = 0 \quad \text{सभी } u \in U \text{ के लिए क्योंकि } U \subseteq W$$

$$\Rightarrow \quad f \in A(U) \text{ है।}$$

प्रमेय 2.11: मान लीजिए कि V एक सीमित या परिमित विमयी या आयामीय सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space) और W, V का एक उपसमष्टि है। तब विमा $A(W) =$ विमा $V -$ विमा W है।

प्रमाण: मान लीजिए कि $\{w_1, ..., w_m\}$, W का एक आधार है।

इसे V का आधार बनाने के लिए बढ़ाया जा सकता है।

मान लीजिए कि $\{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$, V का एक आधार है।

टिप्पणी

मान लीजिए कि $\{f_1, ..., f_m, f_{m+1}, ..., f_n\}$ का संबंधित या संगत दोहरा या द्वैत आधार है।

तब $$f_i(w_j) = 0 \quad i = m+1, ..., n$$
$$j = 1, ..., m$$

$\therefore$ $f_i \in A(W)$ सभी $i = m+1, ..., n$ के लिए।

हम दिखाएंगे कि $\{f_{m+1}, ..., f_n\}$, $A(W)$ का एक आधार है।

मान लीजिए कि $\alpha_{m+1} f_{m+1} + \; ... + \alpha_n f_n = 0$

$\therefore$ $(\alpha_{m+1} f_{m+1} + ... + \alpha_n f_n)(v_k) = 0$ सभी $k = m+1, .., n$ के लिए।

$\therefore$ $\alpha_k f_k (v_k) = 0$

$\therefore$ $\alpha_k = 0$ सभी $k = m+1, ..., n$ के लिए।

इसलिए, $\{f_{m+1}, ..., f_n\}$, LI का समुच्चय है।

मान लीजिए कि $f \in A(W)$ तब $f(w) = 0$ सभी $w \in W, f \in \hat{V}$ के लिए।

$$f \in \hat{V} \Rightarrow f = \beta_1 f_1 + ... + \beta_m f_m + ... + \beta_n f_n$$
$$\Rightarrow 0 = f(w_j) = \beta_j f_j(w_j) = \beta_j \quad \text{सभी } j = 1, ..., m \text{ के लिए।}$$
$$\Rightarrow f = \beta_{m+1} f_{m+1} \; ... + \beta_n f_n$$
$$\Rightarrow \{f_{m+1}, ..., f_n\}, A(W) \text{ को विस्तृति या विस्तारित करता है।}$$

$\therefore$ $\{f_{m+1}, ..., f_n\}$, $A(W)$ का एक आधार है।

इस प्रकार विमा $A(W) = n - m =$ विमा $V -$ विमा W है।

उपप्रमेय– 1: $\dfrac{\hat{V}}{A(W)} \cong \hat{W}$

प्रमाण: क्योंकि विमा $\dfrac{\hat{V}}{A(W)} =$ विमा $\hat{V} -$ विमा $A(W)$

$=$ विमा $V -$ विमा $V +$ विमा W

$=$ विमा $W =$ विमा $\hat{W}$

इसलिए $$\frac{\hat{V}}{A(W)} \cong \hat{W} \text{ है।}$$

उपप्रमेय– 2: यदि V एक परिमित विमयी या आयामीय सदिश समाष्टि है और W, V, का एक उपसमष्टि है, तब
$$A(A(W)) \cong W.$$

प्रमाण: $\theta : W \to A(A(W))$ को परिभाषित इस तरह करें कि,
$$\theta(w) = T_w$$

जहां $T_w : \hat{W} \to F$ इस प्रकार है कि,

$$T_w(f) \to f(w)$$

$T_w \in A(A(W))$ क्योंकि $T_w(f) = f(w) = 0$ सभी $f \in A\ (W)$ के लिए।

तब मानक नियमों के अनुसार, θ पूर्णतः स्पष्ट एकैकी 1-1 रैखिक रूपांतरण है।

टिप्पणी

$\therefore \qquad W \cong \theta(W) \subseteq A(A(W))$

क्योंकि, $\quad$ विमा $A(A(W))$ = विमा $\hat{V}$ – विमा $A(W)$

= विमा V – विमा $A(W)$

= विमा W

(प्रमेय 2.11 के अनुसार)।

और $\qquad$ विमा $\theta(W)$ = विमा W

$$A(A(W)) = \theta(W)$$

$\therefore$ θ, W से $A(A(W))$ तक आच्छादक (Onto) है।

इस प्रकार $\qquad W \cong A\ (A(W))$ है।

सुविधा के लिए, हम $A(A(W)) = W$ लिखेंगे।

उदाहरण के लिए, $V = \mathbf{R}^2$, $W = \{(x, 0) \mid x \in R\}$ पर विचार करें।

तब $A(W)$, f द्वारा विस्तृति या विस्तार $\hat{V}$ का एक उपसमष्टि है।

जहां, $\qquad f(x_1, x_2) = x_2$

वास्तव में, $\{f\}$, $A(W)$ का एक आधार है क्योंकि विमा $W = 1$ है।

तथा $A(A(W))$, T_w को विस्तृति या विस्तार करता है जहां $w = (1, 0)$ है।

चूंकि विमा $A(A(W)) = 1$, $\{T_w\}$, $A(A(W))$ का एक आधार है।

तब $\qquad \theta : W \to A(A(W))$ इस तरह कि,

$$\theta(w) = T_w$$

यह एक तुल्याकारिता (Isomorphism) है क्योंकि W के आधार को $A(A(W))$ के आधार पर मानचित्रित किया जाता है।

उदाहरण 2.11: मान लीजिए कि W_1, W_2, V का एक उपसमष्टि परिमित आयायीय सदिश समष्टि है, तो $A(W_1 + W_2)$ को ज्ञात कीजिए।

हल: $f \in A\ (W_1 + W_2)$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 0$ सभी $x \in W_1 + W_2$ के लिए।

$\Leftrightarrow f(w_1) = 0 = f(w_2)$ सभी $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ के लिए।

$\Leftrightarrow \qquad f \in A(W_1) \cap A(W_2)$

$\therefore \qquad A(W_1 + W_2) = A(W_1) \cap A(W_2).$

उदाहरण 2.12: मान लीजिए कि V एक परिमित आयामीय सदिश समष्टि है। मान लीजिए कि $V = W_1 \oplus W_2$, जहां W_1, W_2, V एक उपसमष्टि है। दर्शाएं कि $\hat{V} = A(W_1) \oplus A(W_2)$ है।

हल: $\qquad$ विमा V = विमा $(W_1 \oplus W_2)$

= विमा W_1 + विमा W_2

तथा विमा $(A(W_1) \oplus A(W_2))$

$$= \text{विमा } A(W_1) + \text{विमा } A(W_2)$$
$$= \text{विमा } V - \text{विमा } W_1 + \text{विमा } V - \text{विमा } W_2$$
$$= 2 \text{ विमा } V - (\text{विमा } W_1 + \text{विमा } W_2)$$

टिप्पणी

$$= 2 \text{ विमा } V - \text{विमा } V = \text{विमा } V = \text{विमा } \hat{V}$$

चूँकि $A(W_1) \oplus A(W_2)$ $\hat{V}$ का एक उपसमष्टि है।

$$\text{और विमा } \hat{V} = \text{विमा } (A(W_1) \oplus A(W_2)),$$
$$\hat{V} = A(W_1) \oplus A(W_2) \text{ है।}$$

प्रमेय 2.12: यदि समरूप (Homogeneous) रैखिक समीकरणों की प्रणाली (System of Linear Equations)

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$... \quad .. \quad ...$$
$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0,$$

जहां $a_{ij} \in F$ रैंक r का है, तो $F^{(n)}$ में $n - r$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हल होंगे।

प्रमाण: मान लीजिए कि S समीकरणों की दी गई प्रणाली के हलों का समुच्चय है।

$S = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in F^n \mid \sum a_{ij}\,\alpha_j = 0, \quad i = 1, 2, .., m\}$

तब S, $F^n = V$ का उपसमष्टि होगा

मान लीजिए कि $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, V का मानक आधार है।

और $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ इसका दोहरा आधार है।

मान लीजिए कि U, V का उपसमष्टि है जैसे कि ऊपर बताया गया है

$\theta : S \to A(U)$, को इस प्रकार परिभाषित करें कि,

$$\theta((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n$$

मान लीजिए कि, $\quad f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n$

तब $f(u_1) = (\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n)\,(a_{11}v_1 + ... + a_{1n}v_n)$
$$= \alpha_1 a_{11} + ... \,\alpha_n a_{1n}$$
$$= 0 \quad \text{क्योंकि } (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in S$$

इसी प्रकार $f(u_2) = ... = f(u_m) = 0$

तो $f \in A(U)$

यह आसानी से दर्शाया जा सकता है कि θ रैखिक रूपांतरण है।

यदि $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \text{Ker } \theta$ तब $\sum_{1}^{n} \alpha_i f_i = 0$ होगा।

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad \forall\, i$$
$$\Rightarrow \quad \text{Ker } \theta = \{0\} \text{ या } \theta \text{ एकैकी 1–1 है।}$$

अब मान लीजिए कि $f \in A(U) \subseteq \hat{V}$

और मान लीजिए कि $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n$

तब $\quad 0 = f(u_1) = \alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_n a_{1n}$

$$... \quad ... \quad ...$$

$$0 = f(u_m) = \alpha_1 a_{m1} + ... + \alpha_n a_{mn}$$

$\therefore (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in S$

और $\theta((\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)) = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n = f$

या θ आच्छादक (Onto) है।

इस प्रकार $S \cong A(U)$

$\Rightarrow$ विमा S = विमा $A(U)$ = विमा V – विमा U

$= n - r$

इसलिए $n - r$ समीकरणों की दी गई प्रणाली के रैखिक स्वतंत्र हल हैं।

उपप्रमेय: यदि $n > m$, अर्थात, यदि अज्ञातों की संख्या समीकरणों की संख्या से अधिक है, तो समीकरणों की प्रणाली में एक शून्येतर (गैर–शून्य) हल भी होगा।

प्रमाण: चूँकि U, m सदिशों द्वारा उत्पन्न होता है, r = विमा $U \leq m < n \Rightarrow n - r > 0 \Rightarrow$

समीकरणों की प्रणाली में एक रैखिक स्वतंत्र हल होता है, जो शून्येतर (गैर–शून्य) होता है (क्योंकि शून्य सदिश रैखिक रूप से स्वतंत्र नहीं होता है)।

उदाहरण 2.13: माना कि m और n धनात्मक पूर्णांक है। माना कि $f_1, ..., f_m$, $F^{(n)}$ पर रैखिक फलन है। $F^{(n)}$ में α के लिए $T(\alpha) = (f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha))$ को परिभाषित करें।

दर्शाएँ कि T, $F^{(n)}$ से $F^{(m)}$ में रैखिक रूपांतरण है। फिर दर्शाएँ कि $F^{(n)}$ से $F^{(m)}$ में प्रत्येक रैखिक रूपांतरण है, किसी भी $f_1, ..., f_m$ के लिए उपरोक्त प्रारूप के अनुसार।

हल: चूंकि $f_1, ..., f_m$ रैखिक रूपांतरण हैं, इसलिए T भी होगा। मान लीजिए कि $\{e_1, ..., e_n\}$ $F^{(n)}$ का मानक आधार है।

तब $\quad T(e_i) \in F^{(m)} \quad \forall\, i = 1, ..., n.$

तो, $\quad T(e_i) = (\beta_{i1}, ..., \beta_{im}) \quad \forall\, i = 1, ..., n.$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad T(\alpha) &= T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n),\ \alpha = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \\
&= \alpha_1 T(e_1) + ... + \alpha_n T(e_n) \\
&= \alpha_1(\beta_{11}, ..., \beta_{1m}) + ... + \alpha_n(\beta_{n1}, ..., \beta_{nm}) \\
&= (\alpha_1\beta_{11} + ... + \alpha_n\beta_{n1}, ..., \alpha_1\beta_{1m} + ... + \alpha_n\beta_{nm})
\end{aligned}$$

प्रत्येक (i) $(1 \leq i \leq m)$ के लिए, $\exists$ एक रैखिक रूपांतरण है।

$f_i : F^{(n)} \to F$ इस प्रकार है कि,

$$f_i(e_1) = \beta_{1i}, ..., f_i(e_n) = \beta_{ni}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad f_1(\alpha) &= f_1(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) \\
&= \alpha_1\beta_{11} + ... + \alpha_n\beta_{n1}
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
f_m(\alpha) &= f_m(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) \\
&= \alpha_1\beta_{1m} + ... + \alpha_n\beta_{nm}
\end{aligned}$$

इसलिए, $T(\alpha) = (f_1(\alpha), ..., f_m(\alpha))$ है।

टिप्पणी

उदाहरण 2.14: मान लीजिए कि F सम्मिश्र संख्याओं (Complex Numbers) का एक उपक्षेत्र (Subfield) है। हम निम्न फलन से $F^{(n)}$ $(n \geq 2)$ पर n रैखिक फलन को परिभाषित करते हैं,

$$f_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} (k-j)x_j, \ 1 \leq k \leq m.$$

$f_1, ..., f_n$ द्वारा शून्यकारी (Annihilated) उपसमष्टि का आयाम क्या होगा?

हलः अब

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= ox_1 - x_2 - 2x_3 ... - (n-1)\,x_n \\ f_2(x_1, ..., x_n) &= x_1 + ox_2 - x_3 ... - (n-2)\,x_n \\ f_3(x_1, ..., x_n) &= 2x_1 + x_2 + ox_3 ... - (n-3)\,x_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$f_n(x_1, ..., x_n) = (n-1)\,x_1 + (n-2)\,x_2 + (n-3)\,x_3 + ... + 1\,x_{n-1} + ox_n$$

मान लीजिए कि $W\,F^{(n)}$ का उपसमष्टि शून्यकारी (Annihilated) है, $f_1, ..., f_n$ के द्वारा तब $(x_1, ..., x_n) \in W$

$$\Rightarrow f_k(x_1, ..., x_n) = 0 \qquad \forall\ k = 1, 2, ..., n.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & ... & ... & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & ... & ... & -(n-2) \\ 2 & 1 & 0 & ... & ... & -(n-3) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & n-2 & n-3 & ... & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

अर्थात् $AX = 0$, जहां A बाएं तरफ का आव्यूह है और $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ है।

यह आसानी से देखा जा सकता है कि $A = 2$ है।

$\therefore$ W में रैखिक स्वतंत्र हलों (Linear Independent Solutions) की संख्या $n-2$ है।

$\therefore$ विमा $W = n - 2.$

अपनी प्रगति जांचिए

1. एक रैखिक रूपांतरण $T: V \to V$ को V पर एक रैखिक संकारक कब कहा जाता है?
2. रैखिक रूपांतरण गैर–विलक्षण कब होगा?
3. क्रमिक आधार को महत्वपूर्ण क्यों माना जाता है?
4. मानचित्र $T: V \to W$ प्रतिलोमीय कब होता है?
5. क्या होता है जब अज्ञात की संख्या समीकरणों की संख्या से अधिक होती है?

2.5 रैखिक रूपांतरण के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश

टिप्पणी

इस खंड में हम एक परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर रैखिक संकारकों (Linear Operators) T का अध्ययन करेंगे। मुख्य विचार यह है कि V का एक क्रमिक आधार β को इस प्रकार ज्ञात करना है कि आव्यूह T, β के सापेक्ष में एक विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) हो। हम इसके माध्यम से T के बारे में बहुत कुछ ज्ञात कर पाएंगे। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या हम सभी रैखिक संकारकों का क्रमित आधार ज्ञात कर सकते हैं? 'यदि नहीं तो किस संकारक (Operator) के लिए ऐसा आधार मौजूद होगा ? हम इसका उत्तर इस खंड में देने का प्रयास करेंगे। यदि $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ ऐसा है कि $[T]_\beta =$ विकर्ण $(c_1, ..., c_n)$, तो $T(v_i) = c_i v_i, i = 1, ..., n$ होगा। तब यह हमें T के आइगेन मान (Eigen Values) c_i और आइगेन सदिश (Eigen Vectors) v_i की अवधारणा की ओर ले जाएगा।

परिभाषा: V, F पर एक सदिश समष्टि है। मान लीजिए कि T, V पर एक रैखिक रूपांतरण हैं। यदि $\exists\, 0 \neq v \in V$ इस प्रकार है कि, $T(v) = cv$ किसी भी $c \in F$ के लिए होगा, तो V को आइगेन सदिश या T को अभिलाक्षणिक सदिश कहा जाता है और c को T का आइगेन मान या अभिलाक्षणिक मान या अभिलाक्षणिक मूल (Eigen Value या Characteristic Value या Characteristic Root) भी कहा जाता है।

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें:

(i) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ रेखीय संकारकों को $T(x, y) = (x, 0)$ द्वारा परिभाषित किया गया है। यदि $c \in \mathbf{R}$, T का आइगेन मान है, तो $\mathbf{R}^2$ में $\exists\, (x, y) \neq (0, 0)$ इस प्रकार होगा कि $T(x, y) = c(x, y)$

$$\therefore \quad (x, 0) = c(x, y) = (cx, cy)$$
$$\Rightarrow \quad cx = x,\ cy = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(c-1) = 0,\ cy = 0$$

अब $\quad x(c-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ या $c = 1$

यदि $x = 0$, तब $y \neq 0$. $\therefore cy = 0 \Rightarrow c = 0$

यदि $c = 0$, तब $(0, 1)$, T का आइगेन मान (Eigen Value) होगा क्योंकि,

$T(0, 1) = (0, 0) = c(0, 1)$ है।

$\therefore$ 0, T का आइगेन मान (Eigen Value) है। यदि $c \neq 0$, तब $y = 0$ और $c = 1$ है।

$\therefore T(1, 0) = (1, 0) = 1\,(1, 0) \Rightarrow (1, 0)$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) और 1, T का आइगेन मान (Eigen Value) होगा।

(ii) मान कीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ रेखीय संकारकों को $T(x, y) = (x + y, x + y)$ द्वारा परिभाषित किया गया है तो $T(1, -1) = (0, 0) = 0(1, -1) \Rightarrow 0$, T का आइगेन मान (Eigen Value) होगा T और $(1, -1)$ की आइगेन मान (Eigen Value) है।

इसी प्रकार $T(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1) \Rightarrow 2$ का आइगेन मान (Eigen Value) है और एकैकी $(1, 1)$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) है।

उदाहरण 2.15: मान लीजिए कि v और w, T के दो अलग–अलग आइगेन मानो (Eigan Values) (V पर एक रैखिक संकारकों) के अनुरूप T के आइगेन सदिश है। दिखाएँ कि $v + w$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) नहीं हो सकता है।

टिप्पणी

हलः मान लीजिए कि $T(v) = \alpha v$

$$T(w) = \beta w, \quad \alpha \neq \beta$$

हम पहले दिखाएंगे कि $\{v, w\}$ एक रैखिक स्वतंत्र समुच्चय है।

मान लीजिए कि $av + bw = 0$

तब $T(av + bw) = 0$

$\Rightarrow \quad aT(v) + bT(w) = 0$

$\Rightarrow \quad a\alpha\, v + b\beta\, w = 0$

$\Rightarrow \quad -b\alpha\, w + b\beta\, w = 0$

$\Rightarrow \quad (b\beta - b\alpha)w = 0$

$\Rightarrow \quad b\beta - b\alpha = 0$, क्योंकि $w \neq 0$

$\Rightarrow \quad b(\beta - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \quad b = 0$, क्योंकि $\beta - \alpha \neq 0$

$\Rightarrow \quad a = 0$

इस तरह, $\{v, w\}$ एक रैखिक स्वतंत्र समुच्चय है।

मान लीजिए कि $v + w$, T का आइगेन सदिश (Eigan Vector) है।

मान लीजिए कि $T(v + w) = c(v + w)$

तब $T(v) + T(w) = cv + cw$

$\Rightarrow \alpha v + \beta w = cv + cw$

$\Rightarrow (\alpha - c)v + (\beta - c)w = 0$

$\Rightarrow \alpha - c = 0 = \beta - c$ क्योंकि $\{v, w\}$ एक रैखिक स्वतंत्र समुच्चय है।

$\Rightarrow \alpha = \beta$ एक विरोधाभास है।

इसलिए $v + w$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) नहीं हो सकता है।

उदाहरण 2.16: मान लीजिए कि V पर FDVS का प्रत्येक गैर–शून्य सदिश रैखिक रूपांतरण T का एक आइगेन सदिश (Eigen Vector) है। दिखाएँ कि T, I का अदिश गुणन है।

हलः मान लीजिए कि $0 \neq v \in V$ है।

परिकल्पना या अवधारणा द्वारा $T(v) = cv$ है।

मान लीजिए कि $w \in \langle v \rangle$

तब $w = av$

$\Rightarrow \quad T(w) = aT(v) = acv = c\,w$

मान लीजिए कि $w \notin \langle v \rangle$

तब $w \neq 0$

और $T(w) = dw$. माना कि $d \neq c$

उदाहरण 2.15 के द्वारा $v + w$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) नहीं हो सकता है।

इसलिए, परिकल्पना या अवधारणा द्वारा $v + w$, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) है। (क्योंकि $w \notin \langle v \rangle \Rightarrow v + w \neq 0$) है।

$$\therefore \quad d = c$$

$$\therefore \quad T(w) = cw \quad \forall\ w \in V$$

$$\therefore \quad T = cI.$$

उदाहरण 2.17: यदि T, V पर एक रेखीय संकारक है और α, T का आइगेन मान (Eigen Value) है, तो दिखाएँ कि $f(\alpha), f(T)$ का आइगेन मान होगा यदि $f(x) \in F[x]$ है।

हल: मान लीजिए कि $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$

तब

$$\begin{aligned} f(T) &= a_n T^n + ... + a_1 T + a_0 I \\ \Rightarrow f(T)(v) &= a_n T^n (v) + ... + a_1 T(v) + a_0 v \\ &= a_n \alpha^n v + ... + a_1 \alpha v + a_0 v \\ &= (a_n \alpha^n + ... + a_1 \alpha + a_0) v \\ &= f(\alpha) v \end{aligned}$$

जहां $T(v) = \alpha v$, और v, T के आइगेन मान के सापेक्ष में T का आइगेन सदिश है।

परिभाषा: मान लीजिए कि c T का आइगेन मान है।

मान लीजिए कि $W_c = \{v \in V \mid T(v) = cv\}$

तब $0 \in W_c$ इसलिए $T(0) = 0 = c, 0 \Rightarrow W_c \neq \varphi$

मान लीजिए कि $\alpha, \beta \in F, v_1, v_2 \in V$. तब

$$\begin{aligned} T(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \\ &= \alpha c v_1 + \beta c v_2 \\ &= c(\alpha v_1 + \beta v_2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \alpha v_1 + \beta v_2 \in W_c$$

$\therefore$ W_c, V का उपसमष्टि है।

W_c को T का, आइगेन विस्तार (Eigan Space) आइगेन मान कहते हैं, जो कि T के आइगेन मान c से सम्बद्ध है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें : मान लीजिए कि

$T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ को $T(x, y) = (x, 0)$ द्वारा परिभाषित किया गया है।

जैसा कि पहले देखा गया है, की 1 T का आइगेन मान है। आइगेन मान 1 के सापेक्ष T के आइगेन समष्टि (Eigen Space) को निम्नलिखित तरीके से लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y) \mid T(x, y) = (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, 0) = (x, y)\} \\ &= \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

अर्थात, x-अक्ष।

नोट: आइगेन समष्टि (Eigen Space)

$$\begin{aligned} W_c &= \{v \in V \mid T(v) = cv\} \\ &= \{v \in V \mid (T - cI)v = 0\} \\ &= \text{Ker}\,(T - cI) \end{aligned}$$

अर्थात, W_c, $T - cI$ का शून्य–समष्टि (Null Space) है।

टिप्पणी

प्रमेय 2.13 : मान लीजिए कि F पर एक सीमित या परिमित विमीय या आयामीय सदिश समष्टि (Finite Dimensional Vector Space या FDVS) है, तो V पर रैखिक संकारक T है। तब $c \in F$, T का आइगेन मान होगा यदि और केवल यदि $T - cI$ विलक्षण है (प्रतिलोमीय नहीं) होगा।

प्रमाण: मान लीजिए कि c, T का आइगेन मान है

तब $\exists\, 0 \neq v \in V$ इस प्रकार कि $T(v) = cv$

$\therefore$ $(T - cI)v = 0$

$\Rightarrow$ $0 \neq v \in \text{Ker}(T - cI)$

$\Rightarrow$ $T - cI$ एकैकी (1–1) नहीं है।

$\Rightarrow$ $T - cI$ विलक्षण (Singular) है।

विलोमतः, $T - cI$ विलक्षण (Singular) है $\Rightarrow T - cI$ एकैकी (One–One या 1–1) नहीं है (क्योंकि विमा V = सीमित (Finite) $\Rightarrow T - cI$ एकैकी (1–1) होगा यदि और केवल यदि $T - cI$ आच्छादक (Onto) है)।

$\Rightarrow$ $\exists\, 0 \neq v \in \text{Ker}\,(T - cI)$

$\Rightarrow$ $(T - cI)v = 0,\ v \neq 0 \Rightarrow T(v) = cv,\ v \neq 0$

$\Rightarrow$ c, T का आइगेन मान है।

उपप्रमेय: मान लीजिए कि V एक FDVS है और T, V पर रैखिक संकारक (Linear Operator) है तब T प्रतिलोमीय (Invertible) होगा, यदि और केवल यदि 0, T का आइगेन मान नहीं होगा।

उदाहरण 2.18: मान लीजिए कि विमा $V = n$ है। मान लीजिए कि V पर T एक रैखिक संकारक है। मान लीजिए कि $v_1, ..., v_k$ T पर आइगेन सदिश है, T पर $c_1, ..., c_k$ संगत अलग–अलग आइगेन मान है, तो दिखाएं कि $v_1, ..., v_k$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

हल: मान लीजिए कि $T(v_i) = c_i v_i$

तब $T^r(v_i) = c_i^r\, v_i\ \forall\ r \geq 1$

लें मान $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k\, v_k = 0$

यहाँ $T, T^2, ..., T^{k-1}$ का प्रयोग करने पर।

इस प्रकार, $\alpha_1 c_1 v_1 + ... + \alpha_k\, c_k\, v_k = 0$

....

....

$\alpha_1 c_1^{k-1} v_1 + ... + \alpha_k c_k^{k-1} v_k = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{k-1} & c_2^{k-1} & \cdots & c_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \vdots \\ \alpha_k v_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \vdots \\ \alpha_k v_k \end{bmatrix} = 0, \text{ चूंकि } c_1, ..., c_k \text{ अलग है।}$$

$\Rightarrow \alpha_i v_i = 0 \ \forall i$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

$\therefore$ $v_1, ..., v_k$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomials)

मान लीजिए कि एक क्षेत्र F पर A एक $n \times n$ आव्यूह है। $c \in F$ को A का आइगेन मान कहा जाता है यदि $A - cI$ विलक्षण (Singular) (प्रतिलोमीय नहीं) है, अर्थात det $(A - cI) = 0$

तब, $\det (A - cI) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det (cI - A) = 0.$

मान लीजिए कि $\quad f(x) = \det (xI - A)$

तब c, A का आइगेन मान होगा यदि और केवल यदि $f(c) = 0$ है। इस कारण से $f(x)$ को A का अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial) कहा जाता है। स्पष्ट रूप से $\deg f(x) = n$ और $f(x)$ में x^n की उच्चतम घात गुणांक 1 होगा अर्थात् $f(x)$ एकगुणांकी बहुपद (Monic Polynomial) है।

प्रमेय 2.14: एक ही तरह के आव्यूह में समान अभिलाक्षणिक बहुपद होंगे।

प्रमाण: माना कि A, B एक ही प्रकार के आव्यूह हैं। तब, $\exists$ गैर–अभिलाक्षणिक आव्यूह P इस प्रकार है–

तो $\exists$ गैर–विलक्षण आव्यूह इस प्रकार है,

$$B = P^{-1}AP$$

$\therefore$ B का अभिलाक्षणिक बहुपद $= \det (xI - B)$

$= \det (xI - P^{-1}AP)$

$= \det (P^{-1} (xI - A)P)$

$= \det (xI - A) = A$ का अभिलाक्षणिक बहुपद है।

हालांकि, उपर्युक्त प्रमेय की विलोमतः व्याख्या सही नहीं है। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें,

मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

तब A का अभिलाक्षणिक बहुपद $|xI - A| = (x - 1)^2$ होगा है।

और B का $|xI - B| = (x - 1)^2$ होगा।

लेकिन A और B समान आव्यूह नहीं है क्योंकि $A = P^{-1}BP \Rightarrow A = I$ है।

एक रैखिक संकारक के अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial of a Linear Operator)

यदि V के β, β' दो क्रमबद्ध आधार इस प्रकार हैं कि $[T]_\beta = A, [T]_{\beta'} = B$, तब $B = P^{-1}AP$ किसी भी आव्यूह P के लिए।

$c \in F$ परिमित आयाम सदिश विस्तार V पर रैखिक संकारक T का आइगेन मान है।

टिप्पणी

$\Leftrightarrow$ $T - cI$ विलक्षण है मानक नियमों के अनुसार।
$\Leftrightarrow$ $\det [T - cI]_\beta = 0$
$\Leftrightarrow$ $\det \{[T]_\beta - cI\} = 0$
$\Leftrightarrow$ $\det (A - cI) = 0$
$\Leftrightarrow$ c, A का आइगेन मान है

प्रमेय 2.14 के द्वारा, A और B में एक ही बहुपद है। तो c, आइगेन मान है $A \Leftrightarrow c, B$ का आइगेन मान है।

इसलिए $c \in F, T$ का एक आइगेन मान तभी होगा यदि और केवल यदि c, V के किसी भी आधार के सापेक्ष में T की संगत आव्यूह का एक आइगेन मान होगा।

यदि $[T]_\beta = A$, हम कहते हैं कि T का अभिलाक्षणिक बहुपद $\det xI - A$, है, जो कि प्रमेय 2.14 के द्वारा V के आधार पर निर्भर नहीं है।

टिप्पणियाँ:

1. यदि $T : V \to V$ का एक रैखिक रूपांतरण इस तरह है कि विमा $V = n$, तो $[T]_\beta, n \times n$ आव्यूह होगी। मान लीजिए कि $A = [T]_\beta$ तब $\det (A - xI)$ घात n का बहुपद होगा। तो A (या T) के n से अधिक आइगेन मान (Eigen Values) नहीं हो सकते हैं।
2. T का कोई आइगेन मान नहीं हो सकता है।
3. मान लीजिए कि $A = (a_{ij})$. तब
   $\det (xI - A) = x^n - (a_{11} + a_{12} + ... + a_{nn})x^{n-1} + ...$
   $\Rightarrow A$ (या T) के आइगेन मान का योग A का अनुरेखण (Trace) होता है।
4. $x = 0$ को $\det (xI - A) = x^n - (a_{11} + ... + a_{nn})\ x^{n-1} ... +$ अचर पद (Constant Term) में रखें तब $\det (-A) =$ अचर पद (Constant Term) मिलेगा।
   $\Rightarrow$ $(-1)^n \det A = A$ या T के आइगेन मान का अचर पद होता है।
5. यदि A, सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र C पर आव्यूह है, तो बीजगणित के मूलभूत प्रमेय द्वारा, A के अभिलाक्षणिक बहुपद में C के मूल होने चाहिए। दूसरे शब्दों में A (या T) का C में कम से कम एक आइगेन मान होता है।
6. मान लीजिए कि F पर $c \in F$, $n \times n$ आव्यूह A का आइगेन मान है। तब $\det (cI - A) = 0$

   तो, $cI - A$ का स्तम्भ रैखिक रूप से F पर निर्भर हैं।
   $\therefore \exists\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ इस प्रकार है कि $\alpha_1 c_1 + ... + \alpha_n c_n = 0, \alpha_i \neq 0$ किसी भी i, के लिए, जहां $c_1, ..., c_n$, $cI - A$ का स्तम्भ हैं।

   इस प्रकार, $[c_1, c_2, ..., c_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$

$$\therefore \qquad (cI - A)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = 0$$

टिप्पणी

इसलिए, $$A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

इस प्रकार, $AX = cX$, जहां $X = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} \neq 0$

X को A का आइगेन मान कहा जाता है।

विलोमतः, मान लीजिए कि $AX = cX, X \neq 0, F$ पर $n \times 1$ आव्यूह है।

$\therefore\ (cI - A)X = 0$

तो, (det) $(cI - A) = 0$ क्योंकि $X \neq 0$ है।

इस प्रकार c, A का आइगेन मान है।

7. T के दिए गए आइगेन सदिश से, अब हम आइगेन सदिश $A = [T]_\beta$, को और उसके विलोम को निर्धारित करते हैं।

मान लीजिए कि $\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \beta$, V. का क्रमिक आधार है।

मान लीजिए कि $A = (a_{ij}) = [T]_\beta$ है।

अब $0 \neq v \in V$, T का आइगेन मान है

$\Leftrightarrow\quad T(v) = cv$, कुछ $c \in F$ के लिए।

$$\Leftrightarrow\quad T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = c(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n),\ \alpha_i \in F$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = c\alpha_1 v_1 + ... + c\alpha_n v_n$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha_1(a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n) + ... + \alpha_n(a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n) = c\alpha_1 v_1 + ... + c\alpha_n v_n$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \alpha_1 a_{11} + ... + \alpha_n a_{1n} &= c\alpha_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_1 a_{n1} + ... + \alpha_n a_{nn} &= c\alpha_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow\quad AX = cX$, जहां $X = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} \neq 0$ है।

इसलिए यदि, $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, T का आइगेन मान होगा,

तो $X = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}$

यह A का आइगेन मान और विलोमतः होगा।

टिप्पणी

8. मान लीजिए कि F पर c, $n \times n$ आव्यूह A का आइगेन मान है।
तब F पर $W'_c = \{X \mid X = n \times 1$ आव्यूह, $AX = cX\}$, F पर $n \times 1$ आव्यूह का उपसमष्टि होगा। W'_c को A के आइगेन मान c के सापेक्ष में A का आइगेन समष्टि (Eigen Space) कहा जाता है।
मान लीजिए कि $A = [T]_\beta$, जहां T, V पर एक रेखीय संकारक है, और β, V का क्रमिक आधार है। हम दर्शाते हैं कि विमा $W'_c = W_c$, विमा W_c जहां के आइगेन मान c के सापेक्ष में T का आइगेन समष्टि (Eigen Space) है।
$\theta : W_c \to W'_c$, c को इस तरह परिभाषित करें कि,

$$\theta(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ जहां } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

तब θ तुल्याकारिता (Isomorphism) है, सिद्ध करें।
इसलिए, विमा W_c = विमा W'_c

9. मान लीजिए कि $[T]_\beta = A =$ विकर्ण आव्यूह है।

$$= \begin{bmatrix} c_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & c_n \end{bmatrix}$$

मान लीजिए कि रैंक या सीमा (Rank) $A = r$ तो, A के विकर्ण में r प्रविष्टियां गैर–शून्य हैं और अन्य सभी प्रविष्टियां (Entries) शून्य हैं। मान लीजिए कि पहली r प्रविष्टियां $c_1, \dots, c_r$ गैर–शून्य हैं और $c_{r+1} = \dots = c_n = 0$ है।
मान लीजिए कि $\beta = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\} = V$ का क्रमिक आधार है।
तब, $T(v_i) = c_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, r$. अब $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\} \subseteq$ रेंज या सीमा (Range) T.
मान लीजिए कि $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_r T(v_r) = 0$, $\alpha_i \in F$ है।
तब $\alpha_1 c_1 v_1 + \dots + \alpha_r c_r v_r = 0$
$\Rightarrow \quad \alpha_i c_i = 0 \ \forall \ i = 1, 2, \dots, r$
$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \ \forall \ i = 1, 2, \dots, r$ क्योंकि $c_i \neq 0$
$\therefore \quad S = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ एक LI समुच्चय है।
मान लीजिए कि $T(v) \in$ रेंज या सीमा (Range) T,
तब $v \in V \Rightarrow v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r + \beta_{r+1} v_{r+1} + \dots + \beta_n v_n$
$\Rightarrow T(v) = \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_r T(v_r)$
$\Rightarrow S$ रेंज या सीमा (Range) T की विस्तृति या विस्तार करती है।
$\Rightarrow S =$ रेंज या सीमा (Range) T का आधार है।
$\Rightarrow$ विमा रेंज या सीमा (Range) $T = r$
$\Rightarrow$ रैंक या सीमा (Rank) $T = r$
इसलिए, रैंक या सीमा (Rank) A = रैंक या सीमा (Rank) T, जहां $[T]_\beta = A$ = विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix).

रैंक या सीमा (Rank) A = रैंक या सीमा (Rank) T, A विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

उदाहरण 2.19: मान लीजिए कि $A = (a_{ij})_{n \times n}$ है, इस प्रकार की

(*i*) $\sum_j a_{ij} = 1$ सभी i के लिए।

(*ii*) $\sum_i a_{ij} = 1$ सभी j के लिए।

सिद्ध कीजिए कि A का अभिलाक्षणिक मान 1 है।

हल: (*i*) मान लीजिए कि विमा $V = n$.

यदि T, V एक रैखिक रूपांतरण इस तरह है कि,

$[T]_\beta = A$, जहां $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, V का क्रमिक आधार है। तब,

$$T(v_1) = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n$$

$$..........$$

$$T(v_n) = a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n$$

तब $\quad T(v_1 + v_2 + ... + v_n) = v_1 + v_2 + ... + v_n$

क्योंकि $\quad \sum_j a_{ij} = 1$ सभी i के लिए।

इसलिए A का अभिलाक्षणिक मान (Characteristic Value) 1 है।

(*ii*) मान लीजिए कि A', A के स्थानांतरण (Transpose) को निरूपित करता है। (*i*) के द्वारा A' का अभिलाक्षणिक मान 1 है।

इस प्रकार $\quad \det (I - A') = 0$

$\Rightarrow \det (I - A')' = 0$

$\Rightarrow \det (I - A) = 0$

$\Rightarrow$ इसलिए A का अभिलाक्षणिक मान 1 है।

उदाहरण 2.20: सिद्ध करें कि F पर 2×2 आव्यूह C को ज्ञात करना असंभव है, अगर

$$C \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in F \text{ है।}$$

हल: माना कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

मान लीजिए कि F पर 2×2 आव्यूह C मौजूद है तब,

$$CAC^{-1} = B$$

चूँकि 1, A की एकमात्र आइगेन मान है, 1 भी B की एकमात्र आइगेन मान है क्योंकि A और B के अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Polynomial) समान हैं। तो, $\alpha = \beta = 1$. $\therefore B = I$

$\Rightarrow CAC^{-1} = I \Rightarrow A = I$, एक विरोधाभास है।

तो, F पर कोई 2×2, आव्यूह (Matrix) C मौजूद नहीं है जब तक $CAC^{-1} = B$ है।

टिप्पणी

उदाहरण 2.21: दिखाएँ कि $n \times n$ त्रिकोणीय आव्यूह (Triangular Matrix) A के आइगेन मान, A के विकर्ण अवयव होते हैं।

हलः मान लीजिए कि,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} = 0 \text{ सभी } i > j \text{ के लिए।}$$

A का अभिलाक्षणिक बहुपद,

$$(x - a_{11}) \ldots (x - a_{nn})$$

$\therefore a_{11}, \ldots, a_{nn}, A$ का आइगेन मान है।

उदाहरण 2.22: मान लीजिए कि A वास्तविक $n \times n$ आव्यूह है। मान लीजिए कि λ, A का वास्तविक आइगेन मान है। दिखाएँ कि वहाँ A का आइगेन मान λ के सापेक्ष A का आइगेन सदिश इस तरह मौजूद होगा कि X भी वास्तविक होगा।

हलः मान लीजिए कि $Ay = \lambda y, y \neq 0$ है। तब y आइगेन मान के सापेक्ष A का आइगेन सदिश होगा। यदि y वास्तविक है, तो परिणाम मिल जाएगा। मान लीजिए कि y वास्तविक नहीं है। मान लीजिए कि $y = u + iv$ जहां u और v वास्तविक स्तम्भ आव्यूह से स्तम्भ आव्यूह (Column Matrices) हैं।

तब $\quad Ay = \lambda y$

$$\Rightarrow A(u + iv) = \lambda(u + iv)$$

$$\Rightarrow Au + iAv = \lambda u + i\lambda v$$

$$\Rightarrow Au = \lambda u, Av = \lambda v$$

क्योंकि $y \neq 0$, तो $u \neq 0$ या $v \neq 0$ है। अगर $u \neq 0$, तब u, A के वास्तविक आइगेन सदिश है और $v \neq 0 \Rightarrow v$, A का आइगेन मान λ के सापेक्ष A का आइगेन सदिश है।

उदाहरण 2.23: मान लीजिए कि A एक $n \times n$ आव्यूह है,

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & k \end{bmatrix}$$

(अर्थात A के विकर्ण प्रविष्टियाँ k हैं और विकर्ण के ऊपर और नीचे की प्रविष्टियाँ 1 और बाकी जगह शून्य हैं)।

दर्शाये कि $X_i (i = 1, \ldots, n)$ जहां $X_i s$ स्तम्भ आव्यूह में jवां प्रविष्टि $\left\{sin \frac{ij\pi}{n+1}\right\}$ के आइगेन सदिश हैं। संबंधित A के आइगेन मान को ज्ञात कीजिए।

हलः अब

$$AX_i = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & k & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\frac{i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{3i\pi}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sin\frac{ni\pi}{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sin\frac{i\pi}{n+1} + \sin\frac{2i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{i\pi}{n+1} + k\sin\frac{2i\pi}{n+1} + \sin\frac{3i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2i\pi}{n+1} + k\sin\frac{3i\pi}{n+1} + \sin\frac{4i\pi}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sin\frac{(n-1)i\pi}{n+1} + k\sin\frac{ni\pi}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k\sin\frac{i\pi}{n+1} + 2\sin\frac{i\pi}{n+1}\cos\frac{i\pi}{n+1} \\ k\sin\frac{2i\pi}{n+1} + 2\sin\frac{2i\pi}{n+1}\cos\frac{i\pi}{n+1} \\ k\sin\frac{3i\pi}{n+1} + 2\sin\frac{3i\pi}{n+1}\cos\frac{i\pi}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k\sin\frac{ni\pi}{n+1} + 2\sin\frac{ni\pi}{n+1}\cos\frac{i\pi}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)\sin\frac{i\pi}{n+1} \\ \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)\sin\frac{2i\pi}{n+1} \\ \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)\sin\frac{3\pi}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)\sin\frac{n\pi}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right) \begin{bmatrix} \sin\frac{i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2i\pi}{n+1} \\ \sin\frac{3i\pi}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sin\frac{ni\pi}{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \left(k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}\right) X_i$$

$\therefore X_i$ यहाँ A के आइगेन सदिश (Eigen Vector) सभी $i = 1, ..., n$ के लिए और $k + 2\cos\frac{i\pi}{n+1}$ यहाँ A के संगत आइगेन मान (Corresponding Eigen Value) है।

टिप्पणी

उदाहरण 2.24: मान लीजिए कि V सभी वास्तविक मानों का सतत या निरंतर फलनों का समष्टि है।

$T : V \to V$ $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ के द्वारा को परिभाषित करें।

दर्शायें कि T का कोई आइगेन मान नहीं है।

हलः मान लीजिए कि c, T का आइगेन मान है।

$\therefore \quad \exists\, 0 \neq f \in V$ इस प्रकार है कि,

$$Tf = cf$$

$$\therefore \quad Tf(x) = cf(x)$$

$$\therefore \quad \int_0^x f(t)\, dt = cf(x)$$

$$f(x) = cf'(x)$$

$$y = c\frac{dy}{dx}$$

$c \neq 0$ (क्योंकि $c = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$)

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \log y = \frac{x}{c} + \log a \Rightarrow y = ae^{x/c}$$

$$\Rightarrow \quad y(0) = a$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = y = f(0)\, e^{x/c}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x f(0)e^{t/c} dt = \int_0^x f(t)\, dt = cf(x) = cf(0)e^{x/c}$$

$f(0) \neq 0$ (इसलिए $f(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$)

$$\therefore \quad f(0)\left[ce^{t/c}\right]_0^x = cf(0)\, e^{x/c}$$

$$\therefore \quad c(e^{x/c} - 1) = ce^{x/c}$$

$$\Rightarrow \quad e^{x/c} - 1 = e^{x/c}$$

$\Rightarrow \quad 1 = 0$, एक विरोधाभास है।

$\therefore \quad T$ का कोई आइगेन मान नहीं है।

नोटः उपरोक्त उदाहरण में V पर D का अवकल संकारक (Differential Operator) है।

मान लीजिए कि c कोई भी वास्तविक संख्या है।

परिभाषित करें $\quad f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, को इस तरह है कि,

$$f(x) = e^{cx}$$

तब $f \in V$ और $Df = cf$ है।

तो, प्रत्येक वास्तविक संख्या D का आइगेन मान होगा।

उपर्युक्त उदाहरण में, रैखिक रूपांतरण T का V पर कोई आइगेन मान नहीं है, जबकि यहाँ पर प्रत्येक वास्तविक संख्या रैखिक संकारक D का आइगेन मान है।

न्यूनतम बहुपद (Minimal Polynomials)

रैखिक संकारक (Linear Operator) T को निर्धारित करने के लिए, बहुपद के वर्ग को निर्धारित करना बहुत उपयोगी है जो T को शून्यकारी (Annihilate) करता है। यदि T, – आयाम समष्टि V पर एक रैखिक संकारक है, तो विमा Hom $(V, V) = n^2$ होगा।

$\Rightarrow$ Hom (V, V) में कोई भी $n^2 + 1$ सदिश (Vectors) रैखिक रूप से निर्भर होते हैं।

$\Rightarrow I, T, T^2, ..., T^{n^2}$ रैखिक रूप से निर्भर होते हैं।

$\Rightarrow \exists\ c_o, c_1, c_2, ..., c_{n2} \in F$ इस प्रकार है कि,

$c_oI + c_1T + ... + c_{n^2}T^{n^2} = 0$ जहां $c_i \neq 0$

अर्थात T एक बहुपद $p(x) \in F[x]$ को संतुष्ट करता है, जहां,

$p(x) = c_o + c_1x + ... + c_{n^2}T^{n^2}$, $p(x) \neq 0$ ऐसा होते कि $p(T) = 0$

T द्वारा संतुष्ट ऐसे सभी बहुपदों में से, कम से कम या न्यूनतम घात के बहुपद का चयन करना चाहिए।

परिभाषा : मान लीजिए कि F पर रैखिक संकारक T का एक *FDVS* (Finite Dimensional Vector Space), V है। न्यूनतम बहुपद को T के लिए एक अद्वितीय बहुपद $p(x) \in F[x]$ के रूप में इस तरह परिभाषित किया गया है कि,

(*i*) $p(x)$ एकगुणांकी बहुपद (Monic Polynomial) है।

(*ii*) $p(T) = 0$

(*iii*) F पर कोई भी बहुपद $p(x)$ की तुलना में छोटी घात का नहीं होना चाहिए, जो T को शून्यकारी (Annihilates) करता है।

ध्यान दें कि $p(x)$ को विशिष्ट रूप से प्रकरण (*i*) के द्वारा निर्धारित किया जाता है।

हमारे पास न्यूनतम बहुपद की वर्ग आव्यूह A के लिए समान परिभाषा है।

प्रमेय 2.15: मान लीजिए कि एक n–आयाम समष्टि V पर एक रैखिक रूपांतरण है।

T के लिए अभिलक्षणिक (Characteristic) और न्यूनतम बहुपद की मूल समान होते हैं।

प्रमाण: मान लीजिए कि $p(x)$, T. के लिए एक न्यूनतम बहुपद है। मान लीजिए कि c, $p(x)$ का मूल है अर्थात, $p(c) = 0$ है।

तब $p(x) = (x - c)\ q(x)$ कुछ $q(x) \in F[x]$ के लिए।

क्योंकि $\deg q(x) < \deg p(x)$, $q(T) \neq 0$

$\exists\ v \in V$ इस तरह कि $q(T)\ v \neq 0$, $v \neq 0$

मान लीजिए कि $x = q(T)\ v \neq 0$

तब
$$
\begin{aligned}
0 &= p(T)\ v \\
&= (T - cI)\ q(T)\ v \\
&= T(x) - cx
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad T(x) = cx, x \neq 0$

$\Rightarrow c, T$ का आइगेन मान है।

टिप्पणी

विलोमतः, मान लीजिए कि c, T का आइगेन मान है।

तब $\exists\ 0 \neq v \in V$ इस तरह है कि $Tv = cv$

$\therefore$ $p(T)\ v = p(c)\ v$

क्योंकि $p(T) = 0,\ p(c)\ v = 0,\ v \neq 0$

$p(c) = 0$

$\therefore$ c, T के न्यूनतम बहुपद का मूल है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें: यद्यपि न्यूनतम बहुपद (Minimal Polynomial) और अभिलाक्षणिक बहुपद में समान मूल हो, लेकिन जरूरी नहीं वे समान ही हो। उदाहरण के लिए, अभिलाक्षणिक बहुपद

$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ है, $(x-1)\,(x-2)^2$ है, जबकि $(A-I)\,(A-2I) = 0 \Rightarrow$ न्यूनतम बहुपद $(x-1)\,(x-2)$ है।

एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है। ये दोनों बहुपद समान कब होगे ? यदि रैखिक रूपांतरण T के सभी आइगेन मान अलग –अलग हैं, तो T की विशेषता बहुपद $f(x) = (x-c_1) \ldots (x-c_n)$ है।

चूंकि T के न्यूनतम बहुपद $p(x)$ की मूल $f(x)$ और $\deg p(x) \leq \deg f(x) = n$ के समान हैं।

$$p(x) = (x-c_1) \ldots (x-c_n) = f(x)$$

यहाँ आव्यूह का वह प्रसिद्ध परिणाम प्राप्त हो जाता है जिसे केली–हैमिल्टन प्रमेय (Cayley-Hamilton Theorem) के नाम से जाना जाता है, जो कहता है कि ''प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपनी विशिष्ट बहुपद को संतुष्ट करता है''।

चूंकि रैखिक संकारक T का अभिलक्षण बहुपद V के किसी भी आधार β के सापेक्ष में अभिलक्षणिक बहुपद $[T]_\beta$ के समान है। तो केली–हेमिल्टन प्रमेय रैखिक संकारकों के लिए भी सत्य है, यानी यदि $f(x)$, T की विशेषता बहुपद है, तो $f(T) = 0$ होगा।

उपरोक्त का एक सरल परिणाम है।

प्रमेय 2.16: रैखिक संकारक T का न्यूनतम बहुपद अपनी विशिष्ट बहुपद को विभाजित करता है।

प्रमाण : $p(x), f(x)$, T के क्रमशः न्यूनतम और अभिलाक्षणिक बहुपद हैं।

तो $f(x) = g(x)\ p(x) + q(x)$ जहां $q(x) = 0$ या $\deg q(x) < \deg p(x)$

मान लीजिए कि $q(x) \neq 0$ तब $0 = f(T) = g(T)\ p(T) + q(T)$

$\Rightarrow$ $q(T) = 0\ (f(T)) = 0$ (केली–हेमिल्टन प्रमेय द्वारा Cayley-Hamilton Theorem)

$\therefore$ $q(x)$, $p(x)$ और $q(T) = 0$, से कम घात से कम का एक गैर–शून्य एक गुणांकी बहुपद (Non-Zero Monic Polynomial) है, विरोधाभास $p(x)$ न्यूनतम है।

$\therefore$ $q(x) = 0$

$\therefore\ p(x), f(x)$ को विभाजित करता है।

नोट 1: मान लीजिए $A = [T]_\beta p(x) = T$ न्यूनतम बहुपद है, तब $p(x)$ भी A का न्यूनतम बहुपद है।

टिप्पणी

प्रमाण : अब $[T^r]_\beta = [T]_\beta \ldots [T]_\beta = A^r$

$\therefore\quad [p(T)]_\beta = p(A)$

$\therefore\quad p(A) = 0$ इसलिए $p(T) = 0$

मान लीजिए कि, $q(x) = A$ का न्यूनतम बहुपद है।

मान लीजिए कि, $p(x) = q(x)\, r(x) + s(x)$, जहां,

$s(x) = 0$ या $\deg s(x) < \deg q(x)$

अब $0 = p(A) = q(A)\, r(A) + s(A)$

$\Rightarrow\quad s(A) = 0$

यदि $s(x) \neq 0$, तो A एक गैर–शून्य बहुपद घात $q(x)$, से कम को संतुष्ट करता है, जो एक विरोधाभास है।

$\therefore\quad s(x) = 0.$ क्योंकि, $q(x) \mid p(x)$

पुनः $[q(T)]_\beta = q(A) = 0 \Rightarrow q(T) = 0$

मान लीजिए कि $q(x) = p(x)\, g(x) + h(x)$

जहां $h(x) = 0$ या $\deg h(x) < \deg p(x)$.

$\therefore\quad q(T) = p(T)\, g(T) + h(T)$

$\Rightarrow\quad 0 = h(T)$

यदि $h(x) \neq 0$, तो T एक गैर–शून्य बहुपद $p(x)$, को कम घात से संतुष्ट करता है, जो एक विरोधाभास है।

$\therefore\quad h(x) = 0 \Rightarrow p(x) \mid q(x)$

इसलिए $p(x) = q(x) = A$ का न्यूनतम बहुपद है।

2. समान आव्यूह का समान न्यूनतम बहुपद होता है।

प्रमाण: माना कि A, B समान आव्यूह है।

फिर $B = P^{-1}AP$

माना कि $p(x) = A$ का न्यूनतम बहुपद है।

$q(x) = B$ का न्यूनतम बहुपद है।

अब $0 = q(B) = q(P^{-1}AP) = P^{-1}q(A)P$

$\therefore\quad q(A) = 0$

पहले की तरह $p(x) \mid q(x)$

इसी तरह, $0 = p(A) = p(PBP^{-1}) = Pp(B)P^{-1}$

$\therefore\quad p(B) = 0$

इस तरह, $q(x) \mid p(x)$

इस प्रकार, $p(x) = q(x).$ है।

टिप्पणी

हालांकि, विलोम (Converse) जरूरी नहीं सही हो। निम्नलिखित पर विचार करें:

माना कि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

तब A और B का न्यूनतम बहुपद $(x-1)\ (x-2)$ है।

चूंकि अनुरेखण (Trace) $A = 4$, अनुरेखण (Trace $B = 5$, A और B के समान नहीं हैं।

उदाहरण 2.25: दो आव्यूह A और B के लिए, दिखाएं कि AB और BA का आवश्यकता रूप से न्यूनतम बहुपद समान नहीं है।

हल: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

तो $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है,

$\therefore \quad AB = 0 = (BA)^2$

$\Rightarrow$ तब AB का न्यूनतम बहुपद x है जबकि BA का न्यूनतम बहुपद x^2 है।

उदाहरण 2.26: माना कि $A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$, जहां B और C वर्ग आव्यूह हैं। दिखाएं कि न्यूनतम बहुपद $p(x)$, B और C के न्यूनतम बहुपद $q(x), r(x)$ का L.C.M. है।

हल: अब $p(A) = \begin{bmatrix} p(B) & O \\ O & p(C) \end{bmatrix}$ है।

क्योंकि $\quad p(A) = 0, p(B) = 0 = p(C)$

हम प्राप्त करते हैं $\quad q(x) \mid p(x),\ r(x) \mid p(x)$

मान लीजिए कि $\quad q(x) \mid f(x),\ r(x) \mid f(x)$

तब $\quad f(A) = \begin{bmatrix} f(B) & O \\ O & f(C) \end{bmatrix}$

अब $\quad q(x) \mid f(x) \Rightarrow f(B) = 0$

$\quad r(x) \mid f(x) \Rightarrow f(C) = 0$

$\therefore \quad f(A) = 0$

$\therefore \quad p(x) \mid f(x).$

इस प्रकार, $p(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ का L.C.M है।

उदाहरण 2.27: माना कि क्षेत्र F में a, b, c यहाँ a के अवयव है, और

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

सिद्ध करें कि A की अभिलाक्षणिक बहुपद इसके न्यूनतम बहुपद के समान है।

हलः A की अभिलाक्षणिक बहुपद निम्न होगी,

$$f(x) = |\, xI - A \,| \ = x^3 - ax^2 - bx - c$$

माना कि $p(x)$ इसकी न्यूनतम बहुपद है।

तब $\deg p(x) \le \deg f(x) = 3.$

अगर $\deg p(x) = 1$, तब $p(x) = x - \alpha,\ \alpha \in F$

$$\therefore \qquad O = p(A) = A - \alpha I = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & c \\ 1 & -\alpha & b \\ 0 & 1 & a-\alpha \end{bmatrix}$$

जोकि सत्य नहीं है क्योंकि $1 \neq 0$ है।

अगर $\deg p(x) = 2$, तब $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta,\ \ \alpha, \beta \in F$ होगा।

$$\Rightarrow\ O = p(A) = A^2 + \alpha A + \beta I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ 1 & - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ 0 & - & - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ 0 & - & - \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\ 1 = 0$ जो सही नहीं है।

इसलिए $\deg p(x) = 3$ और इस प्रकार $p(x) = f(x)$ है।

विकर्णनीय संकारक (Diagonizable Operators)

परिभाषाः एक रैखिक संकारक T को परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर विकर्णनीय (Diagonalizable) कहा जाता है अगर $V \ni$ का क्रमिक आधार $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ ऐसा है कि T का आव्यूह β के सापेक्ष में एक विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) हो।

$$\text{अर्थात्} \qquad [T]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \cdots \\ 0 & & c_n \end{bmatrix}$$

समान रूप से एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर विकर्णनीय है यदि केवल और यदि अगर V का क्रमिक आधार β के अवयव T के आइगेन सदिश हों।

प्रमाणः माना कि T विकर्णनीय (Diagonalizable) है।

तब आधार $\beta = V$ के $\{v_1, ..., v_n\}$ ऐसा है कि,

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ & & \cdots \\ 0 & & c_n \end{bmatrix}$$

अर्थात् $T(v_i) = c_i v_i$ सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

$\therefore \quad v_1, ..., v_n$, T का आइगेन सदिश है।

विलोमतः, माना कि $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$, V का क्रमिक आधार ऐसा है कि प्रत्येक v_i, T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) है।

तब $$[T]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & c_n \end{bmatrix}$$ विकर्णनीय है।

टिप्पणी

$\therefore$ T विकर्णनीय (Diagonalizable) है

प्रमेय 2.17: मान लीजिए कि एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है। माना कि $_1, c_2, ..., c_k \in F$ अलग–अलग T के आइगेन मान हैं और माना कि W_i आइगेन मान $c_i, i = 1, 2, ..., k$ के सापेक्ष आइगेन समष्टि (Eigen Space) है, और $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ क्रमशः $W = W_1 + ... + W_k$ का क्रमिक आधार है और विमा $W =$ विमा $W_1 + ... +$ विमा W_k. इसलिए $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ होगा।

प्रमाण: हम पहले यह दिखाते हैं कि जब भी,

$$x_1 + ... + x_k = 0, x_i \in w_i \qquad ...(1)$$

तब $x_i = 0 \ \forall \ i.$

$T, T^2, ..., T^{k-1}$ को समीकरण (1) पर रखने पर, हमें मिलेगा,

$$c_1 x_1 + ... + c_k x_k = 0$$

$$...$$

$$c_1^{k-1} x_1 + ... + c_1^{k-1} x_k = 0$$

(ध्यान दें कि $T(x_i) = c_i x_i \Rightarrow T^r(x_i) = c_{c_i}^{r_i} x_i$)

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{k-1} & & c_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 0$$

$$C \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 0, \text{ जहां } C = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & & c_k \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{k-1} & & c_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det C \neq 0$, इसलिए $c_i, ..., c_k$ अलग–अलग है।

$$\therefore \quad C^{-1} C \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall \ i$$

इसलिए हमारा कथन या प्रमाण सही है।

मान लीजिए कि $x \in W$ है। तब $x = x_1 + ... + x_k, x_i \in W_i$ इसलिए $W = W_1 + ... + W_k$

और $\beta_1 = \{v_1, ..., v_{d_1}\}$ विस्तृति W_1 (माना है कि विमा $W_k = d_k$) है।

इसी तरह, क्योंकि $\beta_k = \{v_1', ..., v'_{d_k}\}$ W_k को विस्तृति या विस्तार है।

हम $x_k = \beta_1 v_1' + ... + \beta_{d_k} v'_{d_k}$ को प्राप्त करते हैं।

इसलिए, $x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{d_1} v_{d_1} + ... + \beta_1 v_1' + ... + \beta_{d_k} v'_{d_k}$

$= v_1, ..., v_{d_1}, ..., v'_{d_1}, ... v'_{d_k}$ का रैखिक संचय है।

$\Rightarrow$ $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k\} = \beta$, W को विस्तृति या विस्तार करता है।

मान लीजिए कि $(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{d_1} v_{d_1}) + ... + (\beta_1 v_1' + ... + \beta_{d_k} v'_{d_k}) = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 + ... + x_k = 0$

जहां, $x_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{d_1} \quad v_{d_1} \in W_1$

. . . .

$x_k = \beta_1 v_1' + ... + \beta_{d_k} \quad v'_{d_k} \in W_k$

तब $x_i = 0$ सभी i के लिए (जैसा ऊपर दिखाया गया है)।

$\Rightarrow$ $\alpha_1 = ... = \alpha_{d_1} = ... = \beta_1 = ... = \beta_{d_k} = 0$

क्योंकि प्रत्येक β_i, W_i का आधार है।

$\Rightarrow$ $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$ रैखिक स्वतंत्र है और W का आधार बनाती है।

अब विमा $\quad W = o(\beta_1) + ... + o(\beta_k)$

अर्थात् $\quad$ विमा W = विमा W_1 + ... + विमा W_k

इस प्रकार से यह प्रमेय सिद्ध होती है।

अब हम ऐसा नियम देते हैं जिसके तहत एक रैखिक संकारक T विकर्ण है।

प्रमेय 2.18: मान लीजिए कि एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है। तब T विकर्णनीय होगा यदि केवल और यदि विमा V = विमा W_1 + ... + विमा W_k

प्रमाण: मान लीजिए कि T विकर्णनीय हैं। तब V का आधार β ऐसा है कि β का प्रत्येक सदिश T का आइगेन सदिश (Eigen Vector) है। मान लीजिए कि पहला r_1 सदिशों $x_1, ..., x_{r_1} \in W_1$, दूसरा r_2 सदिशों W_2 से संबंधित है W_2 और इसी तरह अंतिम r_k सदिश (Vectors) $y_1, ..., y_{r_k}$, W_k से संबंधित है।

क्योंकि $W_1 + W_2 + ... + W_k = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$

तब v = रैखिक संचय $x_1, ..., x_{r_1}$ + ... + रैखिक संचय $y_1, ..., y_{r_k}$ है।

$\therefore \quad v \in W_1 + ... + W_k$

$\Rightarrow \quad V = W_1 + ... + W_k$

$\Rightarrow$ विमा V = विमा (W_1 + ... + विमा W_k)

= विमा W_1 + ... + विमा W_k

विलोमत, माना कि विमा V = विमा W_1 + ... + विमा W_k = विमा W

$\therefore$ विमा W = विमा V

$\Rightarrow \quad W = V$

यदि β_i, $W_i \; \forall \; i$, का आधार है, ऊपरी प्रमेय द्वारा $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_k\}$, $W = V$ का आधार है।

क्योंकि प्रत्येक β_i में केवल आइगेन सदिश होते हैं, β केवल आइगेन सदिश से युक्त V का आधार है।

$\therefore$ T विकर्णनीय (Diagonalisable) है।

टिप्पणी

प्रमेय 2.19: माना कि एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V जो (f) पर है। तब T विकर्णनीय होगा यदि केवल और यदि T का $f(x)$,

$$f(x) = (x-c_1)^{d_1} \dots (x-c_k)^{d_k},$$

जहां $\quad d_i =$ विमा W_i

और $\quad d_1 + \dots + d_k =$ विमा $V = n$

प्रमाण: क्योंकि T विकर्णनीय है, $\exists$ एक क्रमिक आधार $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ ऐसा है कि $[T]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{bmatrix}$ है।

मान लीजिए c_1, d_1 समय लगता है,..., c_k, d_k समय लगता है।

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 & & & & & & O \\ & \vdots & & & & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & c_k & & \\ & & & & & \vdots & \\ O & & & & & & c_k \end{bmatrix}$$

$\therefore$ T का अभिलक्षणिक बहुपद दिया गया है,

$$f(x) = (x-c_1)^{d_1} \dots (x-c_k)^{d_k},\ d_1 + \dots + d_k = n$$

$\therefore$ $[T - c_i I]_\beta$ पर केवल d_i शून्य है, विकर्ण सभी $i = 1, \dots, k$ के लिए।

$\therefore$ रैंक (Rank) $[T - c_i I] = n - d_i$ सभी $i = 1, \dots, k$ के लिए।

$\Rightarrow$ शून्यता $(T - c_i I) = d_i$ सभी $i = 1, \dots, k$ के लिए।

$\Rightarrow$ विमा $W_i = d_i$ सभी $i = 1, \dots, k$ के लिए ($W_i =$ अष्टि (Ker) $(T - c_i I)$)।

विलोमतः क्योंकि $d_1 + d_2 + \dots + d_k =$ विमा V

विमा W_1 + विमा W_2 + ... + विमा W_k = विमा V

प्रमेय 2.18 के द्वारा तब T विकर्णनीय है।

परिभाषा: माना कि T एक रैखिक संकारक परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है T को एक FDVS, V पर एक रैखिक संकारक माना जाता है। $c \in F$, T की आइगेन मान है। सदिश समष्टि W_c के विमा को c की ज्यामितीय गुणनात्मकता (Geometric Multiplicity) कहा जाता है।

साथ ही C को T के अभिलक्षणिक बहुपद के मूल के रूप में c की गुणनात्मकता को c की ज्यामितीय गुणनात्मक (Geometric Multiplicity) कहा जाता है।

यदि हम c की ज्यामितीय गुणनात्मकता को $G.M.$ और c के बीजीय गुणनात्मक या बहुलता (Algebraic Multiplicity) को $A.M.$ कहते हैं। हम सिद्ध कर सकते हैं कि $G.M. \leq A.M$ है।

प्रमेय 2.21: G.M. $\leq$ A.M है।

प्रमाण: माना कि विमा $W_c = g = G.M.$ और $A.M. = m$

माना कि, $\{x_1, x_2, ..., x_g\}$, W_c का आधार है तब इसे V के एक आधार $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_g, y_1, ..., y_n\}$ तक बढ़ाया जा सकता है।

अब $T(x_1) = cx_1 = cx_1 + ox_2 + ... + ox_g + oy_1 + ... + oy_n$

. . . .

