बी.ए. तृतीय वर्ष

अर्थशास्त्र, द्वितीय प्रश्नपत्र

सांख्यिकी

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY - BHOPAL

Reviewer Committee

1. Dr Manish Sharma
   Professor
   IEHE, Bhopal

2. Dr Kalpana Malik
   Associate Professor
   IEHE, Bhopal

3. Dr. Sharad Tiwari
   Professor
   Govt Hamidia College, Bhopal

Advisory Committee

1. Dr Jayant Sonwalkar
   Hon'ble Vice Chancellor
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

2. Dr H.S.Tripathi
   Registrar
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

3. Dr L.P.Jharia
   Director Student Support
   Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

4. Dr Manish Sharma
   Professor, IEHE, Bhopal
   Subject Expert

5. Dr. Sharad Tiwari
   Professor
   Govt Hamidia College, Bhopal

6. Dr Kalpana Malik
   Associate Professor,
   IEHE, Bhopal

COURSE WRITERS

Dr. J. S. Chandan, Professor of Business Administration at Medgar Ever College, City of University of New York
Units (1.0-1.1, 1.2, 1.6, 1.7-1.11, 3.0-3.1, 3.4-3.8, 4.0-4.1, 4.4-4.8, 5.0-5.1, 5.6-5.10)

Sunita Bhatnagar, Librarian, All India Institute of Medical Science (AIIMS), Jodhpur
Units (1.3, 1.5, 5.3)

Nutan Singh, Lecturer, Department of political Science GDM Girls (P.G.) College Modinagar, Ghaziabad
Units (1.4, 5.5)

Dr. Rupesh Tyagi, Assistant Professor (Contractual), Department of Economics, CCS University, Meerut
Unit (2.0-2.1, 2.2-2.3, 2.4-2.8)

Dr. J. S. Chandan, Professor of Business Administration at Medgar Ever College, City of University of New York
GS Monga, Dean, Invertis Institute of Management Studies, Civil Lines, Bareilly
Units (3.2-3.3, 4.2-4.3, 5.2, 5.4)

Copyright © Reserved, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal

All rights reserved. No part of this publication which is material protected by this copyright notice may be reproduced or transmitted or utilized or stored in any form or by any means now known or hereinafter invented, electronic, digital or mechanical, including photocopying, scanning, recording or by any information storage or retrieval system, without prior written permission from the Registrar, Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal.

Information contained in this book has been published by VIKAS® Publishing House Pvt. Ltd. and has been obtained by its Authors from sources believed to be reliable and are correct to the best of their knowledge. However, the Madhya Pradesh Bhoj (Open) University, Bhopal, Publisher and its Authors shall in no event be liable for any errors, omissions or damages arising out of use of this information and specifically disclaim any implied warranties or merchantability or fitness for any particular use.

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

सांख्यिकी

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा, प्रकृति एवं क्षेत्र, सांख्यिकी के कार्य, महत्व एवं सीमाएं, समग्र एवं न्यादर्श, समंक संकलन की विधियां, वर्गीकरण, सारणीयन, समंकों का बिंदुरेखीय प्रदर्शन, आवृत्ति वितरण, संचयी आवृत्ति।	**इकाई 1** : सांख्यिकी का परिचय **(पृष्ठ 3–95)**
इकाई–2 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापन– माध्य, माध्यिका, बहुलक, ज्यामितीय माध्य, हरात्मक माध्य, अपकिरण के मापन – विस्तार, माध्य विचलन, प्रमाप विचलन, विचलन गुणांक, चतुर्थक विचलन।	**इकाई 2 : इकाई 1** : केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन **(पृष्ठ 97–168)**
इकाई–3 सहसंबंध – कार्ल पियरसन का सहसंबंध गुणांक, स्पियरमेन का कोटि अंतर सहसंबंध गुणांक, कोटि सार्थकता परीक्षण, प्रतीपगमन विश्लेषण, प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन गुणांक, प्रतीपगमन का उपयोग एवं अनुप्रयोग।	**इकाई 3 : इकाई 1** : सहसंबंध **(पृष्ठ 169–210)**
इकाई–4 काल माला का विश्लेषण, संकल्पना एवं घटक, योगात्मक एवं गुणात्मक प्रादर्श, चल माध्य की विधियां, न्यूनतम वर्ग विधि, काल–श्रेणी का महत्व सूचकांक की अवधारणा, प्रकार, महत्व, सूचकांक निर्माण की समस्याएं एवं सीमाएं, लैस्पियर, पाश्चे एवं फिशर का सूचकांक।	**इकाई 4 : इकाई 1** : काल श्रेणी विश्लेषण **(पृष्ठ 211–258)**
इकाई–5 प्रायिकता : अवधारणा, प्रायिकता के नियम, सशर्त प्रायिकता, द्विपद वितरण, अनुसंधान अवधारणा एवं प्रकार, अनुसंधान चयन की समस्या। परिकल्पना – अवधारणा एवं प्रकार, परिकल्पना का परीक्षण, अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन।	**इकाई 5 : इकाई 1** : प्रायिकता **(पृष्ठ 259–322)**

विषय–सूची

परिचय 1

इकाई 1 सांख्यिकी का परिचय 3–95

1.0 परिचय
1.1 उद्देश्य
1.2 सांख्यिकी की अवधारणा
1.2.1 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा
1.2.2 सांख्यिकी की प्रकृति एवं क्षेत्र
1.2.3 सांख्यिकी के कार्य
1.3 समग्र एवं न्यादर्श/प्रतिदर्श
1.4 समंक/आंकड़े संकलन की विधियां
1.5 वर्गीकरण एवं सारणीयन
1.6 समंकों का बिंदुरेखीय प्रदर्शन
1.6.1 आवृत्ति वितरण
1.6.2 संचयी आवृत्ति
1.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
1.8 सारांश
1.9 मुख्य शब्दावली
1.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
1.11 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 2 केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन 97–168

2.0 परिचय
2.1 उद्देश्य
2.2 केंद्रीय प्रवृत्ति माप की अवधारणा
2.2.1 माध्य, माध्यिका एवं बहुलक
2.2.2 ज्यामितीय/गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य
2.3 अपकिरण के मापन
2.3.1 परास
2.3.2 माध्य विचलन
2.3.3 प्रमाप विचलन
2.3.4 विचलन गुणांक
2.3.5 चतुर्थक विचलन
2.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
2.5 सारांश
2.6 मुख्य शब्दावली
2.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
2.8 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 3 सहसंबंध 179–210

3.0 परिचय
3.1 उद्देश्य
3.2 सहसंबंध की अवधारणा
3.2.1 कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक, 3.2.2 स्पीयर मैन का कोटि अंतर सहसंबंध गुणांक
3.2.3 कोटि सार्थकता परीक्षण

3.3 प्रतीपगमन विश्लेषण
3.3.1 प्रतीपगमन समीकरण
3.3.2 प्रतीपगमन गुणांक
3.3.3 प्रतीपगमन का उपयोग एवं अनुप्रयोग
3.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
3.5 सारांश
3.6 मुख्य शब्दावली
3.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
3.8 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 4 काल श्रेणी विश्लेषण **255—258**

4.0 परिचय
4.1 उद्देश्य
4.2 काल श्रेणी विश्लेषण की संकल्पना एवं घटक
4.2.1 गुणात्मक एवं योगात्मक प्रादर्श
4.2.2 चल माध्य की विधियां
4.2.3 न्यूनतम वर्ग विधि
4.2.4 काल–श्रेणी विश्लेषण का महत्व
4.3 सूचकांक की अवधारणा, महत्व एवं प्रकार
4.3.1 सूचकांक के महत्व
4.3.2 सूचकांक के प्रकार : लैस्पियर, पाश्चे एवं फिशर का सूचकांक
4.3.3 सूचकांक निर्माण की समस्याएं एवं सीमाएं
4.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
4.5 सारांश
4.6 मुख्य शब्दावली
4.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
4.8 सहायक पाठ्य सामग्री

इकाई 5 प्रायिकता **259—322**

5.0 परिचय
5.1 उद्देश्य
5.2 प्रायिकता की अवधारणा
5.2.1 प्रायिकता के नियम
5.2.2 सशर्त प्रायिकता
5.2.3 द्विपद वितरण
5.3 अनुसंधान : अवधारणा एवं प्रकार
5.3.1 अनुसंधान के उद्देश्य
5.3.2 अनुसंधान के प्रकार
5.3.3 शोध के विभिन्न चरण
5.3.4 अनुसंधान चयन की समस्या
5.4 परिकल्पना : अवधारणा एवं प्रकार
5.4.1 परिकल्पना के प्रकार
5.4.2 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया
5.4.3 परिकल्पना का परीक्षण एवं त्राुटियां
5.5 अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन
5.5.1 प्रतिवेदन लेखन के उद्देश्य एवं सिद्धांत
5.5.2 प्रतिवेदन की रूपरेखा एवं महत्व
5.5.3 प्रतिवेदन लेखन की समस्याएं
5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
5.7 सारांश
5.8 मुख्य शब्दावली
5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

परिचय

टिप्पणी

प्रस्तुत पुसत्क 'सांख्यिकी' विश्वविद्यालय द्वारा निर्धारित बी.ए./बी.एससी. अर्थशास्त्र (तृतीय वर्ष) के पाठ्यक्रम के अनुरूप लिखी गई है।

प्राचीन काल में सांख्यिकी को राज्य के अंकगणित के रूप में जाना जाता था क्योंकि उस समय यह केवल शासकीय कार्यों तक ही सीमित था। परंतु सामाजिक विकास, सभ्यता विकास एवं आर्थिक जागरण के कारण इस विज्ञान का क्षेत्र अत्यधिक बढ़ गया है। अब सांख्यिकी, विज्ञानों की विभिन्न समस्याओं को तार्किक विश्लेषण के द्वारा हल करने में सहायता देती है।

कुछ लोग सांख्यिकी को एक गणितीय विज्ञान समझते हैं, जिसका संबंध आँकड़ों के संग्रहण, विश्लेषण और व्याख्या से होता है। लेकिन अनेक ऐसे लोग हैं जो सांख्यिकी को गणित की ऐसी शाखा के रूप में देखते हैं जिसका संबंध आंकड़ों के संग्रहण एवं व्याख्या से होता है। सांख्यिकी की जड़ें अनुभवजन्य होती है तथा यह अनुप्रयोगों पर जोर देता है। यही कारण है कि इसे सामान्यतया एक स्वतंत्र गणितीय विज्ञान के रूप में देखा जाता है, न कि गणित की एक शाखा के रूप में।

सांख्यिकीय पद्धतियां वे पद्धतियां हैं जिनका उपयोग सांख्यिकीय आंकड़ों के विश्लेषण और प्रस्तुतीकरण के लिए होता है। ये पद्धतियाँ आँकड़ों के समूह के संक्षेपण और वर्णन में सहायक होती हैं। ऐसे सांख्यिकी को हम वर्णनात्मक सांख्यिकी कहते हैं। यह अनुसंधान करने के दौरान तथा प्रयोगों के नतीजों को संप्रेषित करने में अत्यधिक उपयोगी होता है। एक दूसरे प्रकार का सांख्यिकी भी होता है जिसे अनुमानात्मक सांख्यिकी कहा जाता है। इस सांख्यिकी की सहायता से अध्ययन की जा रही प्रक्रिया या जनसंख्या के बारे में निष्कर्ष निकाले जाते हैं। वर्णनात्मक और अनुमानात्मक सांख्यिकीय के संयुक्त प्रयोग को व्यावहारिक (एप्लायड) सांख्यिकी के नाम से जाना जाता है।

यह पुस्तक स्व-अनुबोधक प्रणाली में लिखी गई है, जिसकी प्रत्येक इकाई विषय वस्तु की जानकारी से आरम्भ होती है। इसके बाद इकाई के उद्देश्यों को भी रेखांकित किया गया है और फिर पाठ्य-सामग्री को एक आसान एवं संगठित तरीके से सविस्तार प्रस्तुत किया गया है। इसके साथ-साथ ही बीच-बीच में 'अपनी प्रगति जांचिए' के प्रश्नों के माध्यम से विषय-वस्तु के बारे में विद्यार्थियों के ज्ञान को भी परखा जा रहा है। प्रत्येक इकाई के अन्त में प्रभावशाली सार के साथ-साथ शब्दावली की सूची एवं प्रश्न एवं अभ्यास भी दिए गए हैं।

इस पुस्तक 'सांख्यिकी' को पांच इकाइयों में विभाजित किया गया है।

पहली इकाई सांख्यिकी की अवधारणा है, जिसमें सांख्यिकी का अर्थ, परिभाषा, प्रकृति, क्षेत्र, कार्य, महत्व, सीमाएं तथा समंक के संकलन की विधियों का वर्णन किया गया है।

दूसरी इकाई में केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप का विवरण दिया गया है। इसमें समांतर माध्य, माध्यिका, बहुलक, गुणोत्तर माध्य, आदि अवधारणाओं की व्याख्या की गयी है। दूसरी इकाई में परिक्षेपण की माप का वर्णन प्रस्तुत किया गया है।

तीसरी इकाई सहसंबंध पर केंद्रित है, जिसके अंतर्गत कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक, स्पीयर मैन का कोटि अंतर सहसंबंध गुणांक, कोटि सार्थकता परीक्षण तथा प्रतीपगमन विश्लेषण की विस्तार से व्याख्या की गई है।

टिप्पणी

चौथी इकाई काल श्रेणी का विश्लेषण है जिसमें काल श्रेणी की संकल्पना, चल माध्य की विधियां, सूचकांक का अर्थ एवं प्रकार एवं महत्व को समझाया गया है।

पांचवीं इकाई प्रायिकता को इंगित करती है जिसके अंतर्गत प्रायिकता की अवधारणा, प्रायिकता के नियम, सशर्त प्रायिकता, द्विपद वितरण, अनुसंधान की अवधारणा, अनुसंधान चयन की समस्या, परिकल्पना का परीक्षण तथा अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन की व्याख्या की गई है।

प्रस्तुत पुस्तक में सांख्यिकी अर्थशास्त्र को सरल भाषा में रुचिकर ढंग से प्रस्तुत किया गया है। हमें पूर्ण विश्वास है कि यह पुस्तक पाठकों की जिज्ञासा को शांत कर सांख्यिकी के प्रयोग एवं प्रकृति को समझने में सहायक सिद्ध होगी।

इकाई 1 सांख्यिकी का परिचय

टिप्पणी

संरचना

1.0 परिचय
1.1 उद्देश्य
1.2 सांख्यिकी की अवधारणा
 1.2.1 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा
 1.2.2 सांख्यिकी की प्रकृति एवं क्षेत्र
 1.2.3 सांख्यिकी के कार्य
1.3 समग्र एवं न्यादर्श/प्रतिदर्श
1.4 समंक/आंकड़े संकलन की विधियां
1.5 वर्गीकरण एवं सारणीयन
1.6 समंकों का बिंदुरेखीय प्रदर्शन
 1.6.1 आवृत्ति वितरण
 1.6.2 संचयी आवृत्ति
1.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
1.8 सारांश
1.9 मुख्य शब्दावली
1.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
1.11 सहायक पाठ्य सामग्री

1.0 परिचय

समाज को व्यवस्थित ढंग से चलाने एवं नियंत्रण करने के लिए आंकड़ों का प्रयोग करना आवश्यक है। आधुनिक युग में समस्त मानवीय प्राकृतिक तथ्यों को आंकड़ों के रूप में ही मापा एवं अध्ययन किया जा सकता है। संख्यात्मक तथ्य से भरे विश्व में प्रत्येक व्यक्ति समस्त निर्णय संख्यात्मक ज्ञान के आधार पर ही प्राप्त करने के लिए प्रयत्न करता है। वर्तमान संचार एवं कम्प्यूटर क्रांति के समय में ज्ञान के प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकी विधियों का प्रयोग एवं समंकों का ज्ञान प्राप्त करना अति आवश्यक एवं परम उपयोगी हो गया है। सामाजिक विज्ञान के क्षेत्र में भी यह अपेक्षा की जाती है कि विचारों के आदान–प्रदान में सांख्यिकीय ढंग को ही व्यवहार में लाया जाए। ज्ञान को स्पष्ट करने एवं उसे व्यापक रूप में रखने के लिए आंकड़ों का प्रयोग आवश्यक माना गया है। अतः सभ्यता के विकास में सांख्यिकी का योगदान सदैव ही महत्वपूर्ण रहा है। सांख्यिकी का संबंध ज्ञानार्जन की विधियों से है तथा ज्ञान को व्यक्त करने एवं उसे प्राप्त करने में सांख्यिकी का ही प्रयोग करना आवश्यक है।

सांख्यिकी वैज्ञानिक विधि की वह शाखा है जो प्राकृतिक तथ्यों के समग्रों की विशेषताओं संबंधी आगणन अथवा मापने से उपलब्ध समंकों से व्यवहार करती है। सांख्यिकी का क्षेत्र जो प्राचीन काल में केवल राज्य तक सीमित था वर्तमान समय में अत्यधिक व्यापक हो गया है। आज सांख्यिकी का क्षेत्र उन तमाम क्षेत्रों तक फैला हुआ है जहां संख्यात्मक समंकों अथवा तथ्यों का व्यवहार किया जाता है।

इस इकाई में सांख्यिकी के अर्थ, परिभाषा, प्रकृति, क्षेत्र, कार्य, महत्व तथा समंकों के वर्गीकरण एवं सारणीयन आदि को समझाया गया है।

टिप्पणी

1.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- सांख्यिकी के अर्थ, प्रकृति, क्षेत्र, कार्य, महत्व व सीमाओं से परिचित हो पाएंगे;
- समग्र एवं न्यादर्श की विवेचना कर पाएंगे;
- समंक संकलन की विधियों की विवेचना कर पाएंगे;
- वर्गीकरण एवं सारणीयन का विश्लेषण कर पाएंगे;
- समंकों का बिंदुरेखीय प्रदर्शन को समझ पाएंगे।

1.2 सांख्यिकी की अवधारणा

सांख्यिकी राज्य से संबंधित है। इसके अंग्रेजी शब्द Statistics की उत्पत्ति लैटिन भाषा के Statics, इटैलियन के Statista तथा जर्मन के Statistics से हुई है। इन तीन शब्दों का आशय राजनैतिक राज्य (Political State) से है, अर्थात सांख्यिकी का राज्य से गहरा तादात्म्य है। कुछ विद्वानों ने सांख्यिकी को राज्यशिल्प विज्ञान (Science of Statecraft) या सम्राटों का विज्ञान (Science of Kings) कहा है। गाटफ्राइड आकेनवाल (Gottfried Achenwall) को Father of Statistics कहा जाता है क्योंकि उन्होंने 17वीं शताब्दी में इस विषय का समुचित अध्ययन किया। विलियम पैटी (William Petty) ने सांख्यिकी को Poltical Arithmetic कहा है। कैप्टन जॉन ग्रांट, कैस्पर न्यूमैन (Captain John Graunt, Casper Newman) आदि ने इसके द्वारा जन्म–मरण संबंधी समस्याओं का अध्ययन किया। कार्डन (Cardan) ने इसके द्वारा विभिन्न खेलों की जोखिमों तथा उनसे बचने के उपायों पर प्रकाश डाला। पास्कल (Pascal) तथा फार्मेट (Farmat) नामक गणितज्ञों के बीच निरंतर पत्र व्यवहार हुआ जो 'थ्योरी ऑफ प्रोबेबलिटी' की आधारशिला मानी जाती है।

1.2.1 सांख्यिकी का अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकी गणित की वह शाखा है जिसमें आंकड़ों का संग्रहण, प्रदर्शन, वर्गीकरण और उसके गुणों के आकलन का अध्ययन किया जाता है। सांख्यिकी एक गणितीय विज्ञान है, जिसमें किसी वस्तु से संबंधित आंकड़ों का संग्रह, विश्लेषण, स्पष्टीकरण और प्रस्तुति की जाती है। यह विभिन्न क्षेत्रों में लागू होती है जैसे प्राकृतिक विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, मानविकी, सरकार और व्यापार आदि। सांख्यिकी का मुख्य उद्देश्य अनुसंधान कार्य की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन, उनके कारण एवं परिणामों का विश्लेषण करना है। सांख्यिकी रीतियों के द्वारा ही किसी समस्या से संबंधित भूतकाल के समंकों को एकत्र करके उनकी वर्तमान परिस्थितियों से सापेक्षिक तुलना की जाती है। इन्हीं समंकों के द्वारा घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों के कारणों और उनके परिणामों का विश्लेषण किया जाता है।

परिभाषाएं

वेबस्टर के अनुसार, "समंक किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की स्थिति से संबंधित वर्गीकृत तथ्य है। विशेष रूप से वे तथ्य जिनको अंकों के रूप में अथवा आंकिक सारणियों के रूप में अथवा किसी भी सारणी या वर्गीकृत पद्धति द्वारा प्रस्तुत किया गया हो।"

डॉ. ए.एल. बाउले के अनुसार, "समंक जांच के किसी विभाग में तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक–दूसरे से संबंधित रूप में रखा जाता है।

प्रो. यूल तथा **केण्डाल** के अनुसार, "समंकों से तात्पर्य उन संख्यात्मक तथ्यों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकारके कारणों से प्रभावित हैं।"

एल.आर. कॉनर के अनुसार, "समंक किसी प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटना की माप, आगणन अथवा अनुमान है जो पारस्परिक संबंध का प्रदर्शन करने के लिए किसी पद्धति के अनुसार रखे जाते हैं।"

डॉ. मेयर के अनुसार, "समंक मानव के सामाजिक जीवन से संबंधित उन वास्तविक घटनाओं की वैज्ञानिक एवं विधिवत विवेचना करते हैं जो कि समूहों के संख्यात्मक अध्ययन के फलस्वरूप जाने जा सकते हैं।"

टटिल के अनुसार, "समंक प्राकृतिक अथवा सामाजिक तथ्यों के माप, आगणन अथवा अनुमान होते हैं जिन्हें सामान्यतः व्यवस्थित रूप से क्रमबद्ध, विश्लेषित तथा प्रस्तुत किया जाता है जिससे उनके महत्वपूर्ण अंतरसंबंधों को दर्शाया जा सके।"

जॉनसन एवं **जैक्सन** के अनुसार, "सांख्यिकी रीतियों का वास्तविक उद्देश्य तथ्यों एवं संख्याओं से उचित अर्थ निकालना, अज्ञात घटनाओं के बारे में खोज करना और स्थिति पर प्रकाश डालना है।"

समंक के अर्थ में सांख्यिकी की सबसे व्यापक परिभाषा प्रो. होरेस सेक्राइस्ट ने दी है। उनके अनुसार, "समंकों से तात्पर्य तथ्यों के उस समूह से है जो अनेक कारणों से पर्याप्त मात्रा से प्रभावित होते हैं, जिन्हें अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना या अनुमान परिशुद्धता के एक उचित स्तर के अनुसार की जाती है जिन्हें पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से संग्रह किया जाता है तथा जिन्हें एक–दूसरे के तुलनात्मक रूप में रखा जाता है।

1.2.2 सांख्यिकी की प्रकृति एवं क्षेत्र

सांख्यिकी की प्रकृति से संदर्भित मूलभूत प्रश्न यह है कि 'सांख्यिकी विज्ञान है या कला है, या दोनों है।'

1. विज्ञान के रूप में सांख्यिकी

किसी विषय को विज्ञान तभी कहा जा सकता है, जब–

- वह ज्ञान का क्रमबद्ध अध्ययन व्यवस्थित रूप से दे सके।
- उसमें कारणों और परिणामों के तहत क्रमिक एवं सामूहिक रूप से किसी ज्ञान का विश्लेषण संभव हो।
- उसके नियम तथा विधियां सर्वमान्य, व्यापक एवं सार्वभौमिक हों।

- पूर्वानुमानों तथा कल्पनाओं की उसमें पर्याप्त क्षमा हो।
- वह हमेशा प्रगतिशील रूप में प्रकट होता हो।

सांख्यिकी की प्रकृति वैज्ञानिक है, क्योंकि–

- इसमें प्रत्येक प्रकार के विषयों का अध्ययन क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित है।
- संख्यात्मक तथ्यों के संकलन द्वारा घटनाओं का वर्णन करना और उनमें कारण परिणाम संबंध का विवेचन कर समुचित निष्कर्ष निकालना सांख्यिकी की आधारभूत क्रियाएं हैं।
- सांख्यिकी के नियम अन्य विज्ञानों की भांति व्यापक एवं सार्वभौमिक हैं। ये प्रत्येक स्थान पर समान रूप से लागू किये जा सकते हैं, यथा– महांक जड़ता नियम तथा सांख्यिकीय नियमितता का नियम।
- अतीत व वर्तमान कालीन तथ्यों के आधार पर भविष्य के लिए पूर्वानुमान लगाना सांख्यिकी की महवपूर्ण रीतियों में से एक है। इसकी सहायता से जनसंख्या, मूल्य आदि के पूर्वानुमान किये जा सकते हैं।
- सांख्यिकी की रीतियों में सर्वेक्षण–कार्य तथा सुधार होता रहता है जिससे यह निरंतर प्रगति करती है।

वैज्ञानिक विधि और सांख्यिकी– विद्वानों का एक वर्ग मानता है कि सांख्यिकी विज्ञान नहीं है, यह एक वैज्ञानिक विधि है।

वैज्ञानिक विधि के चार चरण हैं–

1. अवलोकन (Observation),
2. परिकल्पना (Hypothesis),
3. पूर्वानुमान (Pediction) तथा
4. परीक्षण (Verification)।

सांख्यिकी में उपरोक्त सभी चरणों का पर्याप्त उपयोग होता है अतः सांख्यिकी विज्ञान की विधि है। **वालिस** एवं **राबट्र्स** का विचार है कि, "सांख्यिकी स्वतंत्र एवं मूलभूत ज्ञान का समूह नहीं है बल्कि ज्ञान प्राप्त करने की रीतियों का समूह है।"

टिपेट के अनुसार, "विज्ञान के रूप में सांख्यिकीय रीति सामान्य मौलिक विचारों एवं प्रक्रियाओं पर आधारित है।"

अतः सांख्यिकी साध्य नहीं है बल्कि साधन है। सांख्यिकी अन्य विज्ञानों (भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान आदि) की भांति विज्ञान नहीं है, क्योंकि यह ज्ञान प्राप्त करने का एक सक्रिय एवं संतोषप्रद साधन है।

2. कला के रूप में सांख्यिकी

कला केवल तथ्यों का वर्णन ही नहीं करती बल्कि निर्धारित लक्ष्यों की प्राप्ति के उपाय भी बताती है। कला उन क्रियाओं का समूह है जिनकी सहायता से वांछित परिणामों की प्राप्ति तथा अवांछनीय बातों से रक्षा संभव हो सके। कला के लिए विशेष ज्ञान, अनुभव एवं आत्म–संयम की आवश्यकता होती है।

उपर्युक्त तत्वों के आलोक में स्पष्ट होता है कि वह कला है, क्योंकि–

- सांख्यिकीय सामग्री का संकलन एवं उसका उपयोग स्वयं में एक कला है।
- सांख्यिकी बताती है कि समस्याओं के अध्ययन करने एवं उनके समाधान के लिए नियमों एवं सिद्धांतों का उपयोग किस प्रकार किया जाए जिससे वांछित उद्देश्य की पूर्ति हो सके।
- सांख्यिकी की रीतियों का उचित प्रयोग करने के लिए विशेष योग्यता तथा आत्म–संयम की आवश्यकता होती है।

टिप्पणी

सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों

सांख्यिकी विज्ञान एवं कला दोनों ही है। इसके सैद्धांतिक तथा व्यावहारिक दोनों पहलू हैं।

टिपेट के अनुसार, "सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों है। यह विज्ञान इसलिए है, क्योंकि इसकी रीतियां मौलिक रूप से क्रमबद्ध हैं और उनका सर्वत्र प्रयोग होता है और कला इसलिए है, क्योंकि इसकी रीतियों का सफल प्रयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिक की योग्यता व विशेष अनुभव तथा उसके प्रयोग–क्षेत्र, जैसे अर्थशास्त्र के ज्ञान पर निर्भर करता है।"

सांख्यिकी का क्षेत्र

सांख्यिकी का विस्तार उन तमाम क्षेत्रों तक है जहां संख्यात्मक संमकों अथवा तथ्यों का व्यवहार किया जाता है। अर्थशास्त्र, वाणिज्य, गणित, जीवविज्ञान, प्रशासन, राजनीतिशास्त्र, शिक्षाशास्त्र, मनोविज्ञान, व्यवसाय आदि क्षेत्रों में भी सांख्यिकी का प्रयोग होता है।

डब्ल्यू. जे. रीचमैन के शब्दों में कहें तो, "सांख्यिकी विशेष रूप से गतिशील है। वह निरंतर आगे बढ़ रही है। अधिक कुशल तकनीकी, अधिक गणन सुविधाएं और परिणामस्वरूप सर्वेक्षण की घटती लागत, इसके क्षेत्र को और अधिक व्यापक बनाने में सहायता देती हैं।"

सांख्यिकी के सिद्धांत और रीतियां जो वैज्ञानिक एवं तर्कपूर्ण हैं, उन समंकों या तथ्यों जिनमें निरंतर परिवर्तन होता रहता है तथा उन्हें प्रयोगात्मक विधि से नियंत्रित नहीं किया जा सकता, से व्यवहार करती है। यही सांख्यिकी की विषय–सामग्री है। क्राक्स्टन तथा काउडेन के अनुसार, "मानव क्रियाओं के निरंतर बढ़ते हुए क्षेत्र में तथा किसी भी विचार क्षेत्र में जहां संख्यात्मक तथ्य उपलब्ध किये जा सकते हैं, सांख्यिकी की रीतियां उपयोगी सिद्ध होती हैं। आज प्रयास का शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र होगा जिसमें सांख्यिकीय रीतियों को कभी–न–कभी उपयोगी न पाया जाता हो।"

सांख्यिकी के क्षेत्र को निम्नांकित दो प्रमुख भागों में विभाजित करके समझा जा सकता है– सांख्यिकीय रीतियां और व्यावहारिक सांख्यिकी।

(क) सांख्यिकीय रीतियां (Statistical Methods)

जिन रीतियों का उपयोग सांख्यिकी में किया जाता है वे सांख्यिकीय रीतियां कहलाती हैं।

यूल और केंडाल के मत में, "सांख्यिकीय रीतियों से हमारा तात्पर्य उन रीतियों से है जिनका प्रयोग अनेक कारणों से प्रभावित समंकों की व्याख्या करने के लिए किया जाता है।"

जॉनसन और **जैक्सन** के अनुसार, "साख्यिकीय रीतियां वे प्रक्रियाएं हैं जो समंकों के संग्रहण, संगठन, संक्षिप्तीकरण, विश्लेषण, विवेचन एवं प्रस्तुतीकरण में प्रयोग की जाती हैं।"

निष्कर्षतः सांख्यिकीय रीतियां वे युक्तियां हैं जिनके द्वारा जटिल संख्यात्मक समंकों का इस प्रकार विश्लेषण किया जाता है जिससे वे समझने योग्य हो सकें और उनसे ठीक परिणाम निकाले जा सकें।

प्रमुख सांख्यिकीय रीतियां हैं—

- समंकों (आंकड़ों) का संकलन।
- समंकों का वर्गीकरण।
- समंकों का सारणीयन।
- समंकों का प्रस्तुतीकरण।
- समंकों का विश्लेषण।
- समंकों का निर्वचन।
- पूर्वानुमान।

कार्यविधि के आधार पर सांख्यिकीय रीतियों को निम्नलिखित दो उपविभागों में बांटा जा सकता है— (1) विवरणात्मक सांख्यिकी और (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी।

(ख) व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)

सांख्यिकीय रीतियों को व्यवहार में किस प्रकार प्रयोग किया जाए, उसका अध्ययन व्यावहारिक सांख्यिकी में होता है। किस समस्या से संबंधित अंकों का किस प्रकार संग्रहण, विश्लेषण, प्रदर्शन व निर्वचन किया जाए, यह व्यावहारिक सांख्यिकी का क्षेत्र है। किसी समस्या के समाधान में हम इसके सिद्धांतों को मूर्त रूप देते हैं। जनसंख्या, उत्पादन, व्यापार या जन्म—मरण से संबंधित समंकों को कैसे क्रियात्मक रूप दिया जाए, यह व्यावहारिक सांख्यिकी का कार्य है।

व्यावहारिक सांख्यिकी के निम्नांकित प्रमुख उप—विभाग हो सकते हैं— (क) विवरणात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी एवं (ख) वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी।

सामाजिक समस्याओं से संबंधित 'सामाजिक समंक', आर्थिक समस्याओं से संबंधित 'आर्थिक समंक', कृषि समस्याओं से संबंधित 'कृषि समंक' एवं व्यापारिक समस्याओं से संबंधित 'व्यापार समंक' आदि व्यावहारिक सांख्यिकी के अंतर्गत ही आते हैं। आधुनिक समय में 'व्यावसायिकी सांख्यिकी' व्यावसायिक समस्याओं का अध्ययन कर सांख्यिकीय रीतियों द्वारा उनका समाधान का प्रयास किया जाता है। गुण नियंत्रण, क्रियात्मक सर्वेक्षण, व्यापारिक निर्णय हेतु संख्यात्मक विश्लेषण, रेखीय नियोजन, बजट संबंधी नियंत्रण, काल श्रेणी विश्लेषण, गुण संबंध एवं परिकल्पना परीक्षण आदि आधुनिक व्यावसायिक सांख्यिकीय की विधियां हैं।

1.2.3 सांख्यिकी के कार्य

आज के समय में सांख्यिकी के लगातार बढ़ते हुए महत्व का मुख्य कारण उसके द्वारा विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के महत्वपूर्ण कार्यों को संपन्न किया जाना है। सांख्यिकी के महत्वपूर्ण कार्यों को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

1. **आर्थिक समस्या को समझने में सहायक**– किसी अर्थशास्त्री के लिए सांख्यिकी एक ऐसा अपरिहार्य साधन है जो किसी आर्थिक समस्या को समझने में सहायता करता है। इसकी विभिन्न आर्थिक गतिविधियों का प्रयोग करते हुए किसी आर्थिक समस्या के कारणों को मात्रात्मक तथ्यों की सहायता से खोजने का प्रयास किया जाता है।
2. **तथ्यों को संख्यात्मक बनाना**– सांख्यिकी का प्रमुख कार्य तथ्यों को संख्यात्मक रूप देना होता है ताकि उनका विश्लेषण एवं निर्वाचन सरलता से हो सके।
3. **आर्थिक योजनाओं एवं नीतियों के निर्माण में सहायक**– सांख्यिकी आर्थिक योजनाओं एवं नीतियों के निर्माण में सहायक होती है। सांख्यिकी विधियां ऐसी उपयुक्त आर्थिक नीतियों के गठन में सहायता देती हैं जिनसे आर्थिक समस्याओं का समाधान हो सके।
4. **जटिल तथ्यों को सरल बनाना**– जटिल तथ्यों को सरल रूप प्रदान करना सांख्यिकी का एक अन्य महत्वपूर्ण कार्य है। जटिल एवं बिखरे हुए समंकों को न तो सरलता से समझा जा सकता है और न ही कोई निष्कर्ष निकाला जा सकता है। सांख्यिकी के अंतर्गत विभिन्न जटिल समंकों को वर्गीकरण, सारणीयन, चित्रमय व बिंदुरेखीय प्रदर्शन आदि सांख्यिकीय रीतियों द्वारा सरल बनाया जाता है।
5. **सांख्यिकीय द्वारा आंकड़ों को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करना**– सांख्यिकी आंकड़ों के समूह को कुछ संख्यात्मक मापों जैसे माध्य, प्रसरण आदि के रूप में संक्षिप्त करने में सहायता करते हैं। उदाहरण के लिए यदि किसी आंकड़ों में लोगों की संख्या बहुत अधिक है तो उन सबकी आय को याद रख पाना असंभव है। सांख्यिकी रूप से प्राप्त संक्षिप्त अंकों जैसे औसत आय को याद रखना आसान है। इस तरह सांख्यिकी के द्वारा आंकड़ों के समूह के विषय में सार्थक एवं समग्र सूचनाएं प्रस्तुत की जाती हैं।

सांख्यिकी का महत्व

अनेक आर्थिक समस्याओं को सांख्यिकी की सहायता से समझा जा सकता है। यह आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायक है। उदाहरण के लिए उत्पादन एवं उपभोग आदि आर्थिक क्रियाओं में सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है। अर्थशास्त्र के विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकी का महत्व इस प्रकार है–

1. **उत्पादन के अंतर्गत सांख्यिकी**– सांख्यिकी की सहायता से उत्पादन प्रक्रियाओं का तुलनात्मक अध्ययन किया जाता है। उत्पादन संबंधी आंकड़े मांग तथा पूर्ति में सामंजस्य स्थापित करने में उपयोगी एवं सहायक होते हैं, क्योंकि इनके आधार पर वस्तु के उत्पादन की मात्रा को निर्धारित किया जाता है।

टिप्पणी

2. **उपभोग के अंतर्गत सांख्यिकी**– भिन्न–भिन्न आय वाले व्यक्ति अपनी आय का प्रयोग किस प्रकार करते हैं, यह हम उपभोग संबंधी आंकड़ों के द्वारा जान सकते हैं। उपभोग संबंधी आंकड़े व्यक्तियों को अपना बजट बनाने एवं जीवन स्तर को सुधारने में उपयोगी एवं सहायक सिद्ध होते हैं।
3. **वितरण के अंतर्गत सांख्यिकी**– उत्पादन के विभिन्न कारकों (भूमि, श्रम, पूंजी और साहस) के मध्य राष्ट्रीय आय के वितरण की समस्या का समाधान करने में सांख्यिकी विधियों का प्रयोग किया जाता है।
4. **आर्थिक नियोजन में महत्व**– आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी का महत्वपूर्ण स्थान है। आधुनिक युग में प्रत्येक देश अपने विकास और आर्थिक प्रगति के लिए आर्थिक नियोजन करता है। नियोजन आज का व्यवस्थित क्रम है और समंकों के बिना नियोजन की कल्पना भी नहीं की जा सकती है। पर्याप्त एवं विश्वसनीय समंकों के आधार पर ही देश के योजना–निर्माता प्राकृतिक एवं मानवीय संसाधनों, पूंजी, आय आदि की जानकारी प्राप्त करते हैं। योजनाएं लागू करने के पश्चात उनकी प्रगति का मूल्यांकन सांख्यिकी रीतियों द्वारा ही किया जाता है। समंकों के बिना आर्थिक नियोजन एक दिशा सूचक यंत्र रहित जहाज के समान है। अतः समंकों के बिना आर्थिक योजनाओं के निर्धारित लक्ष्यों की प्राप्ति असंभव है।
5. **व्यवसाय में सांख्यिकी का महत्व**– व्यवसाय के क्षेत्र में सांख्यिकी का अत्यधिक महत्व होता है। आजकल व्यवसायी के लिए किसी भी व्यवसाय में अनुमान व संभावनाओं का महत्वपूर्ण स्थान है। उसके लिए यह जानना आवश्यक होता है कि अमुक वस्तु की मांग कहां और कैसी होगी? मूल्य बढ़ने या घटने की संभावना क्या है? सरकार की नीति क्या है? उपभोक्ता की रुचि किस प्रकार की होगी? आदि। एक सफल व्यवसायी वही होता है जिसका अनुमान वास्तविकता के अधिक निकट होता है। व्यवसाय का प्रमुख उद्देश्य अधिकतम लाभ कमाना है। अतः एक सफल व्यवसायी किसी वस्तु की मांग के अनुरूप स्टॉक रखता है।

सांख्यिकी की सीमाएं (Limitations of Statistics)

सांख्यिकी की कुछ सीमाएं भी हैं, जिनके कारण कभी–कभी गलत एवं भ्रामक निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। सांख्यिकी की प्रमुख सीमाएं निम्नलिखित हैं–

1. **समस्या के संख्यात्मक स्वरूप तक सीमित**– सांख्यिकी के अंतर्गत उन्हीं समस्याओं का अध्ययन किया जाता है जिनका संख्यात्मक वर्णन संभव होता है, जैसे– आयु, लंबाई, उत्पादन, मजदूरी आदि। परंतु कुछ ऐसे तथ्य हैं जिनका गुणात्मक अध्ययन ही संभव हो सकता है, जैसे– सुंदरता, बुद्धिमत्ता, ईमानदारी आदि। ऐसे तथ्यों का अध्ययन परोक्ष रूप से तो किया जा सकता है परंतु प्रत्यक्ष रूप से नहीं।
2. **केवल समूहों का अध्ययन**– सांख्यिकी के निष्कर्ष समूह का प्रतिनिधित्व करते हैं। यहां व्यक्तिगत विशेषताओं पर प्रकाश नहीं डाला जाता है। प्रो. नीसवैंगर

के अनुसार, "सांख्यिकी के निष्कर्ष समूह के सामूहिक व्यवहार का अनुमान करने में सहायक होते हैं, उस समूह की व्यक्तिगत इकाइयों का नहीं।" उदाहरण के लिए, "किसी कारखाने के कर्मचारियों की औसत मजदूरी 800 रुपये प्रति माह है।" परंतु कुछ कर्मचारी ऐसे भी हो सकते हैं जिनकी आयु बहुत ही कम हो।

टिप्पणी

3. **नियमों का औसत रूप में सत्य होना**– कोई भी व्यवस्था जो बड़े या जटिल वर्ग को एक दृष्टि में मस्तिष्क के समझने योग्य बनाती है, वह अधिकांश छोटी–छोटी अनियमितताओं को दूर करने में समर्थ नहीं हो सकी है। सांख्यिकी के नियम पूर्ण रूप से सत्य नहीं होते हैं। ये केवल अनुमान तथा संभावनाओं को बताते हैं और सन्निकट प्रवृत्तियों के सूचक होते हैं। यदि यह कहा जाए कि भारत में व्यक्तियों की आयु 35 वर्ष है तो यह कथन औसत रूप से ही सत्य है, सामान्य रूप से नहीं। सांख्यिकी व्यापक रूप से औसतों से संबंधित होती है और ये औसत ऐसे अंकों से बनते हैं जिनमें एक–दूसरे से महत्वपूर्ण भेद होता है। औसत में ये अनियमितताएं छिप जाती हैं।
4. **आंकड़ों में एकरूपता और सजातयीता होना आवश्यक**– सांख्यिकीय निष्कर्ष केवल सजातयीता एवं एकरूप समंकों से ही निकाले जाते हैं। आपस में तुलना करने के लिए भी यह आवश्यक है कि जो समंक एक ही गुण को प्रकट करते हैं, उनमें प्रारंभ से अंत तक उच्च कोटि की स्थिरता आवश्यक है, तभी परिणाम ठीक होंगे। उदाहरणार्थ– वृक्ष की ऊंचाई और मनुष्यों की ऊंचाई की तुलना नहीं की जानी चाहिए।
5. **प्रयोगकर्ता हेतु सांख्यिकीय रीतियों का पूर्ण ज्ञान आवश्यक**– सांख्यिकी की रीतियों का उचित प्रयोग करने के लिए यह आवश्यक है कि व्यक्ति वैज्ञानिक पद्धति से बनायी गयी सांख्यिकीय रीतियों तथा अन्य नियमों को अच्छी प्रकार से समझता हो। **बाउले** के अनुसार, "समंक केवल एक आवश्यक किंतु अपूर्ण औजार प्रदान करते हैं जो उन व्यक्तियों के हाथों में खतरनाक है जो उसकी प्रयोग विधि और कमियों से परिचित नहीं हैं।"
6. **सांख्यिकीय रीति किसी समस्या के अध्ययन की रीति**– **क्राक्स्टन** तथा **काउडेन** के अनुसार, "यही नहीं मान लेना चाहिए कि सांख्यिकीय रीति ही अनुसंधान कार्य में प्रय्रोग की जाने वाली एक मात्र रीति है, न ही इस रीति को प्रत्येक समस्या का सर्वोत्तम हल समझना चाहिए।" **मिल्स** का कहना है, "सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग साधन के रूप में बुद्धिमानी से करना चाहिए तथा सांख्यिकी विश्लेषण से निकलने वाले निष्कर्षों के विवेचन में अत्यंत सावधानी से काम लेना चाहिए।"
7. **निष्कर्ष संदेह से परे नहीं**– यदि सांख्यिकीय समंकों का अध्ययन बिना संदर्भ के किया जाए तो उनसे प्राप्त निष्कर्ष असत्य व भ्रामक सिद्ध हो सकते हैं। बिना संदर्भ व परिस्थितियों को समझते हुए जो निष्कर्ष निकाले जाते हैं, वे यद्यपि सत्य जान पड़ते हैं परंतु वास्तविक रूप से वे निष्कर्ष सत्य नहीं होते हैं। अतएव सांख्यिकीय परिणामों का निर्वचन करते समय उन्हें उनके उचित संदर्भ में रखना चाहिए। **बाउले** ने भी कहा है, "जो समंकों का उपयोग करता है, उसे

टिप्पणी

अनुसंधान के निष्कर्षों को प्रभावित मानकर संतुष्ट नहीं हो जाना चाहिए बल्कि उस विधि के समस्त अंगों का पर्याप्त ज्ञान प्राप्त करना चाहिए।"

सांख्यिकी की सीमाओं को हटाया जाना संभव नहीं है। सांख्यिकी की सीमाओं को ध्यान में न रखकर सांख्यिकीय समंकों के आधार पर निष्कर्ष निकालना अनुचित है। अनुसंधान कार्य के दौरान सांख्यिकी की सीमाओं की उपेक्षा करने के कारण सांख्यिकी (या समंकों) के प्रति अविश्वास पैदा होना स्वाभाविक है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. 'सांख्यिकी' शब्द के जन्मदाता निम्न में से कौन हैं?