. . . .

$T(x_g) = cx_g = ox_1 + ... + ox_{g-1} + cx_g + oy_1 + ... + oy_n$

माना कि, $A = [T]_\beta$, तो $A = \begin{bmatrix} cI_g & - \\ O & B \end{bmatrix}$

जहां I_g, $g \times g$ तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) को निरूपित करता है और B, $n \times n$ आव्यूह है।

माना कि $f(x)$, T (या A), का अभिलाक्षणिक बहुपद है तब

$$f(x) = |xI - A| = \begin{bmatrix} (x-c)I_g & - \\ O & xI_n - B \end{bmatrix}$$

$$= (x - c)^g \; |x\, I_n - B|$$

$\Rightarrow c$ की बीजगणितीय गुणनात्मकता (Algebraic Multiplicity) कम से कम g है।

इस प्रकार $G.M. \leq A.M.$

माना कि $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तब A की अभिलाक्षणिक बहुपद $(x + 1)\,(x - 1)^2$ होगी।

माना कि $c = 1$, तब आइगेन समष्टि $W_c = \left< \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right>$

इस प्रकार, c की ज्यामितीय गुणनात्मक 2 होती है और c की बीजगणितीय गुणनात्मक 2 होती है।

प्रमेय 2.21: माना कि एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि $V(F)$ पर है । तब T विकर्णनीय है यदि केवल और यदि c_i की बीजगणितीय गुणनात्मकता ज्यामितीय गुणनफल की $c_i \; \forall \; i$ के समान होगी।

प्रमाण: माना कि T विकर्णनीय है।

T की अभिलक्षणिक बहुपद $f(x)$,

$$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_k)^{d_k}.$$

जहां d_i = विमा W_i, $d_1 + ... + d_k = n$.

$\therefore$ c_i की बीजगणितीय गुणनात्मकता (Algebraic Multiplicity) $c_i = d_i$ = विमा W_i = ज्यामितीय गुणनात्मकता (Geometric Multiplicity) $c_i \; \forall \; i$ है।

विलोमतः माना कि $f(x)$, T का अभिलक्षणिक बहुपद है। माना कि d_i, यहाँ $c_i \ \forall \ i$ की बीजगणितीय गुणनात्मकता है तब,

$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \ldots (x - c_k)^{d_k}$,

टिप्पणी

$d_i =$ विमा $W_i \ \forall \ i$ परिकल्पना या अवधारणा द्वारा,

T विकर्णनीय (Diagonalisable) है।

प्रमेय 2.22: माना कि एक रैखिक संकारक T परिमित विमीय या आयामीय सदिश समष्टि $V(F)$ पर है। माना कि $p(x)$, T की न्यूनतम (Minimal) बहुपद है। तब T विकर्णनीय होगा यदि केवल और यदि $p(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, जहां $c_1, c_2, \ldots, c_k \in F$ अलग–अलग है।

प्रमाण: माना कि $p(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$

माना कि $f_i(x) = \dfrac{p(x)}{(x - c_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

तब G.C.D. $(f_1, f_2, \ldots, f_R) = 1$

$\Rightarrow \ \exists \ g_1, g_2, \ldots, g_k \in F[x]$ इस प्रकार है कि,

$g_1 f_1 + \ldots + g_k f_k = 1$

$\therefore \quad g_1(T) f_1(T) + \ldots + g_k f_k(T) = I$

माना कि, $\quad v \in V$

तब, $\quad v = g_1(T) f_1(T)v + \ldots + g_k(T) f_k(T)(v)$

$f_1(T)v = (T - c_2 I) \ldots (T - c_k I)(v)$

$\Rightarrow \quad (T - c_1 I) f_1(T)(v) = (T - c_1 I)(T - c_2 I) \ldots (T - c_k I)(v)$

$= p(T)(v)$

$= 0$

$\Rightarrow \quad f_1(T)(v) \in \text{Ker}\,(T - c_1 I) = W_1$

$\Rightarrow \quad g_1(T) f_1(T)(v) \in W_1$

(क्योंकि $w_1 \in W_1 \Rightarrow T(w_1) = c_1 w_1$

$\Rightarrow \quad T^r(w_1) = c_1^r w_1 \in W_1$)

इसी तरह $g_i(T) f_i(T)(v) \in W_i \ \forall \ i$

$\therefore \quad v \in W_1 + \ldots + W_k$

$\Rightarrow \quad V = W_1 + \ldots + W_k$

$\Rightarrow \quad$ विमा $V =$ विमा $W_1 + \ldots +$ विमा W_k (मानक नियमों के द्वारा)

$\Rightarrow T$ विकर्णनीय है।

विलोमत, माना कि T विकर्णनीय है तब $\exists$ एक आधार V का $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ इस तरह होगा कि प्रत्येक v_i, T का आइगेन सदिश हो।

अब $(T - c_1 I) \ldots (T - c_k I)(v_i) = 0 \ \forall \ i$

क्योंकि प्रत्येक v_i कुछ सदिश समष्टि W_j में है।

$W_j = \text{Ker}\,(T - c_j I)$.

$\therefore p(x) = (x - c_1) \ldots (x - c_k)$, T का न्यूनतम बहुपद है।

प्रमेय 2.23: माना कि एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है और मान के कि T की अलग–अलग आइगेन मान है। तब T विकर्णनीय होगा।

प्रमाण: माना कि $c_1, ..., c_n$, T की n अलग–अलग आइगेन मान s है और $v_1, ..., v_n$ संबंधित T के आइगेन सदिश है।

$\therefore \quad T(v_i) = c_i v_i$ सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

$\Rightarrow (T - cI)v_i = 0$ सभी i, $v_i \neq 0$ के लिए।

$\Rightarrow 0 \neq v_i \in \text{Ker}\,(T - c_i I)$

$\Rightarrow$ विमा (Ker) $(T - c_i I) \geq 1$

$\Rightarrow$ विमा $W_i \geq 1$, जहां $W_i = \text{Ker}\,(T - c_i I) = T$ का आइगेन समष्टि है।

$\Rightarrow$ विमा $W_1 + ... +$ विमा $W_n \geq n =$ विमा V

$\Rightarrow$ विमा $(W_1 + ... + W_n) \geq$ विमा V

$\Rightarrow$ विमा $(W_1 + ... + W_n) =$ विमा V इसलिए $W_1 + ... + W_n \subseteq V$

$\Rightarrow$ विमा $W_1 + ... +$ विमा $W_n =$ विमा V

$\Rightarrow$ मानक नियमों के द्वारा T विकर्णनीय है।

लेकिन ऊपरी प्रमेय का विलोम हमेशा सही नहीं होता है। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

माना कि $\boldsymbol{R}^3$ पर एक रैखिक संकारक T इस तरह है कि T का आव्यूह $\boldsymbol{R}^3$ के मानक (Standard) आधार के सापेक्ष में निम्न होगा।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

तो, A (या T) की आइगेन मान $1, -1, -1$ है।

विमा $W_1 = 2$, विमा $W_{-1} = 1$

$\therefore$ विमा W_1 + विमा $W_{-1} = 3 =$ विमा $\mathbf{R}^3$

$\therefore$ T विकर्णनीय है लेकिन T की आइगेन मान अलग–अलग नहीं है।

प्रमेय 2.24: माना कि F पर एक रैखिक संकारक T परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है और V के ऊपर F है। माना कि $c_1, ..., c_k, T$ की अलग–अलग आइगेन मान हैं, और $v_1, ..., v_k$ संबंधित T के आइगेन सदिश है । तब $v_1, ..., v_k$ रैखिक रूप से स्वतंत्र होंगे ।

प्रमाण: माना कि $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0$

तो $w_1 + ... + w_k = 0$

जहां $w_i = \alpha_i v_i \in W_i = c_i$ से संबंधित T के आइगेन समष्टि है।

चूंकि $W_1 + ... + W_k$ पर प्रत्यक्ष या सरल योग है, $w_i = 0 \; \forall \; i$

$\therefore \alpha_i v_i = 0 \; \forall \; i, v_i \neq 0$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \; \forall \; i$

$\therefore\ v_1, ..., v_k$ रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

नोटः यदि T विकर्णनीय है, तो V का आधार ऐसा होगा कि विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) = A है। यदि β', V का कोई अन्य आधार है, तो आव्यूह P ऐसा है कि $[T]_{\beta'} = P^{-1}AP$ है।

हम कहते हैं कि $[T]_{\beta'}$ विकर्ण आव्यूह के समान है। तो अगर T विकर्णनीय है, तो फिर किसी भी आधार के संबंध में T का आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह के समान होगा। ये हमें निम्नलिखित परिभाषा की ओर ले जाता है,

माना कि A एक $n \times n$ आव्यूह है। हम कहते हैं कि यदि A विकर्णनीय है, यह विकर्ण आव्यूह के समान है, अर्थात्, $A = P^{-1}BP, B =$ विकर्ण आव्यूह

यह ध्यान दिया जा सकता है कि हमारे पास एक गैर विकर्ण आव्यूह हो सकती है जो एक विकर्ण आव्यूह के समान है। उदाहरण के लिए, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ की आइगेन मान 1 और आइगेन मान 2 अलग–अलग हैं और इसलिए यह एक विकर्ण आव्यूह के समान है, हालांकि खुद एक विकर्ण आव्यूह नहीं है।

नोटः (1) माना कि $A = [T]_\beta$ है। मान लीजिए कि और A विकर्णनीय है। तब T भी विकर्णनीय होगा।

प्रमाणः क्योंकि A विकर्णनीय है, $\exists$ आव्यूह P ऐसा होनी चाहिए कि $A = P^{-1}BP$ हो, जहाँ $B = (c_1, ..., c_1, ..., c_k, ..., c_k)$ की विकर्ण आव्यूह है।

$\therefore\ f(x) =$ T की विशेषता बहुपद है।

$= (x - c_1)^{d_1} ... (x - c_k)^{d_k}$, जहां $c_i's$, अलग–अलग है और $d_1 + ... + d_k = n =$ विमा V है।

अब $$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\therefore$ $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = B$ के आइगेन मान c_1 के सापेक्ष में B का आइगेन सदिश है।

इस तरह,
$$\begin{aligned} A(P^{-1}X_1) &= (P^{-1}BP)\ (P^{-1}X_1) \\ &= P^{-1}\ BX_1 \\ &= P^{-1}\ c_1X_1 \\ &= c_1(P^{-1}X_1) \end{aligned}$$

$\therefore$ $P^{-1}X_1 = A$ के आइगेन मान c_1 के सापेक्ष में A का आइगेन सदिश है।

इसी तरह,

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = B \text{ का आइगेन सदिश}$$

$\Rightarrow \quad P^{-1}X_2 =$ का आइगेन सदिश A

इसी तरह, $X_1, X_2, ..., X_{d_1}$ B के आइगेन सदिश है।

$\Rightarrow$ $P^{-1}X_1, P^{-1}X_2, ..., P^{-1}X_{d_1}$ A के आइगेन मान c_1 के सापेक्ष में A का आइगेन सदिश है।

माना कि, $\displaystyle\sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i P^{-1} X_i = 0, \alpha_i \in F$

तो, $$P^{-1} \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i X_i = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{d_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \alpha_i = 0 \quad \forall\ i = 1, ..., d_1$

क्योंकि, $P^{-1}X_1, ..., P^{-1}X_{d_1}$, LI सदिश है।

$\therefore$ विमा $W'_{c_1} \geq d_1$, जहां $W'_{c_1} = A$ के आइगेन मान c_1 के सापेक्ष में A का आइगेन समष्टि है।

क्योंकि, विमा $W_{c_1} \geq d_1$, जहां $W_{c_1} = T$ के आइगेन मान c_1 के सापेक्ष में T का आइजन समष्टि है।

इसी तरह, विमा $W_{c_i} \geq d_i \ \ \forall\ i = 1, 2, ..., k.$

मान लीजिए कि कि विमा $W_{c_i} > d_i$ किसी भी i के लिए।

मान लीजिए कि $W = W_{c_1} + ... + W_{c_k}$.

तब विमा $W = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}$ विमा $W_{c_i} > d_1 + ... + d_i + ... + d_k = n.$

$\therefore$ विमा $W >$ विमा V, एक विरोधाभास है।

इसलिए, विमा $W_{c_i} = d_i \ \forall\ i.$

इस प्रकार T विकर्णनीय है, प्रमेय 2.19 के द्वारा

(2) मान लीजिए कि F पर $n \times n$ आव्यूह A आइगेन मान $c_1, c_2, ..., c_k$ से संबंधित $X_1, ..., X_k$ आइगेन सदिश है। तब $\{X_1, ..., X_k\}$ LI का समुच्चय है।

मान लीजिए कि $$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}, ..., X_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix}$$

तो $AX_i = c_i X_i$

माना कि $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ किसी सदिश समष्टि V का आधार है, तब $\exists$ एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to V$ इस प्रकार होगा कि,

टिप्पणी

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + ... + a_{n1}e_n$$
$$.........$$
$$T(e_n) = a_{1n}e_1 + ... + a_{nn}e_n$$

जहां, $A = (a_{ij})$ है।

तब, $A = [T]_\beta$

माना कि $v_1 = \alpha_{11}e_1 + ... + a_{n1}e_n$
$$.........$$
$$v_k = \alpha_{1k}e_1 + ... + a_{nk}e_n$$

तब $v_1, ..., v_k$, T का आइगेन सदिश ऐसा है कि,

$$T(v_i) = c_i v_i,\ i = 1, 2, ..., k$$

$\therefore$ प्रमेय के अनुसार $\{v_1, v_2 ..., v_k\}$ LI है

मान लीजिए कि $\beta_1 X_1 + ... + \beta_k X_k = 0,\ \beta_i \in F$

तब, $$\beta_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix} + ... + \beta_k \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix} = 0$$

इस प्रकार, $\beta_1\alpha_{11} + ... + \beta_k\alpha_{1k} = 0$
$$.........$$
$$\beta_1\alpha_{n1} + ... + \beta_k\alpha_{nk} = 0$$

इस कारण $\beta_1(\alpha_{11}e_1 + ... + a_{n1}e_n) + ... + \beta_k(\alpha_{1k}e_1 + ... + a_{nk}e_k) = 0$
$$\Rightarrow \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_k v_k = 0$$
$$\Rightarrow \beta_i = 0 \quad \forall\, i$$
$\Rightarrow \{X_1, X_2, ..., X_k\}$, LI का समुच्चय है।

प्रमेय 2.25: मान लीजिए कि A, $n \times n$ का आव्यूह है। तब A विकर्णनीय होंगे यदि और केवल यदि A में, n रैखिक रूप से स्वतंत्र आइगेन सदिश होंगे।

प्रमाण: मान लीजिए कि A विकर्णनीय है, तो $\exists$ एक गैर–विलक्षण (Non-Singular) आव्यूह P ऐसा है कि,

$P^{-1}AP = D =$ विकर्णनीय या diag $(c_1, c_2, ..., c_n)$

या $AP = PD$

मान लीजिए कि, $P = [X_1, X_2, ..., X_n]$

तब $AP = [AX_1, AX_2, ..., AX_n]$
$$PD = [c_1X_1, c_2X_2, ..., c_nX_n]$$

इस प्रकार $AX_i = c_iX_i \quad i = 1, 2, ..., n$

टिप्पणी

चूंकि P प्रतिलोमीय है। X_is, LI आइगेन सदिश हैं। इसलिए $X_i \neq 0 \quad \forall\ i$ होगा।

इसलिए $X_1, X_2, ..., X_n, A$ के आइगेन सदिश हैं।

विलोमतः, माना कि A की $c_1, c_2, ..., c_n$ आइगेन मान से संबंधित A के $X_1, X_2, ..., X_n$, LI आइगेन सदिश हैं।

तब, $\quad AX_i = c_i X_i \quad \forall\ i$

माना कि, $\quad P = [X_1, X_2, ..., X_n]$

क्योंकि X_i रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं, P प्रतिलोमीय है।

इस प्रकार, $\quad AP = [AX_1, AX_2, ..., AX_n]$

$= [c_1X_1, c_2X_2, ..., c_nX_n]$

$= PD$, जहां D = विकर्णनीय या diag $(c_1, c_2, ..., c_n)$.

अर्थात, $\quad A = PDP^{-1}$

इसलिए A विकर्णनीय है।

उदाहरण 2.28: दर्शाएं कि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ विकर्णनीय नहीं है।

हल: क्योंकि A त्रिकोणीय (Triangular) आव्यूह है, विकर्ण (Diagonal प्रविष्टियां A की आइगेन मान होगी और इसलिए A का 0 ही एकमात्र आइगेन मान होगा।

अगर A विकर्णनीय (Diagnolizable) है, तब A विकर्ण (Diagonal) आव्यूह D के समान होगा।

$$\therefore \quad A = P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} P$$

$$\Rightarrow\ c_1 = c_2 = 0$$

अर्थात्, $A = 0$, एक विरोधाभास और इस तरह A विकर्णनीय नहीं है।

फिर से, λ, B की एक ही आइगेन मान है और अगर B विकर्णनीय है तब,

$$B = P^{-1} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} P$$

$\Rightarrow\ c_1 = c_2 = c_3 = \lambda$ और इस प्रकार $B = \lambda I$, एक विरोधाभास है।

उदाहरण 2.29: एक विकर्णनीय 3×3 आव्यूह A को तैयार करें जिसकी आइगेन मान–

$-2, -2, 6$ है और संगत आइगेन सदिश है, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

हल: माना कि $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

तब, $A = P^{-1}DP = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

टिप्पणी

उदाहरण 2.30: A^{100} को ज्ञात कीजिए जहां $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

हल: A का आइगेन मान 5 और –2 होगा और यह विकर्णनीय है।

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ संगत आइगेन मान हैं।}$$

माना कि $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

तब $$A = P^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} P \Rightarrow A^{100} = P^{-1} \begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} P$$

$$A^{100} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^{100} & -2.5^{100} \\ 3.2^{100} & 2^{100} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 5^{100} + 6.2^{100} & -2.5^{100} + 2.2^{100} \\ -3.5^{100} + 3.2^{100} & 6.5^{100} + 2^{100} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 2.31: माना कि $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ है।

सिद्ध करें कि **R** पर A विकर्ण आव्यूह के समान नहीं है जबकि **C** पर A विकर्ण आव्यूह के समान है।

हल: A का अभिलाक्षणिक बहुपद $(x-2)(x^2+1)$ है,

अगर **R** पर A विकर्ण आव्यूह के समान हैं तब $\exists$ आव्यूह P ऐसा होगा कि

$P^{-1}AP$ = विकर्ण (Diagonal) (a, b, c), a, b, c वास्तविक हैं। $P^{-1}AP$ की आइगेन मान A की आइगेन मान $= 2, \pm i$ है। किंतु (a, b, c) की आइगेन मान a, b, c है जहां a, b, c सभी वास्तविक हैं, एक विरोधाभास है।

$\therefore$ **R** पर A विकर्ण आव्यूह के समान नहीं है।

क्योंकि A की आइगेन मान अलग–अलग है प्रमेय 2.23 के द्वारा, **C** पर A विकर्ण आव्यूह के समान है।

उदाहरण 2.32: F पर V, $n \times n$ आव्यूह का सदिश समष्टि है। माना कि AF पर एक निश्चित $n \times n$ आव्यूह है । V पर T एक रैखिक संकारक से A पर बायें गुणन' द्वारा दिखाएं कि T और A की आइगेन मान समान हैं।

हल: माना कि c, A है।

टिप्पणी

फिर $AX = cX$ कुछ $0 \neq X$ के लिए ($X = n \times 1$ आव्यूह)।

अब $T(XX^t) = AXX^t = cXX^t$ (X^t का अर्थ है X का रूपांतरण है)

यदि $XX^t = 0$ तब,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [x_1, ..., x_n] = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 = ... = x_n^2 = 0$$

$\Rightarrow x_i = 0$ सभी i के लिए $\Rightarrow X = 0$, जो एक विरोधाभास है।

$\therefore \quad XX^t \neq 0$

इसलिए, c, T का भी आइगेन मान है।

विलोमतः, माना कि c, T का आइगेन मान है।

तब $\exists\, 0 \neq B \in V$ इस तरह कि $T(B) = cB$

$\Rightarrow AB = cB$

$\Rightarrow ABX = cBX$ सभी स्तंभ आव्यूह (Column Matrices) X के लिए।

अगर $BX = 0$ सभी X, के लिए तब $B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ B का प्रथम स्तंभ 0 से शून्य है।

इसी तरह, $B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$ द्वितीय स्तम्भ शून्य है।

इस तरह, B के सभी स्तंभ शून्य है।

$\therefore$ $BX \neq 0$ कुछ X के लिए

$\therefore$ c, A की आइगेन मान है।

इस प्रकार, T और A की आइगेन मान समान है।

उदाहरण 2.33: माना कि F पर A और B, $n \times n$ आव्यूह है। दिखाएं कि AB और BA की समान बहुपद है।

हल: माना कि, $C = \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ F पर $2n \times 2n$ आव्यूह है।

तब, $C^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$

माना कि, $D = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}$ F पर $2n \times 2n$ आव्यूह है।

तब, $C^{-1}DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix} = E$

क्योंकि D और E समान आव्यूह है।

टिप्पणी

D और E की अभिलाक्षणिक बहुपद समान है।

$$\begin{vmatrix} xI_n & 0 \\ -B & xI_n - BA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xI_n - AB & 0 \\ -B & xI_n \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x^n \mid xI_n - BA \mid = x^n \mid xI_n - AB \mid$

$\Rightarrow \quad \mid xI_n - BA \mid = \mid xI_n - AB \mid$

$\Rightarrow \quad BA$ का अभिलाक्षणिक बहुपद $= A$ का अभिलाक्षणिक बहुपद है।

2.6 द्विरेखीय, द्विघाती रूप और हर्मिटियान रूप

द्विरेखीय रूप (Bilinear Forms)

माना कि U, V, W, K- क्षेत्र में सदिश समष्टि हैं। एक द्विरेखीय मानचित्र एक फलन B है : $U \times V \rightarrow W$ इस तरह है कि,

1. U से W तक का मानचित्र $x \rightarrow B(x, y)$ प्रत्येक $y \in V$ के लिए रैखिक है।
2. V से W तक का मानचित्र $y \rightarrow B(x, y)$ प्रत्येक $x \in U$ के लिए रैखिक है।

एक द्विरेखीय रूप एक द्विरेखीय मानचित्र $B : V \times V \rightarrow K$। जबकि W-समाहत मान द्विरेखीय रूप एक द्विरेखीय मानचित्र $B : V \times V \rightarrow W$ है। एक द्विरेखीय रूप के प्रकार निम्न हैं :

- सममित (Symmetric) यदि है। $B(x, y) = \mathrm{B}(y, x) \;\; x, y \in V$
- तिरछा–सममित (Skew-Symmetric) यदि, $B(x, y) = -B(y, x) \; x, y \in V$ है।
- विकल्प (Alternating) यदि $B(x, x) = 0 \;\; x \in V$ है।

द्विघाती रूप (Quadratic Forms)

माना कि V, F क्षेत्र में सदिश समष्टि है। मानचित्र $Q : V \rightarrow F$ को V पर द्विघाती रूप (Quadratic Form) कहा जाता है अगर एक सममित (Symmetric) द्विरेखीय रूप $B : V \rightarrow F$ इस तरह मौजूद हो कि,

$Q(u) = B(u,u)$ सभी $u \in V$ के लिए

यहां, B को संबंधित द्विरेखीय रूप **(Associated Bilinear Form)** कहा जाता है। किसी भी सदिश के लिए,

$u, v \in V$,

$Q(u + v) = Q(u) + 2B(u,v) + Q(v)$

हर्मिटियन रूप (Hermitian Forms)

सम्मिश्र सदिश समष्टि C^n में, अंतरिक गुणन को सदिशों $u = (u_1 \ldots u_n)$ और $v = (v_1 \ldots v_n)$ के लिए परिभाषित किया गया है क्योंकि $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i \bar{v}_i$ जिसको फिर से $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_i |v_i|^2$, $u = v$. के लिए परिवर्तित किया जा सकता है।

हर्मिटियन रूप $h : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ के निम्नलिखित चार गुण होते है:

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
2. $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.
3. $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle = \langle u, \bar{a}v\rangle$ विस्तारित क्षेत्र में किसी भी a के लिए।
4. $(u, v) = \overline{(v, u)}$

हर्मिटियन रूप (Hermitian Form) (V,h) को सदिश समष्टि के साथ हर्मिटियन समष्टि (Hermitian Space) कहते हैं।

अपनी प्रगति जांचिए

6. माना की $\mathbf{R}^2$ पर T एक रैखिक संकारक है जो आव्यूह द्वारा मानक क्रमिक आधार में निम्नलिखित प्रकार से दर्शाया गया है,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि T का $\mathbf{R}$ में कोई आइगेन मान नहीं है।

7. माना की $c \neq 0$ एक आइगेन मान है एक प्रतिलोमीय संकारक का। दिखाएँ कि c^{-1} एक आइगेन मान है T^{-1} का।

8. मानचित्र $Q : V \rightarrow F$ को कब V पर एक द्विघात रूप कहा जाता है?

2.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. मान लीजिए कि $U(F)$, $V(F)$ क्षेत्र F पर क्रमशः n और m आयाम सदिश समष्टि हैं। मान लीजिए कि $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$, $\beta' = \{v_1, ..., v_m\}$ क्रमशः क्रमिक आधार है। मान लीजिए कि $T : U \rightarrow V$ रैखिक रूपांतरण है। क्योंकि $T(u_1), ..., T(u_n) \in V$ और $\{v_1, ..., v_m\}$, विस्तृति या विस्तार (स्पैन) V है, जहाँ प्रत्येक $T(u_i)$ सदिश $v_1, ..., v_m$ का एक रैखिक संचय है।

2. एक रैखिक रूपांतरण $T : V \rightarrow W$ गैर–विलक्षण (Non-Singular) होगा यदि Ker $T = \{0\}$ अर्थात्, यदि T 1–1 एकैकी है।

   एक रैखिक रूपांतरण $T : V \rightarrow V$ को V पर एक रैखिक संकारक कहा जाता है।

टिप्पणी

3. क्रमिक आधार को बहुत महत्वपूर्ण माना जाता है, क्योंकि जब आधार का क्रम बदल जाता है, प्रविष्टियां अपने पदों को बदल देंगी और इसलिए संबंधित आव्यूह व्युत्पन्न अलग–अलग होंगे।

4. एक मानचित्र $T: V \to W$ प्रतिलोमीय है अगर यह एकैकी (1–1) है, और T का त्युत्पन्न मानचित्र $T^{-1}: W \to V$ है इस प्रकार कि,

$$T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$$

5. जब अज्ञातों की संख्या समीकरणों की संख्या से अधिक हो जाती है, तो समीकरणों की प्रणाली में एक गैर–शून्य समाधान होता है।

6. A (या T) का अभिलाक्षणिक बहुपद है,

   $\det (xI - A) = \; = x^2 + 1$

   जिसकी कोई वास्तविक मूल नहीं है। तो, T का $\mathbf{R}$ में कोई आइगेन मान नहीं है।

7. चूँकि c एक आइगेन मान है $T, \exists\, 0 \neq v \in V$ का इस प्रकार कि,

   $T(v) = cv$

   $\Rightarrow \; v = T^{-1}(cv) = c(T^{-1}(v))$

   $\Rightarrow \; c^{-1}v = T^{-1}(v)$

   $\Rightarrow \; c^{-1}$ एक T^{-1} का आइगेन मान है।

8. एक मानचित्र $Q : V \to F$ को V पर एक द्विघात रूप कहा जाता है यदि कोई सममित द्विरेखीय समघात $B : V \to F$ है इस प्रकार कि,

   $Q(u) = B(u,u)$ सभी $u \in V$ के लिए।

2.8 सारांश

- मान लीजिए कि $U(F)$, $V(F)$ क्षेत्र F पर क्रमशः n और m आयाम सदिश समष्टि हैं। मान लीजिए कि $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$, $\beta' = \{v_1, ..., v_m\}$ क्रमशः क्रमिक आधार है। मान लीजिए कि $T : U \to V$ रैखिक रूपांतरण है। क्योंकि $T(u_1), ..., T(u_n) \in V$ और $\{v_1, ..., v_m\}$, विस्तृति V, प्रत्येक $T(u_i)$ सदिश $v_1, ..., v_m$ का एक रैखिक संचय है।
- एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to V$ को V पर एक रैखिक संकारक कहा जाता है।
- एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to F$ को एक रैखिक फलन कहा जाता है। हम $T.T$ के लिए T^2 और $T^n = T^{n-1}T$, आदि संकेतन का उपयोग करते हैं।
- यदि समरूप रैखिक समीकरणों की प्रणाली इस प्रकार है कि,

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdot\cdot \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{array}$$

जहां $a_{ij} \in F$ रैंक या पद r का है, तो $F^{(n)}$ में $n - r$ रैखिक रूप से स्वतंत्र हल होंगे।

टिप्पणी

- यदि $n > m$, अर्थात, यदि अज्ञातों की संख्या समीकरणों की संख्या से अधिक है, तो समीकरणों की प्रणाली में एक शून्येतर (गैर–शून्य) हल भी होगा।
- V, F पर एक सदिश समष्टि है। मान लीजिए कि, T, V पर एक रैखिक रूपांतरण हैं। यदि $\exists\, 0 \neq v \in V$ ऐसा है कि, $T(v) = cv$ कुछ $c \in F$ के लिए होगा, तो V को आइगेन सदिश या T की आइगेन सदिश कहा जाता है और c को T का आइगेन मान या विशिष्ट मान या T की आइगेन मूल भी कहा जाता है।
- मान लीजिए कि V एक FDVS है और T, V पर रैखिक संकारक (Linear Operator) है तब T प्रतिलोमीय होगा, यदि और केवल यदि 0, T का आइगेन मान नहीं होगा।
- एक रैखिक संकारक T को परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर विकर्णनीय कहा जाता है अगर $\exists$ का क्रमिक आधार $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ ऐसा है कि T का आव्यूह β के सापेक्ष में एक विकर्ण आव्यूह या मेट्रिक्स हो।
- माना कि T एक रैखिक संकारक परिमित आयाम सदिश समष्टि V पर है T को एक FDVS, V पर एक रैखिक संकारक माना जाता है। $c \in F$, T की आइगेन मान है। सदिश समष्टि W_c के विमा को c की ज्यामितीय गुणनात्मकता कहा जाता है।
- सम्मिश्र सदिश समष्टि C^n में, अंतरिक गुणन को सदिशों $u = (u_1 \dots u_n)$ और $v = (v_1 \dots v_n)$ के लिए परिभाषित किया गया है क्योंकि $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i \bar{v}_i$ जिसको फिर से $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_i |v_i|^2$, $u = v$. के लिए परिवर्तित किया जा सकता है।

2.9 मुख्य शब्दावली

- **रैखिक रूपांतरण** : एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to V$ को V पर एक रैखिक संकारक कहा जाता है, जबकि एक रैखिक रूपांतरण $T : V \to F$ को एक रैखिक फलन कहा जाता है। हम $T.T$ के लिए T^2 और $T^n = T^{n-1}T$ आदि संकेत चिन्ह का उपयोग करते हैं।
- **विकर्णनीय संकारक** : एक रैखिक संकारक T को परिमित आयामीय सदिश समष्टि V पर विकर्णनीय कहा जाता है अगर $\exists$ का क्रमिक आधार $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ ऐसा है कि T का आव्यूह β के सापेक्ष में एक विकर्ण आव्यूह हो।

2.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन को उदाहरण देकर परिभाषित करें।

टिप्पणी

2. रैखिक फलन की परिभाषा दीजिए।
3. रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के बीजगणितीय रूप की व्याख्या करें।
4. प्रतिलोमीय रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों की व्याख्या उदाहरण देकर करें।
5. रैंक–शून्यता प्रमेय को परिभाषित करें।
6. आधार के परिवर्तन के लिए नियम बताएं।
7. दोहरे या द्वैत समष्टि क्या हैं? उदाहरण देकर परिभाषित करें।
8. माना की यदि W_1, W_2 उपसमष्टि हैं परिमित आयामी सदिश समष्टि V पर, तो $A(W_1\text{-}W_2)$ निर्धारित करें।
9. एक रैखिक संकारक को विकर्णनीय करने के लिए नियम बताएं।
10. रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन के आइगेन मान और आइगेन सदिश की व्याख्या कीजिए।
11. न्यूनतम बहुपद को परिभाषित कीजिए।
12. द्विघात और हर्मिटियन रूपों के बारे में व्याख्या कीजिए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन और उन का आव्यूह के रूप में प्रतिनिधित्व किस प्रकार से किया जाता है उदाहरण देकर व्याख्या करें।
2. रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के बीजगणितीय रूप की व्याख्या उदाहरण देकर करें।
3. माना की $\alpha_1 = (1, 1, -2, 1)$, $\alpha_2 = (3, 0, 4 -1)$ और $\alpha_3 = (-1, 2, 5, 2)$ है। सिद्ध कीजिए कि सदिश $(4, -5, 9, -7)$ का विस्तार या फैलाव $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ है।
4. माना की G एक समुच्चय है सभी प्रतिलोमीय रैखिक रूपान्तरणों या परिवर्तनों का $V \to V$ तक। सिद्ध कीजिए कि G एक समूह बनाता है रैखिक रूपांतरणों या परिवर्तनों के गुणन का।
5. मान लीजिए कि $u, v \in V$ और $\varphi(u) = 0 \Rightarrow \varphi(v) = 0$ सभी $\varphi \in \hat{V}$ के लिए। $v = \alpha u$ किसी अदिश या स्केलर α को सिद्ध कीजिए।
6. n–आयामी समष्टि के लिए अभिलक्षणिक या अभिलक्षणिक बहुपद पर शून्य संकारक को ज्ञात कीजिए।
7. दोहरा या द्वैत समष्टि के विभिन्न प्रमेयों पर उदाहरण देकर चर्चा करें।
8. रैंक–शून्यता प्रमेय और आधार के परिवर्तन की व्याख्या उदाहरण देकर करें।
9. रैखिक रूपांतरण या परिवर्तन के आइगेन मान और आइगेन सदिश की व्याख्या उपयुक्त उदाहरणों के साथ करें।
10. अभिलक्षणिक बहुपद की व्याख्या उपयुक्त उदाहरण देकर करें।
11. एक रैखिक संकारक के विशेषता बहुपद के बारे में विस्तार से चर्चा करें।
12. उपयुक्त उदाहरणों की सहायता से द्विघात और हर्मिटियन रूपों के बारे में बताएं।

2.11 सहायक पाठ्य सामग्री

टिप्पणी

Datta, K. B. 2002. *Matrix and Linear Algebra*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

S. S. Sastry. 2012. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: PHI Learning Pvt. Ltd.

S. K. Jain, A. Gunawardena and P. B. Bhattacharya. 2001. *Basic Linear Algebra with MATLAB*. New York: Key College Publishing: Springer-Verlag, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2nd Edition. New York: John Wiley and Sons.

P. B. Bhattacharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul. 1983. *First Course in Linear Algebra*. New Delhi: Wiley Eastern.

Balaguruswamy, E. 1999. *Numerical Methods*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

Datta, N. 2007. *Computer Oriented Numerical Methods*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambari. 2016. *A Course in Abstract Algebra*, 5th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Prasad, Chandrika. 2017. *Text Book on Algebra and Theory of Equations*, 11th Edition. Allahabad: Pothishala Private Ltd.

Conte, Samuel D. and Carl de Boor. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill.

इकाई 3 आंतरिक गुणन समष्टि और लाम्बिक सदिश

टिप्पणी

संरचना

3.0 परिचय

रैखिक बीजगणित (Linear Algebra) में एक आंतरिक गुणन समष्टि (Inner Product Space) एक सदिश समष्टि (Vectors Space) है जिसमें एक अतिरिक्त संरचना होती है जिसे आंतरिक गुणन (Inner Product) कहा जाता है। यह अतिरिक्त संरचना समष्टि में प्रत्येक सदिश के युग्म (Pair) को एक अदिश (Scalar) मात्रा के साथ जोड़ती है जिसे सदिश के आंतरिक गुणन के रूप में जाना जाता है। आंतरिक गुणन सहज ज्यामितीय धारणाओं (Geometrical Notions) जैसे कि एक सदिश की लंबाई या दो सदिशों के बीच के कोण (Angle) का दृढ़ परिचय देता हैं। वे सदिश (शून्य आंतरिक गुणन) (Zero Inner Product) के बीच लाम्बिकता (Orthonogonality) को परिभाषित करने के साधन भी प्रदान करते हैं। आंतरिक गुणन समष्टि विशेष रूप से यूक्लिडियन समष्टि (Euclidean Space) (जिसमें आंतरिक गुणन एक डॉट गुणन है, जिसे अदिश गुणन (Scalar Product) भी कहा जाता है) को किसी भी (संभवतः अनंत) आयाम के सदिश समष्टि के लिए सामान्यीकृत करते हैं, और यह कार्यात्मक विश्लेषण में भी अध्ययन किया जाता है। एक आंतरिक गुणन के साथ एक सदिश समष्टि की अवधारणा का पहला उपयोग १६वीं शताब्दी के इटली के गणितज्ञ गिउसेप्पी पियानो (Giuseppe Peano) के कारण 1898 में संभव हुआ।

एक आंतरिक गुणन स्वाभाविक रूप से एक संबद्ध मानक (Associated Norm) या मानदंड (Norm), ($|x|$ और $|y|$ यहां x और y के मानक या मानदंड हैं) को प्रेरित करता है, इस प्रकार एक आंतरिक गुणन समष्टि भी एक मानक सदिश समष्टि है। एक आंतरिक गुणन के साथ एक पूर्ण समष्टि को हिल्बर्ट समष्टि (Hilbert Space) कहा जाता है। आंतरिक गुणन के साथ एक (अपूर्ण) समष्टि को एक पूर्व–हिल्बर्ट समष्टि (Pre-Hilbert Space) कहा जाता है, क्योंकि आंतरिक गुणन से प्रेरित मानक या मानदंड (Norm) के संबंध में इसकी पूर्णता एक हिल्बर्ट समष्टि है। जटिल या सम्मिश्र संख्याओं

(Complex Numbers) क्षेत्र में आंतरिक गुणन समष्टि को कभी–कभी ऐकिक समष्टि (Unitary Spaces) कहा जाता है।

इस इकाई में आप आंतरिक गुणन समष्टि (Inner Product Space), लाम्बिक सदिश (Orthogonal Vectors) और लाम्बिक पूरक (Orthogonal Complements), और परिमित आयामी समष्टि (Finite Dimensional Space) के लिए बेसेल की असमानता (Bessel Inequality) के बारे में अध्ययन करेंगे।

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- आंतरिक गुणन समष्टि को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- लाम्बिक सदिश और लाम्बिक पूरक की व्याख्या कर पाएंगे;
- परिमित आयामी समष्टि के लिए बेसेल की असमानता का वर्णन कर पाएंगे।

3.2 आंतरिक गुणनफल समष्टि

सामान्य तौर पर, एक सदिश समष्टि (Vector Space) को एक विवेकाधीन क्षेत्र (Arbitrary Field) F पर परिभाषित किया जाता है। हम F को वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं (Real or Complex Numbers) के क्षेत्र तक ही सीमित रखेंगे। पहले प्रकरण में सदिश समष्टि को वास्तविक सदिश समष्टि कहा जाता है और दूसरे मामले में, इसे सम्मिश्र सदिश समष्टि (Complex Vector Space) कहा जाता है। हम वास्तविक सदिश समष्टि का विश्लेषणात्मक ज्यामिति (Analytical Geometry) और सदिश विश्लेषण (Vector Analysis) में अध्ययन करते हैं। हमारे पास दो सदिशों के डॉट (Dot) या अदिश गुणन (Scalar Product) हैं, जो अन्य विषयों के अलावा निम्नलिखित सभी सदिशों के अभिगृहितों को संतुष्ट करते हैं :

(i) $\vec{v}\,.\,\vec{v} \geq 0$ और $(\vec{v}\,.\,\vec{v}) = 0$ Û $\vec{v} = 0$

(ii) $\vec{v}\,.\,\vec{w} = \vec{w}\,.\,\vec{v}$

(iii) $\vec{u}\,.\,(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u}\,.\,\vec{v}) + \beta(\vec{u}\,.\,\vec{w})$

जहाँ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ सदिश (Vectors) है और α, β वास्तविक संख्याएं (Real Numbers) हैं।

हम डॉट गुणन (Dot Product) की अवधारणा को सम्मिश्र सदिश समष्टि पर भी विस्तारित करना चाहते हैं।

हम $V \times V$ पर (जहाँ V, F पर सदिश समष्टि हैं) मानचित्र से डॉट गुणन के समान गुण से परिभाषित करेंगे, जिसे आंतरिक गुणन (Inner Product) कहा जाता है

और फिर हम लंबाई (Length) और लाम्बिकता (Orthogonality) की अवधारणा का अध्ययन करेंगे।

परिभाषाः मान लीजिए कि क्षेत्र (Field) F पर (जहाँ F = वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का क्षेत्र है) एक सदिश समष्टि V है। मान लीजिए कि किसी भी दो सदिशों $u, v \in V \exists$ के लिए एक अवयव $(u, v) \in F$ ऐसा है कि, [(u, v) यहाँ सिर्फ F का एक अवयव है और उसे क्रमिक युग्म (Ordered Pair) के साथ भ्रमित नहीं करना चाहिए।]

1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$ $v\,u$ (अर्थात् (v, u)) का सम्मिश्र संयुग्मी (Complex Conjugate)
2. $(u, u) \geq 0$ और $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$

किसी भी $u, v, w \in V$ और $\alpha, \beta \in F$ के लिए है।

तब V को आंतरिक गुणन समष्टि फलन कहा जाता है जो नियमों या गुणों $(i), (ii)$ और (iii) को संतुष्ट करती है उन्हें आंतरिक गुणन (Inner Product) कहते हैं।

इस प्रकार आंतरिक गुणन समष्टि, एक आंतरिक गुणन फलन के साथ वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र में सदिश समष्टि है।

नोटः

1. गुण (2) आंतरिक गुणन समष्टि की परिभाषा में $(u, v) = \overline{(u,u)}$ $u\,u$ द्वारा *(i)* *(u, u)* = वास्तविक (Real) के समान मायने रखता है।
2. गुण (3) को यह कहकर भी वर्णित किया जा सकता है कि आंतरिक गुणन पहले चर (First Variable) में एक रेखीय मानचित्र (Linear Map) है।
3. क्या हम यह कह सकते हैं कि आंतरिक गुणन दूसरे चर में भी रैखिक (Linear) होता है?

   हम मूल्यांकन करते हैं,

   $(u, \alpha v + \beta w) = \overline{(\alpha v + \beta w, u)}$, (i) से

   $= \bar{\alpha}\,\overline{(v, u)} + \bar{\beta}\,\overline{(w, u)}$

   $= \bar{\alpha}\,(u, v) + \bar{\beta}\,(u, w)$

   इसलिए, यह दूसरे चर में रैखिक नहीं होता है।
4. यदि F = वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र (Field of Real Numbers) है, तो आंतरिक गुणन पहले गए डॉट गुणन के गुणों के समान संतुष्ट करता है।
5. वास्तविक क्षेत्र पर आंतरिक गुणन का यूक्लिडियन समष्टि (Euclidean Space) कहा जाता है और सम्मिश्र क्षेत्र में ऐकिक समष्टि (Unitary Space) कहा जाता है।
6. सभी सदिशों के सदिश समष्टि में वास्तविक के 3–आयामी समष्टि (3-Dimensional Space) में, आंतरिक गुणन, डॉट गुणन (Dot Product) के दो सदिश के समान होगा, अर्थात्

$$<\vec{u}, \vec{v}> = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta.$$

निम्नलिखित उदाहरण इस अवधारणा को स्पष्ट करेंगे:

टिप्पणी

1. यदि $V = F^{(n)}$, F = सम्मिश्र संख्याओं (Complex Numbers) का क्षेत्र (Field) है।

   यदि $u = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ है,

   $v = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, जो $F^{(n)}$ में है,

   $(u, v) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + ... + \alpha_n \overline{\beta_n}$ को परिभाषित करें।

   यह आसानी से देखा जा सकता है कि (u, v) एक आंतरिक गुणन को परिभाषित करता है जिसे मानक आंतरिक गुणन (Standard Inner Product) कहा जाता है।

2. यदि $V = \mathbf{R}^{(2)}$, $u = (\alpha_1, \alpha_2)$, $v = (\beta_1, \beta_2)$

   $(u, v) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + 4\,\alpha_2\beta_2$ को परिभाषित करें।

   तब,

   (*i*) $(u, v) = (v, u) = \overline{(v, u)}$

   (*ii*) $(u, u) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 3\alpha_2^2 \geq 0$

   $$\begin{aligned}(u, u) = 0 &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_2 = 0\\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = 0 = \alpha_2\\ &\Leftrightarrow u = (\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0) = 0\end{aligned}$$

   (*iii*) $(\alpha u + \beta u, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$ को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है।

   इस प्रकार (u, v) आंतरिक गुणन को परिभाषित करता है।

3. हम दिए गए एक आंतरिक गुणन से एक नए एक आंतरिक गुणन का निर्माण कर सकते हैं। मान लीजिए F पर V, W सदिश समष्टि है और T, V से W तक एकैकी (One–One) रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) है।

   मान लीजिए (,) W पर एक आंतरिक गुणन है। तब,

   $< u, v > = (T(u), T(v))$

   V पर एक आंतरिक गुणन को परिभाषित करता है,

   (*i*) $$\begin{aligned}< \overline{v, u} > &= \overline{(T(v), T(u))}\\ &= (T(u), T(v))\\ &= < u, v >\end{aligned}$$

   (*ii*) $< u, v > = (T(u), T(u)) \geq 0$

   और $< u, u > = 0 \Leftrightarrow (T(u), T(u)) = 0$

   $\Leftrightarrow T(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ इसलिए T, 1–1 है।

टिप्पणी

(*iii*) $< \alpha u + \beta v, w > \; = (T(\alpha u + \beta v), T(w))$

$$= (\alpha T(u) + \beta T(v), T(w))$$
$$= \alpha(T(u), T(w)) + \beta(T(v), T(w))$$
$$= \alpha < u, w > + \beta < v, w >$$

4. माना कि $V = M_{m \times n}$ (C) है तो < A, B > = Trace (AB*) अनुरेखित (AB*) होगा जहाँ $B^* = \overline{B'}$, V पर आंतरिक गुणन को परिभाषित करता है क्योंकि,

(*i*) $<\overline{B, A}> = \overline{\text{Trace } BA^*}$

यदि $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), AB^* = C = (c_{ij})$

$B^* = (d_{ij})$, तो $d_{ij} = \bar{b}_{ji}$

$\therefore \quad c_{ik} = \Sigma a_{ij} d_{jk} = \Sigma a_{ij} \bar{b}_{kj}$

$\Rightarrow \quad c_{ii} = \Sigma a_{ij} \bar{b}_{kj}$

$\Rightarrow$ Trace AB^* या अनुरेखित करे AB^*, $= \Sigma c_{ii} = \Sigma(\Sigma a_{ij} \bar{b}_{ij})$

यदि $A^* = (e_{ij})$, तो $e_{ij} = \bar{a}_{ji}$

यदि $BA^* = F = (f_{ij})$, तो

$f_{ik} = \Sigma b_{ij} \bar{a}_{kj}$

$\Rightarrow$ Trace $BA^* = \Sigma f_{ii} = \Sigma(\Sigma b_{ij} \bar{a}_{ij})$

$\Rightarrow \overline{\text{Trace } BA^*} = \Sigma \Sigma a_{ij} \bar{b}_{ij} = \text{Trace } AB^*$

$\Rightarrow <\overline{B, A}> \; = < A, B >$

(*ii*) $< A, B > = \text{Trace } AB^* = \Sigma(\Sigma a_{ij} \bar{b}_{ij})$

$\therefore \quad < A, A > = \sum\sum a_{ij} \bar{a}_{ij} = \sum\sum |a_{ij}|^2 \geq 0$

और $\quad < A, A > = 0 \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0 \; \forall \; i, j$

$\Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0 \; \forall \; i, j$

$\Leftrightarrow \quad A = 0$

इसी तरह स्वयंसिद्ध (Axiom) (*iii*) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण 3.1: यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि (Inner Product Space) है, तो दर्शाएं कि,

(*i*) $(0, v) = 0$ सभी $v \in V$ के लिए।

(*ii*) $(u, v) = 0$ सभी $v \in V \Rightarrow u = 0$ के लिए।

हल: (*i*) $(0, v) = (0, 0, v)$

$$= 0\,(0, v) = 0$$

(*ii*) $(u, v) = 0$ सभी $v \in V$ के लिए।

$\Rightarrow (u, u) = 0 \Rightarrow u = 0.$

उदाहरण 3.2: यदि सदिश समष्टि V की W_1, W_2 दो उपसमष्टि (Subspaces) हैं। यदि W_1, W_2 आंतरिक गुणन समष्टि हैं, तो दिखाएं कि $W_1 + W_2$ भी आंतरिक गुणन समष्टि होगा।

हलः यदि $x, y \in W_1 + W_2$

तब $x = u_1 + u_2$

$y = v_1 + v_2 \quad u_1, v_1 \in W_1; u_2, v_2 \in W_2$

$<x, y>= (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$ को परिभाषित करेंगे।

तब,

$$
\begin{aligned}
(i) \quad \overline{<y, x>} &= \overline{(v_1, u_1) + (v_2, u_2)} \\
&= \overline{(v_1, u_1)} + \overline{(v_2, u_2)} \\
&= (u_1, v_1) + (u_2, v_2) \\
&= <x, y>
\end{aligned}
$$

$(ii) \quad <x, x> = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) \geq 0$

और $<x, x> = 0 \quad \Leftrightarrow (u_1, u_1) = 0 = (u_2, u_2)$

$\Leftrightarrow u_1 = 0 = u_2$

$\Leftrightarrow x = 0$

$(iii) <\alpha x + \beta y, z> = \alpha <x, z> + \beta <y, z>$

इसे आसानी से सिद्ध किया जा सकता है।

$\therefore \quad <x, y> W_1 + W_2$ पर आंतरिक गुणन को परिभाषित करता है।

इस प्रकार, $W_1 + W_2$ एक आंतरिक गुणन समष्टि है।

सदिश का मानक (Norm of a Vector)

यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है, और यदि $v \in V$, तब v का मानक (Norm) (या v की लंबाई) को $\left(\sqrt{(v,v)}\right)$ के रूप में परिभाषित किया जाता है और इसे $\| v \|$ द्वारा दर्शाया जाता है।

3–आयामी समष्टि (3-Dimensional Space) में सभी सदिशों के सदिश समष्टि (Vector Space) में,

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{<\vec{u}, \vec{u}>} = |\vec{u}| = \vec{u} \text{ की लंबाई है।}$$

इस कारण से, सामान्य रूप से सदिश के मानक को सदिश की लंबाई भी कहा जाता है।

उदाहरण 3.3: माना कि $\| \alpha v \| = |\alpha| \, \| v \|$ सभी $\alpha \in F, v \in V$ के लिए है।

हलः $\| \alpha v \|^2 = (\alpha v, \alpha v)$

$= \alpha \, (v, v)$

$= |\alpha|^2 \, \| v \|^2$

$\Rightarrow \| \alpha v \| = |\alpha| \, \| v \|$

टिप्पणी

अब हम काउची–श्क्वार्ज असमानता (Cauchy–Schwarz Inequality) के रूप में ज्ञात एक महत्वपूर्ण असमानता (Inequality) को सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 3.1: यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है तब,

$|(u, v)| \leq \| u \| \| v \|$ सभी $u, v \in V$ के लिए है।

प्रमाण: अगर $u = 0$, तब $(u, v) = (0, v) = 0$

और $\| u \| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{(0,0)} = 0$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S.

यदि $u \neq 0$. तब $\| u \| \neq 0$

क्योंकि, $(\| u \| = 0 \Rightarrow (0, 0) = 0 \Rightarrow (u, u) = \Rightarrow 0 \;\; u = 0)$

यदि, $w = v - \dfrac{(v,u)}{\| u \|^2} u$ है,

$$\text{तब, } (w, w) = \left(v - \frac{(v,u)}{\| u \|^2} u, v - \frac{(v,u)}{\| u \|^2} u \right)$$

$$= (v, v) - \frac{(v,u)}{\| u \|^2} (u, v)$$

$$= \| v \|^2 - \frac{\overline{(u,v)}(u,v)}{\| u \|^2} = \| v \|^2 - \frac{|(u,v)|^2}{\| u \|^2}$$

$$= \frac{\| u \|^2 \| v \|^2 - |(u,v)|^2}{\| u \|^2}$$

क्योंकि $(w, w) \geq 0$,

$|(u, v)|2 \leq \| u \|^2 \| v \|^2$

$\Rightarrow (u, v)| \leq \| u \| \| v \|$.

नोट:

1. उपरोक्त असमानता (Inequality) एक समानता (Equality) होगी यदि और केवल यदि u, v रैखिक (Linearly) रूप से निर्भर होंगे।

प्रमाण: मान लीजिए $|(u, v)| = \| u \| \| v \|$

यदि $u = 0$, तो $u = 0. v \Rightarrow u, v$ रैखिक रूप से निर्भर (Dependent) हैं।

यदि $u \neq 0$ है

उपयुक्त प्रमाणित समीकरणों से,

$(w, w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$$\therefore \quad v - \frac{(v,u)}{\| u \|^2} u = 0$$

$$\Rightarrow \quad v = v - \frac{(v, u)}{\|u\|^2} u \Rightarrow u, v$$ रैखिक रूप से निर्भर हैं।

टिप्पणी

इसके विपरीत यदि $u = \alpha v, \alpha \in F$.

तब $|(u, v)| = |\alpha (v, v)| = |\alpha| \|v\|^2$

$\|u\| \|v\| = |\alpha| \|v\| \|v\| = |\alpha| \|v\|^2$

$|(u, v)| = \|u\| \|v\|$

2. 3–आयामी या त्रिआयामी समष्टि (3-Dimensional Space) में सभी सदिशों के सदिश समष्टि में है,

$|<\vec{u}, \vec{v}>| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\cos\theta|$

$\leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ इसलिए $|\cos\theta| \leq 1$ है

हम पाते है कि कॉउची–श्क्वार्ज असमानता (Cauchy–Schwarz Inequality) सिद्ध होती है।

प्रमेय 3.2: यदि V आंतरिक गुणन समष्टि है।

तब (*i*) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (त्रिभुज असमानता) (Triangle Inequality)

(*ii*) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ समांतर चतुर्भुज नियम) (Parallelogram Law)

प्रमाण: (*i*)
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\
&= (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y) \\
&= \|x\|^2 + \overline{(x, y)} + (x, y) + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2Re\,(x, y) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,|(x, y)| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

इसे त्रिभुज असमानता (Triangle Inequality) कहा जाता है।

क्योंकि $\|x\| + \|y\| =$ एक त्रिभुज (Triangle) की दो भुजाओं की लंबाईयों का योग है।

तथा $\|x+y\| =$ त्रिकोण की तीसरी भुजा की लंबाई यह दर्शाती है कि त्रिकोण के दो तरफ का योग इसकी तीसरी भुजा (Side) से कम है।

(*ii*) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$
$$\begin{aligned}
&= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x, y) - (y, x) \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

टिप्पणी

नोटः $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 =$ चतुर्भुज के विकर्णों (Diagonals) की लंबाई के वर्गों का योग है।

$2 (\| x \|^2 + \| y \|^2) =$ समांतर चतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों (Squares) का योग है।

$\therefore$ एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों (Diagonals) की लंबाई के वर्गों का योग इसकी भुजाओं की लंबाई के वर्गों के योग के बराबर होता है। इस कारण नियम (*ii*) को समांतर चतुर्भुज नियम कहा जाता है।

उदाहरण 3.4: काउची–श्क्वार्ज असमानता का उपयोग करके, यह सिद्ध करें कि कोसाइन (Cosine) कोण का ज्यादा से ज्यादा अधिकतम मान 1 होता है।

हलः यदि $F =$ वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र $V = F^{(3)}$ है।

V पर मानक आंतरिक गुणन (Standard Inner Product) पर विचार करने पर,

माना कि, $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in V$

माना कि, $O = (0, 0, 0)$

माना कि, θ, एक कोण है OU और OV के बीच।

$$\text{तब} \quad \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{(u, v)}{\|u\|\,\|v\|}$$

$$\therefore \quad |\cos\theta| = \frac{|(u, v)|}{\|u\|\,\|v\|} \leq \frac{\|u\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|} = 1$$

3.3 लाम्बिक सदिश और लाम्बिक पूरक

यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है। दो सदिशों $u, v \in V$ को लाम्बिक (Orthogonal) कहा जाता है अगर $(u, v) = 0 \Leftrightarrow (v, u) = 0$ है। तो, u, v से लाम्बिक है, अगर v, u से लाम्बिक है। चूँकि $(0, v) = 0$ सभी $v \in V$ के लिए, $0, V$ में प्रत्येक सदिशों के लिए लाम्बिक है।

विलोमतः, यदि $u \in V$ प्रत्येक सदिशों के लिए लाम्बिक है, तो

$(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

यदि W, V का एक उपसमष्टि है।

$W^{\perp}$ को परिभाषित करें $= \{v \in V \mid (v, w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए$\}$ ($W^{\perp}$ को W लंब (Perpendicular) के रूप में पढ़ा जाता है)।

तो $W^{\perp}$ V का उपसमष्टि है, क्योंकि $0 \in W^{\perp} \Rightarrow W^{\perp} \neq \varphi$ और $v_1, v_2 \in W^{\perp}, \alpha, \beta \in F$

$\Rightarrow (\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha(v_1, w) + \beta(v_2, w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in W^{\perp}$

टिप्पणी

$W^{\perp}$ को W का लाम्बिक पूरक (Orthogonal Complement) कहा जाता है। इस तरह से कहने का कारण $V = W \oplus W^{\perp}$ है।

उदाहरण 3.5: यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि हैं। यदि $x, y \in V$ ऐसा है कि $x \perp y$ है,

फिर दिखाएं कि $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$। (यह पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem) है जब $F = \mathbf{R}$ त्रिभुज ABC में $AB \perp BC$, $AB^2 = \| x \|^2$, $BC^2 = \| y \|^2$, $AC^2 = \| x + y \|^2$) है।

हलः $\| x + y \|^2 = (x + y, x + y)$

$= (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$

$= \| x \|^2 + \| y \|^2$ इसलिए $(x, y) = 0 = (y, x)$

लाम्बिक प्रसामान्य समुच्चय और आधार (Orthonormal Sets and Basis)

आंतरिक गुणन समष्टि V में सदिश के समुच्चय $\{u_i\}_i$ को लाम्बिक (Orthogonal) कहा जाता है कि अगर $i \neq j$ के लिए $(u_i, u_j) = 0$ होगा। आगे यदि सभी i के लिए, $(u_i, u_i) = 1$, तो समुच्चय $\{u_i\}$ को प्रसामान्य लांबिक समुच्चय (Orthonormal Sets) कहा जाता है।

यदि V, n के बराबर या उससे कम श्रेणी या कोटि (Degree) के वास्तविक बहुपद का वास्तविक सदिश समष्टि है। तो V पर एक आंतरिक गुणन को निम्न तरीके से परिभाषित करें,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{j=1}^{n} b_j x^j \right) = \sum_{1}^{n} a_i b_i$$

तब $\{1, x, ..., x^n\}$, V का प्रसामान्य लांबिक उपसमुच्चय (Orthonormal Subset) होता है।

प्रमेय 3.3: यदि S आंतरिक गुणन समष्टि V में गैर–शून्य सदिश (Non-Zero Vector) का एक लाम्बिक समुच्चय है, तब S एक रैखिक स्वतंत्र समुच्चय (Linearly Independent Set) होगा।

प्रमाणः S को रैखिक रूप से स्वतंत्र (Independent) दिखाने के लिए, हमें यह दिखाना होगा कि S का प्रत्येक सीमित या परिमित (Finite) उपसमुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

यदि $\{v_1, ..., v_n\}$ S का परिमित उपसमुच्चय है।

यदि $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$, $\alpha_i \in F$

$(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = 0$

$\Rightarrow \quad |\alpha_1|^2 \| v_1 \|^2 + ... + |\alpha_n|^2 \| v_n \|^2 = 0$

$\Rightarrow \quad |\alpha_i|^2 \| v_i \|^2 = 0$ सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

$\Rightarrow$ $|\alpha_i|^2 = 0$ क्योंकि $\|v_i\|^2 = 0 \Rightarrow \|v_i\| = 0 \Rightarrow v_i = 0$
जोकि सत्य नहीं है।

$\Rightarrow$ $\alpha_i = 0$ सभी $i = 1, ..., n$ के लिए।

$\Rightarrow$ S रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

टिप्पणी

उपप्रमेय 1: एक आंतरिक गुणन समष्टि में एक लाम्बिक समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।

प्रमाण: मान ले कि S एक आंतरिक गुणन समष्टि V है। यदि $v \in S$ तब $v \neq 0$ क्योंकि $v = 0 \Rightarrow (v, v) = 0 \neq 1$, जो एक विरोधाभास है। इसलिए, S गैर–शून्य सदिश का एक लाम्बिक समुच्चय है और इसलिए रैखिक रूप से स्वतंत्र है।

ग्राम–शिमट ऑर्थोगोनाइजेशन प्रक्रिया (Gram-Schmit Orthogonalization Process)

रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश के किसी भी समुच्चय को ग्राम–शिमट प्रक्रिया द्वारा लाम्बिक सदिश के एक समुच्चय में परिवर्तित किया जा सकता है।

प्रमेय 3.4: यदि $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ एक आंतरिक गुणन समष्टि V में आंतरिक गुणन $\langle , \rangle$ के साथ एक आधार (Basis) है। तो $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ को पुनरावृत्ति (Recursively) द्वारा परिभाषित करें, $m_k = u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 - \langle u_k, v_2 \rangle v_2 - .... - \langle u_k, v_{k-1} \rangle v_{k-1}$ जहाँ $v_k = \dfrac{m_k}{\|m_k\|}$ $2 \leq k \geq n$ के लिए। तब $\{v_k\}_{k=1}^{n}$ V का प्रसामान्य लांबिक आधार (Orthonormal Basis) होगा।

प्रमाण: हम इस प्रमेय को n पर प्रवेशण (Induction) द्वारा सिद्ध करेंगे। जब $n = 1$ तो $\{u_k\}_{k=1}^{n} = = \{u_k\}_{k=1}^{1} = u_1$

एक आंतरिक गुणन समष्टि V का एक आधार है।

$v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} \in$ विस्तृति या फैलाव (विस्तार) (Span) (u_1) हो तो, इससे हमें मिलेगा, विस्तृति फैलाव (विस्तार) (Span)(v_1) = फैलाव (विस्तार) (Span)$(u_1) = V$ है। जो इस प्रकार v_1, V का प्रसामान्य लांबिक आधार (Orthonormal Basis) है और परिणाम $n = 1$ पर प्रयोग होता है। मान लीजिए कि परिणाम सभी n पर प्रयोग होता है।

यदि $\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ एक आंतरिक गुणन समष्टि V का एक आधार है। विवेचनात्मक अवधारणा या परिकल्पना (Inductive Hypothesis) द्वारा, हम $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ का उपयोग करके प्रसामान्य लांबिक समुच्चय के सदिशों $\{v_k\}_{k=1}^{n}$ का निर्माण इस तरह कर सकते हैं कि विस्तृति या फैलाव (विस्तार) $(\{v_k\}_{k=1}^{n})$ = विस्तृति या फैलाव (विस्तार)$(\{u_k\}_{k=1}^{n})$ । यदि m_{n+1} को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि,

$$u_{n+1} - \langle u_{n+1}, v_1 \rangle v_1 - \langle u_{n+1}, v_2 \rangle v_2 - .... - \langle u_{n+1}, v_n \rangle v_n = u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, v_i \rangle v_i$$

टिप्पणी

यह दिखाने के लिए कि सदिश $v_1, v_2, \ldots, v_n, m_{n+1}$ पारस्परिक रूप से लाम्बिक (Orthogonal) हैं, आंतरिक गुणन के m_{n+1} का v_j के साथ, जहाँ सभी $1 \le j \ge n$ के लिए है, पर विचार करें। हल करने पर, हमारे पास होगा,

$$\left\langle m_{n+1}, v_j \right\rangle = \left\langle u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, v_i \rangle v_i, v_i \right\rangle = \left\langle u_{n+1}, v_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, v_i \rangle v_i, v_j \right\rangle$$

चूंकि $\{v_k\}_{k=1}^{n}$ एक आंतरिक गुणन समष्टि V का एक आधार है जहाँ $\left\langle v_i, v_j \right\rangle = \delta_{ij}$ है,

समीकरण के दाहिने तरफ की ओर के योग के प्रत्येक पद (Term), केवल जहाँ $i = j$, को छोड़कर लुप्त (Vanish) हो जाएगी। तो हमारे पास होगा,

$$\left\langle m_{n+1}, v_j \right\rangle = \left\langle u_{n+1}, v_j \right\rangle \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle u_{n+1}, v_i \rangle v_i, v_j \right\rangle = \left\langle u_{n+1}, v_j \right\rangle - \left\langle \langle u_{n+1}, v_j \rangle v_i, v_j \right\rangle$$
$$= \left\langle u_{n+1}, v_j \right\rangle - \left\langle u_{n+1}, v_j \right\rangle \left\langle v_j, v_j \right\rangle = \langle u_{n+1}, v_j \rangle - \langle u_{n+1}, v_j \rangle = 0.$$

इसका मतलब यह है कि m_{n+1}, v_j के लिए लाम्बिक (Orthogonal) है। तो हम ले सकते हैं $v_{n+1} = \dfrac{m_{n+1}}{\|m_{n+1}\|}$ एक प्रसामान्य लाम्बिक सदिशों का समुच्चय (Orthonormal Set of Vectors) है।

अब हम दिखाएंगे कि $\{v_k\}_{k=1}^{n+1}$, V के लिए एक आधार है। निर्माण के द्वारा, प्रत्येक $v_{k'}$ सदिशों $\{u_k\}_{k=1}^{n+1}$ के लिए रैखिक संयोजन (Linear Combination) है, इसलिए हमारे पास n+1 लाम्बिक है और इसलिए n+1 आयामी समष्टि V में रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश है। इसका मतलब है कि $\{v_k\}_{k=1}^{n+1}$, V के लिए एक आधार है। इस प्रकार परिणाम n+1 पर यथोचित है और प्रवेशन के सिद्धांत के अनुसार, सभी n के लिए भी है। इसलिए प्रमेय सिद्ध होती है।

प्रमेय 3.5: माना कि V एक n आयामी (Dimension n) गैर–शून्य आंतरिक गुणन समष्टि है। तब V का एक प्रसामान्य लाम्बिक (Orthonormal) आधार होगा।

प्रमाण: V का एक लाम्बिक आधार (Orthogonal Basis) बनाना ही पर्याप्त होगा। यदि $S \subseteq V$ एक लाम्बिक समुच्चय है। तब $T = \left\{ \dfrac{x}{\|x\|} \mid x \in S \right\}$ एक प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय (Orthonormal Set) है।

मान लें कि $\{v_1, ..., v_n\}$ V का एक आधार है।

यदि $w_1 = v_1$ तो w_2 को परिभाषित करने पर $= v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1$ होगा।

$$= v_2 - \frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)}\ v_1$$

तब $(w_2, w_1) = (w_2, v_1)$

$$= (v_2, v_1) - \frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)}\ (v_1, v_1) = 0$$

इसके अलावा $v_2 = \alpha_1 v_1 + w_2 = \alpha_1 w_1 + w_2$

जहाँ $\alpha_1 = \frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)} \in F$

(ध्यान दें, v_1 रैखिक रूप से स्वतंत्र (Linearly Independent) है $\Rightarrow v_1 \neq 0 \Rightarrow (v_1, v_1) \neq 0$)

w_3 को परिभाषित करने पर $= v_3 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1$ होगा।

तब $(w_3, w_2) = 0 = (w_3, w_1)$ है।

इसके अलावा $v_3 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + w_3$, जहाँ $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ है।

इस तरह हम एक लाम्बिक समुच्चय $\{w_1,..., w_n\}$ को बना सकते हैं जहाँ प्रत्येक $\alpha_i \in F$ के लिए

$v_i = \alpha_1 w_1 + ... + w_i$, होगा।

$\therefore \left\{\frac{w_1}{\| w_1 \|},..., \frac{w_n}{\| w_n \|}\right\}$ एक प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है जो उपप्रमेय (Corollary) से प्रमेय 3.3 के द्वारा रैखिक रूप से स्वतंत्र है और इसलिए V का एक आधार बनाता है क्योंकि विमा (dim) $V = n$ है।

अन्य विकल्प अलिटर (Aliter): यदि विमा $V = n$ है। हम n पर प्रवेशन का उपयोग करते हैं।

यदि $n = 1$ है। माना कि, $0 \neq x \in V$ है, तब $v = \frac{x}{\| x \|} \in V$ इस प्रकार है कि $\| v \| = 1$ है।

तो, $\{v\}$, V का प्रसामान्य लांबिक आधार (Orthonormal Basis) है।

अब मान लीजिए कि परिणाम $n - 1$ के बराबर या उससे कम आयाम के किसी भी आंतरिक गुणन समष्टि के लिए सही होगा।

मान लें कि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है n आयाम का।

यदि $0 \neq v \in V$ ऐसा है कि $\| v \| = 1$

तो $T_v : V \to \mathbf{C}$ को ऐसे परिभाषित करे है कि,

$T_v(v') = \langle v', v \rangle$ है।

टिप्पणी

तब T_v एक रैखिक रूपांतरण (Linear Transformation) होगा।

यदि $\alpha \in \mathbf{C}$ है, तब $\alpha = \alpha \| v \|^2 = \alpha < v, v > = < \alpha v, v > = T_v(\alpha v)$ होगा।

इसलिए T_v आच्छादक (Onto) है अर्थात रेंज या सीमा (Range) $T_v = \mathbf{C}$

सिल्वेस्टर नियम (Sylvester's Law) के द्वारा,

विमा $V =$ विमा Ker अष्टि $T_v +$ विमा रेंज या सीमा (Range) T_v है,

$\Rightarrow \quad n =$ विमा Ker $T_v +$ विमा $\mathbf{C} =$ विमा Ker $T_v + 1$

$\Rightarrow \quad$ विमा $W = n - 1$, जहां $W = \text{Ker } T_v$ है,

$= \{x \in V \mid T_u(x) = 0\}$

$= \{x \in V \mid < v, x > = 0\}$

प्रवेशन परिकल्पना या अवधारणा के द्वारा, W का $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\}$ प्रसामान्य लांबिक आधार है

अब $w_i \in W \Rightarrow \quad < v, w_i > = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n-1$

इसके अलावा $< v, v > = \| v \|^2 = 1$

तो $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, v\}$ प्रसामान्य लांबिक आधार है।

अर्थात, $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, v\}$ एक LI समुच्चय है मानक नियम द्वारा।

चूंकि विमा $V = n$, $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, v\}$, V का एक आधार है और इसलिए V प्रसामान्य लांबिक आधार (Orthonormal Basis) है। इस प्रकार, परिणाम प्रवेशन के द्वारा प्राप्त होता है।

उदाहरण 3.6: (1, 0, 3) और (2, 1, 1) द्वारा उत्पन्न $\mathbf{R}^3$ के उपसमष्टि के लिए मानक आंतरिक गुणन (Standard Inner Product) के सापेक्ष में, एक प्रसामान्य लांबिक (Orthonormal) आधार प्राप्त करें।

हल: यदि $v_1 = (1, 0, 3), v_2 = (2, 1, 1)$

तो $\quad w_1 = v_1,\ w_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1$

अब $(v_2, w_1) = (v_2, v_1) = 2 + 0 + 3 = 5$

$(w_1, w_1) = (v_1, v_1) = 1 + 0 + 9 = 10$

$\therefore \quad \| w_1 \| = \sqrt{10}$

इसलिए $\quad w_2 = (2, 1, 1) - \dfrac{5}{10}(1, 0, 3) = \left(\dfrac{3}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \quad \| w_2 \| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 1 + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$\therefore \quad$ आवश्यक प्रसामान्य लांबिक आधार (Orthonormal Basis) है।

टिप्पणी

उदाहरण 3.7: यदि V, $\boldsymbol{R}$ पर एक आंतरिक गुणन है। यदि $\{v_1, v_2,..., v_n\}$, V का एक आधार इस प्रकार है कि, जब भी $v = \Sigma\alpha_i v_i$ तब $|| v ||^2 = \Sigma\alpha_i^2$ होगा। दिखाएँ कि $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ एक प्रसामान्य लांबिक आधार है।

हल: हमारे पास $v_i = 1.v_i \Rightarrow \| v_i \|^2 = 1 \; \forall i$ परिकल्पना या अवधारणा (Hypothesis) द्वारा।

$v_i + v_j$ पर विचार करने पर, $i \neq j$ है,

तब $\| v_i + v_j \|^2 = 2$

$\Rightarrow \quad < v_i, v_i > + < v_j, v_j > + < v_i, v_j > + < v_j, v_i > = 2$

$\Rightarrow \quad < v_i, v_j > + < v_j, v_i > = 0$

$\Rightarrow \quad < v_i, v_j > + < v_i, v_j > = 0$ क्योंकि $\mathbf{R}$ पर V आंतरिक गुणन है।

$\Rightarrow \quad < v_i, v_j > = 0 \; \forall i \neq j$

इस प्रकार $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ प्रसामान्य लांबिक आधार है।

3.4 परिमित आयामी समष्टि के लिए बेसेल असमानता

प्रमेय 3.6: बेसेल असमानता (Bessel's Inequality)

यदि $\{w_1,..., w_m\}$, V में एक प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है, तो

$$\sum_{i=1}^{m} |(w_i, v)|^2 \leq \| v \|^2$$ सभी $v \in V$ के लिए।

प्रमाण: यदि $x = v - \sum_{i=1}^{m} (v, w_i)\, w_i$

$\therefore \quad (x, w_j) = (v, w_j) - (v, w_j) = 0$ है सभी $j = 1,..., m$ के लिए।

माना कि, $\quad w = \sum_{i=1}^{m} (v, w_i)\, w_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i,\; \alpha_i = (v, w_i)$ है,

$\therefore \quad v = x + w$

इसी प्रकार, $(w, x) = (\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m, x)$

$$= \alpha_1(w_1, x) + ... + \alpha_m(w_m, x) = 0$$

अब, $\| v \|^2 = (v, v)$

$$= (w + x, w + x)$$
$$= (w, w) + (x, x)$$
$$= \| w \|^2 + \| x \|^2 \geq \| w \|^2$$

किन्तु, $\| w \|^2 = (w, w)$

$$= (\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m, \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m)$$
$$= \alpha_1 \overline{\alpha_1}\ (w_1, w_1) + ... + \alpha_m \overline{\alpha_m}\ (w_m, w_m)$$
$$= |\alpha_1|^2 + ... + |\alpha_m|^2$$

क्योंकि $\{w_1,....., w_m\}$ प्रसामान्य लांबिक समुच्चय (Orthonormal Set) है।

$$= \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |(v_i, w_i)|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\overline{(w_i, v)}|^2 = \sum_{i=1}^{m} |(w_i, v)|^2$$

$\therefore \sum_{i=1}^{m} |(w_i, v)|^2 \le \| v \|^2$ होगा सभी $v \in V$ के लिए।

उपप्रमेय: समानता होगी यदि और केवल यदि $v = w$ हो।

प्रमाण: मान लीजिए कि $v = w$ है।

तब $\| v \|^2 = \| w \|^2 = \sum_{i=1}^{m} |(w_i, v)|^2$

इसके विपरीत (Conversely), मान लीजिए कि समानता (Equality) होगी,

तब $\| v \|^2 = \| w \|^2$

$\Rightarrow \| x \|^2 = 0 \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow v = w + x = w$

प्रमेय 3.7: यदि V एक सीमित या परिमित आयामी आंतरिक गुणन समष्टि है और W, V एक उपसमष्टि है तो $V = W \oplus W^{\perp}$ होगा।

प्रमाण: चूँकि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है, इसलिए प्रमेय 3.5 से, W का $\{w_1,..., w_m\}$ एक प्रसामान्य लांबिक आधार है।

यदि $v \in V$, $w = \sum_{i=1}^{m} (v, w_i) w_i$, $w_i \in W$ और $x = v - w$

तब $(x, w_j) = 0$ जैसा कि प्रमेय 3.6 में है, सभी $j = 1,..., m$ के लिए।

$$\therefore \quad (x, w) = (x, \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m)$$
$$= \overline{\beta_1}\ (x, w_1) + ... + \overline{\beta_m}\ (x, w_m)$$
$$= 0 \text{ सभी } w \in W \text{ के लिए।}$$
$$\therefore \quad x \in W^{\perp}$$

इस तरह, $v = w + x \in W + W^{\perp}$

$$V \subseteq W + W^{\perp}$$
$$\Rightarrow \quad V = W + W^{\perp}$$

यदि $y \in W \cap W^{\perp}$

$\Rightarrow \quad (y, w) = 0$ है सभी $w \in W, y \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (y, y) = 0$ क्योंकि $y \in W$ है।

$\Rightarrow \quad y = 0$

$\therefore \quad W \cap W^{\perp} = \{0\}$

इस प्रकार $V = W \oplus W^{\perp}$ है।

उपप्रमेय–1: यदि W एक परिमित या सीमित आयामी आंतरिक गुणन समष्टि V का एक उपसमष्टि है, तो

$(W^{\perp})^{\perp} = W$

$V = W \oplus W^{\perp}$

यदि $w \in W, x \in W^{\perp}$

तब $x \in W^{\perp} \Rightarrow \; < x, y > = 0 \quad \forall \; y \in W$

$\Rightarrow \; < x, w) = 0 \quad \forall \; x \in W^{\perp}$

$\Rightarrow \; w \in (W^{\perp})^{\perp}$

अर्थात, $W^{\perp} \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$ है,

यदि $v \in (W^{\perp})^{\perp}$ तब $v = w + w', w \in W, w' \in W^{\perp}$

$\Rightarrow 0 = < w', v > = < w', w + w') = < w', w > + < w', w' > = < w', w' >$

तो $w' = 0 \Rightarrow v = w \in W$

अर्थात, $(W^{\perp})^{\perp} \subseteq W$ से $W = (W^{\perp})^{\perp}$ मिलेगा।

उपप्रमेय–2: अगर $S = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, W का आधार है, और $T = \{y_1, y_2, ..., y_s\}$, $W^{\perp}$ का एक आधार है, तो $\{x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_s\}$, V का प्रसामान्य लांबिक आधार होगा।

पूर्ववर्ती प्रमेय द्वारा $V = W \oplus W^{\perp}$

इस प्रकार, $S \cup T$, V का एक आधार है।

इसके अलावा $< x_i, y_j > = 0 \; \forall \; i, j$ क्योंकि $y_j \in W^{\perp} \; \forall j$

यह परिणाम को सिद्ध करता है।

नोट: प्रमेय 3.7 अनन्त आयामी सदिश समष्टि (Infinite Dimensional Vector Space) के प्रकरण में सही नहीं है।

मान लो $V = \{(a_n) \mid (a_n)$ सम्मिश्र संख्याओं (Complex Number) का एक क्रम ऐसा है कि,

$$\left. \sum_{1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \text{ है।}$$

तब V घटक (Component) के रूप मे योग और सदिश गुणन के सापेक्ष में एक सदिश समष्टि है।

टिप्पणी

$a = (a_n), b = (b_n) \in V$ को लेते है।

$< a, b > = \sum_{1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ को परिभाषित करें।

क्योंकि, $(|a_n| - |b_n|)^2 \geq 0$

$|a_n|^2 + |b_n|^2 \geq 2|a_n||b_n|$ है।

अब, $2|\Sigma a_n \bar{b}_n| \leq 2\Sigma |a_n|| \bar{b}_n|$

$\Rightarrow 2|\Sigma a_n \bar{b}_n| \leq 2 \Sigma|a_n||b_n|$ क्योंकि $|b_n| = |\bar{b}_n|$

$\leq \Sigma|a_n|^2 + \Sigma|b_n|^2 < \infty$

इस प्रकार V पर $< a, b >$ यथोचित स्पष्ट आंतरिक गुणन है।

मान ले कि $A_k \in V$ इस तरह है कि, k वीं प्रविष्टि 1 है और बाकी स्थान पर 0 है।

यदि $S = \{| A_k | k = 1, 2, ..., \} \subseteq V$ है,

तब $< A_i, A_j > = \delta_{lj}$ होगा।

यदि $W = L(S)$, तब $W \neq V$ क्योंकि $v = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \in V$ और $v \notin L(S)$. है।

[वास्तव में $L(S)$, उन अनुक्रमों का समुच्चय है जिनकी केवल सीमित संख्या की प्रविष्टियां गैर–शून्य (Non-Zero) है]।

इसके अलावा $x \in W^{\perp} \Rightarrow < x, w > = 0 \quad \forall\, w \in W$

$\Rightarrow \quad < x, A_k > = 0 \;\; \forall\; k = 1, 2, ...$

$\Rightarrow \quad x_k = 0 \;\forall k$ जहाँ $x = (x_n)$

$\Rightarrow \quad x = 0$ या $W^{\perp} = \{0\}$

इस तरह $V \neq W \oplus W^{\perp} = W$

मानक नियम द्वारा ध्यान दें की V यहाँ $F.D.V.S.$ नहीं है।

उदाहरण 3.8: यदि W, V का एक उपसमष्टि है, और $v \in V$ है और $(v, w) + (w, v) \leq (w, w)$ को संतुष्ट करता है सभी $w \in W$ के लिए, तो सिद्ध करें कि $(v, w) = 0$, सभी $w \in W$ के लिए, जहाँ V, F के ऊपर एक आंतरिक गुणन है।

हलः मान लें कि n एक धनात्मक (+ve) पूर्णांक (Integer) है।

$w \in W \Rightarrow \frac{w}{n} \in W$

$\therefore \quad \left(v, \frac{w}{n}\right) + \left(\frac{w}{n}, v\right) \leq \left(\frac{w}{n}, \frac{w}{n}\right)$

$\therefore \quad (v, w) + (w, v) \leq \frac{1}{n} (w, w)$

टिप्पणी

यदि $n \to \infty$

तब $(v, \mathrm{w}) + (w, v) \le 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$(v, -w) + (-w, v) \quad \le 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad -[(v, w) + (w, v)] \le 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (v, w) + (w, v) \ge 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (v, w) + (w, v) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

अगर $F \subseteq \mathbf{R}$, तब $(w, v) = (v, w)$

$\Rightarrow \quad (v, w) + (v, w) = 0$

$\Rightarrow \quad 2(v, w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (v, w) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

अगर $F \subseteq \mathbf{C}$ है, तब $\quad (v, iw) + (iw, v) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad -i\,(v, w) + i\,(w, \bar{z}) = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

$\Rightarrow \quad -i\,[z - \bar{z}] = 0, z \quad = (v, w) = x + iy$

$\Rightarrow \quad -i\,(2iy) \quad = 0$

$\Rightarrow \quad y \quad = 0$

$\Rightarrow \quad z = (v, w) \quad =$ वास्तविक (Real) सभी $w \in W$ के लिए

$\Rightarrow \quad (v, w) + (v, w) \quad = 0$

$\Rightarrow \quad 2\,(v, w) \quad = 0$

$\Rightarrow \quad (v, w) \quad = 0$ सभी $w \in W$ के लिए।

उदाहरण 3.9: यदि V एक सीमित या परिमित (Finite) आयामी आंतरिक गुणन समष्टि है, और $f \in V$ तो सिद्ध करें कि $\exists\, u_0 \in V$ ऐसा है कि, सभी $v \in V$ के लिए $f(v) = (v, u_0)$ है। इसके अलावा, यह भी दर्शाइये कि u_0 को विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जाता है।

हलः मान लीजिए कि $\{v_1, ..., v_n\} V$ का प्रसामान्य लांबिक आधार है और माना कि, $v \in V$ है।

तब $\quad v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in F$

यदि $\quad f(v_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, ..., n$

$u_0 = \overline{\beta_1}\, v_1 + ... + \overline{\beta_n}\, v_n \in V$ को परिभाषित करने पर,

तब $\quad (v, u_0) \quad = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \overline{\beta_1}\, v_1 + ... + \overline{\beta_n}\, v_n)$

$= \alpha_1 \beta_1 + ... + \alpha_n \beta_n$ जैसे $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$

$= f(v)$ सभी $v \in V$ के लिए

मान ले कि $\exists\, u_0' \in V$ ऐसा है कि $f(v) = (v, u_0')$।

टिप्पणी

तब $(v, u_0) = (v, u_0')$ सभी $v \in V$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (v, u_0 - u_0') = 0$ सभी $v \in V$ के लिए।

$\Rightarrow \quad (u_0 - u_0', u_0 - u_0') = 0$

$\Rightarrow \quad u_0 = u_0'$

इस प्रकार, u_0 को विशिष्ट रूप से निर्धारित किया जाता है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. आंतरिक गुणन समष्टि क्या है?
2. सदिश मानदंड को परिभाषित करें।
3. लाम्बिक समुच्चय की परिभाषा दें।
4. वह कौन सी प्रक्रिया है जो रैखिक रूप से स्वतंत्र सदिश के किसी समुच्चय को लाम्बिक सदिश के एक समुच्चय में परिवर्तित करती है?
5. बेसेल की असमानता प्रमेय का वर्णन करें।

3.5 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. मान लीजिए कि क्षेत्र F पर (जहाँ $F =$ वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का क्षेत्र है) एक सदिश समष्टि V है। तथा मान लीजिए कि किसी भी दो सदिशों $u, v \in V \exists$ के लिए एक अवयव $(u, v) \in F$ इस प्रकार है कि, [(u, v) यहाँ सिर्फ F का एक अवयव है] तो,

   (*i*) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ $v\, u$ (अर्थात् (v, u)) का सम्मिश्र संयुग्मी है,

   (*ii*) $(u, u) \geq 0$ और $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ है,

   (*iii*) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$ है,

   किसी भी $u, v, w \in V$ और $\alpha, \beta \in F$ के लिए है।

   तब V को आंतरिक गुणन समष्टि कहा जाता है और जो फलन नियमों (*i*), (*ii*) और (*iii*) को संतुष्ट करती है उन्हें आंतरिक गुणन कहते हैं।

2. यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है और यदि $v \in V$, तब v का मानक (या v की लंबाई) को $\left(\sqrt{(v,v)}\right)$ के रूप में परिभाषित और इसे $\| v \|$ द्वारा दर्शाया जाता है।

3. आंतरिक गुणन समष्टि V में सदिश के समुच्चय $\{u_i\}_i$ को लाम्बिक कहा जाता है अगर $i \neq j$ के लिए $(u_i, u_j) = 0$ होगा। आगे यदि सभी i के लिए, $(u_i, u_i) = 1$ है, तो समुच्चय $\{u_i\}$ को प्रसामान्य लांबिक समुच्चय कहा जाता है।

4. रैखिकीय स्वतंत्र सदिश के किसी भी समुच्चय को ग्राम–श्मिट प्रक्रिया द्वारा लाम्बिक सदिश के एक समुच्चय में परिवर्तित किया जा सकता है।

टिप्पणी

5. बेसेल असमानता

यदि $\{w_1,..., w_m\}$, V में एक प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है, तो

$$\sum_{i=1}^{m} |(w_i, v)|^2 \leq \| v \|^2$$ सभी $v \in V$ के लिए है।

3.6 सारांश

- सामान्य तौर पर, एक सदिश समष्टि को एक विवेकाधीन क्षेत्र F पर परिभाषित किया जाता है। हम F को वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं के क्षेत्र तक ही सीमित रखते है। पहले प्रकरण में सदिश समष्टि को वास्तविक सदिश समष्टि कहा जाता है और दूसरे प्रकरण में, इसे सम्मिश्र सदिश समष्टि कहा जाता है।
- मान लीजिए कि क्षेत्र F पर (जहाँ F = वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का क्षेत्र है) एक सदिश समष्टि V है। मान लीजिए कि किसी भी दो सदिशों u, $v \in V \exists$ के लिए एक अवयव $(u, v) \in F$ ऐसा है कि, [(u, v) यहाँ सिर्फ F का एक अवयव है और उसे क्रमिक युग्म के साथ भ्रमित नहीं करना चाहिए।]

  (i) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ $v\,u$ (अर्थात् (v, u)) का सम्मिश्र संयुग्मी

  (ii) $(u, u) \geq 0$ और $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ है,

  (iii) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$

  किसी भी $u, v, w \in V$ और $\alpha, \beta \in F$ के लिए है।

  तब V को आंतरिक गुणन समष्टि कहा जाता है और जो फलन नियमों (i), (ii) और (iii) को संतुष्ट करती है उन्हें आंतरिक गुणन कहते हैं।
- यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है और यदि $v \in V$, तब v का मानक (या v की लंबाई) को $\left(\sqrt{(v,v)}\right)$ के रूप में परिभाषित और इसे $\| v \|$ द्वारा दर्शाया जाता है।
- एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई के वर्गों का योग इसकी भुजाओं की लंबाई के वर्गों के योग के बराबर होता है।
- यदि V एक आंतरिक गुणन समष्टि है। दो सदिशों $u, v \in V$ को लाम्बिक कहा जाता है अगर $(u, v) = 0 \Leftrightarrow (v, u) = 0$। तो, u, v से लाम्बिक है अगर v, u से लाम्बिक है। चूँकि $(0, v) = 0$ सभी $v \in V$ के लिए, 0, V में प्रत्येक सदिशों के लिए लाम्बिक है।
- $W^{\perp}$ को W का लाम्बिक पूरक कहा जाता है। इस तरह से कहने का कारण $V = W \oplus W^{\perp}$ है।

टिप्पणी

- आंतरिक गुणन समष्टि V में सदिश के समुच्चय $\{u_i\}_i$ को लाम्बिक कहा जाता है कि अगर $i \neq j$ के लिए $(u_i, u_j) = 0$ होगा। यदि सभी i के लिए, $(u_i, u_i) = 1$, तो समुच्चय $\{u_i\}$ को प्रसामान्य लांबिक समुच्चय कहा जाता है।
- यदि S आंतरिक गुणन V में गैर–शून्य सदिश का एक लाम्बिक समुच्चय है। तब S एक रैखिकीय स्वतंत्र समुच्चय होगा।
- एक आंतरिक गुणन समष्टि में एक लाम्बिक समुच्चय रैखिक रूप से स्वतंत्र होता है।
- रैखिकीय स्वतंत्र सदिश के किसी भी समुच्चय को ग्राम–श्मिट प्रक्रिया द्वारा लाम्बिक सदिश के एक समुच्चय में परिवर्तित किया जा सकता है।
- यदि V एक n आयामी गैर–शून्य आंतरिक गुणन समष्टि है। तब V का एक लाम्बिक आधार होगा।
- यदि V एक परिमित आयामी आंतरिक गुणन समष्टि है और W, V एक उपसमष्टि है तो $V = W \oplus W^{\perp}$ होगा।
- अगर $S = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, W का आधार है, और $T = \{y_1, y_2, ..., y_s\}$, $W^{\perp}$ का एक आधार है, तो $\{x_1, x_2, ..., x_r, y_1, y_2, ..., y_s\}$ V का प्रसामान्य लांबिक आधार होगा।

3.7 मुख्य शब्दावली

- **समांतर चतुर्भुज नियम :** जब एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों की लंबाई के वर्गों का योग इसकी भुजाओं की लंबाई के वर्गों के योग के बराबर होता है तब इस को समांतर चतुर्भुज नियम कहा जाता है।
- **प्रसामान्य लांबिक समुच्चय और आधार :** आंतरिक गुणन समष्टि V में सदिश के समुच्चय $\{u_i\}_i$ को लाम्बिक कहा जाता है कि अगर $i \neq j$ के लिए $(u_i, u_j) = 0$ होगा। आगे यदि सभी i के लिए, $(u_i, u_i) = 1$, तो समुच्चय $\{u_i\}$ को प्रसामान्य लांबिक समुच्चय कहा जाता है।
- **बेसेल का असमानता प्रमेय :** यह एक प्रमेय है जिसमें कहा गया है कि यदि $\{w_1, ..., w_m\}$ आंतरिक लांबिक समुच्चय है V में, तब $\leq \| v \|2$ सभी $v \in V$ के लिए है।

3.8 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. आंतरिक गुणन समष्टि को परिभाषित करें।
2. दो सदिश का अदिश गुणन क्या है?
3. लांबिक सदिश और लांबिक पूरक की व्याख्या उदाहरण देकर करें।

4. यूक्लिडियन समष्टि और ऐकिक समष्टि की व्याख्या करें।
5. लांबिक समुच्चय और प्रसामान्य लांबिक समुच्चय को परिभाषित करें।
6. काउची–श्क्वार्ज असमानता को परिभाषित करें।
7. ग्राम–श्मिट लांबिकता प्रक्रिया की व्याख्या उदाहरण देकर करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. सिद्ध करें कि $(x, z) = (y, z)$ सभी $z \in V \Rightarrow x = y$ के लिए है।
2. सिद्ध करें कि $\alpha \in R^2$ के लिए,

   $$\alpha = (\alpha, \in_1) \in_1 + (\alpha, \in_2) \in_2$$

   जहाँ $\in_1 = (1, 0)$, $\in_2 = (0,1)$ है।
3. सिद्ध करें कि $| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$ सभी $x, y \in V$ के लिए है।
4. माना कि W_1 तथा W_2 उपसमष्टि है, जो कि परिमित आयामी आंतरिक गुणन समष्टि V है। दर्शायें कि
   (i) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$
   (ii) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$
5. लाम्बिक आधार ज्ञात करें मानक आंतरिक गुणन के सन्दर्भ में उपसमष्टि R^4 के लिए जिसे (1, 0, 2, 0) तथा (1, 2, 3, 1) द्वारा निर्धारित किया गया है।

3.9 सहायक पाठ्य सामग्री

Datta, K. B. 2002. *Matrix and Linear Algebra*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

S. S. Sastry. 2012. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: PHI Learning Pvt. Ltd.

S. K. Jain, A. Gunawardena and P. B. Bhattacharya. 2001. *Basic Linear Algebra with MATLAB*. New York: Key College Publishing: Springer-Verlag, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2nd Edition. New York: John Wiley and Sons.

P. B. Bhattacharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul. 1983. *First Course in Linear Algebra*. New Delhi: Wiley Eastern.

Balaguruswamy, E. 1999. *Numerical Methods*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

Datta, N. 2007. *Computer Oriented Numerical Methods*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambari. 2016. *A Course in Abstract Algebra*, 5th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Prasad, Chandrika. 2017. *Text Book on Algebra and Theory of Equations*, 11th Edition. Allahabad: Pothishala Private Ltd.

Conte, Samuel D. and Carl de Boor. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill.

इकाई 4 समीकरणों का समाधान और बहुपद प्रक्षेपण

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय

प्रक्षेपण या प्रक्षेप (Interpolation) एक फलन (Function) को परिभाषित करने की प्रक्रिया है जो निर्दिष्ट बिंदुओं पर निर्दिष्ट मान (Specified Value) लेता है। बहुपद प्रक्षेपण (Polynomial Interpolation) सबसे ज्ञात एक आयामी प्रक्षेपण (Dimension Interpolation) विधि है। प्रक्षेपण अज्ञात मानों का आकलन करने की प्रक्रिया है जो ज्ञात मानों के बीच आते हैं। इस उदाहरण में, एक सीधी रेखा ज्ञात मान के दो बिंदुओं से गुजरती है। आप अज्ञात मान के बिंदु का अनुमान लगा सकते हैं क्योंकि यह अन्य दो बिंदुओं के बीच लगभग मध्य में प्रतीत होता है।

एक मूल प्राप्ति एल्गोरिदम (Root Finding Algorithm) एक संख्यात्मक (Numerical) विधि या एल्गोरिदम है, जिसको किसी दिए गए फलन f के लिए मान x जैसे कि $f(x) = 0$ ज्ञात करने के लिए उपयोग करते हैं। इस तरह के x को फलन f का मूल (Root) कहा जाता है। सामान्यतया, संख्यात्मक रूप से समस्याओं को हल करने के लिए एल्गोरिदम को दो मुख्य समूहों में विभाजित किया जा सकता है, जो प्रत्यक्ष विधियाँ (Direct Method) और पुनरावृत्त विधियाँ (Iterative Method)। प्रत्यक्ष विधियाँ वे हैं जिन्हें पूर्व निर्धारित संख्या में चरणों में पूरा किया जा सकता है। पुनरावृत्त विधियाँ वे विधियाँ हैं जो समय के साथ समाधान में परिवर्तित हो जाती हैं। ये एल्गोरिदम तब तक उपयोग करते हैं जब तक कुछ अभिसरण मानदंड पूरे नहीं हो जाते। यह चुनने के लिए कि कौन सी विधि का उपयोग करना है, एक महत्वपूर्ण विचार यह है कि एल्गोरिदम (Algorithms) कितनी जल्दी समाधान में परिवर्तित हो जाता है या विधि की अभिसरण दर क्या हैं।

इस इकाई में आप समीकरणों के समाधान, प्रक्षेपण (Interpolation), संख्यात्मक क्षेत्रकलन (Numerical Quadrature) और गॉउस क्षेत्रकलन सूत्रों (Gauss Quadrature Formula) के बारे में अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

4.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- समीकरणों के समाधान को परिभाषित करने में सक्षम होंगे;
- प्रक्षेपण या प्रक्षेप की व्याख्या कर पाएंगे;
- संख्यात्मक क्षेत्रकलन को समझ पाएंगे;
- गॉउस क्षेत्रकलन सूत्रों को परिभाषित कर पाएंगे।

4.2 समीकरणों का हल

इस भाग में, हम निम्न रूप के समीकरणों के मूलों (Roots of an Equation) की गणना के लिए संख्यात्मक विधियों (Numerical Methods) पर विचार करते हैं,

$$f(x) = 0 \tag{4.1}$$

जहाँ $f(x)$ वास्तविक चर (Real Variable) x का यथोचित योग्य फलन है। फलन संभवतः बीजगणितीय या बहुपद रूप (Algebraic and Polynomial Form) में निम्न रूप से दर्शाया जाता है,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{4.2}$$

यह एक अभिव्यक्ति भी हो सकती है जिसमें खोज परिणाम अबीजीय फलन (Transcendental Function) जैसे कि $\cos x, \sin x, e^x$, आदि, हो सकते हैं। पहले हम एक समीकरण के पृथक वास्तविक मूलों (Isolated Real Roots) को खोजने की विधियों पर चर्चा करेंगे। बाद में, हम समीकरणों के निकाय के पृथक मूलों (Isolated Roots) को खोजने के तरीकों पर चर्चा करेंगे, विशेष रूप से दो वास्तविक चरों x और y जो यहाँ दर्शाये गए हैं,

$$f(x, y) = 0\,,\ g(x, y) = 0 \tag{4.3}$$

एक समीकरण के मूलों (Roots) की आमतौर पर दो चरणों में गणना की जाती है। सबसे पहले, हम मूलों का स्थिती पता करने के लिए अपरिष्कृत सन्निकटन मूलों (Crude Approximation Roots) को ज्ञात करेंगे। फिर हम मूल के बेहतर मान की गणना के लिए पुनरावृत्ति विधि (Iterative Technique) का उपयोग करके क्रमिक अनुमानों से वांछित सटीकता (Desired Accuracy) तक मूलों को ज्ञात करेंगे। यह पुनरावृत्ति फलन (Iterative Function) का उपयोग करके किया जाता है।

वास्तविक मूलों की स्थिति ज्ञात करने की विधियां (Method for Finding Location of Real Roots)

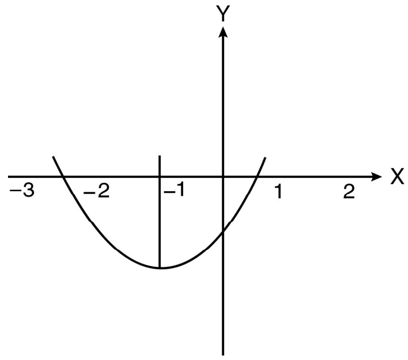
वास्तविक मूलों की स्थिति या अपरिष्कृत सन्निकटन (Crude Approximation) का लगभग सही अनुमान लगाने के लिए दी गई दो विधियों में से किसी एक का उपयोग किया जाता हैं, (a) आलेखीय (Graphical) और (b) सारणीकरण (Tabulation)।

आलेखीय विधि (Graphical Method): आलेखीय विधि में, हम x की विभिन्न मानों की एक निश्चित श्रेणी के लिए फलन $y = f(x)$ का ग्राफ या आलेख बनाते हैं। वह

बिंदुओं जहाँ ग्राफ या आलेख (Graph) x–अक्ष को काटती है, समीकरण (4.1) के मूलों का अपरिष्कृत सन्निकटन होता है। उदाहरण के लिए, निम्न समीकरण पर विचार करें,

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 = 0$$

चित्र 4.1 में दिखाए गए फलन $y = f(x)$ के ग्राफ या आलेख से, हम पाते हैं कि यह x–अक्ष को 0 और 1 के बीच काटता है। एक मूल के अपरिष्कृत सन्निकटन को निकालने के लिए हम $[0, 1]$ के बीच किसी भी बिंदु को ले सकते हैं। इस प्रकार, हम 0.5 को एक मूल की स्थिति के रूप में ले सकते हैं। दूसरा मूल -2 और -3 के बीच निहित है। हम -2.5 को अपरिष्कृत सन्निकटन के दूसरे मूल के रूप में ले सकते हैं।



चित्र 4.1 $y = x^2 + 2x - 1$ का ग्राफ या आलेख

कुछ प्रकरणों में, जहाँ $y = f\ (x)$ का ग्राफ बनाना कठिन है, हम समीकरण $f(x) = 0$ को $f_1(x) = f_2(x)$ के रूप में फिर से लिख सकते हैं, जहाँ $y = f_1\ (x)$ (x) और $y = f_2(x)$ (x) के ग्राफ या आलेख मानक वक्र (Standard Curves) हैं। तब हम $y = f_1(x)$ और $y = f_2(x)$ के बिंदु के प्रतिच्छेदन x–निर्देशांक को निकालते हैं, जो कि मूलों का अपरिष्कृत सन्निकटन (Crude Approximation) होता है।

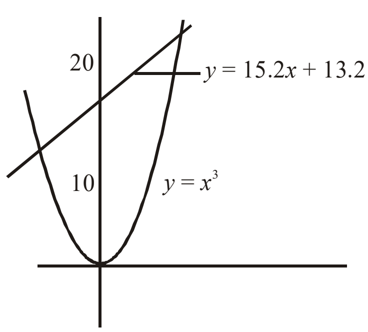
उदाहरण के लिए, निम्न समीकरण पर विचार करें,

$$x^3 - 15.2x - 13.2 = 0$$

इसे फिर से निम्न रूप में लिखा जा सकता है,

$$x^3 = 15.2x + 13.2$$

जहाँ $y = x^3$ और $y = 15.2\,x + 13.2$ का ग्राफ या आलेख बनाना आसान है। फिर भुज (Abscissa) पर बिंदु के प्रतिच्छेदन (Point(s) of Intersection) को अपरिष्कृत सन्निकटन (Crude Approximation) के रूप में लिया जाएगा।

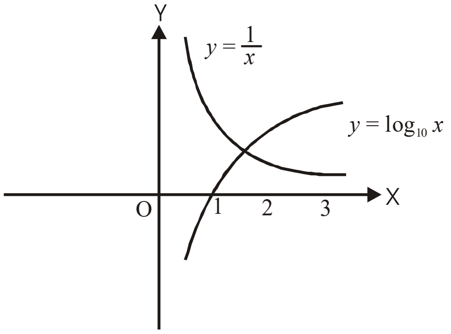


चित्र 4.2 $y = x^3$ और $y = 15.2x + 13.2$ का ग्राफ या आलेख

उदाहरण 4.1: समीकरण $x\log_{10} x = 1$ के मूल की स्थिति ज्ञात कीजिए।

हल: समीकरण को फिर से $\log_{10} x = \dfrac{1}{x}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

अब वक्र (Curves) $y = \log_{10} x$ और वक्र $y = \dfrac{1}{x}$ का ग्राफ या आलेख आसानी से बनाया जा सकता है जैसा कि नीचे चित्र में दिखाया गया है।



$y = \dfrac{1}{x}$ और $y = \log_{10} x$ का ग्राफ या आलेख

वक्रों के बिंदु के प्रतिच्छेदन का x–निर्देशांक (Coordinates) मान लगभग 2.5 है। इसीलिए, मूल की स्थिति (Location of Root) 2.5 है।

सारणीकरण विधि (Tabulation Method) : सारणीकरण विधि में, एक विशेष श्रेणी में x के मानों के लिए $f(x)$ के मानों की एक तालिका बनाई जाती है। फिर, हम x के लगातार दो मानों के लिए $f(x)$ के मान में चिन्ह परिवर्तन (Change in Sign) देखते हैं। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि x के इन मानों (Values) के बीच एक वास्तविक मूल निहित है। यह सत्य होगा अगर हम निम्नलिखित प्रमेय का उपयोग सतत फलनों (Continuous Function) पर करते हैं।

प्रमेय 4.1: यदि $f(x)$ अंतराल (a, b) के बीच सतत है, और $f(a)$ और $f(b)$ विपरीत चिन्ह (Opposite Sign) के हैं, तो a और b के बीच $f(x) = 0$ का एक वास्तविक मूल (Real Root) जरूर उपस्थित होगा।

उदाहरण के लिए समीकरण $f(x) = x^3 - 8x + 5 = 0$ पर विचार करें।

x और $f(x)$ के लिए निम्न तालिका का निर्माण करते हैं,

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	2	13	12	5	-2	-3	8

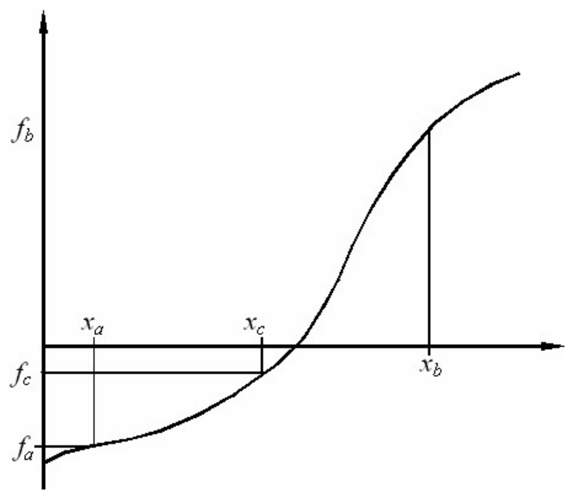
हम देखते हैं कि प्रत्येक उप अंतराल (Sub-Interval) $(-3, -4)$, $(0, 1)$ और $(2, 3)$ में से प्रत्येक में $f(x)$ के चिन्ह में परिवर्तन होता है। इस प्रकार हम तीन वास्तविक मूलों के लिए अपरिष्कृत सन्निकटन -3.2, 0.2 और 2.2 ले सकते हैं।

मूल ज्ञात करने की विधियां (Methods for Finding the Roots)

1. विभाजन विधि (Bisection Method)
2. सरल पुनरावृत्ति विधि (Simple Iteration Method)

विभाजन विधि (Bisection Method) : विभाजन विधि एक मूल प्राप्त करने की विधि है जो बार–बार अंतराल को काटती (Bisects) है और फिर हम उप अंतराल का चयन करते है जिससे आगे की प्रक्रिया के लिए एक मूल निर्धारित होता है। यह एक अत्यंत सरल और मजबूत विधि है, लेकिन यह अपेक्षाकृत धीमी (Relatively Slow) है। इसमें आमतौर पर एक हल को प्राप्त करने के लिए लगभग मान (Approximation) का उपयोग किया जाता है जिसका अधिक तेजी से परिवर्तित करने के तरीकों के लिए एक प्रारंभिक बिंदु (Starting Point) के रूप में उपयोग किया जाता है। जब एक अंतराल में एक से अधिक मूल होते हैं, तो विभाजन विधि उनमें से किसी एक को प्राप्त कर सकती है। जब एक अंतराल में एक विलक्षणता (Singularity) होती है, तो विभाजन विधि उस विलक्षणता (Singularity) में बदल जाती है। विभाजन विधि की धारणा इस तथ्य पर आधारित है कि एक फलन (Function) शून्य से गुजरने पर चिन्ह बदलेगा। हम अंतराल के मध्य में फलन का मूल्यांकन करते हैं और उसे सीमा (Limit) के समान चिन्ह में बदल देते हैं। विभाजन विधि मूल को ज्ञात करने के लिए प्रत्येक पुनरावृत्ति में अंतराल (Interval) के आकार को आधा (Half) करती है।

इस प्रकार, एक समीकरण के मूल को प्राप्त करने के लिए विभाजन विधि सबसे सरल विधि है। इसमें दो प्रारंभिक अनुमानों x_a और x_b की आवश्यकता होती है जो मूल को कोष्ठक (Bracket) करते हैं। मान ले $f_a = f(x_a)$ और $f_b = f(x_b)$ इस तरह हैं कि $f_a f_b \leq 0$। स्पष्टतः अगर $f_a f_b = 0$ है तो x_a और x_b में से एक या दोनों $f(x) = 0$ के मूल हो सकते है। चित्र 4.3 में दो प्रारंभिक अनुमानों x_a और x_b को मूल कोष्ठिकित करते हुए विभाजन विधि (Bisection Method) का वर्णन किया गया है।



चित्र 4.3 दो प्रारंभिक अनुमान x_a और x_b को दिखाते हुए विभाजन विधि का ग्राफ या आलेख

यह विधि तब प्रयोग होती है जब हम वास्तविक चर x के समीकरण $f(x) = 0$ को हल करते हैं, जहाँ f एक सतत फलन हैं जो कि अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित होता है और $f(a)$ और $f(b)$ के विपरीत चिन्ह होते हैं।

विभाजन विधि (Bisection Method) में अंतराल की क्रमिक कमी (Successive Reduction) होती है जिसमें एक समीकरण के पृथक मूल निहित होते हैं। यह विधि नीचे बताए गए सतत फलनों (Continuous Function) के एक महत्वपूर्ण प्रमेय पर आधारित है।

प्रमेय 4.2: यदि कोई फलन $f(x)$ बंद अंतराल $[a, b]$ में सतत (Continuous) है, और $f(a)$ और $f(b)$ विपरीत चिन्हों के हैं, अर्थात, $f(a)f(b) < 0$ तब a और b के बीच $f(x) = 0$ का कम से कम एक वास्तविक मूल मौजूद होता है।

टिप्पणी

विभाजन विधि दो अनुमानित मानों (Guess Values) x_0 और x_1 से शुरू होती है। फिर इस अंतराल $[x_0, x_1]$, को एक बिंदु $x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ द्वारा विभाजित किया जाता है, जहाँ $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ होता है। हम $f(x_2)$ की गणना करते हैं। यदि $f(x_2) = 0$ है, तो x_2 एक मूल होता है। हम जांचते हैं कि $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ या $f(x_2). f(x_1) < 0$। यदि $f(x_2)/f(x_0) < 0$ है, तो मूल अंतराल (x_2, x_0) में है। अन्यथा, यदि $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, तो फिर मूल अंतराल (x_2, x_1) में है।

उपअंतराल जिसमें मूल है उसे फिर से विभाजित किया जाता है और उपरोक्त प्रक्रिया तब तक दोहराई जाती है जब तक उपअंतराल की लंबाई वांछित सटीकता (Desired Accuracy) से कम नहीं हो जाती है।

विभाजन विधि को कोष्ठक विधि (Bracketing Method) भी कहा जाता है, क्योंकि यह विधि क्रमिक रूप से वास्तविक मूल के आसपास एक अंतराल के दो सिरों (Two Ends) के बीच के अंतर को कम करती है, अर्थात, वास्तविक मूल (Real Root) को कोष्ठक करती है।

नीचे दिया गया एल्गोरिदम (Algorithm) स्पष्ट रूप से समीकरण के वास्तविक मूल का पता लगाने के लिए वांछित सटीकता तक विभाजन विधि द्वारा किए जाने वाले अनुसरण के चरणों को दर्शाता है।

एल्गोरिदम: विभाजन विधि का उपयोग कर मूल का पता लगाना होता है।

चरण 1: समीकरण $f(x) = 0$ को परिभाषित करें।

चरण 2: एप्सिलॉन (Epsilon), वांछित सटीकता को पढ़ें।

चरण 3: दो प्रारंभिक मानों x_0 और x_1 को पढ़ें जो वांछित मूलों को कोष्ठक (Bracket) करते हैं।

चरण 4: $y_0 = f(x_0)$ की गणना करें।

चरण 5: $y_1 = f(x_1)$ की गणना करें।

चरण 6: जाँचें यदि $y_0 y_1 < 0$ है, तो चरण (Step) 6 पर जाएँ अन्यथा चरण 2 पर जाएँ।

चरण 7: $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ की गणना करें।

चरण 8: $y_2 = f(x_2)$ की गणना करें।

चरण 9: जांचें कि क्या $y_0 y_2 > 0$, तो $x_0 = x_2$ रखें अन्यथा $x_1 = x_2$ करें।

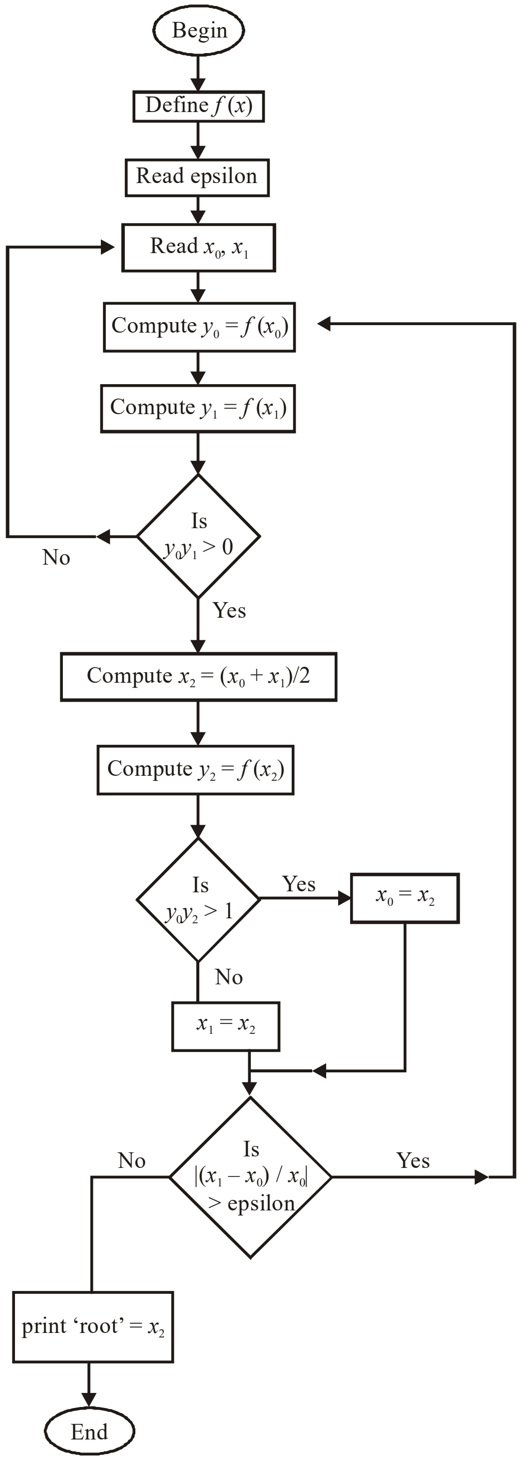
चरण 10: जाँच करें यदि $|(x_1 - x_0)/x_1| >$ एप्सिलॉन, तो चरण 3 पर जाएँ।

चरण11: x_2, y_2 लिखें।

चरण 12 : समाप्त।

इसके आगे, हम विधि को बेहतर विधि से समझाने के लिए उपरोक्त एल्गोरिदम के फ्लोचार्ट (Flowchart) के बारे में बताएगें। फ्लोचार्ट कम्प्यूटर प्रोग्राम विधि के आसान कार्यान्वयन (Implementation) में मदद करता है।

टिप्पणी



उदाहरण 4.2: समीकरण $x^3 - 9x + 1 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल की स्थिति ज्ञात कीजिए और इसकी गणना विभाजन विधि द्वारा, दशमलव के दो स्थानों तक करें।

हल: सबसे छोटे घनात्मक मूल (Positive Root) की स्थिति खोजने के लिए हम नीचे दिये गए फलन को सारणीबद्ध (Tabulate) करते हैं तब $f(x) = x^3 - 9x + 1$ है।

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-2	-9	1

हम पाते हैं कि सबसे छोटा धनात्मक मूल (Positive Root) अंतराल [0, 1] में निहित है। विभाजन विधि के क्रमिक चरणों के लिए गणना किए गए मान निम्न तालिका में दिए गए हैं।

टिप्पणी

n	x_0	x_1	x_2	$f(x_2)$
1	0	1	0.5	−3.37
2	0	0.5	0.25	−1.23
3	0	0.25	0.125	−0.123
4	0	0.125	0.0625	0.437
5	0.0625	0.125	0.09375	0.155
6	0.09375	0.125	0.109375	0.016933
7	0.109375	0.125	0.11718	−0.053

उपरोक्त परिणामों से हम पाते हैं कि दो दशमलवों तक सबसे छोटा मूल 0.11 है।

सरल पुनरावृत्ति विधि (Simple Iteration Methods) : सरल पुनरावृत्ति विधि का उपयोग करके एक समीकरण $f(x)=0$ के मूल को बेहतर और बेहतर सन्निकटन मूल (Approximation of the Root) के लिए क्रमिक रूप से गणना करके निर्धारित किया जाता है, सबसे पहले समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जाता है

$$x = g(x) \tag{4.4}$$

फिर, हम अनुक्रम $\{x_n\}$ को बनाने के लिए मूलों के अनुमानित मान (Guess Value) x_0 से शुरू करते हैं और क्रमिक रूप से गणना करते हैं,

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1),.., \ x_n = g(x_{n-1})$$

सामान्य तौर पर, उपरोक्त अनुक्रम मूल ξ में परिवर्तित हो सकता है जैसे कि $n \to \infty$ या यह विचलन (Diverge) हो सकता है। यदि अनुक्रम विचलन करता है, तो हम इसे त्याग देंगे और फिर से $f(x)=0$ को एक अन्य रूप $x = h(x)$ में लिखकर उसपर विचार करेंगे। हमेशा अभिसरण अनुक्रम (Convergent Sequence) प्राप्त करना संभव है क्योंकि $f(x)=0$ को $x = g(x)$ के रूप में पुनर्लेखन करने की अलग–अलग विधियां हैं (कई अन्य विधियां भी है)। हालांकि, अनुक्रम की गणना शुरू करने के बजाय, हम पहले परीक्षण करेंगे कि $g(x)$ का रूप अभिसरण अनुक्रम दे सकता है या नहीं। हम नीचे एक प्रमेय दे रहे हैं जिसका उपयोग अभिसरण का परीक्षण करने के लिए किया जा सकता है।

प्रमेय 4.3: यदि फलन $g(x)$ अंतराल $[a, b]$ में सतत है जिसमें समीकरण $f(x)=0$ का एक मूल ξ है, और इसे $x = g(x)$ के रूप में फिर से लिखा गया है, और इस अंतराल में $|g'(x)| \le l \le 1$ है, फिर $x_0 \in [a, b]$ के किसी भी विकल्प के लिए, पुनरावृत्ति द्वारा प्राप्त अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्न होगा,

$$x_{k+1} = g(x_k), \text{जिसमें } k = 0, 1, 2,... \tag{4.5}$$

यह $f(x)=0$ के मूल को अभिसरण (Converges) करता है।

हल: चूंकि $x = \xi$, समीकरण $x = g(x)$ का मूल है, हमें

$$\xi = g(\xi) \tag{4.6}$$

पहली पुनरावृत्ति (First Iteration) $x_1 = g(x_0)$ देती है।

समीकरण (4.6) से समीकरण (4.7) को घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\xi - x_1 = g(\xi) - g(x_0) \tag{4.7}$$

माध्य मान प्रमेय (Mean Value Theorem) का प्रयोग करने पर, हम लिख सकते हैं,

$$\xi - x_1 = (\xi - x_0)g'(s_0), \quad x_0 < s_0 < \xi \tag{4.8}$$

इसी तरह हम प्राप्त कर सकते हैं,

$$\xi - x_2 = (\xi - x_1)g'(s_1), \quad x_1 < s_1 < \xi \tag{4.9}$$

$$....$$

$$\xi - x_{n+1} = (\xi - x_n)g'(s_n), \quad x_n < s_n < \xi \tag{4.10}$$

समीकरणों (4.8), (4.9) और (4.10) से, हम प्राप्त करते हैं,

$$\xi - x_{n+1} = (\xi - x_0)g'(s_0)g'(s_1)... \quad g'(s_n) \tag{4.11}$$

चूंकि $|g'(x_i)| < l$ प्रत्येक x_i के लिए, उपरोक्त समीकरण (4.11) बन जाता है,

$$|\xi - x_{n+1}| < l^{n+1} |\xi - x_0| \tag{4.12}$$

स्पष्ट है, चूंकि $l < 1$, $l^{n+1} \to 0, n \to \infty$, राइट हैंड साइड (R.H.S.) शून्य हो जाती है और इस प्रकार अनुक्रम $\{\{x_n\}$ मूल में बदल जाता है यदि ξ यदि $|\varphi'(\xi)| < 1$ यह हल पूरा होता है।

अभिसरण की कोटि (Order of Convergence): पुनरावृत्ति (Iterations) प्रक्रिया के अभिसरण की कोटि को क्रमिक पुनरावृत्ति (Iterations) में e_n और e_{n+1} त्रुटियों (Errors) के पदों में निर्धारित किया जाता है। एक पुनरावृत्ति प्रक्रिया को अभिसरण की *k*वीं कोटि कहा जाता है अगर $\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^k} < M$, जहाँ M एक परिमित संख्या (Finite Number) है।

आम तौर पर, किसी भी पुनरावृत्ति में त्रुटि पिछले पुनरावृत्ति की त्रुटि की *k*वीं घात (Power) के आनुपातिक होती है।

स्पष्ट है, इस खंड में सरल पुनरावृत्ति पर की गई चर्चा मे अभिसरण का क्रम 1 है।

उपरोक्त पुनरावृत्ति को स्थायी बिंदु पुनरावृत्ति (Fixed Point Iteration) भी कहा जाता है क्योंकि यह $x = g(x)$ द्वारा परिभाषित मूल को मानचित्रण के निश्चित बिंदु के रूप में निर्धारित करता है।

एल्गोरिदम: $f(x) = 0$ के मूल की सरल पुनरावृत्ति द्वारा गणना करते हैं।

चरण 1: $g(x)$ को परिभाषित करें, जहाँ $f(x) = 0$ को $x = g(x)$ के रूप में फिर से लिखे।

चरण 2: x_0 एप्सिलॉन, मैक्सिट (Maxit) मे निविष्ट (Input) दें, जहाँ x_0 मूल का प्रारंभिक अनुमान है, एप्सिलॉन वांछित सटीकता है, अधिकतम (Maxit) पुनरावृत्ति की अनुमति है।

टिप्पणी

चरण 3: $i = 0$ रखें।

चरण 4: $x_1 = g\,(x_0)$ रखें।

चरण 5: $i = i + 1$ रखें।

चरण 6: जाँच करें, कि $|(x_1 - x_0)/\, x_1| <$ एप्सिलॉन, तो प्रिंट (Print) का 'मूल' है x_1 अन्यथा, चरण 6 पर जाएं।

चरण 7: जांचें, अगर $i < n$, तो $x_0 = x_1$ रखें और चरण 3 पर जाएं।

चरण 8: 'n पुनरावृत्ति के बाद कोई अभिसरण नहीं हैं' लिखें।

चरण 9: समाप्त।

उदाहरण 4.3: $x = 1$ के पास, समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ के वास्तविक मूल की गणना करने के लिए, पुनरावृत्ति (Iteration) द्वारा, निर्धारित करें कि अभिसरण क्रम देने के लिए निम्नलिखित पुनरावृत्ति (Iteration) में से किसका उपयोग किया जा सकता है।

$$(i)\ \ x = x^3 - 1 \quad (ii)\ \ x = \frac{x+1}{x^2} \qquad (iii)\ \ x = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

हल:

(i) समीकरण रूप (Equation Form) $x = x^3 - 1,$ के लिए, $g(x) = x^3 - 1$ और $g'(x) = 3x^2$ । इसलिए, $|\,g'(x)\,| > 1,$ तो, यह पुनरावृत्ति में अभिसरण क्रम नहीं देगा।

(ii) समीकरण रूप (Equation Form) $x = \dfrac{x+1}{x^2},\ g(x) = \dfrac{x+1}{x^2}.$ के लिए,

$|\,g'(1)\,| = 3 > 1.$

इस प्रकार, यह समीकरण रूप भी पुनरावृत्ति (Iteration) में अभिसरण क्रम नहीं देगा।

(iii) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}},\ \ g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right).$ के लिए,

$$\therefore\ |\,g'(1)\,| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1.$$

. इसलिए, $x = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ पुनरावृत्ति (Iterations) में अभिसरण क्रम देगा।

उदाहरण 4.4: पुनरावृत्ति (Iteration) विधि के द्वारा पांच महत्वपूर्ण अंकों तक समीकरण $x^3 + x^2 - 1 = 0$ के वास्तविक मूल की गणना करें।

हल: समीकरण का वास्तविक मूल 0 और 1 के बीच में है क्योंकि $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ में 0 और 1 पर विपरीत चिन्ह प्राप्त होते हैं। पुनरावृत्ति का उपयोग करने के लिए, हम पहले समीकरण को निम्नलिखित विभिन्न प्रकार से लिखेंगे।

$$(i)\quad x = \frac{1}{x^2} - 1 \quad (ii)\quad x = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \quad (iii)\quad x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

(i), $g(x) = -1 + \frac{1}{x^2}$, $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$ और x में (0, 1), $|g'(x)| > 1$ यह समीकरण रूप उपयुक्त नहीं है। (ii) $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \left(-\frac{1}{x^2} - 1 \right)$ समीकरण रूप (ii) के लिए $|g'(x)| > 1$ सभी x (0, 1) में यह समीकरण रूप उपयुक्त नहीं है। अंत में, समीकरण रूप

$$(iii) \quad g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$ और $|g'(x)| < 1$ के लिए

इस प्रकार इस समीकरण रूप का उपयोग अभिसरण क्रम (Convergent Sequence) को बनाने के लिए किया जा सकता है मूल को ज्ञात करने के लिए एक अभिसरण क्रम बनाते हैं।

हम x के साथ पुनरावृत्ति $x_0 = 1$ से शुरू करते हैं। क्रमिक $x = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ पुनरावृत्ति (Iteration) के परिणाम है,

$x_1 = 0.70711 \quad x_2 = 0.76537 \quad x_3 = 0.75236 \quad x_4 = 0.75541$
$x_5 = 0.75476 \quad x_6 = 0.75490 \quad x_7 = 0.75488 \quad x_8 = 0.75488$

इस प्रकार, पांच महत्वपूर्ण अंकों तक मूल 0.75488 है।

उदाहरण 4.5: पांच अंकों तक समीकरण $x^2 - x - 0.1 = 0$ के मूल की गणना करें, जो (1,2) में निहित है।

हल: पुनरावृत्ति (Iteration) के माध्यम से मूल की गणना के लिए समीकरण को निम्नलिखित रूप में फिर से लिखे।

$x = \sqrt{x + 0.1}.$ यहाँ $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 0.1}}$

और $|g'(x)| < 1$, x (1, 2) में है।

$x_0 = 1$ पर क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Iterations) के परिणाम होंगे,