   (क) मार्शल (ख) गाटफ्राइड आकेनवाल

   (ग) बाउले (घ) एडम स्मिथ

2. निम्न में से किन क्षेत्रों में सांख्यिकी का प्रयोग होता है?

   (क) शिक्षाशास्त्र (ख) राजनीतिशास्त्र

   (ग) वाणिज्य (घ) उपरोक्त सभी

1.3 समग्र एवं न्यादर्श/प्रतिदर्श

सर्वेक्षण के सीमित क्षेत्र में, जहां समस्या का गहन अध्ययन आवश्यक हो, वहां संगणना विधि का सहारा लिया जाता है। इस विधि के अंतर्गत समग्र में व्याप्त प्रत्येक इकाई के संबंध में विस्तृत सूचना प्राप्त की जाती है। सिम्पसन और काफका के अनुसार, "समग्र से तात्पर्य किसी अनुसंधान क्षेत्र की सभी इकाइयों के समुदाय से है।" इसी प्रकार रोसेण्डर ने कहा है कि "एक समग्र विचाराधीन इकाइयों की संपूर्णता है।" इस विधि के प्रयोग से समंकों में मौलिकता एवं सजातीयता के गुण बने रहने के साथ–साथ शुद्धता की मात्रा भी अधिक होती है। भारत में प्रति दस वर्ष बाद जनगणना इसी विधि द्वारा की जाती है। यदि किसी विश्वविद्यालय के प्राध्यापकों के मासिक व्यय के अध्ययन के लिए सभी प्राध्यापकों से सूचना प्राप्त की जाए तो यह संगणना विधि शोध होगा। एक पुस्तक के प्रकाशन में प्रूफ संसर्वेक्षणन करते समय संगणना विधि का प्रयोग ही करना होगा। इस विधि के प्रयोग में समय, श्रम एवं धन की अधिक आवश्यकता होती है।

प्रतिदर्श विधि

प्रतिदर्श विधि के अनुसार समग्र में से कुछ प्रतिनिधि इकाइयों को चुन लिया जाता है और केवल उन इकाइयों के संबंध में ही आंकड़े एकत्रित करके पूर्ण समग्र के लिए निष्कर्ष निकाले जाते हैं। यह विधि एक वैज्ञानिक विधि है। इस विधि से निकाले गए निष्कर्ष भी लगभग उतने ही विश्वसनीय होते हैं जितने कि संगणना विधि से प्राप्त परिणाम। संगणना विधि की जटिलता तथा अधिक खर्चीलेपन ने प्रतिदर्श विधि को शोध के लिए अधिक व्यावहारिक बना दिया है।

कुछ परिस्थितियों में तो प्रतिदर्श विधि आवश्यक हो जाती है, जैसे किसी शीतल पेय के स्वाद की जांच करने के लिए सभी बोतलों को नहीं पिया जा सकता है। यहां पर प्रतिदर्श विधि का सहारा लेना ही पड़ेगा।

प्रतिदर्श के उद्देश्य

प्रतिदर्श का मुख्य उद्देश्य न्यादर्श के अध्ययन के आधार पर समग्र के संबंध में निर्वचन (Infenrence) करना तथा समस्या का समाधान करने में सहायक सिद्ध होना है। अन्य शब्दों में प्रतिदर्श एक ऐसा साधन है, जिसकी सहायता से समूह या समग्र की विशेषताओं का ज्ञान होता है। इसके अतिरिक्त प्रतिदर्श का उद्देश्य समग्र के लिए निर्मित अनुमानों (Estimates) की विश्वसनीयता का परीक्षण करना भी है। इसके लिए उसी मूल समग्र में से अन्यान्य न्यादर्श लेकर विश्लेषण किए जाते हैं, जिनके परिणामों की सहायता से पूर्व अनुमानों की जांच की जाती है। वैदरबर्न के अनुसार, "प्रतिदर्श का उद्देश्य प्रथम, प्रतिचयन के आधार पर समग्र के गुणों का अनुमान लगाने तथा द्वितीय, इन अनुमानों की परिशुद्धता को मापने से संबंधित है।"

न्यादर्श–अध्ययन से जो विभिन्न मूल्य तथा सांख्यिकी माध्य, अपकिरण आदि प्राप्त किए जाते हैं, उन्हें प्रतिदर्शज (Xs Statisitcs) कहते हैं और समग्र के सांख्यिकीय विश्लेषण से प्राप्त मूल्यों को प्राचल (a Parameter) कहा जाता है।

प्रतिदर्श का आधार

सांख्यिकी की प्रतिदर्श प्रणाली निम्नांकित सिद्धांतों पर आधारित है–

1. **विविधता में अंतर्निहित एकता**– सभी भौतिक पदार्थों एवं प्रवृत्तियों में विविधता होते हुए भी उनमें अंतर्निहित एकता विद्यमान होती है। प्रतिदर्श प्रणाली संभावना सिद्धांत की इसी मान्यता को आधार मानती है। बाजार में विभिन्न वस्तुओं के व्यक्तिगत गुणों में अंतर दृष्टिगत होने पर भी समूची वस्तुओं के औसत मूल्यों में कोई विशेष अंतर नहीं होता है। इसलिए वस्तुओं के मूल्य के उच्चावचनों का अध्ययन संगणना रीति से करने की अपेक्षा यदि हम प्रतिदर्श प्रणाली वर्ग में से न्यादर्श लेकर सर्वेक्षण अध्ययन करें तो परिणामों में कोई अंतर नहीं होगा।
2. **समग्र गुणों का समावेश**– प्रतिदर्श प्रणाली का दूसरा आधार, न्यादर्श में समग्र के गुणों में निहित होने की संभावना है। यह तथ्य सांख्यिकीय नियमितता सिद्धांत पर आश्रित है, जिसके अनुसार, "यदि समग्र में यादृच्छिक रूप से इकाइयों को चुना जाए, तो इस प्रकार चुनी गई इकाइयों में समग्र की विशेषताएं विद्यमान होंगी।"
3. **समुचित परिशुद्धता** – प्रतिदर्श प्रणाली को स्वीकार करने का तीसरा आधार न्यादर्श के परिणामों में समुचित परिशुद्धता होना है। हालांकि न्यादर्श के परिणाम शत–प्रतिशत वे नहीं होते, जैसे कि संगणना रीति से प्राप्त होते हैं। किंतु अपेक्षित परिशुद्धता को प्राप्त करने के लिए न्यादर्श समुचित के आकार को लेकर दोनों परिणामों में अंतर नगण्य किया जा सकता है।

4. **परिणामों का परीक्षण** – प्रतिदर्श रीति में एक अन्य आधारभूत विशेषता यह है कि इसके परिणामों की विश्वसनीयता की जांच प्रतिदर्श विभ्रम परीक्षण नियमों द्वारा की जा सकती है।

उपर्युक्त आधारों ने प्रतिदर्श विधि को स्वीकार्य बनाया है।

प्रतिदर्श का महत्व

साधारण व्यवहार एवं जीवन में तो प्रतिदर्श विधि का प्रयोग पुरातन काल से ही चला आ रहा है, परंतु आज व्यवसाय एवं आर्थिक सर्वेक्षण में भी इस विधि का उपयोग उत्तरोत्तर बढ़ रहा है। प्रो. नीसवेंगर के शब्दों में, "आर्थिक एवं व्यावसायिक सर्वेक्षण में प्रतिदर्श रीति का उपयोग विस्तृत रूप से किया जाता है क्योंकि सामूहिक समंकों के अध्ययन में कभी–कभी यह एक मात्र संभव एवं सर्वाधिक व्यावहारिक और सामान्यतः सर्वोत्तम विधि होती है।" इस कथन का विश्लेषण करने पर प्रतिदर्श विधि का महत्व निम्न तीन कारणों से होता है–

1. **एक मात्र संभव विधि**– व्यवसाय में कई बार जब सर्वेक्षण का क्षेत्र असीम हो अथवा परीक्षण के दौरान इकाइयों के नष्ट हो जाने की संभावना हो, तो प्रतिदर्श विधि ही एकमात्र संभव मानी जाती है। जैसे दियासलाई उद्योग में निर्माणाधीन वस्तुओं की किस्म का परीक्षण प्रतिदर्श रीति से किया जाता है। यदि परीक्षण में संगणना रीति का उपयोग किया जाए तो सभी इकाइयां परीक्षण में ही नष्ट हो जाएंगी। अतः ऐसे उद्योगों में जहां परीक्षण के दौरान निर्माणाधीन वस्तुओं के नष्ट होने की संभावना हो, जांच के लिए प्रतिदर्श विधि ही एकमात्र संभव रीति होती है।
2. **सर्वाधिक व्यावहारिक विधि**– हालांकि सर्वदा समग्र अपरिमित नहीं होता, फिर भी यदि समग्र में हजारों या लाखों इकाइयां हों तो, उनका विश्लेषण करने में प्रतिदर्श प्रणाली ही सर्वाधिक व्यावहारिक होती है क्योंकि प्रतिदर्श प्रणाली में समय, धन व श्रम की बचत होती है। उदाहरणार्थ, यदि दिल्ली जैसे नगर में पेट्रोल के मूल्यों में वृद्धि का मोटर चालकों पर हुए प्रभाव का सर्वेक्षण करना हो तो प्रतिदर्श प्रणाली ही सुविधाजनक एवं व्यावहारिक विधि होगी न कि संगणना विधि।
3. **सर्वोत्तम विधि**– प्रतिदर्श विधि से प्राप्त परिणाम लगभग उतने ही विशुद्ध होते हैं जितने विशुद्ध संगणना रीति से प्राप्त होते हैं। इसमें जांच का क्षेत्र सीमित होने से अधिक गहन जांच संभव होती है तथा परिणामों को समग्र पर आसानी से लागू किया जा सकता है। नीसवेंगर ने भी कहा है कि वास्तव में न्यादर्श के लिए निकाली गई अपेक्षाकृत थोड़ी–सी इकाइयां अधिक शुद्धता से एकत्रित की जा सकती हैं तथा समग्र की पूर्ण गणना की अपेक्षा अधिक उत्तम परिणाम प्रदान करती हैं।

प्रतिदर्श के गुण व दोष

प्रतिदर्श रीति की उपयोगिता आज सभी सर्वेक्षण क्षेत्रों एवं विज्ञानों में है। दैनिक जीवन में भी बाजार से सामान खरीदने से पूर्व उपभोक्ता द्वारा थोड़ा–सा नमूना देखकर सौदा

तय किया जाता है। विभिन्न आर्थिक एवं सामाजिक सर्वेक्षण समस्याओं का अध्ययन इसी रीति द्वारा किया जाता है। प्रतिदर्श रीति के निम्न गुण हैं–

1. **धन व श्रम की बचत**– प्रतिदर्श रीति में संगणना विधि की तुलना में कम इकाइयों का संकलन एवं विश्लेषण करना पड़ता है, जिससे धन व श्रम की बचत होना स्वाभाविक है।
2. **समय की बचत**– इस रीति को कम समय में ही संपन्न किया जाता है, जिसके परिणामस्वरूप इसकी उपयोगिता रहती है।
3. **गहन अध्ययन**– चूंकि प्रतिदर्श इकाइयां संख्या में कम होती हैं, अतः उनका गहन व विस्तृत अध्ययन संभव होता है।
4. **परिशुद्ध निष्कर्ष**– प्रतिदर्श रीति के अंतर्गत निष्कर्ष प्रायः परिशुद्ध होते हैं। यदि न्यादर्श का चयन यादृच्छिक रूप में तथा समुचित आकार में किया जाए।
5. **संगणना रीति की असंभवता**– सर्वेक्षण का क्षेत्र विस्तृत होने तथा इकाइयों के नाशवान होने पर जहां संगणना रीति का उपयोग असंभव होता है, वहां प्रतिदर्श रीति ही काम में लाई जाती है।
6. **समग्र के परिणामों का परीक्षण**– प्रतिदर्श रीति का उपयोग संगणना रीति द्वारा प्राप्त परिणामों की शुद्धता एवं विश्वसनीयता का परीक्षण करने के लिए भी किया जाता है। भारत में पिछली बार जनगणनाओं के परिणामों से संबंधित विभ्रम की जांच प्रतिदर्श रीति द्वारा की गई थी।
7. **वैज्ञानिक विधि**– प्रतिदर्श विधि गणितीय संभाविता सिद्धांत पर आधारित है, जिसमें न्यादर्श के आकार की पर्याप्तता एवं विश्वसनीयता की जांच की जा सकती है तथा अशुद्धियों का समुचित अनुमान भी लगाया जा सकता है।
8. **संगठन एवं प्रबंध में सुविधा**– इस रीति में सर्वेक्षण कार्य को संगठित करने में कोई विशेष कठिनाई नहीं होती। सर्वेक्षणार्थियों की संख्या कम होने से उन्हें प्रशिक्षण देने एवं उन पर निगरानी रखने में सुविधा रहती है।

प्रतिदर्श रीति के दोष

1. **सूक्ष्म अध्ययन के लिए अनुपयुक्त**– प्रतिदर्श रीति की सहायता से समुचित परिशुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं परंतु समग्र की प्रत्येक इकाई का सूक्ष्म अध्ययन अपेक्षित हो, तो यह रीति अनुपयुक्त रहेगी।
2. **पूर्वाग्रह की संभावना**– इस रीति में न्यादर्श के चयन एवं सूचना संकलित करने में समुचित सावधानी के अभाव में अभिनीत होने की संभावना रहती है, जिसके परिणाम भ्रामक हो सकते हैं।
3. **प्रतिनिधि न्यादर्श की कठिनाई**– यदि न्यादर्श का आकार कम हो अथवा उसका चयन यादृच्छिक रूप में न किया जाए तो इसके कारण अशुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं।
4. **विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता**– प्रतिदर्श रीति की सफलता के लिए शोधार्थियों को न्यादर्श के चयन एवं संभावित विभ्रम के संबंध में विशेष ज्ञान होना आवश्यक है।

5. **न्यादर्श पर स्थिर रहने में कठिनाई**– कई बार न्यादर्श को पूर्वनिर्धारित इकाइयों के किन्हीं कारणों से उपलब्ध न होने पर अन्य इकाइयों को प्रतिस्थापित करना पड़ता है, जिससे प्रतिदर्श की निष्पक्षता प्रभावित होती है।

टिप्पणी

6. **समग्र की विविधता से रीति की सीमितता**– विविध गुणों वाली इकाइयों के समग्र में, जहां प्रतिदर्श प्रणाली का उपयोग नहीं किया जा सकता, वहां संगणना रीति ही उपयुक्त रहती है।

उत्तम न्यादर्श/प्रतिदर्श के आवश्यक तत्व

सफल प्रतिचयन सिद्धांत के लिए यह आवश्यक है कि न्यादर्श समग्र की इकाइयों का प्रतिनिधित्व करता हो। पी.वी. यंग ने लिखा है कि "न्यादर्श का आकार उसके प्रतिनिधित्व होने का बीमा नहीं है। समुचित रूप से चुना गया अपेक्षाकृत छोटे आकार का न्यादर्श दोषपूर्ण रूप से चुने गए बड़े आकार के न्यादर्श से अधिक विश्वसनीय होता है।" इस प्रकार स्पष्ट होता है कि यहां यह आवश्यक नहीं है कि प्रतिदर्श में कितनी इकाइयां सम्मिलित हों बल्कि आवश्यकता इस बात की है कि यादृच्छिक रूप से चुनी गई इकाइयां समस्त समग्र का प्रतिनिधित्व करती हों। एक उत्तम एवं प्रतिनिधि न्यादर्श के आवश्यक तत्व निम्न प्रकार से हैं–

1. **समग्र का प्रतिनिधित्व**– 'प्रतिचयन सिद्धांत' का यह एक प्रमुख आधार है कि न्यादर्श इकाइयां समग्र का प्रतिनिधित्व करती हों। इसका तात्पर्य यह है कि प्रतिदर्श का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए, जिसमें सर्वेक्षण अध्ययन से संबंधित सभी वर्गों और समूहों की विशेषताओं को स्पष्ट करने वाली इकाइयों का समावेश हो।
2. **समुचित आकार**– प्रतिदर्श के एक समुचित आकार का निर्धारण सर्वेक्षण अध्ययन की सफलता के लिए आवश्यक है। उदाहरण के तौर पर 10,000 विद्यार्थियों के अध्ययन के लिए यदि 5 विद्यार्थियों का चयन कर लिया जाता है, तो न्यादर्श से परिणाम सही प्राप्त हो, ऐसी संभावना कम होती है। क्योंकि 5 विद्यार्थियों में 10,000 विद्यार्थियों की विशेषताओं का होना असंभव–सा होता है। इसी प्रकार यदि 1,000 विद्यार्थियों का चयन कर लिया जाए तो इससे अत्यधिक कार्य बढ़ जाता है और सूक्ष्म अध्ययन करना कठिन हो जाता है। फिर भी यह आवश्यक नहीं है कि इससे सही परिणाम प्राप्त हों। अतः प्रतिदर्श के अंतर्गत आने वाली इकाइयां, समग्र की प्रकृति, आकार एवं जांच के उद्देश्य के अनुरूप होनी चाहिए। अतः प्रतिदर्श इतना पर्याप्त अवश्य होना चाहिए कि वह समग्र के प्रत्येक वर्ग की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व कर सके। पी.वी. यंग के अनुसार " एक उपयुक्त प्रतिदर्श वह है, जिसमें विश्वसनीय निष्कर्षों को प्रस्तुत करने के लिए पर्याप्त इकाइयों का समावेश हो।"
3. **स्वतंत्रता**– एक श्रेष्ठ प्रतिदर्श के लिए यह आवश्यक है कि न्यादर्श के अंतर्गत समग्र से संबंधित प्रत्येक इकाई के चुने जाने की पूरी स्वतंत्रता हो। अर्थात इकाई का चुनाव व्यक्तिगत इच्छा अथवा पसंद के आधार पर न किया जाए।
4. **सजातीयता**– इस सजातीयता का अर्थ है कि प्रतिदर्श में सम्मिलित इकाइयों की प्रकृति में अत्यधिक विषमता नहीं हो अर्थात समान प्रकृति की हों।

5. **तर्क पर आधारित**– किसी अच्छे प्रतिदर्श का एक वैज्ञानिक आधार यह है कि उसमें सम्मिलित की गई इकाइयों का आधार व्यावहारिक हो। अव्यावहारिक तौर पर चुनी गई इकाइयां समग्र की सही स्थिति स्पष्ट करने में अक्षम होती हैं।

6. **अनुभव पर आधारित**– एक अच्छे प्रतिदर्श की विशेषता यह भी है कि उसमें सम्मिलित की गई इकाइयां न केवल तर्क पर ही आधारित हों बल्कि उनका समावेश व्यावहारिक अनुभव के आधार पर भी हो। क्योंकि केवल नियमों पर आधारित रहने से सामान्यतया एक श्रेष्ठ और उपयोगी प्रतिदर्श को प्राप्त करना बहुत कठिन हो जाता है।

प्राचल एवं प्रतिदर्शज

समग्र की समस्त इकाइयों के अनुसंधान से निकाले गए विभिन्न सांख्यिकीय माप समांतर माध्य, यथा प्रमाप, विचलन या सहसंबंध गुणांक प्राचल कहलाते हैं जबकि समग्र की समस्त इकाइयों के स्थान पर यादृच्छिक रूप से चुनी गई इकाइयों से निकाले गए विभिन्न सांख्यिकीय माप प्रतिदर्शज कहलाते हैं। ये प्रतिदर्शज 'प्रतिचयन सिद्धांत' पर आधारित होते हैं एवं समग्र की विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करते हैं।

निष्कर्ष के रूप में यह कहा जा सकता है कि समग्र के माप 'प्राचल' एवं प्रतिदर्श के माप 'प्रतिदर्शज' कहलाते हैं। जैसे कि किसी विश्वविद्यालय के समस्त विद्यार्थियों के समग्र की ऊंचाई का समांतर माध्य, प्रमाप, विचलन और सहसंबंध गुणांक प्राचल कहलाएंगे जबकि इसी समग्र की यादृच्छिक रूप से चुनी गई कुछ इकाइयों के समांतर माध्य, प्रमाप, विचलन एवं सहसंबंध गुणांक आदि प्रतिदर्शज कहलाएंगे। इसी प्रकार व्यावसायिक सांख्यिकी पढ़ने वाले समस्त छात्रों के औसत अंक प्राचल एवं उनमें से चुने गए प्रथम श्रेणी प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों के औसत अंक प्रतिदर्शज कहलाएंगे क्योंकि प्रथम श्रेणी प्राप्त करने वाले छात्र संपूर्ण समूह के न्यादर्श हैं।

न्यादर्श के आकार को प्रभावित करने वाले घटक

न्यादर्श का अनुकूलतम आकार किसी एक तत्व द्वारा निर्धारित नहीं होता। यह अनेक घटकों द्वारा प्रभावित होता है, जो इस प्रकार हैं–

(क) समग्र की प्रकृति– समग्र की इकाइयां यदि सजातीय हैं तो छोटा आकार भी पर्याप्त होगा परंतु यदि वे विविध प्रकृति की हैं तो न्यादर्श बड़े आकार का लेना होगा।

(ख) वर्गों की संख्या– यदि संकलित सूचना का वर्गीकरण करने पर अधिक वर्ग बनाए जाते हैं तो न्यादर्श का आकार भी बड़ा होगा। क्योंकि छोटे आकार का न्यादर्श लेने पर कुछ वर्गों में एक या दो मद ही आ सकेंगे, जिससे समग्र का विश्लेषण नहीं हो सकेगा।

(ग) अनुसंधान की प्रकृति– यदि विस्तृत व गहन अध्ययन अपेक्षित है तो न्यादर्श छोटा रखना होगा क्योंकि बड़े न्यादर्श के अध्ययन में अधिक साधनों की आवश्यकता होती है। साधारण सर्वेक्षण के लिए बड़े तथा तकनीकी सर्वेक्षण के लिए लघु आकार के न्यादर्श की आवश्यकता होती है।

टिप्पणी

(घ) **परिशुद्धता का स्तर**– पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि न्यादर्श का आकार बड़ा होने पर परिशुद्धता की मात्रा भी उतनी ही अधिक होगी परंतु ऐसा सभी दशाओं में नहीं होता। यदि न्यादर्श का चयन विशेषज्ञों द्वारा विशेष वैज्ञानिक विधि से किया जाए तो छोटे आकार का न्यादर्श भी विशुद्ध परिणाम प्रस्तुत करता है।

(ङ) **प्रतिदर्श विधि**– न्यादर्श का आकार प्रतिदर्श विधि के चुनाव पर भी आधारित होता है। न्यादर्श का बड़ा होना ही पर्याप्त नहीं है वरन उसका चयन निष्पक्ष रीति से किया जाना अत्यंत आवश्यक है।

"एक न्यादर्श बड़ा होते हुए भी व्यर्थ हो सकता है क्योंकि वह दैव न्यादर्श पर आधारित नहीं है अथवा वह दैव न्यादर्श पर आधारित होते हुए भी अविश्वसनीय हो सकता है क्योंकि वह छोटा है।"

इस कथन के प्रथम भाग में इस तथ्य पर बल दिया गया है कि न्यादर्श का बड़ा होना परंतु उसका चयन दैव प्रतिदर्श द्वारा न किया जाना, उतना ही भ्रमपूर्ण है जितना कि कथन के दूसरे भाग में प्रतिपादित दैव आधार पर न्यादर्श का चुना जाना। परंतु उसका आकार छोटा होना। दोनों के निष्कर्ष अविश्वसनीय होते हैं।

अतः न्यादर्श दैव प्रतिदर्श पर आधारित होना चाहिए तथा न्यादर्श की इकाइयों का आकार पर्याप्त संख्या में हो तभी न्यादर्श विधि से निकाले गए निष्कर्ष विश्वसनीय होंगे। दैव प्रतिदर्श विधि का प्रयोग इसलिए उपयोगी है क्योंकि इस विधि से पक्षपात की संभावना न्यूनतम होती है तथा उसके परिणामस्वरूप न्यादर्श में प्रतिनिधित्व का गुण उपलब्ध हो जाता है।

(क) **सूचनादाताओं की प्रकृति**– यदि सूचना कम सूचकों से ही प्राप्त होने की संभावना है तो न्यादर्श को अधिक रखना होगा।

(ख) **प्रश्नावली का आकार**– प्रश्नावली का आकार तथा पूछे गए प्रश्नों की संख्या अधिक होने पर न्यादर्श को अधिक रखना होगा।

(ग) **व्यावहारिक कारण**– वित्त, समय तथा प्रशिक्षित प्रगणकों की संख्या भी न्यादर्श के आकार को प्रभावित करते हैं। इन साधनों की प्रचुरता होने पर न्यादर्श बड़ा किया जा सकता है।

प्रतिदर्श के सांख्यिकी मापों के आधार पर संबंधित समग्र के सांख्यिकी मापों का अनुमान लगाना और उससे तुलना करना ही इस सिद्धांत का उद्देश्य है। वैदरबर्न ने इस संबंध में कहा है कि "प्रतिदर्श सिद्धांत प्रथम–प्रतिदर्श की सहायता से समग्र के लक्षणों का अनुमान लगाने तथा द्वितीय–अनुमानों की विश्वसनीयता का मूल्यांकन करने से संबंध रखता है।" इसका अध्ययन निम्न उद्देश्यों के लिए किया जाता है–

1. **प्राचल का अनुमान**– सर्वेक्षणकर्ता के लिए प्रतिचयन सिद्धांत का यह एक प्रमुख उद्देश्य है कि इसके विभिन्न सांख्यिकीय मापों के आधार पर समग्र की प्रवृत्ति के बारे में अनुमान लगाया जाता है। दूसरे शब्दों में प्रतिदर्श के विभिन्न मापों, जिन्हें प्रतिदर्शज कहा जाता है, के आधार पर समग्र के प्राचल के अनुमान बिंदु आकलन व अंतराल आकलन हो सकते हैं। जब विशिष्ट बिंदु पर प्राचल का अनुमान लगाया जाता है तो इसे बिंदु आकलन जबकि कुछ सीमाओं के मध्य

ज्ञात किया गया प्राचल अनुमान अंतराल आकलन कहलाता है– जैसे किसी विश्वविद्यालय के 5000 शिक्षकों में से 200 शिक्षकों के न्यादर्श माध्य की आय 12,500 ₹ प्रतिमास है, तो यह समग्र का बिंदु आकलन होगा। माध्य की आय 12,000 ₹ से 13,000 ₹ के मध्य यदि अनुमानित की जाए तो यह अंतराल अनुमान होगा क्योंकि इसके अंतर्गत किसी निश्चित बिंदु का निर्धारण न होकर कुछ सीमाओं के मध्य आय का अनुमान लगाया गया है।

2. **परिकल्पना परीक्षण**– परिकल्पना परीक्षण के अंतर्गत इस बात की जांच की जाती है कि अवलोकित सांख्यिकी माप और परिकल्पित सांख्यिकी माप (प्राचल) में कोई समानता है अथवा नहीं? यदि उनमें कोई अंतर है तो यह अंतर सार्थक है या नहीं? इस बात की जांच करना ही परिकल्पना परीक्षण है।

   इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है–

   एक 6 अंकों के पासे को 300 बार उछालने पर अंक 1, 3 व 5, 160 बार तथा अंक 2, 4, 6, 140 बार आते हैं। इस परिणाम के आधार पर परीक्षा की जाती है कि पासा वास्तव में सुडौल है अथवा नहीं? एक सुडौल पासे को उछालने पर 1, 3 व 5 तथा 2, 4, 6 अंक आने की प्रायिकता 1/2 होती है। अर्थात यहां पर प्रत्याशा यह है कि पासे को 300 बार उछालने पर 150 बार 1, 3 व 5 तथा 150 बार ही 2, 4 व 6 अंक आएगा जबकि वास्तव में 1, 3 व 5 अंक आने की अवलोकित संख्या 160 है। अब देखना यह है कि प्रत्याशा और अवलोकन का यह अंतर (160–150) 10 सार्थक है या नहीं। यदि यह अंतर सार्थक है तो पासा सुडौल नहीं है और पासे के सुडौल होने के लिए परिकल्पना सही नहीं है। यदि यही अंतर सार्थक सिद्ध नहीं होता है तो पासा सुडौल माना जाएगा अर्थात हमारी परिकल्पना सही होगी। इस प्रकार प्रत्याशा व अवलोकित आवृत्तियों के अंतर की सार्थकता की जांच करना ही परिकल्पना परीक्षण कहलाता है।

प्रतिदर्श की प्रविधियां

न्यादर्श से संपूर्ण समग्र के संबंध में निष्कर्ष के लिए यह आवश्यक है कि न्यादर्श पूर्वाग्रह से मुक्त हो। अतः समग्र में से सांख्यिकी न्यादर्श का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए, जिससे न्यादर्श पूर्णरूप से समग्र का प्रतिनिधित्व कर सके। अर्थात उसमें उन समस्त विशेषताओं का समावेश होना चाहिए जो समग्र में मौजूद हैं। प्रतिदर्श की मुख्यतः दो प्रविधियां हैं– (1) दैव प्रतिदर्श विधियां, (2) गैर दैव प्रतिदर्श विधियां।

ऐसी विधियां जो संभावना सिद्धांत पर आधारित होती हैं तथा जिनमें समग्र की प्रत्येक इकाई को न्यादर्श में सम्मिलित होने का अवसर प्राप्त होता है, दैव प्रतिदर्श विधियां कहलाती हैं। इसके विपरीत जब किसी अन्य आधार पर जैसे व्यक्तिगत निर्णयन के आधार पर प्रतिदर्श के लिए इकाइयों का चुनाव किया जाता है, तब ऐसी विधियों को गैर दैव प्रतिदर्श विधियों की संज्ञा दी जाती है।

(क) दैव प्रतिदर्श विधियां

दैव प्रतिदर्श विधि द्वारा प्रतिदर्श का चयन अनुसंधानकर्ता की वैयक्तिक इच्छा पर निर्भर नहीं होता है। इसमें चुने जाने के लिए समस्त "प्रतिचयन इकाइयों" की समान संभावना

टिप्पणी

होती है। इस संबंध में करलिंजर ने कहा है कि "दैव प्रतिदर्श समग्र में से एक भाग या न्यादर्श प्राप्त करने की वह विधि है, जिसमें समग्र के प्रत्येक सदस्य को चुने जाने के समान अवसर होते हैं।" इस प्रकार स्पष्ट है कि दैव प्रतिदर्श विधि द्वारा चुनी गई न्यादर्श इकाइयां समग्र का प्रतिनिधित्व करने में सक्षम होती हैं क्योंकि दैव प्रतिदर्श रीति द्वारा चुने गए न्यादर्शों पर पक्षपात का प्रभाव नहीं पड़ता है। दैव प्रतिदर्श विधि द्वारा न्यादर्श चुनने की विधियां निम्न हैं–

1. सरल दैव प्रतिदर्श विधियां– सरल दैव प्रतिदर्श विधियां ऐसी प्रतिदर्श विधियां होती हैं, जिनमें इकाइयों का चुनाव करते समय क्षेत्र, स्तर एवं समूह आदि प्रतिबंधों का कोई ध्यान नहीं रखा जाता। सरल दैव प्रतिदर्श विधियां दो प्रकार की होती हैं–

(क) **लॉटरी विधियां**– लॉटरी विधि न्यादर्श के लिए प्रतिचयन इकाइयों का चुनाव करने हेतु समग्र की समस्त इकाइयों की पर्चियां, गोलियां या कार्ड समान आकृति में बना लिए जाते हैं। तत्पश्चात निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा इनमें से कुछ इकाइयों का चयन करवा लिया जाता है। लॉटरी विधि के लिए निम्न में से कोई भी तरीका अपनाया जा सकता है–

(i) **ढोल घुमाकर**– दैव प्रतिदर्श द्वारा प्रतिचयन इकाइयों के चयन की इस विधि के अंतर्गत एक ढोल में से 0 से 9 तक के अंकों के लिखे हुए लकड़ी अथवा लोहे के टुकड़े होते हैं। ढोल को निष्पक्ष व्यक्ति के द्वारा हाथ से या यांत्रिक क्रिया द्वारा घुमाया जाता है, तत्पश्चात उसमें से एक–एक टुकड़े को निकाल कर प्रतिचयन इकाइयों का चुनाव किया जाता है।

(ii) **घड़ी के प्रयोग द्वारा**– प्रतिदर्श की इस विधि में कई बार एक घड़ी का प्रयोग भी किया जाता है, जिसके चारो ओर 0 से 9 तक के अंक लिखे होते हैं और केंद्र में एक सुई होती है, जिसको चालू कर दिया जाता है। जिस अंक के सामने सुई रुकती है, उसी इकाई को प्रतिदर्श के लिए चुन लिया जाता है।

(iii) **आंख पर पट्टी बांधकर तीर मारना**– इस विधि द्वारा प्रतिचयन इकाइयों का चयन करने के लिए समग्र की इकाइयों का एक मानचित्र तैयार किया जाता है। फिर एक व्यक्ति आंख पर पट्टी बांध कर एक निश्चित दूरी से मानचित्र पर तीर मारता है। तीर जिस किसी इकाई पर लगता है, उसे ही अध्ययन के लिए प्रतिचयन इकाई में शामिल कर लिया जाता है।

(iv) **लॉटरी मशीन द्वारा**– आधुनिक समय में लॉटरी निकालने की उपर्युक्त विधियां वैज्ञानिक नहीं होने के कारण, उनके स्थान पर लॉटरी मशीन का प्रयोग किया जाता है। इसमें कई पहिए होते हैं, जिन सभी पर 0 से 9 तक अंक लिखे होते हैं। विद्युत द्वारा अथवा हाथ से घुमाने पर सभी पहिए घूमने लगते हैं और कुछ समय बाद रुक जाते हैं। रुक जाने पर जो अंक इनमें ऊपर ही ऊपर केंद्र में आते हैं, उनके आधार पर इकाइयों को प्रतिदर्श में स्थान दिया जाता है।

(ख) **दैव संख्या सारणी के प्रयोग द्वारा**– समग्र का आकार अत्यधिक विस्तृत होने की अवस्था में लॉटरी विधियां अनुपयुक्त हो जाती हैं। अतएव ऐसी स्थिति में दैव संख्या सारणियों के प्रयोग द्वारा प्रतिदर्श का चयन करना अधिक

सुविधाजनक होता है। ये सारणियां इस प्रकार बनाई जाती हैं, जिससे 0 से 9 तक के सभी अंकों के चुनाव के अवसर समान हों। सामान्यता निम्नलिखित किसी भी दैव सारणी के प्रयोग द्वारा प्रतिदर्श का चुनाव किया जा सकता है–

टिप्पणी

(i) फिशर एवं येट्स की सारणी – इस सारणी में 15,000 दैव अंकों को 1,500 समूहों में बांट कर दिया गया है।

(ii) कैण्डाल एवं बी बी स्मिथ की सारणी– इस सारणी में 1,00,000 दैव अंकों को 25,000 के चार अंकों के समूहों में बांटकर दिया गया है।