$x_1 = 1.0488 \quad x_2 = 1.0718 \quad x_3 = 1.0825$

$x_4 = 1.0874 \quad x_5 = 1.0897.$

इस प्रकार, तीन महत्वपूर्ण अंकों (Three Significant Figures) तक मूल 1.09 है।

उदाहरण 4.6: रैखिक पुनरावृत्ति (Linear Iteration) की विधि का उपयोग करके (2, 4) में निहित मूल के लिए निम्नलिखित समीकरण को हल करें: $x^3 - 9x + 1 = 0$। दिखाएँ कि समीकरण $x = g(x)$ में फिर से लिखने की विभिन्न विधि हैं और उसे चुनें, जो मूल के लिए एक अभिसरण अनुक्रम देता है।

हलः हम समीकरण को निम्नलिखित विभिन्न रूपों में फिर से लिख सकते हैं,

(*i*) $x = \frac{1}{9}(x^3+1)$ (*ii*) $x = 9/x - \frac{1}{x^2}$ (*iii*) $x = \sqrt{9 - \frac{1}{x}}$

समीकरण रूप (*i*) के प्रकरण में, $g'(x) = \frac{1}{3}x^2$ और x के लिए [2, 4] में, $|g'(x)|>1$ है। इसलिए एक अभिसरण अनुक्रम का विकास (Rise) यह नहीं देगा।

(*ii*) $g'(x) = 2x - \frac{9}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ और x के लिए [2, 4] के प्रकरण में, $|g'(x)|>1$

(*iii*) $g'(x) = \left(9 - \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2}$ के प्रकरण में $|g'(x)| < 1$

इस प्रकार, समीकरण रूपों (*ii*) और (*iii*) [2, 3] में मूल को ज्ञात करने के लिए अभिसरण क्रम देंगे।

हम पुनरावृत्ति (Iteration) विधि (*iii*) में $x_0 = 2$ को पुनरावृत्ति (Iteration) में लेकर शुरू करते हैं। क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Iteration) के परिणाम निम्न होंगेः

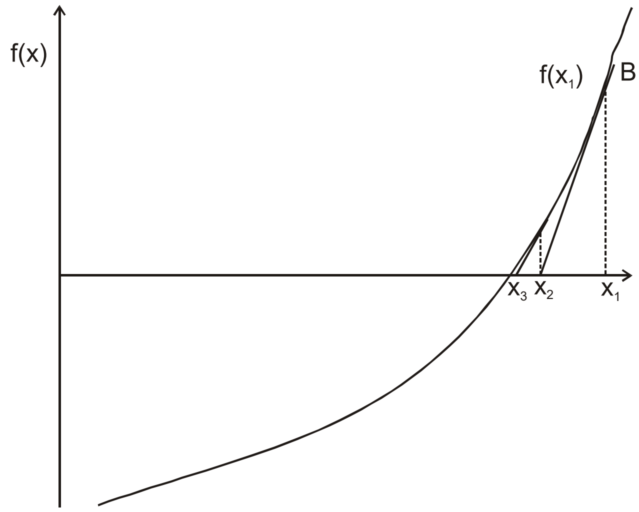
$x_0 = 2.0$ $x_1 = 2.91548$ $x_4 = 2.94282$

$x_2 = 2.94228$ $x_3 = 2.94281$

इस प्रकार, दशमलव के चार स्थानों तक मूल को 2.94281 के रूप में लिया जा सकता है।

न्यूटन–रैपसन विधि (Newton-Raphson Method)

न्यूटन–रैपसन विधि (Newton-Raphson Method) में समीकरण $f(x) = 0$ के मूल को वांछित सटीकता तक खोजने के लिए व्यापक रूप से उपयोग की जाने वाली संख्यात्मक विधि (Numerical Method) है। यह एक पुनरावृत्ति (Iterative) विधि है जिसकी अभिसरण (Convergence) की दर तीव्र है और यह तब बहुत उपयोगी है जब अभिव्यक्ति का अवलकन $f(x)$ जटिल (Complicated) नहीं होता है। न्यूटन–रैपसन विधि (Newton-Raphson Method), जिसे न्यूटन की विधि (Newton Method) भी कहा जाता है, एक मूल ज्ञात करने का एल्गोरिदम (Algorithm) है जो किसी संदिग्ध मूल के आस पास फलन $f(x)$ की टेलर शृंखला (Taylor Series) के पहले कुछ पदों का उपयोग करता है। न्यूटन–रैपसन विधि में, मूल को खोजने के लिए प्रारंभिक अनुमान x_1 को मूल मानकर शुरुआत करें। अगले अनुमान x_2 का बिंदु $[x_1, f(x_1)]$ से स्पर्शरेखा का x–अक्ष पर प्रतिच्छेदन (Intersection) होता है, अगले अनुमान x_3 भी बिंदु $[x_2, f(x_2)]$, से स्पर्शरेखा का x– अक्ष पर प्रतिच्छेदन (Intersection) होता है, जैसा कि चित्र 4.4 में दिखाया गया है।



चित्र 4.4 न्यूटन–रैपसन विधि का ग्राफ या आलेख

टिप्पणी

न्यूटन–रैपसन विधि को ढाल (Slope) की परिभाषा से निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है,

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

सामान्य नियमानुसार, बिंदु $[x_n, f(x_n)]$ से, अगले अनुमान की गणना निम्नानुसार की जाती है,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

अवलकज या ढाल (Derivative or Slope) $f(x_n)$ को अंकीय रूप से अनुमानित किया जा सकता है,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x}$$

इस पद्धति के सूत्र को प्राप्त करने के लिए, हम $f(x) = 0$ के मूलों के प्रारंभिक अनुमान के रूप में टेलर की $f(x_0 + h), x_0$ श्रृंखला पर विचार करेगें और h को मूलों में एक छोटे से सुधार के रूप मे लेंगे।

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \quad f'(x_0) + \frac{h^2}{2\ !} \quad f''(x_0) + ...$$

h को छोटा मानते हुए, हम h के वर्ग और उच्च घातों (Higher Powers) की उपेक्षा करके $f(x_0 + h)$ को 0 के बराबर मानते हैं।

$$\therefore \qquad f(x_0) + h\ f'(x_0) = 0\sqrt{2}$$

इस प्रकार, हम मूल का एक बेहतर मान लिख सकते हैं, जैसे कि $X_1 = x_0 + h$

अर्थात, $$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

टिप्पणी

क्रमिक सन्निकटन $x_2, x_3, ..., x_{n+1}$ को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$\dots \dots \dots$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (4.13)$$

यदि अनुक्रम (Sequence) $\{x_n\}$ अभिसरण (Converges) होता है, तो हमें मूल (Root) मिलता है।

एल्गोरिदमः न्यूटन–रैपसन विधि द्वारा $f(x) = 0$ के मूल की गणना।

चरण 1: $f(x)$, $f'(x)$ को परिभाषित करें।

चरण 2: x_0, एप्सिलॉन, अधिकतम (Maxit) में निविष्ट (Input) दे।

[x_0 मूल का प्रारंभिक अनुमान (Initial guess) है, एप्सिलॉन मूल की वांछित सटीकता और (Maxit) जो कि पुनरावृत्ति के अधिकतम अंक (Maximum Number) है, की अनुमति देता है।

चरण 3: $i = 0$ रखें।

चरण 4: $f_0 = f(x_0)$ रखें।

चरण 5: $df_0 = f'(x_0)$ की गणना करे।

चरण 6: $x_1 = x_0 - f_0/df_0$ रखें।

चरण 7: $i = i + 1$ रखें।

चरण 8: जाँच करें अगर $|(x_1 - x_0)\,|x_1| <$ एप्सिलॉन। तो प्रिंट करें 'मूल' है x_1, और रुक जाए अन्यथा यदि $i < n$, तो $x_0 = x_1$ रखें और चरण 3 पर जाएं।

चरण 9: 'पुनरावृत्ति अभिसरण नहीं हैं' लिखें।

चरण 10: समाप्त।

उदाहरण 4.7: न्यूटन–रैपसन विधि का उपयोग करके समीकरण $x^3 - 8x - 4 = 0$ के घनात्मक मूल की गणना पांच महत्वपूर्ण अंकों तक करें।

हलः न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति (Newton Raphson Iterative) विधि को निम्न रूप में लिखा जाता है,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \dots \text{ के लिए}$$

दिए गए समीकरण $f(x) = x^3 - 8x - 4$ के लिए,

पहले हम सारणीकरण की विधि द्वारा मूलों का स्थान ज्ञात करते हैं। $f(x)$ के लिए तालिका है,

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-13	-12	-1	28

स्पष्ट है, धनात्मक मूल $x = 3$ के पास है। हम न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति विधि में $x_0 = 3$ लेते हैं।

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 8x_n - 4}{3x_n^2 - 8}$$

हमें $x_1 = 3 - \dfrac{27-24-4}{27-8} = 3.0526$ मिलता है।

इसी तरह, y, $x_2 = 3.05138$ और $x_3 = 3.05138$।

इस प्रकार पांच महत्वपूर्ण अंकों तक धनात्मक (Positive Root) मूल 3.0514 है।

उदाहरण 4.8: पांच महत्वपूर्ण अंकों तक समीकरण $x^3 + 7x^2 + 9 = 0,$ का वास्तविक मूल (Real Root) ज्ञात कीजिए।

हल: पहले हम सारणीकरण द्वारा वास्तविक मूल की स्थिति प्राप्त करते हैं। हम पाते हैं कि वास्तविक मूल ऋणात्मक है और चूंकि $f(-7) = 9 > 0$ और $f(-8) = -55 < 0$ है, तो मूल –7 और – 8 के बीच में मिलेगा।

वांछित सटीकता तक मूल की गणना के लिए, हम $x_0 = -8$ लेंगे और न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्त सूत्र का उपयोग करेंगे,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 7x_n^2 + 9}{3x_n^2 + 14x_n} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{ के लिए}$$

क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Iterations) देता है,

$$x_1 = -7.3125$$
$$x_2 = -7.17966$$
$$x_3 = -7.17484$$
$$x_4 = -7.17483$$

इसलिए, पांच महत्वपूर्ण अंकों तक वांछित मूल –7.1748 है।

उदाहरण 4.9: $\sqrt{a}$, के मूल्यांकन के लिए, न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति विधि का उपयोग करके, पुनरावृत्त सूत्र (Iterative Formula) का $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, परिणाम निकालें। इसका उपयोग करके $\sqrt{2}$ का चार महत्वपूर्ण अंकों तक मान निकाले।

हल: हम देखते हैं कि, $\sqrt{a}$ समीकरण $x^2 - a = 0$ का हल है।

अब, न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति विधि $f(x) = x^2 - a$ का उपयोग करते हुए हम पाते हैं,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

टिप्पणी

हमारे पास है, $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

अर्थात, $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \ldots \text{ के लिए}$$

अब, $\sqrt{2}$, की गणना के लिए, हम $x_0 = 1.4$ मानेगे। क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Iteration) देगा,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1.4 + \frac{2}{1.4}\right) = \frac{3.96}{2.8} = 1.414$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1.414 + \frac{2}{1.414}\right) = 1.41421$$

अतः, चार महत्वपूर्ण अंकों तक $\sqrt{2}$ का मान 1.414 है।

उदाहरण 4.10: सिद्ध करो कि $\sqrt[k]{a}$ की गणना पुनरावृत्ति विधि

$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right]$ द्वारा की जा सकती है। अतः $\sqrt[3]{2}$ का मूल्यांकन पाँच महत्वपूर्ण अंकों तक करें।

हलः मान $\sqrt[k]{a}$, $x^k - a = 0$ का धनात्मक मूल (Positive Root) है। इस प्रकार $\sqrt[k]{a}$ के मूल्यांकन के लिए पुनरावृत्ति (Iterative) विधि है,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}}$$

या, $$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right], n = 0, 1, 2, \ldots \text{ के लिए।}$$

अब, मूल्यांकन के लिए $\sqrt[3]{2}$, हम $x_0 = 1.25$ लेते हैं और पुनरावृत्ति (Iterative) सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{2}{x_n^2}\right].$$

हमारे पास है,

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[1.25 \times 2 + \frac{2}{(1.25)^2}\right] = 1.26$$

$$x_2 = 1.259921, \quad x_3 = 1.259921$$

इसलिए, $\sqrt[3]{2} = 1.2599$, पांच महत्वपूर्ण अंकों तक सही है।

उदाहरण 4.11: न्यूटन–रैपसन विधि द्वारा $3x - \cos x - 1 = 0$ का वास्तविक मूल, तीन महत्वपूर्ण अंकों तक ज्ञात करें।

हल: $f(x) = 3x - \cos x - 1 = 0$, का वास्तविक मूल $[0, 1]$ में है क्योंकि $f(0) = -2$ और $f(1) > 0$ है।

हम $x_0 = 0$ को चुनते हैं और पुनरावृत्ति (Iteration) की न्यूटन–रैपसन विधि का उपयोग करते हैं।

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n - \cos\ x_n - 1}{3 + \sin\ x_n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Iteration) के लिए परिणाम हैं,

$$x_1 = 0.667, x_2 = 0.6075, x_3 = 0.6071$$

इस प्रकार, तीन महत्वपूर्ण अंकों तक मूल 0.607 सही है।

उदाहरण 4.12: चार महत्वपूर्ण अंकों तक समीकरण $x^x + 2x - 6 = 0$ का एक वास्तविक मूल ज्ञात करें।

हल: $f(x) = x^x + 2x - 6$ ले। हमारे पास $f(1) = -3 < 0$ और $f(2) = 2 > 0$ है। इस प्रकार है कि मूल $[1, 2]$ में निहित है। $x_0 = 2$, हम न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति विधि का उपयोग करते हैं,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{x_n} + 2x_n - 6}{x_n^{x_n}(\log_e x_n + 1) + 2}, \quad n = 0, 1, 2, ... \text{ के लिए}$$

क्रमिक पुनरावृत्तियों की गणना से प्राप्त किए गए परिणाम हैं,

$$x_1 = 2 - \frac{4 + 4 - 6}{4 \times (\log_e 2x^2 + 1) + 2} = 1.72238$$

$$x_2 = 1.72321$$

$$x_3 = 1.72308$$

इसलिए, चार महत्वपूर्ण अंकों के लिए मूल 1.723 सही है।

अभिसरण का क्रम (Order of Convergence): हम दिए गए सूत्र द्वारा न्यूटन–रैपसन विधि के अभिसरण के क्रम पर विचार करते हैं,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

मान लेते हैं कि पुनरावृत्तियों का क्रम $\{x_n\}$ मूल ξ में परिवर्तित हो गया है फिर, टेलर श्रेणी से x_n के संबंध में विस्तार करते हुए, संबंध $f(\xi) = 0$ देता है।

$$f(x_n) + (\xi - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(x_n) + ... = 0$$

$$\therefore \quad -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \xi - x_n + \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 \ . \ \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} + ...$$

$$\therefore \quad x_{n+1} - \xi \approx \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 \ . \ \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$$

टिप्पणी

त्रुटि (Error) ε_n को nवीं पुनरावृत्ति में त्रुटि के रूप में लेकर और $\varepsilon_n = \varepsilon_n - \xi$, लिखकर हमारे पास है,

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2}\varepsilon_n^{\,2} \quad \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \tag{4.14}$$

इस प्रकार, $\varepsilon_{n+1} = k\varepsilon^2 n$, जहाँ k एक नियत (Constant) है।

इससे पता चलता है कि न्यूटन–रैपसन विधि के अभिसरण की कोटि 2 है। दूसरे शब्दों में, न्यूटन–रैपसन विधि में अभिसरण की एक द्विघात दर (Quadratic Rate) है।

न्यूटन–रैपसन विधि के अभिसरण की स्थिति आसानी से न्यूटन–रैपसन पुनरावृत्ति विधि को $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ के रूप में पुनर्लेखन करके प्राप्त की जा सकती है जहाँ,

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

इसलिए, रैखिक पुनरावृत्ति विधि (Linear Iteration Method) के अभिसरण (Convergence) की स्थिति का उपयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं,

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) \quad f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

इस प्रकार, न्यूटन–रैपसन विधि के अभिसरण के लिए पर्याप्त स्थिति है, $\left|\frac{f(x) \quad f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$, अंतराल में मूल के पास।

अर्थात, $$|f(x) \quad f''(x)| < |f'(x)|^2 \tag{4.15}$$

छेदिक विधि (Secant Method)

छेदिक विधि (Secant Method) को न्यूटन–रैपसन विधि का उन्नत रूप माना जा सकता है। इस विधि के लिए पुनरावृत्ति सूत्र न्यूटन–रैपसन विधि के सूत्र से प्राप्त होता है, जिसमें अवलकज (Derivative) $f'(x_0)$ को दो समीपवर्ती बिंदुओं x_0 और x_1 को वक्र $y = f(x)$ से जोड़कर मिले जीवा (Chord) के प्रवणता या ढलाव (Gradient) से बदला जाता है।

इस प्रकार, हमारे पास है,

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

पुनरावृत्ति (Interative) सूत्र द्वारा दिया गया है,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

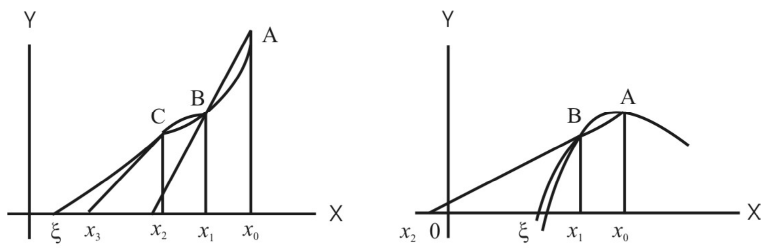
इसे फिर से लिखा जा सकता है,

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

छेदिक सूत्र (Secant Formula) सामान्य रूप में है,

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})$$
$$\frac{x_{n-1} - x_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

पुनरावृत्ति सूत्र रेगुला–फालसी विधि (Regula-Falsi Method) के सूत्र के समान है। छेदिक (Secant) विधि और रेगुला–फालसी पद्धति के बीच अंतर इस तथ्य में निहित है कि रेगुला–फाल्सी विधि के विपरीत, छेदिक विधि में दो प्रारंभिक अनुमानित मान मूल को कोष्ठक (Bracket) नहीं करते हैं और क्रमिक पुनरावृत्ति (Successive Interation) के दौरान मूल के कोष्ठक की जाँच नहीं करते हैं। इस प्रकार, छेदिक विधि (Secant Method) हमेशा मूल को खोजने के लिए एक अभिसरण क्रम (Convergent Sequence) नहीं बनाती है। छेदिक विधि की ज्यामितीय व्याख्या चित्र 4.5 में दिखाई गई है।



अभिसरण (Convergence) विचलन (Divergence)

(रेखा AB अकेले x –अक्ष से मिलती हैं)

चित्र 4.5 छेदिक विधि

एल्गोरिदम: छेदिक विधिक (Secant Method) द्वारा $f(x) = 0$ के मूल की खोज।

चरण 1: $f(x)$ को परिभाषित करें।

चरण 2: x_0, x_1, त्रुटि, अधिकतम (Maxit) को निविष्ट (Input) दे और [x_0, x_1, प्रारंभिक अनुमान हैं, त्रुटि निर्धारित यर्थाथता (Prescribed Precision) है और (Maxit) पुनरावृत्ति की अधिकतम संख्या है।

चरण 3: $i = 1$ रखें।

चरण 4: $f_0 = f(x_0)$ की गणना करें।

चरण 5: $f_1 = f(x_1)$ की गणना करें।

चरण 6: गणना $x_2 = (x_0 f_1 - x_1 f_0)$è$(f_1 - f_0)$ की गणना करें।

चरण 7: $i = i + 1$ रखें।

चरण 8: Accy $= |x_2 - x_1| / |x_1|$ की गणना करें।

चरण 9: जाँच करें कि Accy < त्रुटि (Error) है, तो चरण 14 पर जाएँ।

चरण 10: जाँच करें कि $i \geq$ अधिकतम (Maxit), तो चरण 16 पर जाएँ।

चरण 11: $x_0 = x_1$ रखें।

चरण 12: $x_1 = x_2$ रखें।

चरण 13: चरण 6 पर जाएं।

चरण 14: प्रिंट करें "मूल =",x_2 हैं।

चरण 15: चरण 17 पर जाएं।

चरण 16: प्रिंट करें 'पुनरावृत्ति अभिसरण नहीं करती है'।

चरण 17: समाप्त।

रेगुला–फालसी विधि (Regula-Falsi Method)

रेगुला–फालसी विधि भी एक कोष्ठीकरण (Bracketing) विधि है। विभाजन विधि (Bisection Method) में, हम पहले एक अंतराल (a, b) की खोज करके गणना शुरू करते हैं, जिसके भीतर एक वास्तविक मूल निहित होता है। $a = x_0$ और $b = x_1$ लिखकर, हम $f(x_0)$ और $f(x_1)$ की गणना करते हैं, और जांचते हैं कि अगर $f(x_0)$ और $f(x_1)$ विपरीत चिन्हों के हैं। अनुमानित मूल x_2 के निर्धारण के लिए, हम $(x_0, f(x_0))$ और $(x_1, f(x_1))$ से गुजरने वाले जीवा (Chord) और x–अक्ष के प्रतिच्छेदन बिंदु (Intersection Point) को देखेंगे, अर्थात, वक्र $y = f(x_0)$ नीचे दिये गए समीकरण से आए जीवा द्वारा प्रतिस्थापित किया जाएगा,

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (4.16)$$

इस प्रकार, समीकरण (4.16) में $y = 0$ और $x = x_2$ रखकर, हम प्राप्त करेंगे,

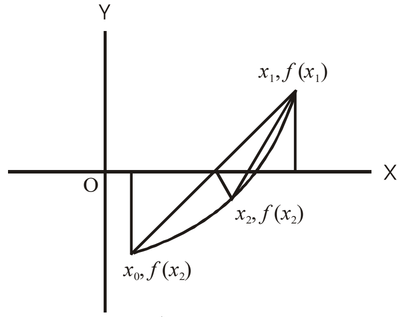
$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) \qquad (4.17)$$

इसके बाद, हम $f(x_2)$ की गणना और उस अंतराल को निर्धारित करते हैं जिसमें मूल निम्नलिखित विधि से निहित है।

यदि $(a) f(x_2)$ और $f(x_1)$ विपरीत संकेत के हैं, तो मूल (x_2, x_1) में निहित है। अन्यथा यदि $(b) f(x_0)$ और $f(x_2)$ विपरीत संकेत के हैं, तो मूल (x_0, x_2) में निहित है। अगला अनुमानित मूल पहले प्रकरण में x_0 द्वारा x_2 और दूसरे प्रकरण में x_1 द्वारा x_2 से बदलकर निर्धारित किया जाता है।

पूर्वोक्त प्रक्रिया तब तक दोहराई जाती है जब तक कि मूल की वांछित सटीकता तक के लिए गणना नहीं की जाती है, अर्थात, स्थिति $|(x_{k+1} - x_k)/x_k| < \varepsilon$, संतुष्ट होनी चाहिए।

रेगुला–फाल्सी (Regula-Falsi) विधि को ज्यामितीय रूप से निम्न चित्र 4.6 द्वारा व्याख्यायित किया जा सकता है।



चित्र 4.6 रेगुला–फालसी विधि

एल्गोरिदम (Algorithm): रेगुला–फाल्सी (Regula-Falsi) विधि द्वारा एक समीकरण के मूल की गणना।

चरण 1: $f(x)$ को परिभाषित करें।

चरण 2: एप्सिलॉन, वांछित सटीकता (Desired Accuracy) को पढ़े।

चरण 3: अधिकतम (Maxit) पुनरावृत्ति (Iteration) की अधिकतम संख्या पढ़े।

चरण 4: मूल के दो प्रारंभिक अनुमानों $f_0 = f(x_0)$ को पढ़े।

चरण 5: $f_0 = f(x_0)$ की गणना करे।

चरण 6: $f_1 = f(x_1)$ की गणना करे।

चरण 7: जांचें कि अगर $f_0 f_1 < 0$ है, तो अगले चरण पर जाएं अन्यथा चरण 4 पर जाएं।

चरण 8: $x_2 = (x_0 f_1 - x_1 f_0) / (f_1 - f_0)$ की गणना करे।

चरण 9: $f_2 = f(x_2)$ की गणना करे।

चरण 10: जाँच करें यदि $|f_2| <$ एप्सिलॉन (Epsilon) है, फिर चरण 18 पर जाएं।

चरण 11: जांचें कि क्या $f_2 f_0 < 0$ है, तो अगले चरण पर जाएं अन्यथा चरण 15 पर जाएं।

चरण 12: $x_1 = x_2$ रखें।

चरण 13: $f_1 = f_2$ रखें।

चरण 14: चरण 7 पर जाएं

चरण 15: $x_0 = x_2$ रखें।

चरण 16: $f_0 = f_2$ रखें।

चरण 17: चरण 7 पर जाएं।

चरण 18: 'मूल =', x_2, f_3 लिखें।

चरण 19: समाप्त।

उदाहरण 4.13: चार महत्वपूर्ण अंको तक के लिए $x^3 - 3x - 5 = 0$ के धनात्मक मूल की गणना के लिए रेगुला–फालसी विधि का उपयोग करें।

हल: पहले हम उस अंतराल को ज्ञात करेंगे जिसमें मूल निहित है। हम अवलोकन (Observe) करेंगे कि $f(2) = -3$ और $f(3) = 13$। इस प्रकार, मूल [2, 3] में निहित है। रेगुला–फालसी विधि का उपयोग करने के लिए, हम सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

$x_0 = 2$, और $x_1 = 3$ के साथ हमारे पास,

$$x_2 = 2 + \frac{3}{13+3}(3-2) = 2.1875$$

फिर से, चूंकि $f(x_2) = f(2.1875) = -1.095$, हम अंतराल $[2.1875, 3]$ पर विचार करेंगे। अगला सन्निकटन $x_3 = 2.2461$ है। इसी के साथ, $f(x_3) = -0.4128$ है। इसलिए, यह मूल $[2.2461, 3]$, में निहित है।

टिप्पणी

पुनरावृत्ति (Iteration) को दोहराते हुए हम प्राप्त करते हैं,

$$x_4 = 2.2684, f(x_4) = -\ 0.1328$$
$$x_5 = 2.2748, f(x_5) = -\ 0.0529$$
$$x_6 = 2.2773, f(x_6) = -0.0316$$
$$x_7 = 2.2788, f(x_7) = -0.0028$$
$$x_8 = 2.2792, f(x_8) = -0.0022$$

चार महत्वपूर्ण अंकों के लिए सही मूल 2.279 है।

बहुपद समीकरणों के मूल (Roots of Polynomial Equations)

वास्तविक गुणांक (Real Coefficients) वाले बहुपद समीकरणों (Polynomial Equations) में उनके मूल के संबंध में कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं होती हैं। अगर n घात का एक बहुपद समीकरण है–

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \text{ है तो}$$

(*i*) घात n के बहुपद समीकरण में केवल n मूल होते हैं।

(*ii*) सम्मिश्र मूल (Complex Root) युग्मों (Pairs) में होते हैं, अर्थात, यदि $\alpha + i\beta$, $p_n(x) = 0$ का एक मूल है $\alpha + i\beta$ तो दूसरा मूल $\alpha - i\beta$ होगा।

(*iii*) डेसकार्ट (Descartest's) के चिन्हों का नियम संभव वास्तविक मूलों (धनात्मक या ऋणात्मक) की संख्या को निर्धारित करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।

(*iv*) यदि $x_1, x_2, ..., x_n$ बहुपद समीकरण के सभी वास्तविक मूल हैं, तो हम $p_n(x)$ को विशिष्ट रूप से व्यक्त कर सकते हैं।

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

(*v*) $p_n(x)$ में जटिल या सम्मिश्र संयुग्म मूल (Complex Conjugate Roots) के प्रत्येक युग्म के लिए एक द्विघात गुणक (Quadratic Factor) है। माना कि $\alpha + i\beta$ और $\alpha - i\beta$ मूल है, तब $\{x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)\}$ द्विघात गुणक (Quadratic Fector) है।

(*vi*) किसी दिए गए x के लिए एक बहुपद और उसके अवकलज (Derivatives) का मान ज्ञात करने के लिए एक विशेष विधि है, जिसे हॉर्नर के संश्लेषित प्रतिस्थापन की विधि (Horner's Method of Synthetic Substitution) के रूप में जाना जाता है।

डेसकार्ट का नियम (Descart's Rule)

एक बहुपद समीकरण $p_n(x)$ के धनात्मक वास्तविक मूल (Positive Real Roots) की संख्या में चिन्ह के परिवर्तन की संख्या के बराबर है, जिसे x के अवरोही घातों (Descending Powers) के साथ लिखा गया है, या जो एक सम संख्या से कम है।

निम्नलिखित बहुपद समीकरण पर विचार करें,

$$3x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

स्पष्ट रूप चिन्ह में तीन बार परिवर्तन हुए हैं और इसलिए धनात्मक वास्तविक मूल की संख्या तीन या एक होगी। इसलिए इसमें एक वास्तविक मूल होना चाहिए। वास्तव में, विषम घात (Odd Degree) के प्रत्येक बहुपद समीकरण में एक वास्तविक मूल होता है।

हम डेसकार्ट (Descarte's) के नियम का उपयोग $p_n(-x)$ में चिन्हों के परिवर्तन की संख्या ज्ञात करके ऋणात्मक मूल की संख्या निर्धारित करने के लिए भी कर सकते हैं। उपरोक्त समीकरण के लिए, $p_n(-x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$ और इसमे दो बार चिन्हों मे परिवर्तन हुआ है। इसलिए इसके दो ऋणात्मक मूल होंगे या एक भी नहीं होंगे।

4.3 प्रक्षेपण या प्रक्षेप या अंतर्वेशन

संख्यात्मक विश्लेषण में प्रक्षेपण या अंतर्वेशन (Interpolation) की समस्या (Fundamental Problem) बहुत ही मौलिक समस्या है। प्रक्षेप या प्रक्षेपण का अर्थ है दो रेखाओ के मध्य अध्ययन से होता है लेकिन संख्यात्मक मे, प्रक्षेप या प्रक्षेपण का अर्थ है मानों की तालिका में x के मानों के बीच एक फलन $f(x)$ का मान निकालना। इसे स्पष्ट रूप से ऐसे भी कह सकते हैं कि $(n + 1)$ मानों के लिए $y_0, y_1, y_2,..., y_n$ क्रमशः $x = x_0$, $x_1, x_2, ..., x_n$ का एक समुच्चय दिया है। प्रक्षेप या प्रक्षेपण की समस्या x के किसी भी गैर–सारणीबद्ध मान में से फलन $y = f(x)$ के मान की गणना करना होता है।

गणना अक्सर एक बहुपद का पता लगाकर की जाती है जिसे प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Interpolating Polynomial) कहते हैं, इसकी घात n से कम या इसके बराबर ऐसा होती है कि बहुपद का मान सारणी में प्रत्येक बिंदु पर फलन के मान के बराबर होता है है। जो इस प्रकार

$$\text{यदि } \varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (4.18)$$

प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद जिसकी घात $\le n$ है, तब

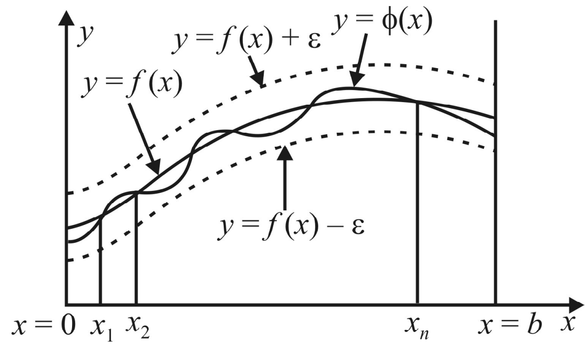
$$\varphi(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, ...,\ n \text{ के लिए।} \qquad (4.19)$$

यह सच है कि, सामान्य तौर पर, अनुमानित $f(x)$ प्रकार के फलन का अनुमान लगाना मुश्किल है। आवधिक फलनों (Periodic Functions) के प्रकरण में, सन्निकटन को त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Functions) की एक परिमित श्रृंखला (Finite Series) द्वारा बनाया जा सकता है। बहुपद प्रक्षेप (Polynomial Interpolation), फलन सन्निकटन के लिए एक बहुत ही उपयोगी विधि होती है। प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद अन्य समस्याओं जैसे संख्यात्मक विभेदन, संख्यात्मक अवकलन और अवकलन समीकरण से जुड़ी प्रारंभिक और सीमा मान समस्याओं के हल की विधियों को विकसित करने के आधार में बहुत उपयोगी होती है।

टिप्पणी

वीयरस्टैस (Weierstrass) द्वारा विकसित निम्नलिखित प्रमेय, एक बहुपद द्वारा अज्ञात फलन के सन्निकटन की औचित्य या प्रामाणिकता देता है।

प्रमेय 4.4: प्रत्येक फलन जो एक अंतराल (a, b) में निरंतर या सतत है, उस अंतराल में एक बहुपद द्वारा किसी भी वांछित सटीकता का निरूपण किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, एक बहुपद $P(x)$ को निर्धारित करना संभव है जैसे कि $|\ f(x)-P(x)\ |<\varepsilon$, प्रत्येक x के लिए अंतराल (a, b) में है जहाँ ε कोई निर्धारित छोटी मात्रा है। ज्यामितीय रूप से, यह समझा जा सकता है कि बहुपद का ग्राफ या आलेख (a, b) के बीच x के सभी मानों के लिए वक्र $y = f(x)-\varepsilon$ और $y = f(x)+\varepsilon$ से परिबद्ध (Bounded) क्षेत्र तक सीमित होता है।



चित्र 4.7 प्रक्षेप या प्रक्षेपण

निम्नलिखित प्रमेय प्रक्षेपण बहुपद की विशिष्टता के बारे में है।

प्रमेय 4.5: एक वास्तविक मान फलन $f(x)$ के लिए $(n+1)$ अलग–अलग बिंदुओं x_0, $x_1, ..., x_n$ पर परिभाषित किया गया है, जिसमें एक बहुपद बिल्कुल मौजूद होता है जिसकी घात $\leq n$ होती है जो $f(x)$ को $x_0, x_1, ..., x_n$ पर प्रक्षेपित (Interpolates) करता है।

हम जानते हैं कि एक बहुपद $P(x)$ के $(n+1)$ अलग–अलग मूलों $x_0, x_1, ...,$ x_n को निम्न रूप में लिखा जा सकता है,

$$P(x) = (x - x_0)\ (x - x_1)\ .....(x - x_n)\ q\ (x)$$

जहाँ $q(x)$ एक बहुपद है जिसकी घात 0 या $(n+1)$ है जो $P(x)$ की घात से कम है।

मान लीजिए कि दो बहुपद $\varphi(x)$ और $\psi(x)$ घात $\leq n$ है और दोनों $f(x)$ को प्रक्षेपित करते हैं। यहाँ $P(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ पर $x_0, x_1,..., x_n$ है तब $P(x)$, बिंदुओं $n+1$ पर लुप्त हो जाता है। इस प्रकार $P(x) = 0$ और $\phi(x) = \psi(x)$ है।

पुनरावृत्ति रैखिक प्रक्षेप (Iterative Linear Interpolation)

इस पद्धति में, हम क्रमिक रूप से रैखिक प्रक्षेपित (Linear Interpolates) फलनों का उपयोग करके, किसी भी घात के, प्रक्षेपित बहुपदों को प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी

मान लीजिए कि $p_{01}(x)$, x_0 और x_1 पर सारणीबद्ध मानों के लिए रैखिक प्रक्षेपित बहुपद को निरूपित करता हैं। इस प्रकार, हम लिख सकते हैं,

$$p_{01}(x) = \frac{(x_1 - x)f_0 - (x_0 - x)f_1}{x_1 - x_0}$$

यह निर्धारक संकेतन (Determinant Notation) के साथ लिखा जा सकता है,

$$p_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} \tag{4.20}$$

$p_{01}(x)$ के इस रूप को देखना आसान है और गणना के लिए भी सुविधाजनक है। इस प्रकार, रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Linear Iterative Polynomial) को बिंदुओं का युग्म (x_0, f_0) और (x_j, f_j) के माध्यम से आसानी से लिखा जा सकता है,

$$p_{0j}(x) = \frac{1}{x_j - x_0}\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_j & x_j - x \end{vmatrix}, \; j = 1, 2, ..., n \text{ के लिए} \tag{4.21}$$

अब, p_{01j} द्वारा निरूपित बहुपद पर विचार करें और,

$$p_{01j}(x) = \frac{1}{x_j - x_1}\begin{vmatrix} p_{01}(x) & x_1 - x \\ p_{0j}(x) & x_j - x \end{vmatrix}, \text{ जहाँ } j = 2, 3, ..., n \text{ है।} \tag{4.22}$$

बहुपद $p_{01j}(x)$, $f(x)$ को बिंदुओं $x_0, x_1, x_j\, (j > 1)$ पर प्रक्षेपित करता है और घात 2 का बहुपद है, जिसे आसानी से सत्यापित किया जा सकता है कि,

$p_{0ij}(x_0) = f_0$, $p_{0ij}(x_i) = f_i$ और $p_{0ij}(x_j) = f_j$ क्योंकि $p_{01}(x_0) = f_0 = p_{0ij}(x_0)$, इत्यादि।

इसी प्रकार, बहुपद $p_{012j}(x)$ का निर्माण $p_{01}(x)$ को $p_{012}(x)$ और $p_{0j}(x)$ को $p_{01j}(x)$ में बदलकर किया जा सकता है। जो इस प्रकार है,

$$p_{012j}(x) = \frac{1}{x_j - x_2}\begin{vmatrix} p_{012}(x) & x_2 - x \\ p_{01j}(x) & x_j - x \end{vmatrix}, \text{ जहाँ } j = 3, 4, ..., n \text{ है।} \tag{4.23}$$

स्पष्ट है, $p_{012j}(x)$ घात 3 का एक बहुपद है और यह फलन को x_0, x_1, x_2 और x_j पर प्रक्षेपित करता है

अर्थात्, $p_{012j}(x_0) = f_0$; $p_{012j}(x_i) = f_1$; $p_{012j}(x_2) = f_2$ और $p_{012j}(x_j) = f_j$

इस प्रक्रिया को उच्च और उच्चतर घात के प्रक्षेपित बहुपद को प्राप्त करने के लिए जारी रखा जा सकता है।

पुनरावृत्त रेखीय प्रक्षेप के परिणामों को निम्न तालिका के अनुसार आसानी से दर्शाया जा सकता है।

टिप्पणी

x_k	f_k	p_{0j}	p_{01j}	...	$x_j - x$
x_0	f_0				$x_0 - x$
x_1	f_1	p_{01}			$x_1 - x$
x_2	f_2	p_{02}	p_{012}		$x_2 - x$
x_3	f_3	p_{03}	p_{013}		$x_3 - x$
...	...	...	...	...	...
x_j	f_j	p_{0j}	p_{01j}		$x_j - x$
...	...	...	...	...	...
x_n	f_n	p_{0n}	p_{01n}		$x_n - x$

पूर्व स्तंभों का उपयोग करके लिखे गए निर्धारकों के मानों और अंतिम स्तंभों $x_j - x$ में संबंधित प्रविष्टियों का उपयोग करके प्रक्षेप या प्रक्षेपण परिणामों के क्रमिक स्तंभों को आसानी से भरा जा सकता है। इस प्रकार, $j = 2, 3, ..., n,$के लिए p_{01j} की गणना करने के लिए, हम उस निर्धारक का मूल्यांकन करते हैं जिसके अवयव बोल्डफेस मानों (Bold Face Quantities) के रूप में उदाहरण 4.14 में दर्शाये गये हैं और निर्धारक के मान को अंतर $(x_j - x) - (x_1 - x)$ द्वारा विभाजित किया जाता है।

उदाहरण 4.14: निम्नलिखित तालिका का उपयोग करके पुनरावृत्त रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा S (2.12) को ज्ञात करें :

x	2.0	2.1	2.2	2.3
$s(x)$	0.7909	0.7875	0.7796	0.7673

हल: यहाँ, $x = 2.12$। निम्न तालिका क्रमिक पुनरावृत्ति रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण के परिणाम देती है। गणना के विवरण नीचे तालिका में दिखाए गए हैं।

x_j	$s(x_j)$	p_{0j}	p_{01j}	p_{012j}	$x_j - x$
2.0	0.7909				−0.12
2.1	0.7875	**0.78682**			−0.02
2.2	0.7796	0.78412	**0.78628**		0.08
2.3	0.7673	0.78146	0.78628	**0.78628**	0.18

$$p_{01} = \frac{1}{2.1 - 2.0}\begin{vmatrix} 0.7909 & -0.12 \\ 0.7875 & -0.02 \end{vmatrix} = 0.78682$$

$$p_{02} = \frac{1}{2.2 - 2.0}\begin{vmatrix} 0.7909 & -0.12 \\ 0.7796 & -0.08 \end{vmatrix} = 0.78412$$

$$p_{03} = \frac{1}{2.3 - 2.0}\begin{vmatrix} 0.7909 & -0.12 \\ 0.7673 & 0.18 \end{vmatrix} = 0.78146$$

$$p_{012} = \frac{1}{2.2 - 2.1}\begin{vmatrix} 0.78682 & -0.02 \\ 0.78412 & 0.08 \end{vmatrix} = 0.78628$$

$$p_{013} = \frac{1}{2.3 - 2.1}\begin{vmatrix} 0.78682 & -0.02 \\ 0.78146 & 0.18 \end{vmatrix} = 0.78628$$

$$p_{012} = \frac{1}{2.3 - 2.2}\begin{vmatrix} 0.78628 & 0.08 \\ 0.78628 & 0.18 \end{vmatrix} = 0.78628$$

तालिका में बोल्डफेस दिए गए परिणाम x = 2.12 पर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Interpolation) का मान देते हैं। परिणाम 0.78682 रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा प्राप्त मान है। परिणाम 0.78628 को द्विघात (Quadratic) के साथ–साथ घन (Cubic) प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा भी प्राप्त किया जाता है। हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे हैं कि दूसरी घात के मुकाबले तीसरी घात बहुपद में कोई सुधार नहीं हुआ है।

नोट्स

1. लैग्रांज की विधि को छोड़कर, यह जरूरी नहीं है कि उपयोग किए जाने वाले प्रक्षेपित बहुपद की घात को ज्ञात करना आवश्यक नहीं है।
2. उच्च घात प्रक्षेपित बहुपद (Higher Degree Interpoloting Polynomial) द्वारा सन्निकटन (Approximation) हमेशा बेहतर परिणाम नहीं देते है। वास्तव में यह कुछ प्रकरणों में और निकृष्टतर हो जाते हैं।

   फलन $f(x) = 4$ पर विचार करें।

   हम $x = 0$ से 4 के मानों के साथ परिमित अंतर तालिका बनाते हैं।

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	1				
		3			
1	4		9		
		12		27	
2	16		36		81
		48		108	
3	64		144		
		192			
4	256				

न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेपण या प्रक्षेप (Newton's Forward Difference Interpolating Polynomial) में $x_0 = 0$ का मान लेकर नीचे दिया गया है

$$u = \frac{x - x_0}{h} = x, \quad \varphi(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x(x-1) + \frac{27}{6}x(x-1)(x-2) + \frac{81}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

अब, क्रमिक रूप से उच्च और उच्चतर घात बहुपद को लेकर $x = 0.5$ पर $\varphi(x)$ के मान पर विचार करें।

जो इस प्रकार है,

$\varphi_1(0.5) = 1 + 0.5 \times 3 = 2.5,$ रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा

$\varphi_2(0.5) = 2.5 + \dfrac{0.5 \times (-0.5)}{2} \times 9 = 1.375,$ द्विघात प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Quadratic Interpolation) द्वारा

$\varphi_3(0.5) = 1.375 + \dfrac{0.5 \times (-0.5) \times (-1.5)}{6} \times 27 = 3.0625,$ घन (Cubic Interpolation) प्रक्षेप द्वारा

$$\varphi_4(0.5) = 3.0625 + \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5)}{24} \times 81 = -0.10156,$$ द्विघात प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा

टिप्पणी

हम पाते हैं कि वास्तविक मान $4^{0.5} = 2$ को प्रक्षेप या प्रक्षेपण के द्वारा प्राप्त नहीं किया जा सकता है। उच्च घात बहुपद प्रक्षेप या प्रक्षेपण के परिणाम निकृष्टतर आते हैं।

नोट: लैग्रांज (Lagrange's) के प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र और पुनरावृत्त रैखिक प्रक्षेप को आसानी से एक संगणक कंप्यूटर द्वारा संगणना के लिए आसानी से कार्यान्वित किया जा सकता है।

उदाहरण 4.15: निम्नलिखित आंकड़ों की तालिका से प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद निर्धारित करें।

x	1	2	3	4
y	−1	−1	1	5

हल : आंकड़ों को समान दूरी पर रखा गया है। इस प्रकार हम परिमित अंतर (Finite Difference) तालिका को बना सकते हैं।

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	−1		
		0	
2	−1		2
		2	
3	1		2
		4	
4	5		

चूंकि दूसरे क्रम या कोटि का अंतर अचर (नियत) हैं, इसलिए प्रक्षेप या प्रक्षेपण घात दो बहुपद का है। न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप (Newton's Forward Difference Interpolation) का उपयोग करके हम पाते हैं,

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0,$$

यहाँ, $x_0 = 1, \quad u = x - 1.$

इस प्रकार, $y = -1 + (x-1) \times 0 + \dfrac{(x-1)(x-2)}{2} \times 2 = x^2 - 3x + 1$

उदाहरण 4.16: आंकड़ों की निम्न तालिका पर उपयुक्त प्रक्षेप या प्रक्षेपण का उपयोग करके $f(7.5)$ के मान की गणना करें।

x	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	28	65	126	217	344	513

हल: आंकड़ों को समान दूरी पर रखा गया है। इस प्रकार $f(7.5)$ की गणना के लिए, हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप (Newton's Backward Difference Interpolation) का उपयोग कर सकते हैं। इसके लिए, हम पहले निम्न परिमित अंतर तालिका बनाते हैं।

जैसा की नीचे दिखाया गया है।

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3	28			
		37		
4	65		24	
		61		6
5	126		30	
		91		6
6	217		36	
		127		6
7	344		42	
		169		
8	513			

टिप्पणी

क्रम या कोटि तीन में अंतर अचर (नियत) हैं और इसलिए हम न्यूटन बहुपद पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Newton's Backward Difference Interpolating Polynomial) में क्रम या कोटि 3 का उपयोग करेंगे।

$$f(x) = y_n + v\ \ \nabla y_n + \frac{v(v+1)}{2\ !}\nabla^2 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)}{3\ !}\nabla^3 y_n,$$

$$v = \frac{x - x_n}{h}, \text{ for } \ x = 7.5, \quad x_n = 8$$

$$\therefore \qquad v = \frac{7.5-8}{1} = -0.5$$

$$f(7.5) = 513 - 0.5\times 169 + \frac{(-0.5)\ \ (-0.5+1)}{2}\times 42 + \frac{-0.5\times 0.5\times 1.5}{6}\times 6$$
$$= 513 - 84.5 - 5.25 - 0.375$$
$$= 422.875$$

उदाहरण 4.17: निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Interpolating Polynomial) निर्धारित करें:

x	2	4	6	8	10
$f(x)$	5	10	17	29	50

हल: आंकड़ों को समान दूरी पर रखा गया है। हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Newton's Backward Difference Interpolating Polynomial) को बनाते हैं। परिमित अंतर (Finite Difference) तालिका है,

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
2	5				
		5			
4	10		2		
		7		3	
6	17		5		1
		12		4	
8	29		9		
		21			
10	50				

टिप्पणी

यहाँ, $x_0 = 2$, $u = (x–x_0)/h = (x–2)$è2.

प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद होगा,

$$f(x) = f(x_0) + u\ \Delta f(x_0) + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + ...$$

$$= 5 + \frac{x-2}{2}\times 5 + \frac{x-2}{2}\left(\frac{x-2}{2}-1\right)\frac{2}{2!} + \frac{x-2}{2}\left(\frac{x-2}{2}-1\right)\left(\frac{x-2}{2}-2\right)\frac{3}{3!}$$

$$+ \frac{x-2}{2}\left(\frac{x-2}{2}-1\right)\left(\frac{x-2}{2}-2\right)\left(\frac{x-2}{2}-3\right)\frac{1}{4!}$$

$$= \frac{1}{384}(x^4 + 4x^3 - 52x^2 + 1040x)$$

उदाहरण 4.18: निम्नलिखित मान में से प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Interpolating Polynomial) को ज्ञात करेः

$y(0) = 1$, $y(0.1) = 0.9975$, $y(0.2) = 0.9900$, $y(0.3) = 0.9980$ है और तब $y\ (0.05)$ की गणना करें।

हलः x के मान के आंकड़े समान दूरी पर हैं। हम परिमित अंतर तालिका (Finite Difference Table) बनाते हैं,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0.0	1.0000			
		−25		
0.1	0.9975		−50	
		−75		25
0.2	0.9900		−25	
		−100		
0.3	0.9800			

यहाँ, $h = 0\ \ 1$, $x_0 = 0.0$ को चयन करके, हमारे पास $s = \frac{x}{0.1} = 10x$ है। न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) है,

$$y = y_0 + s\ \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= 1 + 10x(-0.0025) + \frac{10x(10x-1)}{2!}(-0.0050) + \frac{10x(10x-1)(10x-2)}{6}\times 0.0025$$

$$= 1.0 - 0.25x - 0.25x^2 + 0.25x + \frac{2.5}{6}x^3 - \frac{300}{4}\times 0.0025x^2 + \frac{0.025}{6}x$$

$$= 1.0 + 0.004x - 0.375x^2 + 0.421x^3$$

$$y(0.05) = 1.0002$$

उदाहरण 4.19: नीचे दिए गए आंकड़ों की तालिका का उपयुक्त प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का उपयोग करके से $f(0.23)$ और $f(0.29)$ की गणना करे।

x	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30
$f(x)$	1.6596	1.6698	1.6804	1.6912	1.7024	1.7139

हल : आंकड़े समान दूरी पर है, इसलिए हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Newton's Forward Difference Interpolation) का उपयोग करके $f(0.23)$ की गणना

करेंगे, और हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Newton's Backward Difference Interpolation) का उपयोग $f(0.29)$ की गणना के लिए करेंगे। हम पहले निम्न परिमित अंतर तालिका बनाते हैं,

टिप्पणी

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
0.20	1.6596		
		102	
0.22	1.6698		4
		106	
0.24	1.6804		2
		108	
0.26	1.6912		4
		112	
0.28	1.7024		3
		115	
0.30	1.7139		

हम पाते हैं कि दो से अधिक कोटि के अंतर अनियमित (Irregular) हैं इसलिए हम द्वितीय घात (Second degree) के प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद (Interpolating Polynomial) का उपयोग करेंगे। $f(0.23)$ की गणना $u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.23 - 0.22}{0.02} = 0.5.$ के लिए, हम $x_0 = 0.22$ लेंगे।

न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation) का उपयोग करते हुए हम गणना करते हैं,

$$\begin{aligned} f(0.23) &= 1.6698 + 0.5 \times 0.0106 + \frac{(0.5)(0.5 - 1.0)}{2} \times 0.0002 \\ &= 1.6698 + 0.0053 - 0.000025 \\ &= 1.675075 \\ &\approx 1.6751 \end{aligned}$$

पुनः, $f(0.29)$ की गणना के लिए हम $x_n = 0.30$ लेते हैं,

ताकि $v = \frac{x - x_n}{n} = \frac{0.29 - 0.30}{0.02} = -0.5$

न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Newton's Backward Difference Interpolation) का उपयोग करते हुए हम पाते हैं,

$$\begin{aligned} f(0.29) &= 1.7139 - 0.5 \times .0115 + \frac{(-0.5)(-0.5 + 1.0)}{2} \times 0.0003 \\ &= 1.7139 - 0.00575 - 0.00004 \\ &= 1.70811 \\ &\simeq 1.7081 \end{aligned}$$

उदाहरण 4.20: नीचे दिए गए आंकड़ों की तालिका से उपयुक्त प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Interpolation Formula) का उपयोग करके e^x की $x = 0.02$ और $x = 0.38$ पर गणना करें।

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
e^x	1.0000	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918

टिप्पणी

हल : आंकड़े समान दूरी पर है। इसलिए हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) का उपयोग $x = 0.02$ की गणना e^x के लिए करेंगे, और हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Backward Difference Interpolation) का उपयोग $x = 0.38$ की गणना के लिए करेंगे। हम पहले निम्न परिमित अंतर तालिका बनाते हैं।

x	$y = e^x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.0	1.0000				
		1052			
0.1	1.1052		110		
		1162		13	
0.2	1.2214		123		−2
		1285		11	
0.3	1.3499		134		
		1419			
0.4	1.4918				

तथा $e^{0.02}$ की गणना के लिए, हम $x_0 = 0$ लेते हैं,

$$\therefore \quad u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.02 - 0.0}{0.1} = 0.2$$

न्यूटन के अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) से हमारे पास है,

$$e^{0.02} = 1.0 + 0.2 \times 0.1052 + \frac{0.2(0.2-1)}{2} \times 0.0110 + \frac{0.2(0.2-1)(0.2-2)}{6} \times 0.0013$$
$$+ \frac{0.2 \quad (0.2-1)(0.2-2)(0.2-3)}{24} \times -0.0002$$
$$= 1.0 + .02104 - 0.00088 + 0.00006 + 0.00001$$
$$= 1.02023 \simeq 1.0202$$

$e^{0.38}$ की गणना के लिए हम $x_n = 0.4$. इसी प्रकार, $v = \dfrac{0.38 - 0.4}{0.1} = -0.2$ है।

न्यूटन के पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप सूत्र (Newton's Backward Difference Interpolation Formula) से हमारे पास है,

$$e^{0.38} = 1.4918 + (-0.2) \times 0.1419 + \frac{(-0.2)(-0.2+1)}{2} \times 0.0134$$
$$+ \frac{(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)}{6} \times 0.0011 + \frac{-0.2(-0.2+1)(-0.2+2)(-0.2+3)}{24} \times (-0.0002)$$
$$= 1.4918 - 0.02838 - 0.00107 - 0.00005 - 0.00001$$
$$= 1.49287 - 0.02844$$
$$= 1.46443 \approx 1.4644$$

लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Lagrange's Interpolation)

लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण असमान सारणीबद्ध मानों के लिए उपयोगी है। मान लीजिए कि $y = f(x)$ एक अंतराल (a, b) में परिभाषित वास्तविक मूल्यवान फलन है और

$y_0, y_1, ..., y_n$ $(n+1)$, y के ज्ञात मान है क्रमशः $x_0, x_1, ..., x_n$ पर। बहुपद $\varphi(x)$ है, जो $f(x)$ को प्रक्षेप या प्रक्षेपण करता है तो n से कम या उसके बराबर घात का होता है। इस प्रकार,

टिप्पणी

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n \text{ के लिए} \tag{4.24}$$

बहुपद $\varphi(x)$ को निम्न रूप में माना जाता है,

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i \tag{4.25}$$

जहाँ प्रत्येक $l_i(x)$ घात $\leq n$ का बहुपद है और इसे लैग्रांजियन फलन (Lagrangian Function) कहा जाता है। अब, $\varphi(x)$ समीकरण (5.7) को संतुष्ट करता है यदि प्रत्येक $l_i(x)$ संतुष्ट करता है,

$$\begin{aligned} l_i(x_j) &= 0 \quad \text{यदि} \quad i \neq j \\ &= 1 \quad \text{यदि} \quad i = j \end{aligned} \tag{4.26}$$

समीकरण (4.26) से पता चलता है कि $l_i(x)$ $(n+1)$ बिन्दुओं $x_0, x_1, ... x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, पर लुप्त हो जाता है इस प्रकार, हम लिख सकते हैं,

$$l_i(x) = c_i (x - x_0) (x - x_1) ... (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) ... (x - x_n)$$

जहाँ c_i $l_i(x_i) = 1$ द्वारा दिया अचर है।

अर्थात, $c_i \; (x_i - x_0) \; (x_i - x_1) ... (x_i - x_{i-1}) \; (x_i - x_{i+1}) ... \; (x_i - x_n) = 1$

इस प्रकार, $l_i(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} i = 0, 1, 2, ..., n$ के लिए

(4.27)

समीकरणों (4.25) और (4.27) मिलकर लैग्रांज बहुपद प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Lagrange's Interpolating Polynomial) देते हैं।

एल्गोरिदम: $f(x)$ की लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा गणना करना।

चरण 1: n को पढ़ें [n मानों की संख्या है।

चरण 2: x_i, f_i को पढ़ें $i = 1, 2, ..., n$ के लिए।

चरण 3: योग $= 0, i = 1$ रखें।

चरण 4: x को पढ़ें [x प्रक्षेपशील बिंदु (Interpolating Point) है]।

चरण 5: $j = 1$, गुणन =1 रखें।

चरण 6: जांचें करें कि $j \neq i$, गुणन = गुणन $\times (x - x_j)/(x_i - x_j)$ अन्यथा चरण 7 पर जाएं।

चरण 7: $j = j + 1$ रखें।

चरण 8: $j > n$ की जाँच करें, तो चरण 9 पर जाएँ अन्यथा चरण 6 पर जाएँ।

चरण 9: योग = योग + (गुणन $\times f_i$) की गणना करें।

टिप्पणी

चरण 10: $i = i + 1$ रखें।

चरण 11: जांचें करें कि $i > n$ है, तो चरण 12 पर जाएं अन्यथा चरण 5 पर जाएं।

चरण 12: x, योग को लिखें।

उदाहरण 4.21 : लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण द्वारा निम्न तालिका से $f(0.4)$ की गणना करें।

x	0.3	0.5	0.6
$f(x)$	0.61	0.69	0.72

हल : लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र देता है,

$$f(0.4) = \frac{(0.4-0.5)(0.4-0.6)}{(0.3-0.5)(0.3-0.6)} \times 0.61 + \frac{(0.4-0.3)(0.4-0.6)}{(0.5-0.3)(0.5-0.6)} \times 0.69 + \frac{(0.4-0.3)(0.4-0.5)}{(0.6-0.3)(0.6-0.5)} \times 0.72$$

$$= 0.203 + 0.69 - 0.24 = 0.653 \simeq 0.65$$

इस प्रकार, $f(0.4) = 0.65$ ।

उदाहरण 4.22: लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण के सूत्र का उपयोग करते हुए, निम्न तालिका से $f(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

x	-1	-2	2	4
$f(x)$	-1	-9	11	69

हल : लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का उपयोग करते हुए हम पाते हैं

$$f(0) = \left[\frac{(0+2)(0-2)(0-4)}{(-1+2)(-1-2)(-1-4)} \times (-1)\right] + \left[\frac{(0+1)(0-2)(0-4)}{(-2+1)(-2-2)(-2-4)} \times (-9)\right]$$

$$+ \left[\frac{(0+1)(0+2)(0-4)}{(2+1)(2+2)(2-4)} \times 11\right] + \left[\frac{(0+1)(0+2)(0-2)}{(4+1)(4+2)(4-2)} \times 69\right]$$

$$= -\frac{16}{15} + \frac{9}{3} + \frac{11}{3} - \frac{69}{15} = \frac{20}{3} - \frac{85}{15}$$

$$= \frac{20}{3} - \frac{17}{3} = 1$$

उदाहरण 4.23: नीचे दिए गए तालिका से घात तीन के प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद का निर्धारण करें।

x	-1	0	1	2
$f(x)$	1	1	1	-3

हल : हमारे पास लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण की तीसरी घात बहुपद है,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} l_i(x) f(x_i)$$

जहाँ,

$$l_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2)$$

$$l_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{6}(x+1)\,x\,(x-2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)\times 1 + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)\times 1 - \frac{1}{2}(x+1)\,x\,(x-2)\times 1 + \frac{1}{6}(x+1)x(x-2)\times(-3)$$

$$= -\frac{1}{6}\,(4x^3-4x-6)$$

$$= \frac{-1}{3}(2x^3-2x-3)$$

उदाहरण 4.24: नीचे दिए गए मानों की तालिका से लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का उपयोग करके $f(2)$ और $f(6.2)$ के मानों का मूल्यांकन करें।

x	1.2	2.5	4	5.1	6	6.5
$f(x)$	6.84	14.25	27	39.21	51	58.25

हल : बहुपद प्रक्षेप या प्रक्षेपण में एक उच्च घात का उपयोग करना उचित नहीं है। इसके लिये $f(2)$ के मूल्यांकन के लिए हम दूसरी घात बहुपद में $x_0 = 1.2, x_1 = 2.5$ और $x_2 = 4$ के मानों का उपयोग करेगे।

इस प्रकार,

$$f(2) = l_0(2)\times 6.84 + l_1(2)\times 14.25 + l_2(2)\times 27$$

जहाँ,

$$l_0(2) = \frac{(2-2.5)(2-4)}{(1.2-2.5)(1.2-4)} = 0.275$$

$$l_1(2) = \frac{(2-1.2)(2-4)}{(2.5-1.2)(2.5-4)} = 0.821$$

$$l_2(2) = \frac{(2-1.2)(2-2.5)}{(4-1.2)(4-2.5)} = -0.095$$

$$\therefore f(2) = 0.275\times 6.84 + 0.821\times 14.25 - 0\,.095\times 27 = 11.015 \simeq 11.02$$

$f(6.3)$ के मूल्यांकन के लिए, हम $x_0 = 5.1,\ x_1 = 6.0,\ x_2 = 6.5$ पर $f(x)$ के मानों पर विचार करेगे।

इस प्रकार, $f(6.3) = l_0(6.3)\times 39.21 + l_1(6.3)\times 51 + l_2(6.3)\times 58.25$

जहाँ $l_0(6.3) = \dfrac{(6.3-6.0)(6.3-6.5)}{(5.1-6.0)(5.1-6.5)} = -0.048$

$$l_1(6.3) = \frac{(6.3-5.1)(6.3-6.5)}{(6-5.1)(6.0-6.5)} = 0.533$$

$$l_2(6.3) = \frac{(6.3-5.1)(6.3-6.0)}{(6.5-5.1)(6.5-6.0)} = 0.514$$

टिप्पणी

$$\therefore f(6.3) = -0.048 \times 39.21 + 0.533 \times 51 + 0.514 \times 58.25$$
$$= 55.241 \cong 55.24$$

चूंकि, गणना के परिणाम आंकड़ों से अधिक सटीक नहीं होते है, इसलिए अंतिम परिणाम को आंकड़ों के समान दशमलव संख्या (Decimals Number) में समाप्त (Rounded-Off) किया जाता है। कुछ प्रकरणों में, उच्च घात के बहुपदों से बेहतर परिणाम प्राप्त नहीं होते है।

समान दूरी वाले सारणीबद्ध मानों के लिए प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Interpolation for Equally Spaced Tabular Values)

किसी अज्ञात फलन प्रक्षेप या प्रक्षेपण के लिए जब तर्क x का सारणीबद्ध मान समान दूरी पर होता है, तो हमारे पास दो महत्वपूर्ण प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र होते हैं, अर्थात।

(*i*) न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र

(*i*) न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र।

हम पहले परिमित अंतरों (Finite Differences) पर चर्चा करेंगे जिसका उपयोग ऊपरी दोनों सूत्रों के मूल्यांकन में किया जाता है।

परिमित अंतर (Finite Differences)

मान लेते हैं कि कोई फलन $y = f(x)$, x के समान दूरी पर दिए गए मानों $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ के लिए इस तरह ज्ञात हैं कि किसी भी दो लगातार मानों के बीच का अंतर बराबर हो। इस प्रकार, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, ..., x_n = x_{n-1} + h$, तथा $i = 1, 2, ..., n$ के लिए $x_i = x_0 + ih$ है।

हम विभिन्न क्रम के लिए दो प्रकार के ज्ञात अंतरों, अग्रवर्ती अंतर (Forward Differences) और पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences) पर विचार करेगे। इन अंतरों को एक परिमित अंतर तालिका में सारणीबद्ध किया जा सकता है।

अग्रवर्ती अंतर (Forwad Difference)

मान लेते हैं कि $y_0, y_1, ..., y_n$ फलन $y = f(x)$ के समान दूरी वाले $x = x_0, x_1, ..., x_n$ के मान है। दो लगातार y के बीच के अंतर $y_1 - y_0, y_2 - y_1, ..., y_n - y_{n-1}$ को बिन्दुओ x_0, $x_1, ..., x_{n-1}$ पर फलन $y = f(x)$ के लिए प्रथम कोटि या क्रम अग्रवर्ती अंतर (First Order Forward Differences) कहा जाता है। इन अंतरों को निम्न रूप से निरूपित किया जाता है

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ ..., \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \tag{4.28}$$

जहाँ Δ को अग्रवर्ती अंतर संचालक (Forward Difference Operator) के रूप में परिभाषित किया गया है,

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{4.29}$$

इस प्रकार, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ जहाँ $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ x_i पर प्रथम कोटि या क्रम अग्रवर्ती अंतर (First Order Forward Difference) हैं,

इन प्रथम कोटि या क्रम अग्रवर्ती अंतर (First Order Forward Difference) के अंतरों को द्वितीय क्रम या कोटि अग्रवर्ती अंतर (Second Order Forward Difference) कहा जाता है।

इस प्रकार, $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i)$

$$= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-2 \text{ के लिए} \qquad (4.30)$$

स्पष्ट है, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$

और, $$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)$$

अर्थात्, $$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-2 \text{ के लिए} \qquad (4.31)$$

इसी प्रकार, तृतीय कोटि या क्रम अग्रवर्ती अंतर (Third Order Forward Difference) को निम्न इस विधि से लिखा जा सकता है,

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i,\ \ i = 0, 1, 2, ..., n-3 \text{ के लिए}$$

अर्थात्, $$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \qquad (4.32)$$

अंत में, हम nवीं कोटि अग्रवर्ती अंतर को निम्न रूप से परिभाषित कर सकते हैं,

$$\Delta^n y_0 = y_n - ny_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} + ... + (-1)^n y_0 \qquad (4.33)$$

उपरोक्त समीकरणों का गुणांक द्विपद विस्तार (Binomial Expansion) $(1-x)^n$ के गुणांक हैं।

किसी फलन $y = f(x)$ के मानों की तालिका के लिए विभिन्न कोटि के अग्रवर्ती अंतर (Forward differences) की आमतौर पर गणना की जाती हैं और विकर्ण अंतर (Diagonal Difference) तालिका में निरूपित किया जाता है। $y = f(x)$ के मानों की तालिका के लिए छह अंकों $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ के लिए विकर्ण अंतर तालिका नीचे दिखाई गई है।

विकर्ण अंतर $y = f(x)$ के लिए तालिका है,

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	x_0	y_0					
			Δy_0				
1	x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$			
			Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
2	x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
			Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
3	x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
			Δy_3		$\Delta^3 y_2$		
4	x_4	y_4		$\Delta^2 y^3$			
			Δy_4				
5	x_5	y_5					

टिप्पणी

किसी भी स्तंभ में अंतर के प्रविष्टियों (Entries) की गणना पूर्व स्तंभ की प्रविष्टियों का अंतर होता है और उनको उनके बीच में रखा जाता है। अग्रवर्ती अंतर (Forward Differences) की गणना करने के लिए एक स्तंभ में ऊपरी आंकड़ों को निचले आंकड़ों से घटाया जाता है। हम पाते हैं कि y_i के सापेक्ष विभिन्न कोटि के अग्रवर्ती अंतर इनके माध्यम से आगे विकर्ण बनाते हैं। इस प्रकार $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0$ और $\Delta^5 y_0, y_0$ के माध्यम से शीर्ष अग्रवर्ती विकर्ण बना रहे हैं। निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान दें।

उदाहरण 4.25: $y = f(x)$ के मानों की तालिका दी गई है,

x	1	3	5	7	9
y	8	12	21	36	62

विकर्ण अंतर तालिका बनाएं और $\Delta f(5), \Delta^2 f(3), \Delta^3 f(1)$ के मानों को ज्ञात करें।

हल : विकर्ण अंतर तालिका इस प्रकार है,

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	1	8				
			4			
1	3	12		5		
			9		1	
2	5	21		6		4
			15		5	
3	7	36		11		
			26			
4	9	62				

तालिका से हम पाते हैं कि $\Delta f(5) = 15$, विकर्ण में प्रविष्टि (Entry) 21 के माध्यम से $f(5)$ है।

इसी तरह, $\Delta^2 f(3) = 6,$, विकर्ण में प्रविष्टि $f(3)$ के माध्यम से है। अंततः, $\Delta^3 f(1) = 1$ है।

पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences)

किसी फलन $y = f(x)$ के मानों की तालिका के लिए विभिन्न कोटि के पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences) को अग्रवर्ती अंतर (Forward Differences) के समान विधियों से परिभाषित किया गया है। पश्चवर्ती अंतर संचालन (Operator) ∇ (उल्टे त्रिकोण) को $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ द्वारा परिभाषित किया गया है।

इस प्रकार, $\nabla y_k = y_k - y_{k-1}$, for $k = 1, 2, ..., n$

अर्थात, $$\nabla y_1 = y_1 - y_0, \nabla y_2 = y_2 - y_1, ..., \nabla y_n = y_n - y_{n-1} \qquad (4.34)$$

दूसरे कोटि के पश्चवर्ती अंतर को सामान रूप से परिभाषित किया गया है,

$$\nabla^2 y_k = \nabla y_k - \nabla y_{k-1} = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$$

इसलिये, $\nabla^2 y_2 = y_2 - 2y_1 + y_0$, तथा $\nabla^2 y_n = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$ (4.35)

टिप्पणी

उच्च कोटि के पश्चवर्ती अंतरों को एक समान विधि से परिभाषित किया जा सकता है।

इस प्रकार,

$\nabla^3 y_n = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}$, इत्यादि (4.36)

अंततः, $\nabla^n y_n = y_n - ny_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2\ i} y_{n-2} - ... + (-1)^n y_0$ (4.37)

विभिन्न कोटियों के पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences) की गणना की जा सकती है और विकर्ण अंतर तालिका में रखा जा सकता है। एक बिंदु पर पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences) को बिंदु के माध्यम से पीछे की तरफ विकर्ण में रखा जाता है। निम्न तालिका पश्चवर्ती अंतर (Backward Differences) को दर्शाती है।

विकर्ण अंतर पश्चवर्ती अंतरों की तालिका निम्न प्रकार है,

i	x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$	$\nabla^5 y_i$
0	x_0	y_0					
			∇y_1				
1	x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$			
			∇y_2		$\nabla^3 y_3$		
2	x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$	
			∇y_3		$\nabla^3 y_4$		
3	x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$	
			∇y_4		$\nabla^3 y_5$		
4	x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$			
			∇y_5				
5	x_5	y_5					

पूर्व स्तंभ में प्रविष्टियों के अंतर के रूप में तालिका में एक स्तंभ की प्रविष्टियों की गणना की जाती हैं (जैसा कि पिछले उदाहरण में चर्चा की थी) और उन्हें उनके बीच मे रखा जाता है। हम देखते हैं y_i के संदर्भ में विभिन्न कोटियों के पश्चवर्ती अंतर पश्चवर्ती विकर्ण बनाते हैं। इस प्रकार, $\nabla y_5, \nabla^2 y_5, \nabla^3 y_5, \nabla^4 y_5$ और $\nabla^5 y_5$ सबसे निचले पश्चवर्ती विकर्ण y_5 के माध्यम से हैं।

हम देखते हैं कि किसी भी स्तंभ मे पश्चवर्ती अंतर की प्रविष्टियों के आंकड़ों की तालिका अगले अंतर तालिका के समान हैं, लेकिन अंतर विभिन्न संदर्भ बिंदुओं में हैं।

विशेष रूप से, यदि हम पहले क्रम या कोटि के अंतर के स्तंभों की तुलना करते हैं तो हम दर्शा सकते हैं,

उस $\Delta y_0 = \nabla y_1,\ \Delta y_1 = \nabla y_2, ...,\ \Delta y_{n-1} = \nabla y_n$

टिप्पणी

इस प्रकार, $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$, जहाँ $i = 0, 1, 2, ..., n-1$

इसी तरह, $\Delta^2 y_0 = \nabla^2 y_2, \Delta^2 y_1 = \nabla^2 y_3, ..., \Delta^2 y_{n-2} = \nabla^2 y_n$

$\Delta^2 y_i = \nabla^2 y_{i+2}$, जहाँ $i = 1, 2, ..., n-2$

$\Delta^k y_i = \nabla^k y_{i+k}$.

विलोमतः या इसके विपरीत $\nabla^k y_i = \Delta^k y_{i-k}$

उदाहरण 4.26: $y = f(x)$ के मानों की निम्नलिखित तालिका को दिया गया है,

x	1	3	5	7	9
y	8	12	21	36	62

$\nabla y_{(7)}, \nabla^2 y_{(9)}, \nabla^3 y_{(9)}$ के मानों का पता लगाएं।

हल : हम निम्न विकर्ण (Diagonal) अंतर तालिका बनाते हैं,

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
1	8				
		4			
3	12		5		
		9		1	
5	21		6		4
		15		5	
7	36		11		
		26			
9	62				

तालिका से, हम आसानी से $\nabla y_{(7)} = 15$, $\nabla^2 y_{(9)} = 11$, $\nabla^3 y_{(9)} = 5$ प्राप्त कर सकते हैं।

प्रतीकात्मक संचालक (Symbolic Operators)

हम संख्यात्मक विधि के विकास के लिए समान दूरी के सारणीबद्ध आंकड़ों के परिमित अंतर पर विचार करते हैं। एक फलन $y = f(x)$ में $x_0, x_1, x_2, ...,$ से संबंधित मानों का समुच्चय $y_0, y_1, y_2, ...,$ है जहाँ $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, ...,$ सभी h के साथ समान दूरी पर हैं। हम विभिन्न प्रकार के परिमित अंतरों को परिभाषित करते हैं जैसे कि अग्रवर्ती अंतर, पश्चवर्ती अंतर और केंद्रीय अंतर, और संचालकों के नियमों के हिसाब से उन्हें व्यक्त करेंगे।

फलन $f(x)$ का अग्रवर्ती अंतर को Δ संचालक द्वारा परिभाषित किया गया है, जिसे अग्रवर्ती अंतर संचालक (Forward Difference Operator) कहा जाता है

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{4.38}$$

एक सारणीबद्ध बिंदु x_i पर, हमारे पास है

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) \tag{4.39}$$

हम $\Delta f(x_i)$ को Δy_i द्वारा भी दर्शाते हैं,

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ के लिए (4.40)

हम एक संचालक E को भी परिभाषित करते हैं, जिसे विस्थापन संचालक (Shift Operator) कहा जाता है,

$E f(x) = f(x + h)$ (4.41)

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x)$$

इस प्रकार, $\Delta = E - 1$ एक संचालक संबंध है। (4.42)

जबकि समीकरण (4.38) पहले क्रम अग्रवर्ती अंतर को परिभाषित करता है, हम द्वितीय कोटि के अग्रवर्ती अंतर को निम्न विधि से परिभाषित कर सकते हैं।

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i)$$

$$\therefore \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \qquad (4.43)$$

विस्थापन संचालक (Shift Operator)

विस्थापन संचालक को E से दर्शाया जाता है और $E f(x) = f(x + h)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। जो इस प्रकार है,

$$Ey_k = y_{k+1}$$

उच्च कोटि विस्थापन संचालक (Higher Order Shift Operators) को $E^2 f(x) = Ef(x + h) = f(x + 2h)$ द्वारा परिभाषित किया जा सकता है।

$$E^2 y_k = E(Ey_k) = E(y_{k+1}) = y_{k+2}$$

सामान्य तौर पर, $E^m f(x) = f(x + mh)$

$$E^m yk = y_{k+m}$$

अग्रवर्ती अंतर संचालक और विस्थापन संचालक के बीच संबंध (Relation Between Forward Difference Operator and Shift Operator)

अग्रवर्ती अंतर संचालक की परिभाषा से हमारे पास है,

$$\begin{aligned}\Delta y(x) &= y(x+h) - y(x)\\ &= Ey(x) - y(x)\\ &= (E-1)y(x)\end{aligned}$$

यह संचालक संबंध की ओर जाता है,

$$\Delta = E - 1$$

अथवा $E = 1 + \Delta$ (4.44)

इसी तरह, दूसरे कोटि के अग्रवर्ती अंतर के लिए हमारे पास है,

टिप्पणी

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(x) &= \Delta y(x+h) - \Delta y(x)\\ &= y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)\\ &= E^2 y(x) - 2Ey(x) + y(x)\\ &= (E^2 - 2E + 1) y(x)\end{aligned}$$

यह संचालक संबंध, $\Delta^2 = (E-1)^2$ देता है।

अंत में, हमारे पास $\Delta^m = (E-1)^m$, $m = 1, 2, \ldots$ के लिए है। (4.45)

विस्थापन संचालक के साथ पश्चवर्ती अंतर संचालक के बीच संबंध (Relation Between the Backward Difference Operator and Shift Operator)

पश्चवर्ती अंतर संचालक की परिभाषा से हमारे पास है,

$$\begin{aligned}\nabla f(x) &= f(x) - f(x-h)\\ &= f(x) - E^{-1} f(x) = (1 - E^{-1}) f(x)\end{aligned}$$

यह संचालक संबंध (Operator Relation) की ओर जाता है,

$$\nabla \equiv 1 - E^{-1} \tag{4.46}$$

इसी तरह, दूसरे कोटि के पश्चवर्ती अंतर को परिभाषित किया गया है,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x) &= \nabla f(x) - \nabla f(x-h)\\ &= f(x) - f(x-h) - f(x-h) + f(x-2h)\\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\\ &= f(x) - E^{-1} f(x) + E^{-2} f(x)\\ &= (1 - E^{-1} + E^{-2}) f(x)\\ &= (1 - E^{-1})^2 f(x)\end{aligned}$$

इससे संचालक संबंध, $\nabla^2 \equiv (1-E^{-1})^2$ देता है और सामान्य तौर पर,

$$\nabla^m \equiv (1 - E^{-1})^m \tag{4.47}$$

संचालकों E, D और Δ के बीच संबंध (Relation Between the Operators E, D and Δ)

टेलर प्रमेय (Taylor's Theorem) से हमारे पास है,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

इस प्रकार, $Ef(x) = f(x) + hDf(x) + \dfrac{h^2 D^2}{2!} f(x) + \ldots$, जहाँ $D = \dfrac{d}{dx}$

या,
$$\begin{aligned}(1+\Delta) f(x) &= \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \ldots\right) f(x)\\ &= e^{hD} f(x)\end{aligned}$$

इस प्रकार, $$e^{hD} = 1 + \Delta = E \tag{4.48}$$

और, $$hD = \log \quad (1 + \Delta)$$

या, $$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots$$

$$\therefore \qquad D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots \right)$$

केंद्रीय अंतर संचालक (Central Difference Operator)

केंद्रीय अंतर संचालक को δ द्वारा निरूपित किया जाता है और निमन द्वारा परिभाषित किया जाता है,

$$\delta y(x) = y\left(x + \frac{h}{2}\right) - y\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

इस प्रकार,

$$\delta y(x) = (E^{1/2} - E^{-1/2})\, y(x)$$

संचालक संबंध को देने पर, $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ अथवा $\delta E^{1/2} = E - 1$

तथा,

$$\delta\, y_n = (E^{1/2} - E^{-1/2})\, y(x_n) = E^{1/2} y_n - E^{-1/2} y_n$$

अर्थात्, $$\delta\, y_n = y_{n+1/2} - y_{n-1/2}$$

इसके आगे,

$$\begin{aligned}
\delta^2 y_n &= \delta\,(\delta\, y_n) = \delta\, y_{n+1/2} - \delta\, y_{n-1/2} \\
&= \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) \quad \left(y_{n+1/2}\right) - \left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right) \quad \left(y_{n-1/2}\right) \\
&= E^{1/2}\left(y_{n+1/2} - y_{n-1/2}\right) - E^{-1/2}\left(y_{n+1/2} - y_{n-1/2}\right) \\
&= y_{n+1} - y_n - y_n + y_{n-1} \\
&= y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = (E^{1/2} - E^{-1/2})^2\, y_n \;=\; \left[\Delta^2 y_{n-1} \equiv \nabla^2 y_{n+1}\right] \\
&= (E + E^{-1} - 2)\, y_n
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \delta^2 \equiv E + E^{-1} - 2 \tag{4.49}$$

भले ही केंद्रीय अंतर संचालक भिन्न तर्क (Fractional Arguments) का उपयोग करता है, फिर भी यह व्यापक रूप से इस्तेमाल किया जाता है। यह औसत संचालक से संबंधित है और इसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है,

$$\mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}) \tag{4.50}$$

वर्ग करने पर $\mu^2 = \dfrac{1}{4}(E + 2 + E^{-1}) = \dfrac{1}{4}(\delta^2 + 2 + 2) = 1 + \dfrac{1}{4}\delta^2$

$$\therefore \mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2 \qquad (4.51)$$

टिप्पणी

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि, $\delta\, y_{1/2} = y_1 - y_0 = \nabla y_1$
तथा $\delta\, E^{1/2} y_1 = \delta\, y_{\frac{1}{2}+1} = y_2 - y_1 = \Delta y_1$

$$\therefore\ \delta E^{1/2} = \Delta = E - 1 \qquad (4.52)$$

इसके आगे,

$$\delta^3 y_n = \delta(\delta^2 y_n) = \delta\left(\delta y_{n+\frac{1}{2}} - \delta\, y_{n-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \delta^2 y_{n+\frac{1}{2}} - \delta^2 y_{n-\frac{1}{2}} = \delta(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

उदाहरण 4.27: निम्नलिखित संचालकों के संबंधों को सिद्ध करें,

(*i*) $\Delta \equiv \nabla E$

(*ii*) $(1+\Delta)\,(1-\nabla) = 1$

हल :

(*i*) चूँकि $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = Ef(x) - f(x)$, $\Delta \equiv E - 1$ (*i*)

और चूँकि $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = (1-E^{-1})f(x)$, $\nabla \equiv 1 - E^{-1}$ (*ii*)

इस प्रकार, $\nabla \equiv \dfrac{E-1}{E}$ या $\nabla E \equiv E - 1 \equiv \Delta$

इस प्रकार सिद्ध होता है।

(*ii*) समीकरण (*i*) से हमारे पास है $E \equiv \Delta + 1$ (*iii*)

और समीकरण (*ii*) से हमें मिलेगा $E^{-1} \equiv 1 - \nabla$ (*iv*)

समीकरणों (*iii*) और (*iv*) को मिलाने पर हमें मिलेगा $(1+\Delta)(1-\nabla) \equiv 1$.

उदाहरण 4.28: $i = 1,2,...,$ के लिए, x_i पर, यदि $f(x)$ का मान f_i है जहाँ $x_i = x_0 + ih$ तो सिद्ध करें कि,

$$f_i = E^i f_o = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Delta^i f_0$$

हल: हम $Ef(x) = f(x+h)$ लिख सकते हैं।

टेलर श्रृंखला विस्तार के उपयोग से, हमारे पास है,

$$Ef(x) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + ...$$
$$= f(x) + hDf(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x) + ..., \quad \text{जहां} \quad D = \frac{d}{dx}$$

$$\therefore \quad (1+\Delta) f(x) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + ...\right) f(x), \quad \text{चूंकि} \quad E = 1 + \Delta$$

$$= e^{hD}.f(x)$$

$\therefore \qquad 1+\Delta = e^{hD}$

इसलिये, $\quad e^{ihD} = (1+\Delta)^i$

टिप्पणी

अब, $\quad f_i = f(x_i) = f(x_0 + ih) = E^i f(x_0)$

$\therefore \qquad f_i = (1+\Delta)^i f(x_0)$, चूंकि $E \equiv 1+\Delta$

$$f_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Delta^i f_0,$$ द्विपद विस्तार का उपयोग करते हुए।

इसलिए सिद्ध होता है।

उदाहरण 4.29: निम्नलिखित अंतरों की गणना करें,

(i) $\Delta^n e^x$ $\qquad$ (ii) $\Delta^n x^n$

हल:

(i) हमारे पास है, $\Delta e^x = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$

फिर से, $\Delta^2 e^x = \Delta(\Delta e^x) = (e^h - 1)\Delta e^x = (e^h - 1)^2 e^x$

इस प्रकार प्रवेशण द्वारा (By Indusction), $\Delta^n e^x = (e^h - 1)^n e^x$

(ii) हमारे पास है,

$$\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n$$
$$= n\,h\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + ... + h^n$$

इस प्रकार, $\Delta(x^n)$ $(n-1)$ घात का बहुपद है।

इसके अलावा, $\Delta(h^n) = 0$। इसलिए, हम कह सकते हैं कि $\Delta^2(x^n)$ एक अग्रणी पद $n(n-1)h^2 x^{n-2}$ के साथ $(n-2)$ घात का बहुपद है।

n बार आगे बढ़ने के बाद, हम प्राप्त करते हैं,

$$\Delta^n(x^n) = n(n-1)...1h^n = n!h^n$$

उदाहरण 4.30: सिद्ध करें कि,

(i) $\quad \Delta\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{g(x)\,\Delta f(x) - f(x)\,\Delta g(x)}{g(x)\,g(x+h)}$

(ii) $\quad \Delta\{\log f(x)\} = \log\left\{1 + \frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right\}$

टिप्पणी

हल:

(i) हमारे पास,

$$\Delta\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{f(x+h)\,g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$=\frac{f(x+h)\,g(x)-f(x)\,g(x)+f(x)\,g(x)-f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$=\frac{g(x)\{f(x+h)-f(x)\}-f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{g(x)\,g(x+h)}$$

$$=\frac{g(x)\;\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)}{g(x)\,g(x+h)}$$

(ii) हमारे पास है,

$$\Delta\{\log f(x)\}=\log\{f(x+h)\}-\log\{f(x)\}$$

$$=\log\frac{f(x+h)}{f(x)}=\log\left\{\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=\log\left\{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}+1\right\}$$

बहुपदों का अंतर (Differences of a Polynomial)

अब हम n घात बहुपदों के विभिन्न कोटियों के अंतर को देखते हैं, जो निम्न के द्वारा दिया गया है,

$$y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$$

प्रथम कोटि अग्रवर्ती अंतर को निम्न रूप से परिभाषित किया गया है,
$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$ और निम्न रूप से दिया गया है,

$$\Delta y=a_n\{(x+h)^n-x^n\}+a_{n-1}\{(x+h)^{n-1}-x^{n-1}\}+...+a_1(x+h-x)$$

$$=a_n\{n\,h\,x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2\;!}h^2x^{n-2}+...\}+a_{n-1}\{(n-1)h\,x^{n-2}+...\}$$

$$=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0$$

जहाँ x के विभिन्न घातों (Powers) के गुणांकों को अलग–अलग एकत्र किया जाता है।

इस प्रकार, प्रथम कोटि या क्रम अंतर का एक n कोटि बहुपद, $b_{n-1}=a_n.nh$ के साथ $(n-1)$ कोटि का बहुपद होता है।

ऊपर की तरह आगे बढ़ते हुए, हम बता सकते हैं कि n घात वाले बहुपद का द्वितीय कोटि अग्रवर्ती अंतर, $(n-2)$ घात का एक बहुपद है, जो कि $n(n-1)h^2a_0$, के रूप में x^{n-2} का गुणांक है।

क्रमिक रूप से जारी रखते हुए, हमें अंत में $\Delta^n y = a_0 n! h^n$, एक अचर या नियत प्राप्त होगा।

हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि घात n के बहुपद के लिए, n से अधिक कोटि वाले सभी अंतर शून्य होंगे हैं।

इस बात पर ध्यान दिया जा सकता है कि उपरोक्त परिणाम का विलोमतः आंशिक रूप से सत्य होता है और यह बताता है कि यदि किसी फलन के सारणीबद्ध मान ऐसे पाए जाते हैं कि kवां कोटि के अंतर लगभग अचर (नियत) हैं, तो प्रयोग किये जा रहे प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद की उच्चतम कोटि k होनी चाहिए। चूंकि सारणीबद्ध आंकड़ों में समाप्त (Round-Off) त्रुटियां हो सकती हैं, इसलिए एक सटीक फलन बहुपद नहीं हो सकता है।

उदाहरण 4.31: निम्नलिखित आंकड़ों के लिए क्षैतिज अंतर तालिका की गणना करें और इसलिए, $\nabla f(4), \nabla^2 f(3)$ और $\nabla^3 f(5)$ के मानों को लिखें।

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	18	83	258	627

हल: दिए गए आंकड़ों के लिए क्षैतिज अंतर तालिका (Horizontal Difference Table) निम्नानुसार है,

x	$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$	$\nabla^4 f(x)$
1	3	–	–	–	–
2	18	15	–	–	–
3	83	65	50	–	–
4	258	175	110	60	–
5	627	369	194	84	24

तालिका से हमने आवश्यक मान पढ़े और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए,

$$\nabla f(4) = 175,\ \nabla^2 f(3) = 50,\ \nabla^3 f(5) = 84$$

उदाहरण 4.32: निम्न सारणी के आधार पर $f(x)$ के लिए अंतर तालिका का गठन करें और दिखाएं कि तृतीय अंतर अचर (नियत) होता है। इसलिए, प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद की घात के बारे में निष्कर्ष निकालें।

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	6	13	32	69

हल : अंतर तालिका नीचे दी गई है,

टिप्पणी

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	5			
		1		
1	6		6	
		7		6
2	13		12	
		19		6
3	32		18	
		37		
4	69			

उपरोक्त तालिका से यह स्पष्ट है कि तृतीय अंतर नियत (Constant) है और इसलिए, प्रक्षेपित बहुपद की घात तीन है।

न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण (Newton's Forward Difference Interpolation Formula)

न्यूटन का अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र, n के बराबर या उससे कम घात का बहुपद है। इसका उपयोग एक गैर–सारणीबद्ध (Non-Tabular) बिंदु पर सारणीबद्ध फलन के मान को खोजने के लिए किया जाता है। एक फलन $y = f(x)$ पर विचार करें जिसका मान $y_0, y_1, ..., y_n$ समदूरस्थ बिंदुओ के समुच्चय $x_0, x_1, ..., x_n$ पर ज्ञात हैं।

मान लीजिए कि $\varphi(x)$ प्रक्षेपित बहुपद है, जो इस प्रकार है,

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i$$
$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, ..., n \text{ के लिए} \tag{4.53}$$

हम मानते हैं कि बहुपद $\varphi(x)$ निम्न रूप का है,

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \tag{4.54}$$

समीकरण (4.54) में गुणांकों a_i को समीकरण (4.53) के नियमों को पूरा करके निर्धारित किया जाता है, क्रमिक रूप से $i = 0, 1, 2, ..., n$ के लिए।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं,

$$y_0 = \varphi(x_0) = a_0, \quad \text{देता है} \quad a_0 = y_0$$

$$y_1 = \varphi(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \quad \text{देता है} \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$y_2 = \varphi(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

या,

टिप्पणी

$$y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} + a_2(2h) \quad h$$

$$a_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2\ !\ \ h^2}$$

आगे बढ़ते हुए, हम क्रमिक रूप से पाते है कि,

$$a_3 = \frac{\Delta^3\ y_0}{3\,!\,h^3}, \ldots, a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n\,!\,h^n}$$

गुणांकों के इन मानों का उपयोग करते हुए, हमें न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण निम्न रूप में मिलता है,

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\,\Delta\ y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2\ !\ \ h^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\,\frac{(x-x_1)}{h}\,\frac{(x-x_2)}{h}\,\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{(x-x_0)}{h}\frac{(x-x_1)}{h}\ldots\frac{(x-x_{n-1})}{h}\,\frac{\Delta^n y_0}{n!}$$

$u = \frac{x - x_0}{h}$ को लेकर इस सूत्र को और अधिक सुविधाजनक रूप में व्यक्त किया जा सकता है जैसा यहाँ दिखाया गया है।

हमारे पास है,

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = u - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 2 = u - 2$$

$$\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - \{x_0 + (n-1)h\}}{h} = \frac{x - x_0}{h} - (n-1) = u - n + 1$$

इस प्रकार, प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद निम्न रूप में मिलेगा,

$$\varphi(u) = y_0 + u \quad \Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2\ !}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3\ !}\Delta^3 y_0$$

$$+ \ldots + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n\ !}\Delta^n y_0 \qquad (4.55)$$

यह सूत्र आम तौर पर तालिका की शुरुआत में प्रक्षेप या प्रक्षेपण के लिए उपयोग किया जाता है।

किसी दिए गए x के लिए, हम x_0 के रूप में एक सारणीबद्ध बिंदु चुनते हैं जिसके लिए निम्नलिखित नियम संतुष्ट होते हैं।

बेहतर परिणाम के लिए, हमारे पास होना चाहिए,

$$|u| = \left|\frac{x - x_0}{h}\right| \le 0.5$$

टिप्पणी

उपयोग होने वाले प्रक्षेपित बहुपद की घात n से कम या उसके बराबर होनी चाहिए और अंतरों की कोटि से निर्धारित होता है जब वे लगभग एक सामान होते हैं तो समाप्त त्रुटि (Rond-off Error) के कारण उच्चतर कोटियों का अंतर अनियमित हो जाता है।

न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Backward Difference Interpolation Formula)

न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का उपयोग तालिका के अंत के पास एक बिंदु पर प्रक्षेप के लिए नहीं किया जा सकता है, क्योंकि हमारे पास आवश्यकतानुसार ऐसे बिंदुओं पर प्रक्षेप करने के लिए अंतर (Differences) नहीं होता है। हालाँकि, हम एक अलग सूत्र का उपयोग कर सकते हैं जिसे न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र के रूप में जाना जाता है। माना कि एक तालिका में $i = 0, 1, 2, ..., n$ के लिए समान दूरी के x_i के लिए $\{x_i, y_i\}$, मान दिए गए हैं। इस प्रकार, $x_i = x_0 + ih$, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ के लिए ज्ञात है।

हम n घात का एक प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद को निम्नलिखित रुप में बनाते हैं,

$$y \approx \varphi(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + b_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + ... + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) \quad (4.56)$$

हमें गुणांकों $b_0, b_1, ..., b_n$ को निर्धारित करने के लिए संबंधों को संतुष्ट करना होगा

$\varphi(x_i) = y_i,\ i = n, n-1, n-2, ..., 1, 0$ के लिए (4.57)

इस प्रकार, $\varphi(x_n) = y_n,\ b_0 = y_n$ देता है। (4.58)

इसलिए, $\varphi(x_{n-1}) = y_{n-1}$, हमें $y_{n-1} = b_0 + b_1(x_{n-1} - x_n)$ देता है।

या

$$b_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla y_n}{h} \quad (4.59)$$

पुनः $\varphi(x_{n-2}) = y_{n-2}$, $y_{n-2} = b_0 + b_1(x_{n-2} - x_n) + b_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-1} - x_n)$ देता है।

या, $y_{n-2} = y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h}(-2h) + b_2(-2h)(-h)$

$$\therefore \quad b_2 = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2} = \frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^2} \quad (4.60)$$

प्रवेशण द्वारा या पहले बताई गई प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए हमें मिलेगा,

$$b_3 = \frac{\nabla^3 y_n}{3\ !\ h^3},\ b_4 = \frac{\nabla^4 y_n}{4\ !\ h^4},\ ...,\ b_n = \frac{\nabla^n y_n}{n\ !\ h^n} \quad (4.61)$$

समीकरण (4.56) में b_i के मानों को प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\varphi(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2\ !\ h^2}(x - x_n)\quad(x - x_{n-1}) + ... + \frac{\nabla^n y_n}{n\ !\ h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1) \quad (4.62)$$

इस सूत्र को न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र के रूप में जाना जाता है। यह अंतर तालिका में पश्चवर्ती विकर्ण के साथ पश्चवर्ती अंतर का उपयोग करता है।

नया चर लाने पर $v = \frac{x - x_n}{h}$,

हमारे पास है, $\frac{x - x_{n-1}}{h} = \frac{x - (x_n - h)}{h} = v + 1$

इसी तरह, $\frac{x - x_{n-2}}{h} = v + 2, ..., \frac{x - x_1}{h} = v + \overline{n-1}$

इस प्रकार, समीकरण (4.62) में प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद को फिर से इस तरह लिखा जा सकता है कि,

$$\varphi(x) = y_n + v\nabla y_n + \frac{v(v+1)}{2\ !}\nabla^2 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)}{3\ !}\nabla^3 y_n + ... + \frac{v(v+1)(v+2)...(v+n-1)}{n\ !}\nabla^n y_n \tag{4.63}$$

यह सूत्र आम तौर पर एक तालिका के अंत के पास एक बिंदु पर प्रक्षेप या प्रक्षेपण के लिए उपयोग किया जाता है। दिए गए प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र में त्रुटि को निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$E(x) = f(x) - \varphi(x)$$

$$= \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)(x - x_0) f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}, \quad \text{जहां} \quad x_0 < \xi < x_n$$

$$= v(v+1)(v+2)...(v+n)\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}h^{n+1}$$

4.4 संख्यात्मक क्षेत्रकलन

न्यूटन–कोट्स सामान्य क्षेत्रकलन (Newton-Cotes General Quadrature)

हम न्यूटन के अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) के साथ शुरुआत करते हैं जो अंतराल $[a, b]$ में समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं पर, $f(x)$ के मानों की एक तालिका का उपयोग करता है। मान ले कि अंतराल $[a, b]$ को n बराबर उप–अंतरालों में इस तरह विभाजित किया गया कि

$$a = x_0, x_i = x_o + ih, i = 1, 2, ..., n-1, \ x_n = b \text{ के लिए} \tag{4.64}$$

ताकि, $nh = b–a$ होगा

न्यूटन अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र है,

$$\varphi(s) = f_0 + s\ \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + ... + \frac{s(s-1)(s-2)...(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \tag{4.65}$$

जहां हाँ $s = \frac{x - x_0}{h}$

टिप्पणी

$f(x)$ को समीकरण में $\phi(s)$ से बदलने पर हमें प्राप्त होता है,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx = h\int_0^n \left[f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + ... \right] ds$$

चूंकि जब $x = x_0$, $s = 0$ और $x = x_n$, $s = n$ और $dx = h\, du$ है।

जोकि RHS का क्रियान्वित समकलन है,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\left[nf_0 + \frac{n^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{n^4}{4} - 3\frac{n^3}{3} - 2\frac{n^2}{2}\right)\Delta^3 f_0 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\left(\frac{n^5}{5} - \frac{3n^4}{2} + \frac{11n^3}{3} - 3n^2\right)\Delta^4 f_0 + ... \right] \quad (4.66)$$

हम $n = 1, 2, 3, ...$ का विशेष मान लेकर विभिन्न समाकलन सूत्र (Integration Formula) प्राप्त कर सकते हैं पुनः अंतर को बदलने पर, न्यूटन–कोट्स सूत्र को x_0, x_1, ..., x_n, पर फलन के मानों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे कि

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) \quad (4.67)$$

न्यूटन–कोट्स सूत्र में प्राप्त त्रुटि है,

$$E^n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{n+1} \quad (\xi)\cdot\int_0^n s(s-1)\cdots(s-n)ds \quad (4.68)$$

4.5 गॉउस क्षेत्रकलन सूत्र

गॉउस क्षेत्रकलन (Gaussian Quadrature)

हमने देखा है कि संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) न्यूटन–कोट्स (Newton-Cotes) का सूत्र निम्न रूप में होता है,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \quad (4.69)$$

जहाँ $x_i = a+ih$, $i = 0, 1, 2, ..., n$; $h = \dfrac{b-a}{n}$ है।

यह सूत्र समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं पर फलनों के मानों का उपयोग करता है और $f(x)$ के लिए n के बराबर या उससे कम घात के बहुपद होने का सटीक परिणाम देता है। गॉउसियन (Gaussian) क्षेत्रकलन सूत्र समीकरण (4.69) के समान है, जो दिया गया है,

$$\int_{-1}^{1} F(u)du \approx \sum_{i=1}^{n} w_i F(u_i) \quad (4.70)$$

जहाँ w_i's और u_i's को क्रमशः भार (Weights) और भुज (Abscissae) कहा जाता है, यह इस तरह निकाला जाता है कि उपरोक्त समीकरण (4.70) $F(u)$ के लिए $2n–1$ के बराबर या उससे कम घात के बहुपद होने का सटीक परिणाम देता है।

टिप्पणी

न्यूटन–कोट्स समीकरण (4.71) में, गुणांक c_i और भुज (Abscissae) x_i परिमेय संख्याएँ (Rational Number) होती हैं, लेकिन भार (Weights) w_i और ऐब्सिस (Abscissae) u_i आमतौर पर अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Number) होती हैं। भले ही गॉउसियन क्षेत्रकलन सूत्र $F(u)$ का समाकल सीमा –1 से +1 के बीच देता है, लेकिन एक साधारण परिवर्तन द्वारा हम इसका उपयोग $f(x)$ के समाकल को a से b के बीच निकालने के लिए कर सकते हैं,

$$x = \frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2} \tag{4.71}$$

स्पष्ट है, तब u की सीमा $x = a$ से b के संगत, –1 से 1 तक हो जाती है और हम लिख सकते हैं,

$$f(x) = f\left[\frac{b-a}{2}u + \frac{a+b}{2}\right] = F(u)$$

हमारे पास है, $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(u)du \tag{4.72}$$

यह दिखाया जा सकता है कि u_i, n घात के लीजेंड्रे बहुपद (Legendre Polynomials) $P_n(u)$ के शून्य हैं। ये मूल वास्तविक हैं लेकिन अपरिमेय संख्याएँ हैं और भार (Weights) भी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

u_i और w_i को निर्धारित करने के लिए प्रासंगिक समीकरणों का एक सरल सूत्रीकरण निम्न समीकरण द्वारा दिया गया है और मान लीजिए कि $F(u)$ एक बहुपद निम्न रूप में है,

$$F(u) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k u^k \tag{4.73}$$

फिर, हम लिख सकते हैं

$$\int_{-1}^{1} F(u)du = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{k=0}^{2n-1} a_k u^k\right]du \tag{4.74}$$

या, $$\int_{-1}^{1} F(u)du = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + ... + \frac{2}{2n-2}a_{2n-2} \tag{4.75}$$

समीकरण (4.74) देता है,

टिप्पणी

$$\int_{-1}^{1} F(u)du = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[\sum_{k=0}^{2n-1} a_k u_i^k \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \left(a_0 + a_1 u_i + a_2 u_i^2 + \ldots + a_{2n-1} u_i^{2n-1} \right) \quad (4.76)$$

समीकरण (4.75) और (4.76) $2n-1$ से कम या इसके बराबर की घात वाले सभी बहुपदों के लिए के समान माना जाता हैं और इसलिए a_k के गुणांकों को दोनों तरफ समान करके, हमें निम्नलिखित $2n$ समीकरण $2n$ अज्ञात $w_1, w_2, \ldots, w_n$ और $u_1, u_2, \ldots, u_n$ के लिए प्राप्त होते हैं।

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 2, \sum_{i=1}^{n} w_i u_i = 0, \sum_{i=1}^{n} w_i u_i^2 = \frac{2}{3}, \ldots \sum_{i=1}^{n} w_i u_i^{2n-1} = 0 \quad (4.77)$$

समीकरण (4.77) का हल काफी जटिल है। हालाँकि, लीजेंड्रे बहुपद का उपयोग करके कम मेहनत की जा सकती है। यह दिखाया जा सकता है कि n घात वाले लीजेंड्रे बहुपद (Legendre Polynominals) $P_n(x)$ के भुज (Abscissae) शून्य हैं। तब समीकरणों (4.77) के पहले n समीकरणों को हल करके आसानी से भार (Weights) w_i निर्धारित किया जा सकता है। उदाहरण के रूप में, हम $n = 2$ लेते हैं। u_1, u_2, w_1 और w_2 के चार समीकरण होंगे :

$$w_1 + w_2 = 2$$
$$w_1 u_1 + w_2 u_2 = 0$$
$$w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2 = \frac{2}{3}$$
$$w_1 u_1^3 + w_2 u_2^3 = 0$$

w_1, w_2, को हटाकर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{w_1}{w_2} = -\frac{u_2}{u_1} = -\frac{u_2^3}{u_1^3}$$

या, $u_1^3 u_2 - u_1 u_2^3 = 0$ या $u_1 u_2 (u_1^2 - u_2^2) = 0$ है।

चूंकि, $u_1 \neq u_2 \neq 0$ हमारे पास $u_1 = -u_2$ है।

इसके अलावा, $w_1 = w_2 = 1$. तीसरा समीकरण देता है,

$$2u_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \; u_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

इसलिए, दो बिंदु गॉउस–लीजेंड्रे क्षेत्रकलन सूत्र है,

$$\int_{-1}^{1} F(u)du = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

तालिका 4.1, 2 से 6 तक n के मानों के लिए गॉउस–लीजेंड्रे क्षेत्रकलन के भुज (Abscissae) और भार (Weights) देता है।

तालिका 4.1 गौउस–लिजेंड्रे क्षेत्रकलन के लिए भार एवं भुज के मान

n	Weights	Abscissae
2	1.0	± 0.57735027
3	0.88888889	0.0
	0.55555556	± 0.77459667
4	0.65214515	± 0.33998104
	0.34785485	± 0.86113631
5	0.56888889	0.0
	0.47862867	± 0.53846931
	0.23692689	± 0.90617985
6	0.46791393	± 0.23861919
	0.36076157	± 0.66120939
	0.17132449	± 0.93246951

यह देखा जाता है कि भुज (Abscissae) मूल (Origin) के संदर्भ में सममित (Symmetrical) होते हैं और समदूरस्थ बिंदुओं (Equidistant Points) के लिए भार (Weights) के बराबर होते हैं।

उदाहरण 4.33: $\int_0^2 (1+x)dx,$ की गॉउस दो बिंदु क्षेत्रकलन सूत्र द्वारा गणना करें।

हल : $x=u+1$ को प्रतिस्थापित करने पर, दिए गए समाकल $\int_0^2 (1+x)dx$, $I=\int_{-1}^1 (u+2)du$ में परिवर्तित हो जाएगा। दो बिंदु गॉउस क्षेत्रकलन सूत्र (Gauss Two-Point Quadrature) का उपयोग करते हुए, हमारे पास $I=(0.57735027+2)+(-0.57735027+2)=4.0$ होगा।

जैसा कि अपेक्षित था, परिणाम समाकल के सटीक मान (Exact Value) के बराबर है।

उदाहरण 4.34: दिखाएँ कि $\int_a^b f(x)dx$ के मूल्यांकन के लिए गॉउस दो बिंदु क्षेत्रकलन सूत्र को समग्र रूप में लिखा जा सकता है

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{N}[f(r_i)+f(s_i)]$$

जहाँ $r_i = x_i + hp,\ s_i = x_i + (1-p)h,\ p=\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$ है।

हल : हम अंतराल, $[a,b]$ को N उप अंतराल में विभाजित करते हैं, प्रत्येक की लंबाई $h=\frac{b-a}{N}$ है।

टिप्पणी

अंतराल (x_i, x_{i+1}) पर समाकल I_i पर विचार करें, अर्थात् $I_{x_i} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$

हम $x = \frac{h}{2}u + \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ रख कर समाकल I_i को परिवर्तित करते हैं,

ताकि $x = x_i$ $u = -1$ और $x = x_{i+1}$, $u = 1$ दे। जो इस प्रकार,

$$I_i = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}u + x_i + \frac{h}{2}\right)du$$

गॉउस दो बिंदु क्षेत्रकलन देता है,

$$I_i = \frac{h}{2}\left[f\left(\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + x_i + \frac{h}{2}\right) + f\left(-\frac{h}{2\sqrt{3}} + x_i + \frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{h}{2}[f(r_i) + f(s_i)]$$

जहाँ $r_i = x_i + ph$, $s_i = x_i + (1-p)h$, $p = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3})$

इस प्रकार $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} I_i = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}[f(r_i) + f(s_i)]$

नोट : बेहतर सटीकता के लिए अधिक से अधिक संख्या के लिए गॉउस समाकल सूत्र (Gauss Integration Formula) पर विचार करने के बजाय एक बड़े उपअंतराल पर दो बिंदु समग्र सूत्र का उपयोग करना चाहिए।

उदाहरण 4.35: गॉउस तीन बिंदु क्षेत्रकलन सूत्र (Gauss Three Point Quadration Formule) द्वारा निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन करें,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

हलः हम सबसे पहले अंतराल [0, 1] को अंतराल (–1, 1) में परिवर्तित करते हैं $t = 2x - 1$ प्रतिस्थापित करते हुए

ताकि $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3}$.

अब गॉउस तीन बिंदु क्षेत्रकलन द्वारा हमारे पास,

$$I = \frac{1}{9}\ [8F(0) + 5F\ (3 + 0.77459667) + 5F\ (3.77459667)] \text{ और } F(t) = \frac{1}{t+3}$$
$$\therefore\ I = 0.693122$$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ का सही मान $= \text{In } 2 = 0.693147$ है।

तथा त्रुटि = 0.000025 है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. समीकरण के मूलों की गणना कीजिए।
2. वास्तविक मूलों की स्थिति ज्ञात करने की विधियों को परिभाषित कीजिए।
3. कोष्ठक विधि से आप क्या समझते हैं?
4. न्यूटन–रैपसन की विधि की व्याख्या करें।
5. रेगुला–फाल्सी विधि को परिभाषित कीजिए।
6. डेसकार्ट के नियम से आप क्या समझते हैं?
7. प्रक्षेप या प्रक्षेपण की व्याख्या कीजिए।
8. रैखिक प्रक्षेपण की सूत्र सहित व्याख्या करें।
9. लैग्रांज प्रक्षेपण को परिभाषित कीजिए।
10. समान दूरी वाले सारणीबद्ध मानो के लिए प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र की व्याख्या कीजिए।
11. प्रतीकात्मक संचालक को परिभाषित कीजिए।
12. न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र की व्याख्या करें और इसका उपयोग किस प्रकार किया जाता है?
13. सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र को परिभाषित कीजिए।
14. वेडली सूत्र और वेडली सूत्र की त्रुटि की व्याख्या कीजिए।
15. रोमबर्ग प्रक्रिया की व्याख्या कीजिए।
16. गॉउसियन क्षेत्रकलन सूत्र को परिभाषित कीजिए।

4.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. एक समीकरण के मूलों की आमतौर पर दो चरणों में गणना की जाती है। सबसे पहले, हम मूलों की स्थिति का पता करने के लिए सन्निकटन मूलों को निकालेगे। फिर हम मूल के बेहतर मान की गणना के लिए पुनरावृत्ति तकनीक का उपयोग करके क्रमिक अनुमानों से वांछित सटीकता तक मूलों को निकालेंगे। यह पुनरावृत्ति तकनीक का उपयोग करके किया जाता है।
2. आलेखीय विधि : आलेखीय विधि में, हम x की विभिन्न मानों की एक निश्चित श्रेणी या कोटि के लिए फलन $y = f(x)$ का ग्राफ या आलेख बनाते हैं। वह बिंदुओं जहाँ ग्राफ या आलेख x–अक्ष को काटती है,

   सारणीकरण विधि में, एक विशेष श्रेणी या कोटि में x के मानों के लिए $f(x)$ के मानों की एक तालिका बनाई जाती है। फिर, हम x के लगातार दो मानों के लिए $f(x)$ के मान में चिन्ह परिवर्तन देखते हैं। हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि x के इन मानों के बीच एक वास्तविक मूल निहित है।

टिप्पणी

3. विभाजन विधि को कोष्ठक विधि भी कहा जाता है, क्योंकि यह विधि क्रमिक रूप से वास्तविक मूल के आसपास एक अंतराल के दो सिरों के बीच के अंतर को कम करती है, अर्थात, वास्तविक मूल को कोष्ठक करती है।
4. न्यूटन–रैपसन विधि में समीकरण $f(x) = 0$ के मूल को वांछित सटीकता तक खोजने के लिए व्यापक रूप से उपयोग की जाने वाली संख्यात्मक विधि है। यह एक पुनरावृत्ति विधि है जिसकी अभिसरण की दर तीव्र है और यह तब बहुत उपयोगी है जब अभिव्यक्ति का अवलकन $f(x)$ जटिल नहीं होता है।
5. रेगुला–फाल्सी विधि भी एक कोष्ठक विधि है। विभाजन विधि में, हम पहले एक अंतराल (a, b) की खोज करके गणना शुरू करते हैं, जिसके भीतर एक वास्तविक मूल निहित होता है। $a = x_0$ और $b = x_1$ लिखकर, हम $f(x_0)$ और $f(x_1)$ की गणना करते हैं, और जांचते हैं कि अगर $f(x_0)$ और $f(x_1)$ विपरीत चिन्हों के हैं।
6. एक बहुपद समीकरण $p_n(x)$ की धनात्मक वास्तविक मूल की संख्या में चिन्ह के परिवर्तन की संख्या के बराबर है, जिसे x की अवरोही घातों के साथ लिखा गया है, या एक समान संख्या से कम है।
7. संख्यात्मक विश्लेषण में प्रक्षेप या प्रक्षेपण की समस्या बहुत ही मौलिक समस्या है। प्रक्षेप का अर्थ है दो रेखाओ के बीच पढ़ना होता है लेकिन संख्यात्मक में, प्रक्षेप या प्रक्षेपण का अर्थ है मानों की तालिका में x के मानों के बीच एक फलन $f(x)$ का मान निकालना है।
8. इस पद्धति में, हम क्रमिक रूप से रैखिक प्रक्षेपित फलनों का उपयोग करके, किसी भी घात के, प्रक्षेपित बहुपदों को प्राप्त करते हैं।

   मान लीजिए कि $p_{01}(x)$ x_0 और x_1 पर सारणीबद्ध मानों के लिए रैखिक प्रक्षेपित बहुपद को निरूपित करता हैं। इस प्रकार, हम लिख सकते हैं,

   $$p_{01}(x) = \frac{(x_1 - x) f_0 - (x_0 - x) f_1}{x_1 - x_0}$$
9. लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण असमान सारणीबद्ध मानों के लिए उपयोगी है। मान लीजिए कि $y = f(x)$ एक अंतराल (a, b) में परिभाषित वास्तविक मान फलन है और $y_0, y_1, ..., y_n$ पर $(n + 1)$ y के क्रमशः $x_0, x_1, ..., x_n$ ज्ञात मान है। बहुपद $\varphi(x)$, जो $f(x)$ को प्रक्षेप या प्रक्षेपण करता है n से कम या उसके बराबर घात का होता है।
10. प्रक्षेप या प्रक्षेपण के अज्ञात फलन के लिए जब तर्क x का सारणीबद्ध मान समान दूरी पर होते है, तो हमारे पास दो महत्वपूर्ण प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र होते हैं, अर्थात,

(*i*) न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र

(*i*) न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र

टिप्पणी

$y_0, y_1, ..., y_n$ फलन $y = f(x)$ के समान अंतर वाले $x = x_0, x_1, ..., x_n$ के मान है। दो लगातार y के बीच के अंतर $y_1 - y_0, y_2 - y_1, ..., y_n - y_{n-1}$ को बिन्दुओं x_0, $x_1, ..., x_{n-1}$ पर फलन $y = f(x)$ के लिए प्रथम कोटि या क्रम अग्रवर्ती अंतर कहा जाता है।

पश्चवर्ती अंतर और अग्रवर्ती अंतर $y = f(x)$ को समान विधियों से परिभाषित किया गया है। पश्चवर्ती अंतर संचालक ∇ (उल्टे त्रिकोण) को $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$. द्वारा परिभाषित किया गया है।

11. हम संख्यात्मक विधि के विकास के लिए समान दूरी के सारणीबद्ध आंकड़ों के परिमित अंतर पर विचार करते हैं। एक फलन $y = f(x)$ में $x_0, x_1, x_2, ...,$ से संबंधित मानों का समुच्चय $y_0, y_1, y_2, ...,$ है जहाँ $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, ...,$ सभी h के साथ समान दूरी में हैं। हम विभिन्न प्रकार के परिमित अंतरों को परिभाषित करते हैं जैसे कि अग्रवर्ती अंतर, पश्चवर्ती अंतर और केंद्रीय अंतर, और संचालक के नियमों के हिसाब से उन्हें व्यक्त करेंगे।
12. न्यूटन का अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र, n के बराबर या उससे कम घात का बहुपद है। इसका उपयोग एक समतल बिंदु पर सारणीबद्ध फलन के मान को खोजने के लिए किया जाता है।
13. न्यूटन–कोट्स सूत्र के समीकरण में $n = 2$ को लेने पर, हमें संख्यात्मक समाकल का सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र प्राप्त होता है,इसे संख्यात्मक समाकल में सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र के रूप में जाना जाता है।
14. न्यूटन–कोट्स सूत्र में $n = 6$ के साथ कुछ मामूली संशोधनों के बाद वेडली सूत्र मिलता हैं। न्यूटन–कोट्स सूत्र $n = 6$ के साथ, देता है।

    वेडली का नियम एक सम्मिश्र वेडली का सूत्र है जब उपअंतराल की संख्या 6 का एक गुणक होती है। संख्यात्मक समाकल में वेडली के नियम का उपयोग अंतराल $(b - a)$ में 6m उपअंतराल की संख्या से उपविभाजित करके किया जाता है,

    वेडली सूत्र में त्रुटि $= -\dfrac{1}{140} h^7 \cdot y^{(vi)}(\xi)$
15. इस प्रक्रिया का उपयोग एक समाकल के उपअंतराल की चौड़ाई के दो मानों मूल्यांकन का उपयोग करके बेहतर अनुमानों के समाकल को खोजने के लिए किया जाता है।

$$I = I_2 + \left(\frac{I_2 - I_1}{3}\right)$$

    इसे समलम्ब चतुर्भुजीय समाकलन में रोमबर्ग सूत्र के रूप में जाना जाता है।
16. न्यूटन–कोट्स का संख्यात्मक समाकल का सूत्र निम्न रूप में होता है,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

जहाँ $x_i = a+ih, i = 0, 1, 2, ..., n;\ h = \dfrac{b-a}{n}$ है।

टिप्पणी

4.7 सारांश

- मूल के बेहतर मान की गणना के लिए पुनरावृत्ति तकनीक का उपयोग करके क्रमिक अनुमानों से वांछित सटीकता तक मूलों को निकालेगे। यह पुनरावृत्ति फलन का उपयोग करके किया जाता है।
- यदि $f(x)$ अंतराल (a, b) के बीच सतत है, और $f(a)$ और $f(b)$ विपरीत चिन्ह के हैं, तो a और b के बीच $f(x) = 0$ का एक वास्तविक मूल जरूर उपस्थित होगा।
- विभाजन विधि एक मूल प्राप्त करने की विधि है जो बार–बार अंतराल को काटती है और फिर हम उप अंतराल का चयन करते है जिससे आगे की प्रक्रिया के लिए एक मूल निर्धारित होता है। यह एक अत्यंत सरल और मजबूत विधि है, लेकिन यह अपेक्षाकृत धीमी है।
- विभाजन विधि में अंतराल की क्रमिक कमी होती है जिसमें एक समीकरण के वास्तविक मूल निहित होते है।
- विभाजन विधि को कोष्ठक विधि भी कहा जाता है, क्योंकि यह विधि क्रमिक रूप से वास्तविक मूल के आसपास एक अंतराल के दो सिरों के बीच के अंतर को कम करती है, अर्थात, वास्तविक मूल को कोष्ठक करती है।
- सरल पुनरावृत्ति विधि का उपयोग करके एक समीकरण $f(x) = 0$ के मूल को बेहतर और बेहतर सन्निकटन मूल के लिए क्रमिक रूप से गणना करके निर्धारित किया जाता है।
- पुनरावृत्ति प्रक्रिया का अभिसरण क्रम क्रमिक पुनरावृत्ति में e_n और e_{n+1} त्रुटियों के संदर्भ में निर्धारित किया जाता है। एक पुनरावृत्ति प्रक्रिया को अभिसरण का kवाँ क्रम कहा जाता है कि अगर $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n^k} < M,$ जहाँ M एक परिमित संख्या है।
- न्यूटन–रैपसन विधि में समीकरण $f(x) = 0$ के मूल को वांछित सटीकता तक ज्ञात करने के लिए व्यापक रूप से उपयोग की जाने वाली संख्यात्मक विधि है। यह एक पुनरावृत्ति विधि है जिसकी अभिसरण की दर तीव्र है और यह तब बहुत उपयोगी है जब अभिव्यक्ति का अवलकन $f(x)$ जटिल नहीं होता है।
- छेदिक विधि को न्यूटन–रैपसन विधि का उन्नत रूप माना जा सकता है। इस विधि के लिए पुनरावृत्ति सूत्र न्यूटन–रैपसन विधि के सूत्र से प्राप्त होता है, जिसमें अवलकज $f'(x_0)$ को दो समीपवर्ती बिंदुओं x_0 और x_1 को वक्र $y = f(x)$ से जोड़कर मिले जीवा के प्रवणता या झुकाव से बदला जाता हैं।

टिप्पणी

- छेदिक विधि और रेगुला–फाल्सी पद्धति के बीच अंतर इस तथ्य में निहित है कि रेगुला–फाल्सी विधि के विपरीत, छेदिक विधि में दो प्रारंभिक अनुमानित मान मूल को कोष्टक नहीं करते हैं और क्रमिक पुनरावृत्ति के दौरान मूल के कोष्ठक की जाँच नहीं करते हैं।
- वास्तविक गुणांक वाले बहुपद समीकरणों में उनके मूल के संबंध में कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं होती हैं। अगर n घात का एक बहुपद समीकरण है तो,

(*i*) घात n के बहुपद समीकरण में केवल n मूल होते हैं।

(*ii*) सम्मिश्र मूल युग्म में होते हैं, अर्थात, यदि $\alpha + i\beta$, $p_n(x) = 0$ का एक मूल है तो दूसरा मूल $\alpha - i\beta$ होगा।

- एक बहुपद समीकरण $p_n(x)$ की धनात्मक वास्तविक मूल की संख्या में चिन्ह के परिवर्तन की संख्या के बराबर है, जिसे x के अवरोही घातों के साथ लिखा गया है, तथा यह एक समान संख्या से कम है।
- गणना अक्सर एक बहुपद का पता लगाकर की जाती है जिसे प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद कहते हैं, इसकी घात n से कम या इसके बराबर ऐसा होती है कि बहुपद का मान सारणी में प्रत्येक बिंदु पर फलन के मान के बराबर होता है।
- आवधिक फलनों के प्रकरण में, सन्निकटन को त्रिकोणमितीय फलन की एक परिमित शृंखला द्वारा बनाया जा सकता है। बहुपद प्रक्षेप या प्रक्षेपण, फलन सन्निकटन के लिए एक बहुत ही उपयोगी विधि होती है। प्रक्षेप या प्रक्षेपण बहुपद अन्य समस्याओं जैसे संख्यात्मक अवकलन, संख्यात्मक समाकलन और अवकलन समीकरण से जुड़ी प्रारंभिक और सीमा मूल्य समस्याओं के हल की विधियों को विकसित करने के आधार में बहुत उपयोगी होती है।
- लैग्रांज के प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र और पुनरावृत्त रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण को आसानी से एक संगणक (कंप्यूटर) द्वारा संगणना के लिए आसानी से कार्यान्वित किया जा सकता है।
- प्रत्येक $l_i(x)$ घात $\leq n$ का बहुपद है और इसे लैग्रांजियन फलन कहा जाता है।
- कोई फलन $y = f(x)$ x के समान रूप से दिए गए मानों $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ के लिए ज्ञात इस तरह हैं कि किसी भी दो लगातार मानों के बीच का अंतर बराबर है।

  फलन $y = f(x)$ के मानों की तालिका के लिए विभिन्न क्रमों के पिछला अंतर और अग्रवर्ती अंतर $y = f(x)$ को समान विधियों से परिभाषित किया गया है। पश्चवर्ती अंतर संचालक ∇ (उल्टे त्रिकोण) को $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$. द्वारा परिभाषित किया गया है।
- पश्चवर्ती स्तंभ में प्रविष्टियों के अंतर के रूप में तालिका में एक स्तंभ की प्रविष्टियों की गणना की जाती हैं और उन्हें उनके बीच में रखा जाता है।
- हम संख्यात्मक विधि के विकास के लिए समान दूरी के सारणीबद्ध आंकड़ों के परिमित अंतर पर विचार करते हैं। एक फलन $y = f(x)$ में $x_0, x_1, x_2, ...,$ से संबंधित मानों का समुच्चय $y_0, y_1, y_2, ...,$ है जहाँ $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, ...,$

सभी h के साथ समान दूरी में हैं। हम विभिन्न प्रकार के परिमित अंतरों को परिभाषित करते हैं जैसे कि अग्रवर्ती अंतर, पश्चवर्ती अंतर और केंद्रीय अंतर, और संचालकों के नियमों के हिसाब से उन्हें व्यक्त करेंगे।

टिप्पणी

- विस्थापन संचालक को E से दर्शाया जाता है और $E f(x) = f(x + h)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का उपयोग तालिका के अंत के पास एक बिंदु पर प्रक्षेप या प्रक्षेपण के लिए नहीं किया जा सकता है, क्योंकि हमारे पास आवश्यकतानुसार ऐसे बिंदुओं पर प्रक्षेप या प्रक्षेपण करने के लिए अंतर नहीं होता है।
- न्यूटन–कोट्स सूत्र के समीकरण में $n = 2$ को लेने पर, हमें संख्यात्मक समाकल का सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र प्राप्त होता है, इसे संख्यात्मक समाकल में सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र के रूप में जाना जाता है।
- उप–अंतराल की लंबाई h का सूत्र में उपयोग करने के लिए, h के मान का एक उपयुक्त विकल्प बनाना होगा। h को निर्धारित करने के दो विधि हैं, सूत्र में संख्यात्मक समाकल के लिए खंडन त्रुटि पर विचार करके या अंतराल को आधा और परिणामों की तुलना की तकनीक द्वारा क्रमिक विकास समाकल का मूल्यांकन करके किया जा सकता है।
- खंडन त्रुटि अनुमान विधि में, उपयोग किए जाने वाले h के मान को संख्यात्मक समाकल के सूत्र में खंडन त्रुटि पर विचार करके निर्धारित किया जाता है।
- जब खंडन त्रुटि का अनुमान निकालना मुश्किल हो जाता है तो वांछित सटीकता तक समाकल की गणना के लिए अंतराल अर्धीकरण तकनीक का उपयोग किया जाता है।
- रोमबर्ग प्रक्रिया बिना किसी अधिक फलन मूल्यांकन के समाकल का बेहतर अनुमान देता है, I_1 के साथ I_2 के मूल्यांकन में $h/2$ के मूल्यांकन में आवश्यक फलन के मानों का भी उपयोग होता है।

4.8 मुख्य शब्दावली

- **प्रक्षेप या प्रक्षेपण** : संख्यात्मक विश्लेषण में प्रक्षेप या प्रक्षेपण की समस्या बहुत ही मौलिक समस्या है इसे प्रक्षेप या प्रक्षेपण का अर्थ दो रेखाओं के बीच पढ़ना होता है लेकिन संख्यात्मक विश्लेषण में प्रक्षेप या प्रक्षेपण का अर्थ है मानों की तालिका में x के मानों के बीच एक फलन $f(x)$ का मान निकालना।
- **रैखिक प्रक्षेप या प्रक्षेपण** : क्रमिक रूप से रैखिक प्रक्षेपित फलनों का उपयोग करके कितनी भी घात के प्रक्षेपित बहुपदों को प्राप्त करते हैं।
- **लैग्रांज प्रक्षेप** : लैग्रांज प्रक्षेप या प्रक्षेपण असमान सारणीबद्ध के मानों के लिए उपयोगी है।

- **विस्थापन संचालक** : विस्थापन संचालक को E से दर्शाया जाता है और Ef (x) = f (x + h) द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- **रोमबर्ग प्रक्रिया** : इस प्रक्रिया का उपयोग एक समाकल के उपअंतराल की चौड़ाई के दो मानों के मूल्यांकन का उपयोग करके बेहतर अनुमानों के समाकल को खोजने के लिए किया जाता है।
- **छेदिक विधि** : छेदिक विधि को न्यूटन–रैपसन विधि का उन्नत रूप माना जा सकता है इस विधि के लिए पुनरावृत्ति सूत्र, न्यूटन–रैपसन विधि के सूत्र से प्राप्त है।

4.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. समीकरणों का हल क्या है?
2. प्रक्षेप या प्रक्षेपण को परिभाषित कीजिए।
3. संख्यात्मक क्षेत्रकलन क्या है?
4. वेडली सूत्र को परिभाषित करे।
5. गॉउसियन क्षेत्रकलन सूत्र की व्याख्या करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. वास्तविक मूलों की स्थिति ज्ञात करने की विधियों की उदाहरण सहित व्याख्या करें।
2. रैखिक प्रक्षेपण से आप क्या समझते हैं, उदाहरण सहित इसकी व्याख्या कीजिए।
3. विस्थापन संचालक और केंद्रीय संचालक का उदाहरण सहित वर्णन कीजिए।
4. न्यूटन अग्रवर्ती अंतर प्रक्षेप या प्रक्षेपण सूत्र का समबाहु बिंदुओं पर समुच्चय को ज्ञात करने की विधि का वर्णन उदाहरण सहित करें।
5. क्षेत्रकलन सूत्र से आप क्या समझते हैं? उदाहरण सहित इसकी व्याख्या कीजिए।

4.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Datta, K. B. 2002. *Matrix and Linear Algebra*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

S. S. Sastry. 2012. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: PHI Learning Pvt. Ltd.

S. K. Jain, A. Gunawardena and P. B. Bhattacharya. 2001. *Basic Linear Algebra with MATLAB*. New York: Key College Publishing: Springer-Verlag, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2nd Edition. New York: John Wiley and Sons.