(iii) रैण्ड कॉरपोरेशन की सारणी– इस सारणी में 10,00,000 दैव अंकों को 2,00,000 के पांच–पांच अंकों के समूहों में बांटकर दिया गया है।

(iv) टिप्पेट की सारणी– टिप्पेट ने न्यादर्श के चयन की इस दैव सारणी में चार–चार अंक वाले 10400 समूह दे रखे हैं, जिनमें से दैव संख्याओं का चुनाव किया जाता है।

इसके अतिरिक्त भी अन्य दैव सारणियां हो सकती हैं; जिनमें उपर्युक्त गुण विद्यमान हों।

2. प्रतिबंधित दैव प्रतिदर्श विधियां– सरल दैव प्रतिदर्श विधियों में प्रतिबंध लगाने की आवश्यकता इसलिए होती है कि कहीं ऐसा न हो कि दैव विधियों से चुना गया प्रतिदर्श समग्र के किसी एक भाग का ही प्रतिनिधित्व करे। उदाहरण के लिए यदि किसी क्षेत्र विशेष में सरल दैव प्रतिदर्श विधि से चुनाव किया जाता है, तो हो सकता है कि केवल कुछ गरीब लोग अथवा कुछ अमीर लोग या जाति विशेष के लोग ही प्रतिदर्श में चुन लिए जाएं तथा संपूर्ण क्षेत्र का प्रतिनिधित्व उचित प्रकार से न हो पाए। इसीलिए आवश्यक हो जाता है कि विभिन्न उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए दैव प्रतिदर्श विधि की पवित्रता को कायम रखते हुए प्रतिचयन करते समय कुछ प्रतिबंध लगा दिए जाएं। तत्पश्चात ही प्रतिचयन किया जाए। प्रतिबंधित दैव प्रतिदर्श विधियां निम्न प्रकार से हैं–

(अ) **व्यवस्थित दैव प्रतिदर्श विधि**– इस विधि में समग्र की सभी इकाइयों की एक सूची तैयार कर ली जाती है, जिसका आधार वर्णानुक्रम, आयु अथवा भौगोलिक हो सकता है। प्रतिदर्श में जितनी इकाइयां चुनी जानी हैं, उनका आकार निश्चित कर लिया जाता है। इसके आधार पर अग्र सूत्र का प्रयोग करके प्रतिचयन अंतर (Sampling Interval) ज्ञात किया जाता है।

अर्थात प्रतिचयन अंतर के आधार पर प्रत्येक 20वां विद्यार्थी प्रतिदर्श के रूप में चुना जाएगा। लेकिन यहां प्रथम विद्यार्थी के चुनाव के आधार पर ही अन्य विद्यार्थियों का चुनाव किया जा सकेगा। इसलिए पहले विद्यार्थी का चुनाव, जो कि 1 से 20 तक के बीच में से होगा, के लिए सरल दैव प्रतिदर्श की लॉटरी पद्धति अथवा दैव संख्या सारणी विधि का प्रयोग किया जा सकता है। यदि लॉटरी विधि से प्रथम विद्यार्थी की संख्या 7 आती है तो 20–20 के अंतर से क्रमशः द्वितीय, तृतीय,. ....विद्यार्थियों की संख्या 27, 47, 67, ... को सूची में से प्रतिदर्श में चुन लिया जाएगा।

(ब) **स्तरित दैव प्रतिदर्श विधि**– जब समग्र की 'प्रतिचयन इकाइयां अलग–अलग विशेषताएं रखती हों तो ऐसे समग्र में सरल दैव प्रतिदर्श के स्थान पर प्रतिबंधित

टिप्पणी

दैव प्रतिदर्श की स्तरित दैव प्रतिदर्श विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि के प्रयोग के अंतर्गत सर्वप्रथम प्रतिचयन इकाइयों को उनकी विशेषताओं के अनुसार अलग–अलग वर्गों में विभाजित कर लिया जाता है। इन वर्गों का आधार आय, आयु, लिंग आदि हो सकता है। तत्पश्चात न्यादर्श के लिए चुनाव की जाने वाली इकाइयों का अलग–अलग वर्गों से विभाजित इकाइयों में से अनुपात के अनुसार चयन सरल दैव विधि से कर लिया जाता है। जैसे एक महाविद्यालय में 2000 विद्यार्थियों में से 400 प्रथम श्रेणी, 600 द्वितीय श्रेणी व 1000 तृतीय श्रेणी प्राप्त करने वाले समूहों में विभाजित हैं। अब यदि विद्यार्थियों के समग्र में से 20 प्रतिशत विद्यार्थियों का न्यादर्श लेना है तो उन्हें अलग–अलग वर्गों में विभाजित इकाइयों के अनुपात के आधार पर 80 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में से, 120 विद्यार्थी द्वितीय श्रेणी में से व 200 विद्यार्थी तृतीय श्रेणी वाले वर्गों में से चयनित किए जाएंगे। इस प्रकार चयनित इकाइयों का न्यादर्श, समग्र का सही प्रतिनिधित्व करेगा।

स्तरित प्रतिदर्श विधि के गुण

स्तरित प्रतिदर्श विधि के गुण निम्नलिखित हैं–

1. **संतुलन**– इस पद्धति के अंतर्गत अनुसंधानकर्ता को प्रतिदर्श के चयन में सरल दैव प्रतिदर्श विधि की तुलना में अधिक नियंत्रण प्राप्त होता है। अतः प्रतिचयन की पूर्वाग्रह तथा दैव प्रतिचयन की अनिश्चितता के मध्य संतुलन स्थापित किया जाता है।
2. **प्रतिनिधित्व**– यदि वर्गीकरण उचित रूप से किया गया है तो प्रतिदर्श का आकार चयन समग्र की सीमित इकाइयों के होने पर भी हो सकता है।
3. **इकाइयों का प्रतिस्थापन**– इस विधि के अंतर्गत यह व्यवस्था है कि मूल रूप से चुनी गई इकाइयों के स्थान पर अन्य कोई इकाइयां भी शामिल की जा सकती हैं। इस प्रकार इकाइयों के प्रतिस्थापन में सुविधा होती है।
4. **विभिन्न विशेषता वाले समग्र में उचित**– सामान्यतः यदि समग्र में विभिन्न विशेषताओं वाली इकाइयों का समावेश है तो दैव–प्रतिदर्श विधि द्वारा प्रतिनिधि इकाइयों का चयन करना संभव नहीं हो पाता है, जबकि इस विधि द्वारा प्रतिनिधि प्रतिचयन इकाइयों का चयन संभव है।

स्तरित प्रतिदर्श विधि के दोष

स्तरित प्रतिदर्श विधि के दोष निम्नलिखित हैं–

1. **प्रतिनिधित्व का अभाव**– यदि वर्गीकरण से अलग–अलग इकाइयों के समूह में पूर्वाग्रह उत्पन्न हो गया है तो प्रतिदर्श के प्रतिनिधि होने की संभावना नहीं होती है।
2. **पक्षपात**– यदि विभिन्न वर्गों के क्षेत्र में अंतर अधिक है तो प्रतिनिधि प्रतिदर्श के लिए आनुपातिक इकाइयों का चयन अनुसंधानकर्ता को जानबूझ कर करना पड़ता है। अतः वैयक्तिक पक्षपात की संभावना रहती है।
3. **भारांकन संभव नहीं**– भारित–स्तरित प्रतिचयन में अनुचित भार प्रदान करने से प्रतिदर्श सही प्रतिनिधित्व करने में सक्षम नहीं होता है।

4. **वर्गीकरण संभव नहीं**– विभिन्न विशेषताओं वाले समग्र की इकाइयों का अलग–अलग समूहों में वर्गीकरण करना संभव नहीं हो पाता है।

(स) **समूह अथवा क्षेत्रफल प्रतिदर्श विधि**– इस विधि के अंतर्गत समग्र को विभिन्न समूहों में क्षेत्रानुसार बांट लिया जाता है। तत्पश्चात प्रत्येक समूह में से इकाइयों का चुनाव सरल दैव प्रतिचयन विधि से कर लिया जाता है। इसका परिणाम यह होता है कि प्रत्येक क्षेत्र को आवश्यक प्रतिनिधित्व मिल जाता है, जो कि सरल दैव प्रतिदर्श विधि में संभव नहीं होता। स्तरित दैव प्रतिदर्श विधि में जहां एक ओर सभी वर्गों को प्रतिनिधित्व देने की बात कही जाती है, चाहे वे किसी क्षेत्र से संबंधित हों वहीं दूसरी ओर यहां सभी क्षेत्रों के प्रतिनिधित्व को अधिक महत्व दिया जाता है, चाहे वे किसी भी वर्ग से संबंधित हों।

समूह अथवा क्षेत्रफल प्रतिदर्श विधि के गुण

समूह अथवा क्षेत्रफल प्रतिदर्श विधि में निम्नलिखित गुण होते हैं–

1. **सरल**– इस विधि में प्रतिदर्श कार्य अत्यधिक सरल व सुगम होता है।
2. **मितव्ययी**– क्षेत्रफल विधि में प्रतिचयन इकाइयों का चयन कार्य व प्रतिदर्श अनुसंधान कार्य यांत्रिक होता है। अतः यह मितव्ययी होता है।
3. **बड़े क्षेत्र का लाभ**– अनुसंधान क्षेत्र जितना बड़ा होगा, प्रतिदर्श कार्य उतना ही लाभप्रद रहता है।

समूह अथवा क्षेत्रफल प्रतिदर्श विधि के दोष

समूह अथवा क्षेत्रफल प्रतिदर्श विधि में निम्नलिखित दोष होते हैं–

1. **प्रारंभिक इकाइयों की संख्या में कमी**– यदि न्यादर्श में प्रारंभिक इकाइयों की अल्प संख्या हो तो परिणाम भ्रामक होने की संभावना रहती है।
2. **अनुंसधानकर्ता का झुकाव**– अनुसंधानकर्ता का प्रतिचयन इकाइयों के प्रति मिथ्या झुकाव रीति की परिशुद्धता को प्रभावित कर सकता है।

(द) **बहुस्तरीय दैव प्रतिदर्श विधि**– जब समग्र का अध्ययन क्षेत्र अति व्यापक होता है तो सरल दैव प्रतिदर्श विधि द्वारा चयनित इकाइयों से वैज्ञानिक परिणाम प्राप्त करना असंभव होता है क्योंकि सरल दैव प्रतिदर्श विधि में प्रतिचयन इकाइयों का चयन एक ही स्तर पर किया जाता है। अतः इस दृष्टि से जब समग्र को कई भागों में विभाजित करके प्रतिदर्श का चयन किया जाता है तो इसे बहुस्तरीय दैव प्रतिदर्श विधि कहा जाता है। उदाहरणतः भारत में चावल की प्रति एकड़ उपज ज्ञात करने के लिए प्रतिचयन इकाइयां देश को राज्यों में, राज्यों को जिलों में, जिलों को गांवों में तथा गांवों में से कुछ खेतों का चयन करके ज्ञात की जाएंगी। अतः विभिन्न स्तरों के आधार पर किया गया प्रतिदर्श बहुस्तरीय दैव प्रतिदर्श कहलाता है।

3. स्वीकृत या अनुक्रमिक प्रतिदर्श विधि– इस विधि का प्रयोग उद्योगों में प्रायः किस्म नियंत्रण के लिए किया जाता है। इस विधि से पहले प्रतिदर्श विभ्रम का अध्ययन करके उसके आधार पर न्यादर्श का आकार निश्चित करते हैं।

टिप्पणी

इस विधि में प्रचय में से न्यादर्श लिया जाता है और स्वीकृत प्रतिदर्श के आधार पर निश्चित किया जाता है कि कौन से प्रचय स्वीकृत किए जाएं तथा कौन से प्रचय या ढेर को अस्वीकृत किया जाए। इस विधि को स्वीकृत प्रतिदर्श भी कहते हैं। इस विधि को अग्रलिखित तीन भागों में कार्यान्वित किया जा सकता है–

1. एकल प्रतिदर्श
2. दोहरा प्रतिदर्श
3. बहुल प्रतिदर्श

एकल प्रतिदर्श के अंतर्गत, प्रचय में से केवल एक प्रतिदर्श लिया जाता है और इसलिए किए गए प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त सूचनाओं के आधार पर प्रथम को स्वीकार या अस्वीकार कर दिया जाता है। इसके विपरीत दोहरे प्रतिदर्श (Double Sampling) में पहले प्रचय के अस्वीकृत होने पर दूसरा प्रचय लिया जाएगा और दूसरे में दूषितों की संख्या यदि स्वीकृत संख्या से कम हुई तो सारे माल को स्वीकार कर लिया जाएगा। बहुल प्रतिदर्श में 3 या इससे अधिक प्रतिदर्श एक के बाद एक तब तक लिए जाते हैं, जब तक कि कोई निर्णय नहीं कर लिया जाता। शेष कार्य–प्रणाली दोहरी प्रतिदर्श निरीक्षण प्रणाली जैसी होती है।

स्वीकृत प्रतिदर्श विधि के गुण

स्वीकृत प्रतिदर्श विधि में निम्नलिखित गुण पाए जाते हैं–

1. **किस्म नियंत्रण के लिए उपयोगी**– यह विधि उद्योगों के लिए एक बहुत उपयोगी विधि सिद्ध हुई है। इसके अंतर्गत उत्पादित वस्तु को किसी गुण विशेष के आधार पर ही स्वीकार किया जाता है।
2. **समुचित निर्णय**– यह विधि उन उद्योगों में श्रेयस्कर होती है, जहां एक न्यादर्श के आधार पर निर्णय नहीं किया जाता।

स्वीकृत प्रतिदर्श विधि के दोष

स्वीकृत प्रतिदर्श विधि में निम्नलिखित दोष पाए जाते हैं–

1. **परिशुद्धता प्रमाप**– इस विधि में अनुमानित परिशुद्धता प्रमाप स्तर पहले से ही तय कर लिए जाते है, जो कि तर्कयुक्त प्रतीत नहीं होते।
2. **अनेक परीक्षण**– परिशुद्धता का सही अनुमान लगाने के लिए इस विधि के तहत कई परीक्षण किए जाते हैं, जिससे समय व श्रम अधिक लगता है।
3. **लागत**– यह विधि बहुत महंगी होती है क्योंकि इसमें दोहरा प्रतिदर्श एवं बहुल प्रतिदर्श करना पड़ता है। इसके कारण लागत बहुत अधिक आती है।

दैव प्रतिदर्श विधियों के गुण

दैव प्रतिदर्श विधि के द्वारा प्रतिचयन इकाइयों की चयन प्रक्रिया के निम्न गुण हैं–

1. **वैज्ञानिक विधि**– इस विधि के द्वारा प्रतिचयन इकाइयों का चयन समग्र की समस्त इकाइयों के मध्य में से किया जाता है। अतः समग्र की समस्त इकाइयों में से प्रतिदर्श के लिए समान प्रायिकता से प्रतिचयन इकाइयों का चयन किया जाता है। इसे वैज्ञानिक पद्धति कहा जाता है।

2. **मितव्ययी**– इस विधि द्वारा प्रतिचयन इकाइयों के चयन से समय, श्रम एवं धन की बचत होती है।
3. **समग्र का प्रतिनिधित्व**– इस विधि द्वारा चुनी गई प्रतिचयन इकाइयां समग्र का प्रतिनिधित्व करती हैं।
4. **प्रतिदर्श विभ्रम की माप संभव**– दैव प्रतिदर्श विधि में प्रतिदर्श विभ्रम की माप की जा सकती है और परिणामों की सुनिश्चित सीमाओं का पता लगाया जा सकता है।
5. **संभावना सिद्धांत**– दैव प्रतिदर्श प्रणाली का यह एक प्रमुख सिद्धांत है कि इसमें संभावना सिद्धांत का व्यावहारिक प्रयोग किया जाता है।

दैव प्रतिदर्श विधियों के दोष या सीमाएं

दैव प्रतिदर्श प्रणाली के उपर्युक्त गुण होते हुए भी कुछ दोष हैं, जो निम्न प्रकार से हैं–

1. अनुसंधान क्षेत्र के छोटे होने पर प्रतिचयन इकाइयों का स्वतंत्र चयन संभव नहीं है।
2. यदि समग्र का आकार छोटा है तो प्रतिदर्श का चयन संभव नहीं है।
3. समग्र में यदि विभिन्न विशेषताओं वाली इकाइयों का समावेश है तो उचित प्रतिनिधित्व करने वाली इकाइयों का चयन संभव नहीं है।
4. समग्र की इकाइयों के एक–दूसरे पर निर्भर होने पर इस विधि का प्रयोग संभव नहीं है।

(ख) गैर दैव प्रतिदर्श विधियां

ऐसी प्रतिदर्श विधियां, जिनमें व्यक्तिगत विचार द्वारा प्रतिदर्श का चुनाव किया जाता है और जब चुनाव प्रायिकता के आधार पर न होकर व्यक्तिपरक होता है, तब ऐसी विधि को गैर दैव प्रतिदर्श विधि की संज्ञा दी जाती है। कई बार प्रतिचयन करने के लिए गैर दैव प्रतिदर्श विधियां अधिक उपयुक्त होती हैं, जैसे वाद–विवाद प्रतियोगिता के लिए कक्षा में से छात्र का चुनाव। हालांकि सांख्यिकी अनुसंधान एवं अनुमान करने के लिए गैर दैव प्रतिदर्श विधियां पूर्णरूपेण अनुपयुक्त होती हैं। गैर दैव प्रतिदर्श विधियां निम्न प्रकार की हो सकती हैं–

(क) सविचार प्रतिदर्श विधि

इस विधि में न्यादर्श का चुनाव करते समय किसी विशेष विधि का प्रयोग नहीं किया जाता। इसके अंतर्गत 'प्रतिचयन इकाइयों' का चयन अनुसंधानकर्ता द्वारा अपने विवेक के आधार पर उद्देश्यानुसार किया जाता है। अनुसंधानकर्ता समग्र में से अपने व्यक्तिगत निर्णय के आधार पर इकाइयों का चयन अध्ययन करने के लिए करता है। न्यादर्श में किन पदों अथवा इकाइयों को शामिल करना है तथा किन्हें छोड़ देना है, यह पूरी तरह अनुसंधानकर्ता की प्रकृति पर निर्भर करता है। कोई भी दो अनुसंधानकर्ताओं द्वारा चयन की गई इकाइयों में अंतर होना स्वाभाविक होगा। फलस्वरूप परिणामों में भिन्नता रहेगी।

सविचार प्रतिदर्श विधि के गुण

सविचार प्रतिदर्श विधि में निम्नलिखित गुण होते हैं–

टिप्पणी

1. **सरल व मितव्ययी**–सविचार प्रतिदर्श प्रणाली बड़ी सरल तथा मित्वययी है। इसमें अनुसंधानकर्ता अपने विवेक से शीघ्र न्यादर्श चुन लेता है।
2. **व्यक्तिगत इच्छा**–विशेष महत्व वाली इकाइयों का अनिवार्यतः चयन– इस विधि में प्रतिचयन इकाइयों के चयन में विशेष महत्व वाली इकाइयों का पूर्णतया ध्यान रख जाता है। अतः उन्हें अनिवार्य रूप से प्रतिदर्श में शामिल किया जाता है।
3. **समग्र का क्षेत्र सीमित होने पर**– जब समग्र की इकाइयां कम हों तो प्रतिचयन के लिए इस विधि का प्रयोग अधिक श्रेष्ठ होता है।

सविचार प्रतिदर्श विधि के दोष

सविचार प्रतिदर्श विधि के दोष निम्नलिखित होते हैं–

1. **पक्षपात**–न्यादर्श की इकाइयों के चुनाव में अनुसंधानकर्ता को पक्षपात बरतने का पूर्ण अवसर रहता है। अतः यह संभव है कि न्यादर्श समग्र का पूर्ण प्रतिनिधित्व न करे।
2. **पूर्वज्ञान**– इस विधि के प्रयोग के लिए आवश्यक है कि अनुसंधानकर्ता को समग्र के विषय में पूर्वज्ञान हो,जो कि सामान्यतः असंभव है।
3. **विभ्रम की जांच**– इस विधि में अंतर की त्रुटि की जांच करना संभव नहीं है।

(ख) सुविधानुसार प्रतिदर्श विधि

इस विधि में अनुसंधानकर्ता समग्र में से प्रतिचयन करते समय अपनी सुविधा का विशेष रूप से ध्यान रखता है। इसी कारण इस विधि को सुविधानुसार प्रतिदर्श विधि कहा जाता है। उदाहरण के लिए अजमेर के राजकीय महाविद्यालय के प्राध्यापक को संपूर्ण राजस्थान के छात्रों के संबंध में प्रतिचयन विधि से कोई सर्वेक्षण कर रिपोर्ट देने के लिए कहा जाता है। तब उन प्राध्यापकों द्वारा अजमेर एवं निकटवर्ती क्षेत्र के छात्रों का ही प्रतिदर्श में चुनाव सुविधानुसार प्रतिदर्श कहलाएगा।

(ग) अभ्यंश प्रतिदर्श विधि

इस प्रतिचयन प्रणाली के अंतर्गत स्तरित प्रतिचयन की तरह समग्र को विभाजित कर लिया जाता है लेकिन इस विधि में विभिन्न वर्गों में से प्रतिचयन इकाइयों का चयन, दैव आधार पर न करके प्रगणकों (Enumerators) पर छोड़ दिया जाता है। इस प्रणाली में यह पूर्व निर्धारित होता है कि एक वर्ग में से कितनी इकाइयों का चयन किया जाएगा। अतः यह निश्चित की गई संख्या ही अभ्यंश कहलाती है। इस विधि का प्रयोग व्यापारिक तथा जनमत सर्वेक्षण (Public opinion polls) में व्यापक रूप से किया जाता है। उदाहरण के लिए यदि किसी गांव से 10 पुरुष एवं 15 महिलाओं का चुनाव सरंपच पर छोड़ दिया जाए, तब सरपंच द्वारा व्यक्तिगत निर्णय के आधार पर चुनाव अभ्यंश प्रतिदर्श कहलाएगा।

अभ्यंश प्रतिदर्श विधि के गुण तथा दोष

इस पद्धति के प्रमुख गुण निम्न प्रकार से हैं—

1. **महत्वपूर्ण इकाइयों का समावेश**— इस विधि में अनुसंधानकर्ता समग्र की महत्वपूर्ण इकाइयों को न्यादर्श में सम्मिलित कर सकता है। अतः न्यादर्श के लिए महत्वपूर्ण इकाइयों के चयन की स्वतंत्रता रहती है।
2. **कार्य योजनानुसार**—प्रत्येक वर्ग में से चयनित की जाने वाली इकाइयों के पूर्व निर्धारित होने के कारण अनुसंधान कार्य व्यवस्थित ढंग से होता है।

अभ्यंश प्रणाली के दोष निम्नलिखित हैं—

1. **पक्षपात**— इस विधि के अंतर्गत वास्तविक प्रतिदर्श कार्य गणकों द्वारा किया जाता है, जिससे प्रतिदर्श चयन व्यक्तिगत पक्षपात परिणामों को प्रभावित करता है।
2. **विभ्रम**—इस विधि में प्रतिदर्श विभ्रम का निर्धारण करना संभव नहीं हो पाता है।

प्रतिदर्श व गैर—प्रतिदर्श विभ्रम

सर्वेक्षण में प्रायः समंकों का संकलन प्रतिदर्श पद्धति द्वारा किया जाता है, जो कि इस विश्वास पर आश्रित है कि समग्र में से निष्पक्ष रूप से चुना गया न्यादर्श समग्र का प्रतिनिधित्व करता है और उसके विश्लेषण से प्राप्त परिणाम समग्र पर लागू किए जा सकते हैं। इस प्रकार समग्र में से कुछ इकाइयां चुन ली जाती हैं। उनका गहन अध्ययन कर प्राप्त परिणामों को समग्र का प्रतीक मान लिया जाता है।

यह स्वाभाविक है कि कोई न्यादर्श कितना भी प्रतिनिधिपूर्ण क्यों न हो, वह समग्र से कुछ भिन्न अवश्य होगा। अर्थात समग्र के सांख्यिकीय मापों (जैसे समांतर माध्य, प्रमाप विचलन आदि), जिन्हें प्राचल (Parameters) कहा जाता है तथा न्यादर्श के सांख्यिकीय मापों, जिन्हें प्रतिदर्शज (Statistics) कहते हैं, में कुछ असमानताएं एवं अशुद्धियां अवश्य होंगी। बल्कि एक ही समग्र में से लिए गए विभिन्न न्यादर्शों के मापों में भी अंतर पाए जाते हैं। ये अंतर दो प्रकार के होते हैं—एक जो प्रतिदर्श प्रक्रिया के कारण उत्पन्न होते हैं, जिन्हें प्रतिदर्श विभ्रम (Sampling Error) कहा जाता है और दूसरे वे जो प्रतिदर्श अथवा संगणना पद्धति दोनों में ही अंतर्निहित होते हैं, जिन्हें गैर—प्रतिदर्श विभ्रम (Non-Sampling Error) कहते हैं।

(क) प्रतिदर्श विभ्रम— प्रतिदर्श प्रणाली के अंतर्गत, जिसमें समग्र के एक छोटे अंग का अध्ययन किया जाता है, विभ्रम दैव (Chance) कारक के कारण उत्पन्न होते हैं, जिसके परिणामस्वरूप समग्र के मापों तथा न्यादर्श के मापों में असमानता दृष्टिगत होती है। इसी असमानता को प्रतिदर्श विभ्रम कहते हैं। अन्य शब्दों में अवसर की उपस्थिति के परिणामस्वरूप प्राचल तथा प्रतिदर्शज में जो अंतर पाया जाता है, उसे प्रतिदर्श विभ्रम कहते हैं। प्रतिदर्श विभ्रम की उपस्थिति प्रतिनिधित्व को नकारने की स्वीकृति है। अतः प्रतिदर्श विभ्रम जितना कम होगा, न्यादर्श, समग्र का उतना ही अधिक। यह प्रतिनिधित्व एवं समग्र के निकट होगा।

प्रतिदर्श विभ्रम तथा न्यादर्श आकार— हालांकि प्रतिदर्श विभ्रम को प्रतिदर्श प्रणाली में से बिलकुल हटाया नहीं जा सकता परंतु यादृच्छिक रूप से चुने न्यादर्श के

टिप्पणी

आकार में वृद्धि करने से प्रतिदर्श विभ्रम को कम किया जा सकता है। नीसवेंगर के अनुसार, "माध्य का प्रतिदर्श विभ्रम तथा न्यादर्श की इकाइयों के वर्गमूल का एक–दूसरे से विपरीत का संबंध है। न्यादर्श के वर्गमूल को बढ़ाने पर, प्रतिदर्श विभ्रम इसी अनुपात में घटता है।" उदाहरणार्थ, यदि 100 इकाई वाले न्यादर्श के प्रतिदर्श विभ्रम को आधा (1/2) करना हो तो हमें न्यादर्श को बढ़ाकर 400 इकाई करना होगा। क्योंकि 100 का वर्गमूल 10 था और हमें प्रतिदर्श विभ्रम को आधा करने के लिए वर्गमूल को दो से गुणा करने पर 20 प्राप्त होता है, जिसे रैडिकल में से निकालने पर उसका वर्ग $(20)^2 = 400$ करना होगा, जो कि प्रतिदर्श विभ्रम को आधा करने के लिए अभीष्ट न्यादर्श संख्या है।

प्रतिदर्श विभ्रम का आकलन विभिन्न सार्थकता स्तरों (Level of Singnificance) पर प्रमाप विभ्रम द्वारा किया जाता है और वह निश्चित सीमाओं के भीतर होता है।

प्रतिदर्श विभ्रम का ज्ञान हमें श्रेष्ठ प्रतिदर्श तकनीक का चयन करने के लिए सक्षम बनाता है। इसकी सहायता से समग्र के सांख्यिकीय मापों तथा उसी समग्र में से लिए अन्य न्यादर्शों के मापों के अनुमान लगाए जा सकते हैं।

(ख) गैर प्रतिदर्श विभ्रम– जैसा कि उपर बताया गया है, गैर–प्रतिदर्श विभ्रम मानव कारक के कारण उत्पन्न होते हैं तथा सभी प्रकार की सर्वेक्षण रीतियों (संगणक पद्धति एवं प्रतिदर्श पद्धति, दोनों) में उजागर होते हैं। ये सर्वेक्षणकर्ता तथा सूचक के मध्य की शोध क्रिया में कहीं भी पूछताछ, गलत प्रश्नावली, मिथ्या झुकाव आदि के कारण उत्पन्न होते हैं। इनकी एक विशेषता होती है कि ये एक दिशा में ही बढ़ते हैं तथा संचयी प्रकृति के होते हैं।

प्रतिदर्श रीति के प्रयोग में जैसा कि ऊपर स्पष्ट किया गया है कि प्रतिदर्श विभ्रम निश्चित सीमाओं के भीतर रहता है परंतु यदि प्राचल तथा प्रतिदर्शज का अंतर निश्चित सीमाओं से अधिक होता है, तो उस आधिक्य को गैर–प्रतिदर्श विभ्रम माना जाता है।

गैर–प्रतिदर्श विभ्रम के कारण

प्रतिदर्श विभ्रम का एक मात्र कारण अवसर की उपस्थिति है जबकि गैर–प्रतिदर्श विभ्रम महत्वपूर्ण होता है और निम्न कारणों से उत्पन्न होता है–

- **पक्षपात एवं मिथ्या झुकाव**– अनुसंधानकर्ता के अनुभव एवं प्रशिक्षण विहीन होने तथा मिथ्या झुकाव से प्रभावित होने पर अस्पष्ट प्रश्नावली अथवा अनुसूची के प्रयोग करने अथवा प्रश्नावली को निरंतर गलत ढंग से भरे जाने से गैर–प्रतिदर्श विभ्रम उदय हो सकता है। इसी प्रकार सूचक द्वारा गलत सूचना देने अथवा विस्मृति तथा उदासीनता बरतने से भी यह विभ्रम आ जाता है। अतः पक्षपात एवं मिथ्या झुकाव इसके मूल कारण हैं।
- **अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई एवं अधिक उपसाधन** से भी गैर–प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं।
- **न्यादर्श का आकार छोटा होना**– बड़े समग्र में से बहुत ही कम आकार का न्यादर्श लेने पर वह प्रतिनिधि नहीं रहता है।
- **सविचार प्रतिदर्श**– अनुसंधान में यदि सविचार प्रतिदर्श रीति का प्रयोग किया जाए तो सभी इकाइयों को न्यादर्श में चुने जाने के पूरे अवसर प्राप्त नहीं होते, जिससे विभ्रम उत्पन्न होता है।

- **दोषपूर्ण वर्गीकरण**— स्तरीय प्रतिदर्श विधि के अंतर्गत अस्पष्ट, अनुपयुक्त तथा असमान आकार का स्तर होने पर विभ्रम उत्पन्न होता है।
- **उद्‌गम सूची का अपूर्ण होना**— साधन अथवा उद्‌गम सूची के अपूर्ण अथवा दोषपूर्ण होने पर न्यादर्श में दूषित इकाइयों के सम्मिलित होने की संभावना होती है।
- **गलत प्रतिशत या माध्य के प्रयोग** से भी विभ्रम उत्पन्न होता है।
- **प्रस्तुतीकरण में त्रुटि**—निष्कर्षों के प्रस्तुतीकरण एवं प्रकाशन के समय भी यह विभ्रम संभव है।

अपनी प्रगति जांचिए

3. प्रतिदर्श की मुख्यतः कितनी विधियां होती हैं?

   (क) दो (ख) तीन

   (ग) चार (घ) पांच

4. किसी व्यक्ति, संस्था, राष्ट्र या अंतर्राष्ट्रीय संगठन द्वारा प्रकाशित किए गए संकलित समंक निम्न में से कौन—से स्रोत कहलाते हैं?

   (क) प्राथमिक स्रोत (ख) प्रकाशित स्रोत

   (ग) अप्रकाशित स्रोत (घ) ऐतिहासिक स्रोत

1.4 समंक/आंकड़े संकलन की विधियां

आंकड़ा शब्द से हमारा तात्पर्य प्रत्युत्तरों के अभिलेखन से है। आंकड़े या तथ्य वस्तुतः सांख्यिकी यथार्थ के किसी वर्ग के संबंध में तथ्यों के नवीन अभिलेख तैयार करते समय या उससे पूर्व में प्राप्त अभिलेखों के आधार पर सूचनाएं अर्जित करने के लिए एकत्रित की गई सामग्री को कहते हैं।

इस प्रकार आंकड़ा मान या माप के रूप में तथ्यों का एक संग्रह है। यह संख्या, शब्द, माप, टिप्पणियों या चीजों का विवरण हो सकता है। इसके अलावा आंकड़ा तथ्य, चित्र और विचार का प्रतिनिधित्व प्राप्त हो सकता है।

आंकड़े यद्यपि अपनी प्रारंभिक या मौलिक अवस्था में मिले—जुले रूप में होते हैं। अतः ये कारण प्रभाव जानने एवं निष्कर्षों को प्रमाणित करने की दृष्टि से अत्यंत महत्वपूर्ण होते हैं। वास्तव में आंकड़ों की सहायता से अनुसंधान को एक विशिष्ट स्वरूप प्राप्त हो सकता है।

आंकड़ों के प्रकार

सांख्यिकी में आंकड़ों से आशय जानकारी के इकट्ठा करने से है, जो सामान्यतः सर्वेक्षण और मानक संगठनात्मक स्रोत से प्राप्त किए जाते हैं। किसी भी अनुसंधान के लिए यह अधिक महत्व रखता है कि समंकों अथवा आंकड़ों के कितने स्वरूप हैं या कितने प्रकार के हैं। आंकड़े मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं—

टिप्पणी

1. प्राथमिक आंकड़े

प्राथमिक आंकड़े वे समंक या सूचनाएं हैं, जो आंकड़ों के संग्रह में सबसे पहले प्राप्त की जाती हैं। यह सूचना किसी उद्देश्य के लिए किसी सरकारी या मानक संगठन द्वारा प्रकाशित की जाती है। इस प्रकार का प्राथमिक समंक प्रायः विश्वसनीय, शुद्ध और मूल समंक होता है। पी.वी. यंग का कथन है कि प्राथमिक समंकों का तात्पर्य उन सभी मौलिक सूचनाओं अथवा अंकड़ों से है जिन्हें स्वयं अनुसंधानकर्ता प्राथमिक स्रोतों द्वारा प्राप्त करता है। यही कारण है कि प्राथमिक समंकों को हम आधार समंक, प्रथम स्तरीय समंक तथा क्षेत्रीय समंक आदि नामों से भी संबोधित करते हैं। इस प्रकार प्राथमिक समंक किसी भी सर्वेक्षणकर्ता द्वारा स्वयं एकत्रित की गई सामग्री होती है। प्राथमिक आंकड़े दो प्रकार के होते हैं–

गुणात्मक आंकड़े – गुणात्मक आंकड़े वे होते हैं जिनमें तथ्यों की प्रकृति विश्लेषणात्मक और गुण–संबंधी होती है। इन तथ्यों से विशिष्टता स्पष्ट होती है।

गणनात्मक (मात्रात्मक) आंकड़े– गणनात्मक अथवा मात्रात्मक आंकड़े वे होते हैं जिनमें तथ्य की प्रकृति संख्यात्मक होती है और जो गणना के लायक होते हैं।

जैसे– 1, 2, 50, 1000, 1850 .... इत्यादि।

2. द्वितीयक आंकड़े

द्वितीयक समंकों का तात्पर्य उन समस्त सूचनाओं अथवा आंकड़ों से होता है जिन्हें एक अनुसंधानकर्ता स्वयं एकत्रित नहीं करता बल्कि वे उसे प्रकाशित या अप्रकाशित, प्रलेखों, अभिलेखों, पत्रों, डायरियों, आत्मकथाओं तथा सरकारी रिपोर्टों आदि से स्वतः प्राप्त हो जाते हैं। इस प्रकार का द्वितीयक समंक प्राय शुद्ध, विश्वसनीय और मूल समंक नहीं होता है। अतः अनुसंधानकर्ता का कार्य केवल समुचित और विश्वसनीय स्रोतों को ज्ञात करके उनका आवश्यकतानुसार संकलन और उपयोग करना होता है। द्वितीयक समंकों को प्राप्त करने में अधिक कठिनाई नहीं होती है। इन्हें सरलता से सरकारी, अर्द्ध–सरकारी एवं व्यक्तिगत सूचनाओं द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। द्वितीयक आंकड़े भी दो प्रकार के होते हैं–

असतत आंकड़े– असतत आंकड़े वे मात्रात्मक आंकड़े होते हैं जिनका मान नियत होता है। जैसे, पूर्ण संख्याएं – 1, 2, 5, 100, 500,1802 .... आदि।

आसान शब्दों में कहें तो असत् आंकड़ा वह है जो गिना जा सके।

सतत (निरंतर) आंकड़े– सतत आंकड़े वे मात्रात्मक आंकड़े होते हैं जिनका मान एक सीमा के भीतर कोई भी हो सकता है, जैसे – 8.3, 5.6, 7.5 .... आदि

आंकड़ों के स्रोत

आंकड़े हर जगह होते हैं। आपकी सरकार में, इंटरनेट या वेब सर्वर में, आपके व्यापार भागीदारों और आपके मस्तिष्क में भी। साधारणतः यह सर्वेक्षणकर्ता पर निर्भर करता है कि वह किन–किन साधनों से अपनी समस्या से जुड़ी सामग्री का संचय करे। सर्वेक्षण विषय की जरूरत पर भी यह निर्भर करता है कि कौन से स्रोत जरूरी हैं अथवा अनावश्यक, असंगत तथा संगत हैं। सर्वेक्षणार्थी को इस बात का भी ध्यान रखना चाहिए

कि आंकड़ों के संचय का स्रोत विश्वसनीय तथा सुलभ हो, क्योंकि आंकड़ों के संकलन का स्रोत जितना विश्वसनीय और सरल होगा संकलित सामग्री भी उतनी ही अधिक प्रमाणिक बन जाती है। वास्तव में तथ्यों अथवा आंकड़ों के संकलन में बहुत से स्रोतों का उपयोग किया जाता है। पी.वी. यंग ने इन स्रोतों को दो प्रमुख भागों में विभाजित किया है–

1. **प्रलेखीय या दस्तावेजीय स्रोत**– प्रलेखीय स्रोतों के अंतर्गत प्रकाशित और अप्रकाशित प्रतिवेदन, प्रलेख, पांडुलिपि, सांख्यिकी, डायरियां, पत्र आदि को शामिल किया जाता है।
2. **क्षेत्रीय स्रोत** – क्षेत्रीय स्रोत के तहत उन जीवित व्यक्तियों को सम्मिलित किया जाता है जिन्हें लंबी अवधि के दौरान सामाजिक परिस्थितियों में होने वाले परिवर्तनों के विषय में पर्याप्त ज्ञान होता है एवं जिनका सामाजिक परिस्थितियों से घनिष्ठ संपर्क रह चुका होता है। ये व्यक्ति, वर्तमान परिस्थितियों के अवलोकन के साथ–साथ योग्य एवं महत्वपूर्ण घटनाओं का समुचित वर्णन करने की भी क्षमता रखते हैं।

जार्ज लुंडबर्ग ने आंकड़ों को प्राप्त करने के दो मुख्य स्रोतों का वर्णन किया है–

(क) **ऐतिहासिक स्रोत**– ऐतिहासिक स्रोत के अंतर्गत कागजात, प्रलेख, शिलालेख, खुदाई से प्राप्त वस्तुएं, भूतत्वीय स्रोत आदि को शामिल किया जाता है।

(ख) **क्षेत्रीय स्रोत**– क्षेत्रीय स्रोतों के अंतर्गत जीवित व्यक्तियों से प्राप्त विशिष्ट सूचनाएं, क्रियाशील व्यवहारों का प्रत्यक्ष निरीक्षण आदि को शामिल किया जाता है। इसमें शोधकर्ता द्वारा स्वयं किए गए अवलोकन को भी सम्मिलित किया जाता है।

प्रोफेसर बोगले के मतानुसार आंकड़ों के संकलन के दो प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं–

(क) **प्राथमिक स्रोत**– इसके अंतर्गत समस्या से जुड़े व्यक्ति व प्रत्यक्ष निरीक्षण आते हैं।

(ख) **द्वितीयक स्रोत**– इसके अंतर्गत सरकारी व गैर–सरकारी (मानक) संस्थाओं या अप्रकाशित प्रलेखों इत्यादि को शामिल किया जाता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उक्त लेखकों और विद्वानों ने अप्रत्यक्ष रूप से आंकड़ों के संकलन के स्रोतों में प्राथमिक और द्वितीयक स्रोत की विशेषताओं का ही उल्लेख किया है।

• प्राथमिक स्रोत

ये वे स्रोत हैं जिनसे सर्वेक्षण स्वयं पहली बार तथ्यों या विभिन्न सूचनाओं को एकत्रित करता है। पीटर मान ने प्राथमिक स्रोतों के अर्थ को स्पष्ट करते हुए लिखा है, ''प्राथमिक स्रोत वे स्रोत हैं, जो प्राथमिक स्तर पर हमें विभिन्न प्रकार की आधार सामग्री प्रदान करते हैं। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि तथ्यों को संकलित करने वाले लोगों द्वारा प्रस्तुत की गई सामग्री का मौलिक स्वरूप होते हैं। इन्होंने आंकड़ों के प्राथमिक स्रोतों को दो मुख्य भागों में विभाजित किया है–1. प्रत्यक्ष स्रोत तथा 2. अप्रत्यक्ष स्रोत।

टिप्पणी

1. **प्रत्यक्ष स्रोत**– आंकड़ों के संकलन के प्रत्यक्ष स्रोत ऐसे स्रोत होते हैं जिनमें शोधकर्ता या तो मूर्त घटनाओं को स्वयं अपने सम्मुख घटित होते हुए देखता है अथवा स्वयं अध्ययन क्षेत्र में जाकर अवलोकन के द्वारा विषय से संबंधित जानकारी को अवलोकित एवं एकत्रित करता है।
2. **अप्रत्यक्ष स्रोत**– अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत के अंतर्गत शोधकर्ता अध्ययन क्षेत्र में जाए बिना अथवा सूचनादाताओं से प्रत्यक्ष संपर्क के बिना ही तथ्यों का संकलन करता है। अप्रत्यक्ष स्रोतों में मुख्य रूप से प्रश्नावलियां, फोन पैनल पद्धति, साक्षात्कार, रेडियो अपील आदि शामिल होती हैं।

मेलड्रिड पार्टिन ने अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत के अंतर्गत तीन साधनों का उल्लेख किया है–

(क) रेडियो टेलीविजन अपील

(ख) दूरभाष साक्षात्कार

(ग) दलीय या प्रतिनिधि पद्धति

(क) **रेडियो या टेलीविजन अपील**– रेडियो या टेलीविजन के माध्यम से की गई अपील को सूचना और प्रसारण का एक अच्छा साधन माना गया है। इनके द्वारा नियमित रूप से अथवा किन्हीं विशेष अवसरों पर विभिन्न कार्यक्रमों का प्रसारण करके श्रोताओं से यह अपील की जाती है कि वे उससे संबंधित अपने विचारों अथवा प्रतिक्रियाओं को अमुक पते पर भेज दें।

(ख) **दूरभाष साक्षात्कार**– दूरभाष साक्षात्कार का यह नवीन अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत वर्तमान समय में बहुत उपयोगी प्रमाणित हुआ है। इसमें शोधकर्ता केवल, दूरभाष (टेलीफोन) के माध्यम से सूचनादाताओं से संपर्क स्थापित करता है। इस स्रोत के द्वारा भी तुलनात्मक रूप से कम समय में बहुत अधिक व्यक्तियों से सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं। इससे प्राप्त सूचनाओं की प्रामाणिकता अकसर संदेहपूर्ण होती है क्योंकि ये सूचनाएं लिखित रूप में नहीं होतीं तथा सूचनादाता की मनःस्थिति का ज्ञान शोधकर्ता को नहीं होता है।

(ग) **दलीय या प्रतिनिधि पद्धति**–व्यावहारिक रूप से अधिकांश अविकसित समाजों में रेडियो, टेलीविजन तथा टेलीफोन की सुविधा इतनी कम होती है कि इनकी सहायता से कोई विशेष अध्ययन कर सकना बहुत कठिन होता है। इसके अलावा यदि अध्ययन का क्षेत्र बहुत बड़ा हो तो दलीय या प्रतिनिधि पद्धति के द्वारा आंकड़ों या तथ्यों का संकलन आसानी से किया जा सकता है।

• द्वितीयक स्रोत

प्राथमिक स्रोत के ठीक विपरीत द्वितीयक स्रोत होते हैं। किसी भी सर्वेक्षण में द्वितीयक स्रोतों का उतना ही महत्व होता है, जितना कि आंकड़ों अथवा तथ्यों के संकलन में प्राथमिक स्रोतों का। इसे स्पष्ट करते हुए जी.ए. लुंडबर्ग ने लिखा है कि सामान्यतः सर्वेक्षणकर्ता प्राथमिक स्रोतों पर ही अपनी शोध सामग्री के लिए निर्भर नहीं रहते बल्कि द्वितीयक स्रोत भी उन्हें मूल्यवान, महत्वपूर्ण एवं अनिवार्य आंकड़े प्रदान करने तथा उसके शोध के अधूरे कार्य को पूरा करने में सहायक होते हैं। द्वितीयक स्रोत सामान्यतः

उन्हें कहा जाता है, जो प्रकाशित या अप्रकाशित या पहले से प्रस्तुत की गई लिखित सामग्री का प्रतिनिधित्व करते हैं एवं जिसके द्वारा शोधकर्ता को अपने विषय से संबंधित कई महत्वपूर्ण सूचनाएं, आंकड़े या तथ्य इत्यादि प्राप्त हो जाते हैं। इन समंकों अथवा आंकड़ों को प्राप्त करने में समय और श्रम की भी बचत होती है। इनके प्रमुख स्रोत निम्न हैं– 1. प्रकाशित स्रोत, 2. अप्रकाशित स्रोत।

1. **प्रकाशित स्रोत**– किसी व्यक्ति, संस्था, राष्ट्र या अंतर्राष्ट्रीय संगठन द्वारा प्रकाशित किए गए संकलित समंकों को द्वितीयक प्रकाशित स्रोत कहते हैं। इनके द्वारा केवल उन्हीं प्रलेखों को प्रकाशित किया जाता है जो आम जनता द्वारा प्रयोग किए जा सकते हैं। ये सार्वजनिक स्थानों, जैसे – सार्वजनिक वाचनालयों, विद्यालयों व महाविद्यालयों के पुस्तकालयों में उपलब्ध हो सकते हैं।

2. **अप्रकाशित स्रोत** – इनके अंतर्गत ऐसे सभी आंकड़े या सूचनाएं आती हैं जो सार्वजनिक होते हुए भी किसी विवशता, आर्थिक कठिनाइयों अथवा वैयक्तिक कारणों से प्रकाशित नहीं हो पाती। ऐसे तथ्यों को प्राप्त करना एवं उनका उपयोग करना तुलनात्मक रूप से कुछ कठिन होता है लेकिन सामाजिक शोध में इनकी उपयोगिता बहुत अधिक होती है। अप्रकाशित प्रलेखों के कुछ प्रमुख द्वितीयक स्रोत (आंकड़े संग्रह करने में) निम्न प्रकार से हैं–

   (क) **गोपनीय रिकॉर्ड**– ये रिकॉर्ड सार्वजनिक होते हुए भी प्रकाशित नहीं किए जाते। जनहित, सुरक्षा व्यवस्था व राष्ट्रीय हितों को ध्यान में रखते हुए इनको प्रकाशित नहीं किया जाता। उदाहरण के लिए, न्यायालयों के रिकॉर्ड, सैनिक दफ्तरों के रिकॉर्ड, बोर्ड तथा विश्वविद्यालयों के परीक्षा संबंधी रिकॉर्ड, विभिन्न कंपनियों व बैंकों के रिकॉर्ड जो गोपनीय होते हैं, उन्हें प्रकाशित नहीं किया जाता है।

   (ख) **दुर्लभ हस्तलेख या पांडुलिपियां**– ये अप्रकाशित पांडुलिपियां अनेक विद्वानों, विचारकों, स्थानीय समाज सुधारकों, लेखकों, नेताओं व प्रतिभाशाली साहित्यकारों द्वारा लिखी गई होती हैं, परंतु किन्हीं विशेष कारणों से इनका प्रकाशन नहीं हो पाता। स्थानीय घटनाओं, सांस्कृतिक विशेषताओं तथा किसी विशेष घटना से संबंधित अनेक पांडुलिपियां कुछ व्यक्तियों के पास भी सुरक्षित होती हैं। कई हस्तलेख विभिन्न संग्रहालयों में पाए जाते हैं जिनका प्रयोग शोध के संबंध में सूचना प्राप्त करने में किया जाता है।

   (ग) **सर्वेक्षण रिपोर्ट** – सर्वेक्षण के द्वितीयक स्रोत में सर्वेक्षण विद्यार्थियों द्वारा प्रस्तुत रिपोर्ट अथवा शोध प्रबंध भी महत्वपूर्ण स्रोत हैं। इसमें सर्वेक्षणकर्ता किसी विषय से संबंधित पक्षों का अत्यधिक गहन अध्ययन करके महत्वपूर्ण तथ्य प्रकाश में लाता है।

आंकड़े संकलन के द्वितीयक स्रोत चाहे व्यक्तिगत हों अथवा सार्वजनिक, प्रकाशित हों अथवा अप्रकाशित, सामाजिक शोध में उनका प्रयोग सावधानीपूर्वक करना चाहिए। इस संदर्भ में डॉ. बाउले का कथन है कि ''प्रकाशित आंकड़ों अथवा तथ्यों को, उनके अर्थ और सीमाओं को समझे बिना ज्यों का त्यों स्वीकार कर लेना एक जोखिम भरा कार्य है। इस प्रकार यह आवश्यक है कि ऐसी सूचनाओं या तथ्यों पर आधारित तर्कों की सावधानी पूर्वक समालोचना कर ली जाए।''

आंकड़ों का संकलन एवं प्रस्तुतीकरण

आंकड़ों के संकलन की प्रमुख प्रविधियां निम्नवत हैं–

1. फील्ड वर्क (क्षेत्रीय कार्य)
2. प्रश्नावली प्रविधि
3. साक्षात्कार प्रविधि
4. अनुसूचि प्रविधि
5. अवलोकन (सहभागी और असहभागी) प्रविधि

फील्ड वर्क (क्षेत्रीय कार्य)

आंकड़ा संकलन सर्वेक्षण प्रक्रिया का आधारभूत अंग है। कोई भी सर्वेक्षण तथ्यों, श्रोतों आदि से संदर्भित आंकड़ों के संकलन के बिना आगे नहीं बढ़ सकता। विषय के विविध पहलुओं से संबंधित कतिपय जानकारियां यदि प्राथमिक तौर पर संकलित न की जाएं तो यथा–आवश्यकता सर्वेक्षण के दौरान बीच–बीच में यह कार्य करना होगा। बारी–बारी से आवश्यक होने वाली जानकारी एकत्र करने के लिए सर्वेक्षण कार्य के प्रवाह को रोककर, इसके लिए फील्ड वर्क करना पड़ेगा। इससे समय बहुत अधिक व्यय होगा और इस बात की भी कोई गारंटी नहीं रहेगी कि सर्वेक्षण कार्य पूरा हो जाएगा।

गुडे एवं हाट्ट के अनुसार, "सामग्री संकलन की प्रविधियों के अंतर्गत उन विशिष्ट प्रविधियों अथवा तरीकों को सम्मिलित किया जाता है, जिनके द्वारा सर्वेक्षणकर्ता अपने तथ्यों को तार्किक एवं सांख्यिकीय विश्लेषण से पूर्व एकत्रित एवं व्यवस्थित करता है।" फील्ड वर्क भी ऐसी ही एक प्रविधि है। यह तथ्यों के एकत्रीकरण का एक आधारभूत, स्वीकृत एवं सर्वमान्य तरीका है।

प्रश्नावली प्रविधि

सांख्यिकी सर्वेक्षण प्रक्रिया में सर्वेक्षणकर्ता द्वारा तथ्य या आंकड़े संकलित करने की प्रविधियों में एक महत्वपूर्ण प्रविधि प्रश्नावली है। प्रश्नावली अनेक प्रश्नों से युक्त एक ऐसी सूची होती है, जिसमें अध्ययन विषय से संबंधित विभिन्न पक्षों के बारे में पहले से तैयार किए गए प्रश्नों का समावेश होता है। उत्तरदाताओं से प्रश्नावलियां भरवाकर आवश्यक जानकारी संकलित की जाती है। यह प्रश्नावली सर्वेक्षणकर्ता उत्तरदाता के पास या तो स्वयं लेकर जाता है अथवा डाक से प्रेषित की जाती है और डाक द्वारा या स्वयं संकलित भी की जाती है।

प्रश्नावली विभिन्न प्रश्नों की एक व्यवस्थित सूची है जिसका संबंध किसी विषय से संबंधित व्यक्तियों से डाक द्वारा सूचनाएं प्राप्त करके समंकों को एकत्र कर उनसे निष्कर्ष निकालने से है। साधारण शब्दों में कहा जा सकता है कि अध्ययन विषय से संबंधित लोगों से सूचना प्राप्त करने हेतु बनाए गए प्रश्नों की व्यवस्थित सूची को प्रश्नावली कहते हैं। जिस प्रश्नावली को डाक द्वारा प्रेषित किया जाता है, उसे डाक द्वारा प्रेषित प्रश्नावली कहा जाता है।

विभिन्न विद्वानों ने प्रश्नावली की निम्न प्रकार से परिभाषाएं दी हैं–

गुडे एवं हाट्ट के अनुसार–''सामान्यतः प्रश्नावली शब्द प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने की उस प्रणाली को कहते हैं, जिसमें स्वयं उत्तरदाता द्वारा भरे जाने वाले पत्रक का प्रयोग किया जाता है।''

पी.वी. यंग के अनुसार–''प्रश्नावली को एक ऐसे प्रपत्र के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसे उत्तरदाताओं के पास प्रायः डाक द्वारा प्रेषित किया जाता है। जिसमें उत्तरदाताओं द्वारा अपना स्वयं मूल्यांकन प्रस्तुत किया जाता है।''

बोगार्डस के अनुसार–''प्रश्नावली विभिन्न व्यक्तियों के उत्तर देने के लिए दी गई प्रश्नों की एक तालिका या सूची है।''

उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर यह कहा जा सकता है कि प्रश्नावली किसी सामाजिक घटना के अध्ययन के प्रयोग में लाई जाने वाली प्रश्नों की एक सूची है। सूचनादाता को जो प्रश्नावली प्राप्त हुई है, वह स्वयं ही उस प्रश्नावली को भरकर सूचनाएं प्रेषित करता है।

प्रश्नावली के उद्देश्य

प्रश्नावली का प्रयोग मुख्य रूप से निम्न उद्देश्यों के लिए किया जाता है–

1. तथ्यात्मक सूचनाओं के संकलन के लिए।
2. विषय से संबंधित उन व्यक्तियों से सूचना संकलन करने के लिए जो बहुत दूर हों, जहां पर शोधकर्ता के लिए जाना कठिन हो।
3. यह बड़े प्रश्नों के उत्तर और विभिन्न लोगों से सुझाव प्राप्त करने में भी सहायक होती है।

प्रश्नावली के प्रकार

सामाजिक घटनाओं के अध्ययन के लिए प्रश्नावली का उपयोग प्रश्नों के समूह के रूप में किया जाता है। सामाजिक घटनाओं में जटिलता व विविधता होती है। प्रश्नावली का निर्माण भी इन समस्याओं से संबंधित हो इसके लिए विभिन्न तरह की प्रश्नावली का निर्माण करना होता है। प्रश्नावली की संरचना और प्रश्नों की प्रकृति या तथ्यों की प्रकृति के आधार पर उसका भिन्न–भिन्न प्रकारों में वर्गीकरण किया जाता है।

1. **संरचित प्रश्नावली**–सर्वेक्षण में प्रयोग की जाने वाली उस प्रश्नावली को संरचित प्रश्नवली कहते हैं, जिसकी रचना वास्तविक अध्ययन आरंभ होने से पहले ही कर ली जाती है। इसमें बाद में कोई परिवर्तन नहीं किया जाता है। पी.वी. यंग के मतानुसार, ''संरचित प्रश्नावली उस प्रश्नावली को कहा जाता है जिसकी संरचना शोध शुरू करने से पहले कर ली जाती है तथा जिनमें निश्चित, स्पष्ट अथवा पूर्व निर्धारित प्रश्नों के अतिरिक्त ऐसे अतिरिक्त प्रश्न भी सम्मलित रहते हैं, जो अपर्याप्त उत्तरों का स्पष्टीकरण करने पर अधिक विस्तृत उत्तर प्राप्त करने के लिए आवश्यक समझे जाते हैं। ऐसी प्रश्नावली का उपयोग एक विस्तृत अध्ययन क्षेत्र में फैले हुए व्यक्तियों से प्राथमिक तथ्यों का संकलन करने तथा संकलित तथ्यों का पुनर्परीक्षण करने के लिए किया जाता है।''

टिप्पणी

2. **असंरचित प्रश्नावली**– असंरचित प्रश्नावली उस प्रश्नावली को कहते हैं जिसकी रचना वास्तविक अध्ययन आरंभ होने से पहले नहीं की जाती है। इसमें केवल उन विषयों का वर्णन होता है, जिनके विषय में उत्तरदाताओं से सूचना अर्जित करनी होती है। पी.वी. यंग के अनुसार, "असंरचित प्रश्नावली का विषय क्षेत्र अवश्य निश्चित होता है, जिसके अंतर्गत ही साक्षात्कार की आवश्यकतानुसार अध्ययनकर्ता या शोधकर्ता स्वतंत्रतापूर्वक प्रश्नों की जांच कर सकता है।"
3. **बंद प्रश्नावली**–इसके अंतर्गत प्रश्नावली में हर प्रश्न के साथ–साथ संभावित सही जवाब भी दिए जाते हैं तथा उत्तरदाता को इन्हीं उत्तरों में से सही उत्तर देना होता है। उत्तरदाता अपनी इच्छा से प्रश्नों के उत्तर नहीं दे सकता है। इसलिए इसे सीमित या प्रतिबंधित प्रश्नावली भी कहा जाता है। इस प्रकार की प्रश्नावली के कुछ नमूना प्रश्न नीचे दिए गए हैं–

प्रश्न	**निर्दिष्ट उत्तर**	
1. क्या आप बेरोजगार हैं?	(अ) हां	(ब) नहीं
2. आप किस आय वर्ग के अंतर्गत आते हैं?		
(अ) रु. 2000 से कम	(ब) रु. 2000 से रु. 5000 तक	
(स) रु. 5000 से रु. 1000 तक	(द) रु. 10000 से अधिक	
3. आपकी वैवाहिक स्थिति क्या है?	(अ) अविवाहित	(ब) विवाहित
	(स) विधवा	(द) विधुर

सिन पाओ यंग ने लिखा है, ''बंद प्रश्नावली में ज्यादातर पूछे गए प्रश्नों के प्रकरणतः उत्तर दिए जाते हैं।''

बंद प्रश्नावली के गुण

- इसमें उत्तर देना उत्तरदाता के लिए आसान होता है।
- इससे संचित तथ्यों का स्पष्टीकरण एवं वर्गीकरण आसान हो जाता है।
- इससे गुणात्मक तथ्यों की जानकारी अर्जित की जा सकती है।
- यह ज्यादा उद्देश्य परक होती है।

बंद प्रश्नावली के दोष

- इस प्रकार की प्रश्नावली के आधार पर उत्तरदाताओं के सही विचारों को नहीं जाना जा सकता, क्योंकि उत्तरदाता संभावित जवाबों के अलावा अन्य जवाब देने के लिए स्वतंत्र नहीं रहता है।
- यह निर्माण में बहुत कठिन होती है।
- इसमें उत्तरदाता अपने उत्तर का औचित्य भी नहीं समझ पाता है।

4. **खुली प्रश्नावली**–इस प्रश्नावली में प्रश्न लिखे होते हैं तथा उत्तर के लिए स्थान खाली रहता है। यह प्रश्नावली विचारों के खुले प्रदर्शन का सशक्त रूप है। इसमें

उत्तरदाता जो भी उत्तर देता है वे संक्षिप्त न होकर विस्तृत और विवरणात्मक होते हैं। इस प्रकार की प्रश्नावली के कुछ नमुने प्रश्न नीचे दिए जा रहे हैं–

(क) आपकी राय में भारत में बढ़ते भ्रष्टाचार के मुख्य कारण कौन–कौन से हैं?

....

....

(ख) भारत को भ्रष्टाचार मुक्त करने के लिए आप कौन–कौन से सुझाव देंगे?

....

....

खुली प्रश्नावली के गुण

- यह बनाने में आसान है।
- यह उत्तरदाताओं से विषय संबंधी अधिक तथ्यात्मक जानकारी हासिल करने में सहायक है।
- उत्तरदाता कारण सहित विस्तारपूर्वक उत्तर दे सकता है।

खुली प्रश्नावली के दोष

- इसमें तथ्यों के उत्तर देने में अधिक ध्यान लगाना पड़ता है जिससे अनेक प्रश्नों के उत्तर नहीं प्राप्त हो पाते हैं।
- इसमें तथ्यों का सारणीकरण और वर्गीकरण करने में मुश्किल होती है।
- इसमें समय की खपत होती है, क्योंकि उत्तरदाता अपने उत्तरों को देने में पूर्णतया स्वतंत्र होता है।
- इसमें कभी–कभी तथ्यात्मक उत्तर नहीं मिल पाते। उत्तरदाता प्रायः विषय से संबंधित सही उत्तर नहीं दे पाता है।
- यह प्रश्नावली ज्यादा उद्देश्यपरक नहीं हो पाती है।

5. **मिश्रित प्रश्नावली**–इसमें कई प्रकार के प्रश्न समाविष्ट होते हैं। इसमें बंद व खुले दोनों तरह के सवालों का समावेश होता है। इसमें विषय से संबंधित सूचना को अर्जित करने के लिए जिस तरह के सवालों की उपयोगिता होती है उनका समावेश किया जा सकता है। अतः विषय का व्यापक एवं गहन अध्ययन करने के लिए इस प्रश्नावली में समस्त प्रकार के प्रश्नों को शामिल किया जाता है और सूचनाएं संकलित की जाती हैं। इस प्रश्नावली में सीमित एवं असीमित, बंद व खुले प्रश्नों का समावेश यथोचित किया जाता है।

   इस प्रश्नावली का सबसे बड़ा लाभ यह होता है कि उत्तरदाताओं के आजाद विचारों को जानने में सहायता मिलती है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक प्रकार की प्रश्नावली के कुछ गुण व दोष भी हैं। अतः यह शोधकर्ता पर निर्भर करता है कि विषय से संबंधित जिस प्रकार की सूचना उसे चाहिए वह उसी अनुरूप प्रश्नावली तैयार करे, जिससे वांछित जानकारी प्राप्त की जा सके और उपलब्ध जानकारी का सारणीकरण व वर्गीकरण आसानी से किया जा सके।

टिप्पणी

प्रश्नावली का नमूना

निम्न प्रश्नावली एक शॉपिंग माल की लोकप्रियता से संबंधित है। आप अपने उत्तर, दिए गए विकल्पों पर (√) सही का निशान लगाकर या खाली स्थानों को भरकर प्रकट कीजिए–

शॉपिंग माल उपभोक्ता संबंधी प्रश्नावली

1.	नाम	:	....	
2.	पिता का नाम	:	....	
3.	पता	:	....	
			....	
			फोन नं.	
4.	आयु	:	....	
5.	शैक्षिक योग्यता	:	अनपढ़	हाईस्कूल
			इंटर	स्नातक
6.	आजीविका	:	सरकारी नौकरी	
			प्राइवेट नौकरी	
			व्यापार	अन्य
7.	लिंग	:	पुरुष	स्त्री
8.	वैवाहिक स्थिति	:	विवाहित	अविवाहित
			विधुर या विधवा	
			तलाक शुदा	
9.	परिवार के सदस्यों की संख्या	:	पुरुष	स्त्री
			बच्चे	
10.	मासिक आय	:	5000 रु. प्रति माह से कम	
			5000 रु. से 10000 रु. तक	
			10000 रु. से 20000 रु. तक	
			20000 रु. से अधिक	

11. आप एक माह में कितनी बार शॉपिंग मॉल जाते हैं?

    माह में यदाकदा — माह में 5 से 10 बार तक

    माह में 10 से 15 बार तक — 15 से अधिक बार

12. आप शॉपिंग मॉल क्यों जाते हैं?

    ....

    ....

    ....

13. आप शॉपिंग मॉल में किन कारणों से माल खरीदना पसंद करते हैं?

....

....

टिप्पणी

14. क्या आप दैनिक उपभोग की अधिकांश वस्तुएं शॉपिंग मॉल से खरीदते हैं?

हां नहीं

15. शॉपिंग मॉल के विक्रेताओं का व्यवहार कैसा होता है?

विनम्र रुखा

कुशल अकुशल

सहयोगी असहयोगी

16. क्या आप शॉपिंग मॉल में किसी प्रकार की कठिनाई महसूस करते हैं?
यदि हां तो किस प्रकार की?

....

....

17. शॉपिंग माल में वस्तुओं की गुणवत्ता से क्या आप संतुष्ट हैं?

हां नहीं

18. शॉपिंग मॉल के संबंध में आपके सुझावः

....

....

....

....

स्थानः

दिनांकः उत्तरदाता के हस्ताक्षर

आपको पुनः यह विश्वास दिलाते हुए कि आपके द्वारा दी गई सूचनाएं नितांत गोपनीय रखी जाएंगी।

सर्वेक्षणकर्ता के हस्ताक्षर

प्रश्नावली की विशेषताएं

एक श्रेष्ठ प्रश्नावली के निर्माण का अपना महत्व है, क्योंकि प्रश्नावली की विशेषताओं के आधार पर ही सर्वेक्षणकर्ता की सफलता और असफलता निर्भर करती है। अतः एक अच्छी प्रश्नावली तैयार करते समय उसमें निम्न बातों का समावेश किया जाना चाहिए—

1. प्रश्नावली आकार में छोटी व उद्देश्यपरक हो।
2. प्रश्न सीधे, सरल, एकार्थी और शीघ्र ही समझ में आने वाले होने चाहिए।
3. प्रश्नावली में प्रश्न इस प्रकार के हों कि वांछित सूचनाएं प्रत्यक्ष रूप से प्राप्त की जा सकें।

4. जहां तक संभव हो प्रश्नों को सूचनादाता हेतु रुचिपरक बनाया जाए।
5. प्रश्नों में विषय की व्याख्या की गई हो।

टिप्पणी

प्रश्नावली–निर्माण के सिद्धांत

प्रश्नावली प्राथमिक तथ्यों को प्राप्त करने का एक उत्तम साधन है। इसलिए यह आवश्यक है कि प्रश्नावली का निर्माण इस तरह किया जाए कि वह उपयोगी सिद्ध हो। प्रश्नावली का निर्माण जितना अधिक व्यवस्थित एवं सावधानीपूर्वक किया जाता है, सर्वेक्षण के लिए सामग्री का संकलन करना उतना ही उपयोगी हो जाता है। एक प्रश्नावली के निर्माण में निम्न सिद्धांतों का समावेश किया जाना चाहिए–

1. **विषय का पूर्ण विश्लेषण**–सबसे पहले विषय के बारे में शोधकर्ता को पूर्ण अनुभव होना चाहिए। इसका उपयोग प्रश्नावली के निर्माण में करना चाहिए ताकि विषय से संबंधित सभी प्रश्नों को सम्मिलित किया जा सके। अतः समस्त पक्षों का उचित विश्लेषण करने के पश्चात ही प्रश्नावली तैयार की जानी चाहिए।
2. **प्रश्नों की उपयोगिता**–प्रश्नों को प्रश्नावली में स्थान तभी देने चाहिए जब अध्ययन के संबंध में उनकी उपयोगिता हो। अनुपयुक्त प्रश्नों का समावेश होने से समय, धन एवं श्रम का दुरुपयोग होता है।
3. **प्रश्नों की प्रकृति एवं भाषा**– प्रश्नों की प्रकृति और उनकी भाषा प्रश्नावली के आवश्यक अंग हैं। अतः प्रश्नावली में प्रश्नों की प्रकृति और भाषा से संबंधित निम्न विशेषताएं होनी चाहिए–
   - प्रश्नावली का आकार बड़ा नहीं होना चाहिए।
   - प्रश्नावली के प्रश्न उत्तरदाता के रुचिपरक हों।
   - प्रश्नावली के प्रश्न अत्यंत सरल और स्वाभाविक प्रकृति के हों।
   - प्रश्नावली के प्रश्न स्पष्ट तथा विषय से संबंधित हों।
   - प्रश्नावली के प्रश्न ऐसे हों कि उत्तरदाता सही उत्तर दे सके।
   - प्रश्नावली के प्रश्न एक क्रम में होने चाहिए।
4. **प्रश्नावली का भौतिक स्वरूप**– इसमें निम्न बातों का ध्यान रखना आवश्यक है–
   - प्रश्नावली का आकार सीमित होना चाहिए।
   - प्रश्नावली में उत्तरदाता की प्रारंभिक सूचनाएं स्पष्ट होनी चाहिए।
   - प्रश्नावली में प्रश्नों की संख्या अधिक होने पर उन्हें विभिन्न खंडों में बांट देना चाहिए।
   - प्रश्नावली की लिपि स्पष्ट व आकर्षक होनी चाहिए।
5. **प्रश्नावली की पूर्व परीक्षा से संबंधित सावधानियां**–प्रश्नावली की पूर्व परीक्षा से तात्पर्य यह है कि प्रश्नावली को तैयार करने के पहले स्वयं उसे भरें। उसे भरने में जो कठिनाइयां और असुविधाएं आती हैं उनका निराकरण कर लें

उसके बाद ही उसे संबंधित व्यक्ति के पास भेजा जाना चाहिए। प्रश्नावली के निम्न लाभ हैं–

- इससे अनावश्यक और असंबंधित उत्तरों से बचा जा सकता है।
- इससे प्रश्नावली की व्यवस्था में कमी का पता चलने पर उसे व्यवस्थित किया जा सकता है।

टिप्पणी

प्रश्नावली की विश्वसनीयता की जांच

प्रश्नावली से प्राप्त सूचनाएं दोनों ही प्रकार की हो सकती हैं– विश्वसनीय और अविश्वसनीय। प्रश्नावली से प्राप्त सूचनाओं की विश्वसनीयता की जांच करने के निम्न तरीके हैं–

1. **प्रश्नावली को पुनः भेजना**–प्रश्नावली की विश्वसनीयता को जांचने के लिए एक ही प्रश्नावली उन्हीं सूचनादाताओं के पास कुछ समय के पश्चात भेजी जानी चाहिए और प्राप्त उत्तरों का मिलान पुराने उत्तरों से किया जाना चाहिए। यदि दोनों उत्तर समान हों तो प्रश्नावली विश्वसनीय होती है।
2. **समान अध्ययन**–प्रश्नावली की विश्वसनीयता को जांचने का दूसरा आसान उपाय है कि प्रश्नावली दूसरे समान वर्ग के पास भेजी जाए तथा इस प्रश्नावली के उत्तरों का पूर्व प्रश्नावली के उत्तरों से मिलान किया जाए। यदि इन दोनों प्रश्नावलियों के उत्तरों में समानता पाई जाए तो यह मानना चाहिए कि प्रश्नावली विश्वसनीय है।
3. **अन्य शोध विधियों का प्रयोग**–प्रश्नावली की विश्वसनीयता की जांच करने के लिए दूसरी शोध विधियों का प्रयोग भी किया जा सकता है। इनमें प्रत्यक्ष साक्षात्कार, अवलोकन एवं अनुसूची इत्यादि विधियां हैं। अगर इन विधियों द्वारा भी वही जवाब मिलता है जो प्रश्नावलियों से प्राप्त हुआ है तो प्रश्नावली को प्रमाणित एवं विश्वसनीय माना जाता है।
4. **पूर्व ज्ञान**–पूर्व ज्ञान के आधार पर भी प्रश्नावली की विश्वसनीयता की जांच की जाती है। समस्या के बारे में शोधकर्ता को जो पूर्व ज्ञान है इसी आधार पर प्रश्नावली के उत्तरों का मिलान किया जा सकता है। यदि प्रश्नावली के द्वारा इसके विपरीत उत्तर मिलते हैं तो प्रश्नावली को विश्वसनीय नहीं माना जा सकता।

प्रश्नावली के लाभ

प्रश्नावली के द्वारा प्राथमिक तथ्यों को संचित किया जाता है। इसके द्वारा सामाजिक समस्याओं के अध्ययन में बहुत फायदा होता है। इसके निम्नलिखित गुणों के कारण तथ्यों को आसानी से संकलित किया जा सकता है।

1. इसके द्वारा अध्ययन में न्यूनतम खर्च आता है।
2. इसके माध्यम से व्यापक भौगोलिक क्षेत्र में विस्तारित विशाल जनसंख्या का अध्ययन सफलतापूर्वक हो जाता है।
3. इस तकनीक से कम समय तथा कम श्रम में तथ्य संकलित हो जाते हैं।

4. इस प्रणाली से सूचना की पुनरावृत्ति संभव नहीं हो पाती है। इसके द्वारा वस्तुनिष्ठ सूचना अर्जित करने की ज्यादा संभावना रहती है।
5. इस तकनीक से विश्वसनीय, पक्षपातरहित तथा प्रमाणित सूचनाओं को अर्जित किया जा सकता है। यह विधि स्वयं प्रशासित होती है।

प्रश्नावली की सीमाएं

प्रश्नावली के अनेक लाभ और गुण होते हुए भी इसमें अनेक दोष या सीमाएं पाई जाती हैं। ये सीमाएं निम्न हैं–

1. इसकी सहायता से केवल शिक्षित समूह से ही सूचना अर्जित की जा सकती है।
2. इसके द्वारा अपूर्ण सूचनाओं की प्राप्ति की संभावना बनी रहती है, क्योंकि प्रश्नावली को भरने में उत्तरदाता रुचि नहीं दिखाता है।
3. सूचनादाता के सहयोग के बिना अधिकतर प्रश्नावलियां लौटकर घर नहीं आती हैं।
4. प्रश्नावली से प्राप्त सूचनाएं अधिकतर संकुचित और सीमित होती हैं।
5. प्रश्नावली से प्राप्त सूचनाओं में उत्तरदाता की भावात्मक प्रेरणा का अभाव रहता है।

प्रश्नावली पद्धति में अनेक दोष होने के बावजूद इसके द्वारा विस्तृत क्षेत्र में सीमित साधन होने के बाद भी सरलतापर्वूक अध्ययन किया जा सकता है। निष्कर्षतः यह कहा जा सकता है कि प्रश्नावली पद्धति न तो पूरी तरह दोषपूर्ण है और न पूर्णरूपेण दोषमुक्त, बल्कि सामाजिक शोध की अन्य प्रविधियों की अपेक्षा प्रश्नावली ज्यादा उपयोगी और स्पष्ट है।

साक्षात्कार प्रविधि

सर्वेक्षण में प्राथमिक तथ्यों का संकलन करने के लिए जिस पद्धति का प्रयोग सर्वाधिक रूप में किया जाता है वह साक्षात्कार ही है। साक्षात्कार शब्द अंग्रेज़ी भाषा के 'Interview' का हिंदी रूपांतरण है। इंटरव्यू शब्द दो शब्दों से मिलकर बना है– Inter (भीतर) तथा View (देखना), जिसका शाब्दिक अर्थ होता है अंतःदर्शन या आंतरिक रूप से देखना। साक्षात्कार वह पद्धति है जिसमें बातचीत के माध्यम से सामग्री का संग्रहण किया जाता है। हमारे दैनिक जीवन में साक्षात्कार शब्द का प्रचलन इतना अधिक बढ़ चुका है कि किसी भी पद के लिए नौकरी प्राप्त करने, संस्थाओं में प्रवेश पाने अथवा किसी विशेष अधिकारी अथवा नेता से मिलने के लिए हमें साक्षात्कार की प्रक्रिया से गुजरना पड़ता है।

- **परिभाषाएं**

गुडे और हाट्‌ट के अनुसार, ''साक्षात्कार मौलिक रूप से सामाजिक अंतःक्रिया की एक प्रक्रिया है।'' अर्थात साक्षात्कार की अभिक्रिया केवल शोधकर्ता एवं उत्तरदाता के एक–दूसरे के संबंध से नहीं है बल्कि इन दोनों पक्षों के बीच एक अर्थपूर्ण, उद्देश्यपूर्ण अंतःक्रिया से है।''

पी.वी. यंग के अनुसार, ''साक्षात्कार एक ऐसी व्यवस्थित विधि है जिसके द्वारा एक व्यक्ति (शोधकर्ता) दूसरे व्यक्ति के आंतरिक जीवन में अधिक या कम कल्पनात्मक रूप से प्रवेश करता है जो उसके लिए सामान्यतया तुलनात्मक रूप से अपिरिचित होता है।''

एम.एन. बसु के अनुसार, ''एक साक्षात्कार को कुछ विषयों को लेकर व्यक्तियों के आमने–सामने का मिलन कहा जा सकता है।''

सी.ए. मोजर के अनुसार, ''एक सर्वेक्षण साक्षात्कार, शोधकर्ता तथा उत्तरदाता के मध्य एक वार्तालाप है, जिसका उद्देश्य उत्तरदाता से निश्चित सूचना प्राप्त करना होता है।''

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि साक्षात्कार का उद्देश्य किसी विशेष समस्या या जानकारी के संदर्भ में ज्ञानार्जन है।

साक्षात्कार की विशेषताएं

साक्षात्कार की उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर प्रमुखतया निम्न विशेषताएं निर्धारित की जा सकती हैं–

1. साक्षात्कार सामाजिक सर्वेक्षण एवं अनुसंधान की एक पद्धति है।
2. यह प्राथमिक तथ्यों के संकलन की एक महत्वपूर्ण प्रविधि है।
3. साक्षात्कार का उद्देश्य सामाजिक जीवन और सामाजिक घटनाओं के बारे में जानकारी प्राप्त करना है।
4. साक्षात्कार दो या दो से अधिक व्यक्तियों का किसी सुनिश्चित उद्देश्य के लिए आपस में मिलना है।
5. इसमें शोधकर्ता और सूचनादाता के बीच आमने–सामने के संबंध प्रत्यक्ष रूप से स्थापित होते हैं।

साक्षात्कार के उद्देश्य

सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार की प्रविधि शोधकर्ता को यह अवसर प्रदान करती है कि वह शोध से संबंधित व्यक्ति के संपर्क में आकर अतीत की घटनाओं, उसकी निजी भावनाओं अथवा प्रतिक्रियाओं को समझकर सामाजिक घटनाओं में पायी जाने वाली नियमितता की खोज कर सके। सामाजिक अनुसंधान में साक्षात्कार निम्न उद्देश्यों से किए जाते हैं–

1. **प्राथमिक सामग्री का संकलन**– साक्षात्कार का एक प्रमुख उद्देश्य किसी अध्ययन से संबंधित प्राथमिक सामग्री का संकलन करना होता है। इस प्रविधि के द्वारा कुछ व्यक्तियों से प्रत्यक्ष संपर्क स्थापित करके शोध के विभिन्न पक्षों से संबंधित आंतरिक और व्यक्तिगत सूचनाएं एकत्रित की जाती हैं। ऐसी सूचनाएं जिनमें से अनेक प्राथमिक तथ्यों का संबंध व्यक्ति के निजी जीवन अथवा गोपनीय पक्षों से होता है। अतः उसके बारे में केवल साक्षात्कार द्वारा ही ज्ञान प्राप्त किया जा सकता है।
2. **व्यक्तिगत सूचनाएं**– साक्षात्कार पद्धति में सूचनादाता और शोधकर्ता के बीच आमने–सामने के प्रत्यक्ष और व्यक्तिगत संबंध स्थापित किए जाते हैं, जिससे

एक–दूसरे के विचारों और भावनाओं में प्रवेश करने का प्रयास किया जाता है इस प्रकार इससे सरलता और सुगमता के साथ व्यक्तिगत सूचनाएं संकलित की जा सकती हैं।