P. B. Bhattacharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul. 1983. *First Course in Linear Algebra*. New Delhi: Wiley Eastern.

Balaguruswamy, E. 1999. *Numerical Methods*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

Datta, N. 2007. *Computer Oriented Numerical Methods*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambari. 2016. *A Course in Abstract Algebra*, 5th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Prasad, Chandrika. 2017. *Text Book on Algebra and Theory of Equations*, 11th Edition. Allahabad: Pothishala Private Ltd.

Conte, Samuel D. and Carl de Boor. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill.

टिप्पणी

इकाई 5 रैखिक समीकरण, संख्यात्मक समाकलन तथा संख्यात्मक अवकलन

संरचना

5.0 परिचय

कई इंजीनियरिंग और वैज्ञानिक समस्याओं को रैखिक समीकरणों के निकायों के आधार पर समाधान की आवश्यकता होती है। समीकरणों के प्रणालियों को समरूप (Homogeneous) कहा जाता है यदि स्तम्भ (Column) में सदिश (Vector) b के सभी अवयव शून्य हो अन्यथा, प्रणालियों को गैर–समरूप (Non-Homogeneous) कहा जाता है। आप n अज्ञातों के n रैखिक समीकरणों की प्रणालियों में समाधान ज्ञात करने के लिए गणना की विधि को सीखेंगे। समीकरणों के प्रणाली की गणना के समाधान के लिए दो प्रकार के कुशल संख्यात्मक विधिओं का उपयोग किया जाता है, जिनमें से कुछ प्रत्यक्ष विधि होते हैं और अन्य प्रकृति में पुनरावृत्त होते हैं। प्रत्यक्ष विधि में, गॉउसियन निष्कासन विधि (Gaussian Elimination Method) का उपयोग किया जाता है, जबकि पुनरावृत्ति विधि (Iterative Method) में, गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि (Gauss-Seidel Iteration Method) का आमतौर पर उपयोग किया जाता है।

साधारण अवलकन समीकरण (Ordinary Differential Equation या ODE) एक समीकरण है जिसमें एक फलन में स्वतंत्र चर और उसका अवलकज (Derivatives) होता है। एक ODE कई सामान्य रूप ले सकता हैं। अवलकज साधारण होते हैं क्योंकि आंशिक अवलकज (Partial Derivatives) केवल कई स्वतंत्र चरो के फलनों पर ही प्रयोग होते हैं। भले ही साधारण अवलकन समीकरणों के विश्लेषणात्मक समाधान खोजने के लिए कई विधियां हैं, लेकिन संवृत (Close) रूप के कई अवलकन समीकरणों के समाधान प्राप्त नहीं किए जा सकते हैं। अवलकन समीकरणों के लिए संख्यात्मक समाधान खोजने के लिए कई विधियाँ उपलब्ध हैं।

संख्यात्मक अवलकन एक फलन $f(x)$ के अवलकज की गणना करने की प्रक्रिया है जब फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन फलनों के मानों को तर्क के एक

समुच्चय के लिए जाना जाता है। अवलकज को उपयुक्त प्रक्षेप या अंतर्वेशन बहुपद (Interpolating Polynomial) का उपयोग करके पाया जा सकता है। इन अवलकजों का सूत्र के रूप में फलन के अवलकज के लिए उपयोग किया जाता हैं। न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) का उपयोग समान दूरी के बिंदुओ की तालिका में शुरुआत में एक बिंदु पर अवलकज की गणना के लिए किया जाता है, जबकि न्यूटन पश्चवर्ती अंतर प्रक्षेप या अंतर्वेशन सूत्र (Newton's Backward Difference Interpolation Formula) का उपयोग तालिका के अंत में बिंदु पर अवलकज की गणना के लिए किया जाता है। इसके अलावा, आप केंद्रीय अंतर प्रक्षेप या अंतर्वेशन सूत्र (Central Difference Interpolation Formula) के अवलकज का उपयोग करके तालिका के मध्य में बिंदु पर अवलकज की गणना करना सीखेंगे।

तालिका में दिए गए तर्क असमान दूरी के होने पर, फलन के अवलकज की गणना के लिए लैग्रांज प्रक्षेप या अंतर्वेशन या प्रक्षेपण बहुपद (Lagrange's Interpolating Polynomial) का उपयोग किया जाता है। इसके अलावा आप एक निश्चित समाकलन (Definite Integral) के मूल्यांकन के बारे में भी जानेंगे।

इस इकाई में आप रैखिक समीकरण (Linear Equation), साधारण अवलकन समीकरणों (Ordinary Differential Equations), संख्यात्मक अवलकनों (Numerical Differentiation) पर आधारित विधियों और संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) पर आधारित विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे।

5.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- रैखिक समीकरण को परिभाषित कर पाएंगे;
- साधारण रैखिक अवलकन समीकरणों के विश्लेषण को समझ पाएंगे;
- संख्यात्मक अवलकन पर आधारित विधियों का वर्णन कर पाएंगे;
- संख्यात्मक समाकलन पर आधारित विधियों को समझ पाएंगे।

5.2 रैखिक समीकरण

कई इंजीनियरिंग और वैज्ञानिक समस्याओं को रैखिक समीकरणों के प्रणालियों के समाधानों की आवश्यकता होती है। हम n अज्ञातों के m रैखिक समीकरणों (Linear Equations) की प्रणालियों पर विचार करते है जिसे निम्न रूप में लिखा गया है,

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{m}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{5.1}$$

आव्यूह (Matrix) के संकेत (Notation) चिन्ह का उपयोग करते हुए, हम उपरोक्त समीकरणों की प्रणालियों को निम्न रूप में लिख सकते हैं,

$$Ax = b \tag{5.2}$$

जहां A एक $m \times n$ का आव्यूह है, और x, b क्रमशः n-स्तम्भ (Column), m-पंक्ति सदिश (Row Vectors) हैं जिन्हें निम्न रूप में लिखा जाता है,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

समीकरणों के प्रणालियों को समरूप (Homogeneous) कहा जाता है यदि स्तम्भ (Column) में सदिश (Vector) b के सभी अवयव शून्य हो अन्यथा, प्रणालियों को गैर–समरूप (Non-Homogeneous) कहा जाता है। समरूप प्रणालियों का एक गैर–तुच्छ (Non-Trivial) समाधान होता है यदि A एक वर्ग आव्यूह हो, अर्थात, $m = n$ हो, और गुणांक आव्यूह का सारणिक (Determinant), अर्थात $|A|$ शून्य के बराबर है।

गैर–समरूप प्रणालियों का समाधान तभी मौजूद होता है यदि गुणांक आव्यूह A की रैंक (Rank) संवर्धित आव्यूह $[A: b]$ के रैंक के बराबर होती है जिसे निम्न रूप में लिखा जाता है।

$$[A : b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & an_3 & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

इसके अलावा, समीकरण प्रणाली (5.1) का एक विशिष्ट गैर–तुच्छ समाधान मौजूद होता है जब $m = n$ और सारणिक (Determinant) $|A| \neq 0$ हो, अर्थात् गुणांक आव्यूह वर्ग गैर–विलक्षण (Non-Singular) आव्यूह हो। n अज्ञातों की n रैखिक समीकरणों के प्रणालियों के समाधान की गणना किसी दो चिरसम्मत या क्लासिकल विधिओं (Classicial Methods) में से किसी एक से की जाती है जिन्हें क्रेमर नियम (Cramer's Rule) और आव्यूह व्युत्क्रम विधि के रूप में जाना जाता है। लेकिन ये दोनों विधियां संख्यात्मक गणना के लिए उपयुक्त नहीं हैं, क्योंकि दोनों विधियों में सारणिक (Determinant) के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। इसलिए समीकरणों के प्रणालियों के समाधान की गणना करने के लिए दो प्रकार के उपयुक्त संख्यात्मक विधिओं का उपयोग किया जाता हैं। कुछ सरल विधि हैं और अन्य प्रकृति में पुनरावृत्त हैं। प्रत्यक्ष विधिओं में गॉउसियन निष्कासन (Gaussian Elimination) विधि का सबसे अधिक उपयोग किया जाता है। पुनरावृत्त विधिओं में से, गॉउस–सीडेल (Gauss-Seidel) पुनरावृत्त विधि का सबसे अधिक उपयोग किया जाता है।

चिरसम्मत विधि (Classical Methods)

चिरसम्मत विधियों या क्लासिकल विधियों के अंतर्गत हम निम्नलिखित विधियों एवं नियमों का अध्ययन करेंगे।

क्रेमर नियम (Cramer's Rule) : मान लीजिए $D = |A|$ गुणांक आव्यूह A का सारणिक (Determinant) है और D_i सदिश स्तम्भ (Vector Column) b द्वारा D के i वीं पंक्ति को प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया सारणिक (Determinant) है। हमें क्रेमर नियम से समीकरणों के समाधान में सदिश x निम्न रूप से प्राप्त होता है,

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \quad 2, \ldots, n \text{ के लिए} \tag{5.4}$$

इस प्रकार हमें n कोटि के $(n+1)$ सारणिक की गणना करनी होती है।

आव्यूह व्युत्क्रम विधि (Matrix Inversion Method) : मान लीजिए कि आव्यूह A के व्युत्क्रम (Inverse) A^{-1} को निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है,

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} \tag{5.5}$$

जहां Adj A गुणांक आव्यूह के सारणिक के तत्वों a_{ij} के गुणांकों के संलग्न आव्यूह (Adjoint Matrix) परिवर्तन करके प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार,

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}\ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n}\ldots\ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

A_{ij} यहाँ a_{ij}. का सह–गुणनखण्ड (Cofactor) है।

तब प्रणालियों के हल को निम्न रूप से लिखा जाएगा,

$$x = A^{-1}b \tag{5.7}$$

नोट: यदि रैखिक समीकरणों के प्रणालियों के गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) में n अज्ञातों (Unknowns) की रैंक n से कम है, तो अज्ञातों की संख्या स्वतंत्र समीकरणों (Independent Equations) की संख्या से अधिक होगी। ऐसे प्रकरण में, प्रणालियों के समाधानों का एक अनंत समुच्चय (Infinite Set) होता है। निम्नलिखित उदाहरण क्रेमर नियम (Cramer's Rule) और आव्यूह व्युत्क्रम विधि (Matrix Inversion Method) के उपयोग की व्याख्या करेंगे।

उदाहरण 5.1 : निम्नलिखित प्रणाली को हल करने के लिए क्रेमर नियम का उपयोग करें।

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हल: यदि गुणांक आव्यूह का सारणिक (Determinant) D है तो,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2(-1-1) - 3(-1+3) + (-3-1) = -14$$

सारणिक (Determinant) D_1, D_2 और D_3 होंगे,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1-1) - 3(-1+2) + (-2-1) = -8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2+1) + (-1+3) + (3-2) = 1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+2) - 3(2-3) + (-3-1) = 5$$

इस तरह, क्रेमर नियम से हमें मिलता है,

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{14}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{5}{14}$$

उदाहरण 5.2 : समीकरणों के दिए गए प्रणाली को आव्यूह व्युत्क्रम विधि से हल करें।

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हलः आव्यूह व्युत्क्रम विधि द्वारा समीकरणों के दिए गए प्रणाली को हल करने के लिए, हमे पहले गुणांक आव्यूह के सारणिक (Determinant) की गणना करनी होगी,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13$$

चूंकि $|A| \neq 0$, इसलिए आव्यूह A गैर–विलक्षण (Non-Singular) है और A^{-1} भी मौजूद होगा। अब हम संलग्न आव्यूह (Adjoint Matrix) की गणना करेंगे,

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \text{ इस प्रकार } A^{-1} = \frac{Adj\ \ A}{|A|} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

इसलिए, आव्यूह व्युतक्रम विधि (Matrix Inversion Method) द्वारा हमें हल (समाधान) मिलेंगे,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -13 \\ 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

निष्कासन विधि (Elimination Methods)

गॉउसियन निष्कासन विधि (Gaussian Elimination Method) : इस विधि में अज्ञातों का व्यवस्थित विधि से निष्कासन किया जाता है ताकि गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) को ऊपरी त्रिकोणीय प्रणाली (Upper Triangular System) में

बदला जा सके, जिसे बाद में पश्च प्रतिस्थापन (Back Substitution) की प्रक्रिया द्वारा हल किया जाता है। तीन अज्ञातों के तीन समीकरणों प्रणालियों की प्रक्रिया को समझने के लिए, हम निम्न समीकरणों के प्रणालियों पर विचार करते है,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{5.8(a)}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \tag{5.8(b)}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \tag{5.8(c)}$$

पहले हमें अंतिम दो समीकरणों में से x_1 को हटाना (Eliminate) होगा और फिर अंतिम समीकरण से x_2 को हटाना होगा।

दूसरे समीकरण से x_1 को हटाने लिए हम समीकरण (5.8(a)) को $-a_{21}/a_{11} = m_2$, से गुणा करेंगे और फिर उसे दूसरे समीकरण में जोड़ेंगे । इसी तरह, तीसरे समीकरण (5.8(c)) से x_1 को हटाने के लिए हम पहले समीकरण (5.8(a)) को $-a_{31}/a_{11} = m_3$, से गुणा करेंगे। और अंतिम समीकरण (5.8(c)) में जोड़ेंगे। तब उनसे हमें निम्न दो समीकरण मिलेंगे,

$$a_{22}^{(1)}\ x_2 + a_{23}^{(1)}\ x_3 = b_2^{(1)} \tag{5.9(a)}$$

$$a_{32}^{(1)}\ x_2 + a_{33}^{(1)}\ x_3 = b_3^{(1)} \tag{5.9(b)}$$

जहां $a_{22}^{(1)} = a_{22} - m_2a_{12},\ \ a_{23}^{(1)} = a_{23} - m_2a_{13},\ \ b_2^{(1)} = b_2 - m_2b_1$
$a_{32}^{(1)} = a_{32} - m_2a_{12},\ \ a_{33}^{(1)} = a_{33} - m_2a_{13},\ \ b_3^{(1)} = b_3 - m_3b_1$

उपरोक्त दो समीकरणों में से अंतिम से x_2 को हटाने के लिए, हम पहले समीकरण 55.9(a)) को $m_4 = -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ से गुणा करते हैं, और दूसरे समीकरण (5.9(b)) में जोड़ते हैं, जो हमे निम्न समीकरण देगा,

$$a_{33}^{(2)} = b_3^{(2)} \tag{5.10}$$

जहाँ $a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_4a_{23}^{(1)},\ b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - m_4b_2^{(1)}$

इस प्रकार व्यवस्थित निष्कासन (Systematic Elimination) से हमें नीचे दी गई त्रिकोणीय प्रणाली (Triangular System) मिलती है,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \tag{5.11(a)}$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)} \tag{5.11(b)}$$

$$a_{33}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \tag{5.11(c)}$$

नीचे बताए अनुसार पश्च प्रतिस्थापन (Back Substitution) द्वारा अज्ञात को हल करना अब आसान हो जाता है।

हम (5.11(c)) से x_3 के लिए हल करते हैं, फिर (5.11(b)) से x_2 के लिए हल करते हैं और अंत में (5.11(a)) से x_1 के लिए हल करते हैं। इस व्यवस्थित गॉउसियन निष्कासन (Systematic Gaussian Elimination) प्रक्रिया को संक्षिप्त रूप (Compact Form) में आव्यूह संकेत चिन्ह (Matrix Notation) में लिखा जा सकता है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

टिप्पणी

(i) हम गुणक को बाईं ओर और संवर्धित आव्यूह (Augmented Matrix) $[A{:}\ b]$ को लिखते हैं,

$$\begin{matrix} \\ m_2 = -a_{21}/a_{11} \\ m_3 = -a_{31}/a_{11} \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}. \xrightarrow[R_2 - m_2 R_1 \,\&\, R_3 - m_3 R_1]{\text{पंक्ति संकारक प्रदर्शित}}$$

(ii) फिर हम पंक्ति संक्रिया (Raw Operation) द्वारा x_1 के निष्कासन के बाद परिवर्तित 2 और 3 पंक्तियों को लिखते हैं समीकरण ($m_2 \times$ पहली पंक्ति + दूसरी पंक्ति) और ($m_3 \times$ पहली पंक्ति + तीसरी पंक्ति), के रूप में नई 2 – 3 पंक्तियों को बाईं ओर गुणक के साथ लिखते हैं।

$$m_4 = -a_{31}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{bmatrix}. \xrightarrow[R_3 - m_4 R_2]{\text{प्रदर्शित}}$$

(iii) अंत में, हम नीचे दिए गए अनुसार रूपांतरित ऊपरी त्रिकोणीय संवर्धित आव्यूह (Upper Triangular Transformed Augmented Matrix) प्राप्त करते,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & b_3 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

नोट:

1. उपरोक्त प्रक्रिया को आसानी से n अज्ञातों के प्रणालियों तक बढ़ाया जा सकता है, उस स्थिति में, हमें अंतिम ऊपरी त्रिकोणीय आव्यूह (Final Upper Triangular Matrix) को प्राप्त करने के लिए व्यवस्थित निष्कासन के लिए कुल (n–1) चरणों का उपयोग करना होगा।
2. इस निष्कासन का उपयोग करने के लिए संतुष्ट होने का नियम यह है कि प्रत्येक चरण में पहला विकर्ण (Diagonal) अवयव शून्य नहीं होना चाहिए । इन विकर्ण अवयवों (Diagonal Elements) [a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, इत्यादि], आदि, को धुरी (Pivot) कहा जाता है। यदि किसी चरण में धुरी (Pivot) शून्य हो, तो विधि विफल रहती है। हालाँकि, हम पंक्तियों को फिर से व्यवस्थित कर सकते हैं ताकि किसी भी स्तर पर कोई भी धुरी या केंद्र बिंदु (Pivot) शून्य न हो।

उदाहरण 5.3 : निम्नलिखित प्रणालियों को गॉउस निष्कासन विधि द्वारा हल करें,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

गणना को संवर्धित आव्यूह निरूपण द्वारा दिखाएं।

हल: प्रणाली का संवर्धित आव्यूह है,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 2 & 2 & 3 & : & 3 \\ -1 & -3 & 0 & : & 2 \end{bmatrix}$$

चरण 1 : 2 और 3 समीकरणों से x_1 के निष्कासन के लिए हम पहले समीकरण को –2 और 1 को क्रमिक (Successively) रूप से गुणा करते हैं और फिर उन्हें 2 और 3 के समीकरण में जोड़ते हैं। परिणाम नीचे संवर्धित आव्यूह (Augmented Matrix) में दिखाया गया है।

$$\begin{array}{r} \\ -2 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

चरण 2 : तीसरे समीकरण से x_2 के निष्कासन के लिए हम दूसरे समीकरण को $-\frac{1}{2}$ से गुणा करते हैं और फिर इसे तीसरे समीकरण में जोड़ते है। परिणाम नीचे संवर्धित आव्यूह में दिखाया गया है।

$$\begin{array}{r} \\ -1/2 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & : & 1/2 \end{bmatrix}$$

चरण 3 : अब ऊपरी त्रिकोणीय प्रणाली को पश्च प्रतिस्थापन द्वारा हल किया जाता है, जिससे हमें $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ मिलता है।

गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि (Gauss-Jordan Elimination Method)

गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि गॉउसियन निष्कासन विधि का एक रूपांतर है। इस विधि में, संवर्धित गुणांक आव्यूह को पंक्ति संक्रिया द्वारा इस तरह रूपांतरित (Transformed) किया जाता है ताकि गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) मे परिवर्तित हो जाए। फिर प्रणाली का समाधान सीधे रूपांतरित संवर्धित आव्यूह (Transformed Augmented Matrix) के परिवर्तित संवर्धित स्तम्भ के रूप में प्राप्त होता है। हम तीन समीकरणों के प्रणालियों के साथ विधि की व्याख्या करते हैं,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

संवर्धित आव्यूह निम्न होगा,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & b_3 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

हम मानते हैं कि a_{11} गैर–शून्य (Non-Zero) है। हालांकि, यदि a_{11} शून्य है, तो हम पंक्तियों को आपस में इस तरह बदलते हैं कि परिणामी प्रणाली (Resulting System) में a_{11} शून्येतर हो। पहला चरण पहली पंक्ति को a_{11} से विभाजित करना है और फिर पंक्ति संक्रिया (Row Operations) द्वारा परिवर्तित हुई पहली पंक्ति को a_{21} से गुणा करना है फिर उसे दूसरी पंक्ति से घटाना है इसी तरह परिवर्तित हुई पहली पंक्ति को a_{31} से गुणा करना है फिर उसे तीसरी पंक्ति से घटाना है इस तरह हम पंक्ति संक्रिया से x_1

को 2 और 3 समीकरणों से हटा देंगे। इसे नीचे दिए गए आव्यूह रूपांतरण (Matrix Transformations) में भी दिखाया गया है,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1/a_{11}]{} \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & : & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} & : & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1\ a_{31}]{R_2-R_1\ a_{21}} \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & : & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & : & b'_3 \end{bmatrix}$$

जहां, $a'_{12} = a_{12}/a_{11},\ a'_{13} = a_{13}/a_{11},\ b'_1 = b_1/a_{11}$

$a'_{22} = a_{22} - a_{21}\ a'_{12},\ a'_{23} = a_{23} - a_{21}\ a'_{13},\ b'_2 = b_2 - a_{21}b'_1$

$a'_{32} = a_{32} - a_{31}\ a'_{12},\ a'_{33} = a_{33} - a_{31}\ a'_{13},\ b'_3 = b_3 - a_{31}b'_1$

अब a'_{22} को गैर–शून्य धुरी (Non-Zero Pivot) के रूप में देखें, पहले हम दूसरी पंक्ति को a'_{22} से विभाजित करते हैं और फिर परिवर्तित हुई (Reduced) दूसरी पंक्ति को a'_{12} से गुणा करते हैं और इसे पहली पंक्ति से घटाते है और इसी तरह परिवर्तित हुई (Reduced) दूसरी पंक्ति को भी a'_{32} से गुणा करना है और फिर तीसरी पंक्ति से घटाना है और पूरी प्रक्रिया को आव्यूह संकेत (Matrix Notation) चिन्ह में नीचे दिखाया गया है।

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & : & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & : & b'_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/a'_{22}} \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & : & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & : & b''_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & : & b'_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2\ a'_{12}\ \text{और}\ R_3-R_2\ a'_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & : & b''_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & : & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & : & b''_3 \end{bmatrix}$$

जहां, $a''_{13} = a'_{13} - a'_{12}\ a''_{23},\ b''_{11} = b'_1 - a'_{12}b''_2$

$a''_{23} = a'_{23}/a'_{22},\ b''_2 = b'_2/a'_{22}$

$a''_{33} = a'_{33} - a''_{23}\ a'_{32},\ b''_3 = b'_3 - a'_{32}b''_2$

अंत में, तीसरी पंक्ति के अवयवों को a''_{33} से विभाजित (Divided) करना है और फिर परिवर्तित हुई तीसरी पंक्ति को a''_{13} से गुणा किया जाता है और पहली पंक्ति से घटाया जाता है और साथ ही परिवर्तित हुई तीसरी पंक्ति को a''_{23} से गुणा करना है और दूसरी पंक्ति से घटाना है । इसे भी नीचे आव्यूह संकेत में दिखाया गया है।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & : & b''_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & : & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & : & b''_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3/a''_{33}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a''_{13} & : & b''_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & : & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & : & b'''_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-a''_{23}R_3]{R_1-a''_{25}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & b''_1 \\ 0 & 1 & 0 & : & b''_2 \\ 0 & 0 & 1 & : & b''_3 \end{bmatrix}$$

जहां, $b''_1 = b''_1 - a''_{13}b'''_3$, $b'''_2 = b''_2 - a''_{23}b'''_3,\ b'''_3 = b''_3/a''_{33}$

अंत में, प्रणाली का परिवर्तित हुए संवर्धित स्तम्भ द्वारा दिया जाता है।

अर्थात्, $x_1 = b'''_1,\quad x_2 = b'''_2$ और $x_3 = b'''_3.$

हम एक संवर्धित आव्यूह के उदाहरण से निष्कासन प्रक्रिया का उपयोग करके वर्णन करेंगे,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & : & 18 \\ 1 & 3 & 2 & : & 13 \\ 3 & 1 & 3 & : & 14 \end{bmatrix}$$

सबसे पहले, हम पहली पंक्ति को 2 से विभाजित करते हैं और फिर परिवर्तित हुई (Reduced) पहली पंक्ति को दूसरी पंक्ति से घटाते हैं और पहली पंक्ति को 2 से भी गुणा करते हैं और फिर तीसरी से घटाते हैं। परिणाम नीचे दर्शाए गए है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 1 & 3 & 2 & : & 13 \\ 3 & 1 & 3 & : & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & -2 & -3 & : & -13 \end{bmatrix}$$

आगे दूसरी पंक्ति पर विचार करते हुए, हम पंक्ति संचालन द्वारा दूसरे स्तम्भ (Column) को $[0, 1, 0]$ में परिवर्तित करते हैं जिसे नीचे दिखाया गया है :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 2 & 0 & : & 4 \\ 0 & -2 & -3 & : & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & -2 & -3 & : & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & -3 & : & -9 \end{bmatrix}$$

अंत में, तीसरी पंक्ति को –3 से विभाजित करते है और फिर तीसरी पंक्ति के अवयवों को 2 से गुणा करने के बाद पहली पंक्ति से घटाते है, परिणाम नीचे दिखाए गए है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & -3 & : & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3/(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & : & 7 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & 3 \end{bmatrix}$$

इसलिए प्रणाली का हल $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ है।

उदाहरण 5.4 : गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि द्वारा निम्नलिखित प्रणाली को हल करें,

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 117 \\ 283 \end{bmatrix}$$

हलः हम संवर्धित आव्यूह (Augmented Matrix) पर विचार करते हैं और गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि (Gauss-Jordan Elimination Method) द्वारा प्रणाली को हल करते हैं। गणना को नीचे संक्षिप्त आव्यूह संकेत में दिखाया गया हैं। संवर्धित आव्यूह इस प्रकार होगा :

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & : & 18 \\ 2 & 3 & 3 & : & 117 \\ 4 & 1 & 2 & : & 283 \end{bmatrix}$$

चरण 1 : पहले स्तम्भ में धुरी 3 है। पहला स्तम्भ को पंक्ति संक्रिया (Row Operation) द्वारा $[1, 0, 0]^T$ में बदल दिया गया है जिसे नीचे दिखाया गया है**:**

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & : & 18 \\ 2 & 3 & 3 & : & 117 \\ 4 & 1 & 2 & : & 283 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/3} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & : & 6 \\ 0 & -9 & -3 & : & 105 \\ 0 & -23 & -10 & : & 259 \end{bmatrix}$$

चरण 2 : दूसरा स्तम्भ को पंक्ति संक्रिया द्वारा $[0, 1, 0]$ में बदला है जिसे नीचे दिखाया गया है,

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & : & 6 \\ 0 & -9 & -3 & : & 105 \\ 0 & -23 & -10 & : & 259 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2/9} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & : & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & : & -35/3 \\ 0 & -23 & -10 & : & 259 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+23R_2]{R_1-6R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & : & -35/3 \\ 0 & 0 & -7/3 & : & 28/3 \end{bmatrix}$$

चरण 3 : तीसरे स्तम्भ को पंक्ति संक्रिया द्वारा $[0\ 0\ 1]^T$ में बदला है जिसे नीचे दिखाया गया है:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & : & -35/3 \\ 0 & 0 & -7/3 & : & 28/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3/(-7/3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & : & -35/3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-R_3/3]{R_1-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 72 \\ 0 & 1 & 0 & : & -13 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

इसलिए प्रणाली का हल $x_1 = 72, x_2 = -13, x_3 = 4$ होगा।

पुनरावृत्ति विधि (Iterative Methods)

हम रैखिक समीकरणों की प्रणाली को हल करने के लिए पुनरावृत्ति विधियों का उपयोग कर सकते हैं जब गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) में विकर्ण प्रमुख (Diagonally Dominant) हो। यह नीचे दी गई आवश्यक नियमों (परिस्थितियों) के समुच्चय द्वारा सुनिश्चित किया जाता है,

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ के लिए} \tag{5.15}$$

पर्याप्त नियमों या परिस्थितियों (Condition) का एक वैकल्पिक समुच्चय (Alternative Set) होगा,

$$\sum_{i=1,\ i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad j = 1, 2, \ldots, n \text{ के लिए} \tag{5.16}$$

पुनरावृत्ति (Iteration) विधियों के दो रूप हैं जिन्हें जैकोबी पुनरावृत्ति विधि (Jacobi Iteration Method) और गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि (Gauss-Seidel Iteration Method) के रूप में जाना जाता है।

जैकोबी पुनरावृत्ति विधि (Jacobi Iteration Method): n रैखिक समीकरणों के प्रणालियों पर विचार करें,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n$$

विकर्ण अवयव (Diagonal Elements) $a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$ गैर–शून्य (Non-Zero) हैं और पहले बताई गई पर्याप्त स्थितियों के समुच्चय को संतुष्ट करती हैं। जब समीकरणों के प्रणाली इन नियमों को पूरा नहीं करते है, तो हम प्रणालियों को इस तरह से पुनर्व्यवस्थित करते हैं कि नियमों या परिस्थितियाँ संतुष्ट हो। पुनरावृत्ति का प्रयोग करने के लिए हम समीकरणों को निम्नलिखित रूप में फिर से लिखते हैं।

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - ... - a_{1n}x_n)/a_{11}$$
$$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - ... - a_{2n}x_n)/a_{22}$$
$$x_3 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - ... - a_{3n}x_n)/a_{33}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn}$$

पुनरावृत्ति का प्रयोग करने से पहले हम अज्ञातों (Unknowns) को $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ के प्रारंभिक अनुमानों के रूप में लेते हैं (प्रारंभिक अनुमान को शून्य लिया जा सकता है)। समीकरणों का उपयोग करके क्रमिक अनुमानों (Successive Approximations) की गणना की जाती है।

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}\,x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)} - ... - a_{1n}\,x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}\,x_1^{(k)} - a_{23}\,x_3^{(k)} - ... - a_{2n}\,x_n^{(k)})/a_{22} \\
x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{31}\,x_1^{(k)} - a_{32}\,x_2^{(k)} - ... - a_{3n}\,x_n^{(k)})/a_{33} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}\,x_1^{(k)} - a_{n2}\,x_2^{(k)} - ... - a_{nn-1}\,x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

जहां $k = 0, 1, 2,$ है

वांछित सटीकता (Desired Accuracy) प्राप्त होने तक पुनरावृत्तियों को जारी रखा जाता है। इसे निम्नलिखित संबंधों द्वारा जांचा जाता है,

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, ..., n \text{ के लिए} \tag{5.18}$$

गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि (Gauss-Seidel Iteration Method): यह जैकोबी पुनरावृत्ति का एक सरल संशोधन है। इस पद्धति में, प्रणाली की पुनरावृत्ति के किसी भी स्तर पर, अज्ञात सदिशों (Unknown Vectors) के घटकों (Components) की गणना के लिए अज्ञातों के बेहतर मानों का उपयोग किया जाता है । नीचे दिए गए पुनरावृत्ति समीकरणों को इस विधि में उपयोग किया जाता है,

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\; x_n^{(k)}) / a_{11} \\
x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\; x_n^{(k)}) / a_{22} \\
x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{3n}\; x_n^{(k)}) / a_{33} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}\, x_1^{(k+1)} - a_{n2}^{(k+1)} x_2 (k+1) - \ldots - a_{nn-1}\; x_{n-1}^{(k+1)}) / a_{nn}
\end{aligned} \qquad (5.19)$$

ऊपर से यह स्पष्ट है कि $x_2^{(k+1)}$, की गणना के लिए $x_1^{(k)}$ के बजाय $x_1^{(k+1)}$ के बेहतर (Improved) मानों का उपयोग किया जाता है और $x_3^{(k+1)}$ की गणना के लिए $x_1^{(k+1)}$ और $x_2^{(k+1)}$ के बेहतर मानों का उपयोग किया जाता है। अंत में, $x_n^{(k)}$ की गणना के लिए, सभी घटकों (Components) $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}$ के बेहतर मानों का उपयोग किया जाता है। इसके अलावा, जैकोबी पुनरावृत्ति (Jacobi Iteration) की तरह, पुनरावृत्तियों को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि वांछित सटीकता प्राप्त नहीं हो जाती है।

उदाहरण 5.5 : निम्नलिखित प्रणालियों का गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि द्वारा चार महत्वपूर्ण अंकों (Significant Figure) तक हल करें।

$$\begin{aligned}
10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\
-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\
-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\
-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9
\end{aligned}$$

हल: स्पष्ट रूप से दी गई प्रणालियां विकर्ण प्रमुख गुणांक आव्यूह हैं,

अर्थात्,
$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

इस प्रकार, हम गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि को नियोजित कर सकते हैं, जिसके लिए फिर से हम प्रणालियों को निम्न रूप में लिखते हैं,

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.3 + 0.2\, x_2^{(k)} + 0.1\, x_3^{(k)} + 0.1\, x_4^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= 1.5 + 0.2\, x_1^{(k+1)} + 0.1\, x_3^{(k)} + 0.1\, x_4^{(k)} \\
x_3^{(k+1)} &= 2.7 + 0.1 x_1^{(k+1)} + 0.1\, x_2^{(k+1)} + 0.2\, x_4^{(k)} \\
x_4^{(k+1)} &= -0.9 + 0.1 x_1^{(k+1)} + 0.1\, x_2^{(k+1)} + 0.2\, x_3^{(k+1)}
\end{aligned}$$

हम पुनरावृत्ति को $x_1^{(0)} = 0.3,\ x_2^{(0)} = 1.5,\ x_3^{(0)} = 2.7,\ x_4^{(0)} = -0.9$ से शुरू करते हैं, क्रमिक पुनरावृत्तियों के परिणाम नीचे दी गई तालिका में दिए गए हैं।

k	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.72	1.824	2.774	–0.0196
2	0.9403	1.9635	2.9864	–0.0125
3	0.09901	1.9954	2.9960	–0.0023
4	0.9984	1.9990	2.9993	–0.0004
5	0.9997	1.9998	2.9998	–0.0003
6	0.9998	1.9998	2.9998	–0.0003
7	1.0000	2.0000	3.0000	0.0000

टिप्पणी

इसलिए चार महत्वपूर्ण अंकों (Four Significant Figures) तक का सही हल $x_1 = 1.0000, x_2 = 2.000, x_3 = 3.000, x_4 = 0.000$ है।

उदाहरण 5.6 : गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि द्वारा निम्नलिखित प्रणालियों को हल करें।

$$20x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$$
$$x_1 - 40x_2 + 3x_3 = -75$$
$$2x_1 - x_2 + 10x_2 = 30$$

तीन महत्वपूर्ण अंकों तक हल दें।

हलः यह स्पष्ट है कि गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) विकर्ण (Diagonally) रूप से प्रभावी (Dominant) है और गॉउस–सीडेल (Gauss-Seidel) पुनरावृत्तियों के अभिसरण के लिए पर्याप्त परिस्थितियां स्पष्ट हैं।

क्योंकि,

$$|a_{11}| = 20 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = 3$$
$$|a_{22}| = 40 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = 4$$
$$|a_{33}| = 10 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = 3$$

पुनरावृत्तियों को शुरू करने के लिए, हम समीकरणों को पुनः लिखते हैं,

$$x_1 = \frac{1}{20}(30 - 2x_2 - x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{40}(75 + x_1 + 3x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{10}(30 - 2x_1 + x_2)$$

प्रारंभिक अनुमानित हल होंगा,

$$x_1^{(0)} = 1.5, \quad x_2^{(0)} = 2.0, \quad x_3^{(0)} = 3.0$$

पहली पुनरावृत्ति देता है,

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20}(30 - 2 \times 2.0 - 3.0) = 1.15$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{40}(75 + 1.15 + 3 \times 3.0) = 2.14$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(30 - 2 \times 1.15 + 2.14) = 2.98$$

दूसरी पुनरावृत्ति देता है,

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{20}(30 - 2 \times 2.14 - 2.98) = 1.137$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{40}(75 + 1.137 + 3 \times 2.98) = 2.127$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(30 - 2 \times 1.137 + 2.127) = 2.986$$

तीसरी पुनरावृत्ति देता है,

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{20}(30 - 2 \times 2.127 - 2.986) = 1.138$$
$$x_2^{(3)} = \frac{1}{40}(75 + 1.138 + 3 \times 2.986) = 2.127$$
$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(30 - 2 \times 1.138 + 2.127) = 2.985$$

इस प्रकार तीन महत्वपूर्ण अंकों तक हल को $x_1 = 1.14, x_2 = 2.13, x_3 = 2.98.$ के रूप में लिखा जा सकता है।

उदाहरण 5.7 : जैकोबी पुनरावृत्ति विधि का उपयोग करके निम्नलिखित प्रणालियों का तीन महत्वपूर्ण अंकों तक हल निकाले।

$$10x_1 + 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 16$$
$$3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 + 10x_2 + x_3 - 4x_4 = 9$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 11$$

हलः प्रणालियों को पहले पुनर्व्यवस्थित किया जाता है ताकि गुणांक आव्यूह विकर्ण रूप से प्रभावी हो सके। जैकोबी पुनरावृत्ति को शुरू करने के लिए हम समीकरणों को फिर से लिखते हैं,

$$x_1^{(k+1)} = 1.6 - 0.8 \quad x_2^{(k)} + 0.3 \quad x_3^{(k)} - 0.1 \quad x_4^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = 0.9 - 0.2 \quad x_1^{(k)} + 0.1 \quad x_3^{(k)} - 0.4 \quad x_4^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = 1.0 - 0.3 \quad x_1^{(k)} + 0.4 \quad x_2^{(k)} - 0.1 \quad x_4^{(k)}$$
$$x_4^{(k+1)} = 1.1 - 0.2 \quad x_1^{(k)} + 0.2 \quad x_2^{(k)} - 0.3 \quad x_3^{(k)},$$

जहां k=0, 1, 2,...

समाधान के प्रारंभिक अनुमानों को निम्न रूप में लिया जाता है,

$$x_1^{(0)} = 1.6, \quad x_2^{(0)} = 0.9, \quad x_3^{(0)} = 1.0, \quad x_4^{(0)} = 1.1$$

जैकोबी पुनरावृत्तियों द्वारा गणना की गई क्रमिक पुनरावृत्तियों के परिणाम निम्न तालिका में दिए गए हैं :

k	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1.07	0.92	0.77	0.90
2	1.050	0.969	0.957	0.933
3	1.0186	0.9765	0.9928	0.9923
4	1.0174	0.9939	0.9858	0.9989
5	0.9997	0.9975	0.9925	0.9974
6	1.0001	0.9997	0.9994	0.9984
7	1.0002	0.9998	1.0001	0.9999

इस प्रकार तीन महत्वपूर्ण अंकों का सही हल $x_1 = 1.000, x_2 = 1.000, x_4 = 1.000$ है।

एल्गोरिदम (Algorithm) : गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि द्वारा समीकरणों के प्रणालियों का हल ज्ञात करना।

टिप्पणी

चरण 1 : संवर्धित आव्यूह के अवयवों a_{ij} को $i = 1$ से n, अगला $j = 1$ से $n + 1$ तक निविष्ट (Input) दे।

चरण 2 : एप्सिलॉन (Eplison), मैक्सिट (Maxit) को निविष्ट दे (एप्सिलॉन का (Epsilon) वांछित सटीकता या अधिकतम (Maximum) है, मैक्सिट पुनरावृत्तियों की अधिकतम संख्या है)।

चरण 3 : $x_i = 0$, $i = 1$ से n तक के लिए रखें।
चरण 4 : बृहद (Big) = 0, योग (Sum) = 0, $j = 1$, $k = 1$, पुनरावृत्ति (Iteration) = 0 रखें।
चरण 5 : जांचें कि क्या $k \neq j$, योग (Sum) = योग (Sum) + $a_{jk}\,x_k$ हैं।
चरण 6 : जाँच करें कि क्या $k < n$ है, तो $k = k + 1$ रखें, चरण 5 पर जाएँ अन्यथा अगले चरण पर जाएँ।
चरण 7 : ताप (Temperature) Temp = (a_{jn+1} – Sum) / a_{jj} की गणना करें।
चरण 8 : (Relerr) = Abs (x_j – Temp) / Temp की गणना करें।
चरण 9 : जाँच करें यदि Big < Relerr तो Big = Relerr
चरण 10 : x_j = Temp रखें।
चरण 11 : $j = j + 1$, $k = 1$ रखें।
चरण 12 : जाँच करें कि क्या $j \le n$ तो चरण 5 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।
चरण 13 : जाँच करें कि क्या relerr < Epsilon है तो एप्सिलॉन तो पुनरावृत्ति अभिसरण {Iterations Converge), लिखें, और x_j को $j = 1$ से n के लिए लिखें, चरण 15 पर जाएं}, यदि Iter < *maxit* Iter = Iter + 1 तो चरण 5 पर जाएं।
चरण 14 : 'पुनरावृत्तियों में अभिसरण नहीं है, मैक्सिट *maxit* 'पुनरावृत्ति' लिखें।
चरण 15 : x_j को $j = 1$ से n के लिए लिखें।
चरण 16 : समाप्त

गॉउसियन निष्कासन विधि का उपयोग करके एक आव्यूह के व्युत्क्रम की गणना

किसी दिए गए वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह B निम्न संबंध को संतुष्ट करता है,

$$A \, . \, B = I$$

जहाँ I , A के समान क्रम की इकाई आव्यूह है। आव्यूह B के अवयकों b_{ij} को निर्धारित करने के लिए हम पंक्ति संक्रिया को गॉउसियन निष्कासन (Gaussian Elimination) की तरह नियोजित कर सकते हैं। हम नीचे 2×3 आव्यूह से विधि की व्याख्या कर रहे हैं। हम उपरोक्त संबंध को विस्तार से निम्न रूप से लिख सकते हैं

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

आव्यूह गुणन की परिभाषा का उपयोग करके हम लिख सकते हैं कि ऊपरी आव्यूह निम्नलिखित रेखीय समीकरणों की तीनों प्रणालियों के समतुल्य (Equivalent) है।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार उपरोक्त प्रत्येक प्रणालियों को हल करके हम व्युत्क्रम आव्यूह $B = A^{-1}$ के तीन स्तम्भों (Columns) को प्राप्त करेंगे। चूंकि प्रत्येक तीनों प्रणालियों की गुणांक आव्यूह तुल्य है, इसलिए हम एक साथ सभी तीनों प्रणालियों के लिए गॉउसियन निष्कासन विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

हम इसके लिए निम्नलिखित संवर्धित आव्यूह पर विचार करते हैं।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

हम इस संवर्धित आव्यूह के लिए गॉउस निष्कासन को नियोजित (Employ) करते हैं। पहले चरण के अंत में हमें मिलता है ,

$$\xrightarrow[R_3 - (a_{31}/a_{11})R_1]{R_2 - (a_{21}/a_{11})R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & : & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & : & -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

जहां,

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - (a_{21}/a_{11})a_{12},\ a_{23}^{(1)} = a_{23} - (a_{21}/a_{11})a_{13}$$
$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - (a_{31} - a_{11})a_{12},\ a_{33}^{(1)} = a_{33} - (a_{31}/a_{11})a_{13}$$

इसी तरह, दूसरे चरण के अंत में हमारे पास है,

$$R_3 - \left(a_{23}^{(1)}/a_{22}^{(1)}\right) a_{32}^{(1)} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & : & c_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & : & c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

जहां,

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}\right) \ a_{23}^{(1)},\ \ c_{21} = -(a_{21}/a_{12})$$

$$= \left(a_{21} \ \ a_{32}^{(1)}/a_{11} \ \ a_{22}^{(1)}\right) - (a_{31}/a_{11}),\ \ c_{32} = -\left(a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}\right)$$

पश्च प्रतिस्थापन प्रक्रिया के द्वारा, हम व्युत्क्रम आव्यूह के अवयवों को , तीन स्तम्भों के परिवर्तित हुए संवर्धित भाग के अनुरूप तीन प्रणालियों को हल करके प्राप्त करेंगे, अर्थात,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{11} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

हम नीचे दिए गए उदाहरण द्वारा इस विधि का वर्णन करेंगे।

उदाहरण 5.8 : गॉउसियन निष्कासन विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह A का व्युत्क्रम ज्ञात करें।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी

हलः हम निम्नलिखित संवर्धित आव्यूह पर विचार करते हैं,

$$[A.I] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इस संवर्धित आव्यूह पर गॉउसियन निष्कासन का उपयोग करके, पहले चरण के अंत में हम प्राप्त करेंगे,

$$\xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इसी तरह, दूसरे चरण के अंत में हम प्राप्त करते हैं,

$$\xrightarrow[R_3 - 3R_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & : & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार हम तीन प्रणालियों को हल करके तीन स्तम्भों के व्युत्क्रम आव्यूह को प्राप्त करते हैं,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -2 & -1 & : & -2 \\ 0 & 0 & 5 & : & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 0 \\ 0 & -2 & -1 & : & 1 \\ 0 & 0 & 5 & : & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 0 \\ 0 & -2 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 5 & : & 1 \end{bmatrix}$$

तीनों का हल आसानी से पश्च प्रतिस्थापन (Back-Substitution) द्वारा प्राप्त किया जाता है, जो नीचे दिए गए व्युत्क्रम आव्यूह के तीन स्तम्भों को देते हैं,

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/5 & -1/10 \\ 1 & -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

हम व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse Matrix) की गणना करने के लिए गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि (Gauss-Jorden Elimination Method) का भी उपयोग कर सकते हैं। इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 5.9 : गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह के व्युत्क्रम की गणना करें।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

हलः हम संवर्धित आव्यूह $[A : I]$, पर विचार करते है,

$$[A:I]=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & : & 1 & 0 & 0\\ 4 & 4 & -3 & : & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & : & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1/2]{}\begin{bmatrix}1 & 3/2 & -1/2 & : & 1/2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & -3 & : & 0 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1 & : & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-4R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 3/2 & -1/2 & : & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1 & : & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & 2 & : & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2/-2]{}\begin{bmatrix}1 & 3/2 & -1/2 & : & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & +1/2 & : & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & -6 & 2 & : & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+6R_2]{R_1-3R_2/2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -5/4 & : & -1 & 3/4 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & : & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 5 & : & 5 & -3 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3/5]{}\begin{bmatrix}1 & 0 & -5/4 & : & -1 & 3/4 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & : & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -3/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-1R_3/2]{R_1+5R_3/4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & : & 1/4 & 0 & 1/4\\ 0 & 1 & 0 & : & 1/2 & -1/5 & -1/10\\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -3/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

जो $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 0 & 1/4\\ 1/2 & -1/5 & -1/10\\ 1 & -3/5 & 1/5\end{bmatrix}$ देता है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. समीकरण की प्रणाली कब समरूप और कब गैर–समरूप होती है?
2. गॉउस निष्कासन विधि को समझाएं।
3. गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि क्या है?
4. पुनरावृत्ति विधियों का उपयोग क्यों किया जाता है?
5. गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि को समझाएं।

5.3 साधारण अवलकन समीकरण

भले ही साधारण अवलकन समीकरण (Ordinary Differential Equations) के विश्लेषणात्मक समाधान (Analytical Solution) खोजने के लिए कई विधियां हैं, लेकिन संवृत (Closed) रूप में कई साधारण अवलकन समीकरण (Ordinary Differential Equations) के समाधान प्राप्त नहीं किए जा सकते हैं। अवलकन समीकरणों (Differential Equations) के संख्यात्मक समाधान ज्ञात करने के लिए कई विधियाँ उपलब्ध हैं। हम प्रथम कोटि के अवलकन समीकरण से संबंधित एक प्रारंभिक मान समस्या के समाधान पर विचार करते हैं ,जिसे निम्न रूप से लिखा जाता है,

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{5.20.1}$$

और $y(x_0)=y_0$ (5.20.2)

सामान्य तौर पर, अवलकन समीकरण का समाधान हमेशा मौजूद नहीं होता है। अवलकन समीकरण (5.20) के एक अद्वितीय समाधान (Unique Solution) के अस्तित्व के लिए, निम्नलिखित स्थितियों को संतुष्ट होना जरूरी है, जिसे लिप्शिट्ज स्थिति (Lipschitz Condition) के रूप में जाना जाता है,

(*i*) फलन $f(x, y)$ निम्नलिखित सीमा में परिभाषित और सतत या निरंतर (Continuous) हो

$R : x_0 \le x \le b, -\infty < y < \infty$

टिप्पणी

(*ii*) एक अचर L इस तरह मौजूद हो कि किसी भी (x_0, b) में x और कोई भी दो संख्या y और y_1 के लिए

$$|f(x, y) - f(x, y_1)| \le L|y - y_1| \quad (5.21)$$

प्रारंभिक मान समस्याओं (Initial Value Problems) के संख्यात्मक समाधान के लिए क्रमिक (Successive) चरण y के लिए x के $x_1, x_2, \ldots x_n$ पर अनुमानित संख्यात्मक समाधान प्राप्त करना होता हैं। अवलकन समीकरणों के संख्यात्मक समाधान की गणना के लिए कई समाधान उपलब्ध हैं।

क्रमिक सन्निकटन की पिकार्ड विधि

(Picard's Method of Successive Approximations)

प्रारंभिक मान समस्या के समाधान पर विचार करें,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ और } y(x_0) = y_0$$

$y = y(x)$, को x, के फलन रूप में लेते हुए, हम निम्न रूप में अवलकन समीकरण को x, के सापेक्ष में $x = x_0$ से x, के बीच, समाकलन कर सकते हैं।

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \quad (5.22)$$

समाकलन में अज्ञात फलन $y(x)$ होता है और इसे सीधे समाकलन करना संभव नहीं होता है। पिकार्ड विधि (Picard's Method) में पहला सन्निकटन समाधान $y^{(1)}(x)$ को प्राप्त करने के लिए $y(x)$ को y_0 द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है।

इस प्रकार,, $$y^{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx \quad (5.23)$$

दूसरा सन्निकटन समाधान को निकालने के लिए y की जगह $y^{(1)}(x)$ को लिया जाता है। इस प्रकार,

$$y^{(2)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(1)}(x))\, dx \quad (5.24)$$

प्रक्रिया जारी रखी जा सकती है, जब तक हमारे पास सामान्य सन्निकटन (Approximation) समाधान नहीं आ जाए, जिसे निम्न रूप में लिखा जाता है ,

$$y^{(n)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(n-1)}(x))dx, \text{ , के लिए } n = 2, 3\ldots \quad (5.25)$$

प्रारंभिक स्थिति दिए जाने पर, प्रथम कोटि अवकलन समीकरण (First Order Differential Equation) का हल खोजने के लिए इस पुनरावृत्ति सूत्र (Iteration Formula) को पिकार्ड पुनरावृत्ति (Picard's Iteration) के रूप में जाना जाता है। पुनरावृत्तियों को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि दो क्रमिक सन्निकट समाधान $y^{(k)}$ और $y^{(k+1)}$ एक

वांछित सटीकता (Desired Accuracy) तक x के वांछित मानों के लिए लगभग एक ही हल नहीं देते हैं।

नोट : आवश्यक समाकलन (Necessary Integration) की गणना में व्यावहारिक कठिनाइयों के कारण, इस पद्धति का उपयोग हमेशा नहीं किया जा सकता है। हालाँकि, यदि $f(x, y)$, x और y का एक बहुपद है, तो क्रमिक सन्निकट समाधान x के घातांक श्रेणी (Power Series) के रूप प्राप्त होगा ।

उदाहरण 5.10 : निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या के लिए पिकार्ड विधि द्वारा चार क्रमिक सन्निकटन समाधानों का पता लगाएं :

$y' = x + y$, इसमें $y\,(0) = 1$, है

उसके बाद, $y\,(0.1)$ और $y\,(0.2)$ की पाँच महत्वपूर्ण अंकों तक गणना करें।

हलः हमारे पास $y' = x + y$, इसमें $y\,(0) = 1$ है,

पिकार्ड विधि द्वारा पहला सन्निकटन होगा,

$$y^{(1)}(x) = y(0) + \int_0^x [x + y \quad (0)] \quad dx$$

$$\therefore \qquad y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x (x+1) \quad dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

दूसरा सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + \frac{x^2}{2})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

इसी तरह, तीसरा सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(3)}(x) = 1 + \int_0^x (1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{6})dx.$$

$$\therefore \qquad y^{(3)}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

चौथा सन्निकटन समाधान होगा ,

$$y^{(4)}x = 1 + \int_0^x (1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24})dx.$$

$$\therefore \qquad y^{(4)}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

यह स्पष्ट होता है कि क्रमिक सन्निकटन को आसानी से x के घातांक श्रेणी के रूप में निर्धारित किया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक पद पिछले पद से एक घात अधिक होता है। $y\,(0.1)$) का मान होगा,

$y\;(0.1) = 1 + 0.1 + (0.1)^2 + \frac{(0.1)^3}{3} + \frac{(0.1)^4}{4} + ... \approx 1.1103$, पांच महत्वपूर्ण अंकों तक।

इसी तरह, $y(0.2) = 1 + 0.2 + (0.2)^2 + \frac{(0.2)^3}{3} + \frac{(0.2)^4}{4} + \frac{(0.2)^5}{120} \approx 1.2431$

उदाहरण 5.11 : पिकार्ड विधि द्वारा प्रारंभिक मान समस्या के क्रमिक सन्निकटन समाधान का पता लगाएं,

$y' = xy + 1$, इसमें $y(0) = 1$,

हलः पहला सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x (x+1)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

दूसरा और तीसरा सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x [x(1 + x + \frac{x^2}{2}) + 1]dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}$$

$$y^{(3)}(x) = 1 + \int_0^x [x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}) + 1]dx$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}$$

उदाहरण 5.12 : पिकार्ड विधि द्वारा निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल करके $y(0.25)$ और $y(0.5)$ की गणना तीन दशमलव स्थानों तक करें।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}, y(0) = 0$$

हलः हमारे पास $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}, y(0) = 0$ है,

पिकार्ड विधि द्वारा पहला सन्निकटन होगा,

$$y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x \frac{x^2}{1+0}dx = \frac{x^3}{3}$$

दूसरा सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(2)}(x) = \int_0^x \frac{x^2}{1 + [y^{(1)}(x)]^2}dx$$

$$= \int_0^x \frac{x^2}{1 + \frac{x^6}{9}}dx = \tan^{-1}\frac{x^3}{3}$$

$x =$ 0.25 के लिए, $y^{(1)} \quad (0.25) = \frac{(0.25)^2}{3} = 0.0052$ होगा।

$y^{(2)} \ (0.25) = \tan^{-1}\frac{(0.25)^2}{3} \approx 0.0052$

इस प्रकार, तीन दशमलव स्थानों तक सही है, $y(0.5) = 0.042$.

फिर से $x = 0.5$ के लिए,

$$y^{(1)}(0.5) = \frac{(0.5)^2}{3} = 0.083333$$

$$y^{(2)}(0.5) = \tan^{-1}\frac{(0.5)^3}{3} = 0.0416$$

नोट : इस प्रश्न में हम मानते हैं कि समाकल (Integral) का तीसरा और उच्च सन्निकटन समाधान प्राप्त करना मुश्किल या असंभव है, क्योंकि,

$$y^{(3)}(x) = \int_0^x \frac{x^2}{1+\left(\tan^{-1}\frac{x^3}{3}\right)^2}$$ का समाकलन नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 5.13 : प्रारंभिक मान समस्या के दो क्रमिक सन्निकटन समाधान खोजने के लिए पिकार्ड विधि का उपयोग करें,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x},\ y(0) = 1$$

हल: पिकार्ड विधि द्वारा पहला सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(1)}(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_0)dx$$

$$\therefore \quad y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x \frac{1-x}{1+x}dx = 1 + \int_0^x \frac{2-(1+x)}{1+x}dx$$

$$\therefore \quad y^{(1)}(x) = 1 + 2\log_e|1+x| - x$$

दूसरा सन्निकटन समाधान होगा,

$$y^{(2)}(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y^{(1)}(x))dx$$

$$= 1 + \int_0^x \frac{x - 2x + 2\log_e|1+x|}{1+2\log_e|1+x|}dx = 1 + x - 2\int_0^x \frac{x}{1+2\log_e|1+x|}dx$$

हम मानते हैं कि $y^{(2)}(x)$ को प्राप्त करने के लिए समाकलन करना संभव नहीं है। इसलिए पिकार्ड विधि को क्रमिक सन्निकटन समाधान प्राप्त करने के लिए प्रयोग नहीं किया जाता है।

यूलर विधि (Euler's Method)

यह प्रथम कोटि प्रारंभिक मान समस्या (First Order Initial Value Problem) को हल करने का एक अपरिष्कृत (Crude) लेकिन सरल तरीका है,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

इसे छोटे अंतराल के लिए $f(x, y)$ के बजाय $f(x_0, y_0)$ में समाकलन करके प्राप्त किया जाता है,

$$\therefore \quad \int_{x_0}^{x_0+h} dy = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0, y_0)dx.$$

टिप्पणी

$\therefore \qquad y(x_0+h)-y(x_0)=hf(x_0,y_0)$

$y_1 = y\ (x_0 + h)$ लिखकर हमारे पास है,

$$y_1 = y_0 + h\,f\,(x_0, y_0) \tag{5.26}$$

इसी तरह, हम लिख सकते हैं,

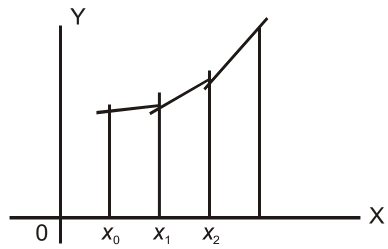
$$y_2 = y\ (x_1 + h) = y_1 + h\,f\,(x_1, y_1) \tag{5.27}$$

जहां, $x_1 = x_0 + h.$

क्रमिक रूप से आगे बढ़ते हुए, हम किसी भी $x_n = x_0 + nh$, के लिए समाधान प्राप्त कर सकते हैं, जैसा कि,

$$y_n = y_{n-1} + h\,f\,(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{5.28}$$

यह विधि, जिसे यूलर विधि के रूप में जाना जाता है, इसकी ज्यामितीय रूप से व्याख्या की जा सकती है, जैसा कि चित्र 5.1 में दिखाया गया है।



चित्र 5.1 यूलर विधि

छोटे चरण आकार h के लिए, समाधान वक्र $y = y\ (x)$, को स्पर्शरेखा की रेखा (Tangential Line) के रूप में अनुमानित किया जाता है।

स्थानीय त्रुटि (Local Error) किसी भी x_k पर अर्थात यूलर विधि (Euler Method) की खंडन त्रुटि (Truncation Error) को निम्न रूप से लिखा जाता है,

$$e_k = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$$

जहां y_{k+1} यूलर विधि का समाधान होता है।

$$e_k = y(x_k + h) - \{y_k + hf\,(x_k, y_k)\}$$

$$= y_k + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k + \theta h) - y_k - hy'(x_k),\ \ 0 < \theta < 1$$

$$e_k = \frac{h^2}{2}y''(x_k + \theta h),\ \ 0 < \theta < 1$$

ध्यान दें : यूलर विधि, चरण–दर –चरण, x के चरण के मानों $\{x_k\}$ के अनुक्रम पर y के मानों $\{y_k\}$ का अनुक्रम खोजती है। लेकिन वांछित सटीकता तक समाधान प्राप्त करने के लिए, हमें चरण आकार h को बहुत छोटा लेना होगा। फिर से x_0 के पास x की एक बड़ी सीमा या रेंज (Range) के लिए विधि का उपयोग नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि प्रसारित (Propagated) त्रुटि समाकलन के साथ बढ़ती है।

उदाहरण 5.14 : निम्नलिखित अवलकन समीकरण में $h = 0.1$ से लेकर, $x = 0.1, 0.2, 0.3$ तक के लिए यूलर विधि द्वारा हल निकालें।

टिप्पणी

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y,\ y(0) = 1.$$

सही समाधान के साथ परिणामों की तुलना करें।

हलः $y\ (0) = 1$ के साथ $\frac{dy}{dx} = x^2 - y,$ दिया गया है ।

यूलर विधि में सूत्र का उपयोग करके, क्रमिक चरणों में $y_1, y_2, y_3,$ के मानों की $x_1 = x_0+h, x_2 = x_0+2h, x_3 = x_0+ 3h,$ पर गणना की जाती है,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,\ \ y_n), \text{ for } n = 0,\ 1,\ 2,...$$

$$\therefore \qquad y_{n+1} = y_n + h\ \ (x^2{}_n - y_n)$$

$h = 0.1$ लेकर, और $x_0 = 0, y_0 = 1$ से शुरू करके, हम नीचे दी गई तालिका में क्रमिक गणना को प्रस्तुत कर रहे हैं।

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x^2{}_n - y_n$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
0	0.0	1.000	−1.000	0.9000
1	0.1	0.900	−0.8900	0.8110
2	0.2	0.8110	−0.7710	0.7339
3	0.3	0.7339	−0.6439	0.6695

$\frac{dy}{dx} + y = x^2$ के रूप में लिखी गई अवलकन समीकरण का विश्लेषणात्मक समाधान होगा,

$$ye^x = \int x^2 e^x dx + c$$

या , $$ye^x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

क्योंकि, $y = 1\ \ x = 0, \therefore c = -1$ के लिए

$$\therefore \qquad y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}.$$

निम्न तालिका यूलर विधि द्वारा सन्निकटन समाधान के साथ सटीक (Exact) समाधान की तुलना करती है।

n	x_n	approx. sol.	exact sol.	% error
1	0.1	0.9000	0.9052	0.57
2	0.2	0.8110	0.8213	1.25
3	0.3	0.7339	0.7492	2.04

उदाहरण 5.15 : यूलर विधि द्वारा निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या के समाधान के लिए $x = 0.1, h = 0.02$ लेकर, चार दशमलव स्थानों तक गणना करें।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, y(0) = 1\ .$$

हल: प्रारंभिक मान समस्या को हल करने के लिए यूलर विधि द्वारा,

$$\frac{dy}{dx} = f \quad (x, y), \quad y(x_0) = y_0, \; y_{n+1} = y_n + h \quad f(x_n, \; y_n), \quad n = 0, \; 1, \; 2, \ldots$$

टिप्पणी

$h = 0.02$ के लिए, हमारे पास , $x_1 = 0.02, x_2 = 0.04, x_3 = 0.06, x_4 = 0.08, x_5 = 0.1$ होगा। क्योकि y(0) = 1 है, इसलिए यूलर विधि का उपयोग करते हुए, हमारे पास होगा,

$$y(0.02) = y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 1 + 0.02 \times \frac{1-0}{1+0} = 1.0200$$

$$y(0.04) = y_2 = y_1 + h\,f(x_1, y_1) = 1.0200 + 0.02 \times \frac{1.0200 - 0.02}{1.0200 + 0.02} = 1.0392$$

$$y(0.06) = y_3 = y_2 + h\,f(x_2, y_2) = 1.0392 + 0.02 \times \frac{1.0392 - 0.04}{1.0392 + 0.04} = 1.0577$$

$$y(0.08) = y_4 = y_3 + h\,f(x_3, y_3) = 1.0577 + 0.02 \times \frac{1.0577 - 0.06}{1.0577 + 0.06} = 1.0756$$

$$y(0.1) = y_5 = y_4 + h\,f(x_4, y_4) = 1.0756 + 0.02 \times \frac{1.0756 - 0.08}{1.0756 + 0.08} = 1.0928$$

इस तरह , $y\,(0.1) = 1.0928$

संशोधित यूलर विधि (Modified Euler's Method)

कुछ मध्यम सटीकता प्राप्त करने के लिए, यूलर विधि को बिंदु x_n पर अवकलज $y' = f(x, y)$, की गणना करके संशोधित (Modified) किया जाता है, जोकि $f(x_n, y_n)$ और $f(x_{n+1}, y^{(0)}{}_{n+1})$, के माध्य (Mean) के रूप में होता है। जहाँ,

$$y^{(0)}{}_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n),$$

$$y^{(1)}{}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^{(0)}{}_{n+1})]. \qquad (5.29)$$

इस संशोधित विधि को यूलर–काउची (Euler-Cauchy) विधि के रूप में जाना जाता है। संशोधित यूलर विधि की स्थानीय खंडन त्रुटि (Truncation Error) $0(h^3)$ कोटि की होती है।

नोट : संशोधित यूलर विधि का उपयोग नीचे बताए गए पुनरावृत्तियों योजना में प्रयोग करके वांछित सटीकता तक समाधान की गणना करने के लिए किया जा सकता है।

गणना करें $y^{(k)}{}_{n+1} = y_n + h \quad f(x_n, \; y_n)$

गणना करें $y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2} \; \left[f(x_n, \; y_n) + f(x_{n+1}, \; y_{n+1}^{(k)}) \right], \; k = 0, \; 1, \; 2, \ldots$ के लिए

(5.30)