3. **नई परिकल्पनाओं का निर्माण**— साक्षात्कार के द्वारा सामाजिक जीवन, सामाजिक घटनाओं और सामाजिक समस्याओं के बारे में विविध प्रकार की जानकारी प्राप्त होती है, जिनके आधार पर नई परिकल्पनाओं का निर्माण किया जा सकता है।
4. **घटनाओं का अवलोकन**— साक्षात्कार पद्धति में शोधकर्ता संपर्क स्थापित करने के लिए क्षेत्र में जाता है तथा उत्तरदाता से अनेक प्रश्न करने के साथ ही उसके वातावरण, जीवन स्तर, क्रिया–कलापों, सदस्यों के पारस्परिक संबंधों तथा अभिरुचियों का स्वयं भी अवलोकन करने का अवसर प्राप्त कर लेता है। इस दृष्टिकोण से साक्षात्कार एक दोहरी प्रविधि है, जिसके अंतर्गत विषय से संबंधित ज्ञान प्राप्त करने के साथ ही शोधकर्ता घटनाओं का अवलोकन भी करता है।
5. **गुणात्मक तथ्यों की जानकारी**— साक्षात्कार पद्धति का उद्देश्य अध्ययन किए जाने वाले के सामाजिक मूल्यों, आदर्शों, नियमों, व्यवहार, प्रतिमानों, रुचियों, विश्वासों, भावनाओं, मनोवृत्तियों, उद्वेगों, विचारों, अच्छाइयों, अमूर्त तथा अदृश्य गुणों आदि से संबंधित गुणात्मक तथ्यों की जानकारी प्राप्त करना है।

साक्षात्कार के प्रकार

आंकड़ा सर्वेक्षण में साक्षात्कार प्रविधि ज्ञान प्राप्त करने की एक महत्वपूर्ण तकनीक है। इसके प्रमुख प्रकारों को निम्न भागों में विभाजित किया जा सकता है–

1. **व्यक्तिगत साक्षात्कार**— जब सर्वेक्षणकर्ता का एक समय में एक ही व्यक्ति से साक्षात्कार होता है तो इसे व्यक्तिगत साक्षात्कार कहा जाता है। इस साक्षात्कार में शोधकर्ता उत्तरदाता से प्रश्न पूछता है और सूचनादाता (शोधकर्ता) इन प्रश्नों का उत्तर देता है। ऐसे साक्षात्कार के अनेक गुण हैं–
   - इसके द्वारा अधिक यथार्थ और आंतरिक सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।
   - इसके द्वारा अधिक संवेदनशील प्रश्नों के उत्तर प्राप्त किए जा सकते हैं।
   - समस्त प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करना संभव होता है।

   इस संबंध में बोगार्डस ने लिखा है कि ''व्यक्तिगत साक्षात्कार द्वारा लोगों की मनोवृत्तियों तथा उनमें होने वाले परिवर्तनों को सर्वोत्तम रूप से समझा जा सकता है।''
2. **सामूहिक साक्षात्कार**— यह वह प्रविधि है जिसमें शोधकर्ता एक समय में एक से अधिक व्यक्तियों के साथ संपर्क या साक्षात्कार कर सकता है। इस प्रविधि में चूंकि उत्तरदाता समूह में होते हैं इसलिए इसे सामूहिक साक्षात्कार कहा जाता है। इसमें शोधकर्ता प्रत्येक उत्तरदाता से व्यक्तिगत रूप से उत्तर प्राप्त नहीं कर सकता है। अधिक उत्तरदाताओं के एक समूह का एक ही साथ अध्ययन कर सकता है। इस तरह के साक्षात्कार को सामूहिक परिचर्चा भी कहते हैं। वर्तमान समय में इस प्रकार के साक्षात्कार अत्यधिक लोकप्रिय होते जा रहे हैं। सामूहिक साक्षात्कार के निम्न लाभ हैं–

- इसके माध्यम से विश्वसनीय सूचनाएं प्राप्त की जा सकती हैं।
- तुलनात्मक दृष्टि से समय और व्यय की बचत होती है।
- यह अधिक वैयक्तिक अध्ययन का साधन है।
- इसके माध्यम से व्यापक क्षेत्र में एवं बड़ी संख्या में उत्तरदाताओं से सूचनाएं संकलित की जा सकती हैं।

टिप्पणी

3. **औपचारिक साक्षात्कार**– औपचारिकता के आधार पर होने वाले साक्षात्कार को औपचारिक साक्षात्कार कहते हैं। इसे नियंत्रित या संकलित साक्षात्कार भी कहा जाता है। इस प्रकार के साक्षात्कार में शोधकर्ता केवल वे ही प्रश्न पूछता है जो पहले से तैयार विषय सूची में उल्लेखित रहते हैं। इसमें शोधकर्ता अनुसूची से नियंत्रित रहता है। उसको अनुसूची के प्रश्नों, भाषा आदि के परिवर्तन में किसी प्रकार की स्वतंत्रता नहीं रहती है। इस साक्षात्कार का प्रमुख उद्देश्य अध्ययन में एकरूपता बनाए रखना होता है। इस प्रकार के साक्षात्कार में सभी उत्तरदाताओं से एक ही प्रकार से प्रश्न किए जाते हैं।
4. **अनौपचारिक साक्षात्कार**– इस साक्षात्कार को अनियंत्रित अथवा असंरचित साक्षात्कार भी कहा जाता है इसमें बिना किसी अनुसूची की सहायता से शोधकर्ता कुछ मुख्य प्रश्नों को पूछता है एवं उत्तरदाता स्वतंत्रता पूर्वक उन सवालों के जवाब देता है। शोधकर्ता अपनी इच्छा के अनुसार प्रश्नों को बढ़ाने, घटाने अथवा आवश्यकतानुसार परिवर्तन करने के लिए स्वतंत्र रहता है। इससे यह लाभ होता है कि शोधकर्ता के समक्ष अनेक ऐसे महत्वपूर्ण तथ्य स्पष्ट हो जाते हैं जिनकी पहले से कोई कल्पना नहीं की गई होती है। इस तरह के साक्षात्कार का प्रयोग विशेषकर मनोवैज्ञानिक अध्ययनों के लिए किया जाता है।
5. **अनुसंधान साक्षात्कार**– इस प्रकार के साक्षात्कार घटनाओं में व्याप्त कार्य कारण संबंधों की खोज के उद्देश्य से आयोजत किए जाते हैं। इस प्रकार के साक्षात्कार का उद्देश्य नवीन ज्ञान की खोज करना होता है। इसमें कुछ प्रमुख व्यक्तियों अथवा समूहों की मनोवृत्तियों, सामाजिक मूल्यों तथा परिवर्तनशील विचारों का अध्ययन किया जाता है।

साक्षात्कार की तैयारी– साक्षात्कार की सफलता के लिए सर्वप्रथम आवश्यक है कि सर्वेक्षणकर्ता साक्षात्कार से पूर्व योजना का स्पष्ट रूप से निर्धारण कर लें। साक्षात्कार से पूर्व सर्वेक्षणकर्ता को अध्ययन विषय का पूर्णरूप से ज्ञान होना आवश्यक है; जैसे अध्ययन का उद्देश्य क्या है। उसे किन–किन पहलुओं से गुजरना पड़ सकता है एवं उत्तरदाताओं से किस तरह के तथ्य संकलित करने हैं। साथ ही उत्तरदाताओं का चुनाव, साक्षात्कार की जगह एवं समय भी पहले से ही तय कर लेना चाहिए।

साक्षात्कार की तैयारी में निम्न बातें अति आवश्यक हैं–

1. **विषय का ज्ञान**– सर्वेक्षणकर्ता को साक्षात्कार करने से पहले विषयवस्तु के विभिन्न पहलुओं के संबंध में पूर्ण जानकारी एकत्रित कर लेनी चाहिए।
2. **निर्देशिका का निर्माण**– साक्षात्कार की तैयारी में दूसरा चरण साक्षात्कार निर्देशिका का निर्माण करना है। यह एक लिखित प्रलेख होता है। इसमें

टिप्पणी

साक्षात्कार करने की संक्षिप्त रूप में प्रणाली, समस्या के कई पहलू एवं अन्य जरूरी निर्देश दिए रहते हैं। साक्षात्कार निर्देशिका की विशेषताएं हैं–

(क) इसके निर्माण से सर्वेक्षणकर्ता समस्या के सभी पहलुओं का अध्ययन करने में समर्थ रहता है।

(ख) इसके द्वारा उत्तरदाताओं को साक्षात्कार से संबंधित तथ्यों को सरलता से समझाया जा सकता है।

(ग) इससे शोधकर्ता को अपनी स्मरण शक्ति पर दबाव नहीं डालना पड़ता है।

(घ) साक्षात्कार निर्देशिका की सहायता से हम जो भी सामग्री संग्रहित करते हैं वह यथार्थ और ठोस रहती है।

(ङ) साक्षात्कार निर्देशिका अध्ययन समस्या में योजनाबद्ध तरीके से तथ्यों का संकलन करने में सहायता करती है।

3. **व्यक्तियों (उत्तरदाताओं) का चुनाव**–साक्षात्कार की तैयारी में तीसरा महत्वपूर्ण कदम उत्तरदाताओं का चयन करना है। उत्तरदाताओं का चुनाव निर्देशन की सहायता से किया जा सकता है। उत्तरदाताओं का चयन किन आधारों पर करना उचित होता है, इस संबंध में एम.एच. गोपाल ने उत्तरदाता की तीन विशेषताएं बताई हैं–

   - **प्रभावशाली**– वह प्रभावी व्यक्तित्व का स्वामी हो।
   - **विशेषज्ञ**– संबंधित विषयों की जानकारी रखता हो।
   - **सामान्य जनसमूह**– अपने समूह में पर्याप्त अंतःक्रिया करता हो।

   साक्षात्कार की सफलता व उचित अध्ययन सामग्री का संकलन सही उत्तरदाताओं के चुनाव पर निर्भर करता है।

4. **उत्तरदाताओं के संबंध में जानकारी**–साक्षात्कार की तैयारी में अगला चरण उत्तरदाताओं के संबंध में जानकारी अर्जित करना होता है। उत्तरदाताओं के सामने दो बातें स्पष्ट होनी चाहिए– साक्षात्कार की योजना क्या है और साक्षात्कार क्यों किया जा रहा है। इसके अलावा उत्तरदाताओं की प्रवृत्ति, उनके नियम आदि बातों का पता लगाना भी जरूरी होता है तथा शोधकर्ता को उत्तरदाताओं से पूर्व परिचय कर लेना भी आवश्यक होता है। इससे उत्तरदाता अध्ययन के औचित्य को समझकर प्रभावकारी व सत्य जानकारी देते हैं।

5. **समय और स्थान निश्चित करना**–साक्षात्कार में समय और स्थान का चयन करना अत्यंत महत्वपूर्ण है। उत्तरदाताओं की राय से ही समय और स्थान का निर्धारण किया जाना चाहिए। इसके लिए उत्तरदाताओं से पत्र, टेलीफोन अथवा व्यक्तिगत रूप से संबंध स्थापित किया जा सकता है।

साक्षात्कार प्रक्रिया (संचालन)

साक्षात्कार की पूर्व तैयारी के पश्चात साक्षात्कार का संचालन किया जाता है। वास्तव में, साक्षात्कार की सफलता उसकी संचालन प्रक्रिया पर ही सबसे अधिक निर्भर करती है। वास्तव में, साक्षात्कार में शोधकर्ता और उत्तरदाता के मध्य सामाजिक अंतःक्रियात्मक

संबंध स्थापित होता है। इस दृष्टिकोण से शोधकर्ता को साक्षात्कार संबंधित सभी दशाओं को जानना आवश्यक होता है जिनकी सहायता से साक्षात्कार का संचालन सफलतापूर्वक किया जा सके।

1. **उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित करना**– साक्षात्कार की प्रक्रिया का पहला चरण– शोधकर्ता का उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित करना है। परिचय पत्र, संबंधित व्यक्ति या उत्तरदाताओं के मित्रों के माध्यम से संपर्क स्थापित किया जा सकता है। यंग के अनुसार, "प्रथम संपर्क में उत्तरदाताओं के सांस्कृतिक प्रतिमानों के अनुरूप उनके प्रति मैत्रीपूर्ण अभिवादन करने के पश्चात शोधकर्ता को अपनी इस भेंट का उद्देश्य स्पष्ट करना चाहिए।"
2. **उद्देश्य को स्पष्ट करना**– उत्तरदाताओं से संपर्क स्थापित हो जाने के पश्चात शोधकर्ता को साक्षात्कारदाताओं (उत्तरदाताओं) के सामने अपने शोध के उद्देश्य को स्पष्ट रूप से परिभाषित करना चाहिए। साक्षात्कार के लक्ष्य को बहुत सरल, स्पष्ट एवं मधुर भाषा में उत्तरदाताओं के सामने स्पष्ट कर देना चाहिए। इस प्रकार के प्रयोजनों का स्पष्टीकरण करके अगले चरण की तैयारी की जाती है।
3. **सहयोग की अपील**– साक्षात्कार के उद्देश्य को स्पष्ट करने के पश्चात शोधकर्ता द्वारा संबंधित व्यक्ति से साक्षात्कार में सहयोग और सहायता देने की एक नम्र अपील करनी चाहिए। उत्तरदाता को यह विश्वास दिलाना भी आवश्यक है कि उसके सहयोग के बिना यह कार्य सफल नहीं हो सकता।
4. **साक्षात्कार का प्रारंभ**– साक्षात्कार के संचालन में साक्षात्कार का प्रारंभ करते समय अपना उद्देश्य स्पष्ट करना चाहिए और सहयोग की अपील करने के पश्चात ही साक्षात्कार प्रारंभ करना चाहिए। साक्षात्कार के आरंभिक स्तर पर उत्तरदाता का नाम, आयु, व्यवसाय, शिक्षा, परिवार के लोगों की संख्या आदि से संबंधित परिचयात्मक प्रश्न किए जाने चाहिए। इसके पश्चात अध्ययन विषय से संबंधित सामान्य और सरल प्रकृति के प्रश्न करने चाहिए। प्रश्न पूछते समय शोधकर्ता को निम्न बातों पर विशेष ध्यान देना चाहिए–

   (क) सिर्फ ऐसे ही प्रश्न पूछे जाएं जिनका शोध (अनुसंधान) से सीधा संबंध हो।

   (ख) आदेशात्मक प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए।

   (ग) दोहरी प्रकृति के प्रश्न न पूछे जाएं।

   (घ) उपदेश देने वाले प्रश्नों से भी बचा जाए।

   (ङ) प्रश्नों की प्रकृति समय के अनुकूल हो।

   (च) किसी प्रश्न के उत्तर के लिए दबाव न डाला जाए।
5. **उत्तर के लिए प्रोत्साहन**– सफल साक्षात्कार के लिए यह भी आवश्यक है कि बीच–बीच में उत्तरदाता को इस प्रकार का प्रोत्साहन मिलता रहे कि वह उत्तर देने में थकान अनुभव न करे। इसके लिए शोधकर्ता को उत्तरदाता की प्रशंसा करके उसे सावधानीपूर्वक प्रोत्साहित करना चाहिए।
6. **पुनः स्मरण या निमंत्रण**– साक्षात्कार की प्रणाली में कभी–कभी उत्तरदाता वर्णनात्मक सवालों के जवाब देते हुए भावनाओं में खो जाता है तथा मूल विषय

टिप्पणी

से हट जाता है। ऐसी दशा में शोधकर्ता को सावधानीपूर्वक विशेष रूप से परिस्थिति पर नियंत्रण करके उत्तरदाता की बात सुनते हुए बीच में स्वयं इस प्रकार की बात करनी चाहिए जो उत्तरदाता को मूल प्रश्न की याद दिला दे। साक्षात्कार में स्वयं पर नियंत्रण रखकर उत्तरदाता को साक्षात्कार के मूल उद्देश्य से संबंधित विषयवस्तु पर लाना चाहिए।

7. **सूचनाओं का आलेखन**– साक्षात्कार की प्रक्रिया के मध्य सूचनाएं अति संक्षिप्त रूप में लिखी जाती हैं जिससे इसमें कम समय लगे। इसके लिए जरूरी है कि शोधकर्ता को संकेत लिपि पर संक्षिप्त यंत्रों को इकट्ठा करना चाहिए।
8. **साक्षात्कार की समाप्ति**– सभी आवश्यक सूचनाएं प्राप्त होने के बाद साक्षात्कार समाप्त करना चाहिए। इस स्तर पर शोधकर्ता को अनेक सावधानियां रखना आवश्यक होता है–
   - यदि अध्ययन विषय से जुड़े सवालों के जवाब देने के बाद भी उत्तरदाता कुछ और कहना चाहता है तो उसे भी ध्यानपूर्वक सुना जाना चाहिए।
   - यदि उत्तरदाता विभिन्न उत्तर देते हुए थकान का अनुभव कर रहा हो तो साक्षात्कार बीच में रोक देना चाहिए।
   - साक्षात्कार तब बंद करना चाहिए जब उत्तरदाता आनंद या थकान का अनुभव कर रहा हो, ऐसी स्थितियों में वह साक्षात्कार के दौरान बताए गए तथ्यों के प्रति भयभीत नहीं होगा।
   - अंत में उत्तरदाता को उसके सहयोग के लिए धन्यवाद देते हुए सामान्य शिष्टाचार और मैत्रीपूर्ण संबंधों के साथ साक्षात्कार समाप्त कर देना चाहिए।
9. **प्रतिवेदन**– साक्षात्कार की समाप्ति के बाद प्राप्त तथ्यों का प्रतिवेदन किया जाता है। प्रतिवेदन करते समय अपनी समझ शक्ति का पूर्ण उपयोग करना चाहिए। इसके लिए शोधकर्ता को अपने संक्षिप्त नोटों की सहायता लेनी चाहिए। प्रतिवेदन की भाषा स्पष्ट एवं सरल हो जिससे निष्कर्ष भी पक्षपात रहित एवं क्रमबद्ध अर्जित होंगे।

उपर्युक्त वर्णनों से स्पष्ट होता है कि साक्षात्कार की प्रणाली में कई चरण होते हैं। हर चरण में अत्यधिक सतर्कता बरतनी होती है ताकि विश्वसनीय एवं प्रामाणिक सूचनाएं प्राप्त की जा सकें और शोध भी पूरा किया जा सके।

साक्षात्कार के लाभ

सामाजिक सर्वेक्षण एवं अनुसंधान के लिए प्राथमिक सामग्री के संकलन हेतु साक्षात्कार किसी भी दूसरी प्रविधि की तुलना में अधिक महत्वपूर्ण है। सामाजिक शोध के क्षेत्र में इस प्रणाली के महत्व की विवेचना करते हुए **गुडे एवं हाट्ट** ने बताया है कि गुणात्मक साक्षात्कार की आवश्यकता के पुनर्मूल्यांकन के कारण समकालीन परीक्षण में साक्षात्कार की विशिष्टता पहले से भी ज्यादा हो गई है।

अतः गुणात्मक व्याख्या के लिए साक्षात्कार पद्धति एक महत्वपूर्ण पद्धति है। इसके द्वारा अनेक गुणात्मक तथ्यों तथा व्यक्तियों के विचारों, भावों एवं मनोवृत्तियों को भलीभांति जाना जा सकता है। साक्षात्कार की उपादेयता निम्नांकित है–

1. **मनोवैज्ञानिक दृष्टि से उपयोगी**– अध्ययन विषय से संबंधित व्यक्ति के अपने विचार, भावनाएं एवं धारणाएं होती हैं, इनका अध्ययन सिर्फ साक्षात्कार पद्धति के आधार पर ही किया जा सकता है। अतः यह साक्षात्कार पद्धति ही मनोवैज्ञानिक उपदेशिका है।
2. **अमूर्त घटनाओं का अध्ययन**–साक्षात्कार पद्धति से सामाजिक घटनाएं जो मूर्त नहीं होतीं अर्थात जिन्हें देखा नहीं जा सकता, का अध्ययन आसानी से किया जा सकता है।
3. **मध्यकालीन घटनाओं का अध्ययन**–सामाजिक परिवर्तनशीलता के कारण सभी सामाजिक घटनाएं जो कि समाज की पुनर्रचना में महत्वपूर्ण होती हैं इतिहास बन जाती हैं, उन घटनाओं का अध्ययन साक्षात्कार पद्धति से कर सकते हैं।
4. **विश्वसनीयता**–इस पद्धति के माध्यम से विश्वसनीय आंकड़े अथवा सूचनाएं अर्जित होने की संभावना बन जाती है। इसका कारण यह है कि शोधकर्ता साक्षात्कार की प्रक्रिया के दौरान गलत प्रतीत होने वाले उत्तरों से अपने प्रश्न का स्पष्टीकरण करके न केवल ठीक करने का प्रयास करता है बल्कि उत्तरदाता पर भी इस प्रकार नियंत्रण रखता है जिससे वह अधिक से अधिक सही उत्तर दे सके।
5. **सत्यापन की क्षमता**–साक्षात्कार तुलनात्मक रूप से एक लोचपूर्ण प्रविधि है जिसके द्वारा प्राप्त सूचनाओं में वैयक्तिक पक्षपात की संभावना को कम किया जा सकता है। साक्षात्कार में घटनाओं का वृहद स्तर पर स्पष्टीकरण होता है। पारस्परिक विचारों के आदान–प्रदान के द्वारा समस्याओं और घटनाओं के स्पष्टीकरण में मदद मिलती है।
6. **अध्ययन में समन्वय**–साक्षात्कार में शोधकर्ता, उत्तरदाताओं और परिस्थितियों को देखते हुए अध्ययन की योजना में समन्वय स्थापित कर सकता है। उत्तरदाताओं द्वारा दी गई सूचनाओं के आधार पर अध्ययन विषय में किसी पक्ष में परिवर्तन करना अथवा किसी नये पक्ष का समावेश करना भी साक्षात्कार द्वारा ही संभव हो पाता है।

साक्षात्कार के उपर्युक्त गुणों के अतिरिक्त इस प्रविधि का एक लाभ यह भी है कि इसके द्वारा शोधकर्ता को स्वयं अपनी अवधारणाओं को संशोधित करने का भी अवसर मिल जाता है। साक्षात्कार से प्राप्त सूचनाएं अधिक आत्मिक और स्वाभाविक होती हैं।

साक्षात्कार प्रणाली की सीमाएं

साक्षात्कार प्रविधि में उपरोक्त गुणों अथवा महत्वों के साथ–साथ इसकी कुछ सीमाएं भी हैं, जिनके कारण कभी–कभी इसके द्वारा विश्वसनीय और यथार्थ तथ्यों को संकलित करना बहुत कठिन प्रतीत होता है। इन दोषों अथवा सीमाओं का ध्यान रखे बिना साक्षात्कार प्रविधि का कुशलतापूर्वक उपयोग नहीं किया जा सकता है। साक्षात्कार की प्रविधि की निम्नलिखित सीमाएं हैं–

टिप्पणी

1. **अपूर्ण तथ्यों का संकलन**–साक्षात्कार प्रविधि में शोधकर्ता को उत्तरदाताओं की इच्छा पर निर्भर रहना होता है। उत्तरदाता कभी–कभी एक ही पक्ष को विस्तार से स्पष्ट कर पाता है। अतः अधिकांश साक्षात्कारों से प्राप्त सूचनाएं अकसर एक पक्षीय अथवा अपूर्ण होती हैं।
2. **बड़े अध्ययन में अनुपयुक्त**–साक्षात्कार प्रविधि का उपयोग अध्ययन विषय के एक छोटे क्षेत्र के लिए किया जा सकता है। अध्ययन का क्षेत्र यदि बड़ा है तो साक्षात्कार के लिए चुने गए सभी व्यक्तियों से व्यक्तिगत रूप से मिलकर सूचनाएं एकत्रित कर सकना बहुत कठिन हो जाता है।
3. **कुशल साक्षात्कार की समस्या**–साक्षात्कार की सफलता इसके कुशल संचालन पर निर्भर करती है। अतः शोधकर्ता को साक्षात्कार करने के लिए बहुत व्यवहार कुशल, योग्य और अनुभवी होना आवश्यक है। साधारणतया यह एक कठिन कार्य है, इस पर ध्यान दिए बिना साक्षात्कार की संपूर्ण प्रक्रिया दोषपूर्ण हो जाती है।
4. **उत्तरदाताओं का असहयोगपूर्ण व्यवहार**–साधारणतया शोधकर्ता के प्रति उत्तरदाताओं का व्यवहार अधिक सहयोगपूर्ण नहीं होता। इससे विभिन्न सूचनाएं प्राप्त करने के लिए शोधकर्ताओं को उत्तरदाताओं की प्रशंसा अथवा चापलूसी तक करनी पड़ती है, जिससे साक्षात्कार प्रक्रिया उत्साह के साथ नहीं हो पाती। उत्तरदाताओं के दोषों को स्पष्ट करते हुए पी.वी. यंग ने लिखा है कि ''समझदार होने के बाद भी उत्तरदाताओं में अक्सर घटनाओं के दोषपूर्ण बोध, दोषपूर्ण स्मृति, अंर्तदृष्टि का अभाव तथा अपनी बात को स्पष्ट रूप से कह सकने की अयोग्यता होती है।'' परिणामत : साक्षात्कार दोषपूर्ण हो जाता है।
5. **अशुद्ध प्रतिवेदन**– अनेक स्थितियों में उत्तरदाता साक्षात्कार के दौरान गलत सूचना भी देता है, जिससे शोधकर्ता द्वारा तैयार प्रतिवेदन अशुद्ध हो जाता है तथा अध्ययन अपने निश्चित उद्देश्य तक नहीं पहुंच पाता है।

साक्षात्कार एक उपयोगी प्रविधि है लेकिन इसे व्यवहार में लाना अत्यधिक कठिन और सूझ–बूझ का कार्य है।

अनुसूची प्रविधि

सांख्यिकी में अध्ययन के लिए प्राप्त सामग्री का संकलन करने के लिए अनेक विधियों और यंत्रों का उपयोग किया जाता है। अनुसूची इन्हीं विधियों और यंत्रों में से एक है। वास्तव में, अनुसूची अनेक प्रश्नों की एक ऐसी लिखित सूची होती है, जिसे लेकर शोधकर्ता उत्तरदाता के पास जाता है और अध्ययन विषय से संबंधित विभिन्न प्रश्नों को पूछकर उनके उत्तरों का आलेखन करता है। इसका तात्पर्य यह है कि अनुसूची सफल साक्षात्कार का एक सरल माध्यम है।

अनुसूची का अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकी के क्षेत्र में अनुसूची प्रश्नों की एक लिखित सूची है जो शोधकर्ता द्वारा अध्ययन विषय को ध्यान में रखकर तैयार की जाती है। अनुसूची अंग्रेजी के शिड्यूल

(Schedule) का हिंदी रूपांतर है, जिसका अर्थ होता है सूची या पत्रावली आदि। अनुसूची को अनेक विद्वानों ने निम्न प्रकार परिभाषित किया है–

पी.वी. यंग के अनुसार, ''अनुसूची शोधकर्ता द्वारा औपचारिक शोधों में प्रयोग किया जाने वाला एक ऐसा यंत्र है, जिसका मुख्य उद्देश्य बहुस्तरीय गुणात्मक तथ्य संकलन करने में मदद प्रदान करना है।''

लुंडबर्ग ने अनुसूची को परिभाषित करते हुए लिखा है, ''अनुसूची साक्षात्कार के दौरान भरा जाने वाला कार्य है। अर्थात अनुसूची प्रश्नों की वह सूची है जिसका उपयोग साक्षात्कार के वक्त सामाजिक समस्याओं के अध्ययन हेतु किया जाता है। शोधकर्ता स्वयं अनुसूची को भरता है।''

गुडे और हाट्ट के अनुसार, ''अनुसूची साधारण प्रश्नों के एक समूह का नाम है, जो एक शोधकर्ता द्वारा उत्तरदाता से साक्षात्कार के समय पूछे जाते हैं और भरे जाते हैं।''

एम.एच. गोपाल ने अनुसूचि को परिभाषित करते हुए लिखा है–''अनुसूची उन विभिन्न पदों की एक विस्तृत वर्गीकृत, नियोजित तथा क्रमबद्ध सूची होती है जिसके विषय में सूचनाएं एकत्रित करने की आवश्यकता पड़ती है।''

उपरोक्त परिभाषाओं के आधार पर कह सकते हैं कि अनुसूची एक प्रकार की सामग्री संचय हेतु बनाई गई प्रश्नों की सूची है जिसका उत्तर स्वतः शोधकर्ता को अपने क्षेत्र में सूचनादाताओं के आमने–सामने के संपर्क द्वारा प्राप्त होता है। इस तरह अनुसूची का महत्व सामाजिक अनुसंधान के क्षेत्र में बहुत अधिक होता है।

अनुसूची के उद्देश्य

अनुसूची के उद्देश्यों को निम्नांकित रूप में समझा जा सकता है–

1. **प्रामाणिक अध्ययन**–विषय से संबंधित प्रमाणित उत्तर प्राप्त करने के लिए शोधकर्ता को स्वयं व्यक्तिगत रूप से उत्तरदाताओं से संबंध स्थापित करने होते हैं। शोधकर्ता उत्तरदाताओं से वही उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करता है, जो उसकी दृष्टि में उपयोगी एवं सार्थक है। इससे उत्तरदाताओं को विभिन्न अर्थ लगाने का अवसर नहीं प्राप्त होता और अध्ययन में प्रामाणिकता आती है।
2. **अनुपयोगी संकलन से बचाव**– अनुसूची का मुख्य उद्देश्य अध्ययन विषय से संबंधित प्रश्नों का क्रमबद्ध उत्तर प्राप्त करना होता है। अनुसूची के द्वारा शोधकर्ता अपनी स्मरण शक्ति के भरोसे नहीं रहता क्योंकि उसके पास प्रश्न लिखित व क्रमबद्ध होते हैं। अतः इसमें केवल संबंधित तथ्यों को ही संकलित किया जाता है।
3. **संख्यात्मक आंकड़ों के संकलन में उपयोगी**– अनुसूची प्रविधि द्वारा अध्ययन विषय से संबंधित संख्यात्मक सूचनाओं एवं आंकड़ों का संकलन किया जाता है। विचारात्मक सूचनाओं, गुणात्मक सूचनाओं या भावनात्मक जानकारी के लिए यह प्रविधि उपयुक्त नहीं है।

टिप्पणी

एक सामान्य अनुसूची का नमूना

अनुसूची (मजदूर वर्ग)

1. उत्तरदाता का नाम :
2. उत्तरदाता का लिंग : (अ) पुरुष (ब) महिला
3. उत्तरदाता की आयु (वर्ष में) : (अ) 18–30 (ब) 30–40 (स) 40–50
4. उत्तरदाता की शिक्षा : (अ) अशिक्षित (ब) प्राथमिक
   (स) माध्यमिक (द) स्नातक
   (ड) स्नातकोत्तर
5. उत्तरदाता की जाति : (अ) सामान्य
   (ब) अनुसूचित जनजाति
   (स) पिछड़ा वर्ग (द) अनुसूचित जाति
6. उत्तरदाता का व्यवसाय : (अ) व्यापार (ब) नौकरी
   (स) मजदूरी (द) घरेलू कार्य
7. उत्तरदाता की आय (₹ में) : (अ) 1500 से 3000
   (ब) 3000 से 8000
   (द) 8000 से 20000
   (ड) 20000 से 50000
8. आप नगरपालिका के विषय में
   जानते हैं? (अ) हां (ब) नहीं
9. आप मतदान करते हैं? (अ) हां (ब) नहीं
10. आपने पूर्व में कितनी बार मतदान किया है?
    (अ) एक बार (ब) दो बार (स) अनेक बार
11. आप मतदान किस आधार पर करते हैं?
    (अ) स्वयं की पहल पर
    (ब) परिवार के कहने पर
12. उम्मीदवार का चयन किस आधार पर करते हैं?
    (अ) चुनावों में किए गए वादों के आधार पर
    (ब) व्यक्ति के आधार पर
    (स) कार्यों के आधार पर
13. आपके शहर में सड़कों की विद्युत व्यवस्था, नगर की सफाई व्यवस्था, कर व्यवस्था, जन्म–मृत्यु का पंजीकरण किस संस्था के द्वारा किया जाता है?
    (अ) नहीं जानते हैं (ब) जानते हैं (स) संस्था का नाम
14. आप अपने परिवार के सदस्यों का जन्म–मृत्यु पंजीकरण कराते हैं?
    (अ) हां (ब) नहीं

15. आपके विचार में सड़कों की विद्युत व्यवस्था के बारे में नगरपालिका की भूमिका कैसी है?

    (अ) असंतोषजनक (ब) संतोषजनक (स) उत्तम

16. आपके विचार में नगर की सफाई के संबंध में नगरपालिका की भूमिका कैसी है?

    (अ) असंतोषजनक (ब) संतोषजनक (स) उत्तम

17. आपके विचार में वार्डों की सफाई के संबंध में नगरपालिका की भूमिका कैसी है?

    (अ) असंतोषजनक (ब) संतोषजनक

    (स) उत्तम (द) अति उत्तम

18. मक्खी, मच्छर, रोगों तथा महामारियों की रोकथाम के लिए नगरपालिका क्या कार्य करती है?

    (अ) दवा का छिड़काव (ब) दवाओं का वितरण

    (स) प्रचार के माध्यम से (द) जनता में जागरूकता

19. आपके वार्ड का नंबर क्या है?

20. आप अपने प्रतिनिधि से कितनी बार मिले हैं?

    (अ) एक बार (ब) दो बार (स) अनेक बार

21. आप अपनी शिकायत या मांग को कैसे व्यक्त करते हैं?

    (अ) शिकायत पत्र लिखकर (ब) सामूहिक रूप से

    (स) नगरपालिका जाकर (द) दंगे–प्रदर्शनों के द्वारा

22. क्या आप नगरपालिका के कार्यों से संतुष्ट हैं?

    (अ) हां (ब) नहीं

23. नगरपालिका के कार्यों के संबंध में आपके क्या सुझाव हैं?

अनुसूची के गुण एवं लाभ

सामाजिक अनुसंधान अथवा सर्वेक्षण के क्षेत्र में सामग्री संग्रहण के लिए अनुसूची एक महत्वपूर्ण प्रविधि प्रमाणित हुई है। यह सामग्री संग्रहण की प्रत्यक्ष विधि है। सामाजिक घटनाओं एवं समस्याओं के संबंध में प्राथमिक सूचना इकट्ठा करने के लिए इसकी प्रकृति अधिक स्वतंत्र एवं स्वयं में पूर्ण है। अनुसूची के गुणों अथवा इसके महत्व को संक्षेप में निम्नांकित रूप से समझा जा सकता है–

1. **निजी और प्रत्यक्ष संपर्क**–अनुसूची प्रविधि का पहला गुण एवं लाभ यह है कि इसमें उत्तरदाता एवं अध्ययनकर्ता के मध्य निजी एवं प्रत्यक्ष संपर्क होता है, जिससे वह विषय से संबंधित महत्वपूर्ण सूचनाएं प्राप्त कर लेता है। यदि अध्ययनकर्ता का व्यक्तिगत संपर्क न हो तो सूचनादाता स्वयं भी सूचना भेजने में आलस करता है उसकी अभिरुचि सूचना देने में नहीं रहती है। अनुसूची प्रविधि में, अध्ययनकर्ता को सामने देखकर उत्तरदाता में भी उत्साह की भावना तीव्र होती है।

टिप्पणी

2. **ठोस सूचनाएं प्राप्त करना**– अनुसूची प्रणाली का दूसरा महत्वपूर्ण गुण है कि इसके द्वारा प्राप्त सूचनाएं ठोस होती हैं। शोधकर्ता की उपस्थिति से उत्तरदाता के मन में यह रहता है कि वह कहीं गलत सूचना न दे दे, क्योंकि शोधकर्ता के स्वयं उपस्थित रहने के कारण उसके द्वारा दिए गए उत्तर की सत्यापनशीलता सिद्ध हो सकती है।
3. **अस्पष्ट प्रश्नों की व्याख्या संभव**–कभी–कभी सरल और स्पष्ट भाषा में लिखे गए प्रश्न भी उत्तरदाता ठीक ढंग से नहीं समझ पाते। इस कारण प्रश्नावली द्वारा प्राप्त उत्तर अकसर अपूर्ण ही रहते हैं। लेकिन अनुसूचि के प्रयोग में अध्ययनकर्ता उत्तरदाता के प्रत्यक्ष संपर्क में रहता है अतः वह उत्तरदाता की सभी जिज्ञासाओं और शंकाओं का समाधान करके अधिक सही सूचनाएं प्राप्त कर लेता है।
4. **अधिकतम सूचनाओं की प्राप्ति**– अनुसूची से प्राप्त ठोस सूचनाओं के अतिरिक्त, शोधकर्ता अनुसूची को भरकर सूचनाएं प्राप्त करता है। शोधकर्ता के समक्ष अनुसूची स्पष्ट रूप से होने के कारण उसका उद्देश्य अधिकतम सूचना प्राप्त करना होता है।
5. **अवलोकन की सुविधा**– अनुसूची प्रविधि का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण यह भी है कि इसमें गहन निरीक्षण की सुविधा होती है। भिन्न–भिन्न इकाइयों का अलग–अलग अध्ययन करने से अवलोकन की प्रामाणिकता एवं गहनता में वृद्धि होती है क्योंकि अध्ययनकर्ता स्वयं भी घटनाओं का अवलोकन करता है। अतः कम समय में अधिक तथ्यों का संकलन विश्वसनीय तरीके से हो जाता है।

उपरोक्त विवरण से पता चलता है कि अनुसूची प्रविधि के अनेक गुण एवं लाभ हैं। जहां इससे एक ओर ठोस तथ्यों को संकलित किया जा सकता है वहीं दूसरी ओर यह अलग–अलग अवलोकन कर्ताओं के अवलोकन को प्रमाणित करने का भी काम करती है।

अनुसूची के दोष अथवा सीमाएं

एक ओर अनुसूची प्रविधि की अनेक विशेषताएं या गुण हैं, वहीं दूसरी ओर इसकी कुछ सीमाएं या दोष भी हैं, जिनके कारण सभी प्रकार के अध्ययनों में इसका प्रयोग नहीं होता है। अनुसूची प्रविधि की सीमाएं अथवा दोष निम्नलिखित हैं–

- अनुसूची में ऐसे सामान्य प्रश्नों का निर्माण नहीं किया जा सकता, जिनको प्रत्येक व्यक्ति समझकर उत्तर दे सके।
- अनुसूची का प्रयोग छोटे क्षेत्रों में किया जा सकता है। विस्तृत क्षेत्र में इसलिए इसका प्रयोग अनुपयोगी रहता है कि उसमें कई व्यावहारिक कठिनाइयां आ जाती हैं, जैसे उत्तरदाता बिखरे हुए हों।
- अनुसूची प्रविधि द्वारा संचित तथ्य तभी एकत्रित किए जा सकते हैं जबकि उत्तरदाताओं से सीधा संपर्क स्थापित हो सके। आज के युग में व्यस्त जिंदगी के बीच मनुष्य के पास समय की कमी रहती है। अतः वह साक्षात्कार देने में

टाल–मटोल करता रहता है। अतः एक प्रकार से संपर्क की समस्या उत्पन्न हो जाती है।

- कभी–कभी शोधकर्ता के सुझावों की तरफ उत्तरदाता का अधिक झुकाव हो जाने के कारण प्रमुख सूचना प्राप्त नहीं हो पाती है।
- इसके परिणाम ज्ञात निदर्शन पर आधारित नहीं होते।
- अनुसूची द्वारा प्राप्त सूचनाओं को एकत्र करने में काफी धन व समय खर्च होता है।

उपरोक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि अनुसूची प्रविधि में कई कमियां हैं, साथ ही इसकी कुछ सीमाएं भी हैं। लेकिन इसका अर्थ यह नहीं कि यह प्रविधि अनुपयोगी अथवा अव्यावहारिक है। कुछ दोषों और सीमाओं के होते हुए भी सर्वेक्षण में प्रमाणित तथा विश्वसनीय तथ्यों के संचय में इसकी उपादेयता अद्वितीय है।

अवलोकन प्रविधि

अवलोकन प्रत्येक वैज्ञानिक शोध अथवा सामजिक शोध की एक महत्वपूर्ण प्रविधि है। पिछले कुछ वर्षों में सामाजिक यथार्थ के अध्ययन में अवलोकन विधियों का प्रयोग बढ़ा है, क्योंकि यह किसी भी शोध का आधार ही नहीं है बल्कि हमारे दैनिक जीवन में चारों ओर की घटनाओं को देखने और समझने में भी इसकी भूमिका अत्यधिक महत्वपूर्ण होती है।

अवलोकन का अर्थ–अवलोकन शब्द अंग्रेजी भाषा के 'Observation' शब्द का पर्याय है जिसका अर्थ होता है देखना, अवलोकन करना, प्रेषण करना या निरीक्षण करना।

विस्तृत अर्थों में अवलोकन की विशिष्टता इस बात से प्रकट होती है कि इसमें अपेक्षित सूचनाओं का संग्रहण अन्य व्यक्तियों से कही–सुनी बातों की अपेक्षा, प्रत्यक्ष प्रमाण पर विश्वास किया जाता है। व्यक्तियों के व्यवहार के अध्ययन में भी एक व्यक्ति यह देख सकता है कि वह क्या करता है, इसकी अपेक्षा कि वह जो कुछ करता है उसके संबंध में वह क्या कहता है।

पी.वी. यंग के अनुसार, ''घटनाओं का, स्वाभाविक रूप से घटित होते समय आंखों द्वारा किया गया सुव्यवस्थित और सुविचारित अध्ययन है अवलोकन।''

इससे स्पष्ट है कि अवलोकन का उद्देश्य घटनाओं को उसी समय देखना होता है जब वे स्वतः घटित हो रही होती हैं। अवलोकन के कार्यक्षेत्र को स्पष्ट करते हुए पी. वी. यंग लिखती हैं– ''अवलोकन प्रविधि का काम सामूहिक व्यवहार, जटिल सामाजिक संस्थाओं तथा किसी सामाजिक संपूर्णता का निर्माण करने वाली विभिन्न इकाइयों की जांच करना होता है।''

ए. वुल्फ के अनुसार, ''वस्तुओं तथा घटनाओं की विशेषताओं एवं उनके मूर्त संबंधों को समझने में हमारे मानसिक अनुभवों की प्रत्यक्ष चेतना को जानने की क्रिया अवलोकन कहलाती है।'' इसका तात्पर्य यह है कि अवलोकन के द्वारा घटना मात्र को देखा ही नहीं जाता वरन घटना की विशेषताओं और उसके अंतरसंबंधों को जानने का प्रयास भी किया जाता है।

टिप्पणी

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि अवलोकन प्राथमिक सामग्री के संकलन की प्रत्यक्ष प्रविधि है। इसमें क्षेत्रों द्वारा नवीन अथवा प्राथमिक तथ्यों का विचारपूर्वक संकलन किया जाता है। यह अवलोकन शोधकर्ता अथवा अध्ययनकर्ता द्वारा प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप में हो सकता है, अवलोकन का प्रत्येक स्थिति में व्यवस्थित होना अत्यधिक आवश्यक है।

अवलोकन की विशेषताएं

हम सभी अपने आस–पास घटित होने वाली घटनाओं को देखते हैं, जैसे प्रभात होने पर हम अपनी खिड़की से देखते हैं कि सूर्य उदित हुआ है या नहीं, कहीं बाहर बारिश तो नहीं हो रही है, यदि गाड़ी चला रहे हैं तो ध्यान रखते हैं कि गाड़ी कहीं किसी से टकरा न जाए, सड़क पार करते समय देखते हैं कि लाल बत्ती है या हरी। ऐसे अनेक उदाहरण हैं जिनसे प्रकट होता है कि हमारी आंखें निद्रावस्था को छोड़कर हर समय अवलोकन करने में व्यस्त रहती हैं किंतु शोध की भाषा में यह अवलोकन नहीं है।

अवलोकन की प्रकृति को स्पष्ट करने के लिए इसकी निम्नांकित विशेषताओं का अवलोकन आवश्यक है–

1. **अवलोकन प्राथमिक सामग्री को प्राप्त करने में सहायक है**– अवलोकन की मुख्य विशेषता घटना स्थल पर जाकर अध्ययनकर्ता द्वारा वस्तुस्थिति को देखकर घटना के संबंध में प्राथमिक सामग्री का संकलन करना है।
2. **अवलोकन प्रविधि में घटनाओं का सूक्ष्म अध्ययन होता है**– इसके अंतर्गत अध्ययनकर्ता घटनाओं को स्वयं घटित होते हुए देखता है तथा घटना का गहन व सूक्ष्म अध्ययन करता है। घटनाओं के सूक्ष्म अध्ययन से शोध के उद्देश्यों को प्राप्त करने में सफल होता है।
3. **अवलोकन एक व्यावहारिक या अनुमानिक अध्ययन है**– अवलोकन कल्पना के आधार पर नहीं बल्कि अनुभव पर आधारित होता है। यह अध्ययन किसी समुदाय, व्यक्ति अथवा संस्था का हो सकता है।
4. **अवलोकन सामाजिक सर्वेक्षणकर्ता की एक प्रत्यक्ष विधि है**– सर्वेक्षणकर्ता अवलोकन के द्वारा अध्ययन न केवल घटनाओं को स्वयं देखकर करता है बल्कि घटना के संबंध में प्राथमिक तथ्य संकलित करता है और उत्तरदाताओं से मिलकर विभिन्न घटनाओं के संबंध में उनकी प्रतिक्रियाओं को भी समझने का प्रयत्न करता है।
5. **अवलोकन को वैज्ञानिक प्रविधि कहा जाता है**– क्योंकि इसके द्वारा एकत्रित किए गए तथ्य अधिक विश्वसनीय होते हैं। वस्तुतः कहा भी जाता है कि सुनी या कही हुई बातों की अपेक्षा स्वयं देखी गई घटनाएं अधिक प्रामाणिक होती हैं।
6. **अवलोकन निष्पक्ष होता है**– अध्ययनकर्ता स्वयं अपनी आंखों से घटना का निरीक्षण करता है व उसकी भलिभांति जांच करता है। अतः उसका घटना के संबंध में निर्णय दूसरों के निर्णय या दूसरे के कहे–सुने पर आधारित नहीं होता। स्वयं का शूक्ष्म व गहन अध्ययन उसे अभिनति से बचाता है।

अवलोकन के प्रकार

अवलोकन की प्रकृति, कार्य–विधि तथा व्यापकता के आधार पर इसका प्रमुख रूप से निम्नवत वर्गीकरण किया जा सकता है–

1. अनियंत्रित अवलोकन
2. नियंत्रित अवलोकन
3. सामूहिक अवलोकन

1. अनियंत्रित अवलोकन

अनियंत्रित अवलोकन ऐसी प्रविधि है जिसमें अध्ययनकर्ता अथवा अध्ययन विषय को नियंत्रित किए बिना घटनाओं का उनके वास्तविक रूप में अध्ययन किया जाता है।

अनियंत्रित अवलोकन की व्याख्या करते हुए पी.वी. यंग ने लिखा है कि अनियंत्रित अवलोकन में हम वास्तविक जीवन से संबंधित घटनाओं एवं परिस्थितियों का सावधानी पूर्वक अध्ययन करते हैं। इन विधियों में न तो यथार्थता उत्पन्न करने वाले यंत्रों का प्रयोग करते हैं और न ही अवलोकित घटना की शुद्धता की जांच करने का प्रयत्न किया जाता है। इस विधि में अवलोकनकर्ता को अवलोकन की दिशाओं, सामग्री का चयन तथा प्रलेखन करने की पूर्ण स्वतंत्रता होती है।

अनियंत्रित अवलोकन की प्रकृति को इसके तीन प्रमुख प्रकारों के आधार पर समझा जा सकता है– (क) सहभागी अवलोकन, (ख) असहभागी अवलोकन, (ग) अर्द्धसहभागी अवलोकन।

(क) **सहभागी अवलोकन**– सहभागी अवलोकन शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम लिंडमैन ने 1924 में अपनी पुस्तक 'सोशल डिस्कवरी' में किया। इसमें उन्होंने बताया कि किसी भी घटना के प्रत्यक्ष अवलोकन में जो कमियां रह जाती हैं उन्हें ध्यान में रखते हुए सहभागी अवलोकन का प्रयोग किया जाता है। सामान्यतः सहभागी अवलोकन में अवलोकनकर्ता अध्ययन समूह के साथ इस प्रकार घुल–मिल जाता है कि उस समूह के सभी सदस्य अवलोकनकर्ता के वास्तविक उद्देश्य से परिचित न होते हुए भी उसे अपने समूह का वास्तविक सदस्य मान लेते हैं। सहभागी अवलोकन को स्पष्ट करते हुए लुंडबर्ग ने लिखा है, "इस अवलोकन (सहभागी) में यह आवश्यक है कि केवल शोधकर्ता ही नहीं बल्कि अध्ययन किए जाने वाले समूह के सदस्य भी उसे समूह के एक अंग के रूप में स्वीकार करें।"

सहभागी अवलोकन का मूल प्रयोग मानव विज्ञान में आदिवासियों के अध्ययनों से प्रारंभ हुआ। किसी भी समाज की गहराइयों में पहुंचने तथा व्यवहार एवं प्रतीकों के पीछे छिपे हुए मंतव्यों को जानने के लिए अध्ययन किए जाने वाले समूह का सदस्य होना आवश्यक है।

- **सहभागी अवलोकन की विशेषताएं अथवा गुण**

सहभागी अवलोकन के महत्व व विशेषताओं को निम्नांकित रूप में समझा जा सकता है–

टिप्पणी

1. इसके अंतर्गत अवलोकनकर्ता अध्ययन समूह का एक अस्थाई सदस्य बनकर उसके विभिन्न क्रियाकलापों में भाग लेकर उनसे संबंधित सभी प्रकार की घटनाओं और परिस्थितियों का प्रत्यक्ष अध्ययन कर सकता है।
2. सहभागी अवलोकन द्वारा अध्ययन समूह के सभी व्यवहारों का वास्तविक रूप में अध्ययन करना संभव हो पाता है।
3. सहभागी अवलोकन में अवलोकनकर्ता अधिक प्रभावित और विश्वसनीय तथ्य एकत्र करने में सफल हो पाता है क्योंकि वह स्वयं उन्हें देखता है और उनकी विवेचना करता है।
4. सहभागी अवलोकन में एक समूह के जीवन और क्रियाकलापों का गहन अध्ययन किया जा सकता है।
5. इस विधि द्वारा आवश्यकता पड़ने पर कभी भी संग्रहीत किए गए तथ्यों का पुनर्परीक्षण किया जा सकता है।

- **सहभागी अवलोकन की सीमाएं अथवा दोष**

सहभागी अवलोकन विधि के जहां कुछ गुण हैं, वहीं इसके कुछ स्पष्ट अवगुण, दोष अथवा सीमाएं भी हैं। सैद्धांतिक तौर पर यह विधि जितनी सरल प्रतीत होती है व्यवहार में यह विधि उतनी सरल नहीं होती है। अतः इसका प्रयोग सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए। इस प्रविधि की सीमाएं अथवा दोषों को निम्नांकित रूप से समझा जा सकता है–

1. **वस्तुपरकता की कमी**–इसमें अध्ययनकर्ता को अध्ययन समूह का सक्रिय सदस्य बनना होता है। इस कारण समूह के प्रति अध्ययनकर्ता की घनिष्ठता तथा भाव्यीयता विकसित होने के कारण उसमें समूह के प्रति अत्यधिक लगाव होने की संभावना रहती है।
2. **पूर्ण सहभागिता संभव नहीं**–व्यावहारिक रूप से किसी भी अध्ययनकर्ता द्वारा किसी नये समूह के जीवन में पूरी तरह घुलना–मिलना संभव नहीं होता। इससे अध्ययनकर्ता में थोड़ा–बहुत बनावटीपन आ जाता है। इससे उसकी वास्तविकता को कभी भी पहचाना जा सकता है।
3. **अनुभवों की सीमा का संकुचन**–सहभागी अवलोकन में शोधकर्ता को समुदाय में कोई भूमिका निभानी पड़ती है। यह भूमिका समुदाय में उसके एक विशिष्ठ स्थान को निश्चित करती है। इससे वह जितना अधिक इस मैत्री समूह के बारे में जान पाता है उतना वह मैत्री समूह के बाहर के व्यक्तियों के संबंध में नहीं जान पाता, अर्थात उनसे अनभिज्ञ रहता है।
4. **विशिष्ट समूहों के अध्ययन में कठिनाई**–सामाजिक जीवन के अंतर्गत यदि हम अपराधियों, भ्रष्ट अधिकारियों, अनैतिक जीवन व्यतीत करने वाले व्यक्तियों अथवा समाज विरोधी कार्यों में लगे व्यक्तियों का अध्ययन सहभागी अवलोकन विधि से करना चाहें तो ऐसा करना अध्ययनकर्ता के लिए कठिन कार्य होगा क्योंकि वह स्वयं तो समाज विरोधी नहीं बन सकता।

5. **अत्यधिक समय, व्यय तथा क्षमताओं का नष्ट होना**—इस विधि में कई बार अध्ययनकर्ता को घटनाओं के लिए लंबा इंतजार करना पड़ता है, जिससे अत्यधिक समय नष्ट होता है। उसे अधिक से अधिक व्यक्तियों के संपर्क में आने के लिए काफी धन व्यय करना पड़ता है तथा अध्ययन में समय के अधिक लगने से भी व्यय का सही अनुमान लगाना कठिन हो जाता है तथा अध्ययनकर्ता की क्षमताओं का सही उपयोग नहीं होता है। अध्ययनकर्ता अपनी इच्छानुसार घटनाओं का परीक्षण नहीं कर सकता।
6. **आलेखन की समस्या**—सहभागी अवलोकन में अवलोकनकर्ता घटनाओं को देखने के बाद उन्हें तुरंत नहीं लिख सकता, क्योंकि इससे समूह में उसे संदेह की दृष्टि से देखा जा सकता है। यदि आलेखन का कार्य कुछ समय बाद एकांत में किया जाए तो संभव है कि अवलोकनकर्ता सभी घटनाओं को पूरी तरह याद न रख सके।
7. **समुचित प्रतिनिधित्व की कमी**—इस प्रविधि का एक महत्वपूर्ण दोष यह है कि अवलोकनकर्ता जिस समूह का सदस्य बनता है उसका संपर्क उस समूह के कुछ विशेष व्यक्तियों तक ही सीमित रहता है। ऐसी स्थिति में उसे उन सदस्यों द्वारा जो सूचना मिलती है, उन्हीं के आधार पर वह संपूर्ण निष्कर्ष प्रस्तुत करता है। इन सूचनाओं और तथ्यों की वास्तविकता का परीक्षण करना मुश्किल होता है।

सहभागी अवलोकन के उपर्युक्त गुणों और दोषों से स्पष्ट होता है कि यह एक अत्यंत वैयक्तिक विधि है। एक व्यक्ति इसके द्वारा न तो पूर्णतः विश्वसनीय तथा वस्तुपरक तथ्य प्राप्त कर सकता है और न ही कोई अध्ययनकर्ता एक ही घटना के अपने अवलोकन द्वारा सामान्य परिणाम प्राप्त कर सकता है।

(ख) **असहभागी अवलोकन**—अनियंत्रित अवलोकन का दूसरा प्रमुख स्वरूप असहभागी अवलोकन है। यह विधि सहभागी अवलोकन विधि की कमजोरियों को दूर करने में सहायता करती है। इस प्रकार के अवलोकन में अवलोकनकर्ता अध्ययन समूह या समुदाय का अवलोकन एक तटस्थ दृष्टिकोण एवं वैज्ञानिक भावना से करता है। इसमें अवलोकनकर्ता समुदाय या समूह का न तो अस्थाई सदस्य बनता है और न ही उसकी क्रियाओं में भागीदार बनता है। साधारणतया वह समय–समय पर उपस्थित होकर एक अपरिचित और मौन दृष्टा के रूप में घटनाओं का सूक्ष्म रूप में अवलोकन करने का प्रयत्न करता है। सामाजिक जीवन की ऐसी अनेक स्थितियां हैं, जहां सहभागी अवलोकन करना संभव नहीं होता, वहां यह विधि अत्यधिक उपयुक्त होती है। उदाहरण के लिए शिशुओं के व्यवहार के अध्ययन में, अपराधिक प्रवृति के खूंखार व्यक्तियों का अध्ययन करने में। इस प्रकार की स्थितियों में शोधकर्ता को पूर्णरूपेण सहभागी बनाना असंभव नहीं तो कम से कम दुष्कर अवश्य है।

असहभागी अवलोकन स्वाभाविक तथा प्रयोगात्मक दोनों स्थितियों में किया जाता है—

1. **स्वाभाविक स्थिति में असहभागी अवलोकन**— इसके अंतर्गत अध्ययनकर्ता अध्ययन समूह के व्यवहार का उसकी स्वाभाविक स्थिति में अध्ययन करता

टिप्पणी

है। इस प्रकार के अध्ययनों में जन्म, विवाह अथवा मृत्यु संस्कारों का अध्ययन आता है।

2. **प्रयोगात्मक स्थिति में असहभागी अवलोकन**—इस प्रविधि के अंतर्गत शोधकर्ता द्वारा अध्ययन समूह का अवलोकन अस्वाभाविक स्थिति में करने का प्रयास किया जाता है, अर्थात अध्ययन किए जाने वाले समूह के लिए एक विशिष्ट परिवेश का निर्माण किया जाता है, जैसे बालकों के किसी समूह का एक प्रयोगशाला में अध्ययन।

- **असहभागी अवलोकन के गुण**

असहभागी अवलोकन के प्रयोग द्वारा वे लाभ प्राप्त होते हैं जो विशेषतया सहभागी अवलोकन की सीमाओं अथवा दोषों द्वारा उत्पन्न होते हैं। असहभागी अवलोकन के निम्नलिखित गुण होते हैं—

1. असहभागी अवलोकन द्वारा वस्तुनिष्ठ अध्ययन की संभावना बढ़ जाती है।
2. इसके द्वारा अधिक विश्वसनीय तथ्यों की प्राप्ति संभव है।
3. समूह में अध्ययनकर्ता की उपस्थिति से अध्ययन समुदाय के सदस्यों के व्यवहारों में कोई परिवर्तन होने की संभावना नहीं रहती। फलस्वरूप अधिक यथार्थ और स्वाभाविक तथ्य प्राप्त हो जाते हैं।
4. इसमें अध्ययनकर्ता को समूह से अधिक सहयोग मिलने की संभावना रहती है।
5. असहभागी अवलोकन के अंतर्गत अध्ययनकर्ता सामान्य ढंग से अवलोकन कार्य करता है। ऐसे अवलोकन में धन और समय की काफी बचत हो सकती है।

- **असहभागी अवलोकन के दोष**

असहभागी अवलोकन के दोष अथवा सीमाएं निम्न हैं—

1. कोई भी अवलोकनकर्ता असहभागी रूप से किसी अध्ययन समूह के जीवन को नहीं समझ सकता। उसे कुछ सीमा तक समूह के निकट संपर्क में अवश्य आना पड़ता है।
2. अनेक अध्ययन विषय इस प्रकार के होते हैं जिनका अध्ययन पूर्णतः असहभागी अवलोकन की सहायता से नहीं हो सकता।
3. असहभागी अवलोकन के कारण सभी घटनाओं का अध्ययन नहीं किया जा सकता। कुछ ऐसी घटनाएं हैं जो अचानक घटित होती हैं और जिनका शोध अध्ययन में विशेष महत्व होता है, परंतु घटनाओं के समय हम वहां उपस्थित नहीं रह पाते।
4. कभी—कभी अवलोकनकर्ता की उपस्थिति से अध्ययन समूह बनावटी व्यवहार करने लगता है। इसके फलस्वरूप अध्ययन अस्वाभाविक और दोषपूर्ण हो जाता है।

5. कभी–कभी अध्ययनकर्ता का स्वयं का दृष्टिकोण भी वस्तुनिष्ठ अध्ययन में बाधक बन जाता है। इसके अंतर्गत अध्ययनकर्ता घटनाओं को अपने दृष्टिकोण से देखता है, समूह के सदस्यों के दृष्टिकोण से नहीं।

- **सहभागी और असहभागी अवलोकन में अंतर**

सहभागी और असहभागी अवलोकन की प्रकृति की उपर्युक्त विवेचना के आधार पर इन दोनों अवलोकन विधियों में निम्नलिखित अंतर देखे जा सकते हैं–

1. **सहभागिता की प्रकृति के आधार पर**–सहभागी अवलोकन में अध्ययनकर्ता अध्ययन समूह का अभिन्न अंग बनकर घटनाओं का अध्ययन करता है जबकि असहभागी अवलोकन के अंतर्गत वह एक अपरिचित और तटस्थ दृष्टा के रूप में अध्ययन करता है।
2. **अध्ययन की गहनता के आधार पर**–सहभागी अवलोकन के द्वारा समूह के व्यवहारों तथा संबंधित घटनाओं का सूक्ष्म और अत्यधिक गहन अध्ययन करना संभव हो पाता है, जबकि असहभागी अवलोकन के द्वारा केवल कुछ स्पष्ट और मूर्त तथ्यों का ही संग्रह किया जा सकता है। गुप्त सूचनाओं के अध्ययन के लिए भी सहभागी अवलोकन अधिक उपयुक्त है।
3. **समय और साधन के आधार पर**–असहभागी अवलोकन में समय और साधनों का नियोजन अधिक कुशलतापूर्वक किया जा सकता है, फलस्वरूप असहभागी अवलोकन सहभागी अवलोकन की तुलना में अधिक उपयुक्त है।
4. **समूह के व्यवहार के आधार पर**–सहभागी अवलोकन के द्वारा घटनाओं को उनके स्वाभाविक रूप में देखना संभव हो पाता है, जबकि असहभागी अवलोकन में समूह के लोग अक्सर अपने व्यवहारों में परिवर्तन कर लेते हैं इसके कारण अध्ययन की वैज्ञानिकता संदेहपूर्ण हो जाती है।
5. **समूह के गुप्त पक्षों का अध्ययन**–सहभागी अवलोकन द्वारा एक समूह या समुदाय के गुप्त पक्षों के संबंध में जानकारी प्राप्त की जा सकती है, जबकि असहभागी अवलोकन में अध्ययनकर्ता एक अजनबी होने के कारण सभी गुप्त पक्षों का अध्ययन नहीं कर पाता है।

(ग) **अर्द्ध–सहभागी अवलोकन**–अनियंत्रित अवलोकन के अंतर्गत तीसरा प्रमुख स्वरूप अर्द्ध–सहभागी अवलोकन है। अवलोकन में ऐसे अनेक उदाहरण हैं जहां सहभागी अथवा असहभागी अवलोकन का प्रयोग करना कठिन हो सकता है। वास्तव में वे सहभागी तथा असहभागी अवलोकन होने के सहयोग से अवलोकित किए जा सकते हैं। वस्तुतः किसी भी अध्ययन में अध्ययनकर्ता का पूर्णतया सहभागी अथवा पूर्णतया असहभागी हो सकना अत्यधिक कठिन है। इसका कारण यह है कि पूर्ण सहभागी अवलोकन के अध्ययन में अनेक महत्वपूर्ण तथ्यों के अध्ययन छूट जाने की संभावना बनी रहती है। पूर्ण सहभागी तथा असहभागी अवलोकन की इन दोनों सीमाओं के मध्य पाई जाने वाली विधि ही अर्द्ध–सहभागी अवलोकन विधि कहलाती है। अर्द्ध–सहभागी अवलोकन एक मिश्रित विधि है जिससे सहभागी–असहभागी दोनों विधियों का समन्वय रहता है। इस प्रकार के

अवलोकन में अध्ययनकर्ता तटस्थ भाव से, समुदाय के क्रियाकलापों में भाग लिए बिना उसका अवलोकन करता है।

2. नियंत्रित अवलोकन

टिप्पणी

नियंत्रित अवलोकन अनियंत्रित अवलोकन का विकसित स्वरूप है। वस्तुतः अनियंत्रित अवलोकन के अनेक दोषों को दूर करने के लिए ही नियंत्रित अवलोकन का उद्भव हुआ है। नियंत्रित अवलोकन प्रविधि के अंतर्गत अवलोकनकर्ता अध्ययन की जाने वाली घटनाओं और परिस्थितियों को नियंत्रित करके तथ्यों का संकलन करता है। इसी कारण नियंत्रित अवलोकन को पूर्व नियोजित अवलोकन, संरचित अवलोकन तथा व्यवस्थित अवलोकन भी कहा जाता है। इस प्रकार के अवलोकन की एक मुख्य विशेषता यह है कि इसमें अवलोकनकर्ता पर तो नियंत्रण होता ही है साथ ही साथ अवलोकन की जाने वाली सामाजिक घटना पर भी नियंत्रण किया जाता है। इस संबंध में यह ध्यान रखना आवश्यक है कि सामाजिक घटनाओं के अध्ययन में किसी भी विशेष परिस्थिति अथवा तथ्य को उस प्रकार नियंत्रित नहीं किया जा सकता जिस प्रकार प्राकृतिक घटनाओं पर नियंत्रण स्थापित करके उनका अध्ययन किया जा सकता है। नियंत्रित अवलोकन का तात्पर्य निम्नांकित दो प्रकार के नियंत्रण से है–

(क) **सामाजिक घटना व परिस्थिति पर नियंत्रण**–इसमें अवलोकन अथवा अध्ययन की जाने वाली परिस्थिति अथवा घटना को नियंत्रित किया जाता है। इसका तात्पर्य केवल यह है कि अध्ययन की जाने वाली घटनाओं पर इस प्रकार नियंत्रण स्थापित किया जाए कि आवश्यकतानुसार उसमें समय–समय पर परिवर्तन करके उसका अध्ययन किया जा सके।

(ख) **अवलोकनकर्ता पर नियंत्रण**–नियंत्रित अवलोकन में स्वयं अवलोकनकर्ता अथवा अध्ययनकर्ता पर नियंत्रण होता है। इस प्रकार के नियंत्रण के लिए कई प्रकार के साधनों का प्रयोग किया जाता है, जैसे अवलोकन की विस्तृत योजना पहले ही बना लेना, अनुसूची, साक्षात्कार निर्देशिका व प्रश्नावली का प्रयोग, मानचित्र का प्रयोग, क्षेत्रीय नोटिस एवं अन्य यंत्र जैसे– डायरी, टेपरिकॉर्डर, कैमरा, फोटोग्राफ आदि का प्रयोग आदि।

नियंत्रित अवलोकन की कार्य विधि एवं प्रकृति निम्न हैं–

(क) अवलोकन के अंतर्गत आने वाली इकाइयों तथा संकलित की जाने वाली इकाइयों को सावधानीपूर्वक परिभाषित किया जाता है।

(ख) अवलोकन के लिए विशेष प्रकार की सामग्री का चुनाव किया जाता है।

(ग) इस प्रकार के अवलोकन के लिए समय, स्थान, व्यक्तियों तथा परिस्थितियों का निर्धारण किया जाता है।

3. सामूहिक अवलोकन

सामूहिक अवलोकन नियंत्रित और अनियंत्रित अवलोकन विधियों का सम्मिश्रण है। इस प्रविधि में एक ही सामाजिक घटना अथवा समस्या का अवलोकन कई शोधकर्ताओं द्वारा किया जाता है जो कि उस सामाजिक घटना के विभिन्न पहलुओं के विशेषज्ञ होते हैं। इस प्रकार जब अवलोकन एक व्यक्ति द्वारा न होकर अनेक व्यक्तियों द्वारा सामूहिक

रूप से किया जाता है, तब इस प्रकार के अवलोकन को सामूहिक अवलोकन अथवा समूह अवलोकन कहा जाता है।

सिन–पाओ–यंग ने सामूहिक अवलोकन को इस प्रकार परिभाषित किया है, "सामूहिक अवलोकन नियंत्रित व अनियंत्रित अवलोकन का सम्मिश्रण है। इसमें कई व्यक्ति मिलकर सूचनाओं का संकलन करते हैं। यद्यपि सूचनाओं का संकलन एवं उनका प्रयोग एक केंद्रीय व्यक्ति द्वारा किया जाता है।"

- **विशेषताएं**

1. सामूहिक अवलोकन का कार्य अनेक शोधकर्ताओं द्वारा साथ–साथ किया जाता है।
2. इसमें शोधकर्ताओं को घटनाओं का अवलोकन करने के क्षेत्र में पर्याप्त स्वतंत्रता प्राप्त होती है।
3. संपूर्ण अवलोकन का कार्य अनेक स्तरों पर विभाजित होता है।
4. सामूहिक अवलोकन विभिन्न घटनाओं के बीच तुलना करने के दृष्टिकोण से महत्वपूर्ण है।
5. इस विधि में जहां अवलोकन की विशेषताओं का समावेश है, वहीं दूसरी ओर सभी अवलोकनकर्ताओं पर एक–दूसरे का नियंत्रण रहने के कारण इसके अंतर्गत वैयक्तिक पक्षपात की संभावना कम हो जाती है।
6. इस प्रविधि में यद्यपि अधिक धन की आवश्यकता होती है परंतु इससे शोधकार्य बहुत अच्छे ढंग से होता है।

अपनी प्रगति जांचिए

5. एक अच्छी प्रश्नावली में कौन–कौन से गुण होने चाहिए?
   (क) छोटे एवं स्पष्ट प्रश्न (ख) सरलता
   (ग) त्रुटिरहित (घ) उपरोक्त सभी
6. द्वितीयक आंकड़ों के स्रोतों को कितने समूहों में वर्गीकृत किया जाता है?
   (क) दो (ख) तीन
   (ग) चार (घ) पांच

1.5 वर्गीकरण एवं सारणीयन

सांख्यिकीय सर्वेक्षण द्वारा संकलित आंकड़े और तथ्य मौलिक रूप में इतने जटिल एवं अव्यवस्थित होते हैं कि उन्हें सरलता से समझना और उनकी विशेषताओं को ज्ञात करके उचित व सर्कसंगत निष्कर्ष निकालना असंभव होता है। अतः यह आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों को इस प्रकार सरल रूप में प्रस्तुत किया जाए कि सर्वेक्षणकर्ता उनका विश्लेषण करके आसानी से निष्कर्ष निकाल सके। इस प्रकार एक सर्वेक्षणकर्ता जब तथ्यों को प्रक्रियाकरण के द्वारा उन्हें व्यवस्थित क्रम में रखकर उनका विवेचन करता है, केवल तभी सांख्यिकीय अध्ययन में वैज्ञानिकता का गुण आता है। इस कार्य

के लिए आंकड़ों को अनेक प्रकार के वर्गों में सारणियों द्वारा क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इसको वर्गीकरण तथा सारणीयन कहते हैं।

टिप्पणी

प्रो. ए. आर. इलर्जिक के अनुसार – सर्वेक्षणकर्ता का प्रथम कार्य विवरणों को इस प्रकार सरल व संक्षिप्त करना होता है कि आंकड़ों की कुल विशेषताएं स्पष्ट रूप से ज्ञात हो सकें तथा साथ ही संकलित सामग्री का निर्वचन भी सुविधाजनक हो जाए। यह प्रक्रिया आंकड़ों का वर्गीकरण तथा सारणीकरण कहलाती है।

सर्वेक्षणकर्ता द्वारा संकलित आंकड़ों के समंकों को सरल, सुबोध, व्यवस्थित और संक्षिप्त रूप प्रदान करने हेतु उनका प्रस्तुतीकरण, वर्गीकरण, सारणीयन, टेबुलेशन और चित्रमय तथा बिंदुरेखीय प्रदर्शन किया जाता है। इस संबंध में जे.आर. हिक्स का कथन महत्वपूर्ण है– ''वर्गीकृत एवं क्रमबद्ध तथ्य अपनेआप बोलते हैं, अव्यवस्थित रूप में वे मृत समान होते हैं।''

इससे यह स्पष्ट होता है कि आंकड़ों का प्रक्रियाकरण एवं विश्लेषण एक मूलभूत आवश्यकता है जिसके बिना सर्वेक्षणकार्य संपूर्ण नहीं माना जा सकता है।

आंकड़ों के प्रक्रियाकरण एवं विश्लेषण के अनेक महत्वपूर्ण चरण हैं जिनमें से प्रमुख रूप से प्रयोग होने वाले चरण निम्न प्रकार से हैं –

1. वर्गीकरण
2. संकेतन
3. सारणीयन।

वर्गीकरण

आंकड़ों अथवा तथ्यों में पाई जाने वाली समानता या विभिन्नता के आधार पर उनको व्यवस्थित रूप से विभिन्न क्षेणियों में विभाजित करने को वर्गीकरण कहा जाता है। इस प्रकार आंकड़ों को सजातीयता के आधार पर विभाजन करने की प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है।

परिभाषा–प्रो. कांनर के अनुसार–''वर्गीकरण, आंकड़ों या तथ्यों को (वास्तविक या कल्पित रूप में) उनकी समानता तथा सजातीयता के अनुसार, समूहों या वर्गों में क्रमबद्ध करने की प्रक्रिया है और यह इकाइयों की भिन्नता के बीच में, उनके गुणों की एकता को प्रदर्शित करती है।''

एल्हांस के अनुसार–''सादृश्यताओं एवं समानताओं के अनुसार तथ्यों अथवा आंकड़ों को समूह एवं वर्गों में व्यवस्थित करने की तकनीकी प्रक्रिया वर्गीकरण कहलाती है।

वर्गीकरण के उद्देश्य

आंकड़ों अथवा तथ्यों का वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है–

- संकलित तथ्यों की जटिलता और व्यापकता से उत्पन्न कठिनाइयों को दूर करने के लिए उन्हें सरल और संक्षिप्त बनाना।
- वर्गीकरण से भिन्न–भिन्न इकाइयों को भिन्न–भिन्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है।

टिप्पणी

- वर्गीकरण पदों की भिन्नता के मध्य एकता को प्रकट करता है।
- वर्गीकरण आंकड़ों के गुणों की समानता पर आधारित होता है।
- वर्गीकरण से आंकड़ों में एकरूपता स्पष्ट होती है।
- वर्गीकरण की सहायता से आंकड़ों को वैज्ञानिक रूप से व्यवस्थित किया जाता है। इससे जटिल आंकड़े भी सरल और समझने योग्य बन जाते हैं।
- यह भावात्मक अथवा यथार्थ रूप से स्पष्टता प्रकट करता है।

इस प्रकार, आंकड़ों में समानता लाने, उन्हें वैज्ञानिक आधार में प्रस्तुत करने, बोधगम्य बनाने तथा यथार्थता लाने के लिए वर्गीकरण बहुत महत्वपूर्ण है।

वर्गीकरण के प्रकार

आंकड़ों का वर्गीकरण उनके गुणों अथवा लक्षणों के आधार पर होता है। सामान्यतया सांख्यिकीय आंकड़े या तथ्य दो प्रकार के होते हैं–

1. संख्यात्मक तथ्य
2. वर्णनात्मक तथ्य।

1. **संख्यात्मक तथ्य**–जिन तथ्यों को संख्या में प्रत्यक्ष रूप से व्यक्त किया जा सकता है उन्हें संख्यात्मक तथ्य कहते हैं; जैसे– आयु, भार, ऊंचाई, मात्रा आदि। ऐसे तथ्यों को चर मूल्य भी कहते हैं।
2. **वर्णनात्मक तथ्य**–जिन तथ्यों का प्रत्यक्ष माप नहीं किया जा सकता, केवल उनकी उपस्थिति या अनुपस्थिति के आधार पर गणना की जा सकती है या अनुमान लगाया जा सकता है उन्हें वर्णनात्मक तथ्य कहते हैं, जैसे ईमानदारी, बौद्धिक स्तर आदि। अतः उक्त तथ्यों के आधार पर वर्गीकरण की निम्न रीतियां हैं–

   (i) गुणात्मक वर्गीकरण

   (ii) संख्यात्मक वर्गीकरण

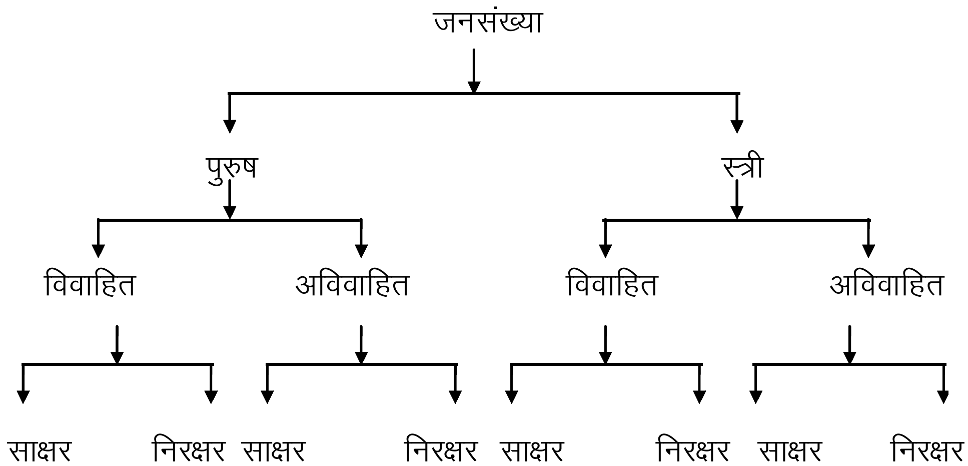
   (i) **गुणात्मक वर्गीकरण**–संकलित आंकड़ों का वर्गीकरण जब अनेक गुणों के अनुसार किया जाता है तब उसे गुणात्मक वर्गीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि हम कुछ विशेष प्रकार की मनोवृतियों, बौद्धिकता, सुंदरता, साक्षरता, स्वास्थ्य, धर्म, लिंग के आधार पर तथ्यों को अनेक वर्गों में विभाजित करते हैं तो यह वर्गीकरण इस वर्ग के अंतर्गत आता है। जैसे 50 व्यक्तियों का वर्गीकरण साक्षरता के आधार पर किया जाए तो वह निम्न प्रकार हो सकता है–

अनपढ़	3
प्राइमरी	5
हाईस्कूल	18
इंटर	14
स्नातक	8
परास्नातक	2
योग	**50**

गुणात्मक वर्गीकरण भी दो प्रकार का हो सकता है –

(क) **सरल या विभेदात्मक**–इसके अंतर्गत केवल एक गुण की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति के आधार पर तथ्यों को विभाजित किया जाता है; जैसे– साक्षरता, धर्म, व्यवसाय आदि। उदाहरणार्थ साक्षरता के आधार पर जनसंख्या को दो वर्गों में बांटना– (1) साक्षर तथा (2) निरक्षर, सरल या विभेदात्मक वर्गीकरण कहलाता है।

(ख) **बहुगुणी वर्गीकरण**–इसमें तथ्यों को एक से अधिक गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है; जैसे– जनसंख्या के आधार पर वर्गीकरण।



गुणात्मक वर्गीकरण सरल होता है परंतु इसमें निम्न सावधानियों का विशेष ध्यान रखना पड़ता है–

1. आधार का स्पष्ट होना।
2. गुणों में होने वाले परिवर्तनों का पर्याप्त रूप से ज्ञान होना।

(1) संख्यात्मक वर्गीकरण–ऐसे तथ्य जिनका संख्यात्मक माप किया जा सकता है, उनका वर्गीकरण संख्यात्मक वर्गीकरण कहलाता है। यह वर्गीकरण प्रायः अंकों के आधार पर किया जाता है। उदाहरण के लिए आय, व्यय, लंबाई, चौड़ाई अथवा संख्यात्मक विशेषता के आधार पर किया गया वर्गीकरण इसके अंतर्गत आता है। इस प्रकार का वर्गीकरण सांख्यिकीय श्रेणियों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। सामान्य रूप से सांख्यिकीय श्रेणियां निम्न प्रकार की होती हैं–

1. समयानुसार
2. स्थानानुसार
3. दशानुसार
4. पारवर्गीकरण
5. वर्गांतरानुसार

1. **समयानुसार वर्गीकरण**–जब आंकड़ों को समय के आधार पर (जैसे घंटे, दिन, सप्ताह, महीने, वर्ष) विभाजित किया जाता है तो उन्हें समयानुसार वर्गीकरण कहते हैं। निम्न श्रेणी समयानुसार वर्गीकरण का उदाहरण है–

भारत की जनसंख्या

वर्ष	1951	1961	1971	1981	1991	2002
जनसंख्या करोड़ों में	36.1	43.9	54.8	68.4	84.6	98.2