पुनरावृत्तियों को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि दो क्रमिक सन्निकट $y_{n+1}^{(k)}$ और $y_{n+1}^{(k+1)}$ वांछित सटीकता के अनुरूप नहीं होते है। एक नियम के रूप में, पुनरावृत्तियां पर्याप्त रूप से छोटे h के लिए तेजी से अभिसरण होती हैं। यदि, तीन या चार

पुनरावृत्तियों के बाद भी पुनरावृत्ति समाधान में आवश्यक सटीकता नहीं देती हैं, तो h को कम किया जाता है और पुनरावृत्तियों को फिर से किया जाता है।

उदाहरण 5.16 : संशोधित यूलर की विधि का उपयोग करके प्रारंभिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = x^2 + y,\ y(0) = 1, h = 0.01$ लेकर $y(0.02)$ की गणना करें। परिणाम की तुलना सटीक समाधान से करें ।

हलः संशोधित यूलर विधि में क्रमिक बिंदुओं $x_1 = x_0+h, x_2 = x_0+2h,\ldots x_n = x_0+nh,$ पर दो चरणीय गणना द्वारा समाधान प्राप्त किया जाता है।

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})\right]$$

दी गई समस्या के लिए , $f(x, y) = x^2 + y$ और $h = 0.01$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h[x_0^2 + y_0] = 1 + 0.01 \times 1 = 1.01$$

अर्थात्,
$$y_1^{(1)} = 1 + \frac{0.01}{2}[1.0 + 1.01 + (0.01)^2] = 1.01005$$

$$y_1 = y \quad (0.01) = 1.01005$$

आगे,

$$\begin{aligned} y_2^{(0)} &= y_1 + h[x_1^2 + y_1] \\ &= 1.01005 + 0.01[(0.1)^2 + 1.01005] \\ &= 1.01005 + 0.010102 = 1.02015 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2^{(1)} &= 1.01005 + \frac{0.01}{2}[(0.01)^2 + 1.01005 + (0.01)^2 + 1.02015] \\ &= 1.01005 + \frac{0.01}{2} \times \ (2.02140) \\ &= 1.01005 + 0.10107 \\ &= 1.11112 \end{aligned}$$

$$\therefore y_2 = y \quad (0.02) = 1.11112$$

टेलर श्रेणी विधि (Taylor Series Method)

प्रथम कोटि अवलकन समीकरण के हल पर विचार करें,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ और } \ y(x_0) = y_0 \qquad (5.31)$$

जहाँ x और y के संदर्भ में $f(x, y)$ पर्याप्त रूप से अवकलनीय है। समस्या के समाधान $y(x)$ को बिंदु x_0 के पास टेलर श्रेणी (Taylor Series) द्वारा विस्तारित किया जा सकता है।

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + ... + \frac{y^k(x_0)}{k!}h^k + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}(\xi) \quad (5.32)$$

टिप्पणी

उपरोक्त विस्तार में अवकलज (Derivatives) को निम्नानुसार निर्धारित किया जा सकता है,

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$
$$y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\, y'(x_0)$$
$$y'''(x_0) = f_{xx}(x_0, y_0) + 2f_{xy}(x_0, y_0)\, y'(x_0) + f_{yy}(x_0, y_0)\{y'(x_0)\}^2 + f_y(x, y)y''(x_0)$$

जहाँ प्रत्यय (Suffix) x या y , x या y के सापेक्ष में आंशिक अवकलज (Partial Derivative) को दर्शाता है।

इस प्रकार $y_1 = y(x_0+h)$ का मान निकालने के लिए, ऊपर दिखाए गई टेलर श्रेणी से विस्तार करके गणना की जा सकती है। आमतौर पर, उच्च क्रम अवकलज को प्राप्त करने में कठिनाइयों या समस्याओं के कारण, इस विधि का उपयोग केवल चौथे क्रम तक किया जाता है। $x_2 = x_1+h$ का हल (x_1, y_1) पर अवकलज का मूल्यांकन करके और विस्तार का उपयोग करके निकला जाता है अन्यथा, $x_2 = x_0+2h$ लिखकर हम इसी विस्तार का उपयोग कर सकते हैं। इस प्रक्रिया को x_n, y_n के ज्ञात मानों पर y_{n+1} का निर्धारण करके जारी रखा जा सकता है।

नोट : यदि हम $k = 1$ लेते हैं, तो हमें यूलर विधि $y_1 = y_0+hf(x_0, y_0)$ मिलती है, इस प्रकार यूलर विधि को टेलर श्रेणी विधि का एक विशेष प्रकरण कहा जाता है।

उदाहरण 5.17 : प्रारंभिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = xy+1,\ y(0)=1$ की टेलर श्रेणी समाधान पांच पदों तक तैयार करें, और इसलिए चार दशमलव स्थानों तक y (0.1) और y (0.2) की गणना करें।

हलः हमारे पास $y' = xy+1,\ y(0)=1$ है।

क्रमिक रूप से अवकलित करके हमें मिलेगा,

$$y''(x) = xy' + y,\ \therefore y''(0) = 1$$
$$y'''(x) = xy'' + 2y',\ \therefore y'''(0) = 2$$
$$y^{(iv)}(x) = xy''' + 3y'',\ \therefore y^{(iv)}(0) = 3$$
$$y^{(v)}(x) = xy^{(iv)} + 3y''', \therefore y^{(v)}(0) = 6$$

इसलिए टेलर सीरीज समाधान $y(x)$ होगा,

$$y(x) \approx y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \frac{x^4}{4!}y^{(iv)}(0) + \frac{x^5}{5!}y^{(v)}(0)$$
$$\approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\times 2 + \frac{x^4}{24}\times 3 + \frac{x^5}{120}\times 6 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}$$
$$\therefore y(0.1) \approx 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} + \frac{0.0001}{8} + \frac{0.00001}{20} = 1.1053$$

इसी तरह , $y\ \ (0.2) \approx 1+0.2+\frac{0.04}{2}+\frac{0.008}{3}+\frac{0.0016}{8}+\frac{0.00032}{20}=1.04274$

उदाहरण 5.18 : प्रारंभिक मान समस्या $y'=x^2+y^2,\ y(0)=0.$ के लिए टेलर श्रेणी समाधान में पहले दो गैर–लुप्त (Non-Vanishing) होने वाले पद ज्ञात करे। फिर y (0.1), y (0.2), y (0.3) की गणना करें और समाधान की सटीकता पर टिप्पणी करें।

हलः हमारे पास $y'=x^2+y^2,\ y(0)=0$ है।

क्रमिक रूप से अवकलित करके हमें मिलेगा,

$$\begin{aligned}
y'' &= 2x+2yy', & \therefore\ y''(0)&=0\\
y''' &= 2+2[yy''+(y')^2, & y'''(0)&=2\\
y^{(iv)} &= 2(yy'''+3y'y''), & \therefore\ y^{(iv)}(0)&=0\\
y^{(v)} &= 2[yy^{(iv)}+4y'y'''+3(y'')^2], & \therefore\ y^{(v)}&=0\\
y^{(vi)} &= 2[yy^{(v)}+5y'y^{(iv)}+10y''y'''], & \therefore\ y^{(vi)}&=0\\
y^{(vii)} &= 2[yy^{(vi)}+6y'y^{(v)}+15y''y^{(iv)}+10(y''')^2] & \therefore\ y^{(vi)}(0)&=80
\end{aligned}$$

टेलर श्रेणी दो पदों तक होगी,

$$y(x)=\frac{x^3}{6}\times 2+\frac{x^7}{7}\times\frac{80}{7!}=\frac{1}{3}x^3+\frac{x^7}{63}$$

उदाहरण 5.19 : $x\,y'=x-y^2, y\,(2)=1$ अर्थात् दिया गया हुआ है , टेलर श्रेणी विधि का उपयोग करके चार दशमलव स्थानों तक $y\,(2.1), y\,(2.2)$ और $y\,(2.3)$ की गणना करें। $y'=x-y^2$ अर्थात् $y'=1-y^2/x,$

हलः $y'=x-y^2$ अर्थात् $y'=1-y^2/x,$ और $y=1,\ x=2$ के लिए दिया हुआ है।

टेलर श्रेणी विधि द्वारा $y\,(2.1)$ की गणना करने के लिए, हम पहले $x=2$ पर y के अवकलज का पता लगाते हैं।

$$y'=1-y^2/x \qquad \therefore\ \ y'(2)=1-\frac{1}{2}=0.5$$

$$xy''+y'=1-2yy'$$

$$2y''(2)+\frac{1}{2}=1-2.\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \ y''(2)=\frac{1}{4}-\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=-0.25$$

$$xy'''+2y''=-2y'^2-2yy''$$

$$\therefore \qquad 2y'''(2)+2\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

या, $$2y'''(2)=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \ y'''(2)=\frac{1}{4}=0.25$$

$$xy^{(iv)}+3y'''=-4y'y''-2y'y''-2yy'''$$

$$2\,y''''(2)+3\times\frac{1}{4}=6\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{1}{4}$$

$$y''''(2) = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = -0.25$$

$$y(2.1) = y\ \ (2) + 0.1\ \ y'(2) + \frac{(0.1)^2}{2} y''(2) + \frac{(0.1)^3}{3!} y'''(2) + \frac{(0.1)^4}{4!} y''''(2)$$

$$= 1 + 0.1 \times 0.5 + \frac{0.01}{2} \times (-0.25) + \frac{0.001}{6} \times 0.25 + \frac{0.0001}{24} \times (-0.25)$$

$$= 1 + 0.05 - 0.00125 + 0.00004 - 0.000001$$

$$= 1.0488$$

$$y(2.2) = 1 + 0.2 \times 0.5 + \frac{0.04}{2} \times (-0.25) + \frac{0.008}{6} \times 0.25 + \frac{0.0016}{24} \times (-0.5)$$

$$= 1 + 0.1 - 0.005 - 0.00032 - 0.00003$$

$$= 1.0954$$

$$y(2.3) = 1 + 0.3 \times 0.5 + \frac{0.09}{2}\ \ (-0.25) + \frac{0.009}{2} \times 0.25 + \frac{0.0081}{24} \times (0.5)$$

$$= 1 + 0.15 - 0.01125 + 0.001125 + 0.000168$$

$$= 1.005043$$

रून्गें–कुट्टा विधि (Runge-Kutta Methods)

रून्गें–कुट्टा विधि विभिन्न कोटियों की हो सकती है। यह बहुत उपयोगी होती हैं, जब टेलर श्रेणी (Taylor Series) की विधि उच्च कोटि के अवकलन को खोजने की जटिलता के कारण लागू करना आसान नहीं होती है। रून्गें–कुट्टा (Runge-Kutta) विधि बेहतर सटीकता प्राप्त करने का प्रयास करती हैं और साथ ही उच्चतर कोटि अवकलन की आवश्यकता को पूरा करती हैं। हालाँकि, इस विधि में कई ऑफ–स्टेप (Off-Step) बिंदुओं पर प्रथम कोटि अवकलज के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है।

यहाँ हम रून्गें–कुट्टा विधि (Runge-Kutta Method) के कोटि 2 के अवकलन पर विचार करते हैं।

$(n + 1)$ वें चरण का हल निम्न रूप में माना जाता है,

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 \tag{5.33}$$

जहां $k_1 = h\,f\,(x_n, y_n)$, और

$$k_2 = h\,f(x_n + \alpha\,h, y_n + \beta\,k_1),\ n = 0, 1, 2,... \text{ के लिए} \tag{5.34}$$

अज्ञात मापदंडो a, b, α, और β को टेलर श्रेणी में विस्तार करके और h के सामान घातों के गुणांकों के समीकरणों का निर्माण करके निर्धारित किया जाता हैं। हमारे पास है,

$$y_{n+1} = y(x_n + h) = y_n + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \frac{h^3}{6} y'''(x_n) + 0(h^4)$$

$$= y_n + h\,f\,(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y]_n + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{yy} + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f]_n + 0(h^4) \tag{5.35}$$

अधोलिखित (Subscript) n इंगित करता है कि कोष्ठक (Brackets) के भीतर फलनों का मूल्यांकन (x_n, y_n) पर किया गया है।

फिर, दो चरो के साथ टेलर श्रेणी द्वारा k_2 का विस्तार करके हमारे पास होगा,

$$k_2 = h[f_n + ah(f_x)_n + \beta k_1(f_y)_n + \frac{\alpha^2\beta^2}{2}(f_{xx})_n + \alpha\beta hk_1(f_{xy})_n + \frac{\beta^2 k_1^2}{2}(f_{yy})_n + 0(h^3)] \tag{5.36}$$

इस प्रकार, k_2 के विस्तार को प्रतिस्थापित करने पर, हम समीकरण (5.34) से प्राप्त करते हैं,

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)h\,f_n + bh^2(\alpha f_x + \beta ff_y)_n + bh^3\left(\frac{\alpha^2}{2}f_{xx} + \alpha\beta ff_{xx} + \frac{\beta^2}{2}f^2 f_{yy}\right) + 0(h^4)$$

y_{n+1} के विस्तार और h और h^2 के गुणांक के समीकरण के साथ तुलना करने पर हमें निम्नलिखित संबंध मिलते हैं,

$$a + b = 1,\ b\alpha = b\beta = \frac{1}{2}$$

चार अज्ञात मापदंडों के निर्धारण के लिए तीन समीकरण हैं। इस प्रकार, कई समाधान हैं। हालांकि, आमतौर पर $a = b = \frac{1}{2}$, तो $\alpha = \beta = 1$ को लेकर एक सममित समाधान को लिया जाता है इस प्रकार हम रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 2 को निम्न रूप में लिख सकते हैं,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\ [f(x_n,\ y_n) + f(x_n + h,\ \ y_n + h\ \ f(x_n,\ y_n))],\ n = 0, 1, 2,... \text{ के लिए} \tag{5.37}$$

द्वितीय कोटि (Second Order) विधि की तरह आगे बढ़ते हुए, रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 के सूत्र को भी तैयार किया जा सकता है। व्युत्पत्ति को हटाकर, हम सामान्य रूप से उपयोग किए जाने वाली रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 को नीचे दे रहे हैं,

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + 0(h^5)\\
k_1 &= h\ f(x_n, y_n)\\
k_2 &= h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_1}{2}\right)\\
k_3 &= h\,f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{k_2}{2}\right)\\
k_4 &= h\,f(x_n + h,\ y_n + k_3)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 (Order 4) को चार बिंदुओं पर प्रथम कोटि अवकलज (First Order Derivative) $f(x, y)$, के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। विधि स्व–प्रारंभ होती है। इस विधि में त्रुटि का अनुमान लगभग (Roughly) निम्न रूप से दिया जा सकता है,

$$|y(x_n) - y_n| \approx \frac{y_n^* - y_n}{15} \tag{5.39}$$

जहाँ y_n^* और y_n क्रमशः $\frac{h}{2}$ और h, पर गणना किए गए अनुमानित मान हैं, क्योंकि चरण आकार और $y(x_n)$ सही समाधान है।

नोट : विशेष रूप से, अवलकन समीकरण $y' = F(x)$ के विशेष रूप के लिए, केवल x के फलन के लिए, रून्गें–कुट्टा विधि x_n से x_{n+1} तक सिम्पसन संख्यात्मक समाकलन (Simpson's One Third Formula for Numerical Integration) एक–तिहाई सूत्र में परिवर्तित हो जाती है। फिर,

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)dx$$

या,
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[F(x_n) + 4F(x_n + \frac{h}{2}) + F(x_n + h)]$$

रून्गें–कुट्टा विधियों का व्यापक रूप से उपयोग विशेष रूप से चरण $x_1, x_2, x_3, ...,$ पर शुरुआती मान खोजने के लिए किया जाता है, क्योंकि इसमें उच्च कोटि अवकलज के मूल्यांकन की आवश्यकता नहीं होती है। कंप्यूटर प्रोग्राम (Computer Program) में भी इस विधि को लागू करना आसान होता है।

उदाहरण 5.20 : रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 से $y(0.1)$ और $y(0.2)$ के मानों की, निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या के लिए पांच महत्वपूर्ण अंकों तक गणना करें।

$$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$$

हलः हमारे पास $\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$ है।

$$\therefore f(x,\ y) = x + y, \quad h = 0.1, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1$$

रून्गें–कुट्टा विधि द्वारा,

$$y(0.1) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

जहाँ,

$$k_1 = h\ f(x_0,\ y_0) = 0.1 \times (0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 \times (0.05 + 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = h\ f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 \times (0.05 + 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = h\ f\ (x_0 + h,\ y_0 + k_3) = 0.1 \times (0.1 + 1.1105) = 0.12105$$

$$\therefore y\ (0.1) = 1 + \frac{1}{6}\ [0.1 + 2 \times (0.11 + 0.1105 + 0.12105] = 1.130516$$

इस प्रकार, $x_1 = 0.1, \quad y_1 = 1.130516$

जहाँ,

$$y\ (0.2) = y\ (0.1) + \frac{1}{6}\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h\ f\ (x_1,\ y_1) = 0.1 \times (0.1 + 1.11034) = 0.121034$$

$$k_2 = h\ f\left(x_1 + \frac{h}{2},\ y_1 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1\ (0.15 + 1.17086) = 0.132086$$

$$k_3 = h \quad f\left(x_1 + \frac{h}{2}, \quad y_1 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 \quad (0.15 + 1.17638) = 0.132638$$

$$k_4 = h \quad f(x_1 + h, \quad y_1 + k_3) = 0.1 \quad (0.2 + 1.24298) = 0.144298$$

$$y_2 = y \quad (0.2) = 1.11034 + \frac{1}{6} \quad [0.121034 + 2 \quad (0.132086 + 0.132638) + 0.144298] = 1.2428$$

उदाहरण 5.21 : रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 का उपयोग करके निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या के लिए चरण लंबाई $h = 0.1$ लेकर , $y\,(1.1)$ और $y\,(1.2)$ का मूल्यांकन करें :

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \; y(1) = 0$$

हल: प्रारंभिक मान समस्या के लिए,

$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\; y(x_0) = y_0$; रून्गें–कुट्टा विधि कोटि 4 की इस प्रकार होगी,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \quad f(x_n, \; y_n)$$

$$k_2 = h \quad f\left(x_n + \frac{h}{2}, \quad y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

जहां,

$$k_3 = h \quad f\left(x_n + \frac{h}{2}, \quad y_n + \frac{k^2}{2}\right)$$

$k_4 = h \quad f(x_n + h, \quad y_n + k_3)$; n = 0, 1, 2,... के लिए

दी गई समस्या के लिए, $f(x, y) = x^2 + y^2, x_0 = 1, y_0 = 0, h = 0.1.$

इस प्रकार,

$$k_1 = h \quad f(x_0, \; y_0) = 0.1 \times (1^2 + 0^2) = 0.1$$

$$k_2 = h \quad f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \quad y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1 \times [(1.05)^2 + (0.5)^2] = 0.13525$$

$$k_3 = h \quad f\left(x_0 + \frac{h}{2}, \quad y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1 \times [(1.05)^2 + (0.05525)^2] = 0.13555$$

$$k_4 = h \quad f(x_0 + h, \quad y_0 + k_3) = 0.1 \times [(1.1)^2 + (0.13555)^2] = 0.12283$$

$$\therefore y_1 = y_0 + \frac{1}{6} \quad (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= \frac{1}{6} \quad (0.1 + 0.2705 + 0.2711 + 0.12283) = \frac{1}{6} \times 0.76443$$

$$= 0.127405$$

$y\,(1.2)$ के लिए,

$$k_1 = 0.1\ [(1.1)^2 + (0.11072)^2] = 0.12226$$
$$k_2 = 0.1\ [(1.15)^2 + (0.17183)^2] = 0.135203$$
$$k_3 = 0.1\ [(1.15)^2 + (0.17832)^2] = 0.135430$$
$$k_4 = 0.1\ [(1.2)^2 + (0.24615)^2] = 0.150059$$
$$\therefore\ y_2 = y\ (1.2) = 0.11072 + \frac{1}{6}\ (0.12226 + 0.270406 + 0.270860 + 0.150069)$$
$$= 0.24631$$

एल्गोरिदम : रून्गें–कुट्टा विधि क्रम 2 के द्वारा प्रथम कोटि अवकलन समीकरण का gy %$y\ (x_0)$ के साथ $y' = f(x)$ ।

चरण 1: $f(x, y)$ को परिभाषित करें।

चरण 2: x_0, y_0, h, x_f को पढ़े [h चरण आकार है, x_f अंतिम x है।]

चरण 3: चरण 4 से चरण 11 तक दोहराएँ जबतक $x_1 > x_f$ है।

चरण 4: $k_1 = f(x_0, y_0)$ की गणना करें।

चरण 5: $y_1 = y_0 + hk_1$ की गणना करें।

चरण 6: $x_1 = x_0 + h$ की गणना करें।

चरण 7: $k_2 = f(x_1, y_1)$ की गणना करें।

चरण 8: $y_1 = y_0 + h \times (k_1 + k_2)/2$ की गणना करें।

चरण 9: x_1, y_1 को लिखें।

चरण 10: $x_0 = x_1$ रखें।

चरण 11: $y_0 = y_1$ रखें।

चरण 12: समाप्त।

एल्गोरिदम : रून्गें–कुट्टा विधि कोटि 4 के द्वारा $y_1 = f(x,\ y),\ \ y(x_0) = y_0$ का समाधान।

चरण 1: $f(x, y)$ को परिभाषित करें।

चरण 2: x_0, y_0, h, x_f को पढ़ें।

चरण 3: .चरण 4 से चरण 16 तक दोहराएँ जबतक $x_1 > x_f$ है।

चरण 4: $k_1 = h\, f(x_0, y_0)$ की गणना करें।

चरण 5: $x = x_0 + \frac{h}{2}$ की गणना करें।

चरण 6: $y = y_0 + \frac{k_1}{2}$ की गणना करें।

चरण 7: $k_2 = h\, f(x, y)$ की गणना करें।

चरण 8: $y = y_0 + \frac{k_2}{2}$ की गणना करें।

चरण 9: $k_3 = h\,f(x, y)$ की गणना करें।

चरण 10: $x_1 = x_0 + h$ की गणना करें।

चरण 11: $y = y_0 + k_3$ की गणना करें।

चरण 12: $k_4 = h\,f(x_1, y)$ की गणना करें।

चरण 13: $y_1 = y_0 + (k_1 + 2\,(k_2 + k_3) + k_4)/6$ की गणना करें।

चरण 14: x_1, y_1 को लिखें।

चरण 15: $x_0 = x_1$ रखें।

चरण 16: $y_0 = y_1$ रखें।

चरण 17: समाप्त।

बहु–चरणीय विधि (Multistep Methods)

हमने देखा है कि प्रत्येक चरण में समाधान खोजने के लिए, टेलर श्रेणी विधि और रून्गें–कुट्टा विधियों के लिए कई अवकलजों के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। अब हम बहु–चरणीय (Multistep) विधि विकसित करेंगे, जिसमें प्रत्येक चरण में केवल एक अवकलज के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है लेकिन रून्गें–कुट्टा विधि पर टेलर श्रेणी की स्व–प्रारंभ के विपरीत, बहु–चरणीय विधि पिछले एक से अधिक कई बिंदुओं के समाधानों का उपयोग करती हैं।

मान लीजिए कि y और y^1 के मानों का पहले से ही समान दूरी की बिंदुओं $x_0, x_1, \ldots x_n$ में स्व–प्रारंभ विधियों द्वारा मूल्यांकन किया गया है। अब हम विभिन्न समीकरणों का समाकलन करते हैं,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y),\ \text{से}\ \ x_n\ \ to\ \ x_{n+1}\text{तक,}$$

अर्थात,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ \ y)dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,\ \ y(x))\ \ dx$$

दाहिने हाथ की ओर समीकरण का समाकलन द्वारा मूल्यांकन करने के लिए, हम $f(x, y)$ को x का फलन के रूप में मानते हैं और इसे एक प्रक्षेप या अंतर्वेशन बहुपद (Interpolating Polynomial) द्वारा प्रतिस्थापित (Replace) करते हैं, अर्थात, $(m+1)$ अंकों $x_n, x_{n+1}, x_{n-2}, \ldots x_{n-m}$, का न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन (Newton's Backward Difference Interpolation) द्वारा उपयोग करते हैं।

टिप्पणी

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k}, \text{ जहां } s = \frac{x - x_n}{h}$$

$$\binom{-s}{k} = -s(-s-1)(-s-2)\ldots(-s-k+1)\cdot\frac{1}{k!}$$

$f(x, y)$ के स्थान पर $p_m(x)$ को प्रतिस्थापित करते है, हमे प्राप्त होगा,

$$y_{n+1} = y_n + h\int_0^1 \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_{n-k} \quad ds$$

$$= y_n + h \ [\gamma f_n + \gamma_1 \Delta f_{n-1} + \gamma_2 \Delta^2 f_{n-2} + \ldots + \gamma_m \Delta f_{n-m}]$$

जहां, $\quad \gamma_k = (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} \ ds$

गुणांक γ_k की आसानी से गणना की जा सकती है, जिससे हमे मिलेंगे,

$$\gamma_0 = 1, \gamma_1 = \frac{1}{2}, \gamma_2 = \frac{5}{12}, \gamma_3 = \frac{3}{8}, \gamma_4 = \frac{251}{720}, \text{ इत्यादि।}$$

$m = 3$ लेने पर, उपरोक्त सूत्र देता है,

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{n-3}\right]$$

फलनों के मानों के संदर्भ में अंतरों की अभिव्यक्ति को प्रतिस्थापित करके, हमे मिलेंगे

$$\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}, \ \Delta^2 f_{n-2} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\Delta^3 f_{n-3} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

हम व्यवस्थित करते हैं,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \qquad (5.40)$$

इसे एडम्स–बैशफोर्थ (Adams-Bashforth) के कोटि 4 के सूत्र के रूप में जाना जाता है। इस सूत्र की स्थानीय त्रुटि होगी,

$$E = h^5 f^{iv}(\xi)\int_0^1 \binom{s+3}{4} ds \qquad (5.41)$$

समाकलन कलन के मध्य मान प्रमेय का उपयोग करके,

$$E = h^5 f^{iv}(\eta)\int_0^1 \binom{s+3}{4} ds$$

या, $$E = h^5 f^{iv} \ (\eta).\frac{251}{720} \qquad (5.42)$$

एडम्स–बैशफोर्थ के कोटि 4 के सूत्र में चार शुरुआती मानों की आवश्यकता होती है, अर्थात, अवकलनों f_3, f_2, f_1 और f_0 । यह एक बहु–चरणीय (Multistep) विधि है।

पूर्वसूचक–सुधारक विधियाँ (Predictor-Correction Methods)

ये विधियाँ बहु–चरणीय (Multistep) संख्यात्मक समाकलन की जोड़ी का उपयोग करती हैं। पहला पूर्वसूचक सूत्र (Predictor Formula) है, जो एक खुले प्रकार का स्पष्ट सूत्र है, जिसको समाकलन में अंतर्वेशन (Interpolation) सूत्र का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है, जो बिन्दुओं $x_n, x_{n-1},...,x_{n-m}$ पर अंतर्वेश होती है। दूसरा है, सुधारक सूत्र (Corrector Formula) जिसको अंतर्वेशन (Interpolation) सूत्र से प्राप्त किया जाता है, जो समाकलन में बिन्दुओं $x_{n+1}, x_n, ..., x_{n-p}$ पर अंतर्वेश होती है।

यूलर पूर्वसूचक–सुधारक सूत्र (Euler's Predictor-Corrector Formula)

इस प्रकार का सरलतम (Simple) सूत्र एक सूत्र की जोड़ी होती है

$$y_{n+1}^{(p)} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \tag{5.43}$$

$$y_{n+1}^{(c)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})] \tag{5.44}$$

वांछित सटीकता (Desired Accuracy) तक समस्या के समाधान को निर्धारित करने के लिए सुधारक सूत्र (Corrector Formula) को पुनरावृत्त विधि से नियोजित किया जा सकता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

चरण 1. समीकरण (5.39) का उपयोग करके $y_{n+1}^{(0)}$ की गणना करें,

अर्थात् $y_{n+1}^{(0)} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$

चरण 2. समीकरण (5.40) का उपयोग करके $y_{n+1}^{(k)}$ की गणना करें,

अर्थात्, $y_{n+1}^{(k)} = y_n + \dfrac{h}{2}\; [f(x_n,\; y_n) + f(x_{n+1},\; y_{n+1}^{(k-1)})], K = 1,\; 2,\; 3,...,$ के लिए

गणना तब तक जारी रखते है जब तक कि नीचे दिया गया नियम पूरा नहीं हो जाता है,

$$\left|\frac{y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}}{y_{n+1}^{(k)}}\right| < \varepsilon \tag{5.45}$$

जहां ε निर्धारित सटीकता (Prescribed Accuracy) है।

यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि हासिल की गई सटीकता चरण आकार h और स्थानीय त्रुटि पर निर्भर करती है । पूर्वसूचक और सुधारक सूत्र में स्थानीय त्रुटि (Local Error) होगी,

$$\frac{h^2}{2}y''(\eta_1) \text{ और } -\frac{h^3}{12}y'''(\eta_2), \text{ क्रमशः।}$$

मिल्ने का पूर्वसूचक–सुधारक सूत्र (Milne's Predictor-Corrector Formula)

आमतौर पर इस्तेमाल किया जाने वाला पूर्वसूचक सुधारक सूत्र चौथे कोटि का मिल्ने का पूर्वसूचक सुधारक सूत्र होता है। यह निम्न का उपयोग पूर्वसूचक–सुधारक सूत्र के रूप में करता है।

टिप्पणी

$$y_{n+1}^{(p)} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}^*)$$

$$y_{n+1}^{(c)} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})] \qquad (5.46)$$

इन सूत्रों में स्थानीय त्रुटियां क्रमशः होती हैं,,

$$\frac{14}{45}h^5 y^{(v)}(\xi_1) \text{ और } -\frac{1}{90}h^5 y^{(v)}(\xi_2) \qquad (5.47)$$

उदाहरण 5.22 : टेलर श्रेणी विधि समाधान द्वारा समस्या $\frac{dy}{dx} = xy + 1,\ y(0) = 1$ की x^5 पदों तक गणना करें और फिर $y\,(0.1), y\,(0.2)$ और $y\,(0.3)$ के मानों की गणना करें । $y\,(0.4)$ और $y\,(0.5)$ की गणना करने के लिए मिल्ने पूर्वसूचक–सुधारक विधि का उपयोग करें।

हल: हमारे पास $y' = xy + 1, y\,(0) = 1, \therefore y'(0) = 1$ है,

क्रमिक रूप से अवकलनों के बाद, हमें मिलता है,

$$\begin{array}{lll} y''(x) = xy' + y & \therefore y''(0) & = 1 \\ y'''(x) = xy'' + y' & \therefore y'''(0) & = 2 \\ y^{(iv)}(x) = xy''' + 3y'' & \therefore y^{(iv)}(0) & = 3 \\ y^{(v)}(x) = xy^{(iv)} + 4y''' & \therefore y^{(iv)}(0) & = 8 \end{array}$$

इस प्रकार टेलर श्रेणी विधि समाधान होगा,

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \frac{x^4}{4!}y^{iv}(0) + \frac{x^5}{5!}y^{(v)}(0) \qquad (5.48)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\times 2 + \frac{x^4}{4!}\times 3 + \frac{x^5}{5!}\times 8$$

$$\therefore y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} \qquad (5.49)$$

$$\therefore\ y\ \ (0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{3} + \frac{0.0001}{8} + \frac{0.00001}{15}$$

$$= 1.1053$$

$$y(0.2) = 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{3} + \frac{0.0016}{8} + \frac{0.00032}{15}$$

$$= 1.22288$$

$$y\ \ (0.3) = 1 + 0.3 + \frac{0.09}{2} + \frac{0.027}{3} + \frac{0.0081}{8} + \frac{0.00243}{15}$$

$$= 1.35526$$

मिल्ने पूर्वसूचक–सुधारक सूत्र द्वारा, हम $y'(0.1)$, $y'(0.2)$ और $y'(0.3)$ की गणना करेंगे

$$y'(0.1) = 0.1\times 1.1053 + 1 = 1.11053$$

$$y'(0.2) = 0.2\times 1.22288 + 1 = 1.244576$$

$$y'(0.3) = 0.3\times 1.35526 + 1 = 1.40658$$

पूर्वसूचक सूत्र देता है $y_4 = y(0.4) = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3)$ (5.50)

$$\therefore y_4^{(0)} = 1 + \frac{4 \times 0.1}{3}(2 \times 1.11053 - 1.24458 + 2 \times 1.40658)$$

$$= 1.50528 \qquad \therefore y'_4 = 1 + 0.4 \times 1.50528 = 1.602112$$

सुधारक सूत्र देता है, $y_4^{(1)} = y_2 + \frac{h}{3}(y'_2 + 4y'_3 + y'_4)$ (5.51)

$$y = (0.4) = 1.22288 + \frac{0.1}{3}(1.24458 + 4 \times 1.40658 + 1.60211)$$

$$= 1.22288 + 0.28243$$

$$= 1.50531$$

अपनी प्रगति जांचिए

6. क्रमिक सन्निकटनों के लिए पिकार्ड विधि को समझाइए।
7. यूलर विधि को परिभाषित करें।
8. संशोधित यूलर विधि क्या है?
9. अवकलन खोजने की रून्गें–कुट्टा विधि पर विस्तृत प्रकाश डालें ।
10. पूर्वसूचक –सुधारक विधि से क्या अभिप्राय है?

5.4 संख्यात्मक अवकलन पर आधारित विधियां

संख्यात्मक अवकलन एक फलन $f(x)$ के अवकलजों की गणना करने की प्रक्रिया है जब फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन फलन का मान केवल दिए गए तर्कों के एक समुच्चय $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ पर ज्ञात होता है। अवकलजों को खोजने के लिए, हम एक उपयुक्त अंतर्वेशन (Interpolation) बहुपद का उपयोग करते हैं और फिर इसके अवकलजों को फलन के अवकलजों के लिए सूत्र के रूप में उपयोग करते हैं। इस प्रकार समान दूरी के बिंदुओं की तालिका की शुरुआत के पास एक बिंदु पर अवकलजों की गणना के लिए, न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र (Newton's Forward Difference Interpolation Formula) का उपयोग किया जाता है, जबकि तालिका के अंत के पास बिंदु पर अवकलजों की गणना के लिए न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र (Newton's Backward Difference Interpolation Formula) का उपयोग किया जाता है। इसी प्रकार, तालिका के मध्य में बिंदु पर अवकलजों की गणना के लिए, केंद्रीय अंतर अंतर्वेशन सूत्र (Central Difference Interpolation Formula) के अवकलजों का उपयोग किया जाता है। हालाँकि, यदि तालिका के तर्क असमान दुरी पर हैं, तो लैग्रांज प्रक्षेप या अंतर्वेशन बहुपद (Interpolating Polynomial) के अवकलजों का उपयोग फलन के अवकलजों की गणना के लिए किया जाता है।

न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र का उपयोग करते हुए अवकलन माना कि, एक अज्ञात फलन $y = f(x)$ का मान, x के समान दूरी के मानों $x_0, x_1, \ldots, x_n$ वाले एक समुच्चय के लिए ज्ञात है, जहाँ, $x_r = x_0 + r_n$। न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र है,

$$\varphi(u) = y_0 + u \;\Delta\; y_0 + \frac{u(u-1)}{2\;!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3\;!}\Delta^3 y_0 + ... + \frac{u(u-1)(u-2)...(u-n+1)}{n\;!}\Delta^n y_0$$

जहाँ, $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ (5.52)

टिप्पणी

अवकलज $\dfrac{dy}{dx}$ का मूल्यांकन इस प्रकार किया जा सकता है,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\varphi(u)\} = \frac{d\varphi}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d\varphi}{du}$$

इसलिए, $$y'(x) \simeq \frac{1}{h}\left[\Delta y_o + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_o + \frac{3u^2-6u+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2u^3-9u^2+11u-3}{12}\Delta^4 y_0 + ...\right] \quad (5.53)$$

इस प्रकार से, $y''(x) \simeq \dfrac{1}{h^2}\phi''(u)$

अथवा $$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (u-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6u^2-18u+11}{12}\Delta^4 y_0 + ...\right] \quad (5.54)$$

तालिका प्रारंभ के पास x के मान के लिए, सर्वप्रथम $u = (x - x_o)/h$ की गणना की जाती है और तब समीकरणों (5.52) तथा (5.53) का उपयोग $f'(x)$ तथा $f''(x)$ की गणना के लिए किया जा सकता है। सारणीबद्ध बिंदु x_0 पर, u का मान शून्य है और अवकलजों के सूत्र इस प्रकार दिये गए हैं–

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - ...\right] \quad (5.55)$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + ...\right] \quad (5.56)$$

न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र का उपयोग करते हुए अवकलन

किसी फलन के समान दूरी के मानों की तालिका के लिए न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र होगा,

$$\varphi(v) = y_n + v\;\;\nabla y_n + \frac{v(v+1)}{2\;!}\nabla^2 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)}{3\;!}\nabla^3 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4\;!}\nabla^4 y_n + ...$$
$$+ \frac{v(v+1)...(v+n-1)}{n\;!}\nabla^n y_n$$

जहां $v = \dfrac{x - x_n}{h}$

(5.57)

उपरोक्त सूत्र का अवकलन करके अवकलजों $\dfrac{dy}{dx}$ और $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, को निम्न रूप में लिखा जाता हैं,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{2v+1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{3v^2+6v+2}{6}\nabla^3 y_n + \frac{2v^3+9v^2+11v+3}{12}\nabla^4 y_n + ...\right] \quad (5.58)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + (v+1)\nabla^3 y_n + \frac{6v^2+18v+11}{12}\nabla^4 y_n + ...\right] \quad (5.59)$$

तालिका के अंत में दिए गए x के लिए, $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मानों की गणना पहले $v = (x - x_n)/h$ की गणना और उपरोक्त सूत्रों का उपयोग करके की जाती है। सारणीबद्ध बिंदु x_n, पर अवकलजों को निम्न रूप से लिखा जाता है,

$$y'(x_n) = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \frac{1}{4}\nabla^4 y_n + ...\right] \quad (5.60)$$

$$y''(x_n) = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + ...\right] \quad (5.61)$$

उदाहरण 5.23 : $f'(2.1)$, $f''(2.1)$, $f'(2.0)$ और $f''(2.0)$ के मानों की गणना करें जब $f(x)$ स्पष्ट रूप से पता नहीं हो, लेकिन मानों की निम्न तालिका दी गई हो।

x	$f(x)$
2.0	0.69315
2.2	0.78846
2.4	0.87547

हलः चूंकि बिंदु समान दूरी पर हैं, इसलिए हम परिमित या सीमित अंतर तालिका बनाते हैं।

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2.0	0.69315		
		9531	
2.2	0.78846		−83
		8701	
2.4	0.87547		

$x = 2.1$, पर अवकलजों की गणना के लिए हमारे पास होगा,

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h}[\Delta f_0 + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 f_0] \quad \text{और} \quad f''(x) \simeq \frac{1}{h^2}\Delta^2 f_0$$

$$u = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2.1-2.0}{0.2} = 0.5$$

$$\therefore \quad f'(2.1) = \frac{1}{0.2}\left[0.09531 + \frac{2\times 0.5-1}{2}\Delta^2 f_0\right] = 0.4765$$

$$f''(2.1) = \frac{1}{(0.2)^2}\times(-0.00083) = -0.21$$

$f'(2.0)$ का मान होगा,

टिप्पणी

$$f'(2.0) = \frac{1}{0.2}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right]$$
$$= \frac{1}{0.2}\left[0.09531 + \frac{1}{2}\times 0.00083\right]$$
$$= \frac{0.09572}{0.2} = 0.4786$$
$$f''(2.0) = \frac{1}{(0.2)^2}\times(-0.0083)$$
$$= -0.21$$

उदाहरण 5.24 : फलन $f(x)$ के लिए जिसका मान नीचे तालिका में दिया गया है। $f'(1)$, $f''(1)$, $f'(5.0)$, $f''(5.0)$. के मानों की गणना करें।

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	7.4036	7.7815	8.1291	8.4510	8.7506	9.0309

हलः चूँकि $f(x)$ में बिंदुओं समान दूरी पर दी गई है, हम न्यूटन अंतर्वेशन बहुपद पर आधारित अवलकन सूत्र में उपयोग की जाने वाली परिमित अंतर तालिका बनाते हैं।

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
1	7.4036					
		0.3779				
2	7.7815		−303			
		0.3476		46		
3	8.1291		−257		−12	
		0.3219		34		8
4	8.4510		−223		−4	
		0.2996		30		
5	8.7506		−193			
		0.2803				
6	9.0309					

$f'(1)$ और $f''(1)$ की गणना करने के लिए, हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन पर आधारित अवकलजों सूत्रों का उपयोग दिए गए सारणीबद्ध बिंदु पर करते हैं,

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 f_0\right]$$
$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0\right]$$
$$\therefore f'(1) = \frac{1}{1}\left[0.3779 - \frac{1}{2}\times(-0.0303) + \frac{1}{3}\times 0.0046 - \frac{1}{4}\times(-0.0012) + \frac{1}{5}\times 0.0008\right]$$
$$= 0.39507$$
$$f''(1) = \left[0.0303 - 0.0046 + \frac{11}{12}\times(-0.0012) - \frac{5}{6}\times 0.0008\right]$$
$$= -0.0367$$

इसी तरह $f'(5.0)$ और $f''(5.0)$, का मूल्यांकन करने के लिए हम निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करते हैं,

$$f'(x_n) = \frac{1}{h}\left[\nabla f_n + \frac{1}{2}\nabla^2 f_n + \frac{1}{3}\nabla^3 f_n + \frac{1}{4}\nabla^4 f_n + \frac{1}{5}\nabla^5 f_n\right]$$

$$f''(x_n) = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \frac{11}{12}\nabla^4 f_n + \frac{5}{6}\nabla^5 f_n\right]$$

$$f'(5) = \left[0.2996 + \frac{1}{2}(-0.0223) + \frac{1}{3}\times 0.0034 + \frac{1}{4}(-0.0012)\right]$$

$$= 0.2893$$

$$f''(5) = [-0.0223 + 0.0034 + \frac{11}{12}\times 0.0012]$$

$$= -0.0178$$

उदाहरण 5.25 : निम्न सारणीबद्ध मानों द्वारा दिए गए फलन $y = f(x)$ के लिए $y'(0)$, $y''(0.0)$, $y'(0.02)$ और $y''(0.02)$ के मानों की गणना करें।

x	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
y	0.00000	0.10017	0.20134	0.30452	0.41075	0.52110

हल: चूँकि x के मान समान दूरी के बिंदुओं की तालिका में आरंभ के पास है, जिसके लिए अवकलजों की गणना करनी है, हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र पर आधारित अवकलन सूत्र का उपयोग करते हैं। हम पहले परिमित अंतर तालिका बनाते है।

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.0	0.00000				
		0.10017			
0.05	0.10017		100		
		0.10117		101	
0.10	0.20134		201		3
		0.10318		104	
0.15	0.30452		305		3
		0.10623		107	
0.20	0.41075		412		
		0.11035			
0.25	0.52110				

$y'(0,0)$ के मूल्यांकन के लिए हम निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right]$$

$$\therefore \quad y'(0.0) = \frac{1}{0.05}\left(0.10017 - \frac{1}{2}\times 0.00100 + \frac{1}{3}\times 0.00101 - \frac{1}{4}\times 0.00003\right)$$

$$= 2.00000$$

$y''(0,0)$ के मूल्यांकन के लिए, हम निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0\right)$$
$$= \frac{1}{(0.05)^2}\left(0.00100 - 0.00101 + \frac{11}{12}\times 0.00003\right)$$
$$= 0.007$$

$y'(0.02)$ और $y''(0.02)$, के मूल्यांकन के लिए, हम निम्न सूत्रों का उपयोग करते हैं, जिसमें $u = \frac{0.02-0.00}{0.05} = 0.4$ हैं।

$$y'(0.02) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2u^3-9u^2+11u-3}{12}\Delta^4 y_0\right]$$
$$y''(0.02) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \frac{6(u-1)}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{6u^2-18u+11}{12}\times\Delta^4 y_0\right]$$
$$\therefore\quad y'(0.02) = \frac{1}{0.05}\left[0.10017 + \frac{2\times 0.4-1}{2}\times 0.00100 + \frac{3\times(0.4)^2 - 6\times 0.4+2}{6}\times 0.00101 + \frac{2\times 0.4^3 - 9\times 0.4^2 + 11\times 0.4 - 3}{12}\times 0.00003\right]$$
$$= 4.00028$$

$$y''(0.02) = \frac{1}{(0.05)^2}\left[0.00100 - 0.00101\times(-0.6) + \frac{6\times 0.16 - 18\times 0.4+11}{12}\times 0.00003\right]$$
$$= 0.800$$

उदाहरण 5.26 : निम्न तालिका में दिए गए फलन $f(x)$ के लिए संख्यात्मक अवकलन सूत्रों द्वारा $f'(6.0)$ और $f''(6.3)$ की गणना करें।

x	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
$f(x)$	−0.1750	−0.1998	−0.2223	−0.2422	−0.2596

हल: हम पहले परिमित अंतर तालिका बनाते हैं,

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
6.0	−0.1750			
		−248		
6.1	−0.1998		23	
		−225		3
6.2	−0.2223		26	
		−199		−1
6.3	−0.2422		25	
		−174		
6.4	−0.2596			

$f'(6.0)$ के मूल्यांकन के लिए, हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र को अवकलन करके प्राप्त सूत्र का उपयोग करते हैं,

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right]$$

$$\therefore \quad f'(6.0) = \frac{1}{0.1}\left[-0.0248 - \frac{1}{2}\times 0.0023 + \frac{1}{3}\times 0.0003\right]$$
$$= 10[-0.0248 - 0.00115 + 0.0001]$$
$$= -0.2585$$

$f''(6.3)$ का मूल्यांकन करने के लिए, हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र को अवकलन करके प्राप्त सूत्र का उपयोग करते हैं। इसे निम्न रूप में लिखा जाता है,

$$f''(x_n) = \frac{1}{h^2}[\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n]$$

$$\therefore \quad f''(6.3) = \frac{1}{(0.1)^2}[0.0026 + 0.0003] = 0.29$$

उदाहरण 5.27 : x और y के मानों के निम्न सारणी पर उपयुक्त संख्यात्मक अवलकन सूत्र का उपयोग करके $y'(1.00)$ और $y''(1.00)$ के मानों की गणना करें।

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20
y	1.0000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544

हल: अवकलजों की गणना के लिए, हम न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र का अवकलन करके प्राप्त सूत्र का उपयोग करते हैं, जिसे निम्न रूप में लिखा जाता है,

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]$$
$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]$$

अब, हम परिमित अंतर तालिका बनाते हैं,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.00	1.00000				
		2470			
1.05	1.02470		−59		
		2411		5	
1.10	1.04881		−54		−2
		2357		3	
1.15	1.07238		−51		
		2306			
1.20	1.09544				

इस प्रकार $x_0 = 1.00$ से हमारे पास है,

$$y'(1.00) = \frac{1}{0.05}\left(0.02470 + \frac{1}{2}\times 0.00059 + \frac{1}{3}\times 0.00005 + \frac{1}{4}\times 0.00002\right)$$
$$= 0.502$$
$$y''(1.00) = \frac{1}{(0.05)^2}\left(-0.00059 - 0.00005 - \frac{11}{12}\times 0.00002\right)$$
$$= -0.26$$

टिप्पणी

उदाहरण 5.28 : निम्न तालिका के मानों का उपयोग करके, $f'(x)$ का बहुपद (Polynomial) निरूपण ज्ञात कीजिए और फिर $f'(0.5)$ की गणना कीजिए।

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	15	40

हलः चूंकि x के मान समान रूप से दूरी पर हैं, इसलिए हम $f'(x)$ और $f'(0.5)$ की गणना करने के लिए न्यूटन अग्रवर्ती अंतर बहुपद का उपयोग करेंगे। सबसे पहले हम परिमित अंतर तालिका बनाते हैं जो नीचे दी गई है **:**

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	1			
		2		
1	3		10	
		12		3
2	15		13	
		25		
3	40			

$x_0 = 0,$ लेने पर, हमारे पास $u = \frac{x - x_0}{h} = x$ होगा। इस प्रकार न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन हमें देता है,

$$f = f_0 + u\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

अर्थात्, $$f(x) \approx 1 + 2x + \frac{x(x-1)}{2}\times 10 + \frac{x(x-1)\ \ (x-2)}{6}\times 3$$

या $$f(x) = 1 + 3x - \frac{13}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

$$\therefore \quad f'(x) = 3 - 13x + \frac{3}{2}x^2$$

और $$f'(0.5) = 3 - 13\times 0.5 + \frac{3}{2}\times(0.5)^2 = -3.12$$

उदाहरण 5.29 : एक शहर की जनसंख्या निम्नलिखित तालिका में दी गई है। वर्ष 2001 और 1995 में जनसंख्या में वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए।

वर्ष (Year) x	1961	1971	1981	1991	2001
जनसंख्या (Population) y	40.62	60.80	79.95	103.56	132.65

हलः चूंकि जनसंख्या की वृद्धि दर $\frac{dy}{dx}$ है। हमें $x=$ 2001 और $x=$ 1995 पर $\frac{dy}{dx}$, की गणना करनी है। इसके लिए हम न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन द्वारा अनुमानित y पर अवकलज के लिए सूत्र पर विचार करते हैं,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{h}\left[\nabla y_n+\frac{2u+1}{2}\nabla^2 y_n+\frac{3u^2+6u+2}{6}\nabla^3 y_n+\frac{2u^3+9u^2+11u+3}{12}\nabla^4 y_n+...\right]$$

टिप्पणी

जहां $u=\dfrac{x-x_n}{h}$

इसके लिए हम नीचे दी गई परिमित अंतर तालिका का निर्माण करते हैं :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1961	40.62				
		20.18			
1971	60.80		−1.03		
		19.15		5.49	
1981	79.95		4.46		−4.47
		23.61		1.02	
1991	103.56		5.48		
		29.09			
2001	132.65				

$x=2001$ के लिए, $u=\dfrac{x-x_n}{h}=0$

$$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{2001}=\frac{1}{10}\left[29.09+\frac{1}{2}\times 5.48+\frac{1}{3}\times 1.02+\frac{1}{4}\times(-4.47)\right]$$
$$=3.105$$

$x=1995$ के लिए, $u=\dfrac{1995-1991}{10}=0.4$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1995}=\frac{1}{10}\left[23.61+\frac{1.8}{2}\times 4.46+\frac{3\times 0.16+6\times 0.4+2}{6}\times 5.49\right]$$
$$=3.21$$

अपनी प्रगति जांचिए

11. संख्यात्मक अवलकन प्रक्रिया को परिभाषित करें।
12. न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र को लिखें।
13. न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र को लिखें।

5.5 संख्यात्मक समाकलन पर आधारित विधियां

एक निश्चित समाकलन का मूल्यांकन तब नहीं किया जा सकता है जब तक समाकल्य (Integrand) $f(x)$ समाकलनीय (Integrable) नहीं होता है, साथ ही जब तक फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन केवल फलन के मान x की एक सीमित संख्या के मान पर ज्ञात होते है। हालांकि, संख्यात्मक विधियों को लागू करके समाकलन के

मान को संख्यात्मक रूप से निर्धारित किया जा सकता है। यहाँ निम्नलिखित सूत्र के आधार पर एक निश्चित समाकलन के मूल्यांकन को प्राप्त करने के लिए
दो प्रकार के संख्यात्मक विधि हैं।

टिप्पणी

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{5.62}$$

उन्हें न्यूटन–कोट्स चतुर्भुज (Newton-Cotes Quadrature) और गॉउसियन चतुर्भुज (Gaussian Quadrature) कहा जाता है। हम सबसे पहले अपना ध्यान न्यूटन–कोट्स चतुर्भुज पर केंद्रित करते हैं, जो बहुपद अंतर्वेशन सूत्रों (Polynomial Interpolation Formula) को समाकलनीय करने पर आधारित है। इस चतुर्भुज को स्वतंत्र चर x के समान दूरी रूप के समाकल्य (Integrand) के मानों की एक तालिका की आवश्यकता होती है।

संख्यात्मक समाकलन का समलम्ब चतुर्भुजीय सूत्र (Trapezoidal Formula of Numerical Integration)

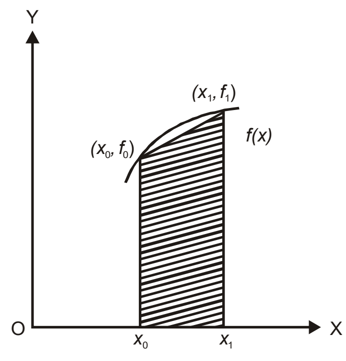
समीकरण में $n = 1$ लेने पर, हमें समलम्ब चतुर्भुजीय सूत्र (Trapezoidal Formula) मिलता हैं,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\left[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0\right]$$

चूंकि उच्चतर कोटि के अन्य सभी अंतर अनुपस्थित होते हैं।
Δf_0 को $f_1 - f_0$, से बदलकर हमारे पास होगा,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + f_1] \tag{5.63}$$

इसे संख्यात्मक समाकलन का समलम्ब चतुर्भुजीय सूत्र कहा जाता है।
इस सूत्र की ज्यामितीय व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है कि, फलन $f(x)$ सीमा x_0 से x_1 के बीच एक निश्चित समाकलन, जो कि बिंदु (x_0, f_0) और (x_1, f_1), को जोड़ने वाली जीवा, x-अक्ष और निर्देशांक $x = x_0$ और $x = x_1$ में शामिल होने वाले क्षेत्र से घिरा समलम्ब चतुर्भुजीय क्षेत्र का अनुमानित मान के बराबर होता है । इसे चित्र 5.2 में दिखाया गया है।



चित्र 5.2 समलम्ब चतुर्भुजीय क्षेत्र

इस प्रकार, वक्र $y = f(x)$ के तहत क्षेत्र को जीवा (Chord) के बिंदुओं को जोड़ कर शामिल होने वाले क्षेत्र में बदल दिया जाता है।
समलम्ब चतुर्भुजी (Trapezoidal) सूत्र में त्रुटि को निम्न रूप में लिखा जाता है,

$$E_T = \frac{h^3}{2} f''(\xi) \times \int_0^1 s(s-1)ds = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \text{ जहां } x_0 < \xi < x_1 \quad (5.64)$$

टिप्पणी

समलम्ब चतुर्भुज नियम (Trapezoidal Rule)

समाकलन $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx,$ के मूल्यांकन के लिए हमें प्रत्येक उप–अंतराल $(x_0, x_1), (x_1, {}_2),$ ... (x_{n-1}, x_n) के लिए समाकलन का योग करना होगा। इस प्रकार,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + ... + (f_{n-1} + f_n)]$$

या
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + ... + f_{n-1}) + f_n] \quad (5.65)$$

यह संख्यात्मक समाकलन के समलम्ब चतुर्भुज नियम के रूप में जाना जाता है। समलम्ब चतुर्भुज नियम में त्रुटि है,

$$E_T^n = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}[f_0 + 2(f_1 + f_2 + ... + f_{n-1}) + f_n]$$

$$= \frac{-h^3}{12}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + ... + f''(\xi_n)]$$

जहाँ $x_0 < \xi_1 < x_1, x_1 < \xi_2 < x_2, ..., x_{n-1} < \xi_n < x_n$

इस प्रकार, हम लिख सकते हैं

$$E_T^n = -\frac{h^3}{12}[nf''(\xi)], \ f''(\xi) \text{ का मतलब हैं } f''(\xi_1), f''(\xi_2)...f''(\xi_n)$$

$$= -nh\frac{h^2}{12} \ f''(\xi)$$

जहां, $E_T^n = -\frac{h^2}{12} \ (b-a) \ f''(\xi),$ क्योंकि $nh = b - a$

या, $x_0 < \xi < x_n,$ (5.66)

एल्गोरिदम

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा $\int_a^b f(x)dx$ का मूल्यांकन।

चरण 0 : फलन $f(x)$ को परिभाषित करें।
चरण 1 : a, b, n को प्रारंभ करें।
चरण 2 : $h = (b–a)/n$ की गणना करें।
चरण 3 : $x = a, S = 0$ रखें।
चरण 4 : $x = x + h$ की गणना करें।
चरण 5 : $S = S + f(x))$ की गणना करें।

चरण 6 : यदि $x < b$ है, तो चरण 4 पर जाएँ अन्यथा अगले चरण पर जाएं।
चरण 7 : $I = h\,(S + (f\,(a) + f\,(b))/2)$ की गणना करें।
चरण 8 : निर्गत (Output) I, n

टिप्पणी

सिम्पसन का एक–तिहाई सूत्र (Simpson's One-Third Formula)

न्यूटन–कोट्स (Newton Cotes) समीकरण में $n = 2$ को लेकर , हम संख्यात्मक समाकलन (Numerical Integration) का सिम्पसन (Simpson) का एक–तिहाई सूत्र प्राप्त करते हैं,

$$\int_{x_0}^{x^2} f(x)dx = h\left[2f_0 + \frac{2^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{12}(2\times 2^3 - 3\times 2^2)\Delta^2 f_0\right]$$

$$= h\left[2f_0 + 2\ \ (f_1 - f_0) + \frac{1}{3}\ \ (f_2 - 2f_1 + f_0)\right] \tag{5.67}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

यह संख्यात्मक समाकलन का सिम्पसन का एक–तिहाई सूत्र के रूप में जाना जाता है,

सिम्पसन का एक–तिहाई सूत्र में त्रुटि को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है ,

$$E_S = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$F'(x) = f\,(x)$, मानकर, हम प्राप्त करते हैं

$$E_S = F(x_2) - F(x_0) - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$F(x_2) = F(x_0{+}2h), f_1 = f(x_0{+}h),$ और $f_2 = f(x_0{+}2h)$, को h की घातो (Powers) में विस्तार करके, हमारे पास होगा,

$$E_S = 2hF'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2!}F''(x)\ \ (x_0) + \frac{(2h)^3}{3!}F'''(x_0) + \ldots$$

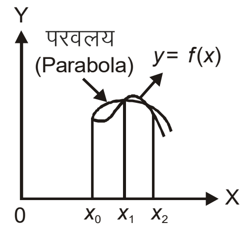
$$-\frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_0 + hf_0' + \frac{h^2}{2!}f''(0) + \ldots\right) + f_0 + 2hf_0' + \frac{(2h)^2}{2!}f''(0) + \ldots\right]$$

$$= 2hf_0 + 2h^2 f_0' + \frac{4}{3}h^3 f''(0) + \frac{2}{3}h^4 f'''(0) + \frac{4}{15}h^5 y_0^{iv}\ \ (\xi)$$

$$-\frac{h}{3}\ \ [6f_0 + 6hf_0' + 4h^2 f''(0) + 2h^3 f'''(0)\ldots]$$

$E_S = -\dfrac{h^5}{90}f^{iv}(\xi)$, को सरलीकरण करने पर, जहां $x_0 < \xi < x_2$ (5.68)

सिम्पसन का एक–तिहाई सूत्र की ज्यामितीय व्याख्या यह है कि दर्शाए गए वक्र के नीचे के क्षेत्र का समाकल परवलय (Parabola) द्वारा बिन्दुओ $x_0, f_0), (x_1, f_1)$ और (x_2, f_2) को जोड़ने पर मिलने वाला क्षेत्र होता है, चित्र 5.3 में दिखाया गया है।



चित्र 5.3 सिम्पसन का एक–तिहाई समाकलन (Simpson's One-Third Integration)

सिम्पसन का एक–तिहाई नियम (Simpson's One-Third Rule)

सिम्पसन का एक–तिहाई नियम में अंतराल $[a, b]$ को $2m$ उप–अंतराल में बिन्दुओ $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots x_{2m} = a+2mh$ से विभाजित करने पर जहाँ $b = x_{2m}$ और $h = (b–a)/(2m)$, और प्रत्येक जोड़ी के उप–अंतराल पर सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र का उपयोग करने पर, हमारे पास होगा,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[(f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + (f_4 + 4f_5 + f_6) + \ldots + (f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m})\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2m-2}) + f_{2m}\right] \quad (5.69)$$

इसे संख्यात्मक समाकल के सिम्पसन का एक–तिहाई नियम के रूप में जाना जाता है। इस सूत्र में त्रुटि को अंतराल के प्रत्येक जोड़े की त्रुटियों के योग द्वारा दी जाती है,

$$E_S^{2m} = -\frac{h^5}{90}[f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2) + \ldots + f^{iv}(\xi_m)]$$

जिसे फिर से लिखा जा सकता है,

$$E_S^{2m} = -\frac{h^5}{90} m\, f^{iv}(\xi), f^{iv}(\xi) \text{ का मतलब है } f^{iv}(\xi_1), f^{iv}(\xi_2), \ldots f^{iv}(\xi_m)$$

क्योंकि $2mh = b - a$, हमारे पास,

$$E_S^{2m} = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{iv}(\xi), \text{ जहां } a < \xi < b. \quad (5.70)$$

एल्गोरिदम (Algorithm) : $\int_a^b f(x)dx$ का सिम्पसन एक–तिहाई नियम द्वारा मूल्यांकन।

चरण 0 : $f(x)$ को परिभाषित करें

चरण 1 : a, b, n सम (even) को निविष्ट (Input) दें।

चरण 2 : $h = (b–a)/n$ की गणना करें।

चरण 3 : $S_1 = f(a) + f(b)$ की गणना करें।

चरण 4 : $S_2 = 0, x = a$ रखें।

चरण 5 : $x = x + 2h$ की गणना करें।

चरण 6 : $S_2 = S_2 + f(x)$ की गणना करें।

चरण 7 : जाँच करें कि क्या $x < b$ है , तो चरण 5 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।

चरण 8 : $x = a + h$ की गणना करें।

चरण 9 : $S_4 = S_4 + f(x)$ की गणना करें।

चरण 10 : $x = x + 2h$ की गणना करें।

चरण 11 : जाँच करें कि क्या $x > b$ है, अगले चरण पर जाएं अन्यथा चरण 9 पर जाएं।

चरण 12 : $I = (S_1 + 4S_4 + 2S_2)h/3$ की गणना करें।

चरण 13 : I, n लिखें।

सिम्पसन का तीन–आठवां सूत्र (Simpson's Three-Eighth Formula)

$n = 3,$ को लेने पर, न्यूटन–कोट्स सूत्र को निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = h\int_0^3 (f_0 + u\,\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 f_0)du$$

$$= h\left[uf_0 + \frac{u^2}{2}\Delta f_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\right)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\left(\frac{u^4}{4} - u^3 + u^2\right)\Delta^3 f_0\right]_0^3$$

$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}\Delta y_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 y_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 y_0\right]$$

$$= h\left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)\right] \qquad (5.71)$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + y_3)$$

इस सूत्र में खंडन त्रुटि (Truncation Error) $-\frac{3h^5}{80}f^{iv}(\xi), x_0 < \xi < x_3$ है।

इस सूत्र को संख्यात्मक समाकल का सिम्पसन तीन–आठवें (3/8) सूत्र के रूप में जाना जाता है।

सिम्पसन एक–तिहाई नियम की तरह, हम संख्यात्मक समाकल के सिम्पसन का तीन–आठवें सूत्र को भी लिख सकते हैं,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + ... + 2y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m}] \qquad (5.72)$$

जहाँ $h = (b–a)/(3m)$; $m = 1, 2, ...$ के लिए

टिप्पणी

अर्थात्, अंतराल ($b–a$) को उप–अंतराल $3m$ संख्या में विभाजित (Divided) किया गया है।

समीकरण (5.72) में नियम को फिर से ऐसा लिखा जा सकता है,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[y_0 + y_{3m} + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + ... + y_{3m-2} + y_{3m-1}) + 2(y_3 + y_6 + ... + y_{3m-3})] \tag{5.73}$$

सिम्पसन के तीन–आठवें नियम में खंडन त्रुटि $\frac{-3h^4}{240}$ है।

$$(b-a)f^{iv}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_g m$$

वेडली सूत्र (Weddle's Formula)

न्यूटन–कोट्स सूत्र में $n = 6$ लेकर कुछ सूक्ष्म संशोधनों के बाद वेडली सूत्र मिलता हैं। न्यूटन–कोट्स सूत्र $n = 6$ के साथ देता है,

$$\int_{x_0}^{x_6} ydx = h\left[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24y\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{41}{140}\Delta^6 y_0\right]$$

यदि अंतिम पद $\frac{41}{140}\Delta^6 y_0$ को $\frac{42}{140}\Delta^6 y_0 = \frac{3}{10}\Delta^6 y_0$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है तो यह सूत्र बहुत सरल रूप ले लेता है तब सूत्र में त्रुटि का एक अतिरिक्त पद (Additional Term) $\frac{1}{140}\Delta^6 y_0$ होगा। उपरोक्त सूत्र तब इस तरह का बन जाता है,

$$\int_{x_0}^{x_6} ydx = h\left[6y_0 + 18\Delta y_0 + 27\Delta^2 y_0 + 24\Delta^3 y_0 + \frac{123}{10}\Delta^5 y_0 + \frac{3}{10}\Delta^6 y_0\right] \tag{5.74}$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x_6} ydx = \frac{3h}{10}[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6]$$