टिप्पणी

2. **स्थानानुसार वर्गीकरण**—इसमें आंकड़ों को स्थान या क्षेत्र के आधार पर दर्शाया जाता है। स्थानानुसार श्रेणी का एक उदाहरण निम्न प्रकार से दिखाया गया है। नीचे की तालिका में छह राष्ट्रों का सकल घरेलू पूंजी निर्माण % में दिखाई गई है।

सकल घरेलू पूंजी निर्माण

राष्ट्र का नाम	स्कल घरेलू पूंजी निर्माण % में
अमेरिका	18
जापान	27
ब्रिटेन	20
ऑस्ट्रेलिया	23
कनाडा	20
भारत	12

3. **दशानुसार वर्गीकरण**—जब संकलित आंकड़ों का वर्गीकरण परिस्थिति या दशा के अनुसार किया जाता है तो उसे दशा या परिस्थिति अनुरूप वर्गीकरण कहते हैं। दशानुसार श्रेणियां, लंबाई, प्राप्तांक, आय, वेतन आदि अनेक बातों से संबंधित होती हैं। सर्वेक्षण कार्य में अधिकतर दशानुसार अथवा परिस्थिति अनुसार श्रेणियों का ही प्रयोग होता है।

उदाहरण—एम. ए. राजनीति शास्त्र (अंतिम वर्ष) में विद्यार्थियों के प्राप्तांक अग्रलिखित हैं—

प्राप्त किए गए अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0—20	4
20—40	6
40—60	38
60—80	15
80—100	2
योग	**65**

टिप्पणी

4. **पारवर्गीकरण**—दो या अधिक विशेषताओं में संबंध देखने के लिए पारवर्गीकरण किया जाता है, इसके अंतर्गत एक गुण अथवा विशेषता को दूसरे गुण/गुणों अथवा विशेषता/विशेषताओं के साथ व्यवस्थित किया जाता है।

शैक्षिक स्थिति	लिंग	
	स्त्री	पुरुष
शैक्षिक		
अनपढ़		

5. **वर्गांतरानुसार वर्गीकरण**—वर्गांतरानुसार वर्गीकरण में आंकड़ों अथवा तथ्यों के संख्यात्मक माप संभव होने पर ही वर्गीकरण संभव होता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में आय, भार, किलो, ऊंचाई, उत्पादन, आयात, निर्यात आदि से संबंधित आंकड़ों का अध्ययन संभव है। अंकों के आधार पर इन्हें भिन्न–भिन्न वर्गों में विभक्त कर दिया जाता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में प्रायः निम्न शब्दों का प्रयोग किया जाता है।

   इन शब्दों को भली–भांति समझने के लिए निम्न उदाहरण को ध्यान से देखिए। किसी संस्था के 200 छात्रों के एम.ए. राजनीति शास्त्र के विषय में प्राप्त अंकों को अग्रलिखित सारणी द्वारा दर्शाया गया है–

वर्ग अंतराल (प्राप्तांकों का)	आवृत्ति (छात्रों की संख्या)	संचयी आवृत्ति
0—20	16	16
20—40	39	55
40—60	75	130
60—80	42	172
80—100	28	200
	200	

विस्तार

किसी आवृति वितरण में अंतिम वर्गांतर की ऊपरी सीमा तथा प्रथम वर्गांतर की निचली सीमा के अंतर को उस आवृत्ति वितरण का विस्तार कहा जाता है। उपर्युक्त आवृत्ति वितरण में विस्तार = 100 − 0 = 100 है।

वर्ग सीमाएं

प्रत्येक वर्गांतर की दो सीमाएं होती हैं, निचली सीमा तथा ऊपरी सीमा। उपरोक्त उदाहरण में प्रथम पंक्ति की वर्ग सीमा 0 (निचली सीमा) तथा 20 (ऊपरी सीमा) है। इसी प्रकार दूसरी पंक्ति की वर्ग सीमा 20 (निचली सीमा) तथा 40 (ऊपरी सीमा) है।

वर्ग विस्तार

ऊपरी तथा निचली सीमाओं के अंतर को वर्ग विस्तार कहते हैं। उक्त उदाहरण में वर्ग विस्तार 20 – 0 = 20, (प्रथम पंक्ति का) तथा 40 – 20 = 20 (द्वितीय पंक्ति का) है।

टिप्पणी

वर्गांतर

आवृति वितरण में प्रत्येक वर्ग के आधार को वर्गांतर कहा जाता है। उक्त आवृत्ति वितरण में 0 – 20, 20 – 40, 40 – 60, 60 – 80, 80 – 100 वर्गांतर है।

वर्ग आवृत्ति या बारंबारता

किसी वर्ग विस्तार या वर्गांतर में जितने पद या इकाइयां सम्मिलित होती हैं, उन्हें वर्ग विस्तार की आवृत्ति या बारंबारता कहते हैं। उक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की बारंबारता = 16, द्वितीय वर्ग की बारंबारता = 39 है।

वर्गांतर बनाने की विधियां

वर्गांतर दो प्रकार से बनाए जा सकते हैं–

1. अपवर्जी रीति
2. समावेशी रीति

1. **अपवर्जी रीति**–अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग की निचली सीमा होती है। उपरोक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा 20 है जो अगले वर्ग की निचली सीमा है और इस प्रकार दूसरे वर्ग की ऊपरी सीमा 40 तीसरे वर्ग की निचली सीमा है। अर्थात यदि किसी छात्र को 20 अंक मिले हैं तो वह 20 – 40 के वर्गांतर में आएगा। इसी प्रकार 40 अंक प्राप्त करने वाला छात्र 40 – 60 के वर्गांतर में आएगा। उपरोक्त उदाहरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं –

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
0 से अधिक किंतु 20 से कम	16
20 से अधिक किंतु 40 से कम	39
40 से अधिक किंतु 60 से कम	75
60 से अधिक किंतु 80 से कम	42
80 से अधिक किंतु 100 से कम	28

अतः स्पष्ट है अपवर्जी रीति में वर्ग की ऊपरी सीमा वाले पद को उस वर्ग में शामिल नहीं करते हैं।

2. **समावेशी रीति**–यह वह रीति है जिसमें प्रथम वर्ग की ऊपरी सीमा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के समान नहीं होती अपितु उसमें 1 या अधिक अंतर कर दिया जाता है। इस प्रकार के वर्गीकरण में किसी वर्ग की उपरी सीमा के पद या इकाई को भी उसी वर्ग में समावेशित किया जाता है।

टिप्पणी

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
0—19	16
20—39	39
40—59	75
60—79	42
80—99	28

समावेशी रीति का उपयोग ऐसे आंकड़ों के लिए अधिक उपयुक्त है जहां मूल्यों का भाव पूर्णांक में हो। परंतु यदि मूल्य दशमलव बिंदु में हो तो उनका वर्ग निश्चित करने में कठिनाई आती है। ऐसी दशा में समावेशी वर्गांतरों को भी अपवर्जी में परिवर्तित कर लिया जाता है। इसके लिए प्रथम वर्ग की उच्च सीमा तथा द्वितीय वर्ग को निम्न सीमा के अंतर को निकालकर उसमें दो का भाग देकर जो संख्या आये, उसे प्रथम वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ देना चाहिए तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा में से घटा देना चाहिए।

उदाहरण—उपरोक्त सारणी में प्रथम वर्ग की उच्च सीमा 19 है तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा 20 है। इन दोनों का अंतर 20 − 19 = 1 है। इसमें दो का भाग देने पर 1 ÷ 2 = 0.5 आता है। इस संख्या को प्रथम वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ देने पर 19 + 0.5 = 19.5 आता है तथा द्वितीय वर्ग की निम्न सीमा से घटाने पर 20 − 0. 5 = 19.5 आएगा। इसी प्रकार उपर्युक्त समावेशी वर्गांतरों को निम्न रूप में अपवर्ती बनाया जाता है—

प्राप्तांक (वर्ग अंतराल)	छात्रों की संख्या (बारंबारता)
0 − 19.5	16
19.5 − 39.5	39
39.5 − 59.5	75
59.5 − 79.5	42
79.5 − 99.5	28

प्रत्येक वर्ग अंतराल की आवृत्ति या बारंबारता को कैसे ज्ञात करें?

बारंबारता ज्ञात करने के लिए उस वर्ग अंतराल में आने वाले पदों को या तो मिलान चिह्न द्वारा या सीधे गिनकर या यांत्रिक तरीके से ज्ञात करते हैं। मिलान चिह्न द्वारा बारंबारता ज्ञात करने के लिए वर्ग समूह को पहले स्तंभ में लिखकर उसके अंतर्गत आने वाले प्रत्येक पद को एक खड़ी रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हैं। सामान्यतः चार पदों तक खड़ी रेखा द्वारा प्रदर्शित करके तथा पांचवे पद के लिए चारों रेखाओं को तिरछा काट कर दिखाते हैं, जैसे प्रथम चार के लिए (IIII) तथा पांचवें पद के लिए (~~IIII~~) दिखाते हैं। इस तरह पांचवे पद के लिए उससे पहले वाले चार पदों को एक तिरछी रेखा द्वारा काट कर दिखाया जाता है। उक्त विवरण को निम्न सारणी द्वारा दिखाया गया है, जो 70 परिवारों के विभिन्न आय समूह को दर्शाती है—

टिप्पणी

आय समूह (रुपये में)	मिलान चिह्न	आवृत्ति परिणाम संख्या
400 से कम	IIII IIII II	12
401 – 800	IIII IIII IIII IIII	20
801 – 1200	IIII IIII III	13
1201 – 1600	IIII IIII IIII III	18
1600 से ऊपर	IIII II	7
योग		70

जब सर्वेक्षण बहुत बड़े स्तर पर किया गया हो तो प्राप्त आंकड़ों का वर्ग समूह तथा आवृत्ति उपरोक्त विधि से ज्ञात नहीं की जा सकती। इसके लिए यांत्रिक विधियों की सहायता ली जाती है, जैसे–छटाई मशीन (ये मशीनें कम समय में ही हजारों–लाखों पदों को अलग कर सकती हैं। परंतु ये बहुत खर्चीली होती हैं इसलिए सर्वे के लिए एक विशेष वर्ग समूह को ही लिया जाता है और उससे प्राप्त आंकड़ों को उक्त विधि से वर्गीकृत करके प्राप्त परिणामों का विश्लेषण किया जाता है)।

अपवर्जी एवं समावेशी रीतियों में अंतर

क्र. सं.	अपवर्जी रीति	स्मावेशी रीति
1	अपवर्जी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा तथा उसके अगले वर्ग की निम्न सीमा एक समान होती है।	समावेशी रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा एवं उसके अगले वर्ग की निम्न सीमा का मूल्य समान नहीं होता बल्कि उनमें प्रायः 1 का अंतर होता है।
2	इस रीति में वर्गांतरों में किसी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य की माप या इकाई उस वर्ग में शामिल नहीं की जाती है।	इस रीति में उपरी सीमा के बराबर मूल्य भी ऊपरी वर्ग में सम्मिलित होता है।
3	गणन क्रिया के लिए अपवर्जी रीति को समावेशी में बदलने की आवश्यकता नहीं होती है।	कुछ गणन क्रियाओं की शुद्धता के लिए इस रीति को पहले अपवर्जी में बदलना आवश्यक होता है।
4	यह विधि हमेशा उपयुक्त होती है चाहे पद मूल्य पूर्ण संख्या में हो या दशमलव में।	यह विधि तभी उपयुक्त मानी जाती है जब पद मूल्य पूर्ण संख्या में हो।
5	अपवर्जी रीति में वास्तविक वर्ग सीमाएं तथा मध्य बिंदु ज्ञात करने में समस्या नहीं आती है।	समावेशी रीति में वास्तविक वर्ग सीमाएं तथा मध्य बिंदु ज्ञात करने में समस्या आती है। अतः इन्हें ज्ञात करने के लिए समावेशी वर्गांतरों को अपवर्जी वर्गांतरों में बदल लेना चाहिए।

संकेतन

आंकड़ों के विश्लेषण का दूसरा महत्त्वपूर्ण चरण तथ्यों का संकेतन करना है। इसके अंतर्गत व्याख्यात्मक उत्तरों को अनेक संकेतों, प्रतीकों अथवा अंकों की सहायता से संक्षिप्त और व्यवस्थित बनाने को प्रयत्न किया जाता है। इस प्रकार संकेतीकरण वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा आंकड़ों के प्रत्येक अंक को एक सांकेतिक नाम देकर उसकी प्रकृति के अनुकूल एक कोटि में रखा जाता है। सांकेतिक नाम एक प्रतीक है जो एक या अधिक अक्षर के रूप में हो सकता है अथवा एक या अधिक अंकों के रूप में हो

टिप्पणी

सकता है। इसके फलस्वरूप संकलित तथ्यों की गोपनीयता का गुण बना रहता है। उचित संकेतीकरण के लिए निम्नलिखित नियम ध्यान में रखने चाहिए–

1. वर्गों को सूचित करने वाले चिह्नों की सूचियां तैयार कर लेनी चाहिए।
2. उत्तरदाताओं के उत्तरों का प्रश्न के उद्देश्य के संदर्भ में मूल्यांकन करना चाहिए।

संकेतन के प्रकार

संकेतन दो प्रकार के होते हैं–

1. **संक्षिप्त अक्षरों के रूप में**–इसके अंतर्गत दिए जाने वाले संकेत जैसे–Yes के लिए Y अथवा No के लिए N का प्रयोग किया जाता है।
2. **अनेक संख्या के रूप में**–इसके अंतर्गत उत्तरों को अनेक संख्याओं के रूप में कुछ प्रतीकों का प्रयोग करना है। विभिन्न प्रकार के उत्तरों के सम्मुख 1, 2, 3, 4... आदि संख्याओं को अंकित करना संख्यात्मक संकेतन कहलाता है। संकेतकों के संकेतीकरण पर आंकड़ों का विश्लेषण और उसका उचित अर्थ निर्भर करता है। अतः संकेतकों का चयन करने में सावधानी बरतने की आवश्यकता होती है। संकेतों के द्वारा एक ओर अधिक श्रेणियों वाले लंबे उत्तरों को संक्षिप्त करके विश्लेषण कार्य को सरल बनाया जा सकता है, वहीं दूसरी ओर यांत्रिक सारणीयन के दृष्टिकोण से भी संकेतन एक उपयोगी प्रणाली है।

   संकेतन कई प्रकार से किया जा सकता है। परंतु मुख्य रूप से निम्न प्रविधियों का प्रयोग सामान्यतः किया जाता है–

1. **निदर्शन प्रकृति**–शोधकर्त्ता इस विधि में सर्वप्रथम तथ्यों की पहचान करता है और इसके बाद तथ्यों का विश्लेषण करने के लिए उन्हें इकाइयों में बांटता है। इकाइयों में बांटना स्वैच्छिक या उद्देश्यपरक हो सकता है परंतु ये इकाइयां तथ्यों की विशेषताओं को अवश्य दर्शाती हैं। सामान्यतः इकाइयों को बनाना इस उद्देश्य की पूर्ति करता है कि आंकड़ों का विश्लेषण करने में एक तथ्य दूसरे तथ्य से बिल्कुल अलग हो। दोनों के तुलनात्मक अध्ययन में किसी प्रकार का संदेह न हो।
2. **सांकेतिक किताब का निर्माण**–सांकेतिक किताब सामान्यतः संकेतों की सूची होती है। इस सांकेतिक किताब को बनाने के लिए यह आवश्यक है कि इसमें प्रत्येक संकेत का व्याख्यात्मक वर्णन दिया गया हो और जिसको उदाहरणों द्वारा समझाया गया हो तथा इसके अंतर्गत कौन से तथ्य आ सकते हैं और कौन से तथ्य नहीं आ सकते स्पष्ट दिए गए हों। ये संकेत या तो शब्द हो सकते हैं या संख्याएं हो सकती हैं। ये शोधकर्त्ता द्वारा तथ्यों का विश्लेषण करने के तरीकों पर निर्भर करता है। शोधकर्त्ता को तथ्यों का गुणात्मक विश्लेषण करने के लिए एक समूह का निर्माण कर उनसे इस सांकेतिक किताब का निर्माण करने के लिए विचार विमर्श करना चाहिए।
3. **तथ्यों को चिह्नित करना**–तथ्यों को इकाई में बांटना और उन्हें चिह्न देना तथ्यों को चिह्नित करना कहलाता है। संकेतन गुणात्मक विश्लेषण में दो उद्देश्यों को पूरा करता है। पहला संकेतन अध्ययन सामग्री के संग्रह के मापन या

सारणीयन को चिह्नित करने का कार्य करता है। दूसरा संकेतन निर्धारित अध्ययन सामग्री में इकाइयों का मान देने का कार्य करता है।

टिप्पणी

संकेतन कब और क्यों

संकेतन कब करना चाहिए इसके लिए निम्न सुझाव दिए गए हैं–

- जब आंकड़ों को इकट्ठा करने से पहले आंकड़ों की जांच करना हो या उन्हें क्रमबद्ध करना हो और संकेत में बदलना हो।
- जब संकलित आंकड़ों के द्वारा आंकड़ों का विश्लेषण करना हो।

संकेतन क्यों करना चाहिए? इसके लिए निम्न तर्क दिए जा सकते हैं–

- संकेतन शोधकर्त्ता के द्वारा प्राप्त आंकड़ों का विश्लेषण आसानी से तथा सरल तरीके से कर सकता है।
- गुणात्मक अध्ययन के लिए एक सामान्य व्याख्या भी इसके द्वारा संभव है।
- सांख्यिकीय विश्लेषण करने में भी संकेतन जरूरी है। इससे आंकड़े कैसे हैं? आंकड़ों का प्रकार तथा किस प्रकार संकेतन किए गए हैं? सांख्यिकीय विश्लेषण उसी प्रकार किया जा सकता है।
- संकेतन से आंकड़ों का क्रमबद्ध अध्ययन, उनका शोध में विश्लेषण एवं उनकी व्याख्या करना आसान हो जाता है तथा इसके निष्कर्षों का आधार बनता है।

संकेतकों का चयन

संकेतकों के संकेतीकरण पर आंकड़ों का विशुद्ध विश्लेषण और उनका उचित अर्थापन निर्भर करता है। अतः संकेतकों का चयन करने में विशेष सावधानियां बरतनी आवश्यक हैं। बड़े पैमाने पर किए जाने वाले सर्वेक्षण संवेदनशील व्यक्ति द्वारा होने चाहिए, जो शब्दों के अर्थों के गूढ़ अंतरों को पहचान सकें। संकेतक को सर्वेक्षण विषयों के मूल संप्रत्यय स्पष्ट होने आवश्यक हैं, क्योंकि तभी वह उद्देश्य के अनुकूल संकेतीकरण कर सकता है। संकेतीकरण एक यांत्रिक कार्य है, जिसे बार–बार दोहराना पड़ता है। यह उबाने वाला कार्य है। अतः संकेतक को धैर्यवान तथा बुद्धिमान होना जरूरी है।

संकेतकों का प्रशिक्षण– संकेतकों का प्रशिक्षण निम्नलिखित सोपानों में होना चाहिए–

1. संकेतक को सर्वेक्षण अध्ययन के उद्देश्य अच्छी प्रकार समझा देने चाहिए। उन्हें अच्छी प्रकार प्रेरित करने के लिए सर्वेक्षणकार्य के पीछे सर्वेक्षणकर्ताओं की प्रेरणाओं से अवगत करा देना चाहिए।
2. संकेतक को आंकड़ों एवं सामग्री की सभी कोटियों तथा सांकेतिक नामों को अच्छी प्रकार सोदाहरण समझा देना चाहिए। सांकेतक की प्रत्येक कोटि और सांकेतिक नाम के पीछे तार्किकता समझ में आ जानी चाहिए।
3. संकेतकों को संकेतीकरण का अभ्यास कराना चाहिए। इस अभ्यास से उनकी त्रुटियों का पता लगेगा और सांकेतिक नामों को समझने की कमियां दूर हो जाएंगी। यह भी पता लगेगा कि भिन्न–भिन्न संकेतक संकेतीकरण एक ही प्रकार की मनोरचना से कर रहे हैं अथवा नहीं? आवश्यकता पड़ने पर सामूहिक चर्चा की जानी चाहिए।

टिप्पणी

4. जब यह निर्णय हो जाए कि वे सांकेतिक नाम एक ही मनोरचना के आधार पर हो रहे हैं तो अंत में संकेतकों की विश्वसनीयता का मापन कर लेना चाहिए। विश्वसनीयता की जांच हो जाने पर मुख्य आंकड़ों की सामग्री का इन संकेतकों द्वारा संकेतीकरण आरंभ किया जा सकता है।

सारणीयन

सांख्यिकी में संकलित सामग्री का वर्गीकरण तथा संकेतन करने के उपरांत आंकड़ों का व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण सांख्यिकीय रीतियों का एक महत्वपूर्ण अंग है और इस रीति से सांख्यकीय सारणियों की संरचना की जाती है। सारणीयन की सहायता से ही प्राप्त आंकड़ों को सरल, संक्षिप्त एवं बोधगम्य बनाया जाता है। अतः आंकड़ों का सारणीयन आवश्यक होता है। अत्यंत सरल तथा साधारण शब्दों में सारणीयन का अर्थ प्राप्त आंकड़ों को विविध स्तंभों एवं पंक्तियों में व्यवस्थित करके उन्हें क्रमिक रूप में प्रस्तुत करना है। अर्थात सारणीयन का अभिप्राय तालिका या सारणी बनाने से है। इस प्रकार सारणीयन एक ऐसी क्रिया है जिसके अंतर्गत वर्गीकृत तथ्यों को सरल, संक्षिप्त, क्रमबद्ध और सुव्यवस्थित करने के लिए उन्हें विभिन्न सारणियों में प्रस्तुत किया जाता है।

सारणीयन का अर्थ एवं परिभाषाएं

अनेक विद्वानों ने सारणीयन को अपने–अपने शब्दों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है। डॉ. ए.एल. बाउले के अनुसार–''सारणीयन वह सांख्यिकीय प्रक्रिया है जो उपलब्ध संकलित आंकड़ों से आखिरी तर्क संगत निष्कर्ष निकालने के लिए की जाती है।''

एल.आर. कॉनर के अनुसार–''सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट करने के उद्देश्य से संख्यात्मक तथ्यों को क्रमबद्ध और सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने की विधि है।''

श्री एम.एम. ब्लेयर के अनुसार–"सबसे विस्तृत अर्थ में आंकड़ों की खानों और पंक्तियों में क्रमबद्ध व्यवस्था को सारणीयन कहते हैं।"

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि सारणीयन एक ऐसी प्रक्रिया है जिससे वर्गीकृत आंकड़ों को इस प्रकार प्रदर्शित किया जाता है कि उनकी विशेषताएं तथा लक्षण स्पष्ट हो जाएं।

सारणीयन के उद्देश्य

सांख्यिकी तथा अनुसंधान में सारणीयन के उद्देश्य अथवा कार्य निम्नलिखित हैं–

1. **सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण**–सारणीयन का प्रमुख उद्देश्य वर्गीकृत आंकड़ों को सुव्यवस्थित एवं क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करना है।
2. **आंकड़ों का सरल संक्षिप्त एवं स्पष्ट रूप**–इसमें सारणीयन का उद्देश्य संकलित आंकड़ों की विशेषताओं को बहुत सरल और संक्षिप्त रूप में स्पष्ट करना है।
3. **तथ्यों को तुलनीय बनाना**–सारणीयन की सहायता से आंकड़ों को इस प्रकार खानों या पंक्तियों में व्यवस्थित किया जाता है जिससे तथ्यों की सरलता से तुलना की जा सके।

टिप्पणी

4. **न्यूनतम स्थान में तथ्यों का प्रस्तुतीकरण**—सारणीयन का उद्देश्य आंकड़ों को न्यूनतम स्थान में क्रमबद्ध तथा सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना होता है।
5. **आंकड़ों को अधिकाधिक उपयोगी बनाना**—सारणीयन द्वारा आंकड़ों को इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि उनको अधिकाधिक उपयोगी बनाया जा सके।
6. **आंकड़ों में एकता प्रकट करना**—सारणीयन समूह की इकाइयों की विभिन्नता में सम्मिलित एकता को प्रकट करता है।

सारणीयन के लाभ

सारणीयन के निम्नलिखित लाभ हैं—

1. सारणीयन के द्वारा जटिल आंकड़े समूह को स्पष्ट रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।
2. सारणीयन के द्वारा तथ्यों का मूल्यांकन सरलता से किया जा सकता है।
3. सांख्यिकीय आंकड़ों को सारणीबद्ध करने से अशुद्धियों की जांच सरल हो जाती है।
4. आंकड़ों की पुनरावृति को रोका जा सकता है। यह समय, स्थान और धन की बचत करता है।
5. इसकी सहायता से दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना आसान हो जाती है। सांख्यिकीय गणनाओं व विश्लेषण में भी आसानी हो जाती है।

सारणीयन के प्रमुख भाग

एक सारणी के प्रमुख भाग निम्न होते हैं। यहां दी गई सारणी को देखें, इसमें सारणी बनाने में प्रयुक्त लगभग सभी भाग दिए गए हैं।

भारत की जनसंख्या (करोड़ों में) 1951 से 2011 तक

सन्	जनसंख्या (करोड़ों में)
1951	35.9
1961	43.9
1971	54.8
1981	68.3
1991	84.6
2001	98.2
2011	108.3*

स्रोतः 2011 स्रोत। * का मतलब है अनुमानित जनसंख्या (आंकड़े उपलब्ध नहीं हैं)

1. **सारणी नंबर या संख्या**—सारणी को बनाते समय सर्वप्रथम सबसे ऊपर या मध्य में उसका नंबर दिया जाता है। सारणी संख्या या नंबर एक संदर्भ का कार्य करता है। इससे सारणी को ढूंढ़ने में सुविधा रहती है।
2. **सारणी का शीर्षक**—सारणी संख्या अंकित करने के पश्चात उसके नीचे ही सारणी का शीर्षक देना आवश्यक होता है। शीर्षक छोटा, सरल, प्रभावपूर्ण एवं स्पष्ट होना चाहिए। शीर्षक से निम्न बातें स्पष्ट होनी चाहिए—

- आंकड़े या समंक किस समय के हैं।
- आंकड़े किससे संबंधित हैं।
- आंकड़े कहां के हैं।

टिप्पणी

3. **उपशीर्षक**—सारणी अनेक छोटे—बड़े स्तंभों या खानों में विभक्त होती है। इन स्तंभों को दिये गए शीर्षक या नाम उपशीर्षक कहलाते हैं। ये छोटे से छोटे एवं प्रभावपूर्ण होने चाहिए।
4. **सारणी का आकार**—सारणी का महत्त्व उसके उपयुक्त आकार से है। इसका आकार न तो बहुत विशाल हो और न ही बहुत छोटा हो। सारणी का आकार संतुलित होना चाहिए।
5. **पदों की व्यवस्था**—सारणी का आकार बना लेने के बाद विभिन्न पंक्तियों एवं खानों में आंकड़ों को लिखा जाता है। आंकड़ों से संबंधित सभी पदों को वर्णनात्मक, भौगोलिक, सामयिक अथवा आकार के आधार पर व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत किया जाता है।
6. **टिप्पणियां**—सारणी के अंत में उन आंकड़ों अथवा उपशीर्षकों का स्पष्टीकरण दिया जा सकता है जो विशेष प्रकृति के हों, जैसे—उक्त सारणी में '*' का चिह्न आंकड़ों के विशेष गुण को दर्शाता है कि यह आंकड़ा स्रोत में उपलब्ध नहीं है केवल अनुमानतः लिखा गया है।
7. **स्रोत**—सारणी में दिए गए आंकड़े प्राथमिक अथवा द्वितीय स्रोतों से प्राप्त किए गए हो सकते हैं। अतः सारणी के नीचे उस स्रोत अथवा संदर्भ का उल्लेख करना आवश्यक हो जाता है, जहां से इस सूचना को प्राप्त किया गया है।

सांख्यिकीय सारणियों के प्रकार

सामान्यतः तीन प्रकार की सारणियां प्रयोग में लाई जाती हैं—

1. **साधारण या एक गुणी सारणी**—इसमें आंकड़े अथवा तथ्यों के एक गुण को दिखाया जाता है, उदाहरण—

आयु	श्रमिकों की संख्या

इस तालिका में केवल एक चर (आयु) के आधार पर वर्गीकरण किया गया है।

2. **द्विपक्षीय अथवा द्विगुणीय सारणी**—ये वे सारणियां होती हैं जिनमें तथ्यों का वर्गीकरण दो चरों, गुणों अथवा लक्षणों के आधार पर होता है। शोधकर्त्ता इस स्थिति में दो चरों के वर्गीकरण द्वारा यह देखने का प्रयास करता है कि इन चरों में कोई संबंध है या नहीं। उदाहरण के लिए शिक्षा और व्यवसाय, आयु और श्रमिकों की संख्या के बीच सहसंबंध द्विपक्षीय सारणी में देखा जा सकता है।

टिप्पणी

उदाहरण—

आयु	श्रमिकों की संख्या पुरुष/स्त्री	कुल

द्विपक्षीय तालिकाएं सामाजिक अनुसंधान का महत्त्वपूर्ण अंग होती हैं, क्योंकि वे विषय का गहन से अध्ययन करने और उसे समझने में मदद करती हैं।

3. **बहुपक्षीय अथवा बहुगुणीय**—जब सामाजिक शोधकर्त्ता जटिल संबंधों एवं परिस्थितियों का अध्ययन करना चाहता है और अध्ययन समस्या को अधिक गहराई से समझना चाहता है तब बहुपक्षीय या बहुगुणीय सारणी का निर्माण किया जाता है। जैसे—आयु व श्रमिकों की संख्या के साथ लिंग जोड़कर तथा विभाग या संस्थान में विभिन्न पदों या स्तरों पर श्रमिकों (स्त्री/पुरुष) को जोड़कर यह देखा जाए कि विभिन्न आयु वर्गों के पुरुषों और महिलाओं की स्थिति संस्थान में विभिन्न पदों या स्तरों पर कितनी है। तब उसे बहुगुणीय या बहुपक्षीय सारणी कहा जाएगा।

   उदाहरण—

आयु	पद						कुल
	अधिकारी		क्लर्क		कुल		
	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	

सारणियों के इन सभी प्रकारों से स्पष्ट होता है कि शोधकर्त्ता को जितने सरल अथवा विधिपूर्वक तथ्यों को प्रदर्शित करना होता है उन्हीं के अनुसार सारणी का निर्माण किया जाता है। एक उत्तम सारणी के अंदर वैज्ञानिकता, आकर्षकता, समुचित आकार, तुलना की सुविधा, स्पष्टता तथा सरलता आदि गुणों का समावेश होना आवश्यक है। सारणी का निर्माण लक्ष्य के अनुकूल होना चाहिए जिससे अध्ययन के उस उद्देश्य की पूर्ति हो सके, जिसके लिए सारणी को निर्मित करना जरूरी समझा गया है।

सारणीयन की सीमाएं

सारणीयन की निम्न सीमाएं हैं—

- सारणियों के द्वारा तथ्यों को केवल संख्यात्मक रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।
- सारणियों को समझने के लिए अंकों का उचित ज्ञान होना आवश्यक है।
- सारणी द्वारा प्रदर्शित जटिल तथ्यों को साधारण व्यक्तियों द्वारा समझना कठिन कार्य होता है। अतः यह साधारण व्यक्तियों के लिए अधिक उपयोगी नहीं है।

टिप्पणी

- सारणीयन में सभी इकाइयों को समान रूप में माना जाता है। इसके द्वारा स्थिति को स्पष्ट नहीं किया जा सकता।
- सारणी किसी विशेष महत्त्व के खंड को कोई विशेष महत्व नहीं दे पाती।
- गुणात्मक तथ्य सारणी में प्रस्तुत नहीं किए जा सकते।

उपरोक्त सीमाओं के रहते हुए भी सारणी का सामाजिक अनुसंधान में महत्त्व है। सारणीयन में तथ्यों के भंडारों का सुव्यवस्थित एवं सुस्पष्टता से क्रमबद्ध तरीके से वर्गीकरण करना संभव हो पाता है। निष्कर्षतः वैज्ञानिक जांच अथवा शोध में सारणीयन अत्यंत महत्वपूर्ण है।

वर्गीकरण तथा सारणीयन में अंतर

वर्गीकरण तथा सारणीयन सांख्यिकीय अध्ययन में महत्वपूर्ण प्रक्रियाएं हैं। इन दोनों ही प्रविधि से आंकड़ों को क्रमबद्ध व व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार दोनों प्रक्रियाओं में समानता होते हुए भी कुछ भिन्नताएं हैं, जो इस प्रकार हैं–

वर्गीकरण	सारणीयन
आंकड़ों के विश्लेषण में वर्गीकरण सारणीयन से पहले आता है। अतः वर्गीकरण सारणीयन का आधार है।	सारणीयन वर्गीकरण के पश्चात की क्रिया है।
वर्गीकरण में संकलित आंकड़ों को उनके समान–असमान गुणों के आधार पर वर्गों या श्रेणियों में बांटा जाता है।	सारणीयन में वर्गीकृत तथ्यों को खानों और पंक्तियों में विभाजित करके प्रस्तुत किया जाता है।
वर्गीकरण का आधार आंकड़ों की विशेषताएं होती हैं।	सारणीयन वर्गीकृत आंकड़ो के आधार पर किया जाता है।
वर्गीकरण सांख्यिकीय विश्लेषण की एक प्रक्रिया है।	सारणीयन आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की प्रक्रिया है।
वर्गीकरण में भौतिक समंकों का ही प्रयोग किया जाता है।	सारणीयन में व्युत्पन्न आंकड़ों जैसे–प्रतिशत, अनुपात आदि का भी प्रयोग किया जाता है।
वर्गीकरण साधारण व्यक्तियों द्वारा भी समझा जा सकता है।	सारणीयन को साधारण व्यक्ति आसानी से नहीं समझ सकता।
वर्गीकरण आसानी से हो सकता है।	सारणीयन में संभवतः दक्षता होना जरूरी है।

सारणी निर्माण के सिद्धांत

सांख्यिकीय सारणी के निर्माण में साधारणतः प्रयुक्त होने वाले सिद्धांत निम्नलिखित हैं–

1. प्रत्येक सारणी साफ, संक्षिप्त और उचित शीर्षक के साथ होनी चाहिए ताकि उसे तर्कपूर्ण बनाया जा सके। इसका शीर्षक संदर्भ सहित सारणी के ऊपर होना चाहिए।
2. प्रत्येक सारणी को एक अलग संख्या द्वारा सुलभ संदर्भ देना चाहिए।
3. सारणी की पंक्तियों तथा स्तंभों के शीर्षक उचित होने चाहिए।
4. माप की इकाई शीर्षक या उपशीर्षक के साथ सारणी में दर्शायी जानी चाहिए।

5. वर्णनात्मक टिप्पणियां यदि कोई हों (सारणी से संबंधित) तो वे सारणी के नीचे संदर्भ चिह्न के साथ दीए जानी चाहिए तथा यही संदर्भ चिह्न सारणी में उस माप, इकाई या तथ्य के लिए भी होने चाहिए।
6. सारणी के नीचे आंकड़ों के स्रोत को लिखा जाना चाहिए।
7. सामान्यतः स्तंभों को एक–दूसरे से रेखा द्वारा अलग किया जाना चाहिए। इसी प्रकार पंक्तियां भी रेखाओं द्वारा अलग होनी चाहिए।
8. स्तंभों के संदर्भ के लिए कोई अंक (क्रमबद्ध या सतत); जैसे–1, 2, 3 .... देने चाहिए।
9. वे स्तंभ जिनके आंकड़े तुलनात्मक हों उन्हें एक के बाद एक रखना चाहिए। इसी प्रकार प्रतिशत और औसत आंकड़ों के साथ ही रखने चाहिए।
10. सारणी बनाने से पहले लगभग योग या औसत लिखा होना चाहिए क्योंकि इससे सारणी का अनावश्यक वर्णन करने की जरूरत कम होती है।
11. यह महत्त्वपूर्ण है कि सभी स्तंभों की संख्या या आंकड़े उसी स्थान पर होने चाहिए तथा उनके सम्मुख दशमलव बिंदु तथा (+) और (–) चिह्न लगे होने चाहिए।
12. सारणी में संक्षिप्तीकरण नहीं करना चाहिए; जैसे–मिश्रित तथा अलग तथ्य या पद यदि कोई हो तो उन्हें सारणी में आखिरी पंक्ति में लिखना चाहिए।
13. सारणी तर्कपूर्ण, स्वच्छ, सही तथा सामान्य होनी चाहिए। यदि आंकड़े या तथ्य बहुत ज्यादा हों तो उन्हें एक ही सारणी में नहीं दिखाना चाहिए, इससे समझने में असुविधा होती है।
14. पंक्तियों का योग सामान्यतः सबसे बाद के स्तंभ में लिखा जाना चाहिए। और स्तंभों का योग पंक्तियों के सबसे नीचे लिखा जाना चाहिए।
15. सारणी में वर्गों की व्यवस्था संख्या के आधार पर, शब्दों के आधार पर, स्थान के आधार पर, क्रम के आधार पर व तुलनात्मक आधार पर की जा सकती है।

अंत में कह सकते हैं कि सारणी का निर्माण शोधकर्त्ताओं को विषय की आवश्यकतानुसार करना चाहिए।

अपनी प्रगति जांचिए

7. निम्न में से कौन–सा भाग सारणीयन का नहीं है?

   (क) उपशीर्षक — (ख) टिप्पणियां

   (ग) स्रोत — (घ) निदर्शन

8. निम्न में से कौन–सा तथ्य संख्यात्मक नहीं है?

   (क) आयु — (ख) व्यय

   (ग) हवा — (घ) लंबाई

1.6 समंकों का बिंदुरेखीय प्रदर्शन

टिप्पणी

हमारे द्वारा एकत्र किए गए आंकड़ों को व्याख्या हेतु अधिक सरलता से समझा जा सकता है, यदि उन्हें ग्राफिकली अथवा चित्रीय रूप में प्रस्तुत किया गया हो। आरेख व ग्रॉफ्स से आंकड़ों में विस्तारों, समूहनों, प्रचलनों एवं प्रारूपों के दृश्य संकेत मिलते हैं। आरेखों (ग्रॉफ्स) के रूप में इन महत्वपूर्ण लक्षणों को अधिक सरलता से प्रस्तुत कर दिया जाता है। डायग्राम्स में तो आंकड़ों के दो अथवा अधिक समुच्चयों (सेट्स) के मध्य तुलनाएं भी सहज हो जाती हैं।

आरेख समझने में स्पष्ट व सरल रहते हैं। आरेख में बहुत अधिक सूचनाएं न दर्शायी जाएं; अन्यथा वह बाधापूर्ण एवं असमंजसकारी हो सकता है। हर आरेख में विषय–वस्तु से संबंधित संक्षिप्त व स्व–व्याख्यात्मक शीर्षक का समावेश होना चाहिए। प्रस्तुतीकरण का पैमाना इस प्रकार चुना जाए कि जिससे उपयुक्त आकार का आरेख बने। ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज अक्षों पर मध्यांतर समान आकार के हों; अन्यथा विकृतियां आएंगी।

पृथक (डिस्क्रीट) आंकड़ों को दर्शाने के लिए आरेख एवं सतत आंकड़ों को दर्शाने के लिए ग्राफ्स अधिक उपयुक्त एवं बेहतर रहते हैं। सामान्यतया प्रयोग की जाने वाली आरेखिक व ग्राफिक प्रस्तुतीकरण विधियां निम्न हैं–

आरेखिक (चित्रमय) प्रस्तुतकरण

1. दंड चित्र (बार डायग्राम)
2. चित्रलेख चित्र (पिक्टोग्राम)

दंड चित्र : दंड चित्र ऊर्ध्वाधर रेखाएं हैं जहां दंडों की लंबाइयां उनके सुमेलित संख्यात्मक मानों के समानुपाती होती हैं। दंड की चौड़ाई महत्वहीन होती है तथापि सभी दंड एकसमान चौड़ाई के रखे जाएं ताकि डायग्राम के पाठक को असमंजस न हो। इसके अतिरिक्त दंडों के मध्य की दूरियां समान रहें।

उदाहरण : मान लें कि वर्ष 1989, 1990 व 1991 के लिए X Y Z कंपनी के सकल राजस्व (100,000.00 रुपयों में) निम्नानुसार थे–

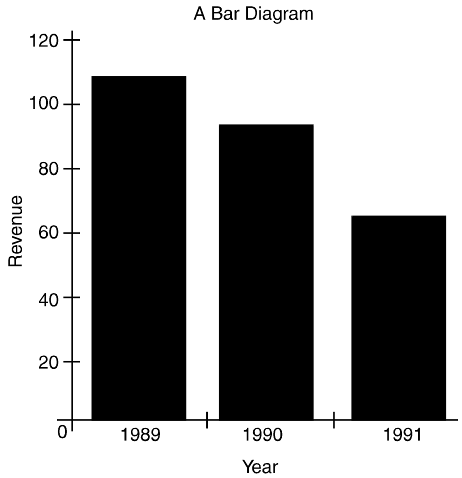
वर्ष	राजस्व
1989	110
1990	95
1991	65

इन आंकड़ों के लिए दंड चित्र बनाइए–

हल

इन आंकड़ों के लिए दंड चित्र को निम्नानुसार ऊर्ध्वाधर अक्ष पर राजस्व एवं क्षैतिज अक्ष पर वर्ष दर्शाते हुए तैयार किया जा सकता है।

टिप्पणी



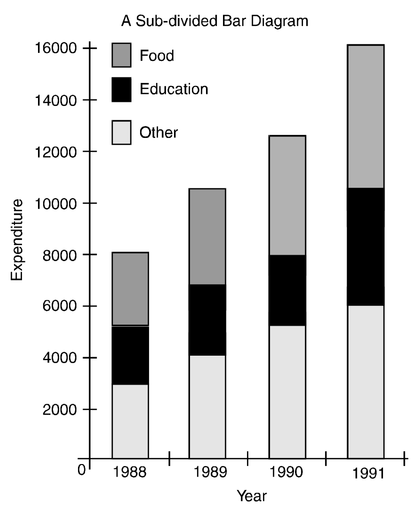
खींचे गए दंडों को आरेख में दर्शायी जाने वाली सूचनाओं के प्रकार के अनुसार आगे अंगों में उपविभाजित किया जा सकता है। निम्न उदाहरण द्वारा यह स्पष्ट हो जाएगा जिसमें हम दंड में तीन अंगों को प्रस्तुत कर रहे हैं।

उदाहरण : वर्ष 1988, 1989, 1990 व 1991 के लिए चार परिजनों के परिवार के लिए डॉलर्स में तीन प्रकार के व्यय के लिए उपविभाजित बार चार्ट निम्नानुसार बनाइए–

वर्ष	भोजन	शिक्षा	अन्य	कुल
1988	3000	2000	3000	8000
1989	3500	3000	4000	10500
1990	4000	3500	5000	12500
1991	5000	5000	6000	16000

हल

उपविभाजित बार चार्ट निम्नानुसार होगा–



ग्राफिक प्रस्तुतीकरण

1. वृत्ति पाई चार्ट
2. आवृत्ति आयात चित्र (हिस्टोग्राम)
3. आवृत्ति बहुभूत (आवृत्ति पॉलिगौन)

इनमें प्रत्येक का संक्षिप्त वर्णन करते हुए व्याख्या की गयी है–

वृत्त चित्र : इस प्रकार के आरेख से हम कुल आंकड़ों को अंग (घटक) भागों में विभाजित होता पाते हैं। आरेख तो वृत्त के रूप में होता है एवं वृत्त (पाइ) कहलाता है क्योंकि पूरा आरेख पाइ जैसा दिखता है व उसके अंग उसकी फांकों जैसे दिखायी देते हैं। फांक का आकार पूरे में अंग के अनुपात को प्रदर्शित करता है।

टिप्पणी

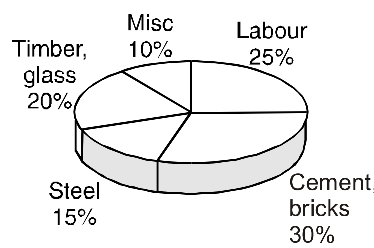
उदाहरण : निम्नांकित संख्याएं मकान के विनिर्माण की लागत से संबंधित हैं। लागत के विभिन्न अंगों को कुल लागत के प्रतिशतों के रूप में प्रदर्शित किया गया है–

वस्तु	*% व्यय*
श्रम	25
सीमेंट, ईंटें	30
इस्पात	15
इमारती लकड़ी, कांच	20
विविध	10

उक्त आंकड़ों से पाइ चार्ट बनाइए–

हल

इन आंकड़ों के लिए पाइ चार्ट निम्नानुसार प्रस्तुत किया जा रहा है–



तुलनात्मक प्रयोजनों के लिए पाइ चार्ट्स अति उपयोगी हैं, विशेषतया वहां जहां कुछ ही अंग हों।

यदि बहुत अंग हों तो पाइ में आपेक्षिक मानों को विभेदित करना असमंजसकारी हो जाता है।

चित्रलेख (पिक्टोग्राम) : चित्रलेख का तात्पर्य चित्रों के रूप में आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण है। यह सूचनात्मक प्रदर्शनों के लिए शासनों एवं अन्य संगठनों द्वारा प्रयोग की जाने वाली सबसे प्रचलित विधि है। इसका प्रमुख लाभ इसका आकर्षक मान है। चित्रलेख से प्रस्तुत की जा रही सूचनाओं में रुचि उत्पन्न होती है।

समाचार–पत्रिकाओं को इस रूप में आंकड़े प्रस्तुत करना बहुत भाता है। उदाहरण हेतु यू.एस.ए. एवं रूस के सशस्त्र बलों के सामर्थ्य की तुलना करते हुए ये सैनिकों के खाके बनाएंगे जहां हर खाके द्वारा 100,000 सैनिक दर्शाए जा सकते हैं। इसी प्रकार प्रक्षेपास्त्रों व हौजों की भी तुलना की जाती है।

आवृत्ति आयात चित्र (हिस्टोग्राम) : यह आंकड़ों का ग्राफिकल विवरण है तथा आवृत्ति सारणी से बनाया जाता है। इसमें आंकड़ों के समुच्चय की वितरण विधि प्रदर्शित होती है तथा इसका प्रयोग सांख्यिकीय एवं गणितीय गणनाओं में किया

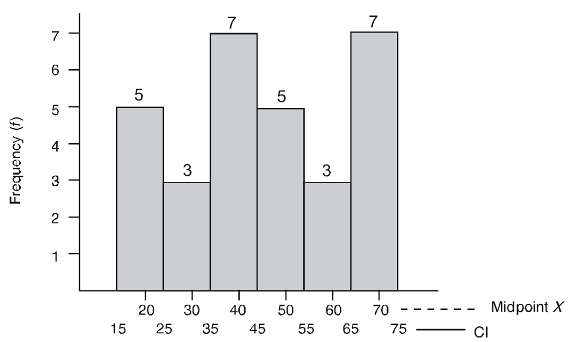
जाता है। इसे सांख्यिकीय गुणवत्ता और नियंत्रण प्रक्रिया का सबसे महत्वपूर्ण मूलभूत औजार माना जाता है।

इस प्रकार के प्रस्तुतीकरण में दिये गए आंकड़ों को आयतों की शृंखला के रूप में गढ़ लिया जाता है। उपयुक्त पैमाने के अनुसार वर्ग मध्यांतरों को X–अक्ष में चिह्नित कर लेते हैं एवं आवृत्तियों को Y–अक्ष में रख लेते हैं। दंड चार्ट तो एकविमीय होता है अर्थात दंड (बार) की लंबाई ही महत्वपूर्ण होती है, चौड़ाई नहीं किंतु हिस्टोग्राम द्वि–विमीय है अर्थात इसमें लंबाई व चौड़ाई दोनों का महत्व है। हिस्टोग्राम को समूहबद्ध आंकड़ों के आवृत्ति वितरण से बनाया जाता है, जहां आयत की ऊंचाई वर्ग मध्यांतर में प्रदर्शित संबंधित आवृत्ति एवं चौड़ाई के अनुक्रमानुपाती होती है। हर आयत दूसरे आयत से जुड़ा रहता है व आयतों के मध्य रिक्त स्थान का आशय होता है कि वह वर्ग खाली है एवं उस वर्ग मध्यांतर में कोई मान नहीं है।

एक उदाहरण में आइए 30 श्रमिकों की आयु के हमारे उदाहरण के लिए हिस्टोग्राम बनाएं। सुविधा के लिए हम हर मध्यांतर के मध्य–बिंदु के साथ आवृत्ति वितरण प्रस्तुत करेंगे, जहां मध्य–बिंदु हर वर्ग मध्यांतर की निम्नतर व उच्चतर परिसीमा के मानों का औसत है। आवृत्ति वितरण सारणी निम्नानुसार प्रदर्शित है–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	मध्य–बिंदु	आवृत्ति (f)
15 से 25 तक	20	5
25 से 35 तक	30	3
35 से 45 तक	40	7
45 से 55 तक	50	5
55 से 65 तक	60	3
56 से 75 तक	70	7

इस आंकड़े के हिस्टोग्राम को निम्नानुसार दर्शाया जाएगा–

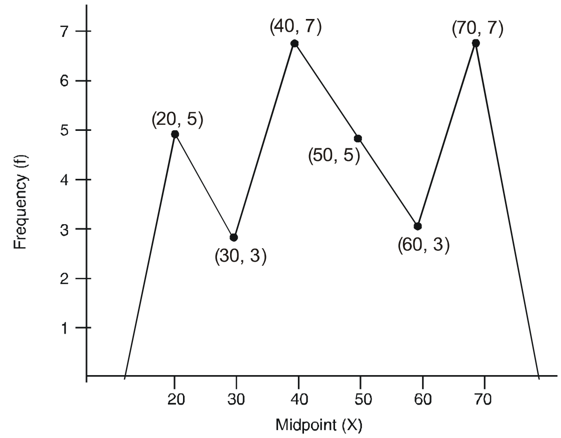


आवृत्ति बहुभूत : आवृत्ति पॉलिगौन तो आवृत्ति वितरण का लाइन चार्ट है, जिसमें वर्ग मध्यांतरों के मध्य–बिंदुओं अथवा पृथक (डिस्क्रीट) चरों के मानों को आवृत्तियों के आगे आरेखित (प्लॉट) किया जाता है तथा ये आरेखित बिंदु एक–दूसरे से सीधी रेखाओं द्वारा जुड़े होते हैं। चूंकि आवृत्तियां साधारणतः न तो शून्य पर आरंभ होती हैं, न ही उस पर समाप्त, अतः यह आरेख स्वयं क्षैतिज अक्ष को स्पर्श नहीं करेगा। वैसे संपूर्ण वक्र का क्षेत्र उस हिस्टोग्राम के क्षेत्र के समान नहीं होता, जो कि प्रस्तुत आंकड़ों का 100

टिप्पणी

प्रतिशत है, इसलिए वक्र को बंद किया जा सकता है ताकि आरंभ बिंदु उस काल्पनिक बिंदु से पीछे जुड़े जिसका मान शून्य है जिससे वक्र का आरंभ क्षैतिज अक्ष पर हो व अंतिम बिंदु उस काल्पनिक बिंदु से आगे जुड़ जाए जिसका मान भी शून्य है ताकि वक्र 'क्षैतिज अक्ष' पर समाप्त हो। इस बंद आरेख को आवृत्ति बहुभूत कहा जाता है।

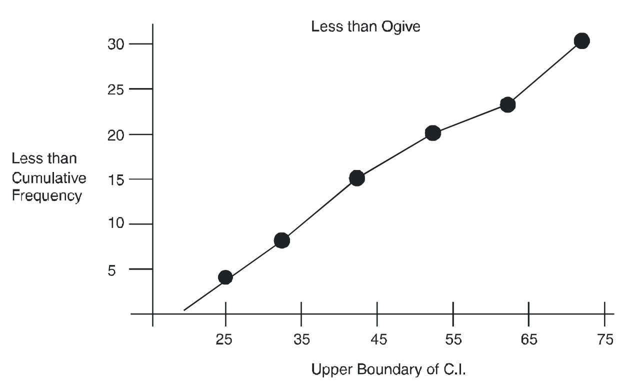
हम ऊपर प्रदर्शित सारणी से आवृत्ति बहुभूत बना सकते हैं–



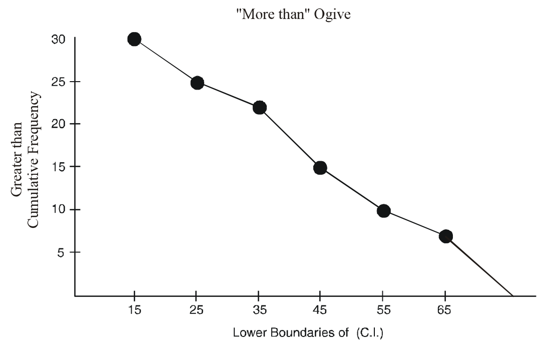
संचयी आवृत्ति वक्र (ओगिव) : संचयी आवृत्ति वक्र अथवा ओगिव तो संचयी आवृत्ति वितरण का ग्राफिक प्रस्तुतीकरण है। ओगिव्स दो प्रकारों के होते हैं। इनमें से एक छोटा व दूसरा ओगिव से बड़ा होता है। इन दोनों ओगिव्स को 30 श्रमिकों के हमारे उदाहरण की निम्न सारणी के आधार पर बनाया जाता है–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	मध्य–बिंदु	*(f)*	संचयी आवृत्ति (से कम)	संचयी आवृत्ति (से अधिक)
15 से 25 तक	20	5	5 (से कम 25)	30 (से ज्यादा 15)
25 से 35 तक	30	3	8 (से कम 35)	25 (से ज्यादा 25)
35 से 45 तक	40	7	15 (से कम 45)	22 (से ज्यादा 35)
45 से 55 तक	50	5	20 (से कम 55)	15 (से ज्यादा 45)
55 से 65 तक	60	3	23 (से कम 65)	10 (से ज्यादा 55)
65 से 75 तक	70	7	30 (से कम 75)	7 (से ज्यादा 65)

(i) **ओगिव से कम** : इस प्रकरण में संचयी आवृत्तियों से कम को उनके संबंधित वर्ग मध्यांतरों की ऊपरी परिसीमाओं के आगे आरेखित कर दिया जाता है।



(ii) **ओजिव से अधिक :** इस प्रकरण में संचयी आवृत्तियों से अधिक को उनके संबंधित वर्ग मध्यांतरों की निचली परिसीमाओं के आगे आरेखित किया जाता है।



टिप्पणी

उपयोगिता

इन ओजिव का प्रयोग तुलनात्मक प्रयोजनों के लिए किया जा सकता है। अनेक ओजिव को एक ग्रिड पर खींचा जा सकता है, सरल दृश्य व विभेदन के लिए भिन्न–भिन्न रंगों को वरीयता दी जाती है।

यद्यपि सांख्यिकीय आंकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए आरेख व ग्राफ्स शक्तिशाली व प्रभावी माध्यम हैं, ये सूचनाओं के सीमित परिमाण को ही प्रस्तुत कर सकते हैं एवं जब आंकड़ों का सघन विश्लेषण आवश्यक हो तब ये बहुत सहायता नहीं करते।

1.6.1 आवृत्ति वितरण

सांख्यिकीय आंकड़ों को आवृत्ति वितरण में संगठित किया जा सकता है जिसमें सारणीबद्ध रूप में चर के मान को एवं उसके पाए जाने की आवृत्ति को सूचीबद्ध किया जाता है। आवृत्ति वितरण को अब आंकड़ों में प्राप्त समस्त मानों एवं उससे मेल आवृत्ति की सूची के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसमें ये मान आंकड़ों में पाये जाते हैं।

आवृत्ति वितरण समूहबद्ध अथवा असमूहबद्ध हो सकता है। जब चर के मानों की संख्या छोटी हो तो हम असमूहबद्ध आवृत्ति वितरण बना सकते हैं जो कि अमुक चर के मान के आगे उपस्थिति/घटना की आवृत्ति को सूचीबद्ध करता है। एक उदाहरण में आइए मान लें कि 20 परिवारों का सर्वेक्षण यहा पता लगाने के लिए किया गया था कि हर परिवार में कितने बच्चे थे। इस सर्वेक्षण से प्राप्त कच्चा आंकड़ा निम्नानुसार है–

0, 2, 3, 1, 1, 3, 4, 2, 0, 3, 4, 2, 2, 1, 0, 4, 1, 2, 2, 3

इस आंकड़े को असमूहबद्ध आवृत्ति वितरण में वर्गीकृत किया जा सकता है। बच्चों की संख्या हमारे द्वारा चर (X) बना दी जाती है जिसके लिए हम उपस्थिति (f) की आवृत्ति 0 को सारणीबद्ध रूप में निम्नानुसार सूचीबद्ध कर सकते हैं–

बच्चों की संख्या (X)	आवृत्ति(f)
0	3
1	4
2	6
3	4
4	3
	कुल = 20

टिप्पणी

उपरोक्त सारणी को पृथक (डिस्क्रीट) आवृत्ति वितरण भी कहा जाता है जहां चर के पृथक (डिस्क्रीट) संख्यात्मक मान होते हैं।

वैसे जब आंकड़े बहुत अधिक हों तो उन्हें चर मानों के समूहों अथवा वर्गों की उपयुक्त संख्या में संघनित कर लेना आवश्यक हो जाता है तथा तदुपरांत इन मानों को इनके संबंधित वर्गों की संयुक्त आवृत्तियों में सौंप देना होता है। एक उदाहरण में आइए मान लें कि फैक्टरी में 100 कर्मचारियों का सर्वेक्षण उनकी आयु ज्ञात करने के लिए किया गया था। सबसे कम आयु के व्यक्ति की आयु 20 वर्ष एवं सर्वाधिक आयु वाले व्यक्ति की आयु 50 निकली। हम इस आंकड़े के लिए समूहबद्ध आवृत्ति वितरण बना सकते हैं, अतः आयु के हर वर्ष द्वारा आवृत्ति सूचीबद्ध करने के स्थान पर हम आयु–समूह के अनुसार आवृत्ति को सूचीबद्ध कर सकते हैं। चूंकि आयु एक सतत चर है, अतः आवृत्ति वितरण निम्नानुसार होगा–

आयु–समूह (वर्ष)	आवृत्ति
20 से 25 से कम तक	5
25 ʼʼ ʼʼ ʼʼ 30	15
30 ʼʼ ʼʼ ʼʼ 35	25
35 ʼʼ ʼʼ ʼʼ 40	30
40 ʼʼ ʼʼ ʼʼ 45	15
45 ʼʼ ʼʼ ʼʼ 50	10
	कुल = 100

इस प्रतिदर्श में 20 (20 वर्ष की आयु सहित) से 25 (25 वर्ष की आयु नहीं) वर्ष के मध्य की आयु के व्यक्तियों को प्रथम वर्ग में समूहबद्ध किया जाएगा तथा आगे भी इसी प्रकार बढ़ाया जाएगा। 20 से लेकर 25 से कम तक के मध्यांतर को 'वर्ग मध्यांतर' (सीआई) कहा जाता है। वर्ग मध्यांतर का एकल प्रतिनिधित्व इस वर्ग मध्यांतर का मध्यबिंदु (अथवा औसत) होगा। मध्यबिंदु को क्लास–मार्क भी कहते हैं।

आवृत्ति वितरण का निर्माण

समूहों की संख्या एवं वर्ग मध्यांतर का आकार आवृत्ति वितरण के निर्माण के लिए स्थापित साधारण दिशा–निर्देशों में अधिक अथवा कम मनमानी प्रवृत्ति का हो सकता है।

ऐसे निर्माण के लिए निम्न दिशा–निर्देशों को ध्यान में रखा जा सकता है–

1. वर्ग स्पष्टतया परिभाषित हों तथा हर अवलोकन को किसी एक मध्यांतर में ही समाविष्ट किया जाए। इसका तात्पर्य यह हुआ कि मध्यांतरों को इस प्रकार चुना जाए कि एक स्कोर का संबंध एक से अधिक वर्ग मध्यांतरों से नहीं हो सकता, अतः वर्ग मध्यांतरों का अतिव्यापन (ओवरलैपिंग) नहीं होता।
2. वर्गों की संख्या न तो अत्यल्प हो, न अत्यधिक। सामान्यतया 6 से 15 वर्गों को पर्याप्त माना जाता है। कुछ वर्ग मध्यांतरों में वर्ग मध्यांतर चौड़ाई अधिक होगी, फलस्वरूप सटीकता घटेगी। अत्यल्प वर्ग मध्यांतरों के परिणामस्वरूप जटिलता बढ़ जाती है।

3. सभी मध्यांतर एकसमान चौड़ाई के हों। सरल संगणनाओं के लिए इसे वरीयता दी जाती है। पूर्व निर्धारित वर्गों की संख्या एवं आंकड़ों की परास (जो कि आंकड़ों में उच्चतम एवं निम्नतम मान के मध्य परिशुद्ध अंतर है) को जानकर उपयुक्त वर्ग चौड़ाई को प्राप्त किया जा सकता है। इसलिए–

$$\text{The width of the interval} = \frac{\text{Range}}{\text{Number of classes}}$$

फैक्टरी श्रमिकों की आयु के प्रकरण में जहां सबसे कम आयु का श्रमिक 20 वर्ष एवं सर्वाधिक आयु का श्रमिक 50 वर्ष का था, परास 50–20=30 हुई। यदि हम 10 समूह बनाने का निर्णय करें तो प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई होगी–

$30 / 10 = 3$

इसी प्रकार यदि हम 10 के बजाय 6 समूह बनाने का निर्णय करें तो प्रत्येक वर्ग मध्यांतर की चौड़ाई होगी–

$30 / 6 = 5$

4. खुले सिरे वाले प्रकरण जहां प्रथम समूह की निम्नतम सीमा न हो अथवा अंतिम समूह की ऊपरी सीमा न हो, तो उसे न बनाया जाए क्योंकि इससे विश्लेषण एवं व्याख्या में कठिनता आती है। वर्ग मध्यांतर के निम्नतर व उच्चतर मानों को निम्नतर व उच्चतर सीमाएं कहा जाता है।

5. संपूर्ण वितरण में मध्यांतर सतत हो। उदाहरण हेतु फैक्टरी श्रमिकों के प्रकरण में हम उन्हें 20 से 24, 25 से 29 इत्यादि वर्ष की आयु में समूहबद्ध कर सकते हैं किंतु वह अत्यधिक भ्रामक रहेगा क्योंकि उससे 24 से 25 के मध्य एवं 29 से 30 के मध्य इत्यादि वर्ष की आयु के व्यक्तियों का सटीक प्रतिनिधित्व नहीं होगा। इस अनुसार उन्हें इस प्रकार समूहबद्ध करना अधिक प्रतिनिधित्वकारी रहेगाः 20 वर्ष से 25 वर्ष से कम तक, 25 वर्ष से 30 वर्ष से कम तक। इस प्रकार 20 से लेकर 25 वर्ष से कम तक का हर व्यक्ति प्रथम वर्ग में समाहित होगा एवं सटीकता से 25 वर्ष से लेकर 30 वर्ष से कम तक का हर व्यक्ति द्वितीय वर्ग में होगा इत्यादि। सतत वितरणों में इसका विशेष महत्व है।

6. वर्ग मध्यांतरों की निम्नतर सीमाएं मध्यांतर चौड़ाई की गुणज हों। यह प्राथमिकतया निर्माण एवं व्याख्या में सरलता के प्रयोजन के लिए है। 20 वर्ष से लेकर 25 वर्ष से कम, 25 वर्ष से लेकर 30 वर्ष से कम एवं 30 वर्ष से लेकर 35 वर्ष से कम आयु के हमारे उदाहरण में हर वर्ग के लिए निम्नतर सीमा मान वर्ग चौड़ाई के गुणज हैं जो कि 5 हैं।

उदाहरणः 30 व्यक्तियों के एक प्रतिदर्श में उनकी आयु(वर्षों में) निम्नानुसार है–

20, 18, 25, 68, 23, 25, 16, 22, 29, 37,

35, 49, 42, 65, 37, 42, 63, 65, 49, 42,

53, 48, 65, 72, 69, 57, 48, 39, 58, 67.

इस आंकड़े के लिए आवृत्ति वितरण बनाइए।

टिप्पणी

हल–

निम्न पद अपनाएं–

1. उच्चतम आयु से निम्नतम आयु का व्यवकलन (घटाना) करते हुए आंकड़े की परास ज्ञात करें। निम्नतम मान 16 एवं उच्चतम मान 72 है। इसी कारण परास हुईः 72–16=56
2. मान लें कि हमारे पास 6 वर्ग हैं क्योंकि मानों की संख्या बहुत अधिक नहीं है। अब वर्ग मध्यांतर की चौड़ाई पता करने के लिए हम 6 से 56 की परास का भाग देते हैं। चौड़ाई हैः 56/6=9.33। सुविधा के लिए चौड़ाई को 10 मान लें एवं प्रथम वर्ग परिसीमा को 15 से आरंभ करें ताकि मध्यांतर 15 से 25 तक, 25 से 35 तक इत्यादि हों।
3. प्रत्येक वर्ग मध्यांतर से संबंध रखने वाली सभी आवृत्तियों को संयुक्त करें एवं इस कुल आवृत्ति को सुमेल वर्ग मध्यांतर में निम्नानुसार सौंप दें–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	सुमेल वर्ग आवृत्ति (f)
15 से लेकर 25 से कम तक	5
25 से लेकर 35 से कम तक	3
35 से लेकर 45 से कम तक	7
45 से लेकर 55 से कम तक	5
55 से लेकर 65 से कम तक	3
65 से लेकर 75 से कम तक	7
	कुल= 30

सतत सूची में पृथक (डिस्क्रीट) सूची परिणति

सांख्यिकी में बड़े कच्चे (असमूहबद्ध) आंकड़ों को समूहबद्ध आंकड़ों में जमाकर गणनाएं की जाती हैं तथा 'आवृत्ति वितरण सारणी' नामक सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुतीकरण किया जाता है। समूहबद्ध किए जाने वाले आंकड़े एक समान एवं तुलनीय होने चाहिए। आवृत्ति वितरण सारणी से वर्ग मध्यांतरों के आकार व संख्या का पता लगता है। प्रत्येक वर्ग की परास को वर्ग परिसीमाओं द्वारा परिभाषित किया जाता है।

चरों (वैरियेबल्स) से पृथक (डिस्क्रीट) सूची अथवा सतत सूची बनती है। चर को तब सतत माना जाता है जब उसे वास्तविक मानों की असीम संख्या माना जा सके तथा उसे तब पृथक (डिस्क्रीट) माना जाता है जब वह वास्तविक मानों की परिमित संख्या हो। सतत चर के उदाहरण दूरी, आयु, तापक्रम एवं ऊंचाई मापन हैं तथा पृथक (डिस्क्रीट) चर के उदाहरण प्रतियोगिता, परीक्षा, बास्केट बॉल या क्रिकेट मुकाबले इत्यादि के लिए विशेषज्ञों अथवा निर्णयकर्ता दल द्वारा दिये गए स्कोर्स हैं।

आंकड़ों की पृथक (डिस्क्रीट) सूची के लिए परास को 0–4, 5–9, 10–14 इत्यादि के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इसी प्रकार सतत सूची के लिए आंकड़ों की परास को 10–20, 20–30, 30–40 इत्यादि के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

टिप्पणी

वर्ग मध्यांतर में अंत बिंदुओं को उस चर में लिए जा सकने वाले निम्नतम व उच्चतम मानों के रूप में परिभाषित करते हैं। इस उदाहरण में यदि हम आयु के लिए आंकड़ों को जमाना चाहें तो वर्ग मध्यांतर 0 से 4, 5 से 9, 10 से 14 व 15 से क्रमशः आगे के वर्ष होंगे। पृथक (डिस्क्रीट) चर के लिए प्रथम वर्ग मध्यांतर के अंतबिंदु 0 व 4 होंगे परंतु सतत चर के लिए वे 0 एवं 4.999 होंगे। इस प्रकार पृथक (डिस्क्रीट) चरों को सतत चरों में एवं सतत चरों को पृथक (डिस्क्रीट) चरों में परिणत किया जा सकता है।

असमूहबद्ध सूची की समूहबद्ध सूची में परिणति

किसी भी सांख्यिकीय मूल्यांकन के लिए पहली बार एकत्र किए गए आंकड़ों को कच्चे अथवा असमूहबद्ध आंकड़े कहा जाता है क्योंकि ये सार्थक नहीं होते व स्पष्ट चित्र को नहीं प्रस्तुत करते। इन्हें अब सारणीबद्ध रूप में आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है जिसे विन्यास कहा जाता है।

1.6.2 संचयी आवृत्ति

आवृत्ति वितरण सारणी हमें प्रत्येक वर्ग मध्यांतर में इकाइयों की संख्या बताती है, यह वर्ग मध्यांतरों के प्रदर्शित मानों के नीचे अथवा ऊपर की इकाइयों की कुल संख्या प्रत्यक्षतः नहीं बताती। इसे संचयी आवृत्ति वितरण से निर्धारित किया जा सकता है। जब खोजकर्ता की रुचि प्रदर्शित मान के नीचे वस्तुओं की संख्या में हो, तो यह प्रदर्शित मान वर्ग मध्यांतर की ऊपरी सीमा है। इसे संचयी आवृत्ति वितरण से कम जाना जाता है। इसी प्रकार रुचि जब प्रदर्शित मान के ऊपर प्रकरणों की संख्या पता लगाने में हो तो इस मान को प्रदर्शित वर्ग मध्यांतर की निम्नतर सीमा के रूप में लिया जाता है एवं इसे संचयी आवृत्ति वितरण से अधिक जाना जाता है। इस संचयी आवृत्ति का तात्पर्य क्रमिक (कॉन्जेक्युटिव) आवृत्तियों का निम्नानुसार समाहार (सम्मिंग अप) करने से है (30 श्रमिकों की आयु का उदाहरण लें)–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	(f)	संचयी आवृत्ति(से कम)
15 से 25 तक	5	5 (25 से कम)
25 से 35 तक	3	8 (35 से कम)
35 से 45 तक	7	15 (45 से कम)
45 से 55 तक	5	20 (55 से कम)
55 से 65 तक	3	23 (65 से कम)
65 से 75 तक	7	30 (75 से कम)

इसी प्रकार संचयी आवृत्ति से अधिक निम्नांकित हैं–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	(f)	संचयी आवृत्ति(से अधिक)
15 से 25 तक	5	30 (15 से अधिक)
25 से 35 तक	3	25 (25 से अधिक)
35 से 45 तक	7	22 (35 से अधिक)
45 से 55 तक	5	15 (45 से अधिक)
55 से 65 तक	3	10 (55 से अधिक)
65 से 75 तक	7	7 (65 से अधिक)

उक्त संचयी आवृत्ति वितरण से अधिक में 30 व्यक्ति 15 वर्ष से अधिक आयु के एवं 25 व्यक्ति 25 वर्ष से अधिक आयु के हैं इत्यादि।

टिप्पणी

आपेक्षिक आवृत्ति वितरण

आवृत्ति वितरण (जैसा कि पहले चर्चा की जा चुकी है) एक सारांश सारणी है जिसमें मौलिक आंकड़ों को समूहों एवं उनकी आवृत्तियों में संघनित कर लिया जाता है किंतु यदि सर्वेक्षणकर्ता प्रत्येक समूह में प्रकरणों का अनुपात अथवा प्रतिशत जानना चाहे तो प्रकरणों की संख्या के स्थान पर वह आपेक्षिक वितरण सारणी बना सकता है। अवलोकनों की कुल संख्या से आवृत्ति वितरण के प्रत्येक वर्ग में आवृत्ति को भाग करते हुए आपेक्षिक आवृत्ति वितरण बनाया जा सकता है।

100 से प्रत्येक आपेक्षिक वितरण को गुणा करते हुए इसे प्रतिशत आवृत्ति वितरण में परिणत किया जा सकता है।

आपेक्षिक आवृत्तियां तब विशेष रूप में उपयोगी हैं जब दो अथवा अधिक आवृत्ति वितरणों की तुलना की जा रही हो जिनमें छानबीन किए जाने वाले प्रकरणों की संख्या समान न हो। प्रतिशत वितरणों से यह तुलना अधिक सार्थक हो जाती है क्योंकि प्रतिशत तो आपेक्षिक आवृत्तियां हैं तथा इसी कारण उस समष्टि अथवा प्रतिदर्श में कुल संख्या असंबद्ध हो जाती है। पहले के उदाहरण में जाने पर–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	(*f*)	(आपेक्षिक आवृत्ति)	(प्रतिशत आवृत्ति)
15 से 25 तक	5	5/30	16.7
25 से 35 तक	3	3/30	10.0
35 से 45 तक	7	7/30	23.3
45 से 55 तक	5	5/30	16.7
55 से 65 तक	3	3/30	10.0
65 से 75 तक	7	7/30	23.3
कुल =	30		100.0

संचयी आपेक्षिक आवृत्ति वितरण

यह अधिकांशतया किसी स्कोर बिंदु के ऊपर वाले अथवा किसी स्कोर बिंदु के नीचे वाले प्रकरणों के प्रतिशतों अथवा अनुपात को जानने में उपयोगी है। संचयी आपेक्षिक आवृत्ति वितरण से कम विशिष्ट वर्ग मध्यांतर की ऊपरी सीमा के नीचे के प्रकरणों का अनुपात प्रदर्शित होता है। इसी प्रकार संचयी आवृत्ति वितरण से अधिक में प्रदर्शित वर्ग मध्यांतर की निम्नतर सीमा से ऊपर के प्रकरणों का अनुपात प्रदर्शित होता है। हम पहले बनाये गए संचयी आवृत्ति वितरणों से कम व अधिक से संचयी आपेक्षिक आवृत्ति वितरणों को विकसित कर सकते हैं। पहले के उदाहरण से हम पाते हैं–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	संचयी आवृत्ति (से कम)	संचयी आपेक्षिक आवृत्ति (से कम)
25 से कम	5	5/30 or 16.7%
35 से कम	8	8/30 or 26.7%
45 से कम	15	15/30 or 50.0%
55 से कम	20	20/30 or 66.7%
65 से कम	23	23/30 or 76.7%
75 से कम	30	30/30 or 100%

उपरोक्त उदाहरण में 30 में से 5 अर्थात 16.7 प्रतिशत व्यक्ति 25 वर्ष से कम आयु के हैं। इसी प्रकार 30 में से 15 अर्थात 50 प्रतिशत व्यक्ति 45 वर्ष से कम आयु के हैं इत्यादि। इसी प्रकार हम इसी उदाहरण के लिए निम्नानुसार संचयी आपेक्षिक आवृत्ति वितरण से अधिक को बना सकते हैं–

वर्ग मध्यांतर (वर्ष)	संचयी आवृत्ति (से अधिक)	संचयी आपेक्षिक आवृत्ति (से अधिक)
15 एवं अधिक	30	30/30 अथवा 100%
25 एवं अधिक	25	25/30 अथवा 83.3%
35 एवं अधिक	22	22/30 अथवा 73.3%
45 एवं अधिक	15	15/30 अथवा 50.0%
55 एवं अधिक	10	10/30 अथवा 33.3%
65 एवं अधिक	7	7/30 अथवा 23.3%

इस उदाहरण में 100 प्रतिशत व्यक्ति 15 वर्ष से अधिक आयु के हैं, 73.3 प्रतिशत व्यक्ति 35 वर्ष से अधिक आयु के हैं इत्यादि। (इसका ध्यान रखा जाए कि संचयी आवृत्ति वितरण से कम को ऊपर से नीचे की ओर एवं संचयी आवृत्ति वितरण से अधिक को नीचे से ऊपर की ओर समाहारित किया जाए)।

स्टेम और लीफ डिस्प्ले

स्टेम और लीफ डिस्प्ले आंकड़ा वितरण के प्रस्तुतीकरण का एक दूसरा रूप है। यह हमें आंकड़ों को संघनित करने देता है किंतु आंकड़े की व्यक्तिगतता (इन्डिविजुअलिटी) बनी रहती है। यह विचार पौधों के साम्यानुमान (सादृश्य रूप) पर आधारित है। स्टेम और लीफ चित्र में आवृत्तियां अवलोकन किए गए आंकड़ों की हर संख्या में अंतिम अंक हैं। प्राथमिक अंक (एकवचन अथवा बहुवचन) किसी प्रकरण में हो सकता है कि स्टेम हो। स्टेम में समस्त मानों को स्तंभ (कॉलम) में, क्रम से सूचीबद्ध किया जाता है एवं एक ऊर्ध्वाधर रेखा को उनके पीछे खींचा जाता है तथा तदुपरांत ऊर्ध्वाधर रेखा के दायीं ओर पंक्ति में हर स्टेम के लिए समस्त मेल लीफ मानों को रिकॉर्ड कर लेते हैं।

30 श्रमिकों की आयु के हमारे उदाहरण में स्टेम और लीफ चित्र निम्नानुसार प्रदर्शित होगा–

सर्वप्रथम मौलिक आंकड़ों को हम आरोही क्रम में रखते हैं–

16, 18, 20, 22, 23, 25, 25, 29, 35, 37,
37, 39, 42, 42, 42, 48, 48, 49, 49, 53,
57, 58, 63, 65, 65, 65, 67, 68, 69, 72.

अब स्टेम और लीफ चित्र यह रहा–

स्टेम	लीव्स	(f)
1	6 8	2
2	0 2 3 5 5 9	6
3	5 7 7 9	4

टिप्पणी

4	2 2 2 8 8 9 9	7
5	3 7 8	3
6	3 5 5 5 7 8 9	7
7	2	1
		कुल = 30

आवृत्तियों का समाहार करने से यह जांच हो जाती है कि सभी आंकड़ों का समावेश कर लिया गया है अथवा नहीं।

अपनी प्रगति जांचिए

9. निम्न में से कौन–सा प्रस्तुतीकरण ग्राफिक के अंतर्गत आता है?
   (क) वृत्ति पाई चार्ट (ख) आवृत्ति आयात चित्र
   (ग) आवृत्ति बहुभूत (घ) उपरोक्त सभी
2. तुलनात्मक प्रयोजनों के लिए कौन–सा चार्ट उपयोगी होता है?
   (क) हिस्टोग्राम (ख) वृत्ति पाई चार्ट
   (ग) आवृत्ति पॉलिगौन (घ) संचयी आवृत्ति

1.7 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. (ख)
2. (घ)
3. (क)
4. (ख)
5. (घ)
6. (क)
7. (घ)
8. (ग)
9. (घ)
10. (ख)

1.8 सारांश

सांख्यिकी गणित की वह शाखा है जिसमें आंकड़ों का संग्रहण, प्रदर्शन, वर्गीकरण और उसके गुणों के आकलन का अध्ययन किया जाता है। सांख्यिकी एक गणितीय विज्ञान है, जिसमें किसी वस्तु से संबंधित आंकड़ों का संग्रह, विश्लेषण, स्पष्टीकरण और प्रस्तुति की जाती है।

सांख्यिकी के सिद्धांत और रीतियां जो वैज्ञानिक एवं तर्कपूर्ण हैं, उन समंकों या तथ्यों जिनमें निरंतर परिवर्तन होता रहता है तथा उन्हें प्रयोगात्मक विधि से नियंत्रित नहीं किया जा सकता, से व्यवहार करती है।

टिप्पणी

किसी अर्थशास्त्री के लिए सांख्यिकी एक ऐसा अपरिहार्य साधन है जो किसी आर्थिक समस्या को समझने में सहायता करता है।

जटिल तथ्यों को सरल रूप प्रदान करना सांख्यिकी का एक अन्य महत्वपूर्ण कार्य है। जटिल एवं बिखरे हुए समंकों को न तो सरलता से समझा जा सकता है और न ही कोई निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

व्यवसाय के क्षेत्र में सांख्यिकी का अत्यधिक महत्व होता है। आजकल व्यवसायी के लिए किसी भी व्यवसाय में अनुमान व संभावनाओं का महत्वपूर्ण स्थान है।

प्रतिदर्श विधि के अनुसार समग्र में से कुछ प्रतिनिधि इकाइयों को चुन लिया जाता है और केवल उन इकाइयों के संबंध में ही आंकड़े एकत्रित करके पूर्ण समग्र के लिए निष्कर्ष निकाले जाते हैं। यह विधि एक वैज्ञानिक विधि है। इस विधि से निकाले गए निष्कर्ष भी लगभग उतने ही विश्वसनीय होते हैं जितने कि संगणना विधि से प्राप्त परिणाम।

समग्र की समस्त इकाइयों के अनुसंधान से निकाले गए विभिन्न सांख्यिकीय माप