अंतरों को y_i के संदर्भ में बदलने पर, इस सूत्र को वेडली सूत्र के रूप में जाना जाता है

वेडली सूत्र में त्रुटि $-\frac{1}{140}h^7 \cdot y^{(vi)}(\xi)$ होगी। (5.75)

वेडली का नियम एक संयोजन वेडली का सूत्र है, जब उप–अंतराल की संख्या 6 का गुणक होती है। संख्यात्मक समाकलन में वेडली के नियम का उपयोग अंतराल ($b–a$) को $6m$ उप–अंतराल की संख्या से उप–विभाजित करके किया जाता है, यहाँ m घनात्मक पूर्णांक है। वेडली का नियम है,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{10}[y_0+5y_1+y_2+6y_3+y_4+5y_5+2y_6+5y_7+y_8+6y_9+y_{10}+5y_{11}+... +2y_{6m-6}+5y_{6m-5}+y_{6m-4}+6y_{6m-3}+y_{6m-2}+5y_{6m-1}+y_{6m}] \tag{5.76}$$

जहां $b–a = 6mh$

अर्थात्, $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{10}[y_0 + y_{6m} + 5(y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} + ... + y_{6m-5} + y_{6m-1}) + y_2 + y_4 + y_8 + y_{10} + ...$

$+ y_{6m-4} + y_{6m-2} + 6(y_3 + y_9 + ... + y_{6m-3}) + 2(y_6 + y_{12} + ... + y_{-6})]$

वेडली के नियम में त्रुटि $-\frac{1}{840}h^6(b-a)y^{(vi)}(\xi)$ है। (5.77)

उदाहरण 5.30 : $\int_0^2 x^4 dx$ के अनुमानित मान की गणना चार उप अंतराल को लेकर करें और फिर इसकी तुलना सटीक मान के साथ करें।

हलः $[0, 2]$ में चार उप–अंतरालों के लिए, हमारे पास $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$ है। हम $f(x) = x^4$ को सारणीबद्ध करते हैं,

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0	0.0625	1.0	5.062	16.0

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम से हम प्राप्त करते हैं,

$$\int_0^2 x^4 dx \approx \frac{0.5}{2}[0 + 2\times(0.0625 + 1.0 + 5.062) + 16.0]$$

$$\approx \frac{1}{4}[12.2690 + 16.0] = \frac{28.2690}{4} = 7.0672$$

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम से हमें मिलता है,

$$\int_0^2 x^4 dx = \frac{0\cdot 5}{3}[0 + 4\times(0.0625 + 5.062) + 2\times 1.0 + 16.0]$$

$$= \frac{1}{6}[4\times 5.135 + 18.0] = \frac{38.5380}{6} = 6.4230$$

सटीक मान $= \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के परिणाम में त्रुटि $= 6.4 - 7.0672 = -0.6672$ है।

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के परिणाम में त्रुटि $= 6.4 - 6.4230 = -0.0230$ है।

उदाहरण 5.31 : निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन करें,

$\int_0^1 (4x - 3x^2)dx$, $n = 10$ लेकर और निम्नलिखित नियमों का उपयोग करे :

(i) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम।

(ii) सिम्पसन का एक–तिहाई नियम।

फिर इसकी तुलना सटीक मान के साथ करें और प्रत्येक प्रकरण में त्रुटि का पता लगाएं।

हलः हम $x = 0, 0.1, 0.2, ...1.0.$ के लिए $f(x) = 4x–3x^2$ को सारणीबद्ध करते हैं,

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	0.0	0.37	0.68	0.93	1.12	1.25	1.32	1.33	1.28	1.17	1.0

(*i*) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करके हमारे पास है,

$$\int_0^1 (4x-3x^2)\,dx = \frac{0.1}{2}\left[0+2(0.37+0.68+0.93+1.12+1.25+1.32+1.33+1.28+1.17)+1.0\right]$$

$$= \frac{0.1}{2}\times(18.90+1.0) = 0.995$$

(*ii*) सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करके, हमारे पास है,

$$\int_0^1 (4x-3x^2)\,dx = \frac{0.1}{3}[0+4(0.37+0.93+1.25+1.33+1.17)+2(0.68+1.12+1.32+1.28)+1.0]$$

$$= \frac{0.1}{3}[4\times 5.05+2\times 4.40+1.0]$$

$$= \frac{0.1}{3}\times[30.0] = 1.00$$

(*iii*) सटीक मान =1.0 है।

समलम्ब चतुर्भुजीय द्वारा परिणाम में त्रुटि 0. 005 है और सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के परिणाम में कोई त्रुटि नहीं है।

उदाहरण 5.32 : $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ का मूल्यांकन करें,

(*i*) सिम्पसन के एक–तिहाई नियम में 10 उप–अंतरालों के साथ।
(*ii*) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के द्वारा।

हलः हम $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, ..., 1.0$ के 11 अंकों के लिए निम्न रुप से e^{-x^2} के मानों को सारणीबद्ध करते हैं।

x	e^{-x^2}		
0.0	1.00000		
0.1		0.990050	
0.2			0.960789
0.3		0.913931	
0.4			0.852144
0.5		0.778801	
0.6			0.697676
0.7		0.612626	
0.8			0.527292
0.9		0.444854	
1.0	0.367879		
	1.367879	3.740262	3.037901

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के अनुसार हमारे पास है,

टिप्पणी

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \frac{h}{3}\ [f_0 + f_{10} + 4\ (f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9) + 2\ (f_2 + f_4 + f_6 + f_8)]$$

$$= \frac{0.1}{3}\ [1.367879 + 4 \times 3.740262 + 2 \times 3.037901]$$

$$= \frac{0.1}{3}\ [1.367879 + 14.961048 + 6.075802]$$

$$= \frac{2.2404729}{3} = 0.7468243 \approx 0.746824$$

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करके हम प्राप्त करते हैं,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\quad dx = \frac{h}{2}[f_0 + f_{10} + 2\ \ (f_1 + f_2 + ... + f_9)]$$

$$= \frac{0.1}{2}\ [1.367879 + 6.778163]$$

$$= 0.4073021$$

उदाहरण 5.33 : सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करके समाकलन $I = \int_0^4 (x^3 - 2x^2 + 1)dx,$ को $h = 1$ लेकर गणना करें और सिद्ध करें कि गणना किया हुआ मान सटीक मान के समान है, इसके कारण बताइए।

हल: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ पर $f(x) = x^3 – 2x^2 + 1$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं।

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	1	10	33

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा समाकल का मान होता है,

$$I = \frac{1}{3}[1 + 4 \times 0 + 2 \times 1 + 4 \times 10 + 33] = 25\frac{1}{3}$$

सटीक मान $= \dfrac{4^4}{4} - 2 \times \dfrac{4^3}{3} + 1 \times 4 = 25\dfrac{1}{3}$

इस प्रकार, सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा मिला मान सटीक मान के सामान है। ऐसा इसलिए है क्योंकि सिम्पसन के एक–तिहाई नियम में त्रुटि चौथे कोटि की अवकलज होती है और इसलिए यह नियम सटीक परिणाम देता है जब समाकल्य (Integrand) एक बहुपद होकर घात तीन से कम या तुल्य (बराबर) होता है।

उदाहरण 5.34 : $\int_{0.1}^{0.5} e^x dx$ की गणना (*i*) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम और (*ii*) सिम्पसन एक–तिहाई नियम से $h = 0.1$ लेकर करें और फिर परिणामों की तुलना सटीक मान से करें।

हल: हम $x = 0.1$ से 0.5 तक, अंतर $h = 0.1$ के साथ $f(x) = e^x$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं।

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)=e^x$	1.1052	1.2214	1.3498	1.4918	1.6847

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा समाकलन का मान है,

$$I_T = \frac{0.1}{2}[1.1052+2(1.2214+1.3498+1.4918)+1.6487]$$
$$= \frac{0.1}{2}[2.7539+2\times 4.0630] = 0.5439$$

सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा मान की गणना है,

$$I_S = \frac{0.1}{3}[1.1052+4(1.2214+1.4918)+2\times 1.3498+1.6487]$$
$$= \frac{0.1}{3}[2.7539+4\times 2.7132+2.6996] = \frac{0.1}{3}[16.3063] = 0.5435$$

$$\text{सटीक मान} = e^{0.5}-e^{0.1} = 1.6487-1.1052 = 0.5435$$

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम समाकलन में त्रुटि का मान – 0.0004 देता है लेकिन सिम्पसन का एक–तिहाई नियम सटीक मान देता है।

उदाहरण 5.35 : 10 उप–अंतराल को लेकर $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ की

(*i*) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम और (*ii*) सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करके गणना करें । इस प्रकार $\log_{e^2}$ खोजें और छह दशमलव स्थान तक सटीक मान के साथ तुलना करें।

हलः $x = 0, 0.1, 0.2,...1.0$ पर $f(x)=\frac{1}{1+x}$ के मान को निम्न रूप से सारणीबद्ध करते हैं।

x	y	$f(x)=\frac{1}{1+x}$		
0.0	y_0	1.000000		
0.1	y_1		0.9090909	
0.2	y_2			0.8333333
0.3	y_3		0.1692307	
0.4	y_4			0.7142857
0.5	y_5		0.6666667	
0.6	y_6			0.6250000
0.7	y_7		0.5882352	
0.8	y_8			0.5555556
0.9	y_9		0.5263157	
1.0	y_{10}	0.500000		
		1.500000	3.4595391	2.7281746

(*i*) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करके हमारे पास है,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{2}[f_0 + f_{10} + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ... + f_0)]$$

$$= \frac{0.1}{2}[1.500000 + 2 \times (3.4595391 + 2.7281745)]$$

$$= \frac{0.1}{2}[1.500000 + 12.3754272] = 0.6437714.$$

(ii) सिम्पसन एक–तिहाई नियम का उपयोग करते हुए हमें मिलता है,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}[f_0 + f_{10} + 4(f_1 + f_3 + ... + f_9) + 2(f_2 + f_4 + ... + f_8)]$$

$$= \frac{0.1}{3}[1.500000 + 4 \times 3.4595391 + 2 \times 2.7281745]$$

$$= \frac{0.1}{3}[1.5 + 13.838156 + 5.456349] = \frac{0.1}{3} \times 20.794505 = 0.6931501$$

(iii) सटीक मान,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log_{e^2} = \frac{0.1}{3} \ [1.500000 + 4 \times 3.4595391 + 2 \times 2.7281745]$$

$$= 0.6931472$$

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम समाकल के मान में त्रुटि 0.693147– 0.6437714 = 0.0493758 है जबकि सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के मान में त्रुटि (– 0. 000029) है।

उदाहरण 5.36 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta} d\theta$ की छः उप–अंतराल लेकर (i)समलम्ब चतुर्भुजीय नियम और (ii) वेडली सूत्र द्वारा गणना करें ।

हलः $[0, \frac{\pi}{2}]$ का उप–विभाजन छः उप–अंतराल में $h = \frac{\pi}{2} . \frac{1}{6} = 15^\circ = 0 \cdot 26179$ होंगा। समाकल नियमों को प्रयोग करने के लिए हम $\sqrt{\cos\theta}$ को सारणीबद्ध करते हैं।

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\sqrt{\cos\theta}$	1	0.98281	0.93061	0.84089	0.70711	0.50874	0

(i) सिम्पसन एक–तिहाई नियम द्वारा समाकलन का मान होगा,

$$I_S = \frac{0.26179}{3}[1 + 4 \times (0.98281 + 0.84089 + 0.50874) + 2 \times (0.093061 + 0.070711) + 0)]$$

$$= \frac{0.26179}{3}[1 + 4 \times 2.33244 + 2 \times 1.63772]$$

$$= \frac{0.26179}{3} \times 13.6052 = 1.18723$$

(ii) वेडली सूत्र द्वारा समाकलन का मान होगा,

$$I_W = \frac{3}{10} \times 0.26179 \ \ [1.05 + 7.45775 + 5.04534 + 0.93061 + 0.070711]$$

$$= 3 \times 0.026179 \ \ [14.554411] = 1.143059 \approx 1.14306$$

उदाहरण 5.37 : वेडली सूत्र द्वारा समाकलन $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0.162\sin^2\varphi}\,d\varphi$ का मूल्यांकन करें।

हल: अंतराल को छः उपअंतरालों में विभाजित करने पर, प्रत्येक उपअंतराल की लंबाई $h = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = 0\cdot26179 = 15^\circ$ होंगी । वेडली सूत्र द्वारा समाकल की गणना के लिए, हम $f(\varphi) = \sqrt{1-0\cdot162\sin^2\varphi}$ को सारणीबद्ध करते हैं ।

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
f (φ)	1.0	0.99455	0.97954	0.95864	0.93728	0.92133	0.91542

वेडली सूत्र द्वारा समाकल का मान होगा ,

$$I_W = \frac{3\times0.26179}{10}\ [1.0+5\ (0.99455+0.92133)+0.97954+6\times0.95864+0.93728+0.91542]$$
$$= 0.078537\times19.16348 = 1.50504$$

वांछित सटीकता तक एक समाकल की गणना (Computing an Integral to a Desired Accuracy)

वांछित सटीकता तक निश्चित समाकल का सही मूल्यांकन करने के लिए, उप–अंतराल की लंबाई h का सूत्र में उपयोग करने के लिए, h का उपयुक्त मान बनाना होता है। h को निर्धारित करने के दो विधि हैं, संख्यात्मक समाकल के लिए इस्तेमाल होने वाले सूत्र में खंडन त्रुटि (Truncation Error) पर विचार करके या अंतराल को आधा और परिणामों की तुलना की तकनीक द्वारा समाकल का क्रमिक (Successive) मूल्यांकन करके किया जा सकता है।

खंडन त्रुटि अनुमान विधि (Truncation Error Estimation Method)

खंडन त्रुटि अनुमान विधि में, उपयोग किए जाने वाले h के मान को संख्यात्मक समाकल के सूत्र में खंडन त्रुटि पर विचार करके निर्धारित किया जाता है। मान लीजिए कि E मूल्यांकन किए जाने वाले समाकल के लिए त्रुटि सहिष्णुता (Error Tolerance) है। तब निम्न स्थिति का उपयोग करके h को चुना जाता है, $|R| < \in/2$

उदाहरण के रूप में, सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करके $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ का तीसरे दशमलव स्थान तक सटीक मूल्यांकन करने के लिए विचार करें।

हम $\in = 10^{-3}$ ले सकते हैं।

यदि हम सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करना चाहते हैं, तो खंडन त्रुटि R, होगा

$$R = \frac{h^4}{180}(2-1)f^{iv}(\xi);\quad 1<\xi<2$$

तब h को निम्न स्थिति को संतुष्ट करके निर्धारित किया जाता है,

$$\frac{h^4}{180}|f^{iv}(\xi)| < 0\cdot5\times10^{-3}$$

टिप्पणी

दिए गए उदाहरण में $f(x)=\frac{1}{x}$ है, इस प्रकार $f^{iv}(x)=\frac{2\times3\times4}{x^5}$ इसलिए $\max\limits_{[1,2]}\left|f^{iv}(x)\right|=24$

इस प्रकार, $h^4\times\frac{1\times24}{180}<0\cdot5\times10^{-3}$ या $h<0.102$

लेकिन h को ऐसा चुना जाना चाहिए ताकि अंतराल $[1, 2]$ को उप–अंतराल की सम संख्या में विभाजित किया जा सके। इसलिए हम $h=0.1<0.102$ ले सकते हैं, जिसके लिए $n=10$, अर्थात यहाँ 10 उप–अंतराल होंगे।

समाकल का मान होगा,

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\frac{0.1}{3}\left[1.0+4\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right)+2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.8}\right)+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{0.1}{3}[1.5+4\times3.4595+2\times2.7282]$$

$$=\frac{0.1}{3}\times2.0749=0.06931$$ जो $\log_{e^2}$ के सटीक मान से सहमत है।

अंतराल अर्धीकरण तकनीक (Interval Halving Technique)

जब खंडन त्रुटि का अनुमान निकालना मुश्किल हो जाता है तो वांछित सटीकता तक समाकल की गणना के लिए अंतराल अर्धीकरण तकनीक का उपयोग किया जाता है। अंतराल अर्धीकरण विधि में, पहले समाकल की गणना h के कुछ मध्यम मान के लिए की जाती है। फिर इसका मूल्यांकन $\frac{h}{2}$ के लिए किया जाता है, अर्थात्, दोगुना उप विभाजनों की संख्या के साथ किया जाता है। इसके लिए समाकल्य (Integrand) के मूल्यांकन के लिए केवल उप–विभाजन के नए बिंदुओं की आवश्यकता होती है और अंतर h के साथ पिछले फलन के मानों का भी उपयोग किया जाता है। अब समाकलन I_h और $\frac{I_h}{2}$ के बीच के अंतर को गणना किए गए समाकल की सटीकता से जांचने के लिए उपयोग किया जाता है। यदि $\left|I_h-I_{h/2}\right|\le\varepsilon$, जहाँ ε स्वीकार्य त्रुटि (Permissible Error) है तो $I_{h/2}$ को वांछित सटीकता तक की गई गणना के समाकल के मान के रूप में लिया जाना चाहिए। यदि ऊपरी सटीकता प्राप्त नहीं होती है, अर्थात, $\left|I_h-I_{h/2}\right|>\varepsilon$, तो फिर से अंतर $\frac{h}{4}$ के साथ समाकल की गणना करनी चाहिए और फिर से सटीकता का परीक्षण करना चाहिए ।$I_{h/4}$ के समीकरण के लिए समाकलता के मूल्यांकन के लिए केवल उप–विभाजन के नए बिंदुओं की आवश्यकता होती है।

ध्यान दें:

1. कभी–कभी प्रारंभिक विकल्प h को $\sqrt[m]{\varepsilon}$ के रूप में लिया जाता है जहां समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के लिए $m=2$ होता है और सिम्पसन के एक–तिहाई नियम के लिए $m=4$ होता है ।
2. अंतराल अर्धीकरण विधि का व्यापक रूप से उपयोग कंप्यूटर मूल्यांकन के लिए किया जाता है क्योंकि यह संगणनाओं की जाँच के साथ–साथ h के वांछित मान को लेने देता है।

3. खंडन त्रुटि R का अनुमान रून्गें–कुट्टा विधि का उपयोग करके निकाला जा सकता है।

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के लिए $R \approx \frac{1}{3}|I_h - I_{h/2}|$ और सिम्पसन एक–तिहाई नियम के लिए $R \approx \frac{1}{15}|I_h - I_{h/2}|$ है।

एल्गोरिदमः अंतराल अर्धीकरण के साथ सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा समाकलन का मूल्यांकन।

चरण 1: a, b एप्सिलॉन (Epsilon) से प्रारंभ करें [a, b समाकलन की सीमा है, एप्सिलॉन त्रुटि सहिष्णुता है]

चरण 2: $h = \frac{b-a}{2}$ रखें।

चरण 3: $S_1 = f(a) + f(b)$ की गणना करें।

चरण 4: $S_4 = f(a+h)$ की गणना करें।

चरण 5: $S_2 = 0, I_1 = 0$ रखें।

चरण 6: $I_2 = \frac{(S_1 + 4S_4 + S_2) \times h}{3}$ की गणना करें।

चरण 7: यदि $(I_2 - I_1) < \varepsilon$, तो चरण 17 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।

चरण 8: $I_1 = I_2$ रखें।

चरण 9: $S_2 = S_2 + S_4$ की गणना करें।

चरण 10: $S_4 = 0$ रखें।

चरण 11: $x = a + h$ रखें।

चरण 12: $S_4 = S_4 + f(x)$ की गणना करें।

चरण 13: $x = x + h$ रखें।

चरण 14: यदि $x < b$, तो चरण 12 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।

चरण 15: $I_2 = \frac{(S_1 + 2S_2 + 4S_4) \times h}{3}$ की गणना करें।

चरण 16: चरण 7 पर जाएं।

चरण 17: I_2, h, ε को लिखें।

चरण 18: समाप्त।

एल्गोरिदम (Algorithm): अंतराल अर्धीकरण के साथ समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा समाकलन का मूल्यांकन।

चरण 1: $a, b,$ एप्सिलॉन (epsilon) से प्रारंभ करें [a, b समाकलन की सीमा है, ε त्रुटि सहिष्णुता है]

चरण 2: $h = b-a$ रखें।

चरण 3: $S_1 = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ की गणना करें।

चरण 4: $I_1 = S_1 \times h$ की गणना करें।

चरण 5: $x = a + \dfrac{h}{2}$ की गणना करें।

चरण 6: $I_2 = (S_1 + f(x)) \times h$ की गणना करें।

चरण 7: यदि $(I_2 - I_1) < \varepsilon$, तो चरण 13 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।

चरण 8: $h = \dfrac{h}{2}$ रखें।

चरण 9: $x = a + h$ रखें।

चरण 10: $I_2 = I_2 + h \times f(x)$ रखें।

चरण 11: यदि $x < b$, तो चरण 9 पर जाएं अन्यथा अगले चरण पर जाएं।

चरण 12: चरण 7 पर जाएं।

चरण 13: I_2, h, ε को लिखें।

चरण 14: समाप्त।

दोहरे समाकलन का संख्यात्मक मूल्यांकन (Numerical Evaluation of Double Integrals)

हम दोहरे समाकलन से मूल्यांकन पर विचार करते हैं,

$$I = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy \tag{5.78}$$

जहाँ R आयताकार क्षेत्र $a \le x \le b, c \le y \le d$. है। दोहरे समाकलन को फिर से समाकलन के लिए निम्नलिखित रूप में बदला जाता है ,

$$\int_a^b dx \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] \tag{5.79}$$

$F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ को लिखें और x के फलन के रूप में माने, हमारे पास होगा, (5.80)

$$I = \int_a^b F(x)\,dx \tag{5.81}$$

अब संख्यात्मक समाकलन के लिए, हम अंतराल $[a, b]$ को n उप अंतराल स्पैसिंग (Spacing) h में विभाजित करेंगे और फिर संख्यात्मक समाकलन के उपयुक्त नियम का उपयोग कर सकते हैं।

दोहरे समाकलन के लिए समलम्ब चतुर्भुजीय नियम (Trapezoidal Rule for Double Integral)

समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा, हम समाकलन समीकरण (5.81) को इस तरह लिख सकते हैं,

$$\int_a^b F(x)\,dx = \frac{h}{2}[F_0 + F_n + 2(F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1})] \qquad (5.82)$$

जहां $x_0 = a, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}$ और

$$F_i = F(x_i) = \int_0^1 f(x_i, y)\,dy,\ x_i = a + ih \qquad (5.83)$$

$i = 0, 1, 2,...n$ के लिए,

प्रत्येक F_i का समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा मूल्यांकन किया जा सकता है। इसके लिए प्रत्येक अंतराल $[c, d]$ को m उप–अंतरालों में प्रत्येक की लंबाई $k = \frac{c-d}{m}$. में विभाजित कर सकते हैं। हम इस तरह लिख सकते हैं,

$$F_i = \frac{k}{2}[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m) + 2\{f(x_i, y_1) + f(x_i, y_2 + ... + f(x_i, y_{m-1})\}] \qquad (5.84)$$

$y_0 = c, y_m = d, y_i = c+ik; i = 0, 1,..., m.$

इस समीकरण (5.84) को एक संक्षिप्त रूप में लिखा जा सकता है,

$$F_i = \frac{k}{2}[f_{i0} + f_{im} + 2(f_{i1} + f_{i2} + ... + f_{im-1})]. \qquad (5.85)$$

संबंधित समीकरणों (5.82) और (5.85) मिलकर दोहरे समाकलन के मूल्यांकन के लिए समलम्ब चतुर्भुजीय नियम बनाते हैं।

दोहरे समाकलन के लिए सिम्पसन एक–तिहाई नियम (Simpson's One-Third Rule for Double Integrals)

दोहरे समाकलन के मूल्यांकन के लिए हम सिम्पसन के एक–तिहाई नियम लिख सकते हैं। इस प्रकार हमारे पास है,

$$I = \int_a^b F(x)\,dx = \frac{h}{3}[F_0 + F_n + 2(F_2 + F_4 + ... + F_{n-2}) + 4(F_1 + F_3 + ... + F_{n-1})] \qquad (5.86)$$

जहाँ, $h = \frac{b-a}{n}$ n सम है, और

$$F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x_i, y)dy,\ x_i = a + ih,\ i = 0, 1, 2,...n \text{ के लिए} \qquad (5.87)$$

और, $x_0 = a$ और $x_n = b$

टिप्पणी

I के मूल्यांकन के लिए, समीकरण (5.87) में दिए गए प्रत्येक $(n + 1)$ समाकलन का मूल्यांकन करना होगा। F_i के मूल्यांकन के लिए, हम सिम्पसन के एक–तिहाई नियम का उपयोग करके अंतराल $[c, d]$ को m उप–अंतराल में विभाजित कर सकते हैं। F_i को इस प्रकार लिखा जा सकता है,

$$F_i = \frac{k}{3}[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m) + 2f(x_i, y_2) + f(x_i, y_4) + ... + f(x_i, y_{m-2}) + 4\{f(x_i, y_1) + f(x_i, y_3) + ... + f(x_i, y_{m-1})\}] \tag{5.88}$$

समीकरण (5.88) को संक्षिप्त संकेतन में निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$F_i = \frac{k}{3}[f_{i0} + f_{im} + 2(f_{i2} + f_{i4} + ... + f_{in-2}) + 4(f_{i1}, f_{i3} + ... + f_{im-1})]$$

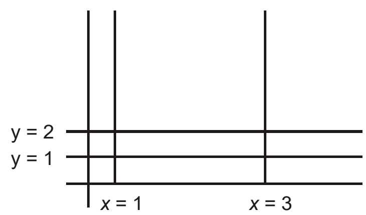
जहाँ $f_{ij} = f(x_i, y_j), j = 0, 1, 2,...,m$ है।

उदाहरण 5.38 : सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा $h = k = 0.5$ लेकर दोहरे समाकलन $\iint_R (x^2 + y^2)dx\,dy$ का मूल्यांकन करें, जहाँ R आयताकार क्षेत्र $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$, $1 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$, है ।

हलः हम समाकलन को पुनरावृत्त (Repeated) समाकलन के रूप में लिखते हैं,

$$I = \int_1^3 dx \left[\int_1^2 (x^2 + y^2)dy\right]$$

x के साथ $n = 4$ उप–अंतराल लीजिए, ताकि $h = \frac{2}{4} = 0.5$ हो जाए।



$$\therefore I = \int_1^3 F(x)dx = \frac{0.5}{3}[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)]$$

जहाँ, $F(x) = \int_1^2 (x^2 + y^2)dy$

$\therefore \quad F_i = F(x_i) = \int_1^2 (x_i^2 + y^2)dy;\ x_i = 1 + 0.5i$ जहां $i = 0, 1, 2, 3, 4$ है।

F_i's, के मूल्यांकन के लिए, हम $k = \frac{1}{2} = 0.5$ लेगें और हम प्राप्त करते हैं,

$$F_0 = \int_1^2 (1 + y^2)\,dy = \frac{0.5}{3}[1 + 1^2 + 4\{1 + (1.5)^2\} + 1 + 2^2] = \frac{0.5}{3} \times 20$$

$$F_1 = \int_1^2 (1.5^2 + y^2)\,dy = \frac{0.5}{3}[(1.5)^2 + 1^2 + 4\{1.5)^2 + (1.5)^2\} + (1.5)^2 + 2^2] = \frac{0.5}{3} \times 27.50$$

$$F_2=\int_1^2(2^2+y^2)\ \ dy=\frac{0.5}{3}\ \ [2^2+1^2+4\ \ (2^2+1.5)^2\}+2^2+2^2]=\frac{0.5}{3}\times 38$$

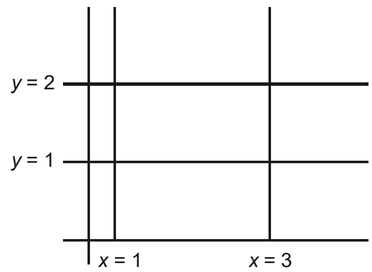
$$F_3=\int_1^2((2.5)^2+y^2)dy=\frac{0.5}{3}\ \ [(2.5)^2+1^2+4\ \ \{(2.5)^2+(1.5)^2\}+(2.5)^2+2^2]=\frac{0.5}{3}\times 51.50$$

$$F_4=\int_1^2(3^2+y^2)dy=\frac{0.5}{3}\ \ [3^2+1^2+4\{3^2+(1.5)^2\}+3^2+2^2]=\frac{0.5}{3}\times 68$$

$$\therefore I=\frac{0.25}{9}[20+68+2\times 38+4\ (27.50+51.50)]$$

$$=\frac{0.25}{9}\times 480=13.333$$

उदाहरण 5.39 : समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा $h=0.5$ लेकर $\iint_R(x^2+y^2)dx\,dy$ की गणना करें।



हल: $I_T=\int_1^3 F(x)dx=\dfrac{0.5}{2}\ [F_0+F_4+2\ (F_1+F_2+F_3)]$

जहाँ $F_i=F(x_i)=\int_1^2(x_i^2+y^2)dy,\ x_i=1+0.5i,\ i=0, 1, 2, 3, 4.$

इस प्रकार, $F_0=\int_1^2(1+y^2)dy=\dfrac{0.5}{2}\ \ [1^2+1^2+2\{1^2+(1.5)^2\}+1^2+2^2]$

$$=\frac{0.5}{2}\times 13.50=3.375$$

$$F_1=\int_1^2[(1.5)^2+y^2]dy=\frac{0.5}{2}\ \ [(1.5)^2+1^2+2\ \ \{(1.5)^2+(1.5)^2\}+(1.5)^2+2^2]$$

$$=\frac{0.5}{2}\times 18.50=4.625$$

$$F_2=\int_1^2[2^2+y^2]dy=\frac{0.5}{2}\ \ [2^2+1^2+2\{2^2+(1.5)^2\}+2^2+2^2]$$

$$=\frac{0.5}{2}\times 25.50=6.375$$

$$F_3=\int_1^2[(2.5)^2+y^2]dy=\frac{0.5}{2}\ \ [(2.5)^2+1^2+2\{(2.5)^2+(1.5)^2\}+(2.5)^2+2^2]$$

$$=\frac{0.5}{2}\times 34.50=8.625$$

$$F_4=\int_1^2[3^2+y^2]dy=\frac{0.5}{2}\ \ [3^2+1^2+2\{3^2+(1.5)^2\}+3^2+2^2]$$

$$=\frac{0.5}{2}\times 45.50=11.375$$

टिप्पणी

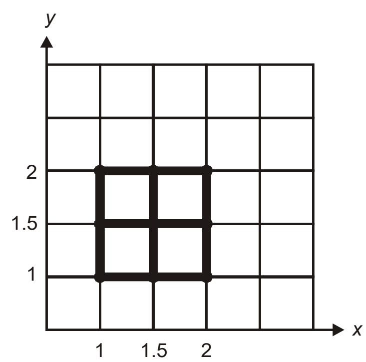
$$\therefore \; I_T = \frac{0.5}{2} \times [3.375 + 11.375 + 2(4.625 + 6.375 + 8.625)]$$

$$= \frac{1}{4}[14.750 + 2 \times 19.625]$$

$$= \frac{1}{4}\left[14.750 + 39.250\right] = \frac{1}{4} \times 54 = 13.5$$

उदाहरण 5.40 : समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा उप–अंतराल की लंबाई $h = k = 0.5,$ $\int_1^2 \int_1^2 \frac{dx\,dy}{x+y}$ लेकर निम्नलिखित दोहरे समाकलन का मूल्यांकन करें।

हलः माना कि $f(x, y) = \dfrac{1}{x+y}$



$h = 0.5,$ के साथ समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा समाकलन,

$I = \int_1^2 \int_1^2 dx \;\; dy \;\; f(x, y)$ के रूप में गणना की जाती है,

$$I = \frac{0.5 \times 0.5}{4} \;\; [f(1,\; 1) + f(2,\; 1) + f(1,\; 2) + f(2,\; 2) + 2\{f(1.5,\; 1) + f(1,\; 1.5)$$

$$+ f(2,\; 1.5) + f(1.5,\; 2)\} + 4f \;\; (1.5,\; 1.5)]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 2 \;\; \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) + 4 \times \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[0.666667 + 0.75 + 2 \times \frac{4 \times 12}{35} + \frac{4}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[5.492857\right]$$

$$= 0.343304.$$

उदाहरण 5.41 : सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा $\int_1^2 \int_1^2 \frac{dxdy}{x+y}$ का मूल्यांकन करें ।
उप–अंतराल की लंबाई $h = k = 0.5$ लेने पर।

हलः उप–अंतराल की लंबाई $h = k = 0.5$ लेकर सिम्पसन एक–तिहाई नियम से समाकलन $I = \int_1^2 \int_1^2 f(x, y)dx\,dy$ का मान होगा,

टिप्पणी

$$I = \frac{0.5 \times 0.5}{3 \times 3} \ [f(1,\ 1) + f(2,\ 1) + f(1,\ 2) + f(2,\ 2) + 4\{f\ \ (1,\ 1.5) + f(1.5,\ 1) + f(2,\ 1.5) + f\ \ (1.5,\ 2)\} + 16 f(1.5,\ 1.5)]$$

$$= \frac{1}{36}\ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 4\ \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) + 16 \times \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left[0.666667 + 0.75 + 4 \times \frac{4 \times 12}{35} + \frac{16}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{36}\ \ [12.235714] = 0.339880$$

रोमबर्ग प्रक्रिया (Romberg's Procedure)

रोमबर्ग प्रक्रिया का उपयोग उप–अंतराल की चौड़ाई के दो मानों के समाकलन के मूल्यांकन का उपयोग करके समाकलन के बेहतर अनुमानों को खोजने के लिए किया जाता है।

माना कि समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करते हुए I_1 और I_2 समाकलन $I = \int_a^b f(x)\ dx,$ के मान दो अलग–अलग उप–अंतरालों की चौड़ाई क्रमशः h_1 और h_2 के लिए है। माना कि E_1 और E_2 संबंधित खंडन त्रुटियाँ हैं। चूंकि समलम्ब चतुर्भुजीय नियम में त्रुटियां h_2 के क्रम में होती हैं। हम लिख सकते हैं,

$I = I_1 + Kh_1^2$ और $I = I_2 + Kh_2^2$, जहां K लगभग तुल्य है।

$$I_1 + Kh_1^2 = I_2 + Kh_2^2$$

$$K \approx \frac{I_1 - I_2}{h_2^2 - h_1^2}$$

इस प्रकार , $I \approx I_1 + \frac{I_1 - I_2}{h_2^2 - h_1^2} . h_1^2 = \frac{I_1 h_2^2 - I_2 h_1^2}{h_2^2 - h_1^2}$

रोमबर्ग प्रक्रिया में, हम $h_2 = h_1/2$ लेते हैं और उसके बाद हमें मिलेगा,

$$I = \frac{I_1\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - I_2 h_1^2}{\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - h^2} = \frac{4I_2 - I_1}{3}$$

या $I = I_2 + \left(\frac{I_2 - I_1}{3}\right)$

इसे समलम्ब चतुर्भुजीय समाकलन के लिए रोमबर्ग सूत्र (Romberg Formula) के रूप में जाना जाता है।

रोमबर्ग प्रक्रिया बिना किसी अधिक फलन मूल्यांकन के समाकलन का बेहतर अनुमान देता है , $h/2$ के साथ I_2 के मूल्यांकन में I_1 के मूल्यांकन में आवश्यक फलन के मानों का भी उपयोग होता है।

उदाहरण 5.42 : समलम्ब चतुर्भुजीय नियम के माध्यम से $h_1 = 0.5$ और $h_2 = 0.25$ के साथ, $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मूल्यांकन करें और फिर I के बेहतर अनुमान के लिए रोमबर्ग प्रक्रिया का उपयोग करें। सटीक मान के साथ परिणाम की तुलना करें।

हलः हम h =0.25 के साथ x और $y = \frac{1}{1+x^2}$ के मानों को सारणीबद्ध करते हैं ।

x	0	0.25	0.5	0.75	1.0
y	1	0.9412	0.80	0.64	0.5

इस प्रकार, $h_1 = 0.5,$ के साथ समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करके हमारे पास होगा,

$$I_1 = \frac{0.5}{3} \times (1 + 0.5 + 2 \times 0.8) = 0.516$$

इसी तरह $h_2 = 0.25$ के साथ,

$$I_2 = \frac{0.25}{3}[1 + 0.5 + 2 \quad (0.8 + 0.9412 + 0.64)]$$
$$= 0.5218$$

I_2 के मूल्यांकन में I_1 के मूल्यांकन के फलन के मानों का उपयोग होता है,

रोमबर्ग सूत्र द्वारा, $I \approx I_2 + \frac{1}{3} \ (I_2 - I_1)$

$$= 0.5218 + (0.5218 - 0.516) \times \frac{1}{3}$$
$$= 0.5218 + 0.0019$$
$$= 0.5237$$

सटीक समाकल = $\tan^{-1} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0.5237$ है।

इस प्रकार हम परिणाम को दशमलव के चार स्थानों तक प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5.43 : समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ के लिए दो और चार उप–अंतरालों लेकर मूल्यांकन करें और फिर रोमबर्ग प्रक्रिया का उपयोग करके I का बेहतर अनुमान प्राप्त करें।

हलः हम $h = \frac{1}{4} =$ 0.25 के साथ $y = \frac{1}{x}$ के मान के लिए एक तालिका बनाते हैं।

x	1	1.25	1.5	1.75	2.0
y	1	0.8	0.6667	0.5714	0.5

टिप्पणी

$$I_1 = \frac{0.5}{2}[1 + 0.5 + 2 \times 0.6667] = 0.7084$$

$$I_2 = \frac{0.25}{2} \;\; [1 + 0.5 + 2 \;\; (0.8 + 0.6667 + 0.5714)] = 0.6970$$

रोमबर्ग प्रक्रिया द्वारा, $I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{3} \approx 0.6970 + \frac{1}{3}(-0.0114)$

$$= 0.6970 - 0.0038 = 0.6932$$

उदाहरण 5.44 : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, के मान की गणना,

(i) गॉउस के दो बिंदु और (ii) गॉउस के तीन बिन्दु सूत्र द्वारा करें।

हलः हम पहले समाकल $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{1}{2}(b+a)$ को प्रतिस्थापन द्वारा बदलेंगे,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2}{3+t} dt$$

(i) गॉउस के दो बिंदु सूत्र द्वारा,

$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ हमें प्राप्त है,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{3+t}\, dt = \left(\frac{1}{3 + \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{3 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) = 0.6923$$

(ii) गॉउस की तीन बिन्दु सूत्र द्वारा,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t} \quad dt = \left[\frac{1}{3} \times 0.888888 + \frac{0.55555556}{3 + 0.77459667} \right]$$

$$= 0.443478$$

उदाहरण 5.45 : $\int_1^2 e^x dx$ की गॉउस के तीन बिंदु क्षेत्रकलन (Quadrature) द्वारा गणना करें।

हलः हम पहले समाकलन को प्रतिस्थापन $x = \frac{6-a}{2} t + \frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2} t + \frac{3}{2}$ द्वारा बदलेंगे,

$$\therefore \int_1^2 e^x dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{t}{2}+\frac{3}{2}} \;dt = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} e^{\frac{t}{2}} \;dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} \left[0.88888889 \times e^0 + 0.55555556 \times \left\{ e^{\frac{1}{2}} \times 0.77459667 + e^{\frac{1}{2}} \times 0.77459667 \right\} \right]$$

$$= 4.67077$$

अपनी प्रगति जांचिए

14. आप एक निश्चित समाकलन का मूल्यांकन कैसे करेंगे?
15. संख्यात्मक समाकलन के लिए समलम्ब चतुर्भुजीय सूत्र को लिखें।
16. संख्यात्मक समाकलन के लिए सिम्पसन का एक–तिहाई सूत्र क्या है?
17. सिम्पसन के एक–तिहाई सूत्र में त्रुटि को कैसे परिभाषित किया जाता है?
18. संख्यात्मक समाकलन के लिए सिम्पसन के तीन–आठवें नियम को परिभाषित करें।
19. वेडली नियम की व्याख्या कीजिए।
20. रोमबर्ग की प्रक्रिया का उपयोग क्यों किया जाता है?

5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. समीकरणों प्रणालियों को समरूपी कहा जाता है यदि स्तम्भ (Column) में सदिश b के सभी अवयव शून्य हो अन्यथा, प्रणालियों को गैर–समरूप कहा जाता है।
2. इस विधि में अज्ञातों को व्यवस्थित विधि से निष्कासन किया जाता है ताकि गुणांक आव्यूह को एक उच्च त्रिकोणीय प्रणाली में परिवर्तित किया जा सके, जिसे फिर से पश्च प्रतिस्थापन की प्रक्रिया द्वारा हल किया जाता है।
3. गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि गॉउसियन निष्कासन विधि का एक रूपांतर है। इस विधि में, संवर्धित गुणांक आव्यूह को पंक्ति संक्रिया द्वारा रूपांतरित किया जाता है, इस तरह कि गुणांक आव्यूह एक तत्समक आव्यूह में परिवर्तित हो जाएं। समाधान प्रणाली फिर सीधे रूपांतरित संवर्धित आव्यूह के परिवर्तित संवर्धित स्तम्भ के रूप में प्राप्त होता है।
4. जब गुणांक आव्यूह में विकर्ण प्रमुख हो तब रैखिक समीकरणों के प्रणालियों को हल करने के लिए हम पुनरावृत्ति विधियों का उपयोग कर सकते हैं।
5. यह जैकोबी पुनरावृत्ति का एक सरल संशोधन है। इस पद्धति में, प्रणालियों की पुनरावृत्ति के किसी भी स्तर पर, अज्ञातों के बेहतर मानों का उपयोग अज्ञात सदिश के घटकों की गणना के लिए किया जाता है।
6. पिकार्ड विधि में पहला अनुमानित समाधान $y^{(1)}(x)$ को निकालने के लिए $y(x)$ को y_0 द्वारा प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है।

   इस प्रकार, $y^{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$

   दूसरा अनुमानित समाधान y को $y^{(1)}(x)$ की जगह पर प्रतिस्थापित करके प्राप्त किया जाता है ।

टिप्पणी

इस प्रकार, $$y^{(2)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y^{(1)}(x))\,dx$$

प्रारंभिक स्थिति दिए जाने पर, पहले क्रम अवकलन समीकरण का हल खोजने वाले इस पुनरावृत्ति सूत्र को पिकार्ड पुनरावृत्ति के रूप में जाना जाता है। पुनरावृत्तियों को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि दो अनुमानित समाधान $y^{(k)}$ और $y^{(k+1)}$ एक वांछित सटीकता तक x के वांछित मानों के लिए लगभग एक ही परिणाम नहीं देते है।

7. यूलर विधि , चरण–दर –चरण , x के चरण के मानों $\{x_k\}$ के अनुक्रम पर y के मानों $\{y_k\}$ का अनुक्रम खोजती है ।

8. संशोधित यूलर विधि का उपयोग नीचे बताए अनुसार पुनरावृत्ति विधि में इसे प्रयोग करके वांछित सटीकता तक समाधान की गणना करने के लिए किया जा सकता है।

   $$y^{(k)}{}_{n+1} = y_n + h\ \ f(x_n,\ y_n)$$

   $$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}\ \left[f(x_n,\ \ y_n) + f(x_{n+1},\ \ y_{n+1}^{(k)}\right],\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \text{ के लिए}$$

   की गणना करें ।

   पुनरावृत्तियों को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि दो अलग–अलग क्रमिक अनुमान $y_{n+1}^{(k)}$ और $y_{n+1}^{(k+1)}$ वांछित सटीकता तक लगभग एक ही परिणाम नहीं देते है ।

9. रून्गें–कुट्टा विधि विभिन्न कोटि की हो सकती है। यह बहुत उपयोगी होती हैं, जब टेलर श्रेणी विधि उच्च्च कोटि के अवकलन को खोजने की जटिलता के कारण प्रयोग करना आसान नहीं होती है। रून्गें–कुट्टा विधि बेहतर सटीकता प्राप्त करने का प्रयास करती हैं और साथ ही उच्चतर कोटि अवकलन की आवश्यकता को पूरा करती हैं। हालाँकि, इस विधि में कई ऑफ–स्टेप बिंदुओं पर प्रथम कोटि अवकलन के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है।

10. ये विधियाँ बहु–चरणीय संख्यात्मक समाकलन की जोड़ी का उपयोग करती हैं। पहला पूर्वसूचक सूत्र है, जो एक खुले रूप का स्पष्ट सूत्र है, जिसको समाकलन में अंतर्वेशन सूत्र का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है, जो बिन्दुओं $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-m}$ पर अंतर्वेश होती है। दूसरा है सुधारक सूत्र जिसको प्रक्षेप या अंतर्वेशन सूत्र से प्राप्त किया जाता है, जो समाकलन में बिन्दुओं $x_{n+1}, x_n, \ldots, x_{n-p}$ पर अंतर्वेश होती है।

11. संख्यात्मक अवकलन एक फलन $f(x)$ के अवकलजों की गणना करने की प्रक्रिया है जब फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन फलन का मान केवल दिए गए तर्कों के एक समुच्चय $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ पर ज्ञात होता है। अवकलजों को खोजने के लिए, हम एक उपयुक्त प्रक्षेप या अंतर्वेशन बहुपद का उपयोग करते हैं और फिर इसके अवकलजों को फलन के अवकलजों के लिए सूत्र के रूप में उपयोग करते हैं।

टिप्पणी

12. न्यूटन अग्रवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र है,

$$\varphi(u) = y_0 + u \quad \Delta \quad y_0 + \frac{u(u-1)}{2\ !}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3\ !}\Delta^3 y_0 + ... + \frac{u(u-1)(u-2)...(u-n+1)}{n\ !}\Delta^n y_0$$

जहाँ $u = \frac{x - x_0}{h}$

13. न्यूटन पश्चवर्ती अंतर अंतर्वेशन सूत्र है।

$$\varphi(v) = y_n + v \quad \nabla y_n + \frac{v(v+1)}{2\ !}\nabla^2 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)}{3\ !}\nabla^3 y_n + \frac{v(v+1)(v+2)(v+3)}{4\ !}\nabla^4 y_n + ...$$
$$+ \frac{v(v+1)...(v+n-1)}{n\ !}\nabla^n y_n$$

जहां $v = \frac{x - x_n}{h}$

14. एक निश्चित समाकलन का मूल्यांकन तब नहीं किया जा सकता है जब तक समाकल्य $f(x)$ समाकलनीय नहीं होता है, साथ ही जब तक फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन केवल फलन के मान x की एक सीमित संख्या के मान पर ज्ञात होते है। यहाँ सूत्र के आधार पर एक निश्चित समाकलन के मूल्यांकन को प्राप्त करने के लिए दो प्रकार के संख्यात्मक विधि होते हैं।

15. सूत्र $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f_0 + f_1]$ है।

16. सूत्र $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$ है।

17. सिम्पसन एक–तिहाई सूत्र में त्रुटि को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है,

$$E_S = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\ dx - \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

18. संख्यात्मक समाकल के लिए सिम्पसन का तीन–आठवाँ सूत्र है,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + ... + 2y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m}]$$

जहाँ, $h = (b–a)/(3m)$; $m = 1, 2,...$के लिए

यानी, अंतराल $(b–a)$ को $3m$ संख्या के उप–अंतराल में विभाजित किया जाता है।

19. वेडली नियम एक संयोजन वेडली सूत्र है जब उप–अंतराल की संख्या 6 का गुणक होती है । संख्यात्मक समाकल में वेडली नियम का उपयोग अंतराल $(b–a)$ को $6m$ उप–अंतराल की संख्या से उप–विभाजित करके प्राप्त किया जाता है, यहाँ m घनात्मक पूर्णांक है। वेडली नियम निम्न है,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{10}\,[y_0+5y_1+y_2+6y_3+y_4+5y_5+2y_6+5y_7+y_8+6y_9+y_{10}+5y_{11}+\ldots$$

$$+2y_{6m-6}+5y_{6m-5}+y_{6m-4}+6y_{6m-3}+y_{6m-2}+5y_{6m-1}+y_{6m}]$$

जहाँ, $b-a = 6mh$

20. रोमबर्ग प्रक्रिया का उपयोग एक समाकल के बेहतर अनुमानों को खोजने के लिए एक उप–अंतराल की चौड़ाई के दो मानों के बीच समाकल करके मूल्यांकन किया जाता है।

5.7 सारांश

- क्रेमर नियम में निम्नलिखित समीकरण समाधान सदिश x देता है,

  $x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \quad 2, \ldots, n$ के लिए।

- आव्यूह A के व्युत्क्रम A^{-1} को निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है,

  $A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$ ।

- गॉउस–जॉर्डन निष्कासन विधि गॉउसियन निष्कासन विधि का एक रूपांतर है। इस विधि में, संवर्धित गुणांक आव्यूह को पंक्ति संक्रिया द्वारा इस तरह रूपांतरित किया जाता है ताकि गुणांक आव्यूह तत्समक आव्यूह मे परिवर्तित हो जाए। समाधान प्रणाली फिर सीधे रूपांतरित आव्यूह के परिवर्तित संवर्धित स्तम्भ के रूप में प्राप्त होता है।
- हम रैखिक समीकरणों के प्रणालियों को हल करने के लिए पुनरावृत्ति विधियों का उपयोग कर सकते हैं जब गुणांक आव्यूह में विकर्ण प्रभावी होता है।
- गॉउस–सीडेल पुनरावृत्ति विधि में प्रणालियों के पुनरावृत्ति के किसी भी चरण में अज्ञात सदिश के घटकों की गणना के लिए अज्ञातों के सुधारे गए मानों का उपयोग किया जाता है।
- किसी दिए गए वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह B निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करता है,

  $$A\,.\,B = I$$

- हम प्रथम कोटि अवकलन समीकरण से जुड़ी प्रारंभिक मान समस्या के लिए निम्न समाधान पर विचार करते हैं,

  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

- यूलर विधि प्रथम कोटि प्रारंभिक मान की समस्या को हल करने की एक अपरिष्कृत लेकिन सरल विधि है:

  $\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$

- रून्गें–कुट्टा विधि बेहतर सटीकता प्राप्त करने का प्रयास करती हैं और साथ ही उच्चतर क्रम अवकलन की आवश्यकता को पूरा करती हैं। हालाँकि, इस विधि में कई ऑफ–स्टेप बिंदुओं पर प्रथम कोटि अवकलन के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है।
- रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 में चार बिंदुओं पर प्रथम कोटि अवकलजों $f(x, y)$, के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। विधि स्व–प्रारंभ होती है। इस पद्धति में अनुमानित त्रुटि को मूल्यांकन तौर पर निम्न रूप में दिया जाता है,

$$|y\ (x_n) - y_n| \approx \frac{y_n^* - y_n}{15}$$

- प्रत्येक चरण में समाधान खोजने के लिए, टेलर श्रेणी विधि और रून्गें–कुट्टा विधियों में कई अवकलजों के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। अब हम बहु–चरण विधि विकसित करेंगे, जिसमें प्रत्येक चरण में केवल एक अवकलज के मूल्यांकन की आवश्यकता होती है लेकिन कुट्टा विधि पर टेलर श्रेणी की स्व–प्रारंभ के विपरीत, बहु–चरण विधि पिछले एक से अधिक कई बिंदुओं के समाधानों का उपयोग करती हैं।
- संख्यात्मक अवकलन एक फलन $f(x)$ के अवकलजों की गणना करने की प्रक्रिया है जब फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन फलन के मान दिए गए तर्कों के एक समुच्चय $x = x_0, x_1, x_2,...,x_n$ पर ज्ञात होते है।
- एक निश्चित समाकलन का मूल्यांकन तब नहीं किया जा सकता है जब तक समाकल्य $f(x)$ समाकलनीय नहीं होता है, साथ ही जब तक फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन केवल फलन के मान, x के एक सीमित संख्या के मान पर ज्ञात हो।
- निम्नलिखित सूत्र के आधार पर एक निश्चित समाकलन को मूल्यांकन करने के लिए दो प्रकार के संख्यात्मक विधि होती हैं।

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

- h को निर्धारित करने की दो विधियां हैं या तो संख्यात्मक समाकलन के लिए उपयोग किए जाने वाले सूत्र में खंडन त्रुटि पर विचार करके या अंतराल अर्धीकरण तकनीक द्वारा क्रमिक रूप से समाकलन का मूल्यांकन करके और फिर परिणामों की तुलना की जाएं।
- खंडन त्रुटि अनुमान विधि में, उपयोग किए जाने वाले h के मान को संख्यात्मक समाकल के सूत्र में खंडन त्रुटि पर विचार करके निर्धारित किया जाता है। मान लीजिए कि E मूल्यांकन किए जाने वाले समाकल के लिए त्रुटि सहिष्णुता है। तब नियम का उपयोग करते हुए h का चयन किया जाता है, $|R| < \varepsilon|2$
- रोमबर्ग प्रक्रिया का उपयोग उप–अंतराल की चौड़ाई के दो मानों के समाकलन के मूल्यांकन का उपयोग करके समाकलन के बेहतर अनुमानों को खोजने के लिए किया जाता है।

माना कि समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का उपयोग करते हुए I_1 और I_2 समाकलन $I = \int_a^b f(x)\,dx,$ के मान दो अलग–अलग उप–अंतरालों की चौड़ाई क्रमशः h_1 और h_2 के लिए है। माना कि E_1 और E_2 संबंधित खंडन त्रुटियाँ हैं। चूंकि समलम्ब चतुर्भुजीय नियम में त्रुटियां h_2 के क्रम में होती हैं।

5.8 मुख्य शब्दावली

- **संख्यात्मक अवकलन :** यह एक फलन $f(x)$ के अवकलजों की गणना करने की प्रक्रिया है जब फलन स्पष्ट रूप से ज्ञात नहीं होता है, लेकिन फलन का मान दिए गए तर्कों के एक समुच्चय $x = x_0, x_1, x_2,...,x_n$ पर ज्ञात होता है।
- **रोमबर्ग प्रक्रिया :** रोमबर्ग प्रक्रिया में समाकल के बेहतर अनुमानों को खोजने के लिए एक उप–अंतराल की चौड़ाई के दो मानों के समाकल के मूल्यांकन का उपयोग किया जाता है।
- **वेडली नियम :** यह एक समग्र वेडली नियम है जब उप–अंतराल की संख्या 6 का गुणक होती है।
- **पिकार्ड पुनरावृत्ति :** इसका उपयोग प्रथम कोटि अवकलन समीकरण का हल खोजने के लिए किया जाता है जब प्रारंभिक स्थिति दी जाती है।
- **परिमित अंतर विधि :** इस विधि का उपयोग सीमा मान समस्या को हल करने के लिए किया जाता है। अवकलन समीकरण और सीमा स्थितियों में प्रदर्शित होने वाले अवकलज को उचित अंतर प्रवणता या ग्रेडिएंट द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है।

5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न और अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. क्रेमर नियम की परिभाषा दीजिए।
2. रैखिक समीकरणों को हल करने के लिए गॉउसियन निष्कासन विधि की व्याख्या करें।
3. रैखिक समीकरणों को हल करने के लिए जैकोबी पुनरावृत्ति विधि का उपयोग कैसे किया जाता है?
4. क्रमिक सन्निकटन की पिकार्ड विधि क्या है?
5. टेलर श्रेणी विधि को परिभाषित करें।
6. पूर्वसूचक–सुधारक विधि को बताएं।
7. निम्न तालिका के मानों का उपयोग करके $\int_0^3 f(x)\,dx$ की गणना करें ।

x	0	1	2	3
$f(x)$	1.6	3.8	8.2	15.4

टिप्पणी

8. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा $\int_0^{20} f(x)\,dx$ की गणना करें जहां,

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

9. सिम्पसन के एक–तिहाई सूत्र द्वारा $\int_0^4 x^3\,dx$ की गणना करें और परिणाम पर टिप्पणी करें।

x	0	2	4
x^3	0	8	64

10. सिम्पसन के एक–तिहाई सूत्र द्वारा $\int_0^2 x^3\,dx$ की गणना करें और परिणाम पर टिप्पणी करें।

11. सिम्पसन के एक–तिहाई सूत्र द्वारा $\int_0^2 e^x\,dx$ की गणना करें और सटीक मान के साथ तुलना करें, जहां $e^0 = 2, e^1 = 2.72, e^2 = 7.39$ है ।

12. सिम्पसन के एक–तिहाई सूत्र द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, का समाकलन करके π के अनुमानित मान की गणना करें।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित सारणीबद्ध मानों से दिए गए फलन $y = f(x)$ के लिए उपयुक्त सूत्रों का उपयोग करते हुए $y'(1.4)$ और $y''(1.4)$ की गणना करें।

x	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0
y	0.9854	0.9738	0.8085	0.5155	0.1411

2. $x = 1$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ की गणना करें जहां फलन $y = f(x)$ को निम्नलिखित तालिका द्वारा दिया गया है :

x	1	2	3	4	5	6
y	1	8	27	64	125	216

3. एक छड़ समतल में अपने एक छोर पर घूम रही है। निम्न तालिका कोण (रेडियन में) देती है जिसके माध्यम से छड़ समय t सेकंडों में विभिन्न मानों में बदलती है। इसके कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ और कोणीय त्वरण $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ को $t = 1.0$ पर ज्ञात कीजिए।

t Secs	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
θ Radius	0.0	0.12	0.48	1.10	2.00	3.20

टिप्पणी

4. फलन $y = f(x)$, के लिए $x = 1$ और $x = 3$ पर $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ को ढूंढें, जिसका मान निम्न तालिका में दिया गया है :

x	1	2	3	4	5	6
y	2.7183	3.3210	4.0552	4.9530	6.0496	7.3891

5. फलन $y = f(x)$ के लिए $x = 0.96$ और $x = 1.04$ पर $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ को ढूंढें, जिसका मान निम्नलिखित तालिका में दिया गया है ।

x	0.96	0.98	1.0	1.02	1.04
y	0.7825	0.7739	0.7651	0.7563	0.7473

6. समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा $\int_0^2 (x+1)dx$, की गणना चार उप–अंतरालों तक करें और सटीक मान के साथ तुलना करके परिणाम पर टिप्पणी करें ।

7. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा चार उप–अंतरालों तक $\int_1^{1.4} (x^3+2)dx$, की गणना करें, और फिर परिणाम में त्रुटि का पता लगाएं।

8. पाँच तुल्य उप–अंतरालों को लेकर $\int_0^1 \cos x\, dx$ की तीन महत्वपूर्ण अंकों तक मूल्यांकन करें।

9. सिम्पसन एक–तिहाई नियम द्वारा छः उपअंतरालों को लेकर तीन महत्वपूर्ण अंकों तक समाकलन $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}$ की गणना करें।

10. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा चार उप–अंतरालों को लेकर समाकल $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, की गणना करें और इसका उपयोग करके π के अनुमानित मान की गणना करें।

11. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा चार उप–अंतरालों को लेकर चार महत्वपूर्ण अंकों तक समाकलन $\int_0^4 e^x dx$ की गणना करें और फिर इसकी सटीक मान के साथ तुलना करें।

12. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा चार उप–अंतरालों को लेकर समाकलन $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ की गणना करें ।

टिप्पणी

13. निम्न तालिका (0, 2) में एक फलन का मान देती है। $\int_0^2 f(x)dx$ की गणना करें।

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0.3089	0.3521	0.2420	0.1295	0.0540

14. समलम्ब चतुर्भुजीय नियम द्वारा चार उप–अंतरालों को लेते हुए $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$ का मूल्यांकन करके परिणाम को चार दशमलव अंकों तक लिखें।

15. निम्नलिखित समाकलनों का मूल्यांकन करें।

(i) $\int_0^1 \sin x^2\, dx$, (ii) $\int_0^1 \cos x^2\, dx$

16. सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा समाकलन $\int_1^{1.3} \sqrt{x}\, dx.$ की $h = 0.05$ से लेकर पाँच महत्वपूर्ण अंकों तक गणना करें।

17. (i) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम और (ii) सिम्पसन के एक–तिहाई नियम द्वारा समाकलन $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ की छः उप–अंतरालों को लेकर गणना करें और सटीक मान से परिणामों की तुलना करें।

18. वेडली नियम द्वारा निम्नलिखित समाकलनों का मूल्यांकन करें ।

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, $n = 12$ को लेकर (ii) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}\, dx$, $n = 12$ को लेकर

19. गॉउस–लेगेंड्रे दो बिंदु और तीन बिंदु सूत्र द्वारा $\int_0^1 xe^{-x} dx$ की गणना करें और सटीक मान के साथ तुलना करें।

20. निम्नलिखित समाकलों का गॉउस–लेगेंड्रे तीन बिंदु सूत्र द्वारा मूल्यांकन करें।

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ (ii) $\int_0^1 \cos xe^{-x^2} dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

21. निम्नलिखित प्रारंभिक मूल्य समस्या के लिए पिकार्ड विधि द्वारा तीन क्रमिक सन्निकटन समाधानों का पता लगाएं :

(i) $y' = x + y^2, y(0) = 1$

(ii) $y' = x^2 - y^2, y(0) = 1$

22. पिकार्ड विधि का उपयोग करके $y(0.1), y(0.2)$ और $y(0.3)$ के मानों की गणना चार दशमलव अंकों तक समस्या $y' = x + y, y(0) = 1$ के लिए करें।

23. निम्नलिखित प्रत्येक प्रारंभिक मूल्य समस्या के लिए $y(0.1)$ के मान की गणना पांच दशमलव अंकों तक पिकार्ड विधि का उपयोग करके निकालें।

(*i*) $y' = x - y, y(0) = 1$

(*ii*) $y' = \sqrt{x} + xy, y(0) = 0.0$

(*iii*) $y' = 1 + x^2 + y, y(0) = 0.5$

(*iv*) $y' = x^2 + y, + y, y(0) = 1$

(*v*) $y' = x - y^2, + y, y(0) = 1$

24. y के मान की $x = 0.02$ पर यूलर विधि द्वारा $h = 0.01$ लेकर गणना करें , दिया गया y निम्नलिखित प्रारंभिक मूल्य समस्या का समाधान है।

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + y, y(0) = 1$$

25. $\frac{dy}{dx} = y - x, y(0) = 2$ दिया गया है। यूलर विधि द्वारा $y(0.1)$ और $y(0.2)$ की गणना दो दशमलव अंकों तक करें।

26. संशोधित यूलर विधि द्वारा $y(0.02)$ का मूल्यांकन चार दशमलव अंकों तक करें। $y' = x^2 + y, y(0) = 1$ दिया गया है।

27. $y' = \dfrac{1}{x^2 + y}, y(4) = 4,$ दिया गया है। टेलर श्रेणी विधि द्वारा $y(4.2)$ की गणना $h = 0.1$ लेकर करें।

28. टेलर श्रेणी विधि का उपयोग करके तीन दशमलव अंकों तक $y(1.1)$ और $y(1.2)$ का मान ज्ञात करें ।$\dfrac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}}, y(1) = 1$ दिया गया है।

29. रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 का उपयोग करके, निम्न समस्याओं में से प्रत्येक के लिए $y(0.1)$ की गणना करें।

(*i*) $\dfrac{dy}{dx} = x + y, y(0) = 1$

(*ii*) $\dfrac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 1$

30. रून्गें–कुट्टा विधि के कोटि 4 द्वारा निम्नलिखित प्रारंभिक मूल्य समस्या में $h = 0.2$ से $x = 1$ तक लेकर गणना करें।

$y' = x - y, y(0) = 1.5$ है।

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(1 + x^2)y^2,$ और $y(0) = 1, y(0.1) = 1.06, y(0.2) = 1.12, y(0.3) = 1.21$ दिया गया है। मिल्ने पूर्वसूचक–सुधारक विधि द्वारा $y(0.4)$ की गणना करें।

5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

Datta, K. B. 2002. *Matrix and Linear Algebra*. New Delhi: Prentice Hall of India Pvt. Ltd.

S. S. Sastry. 2012. *Introductory Methods of Numerical Analysis*. New Delhi: PHI Learning Pvt. Ltd.

S. K. Jain, A. Gunawardena and P. B. Bhattacharya. 2001. *Basic Linear Algebra with MATLAB*. New York: Key College Publishing: Springer-Verlag, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*, 2nd Edition. New York: John Wiley and Sons.

P. B. Bhattacharya, S. K. Jain and S. R. Nagpaul. 1983. *First Course in Linear Algebra*. New Delhi: Wiley Eastern.

Balaguruswamy, E. 1999. *Numerical Methods*. New Delhi: Tata McGraw-Hill Education.

Datta, N. 2007. *Computer Oriented Numerical Methods*. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Khanna, V. K. and S. K. Bhambari. 2016. *A Course in Abstract Algebra*, 5th Edition. New Delhi: Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

Prasad, Chandrika. 2017. *Text Book on Algebra and Theory of Equations*, 11th Edition. Allahabad: Pothishala Private Ltd.

Conte, Samuel D. and Carl de Boor. 1980. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill.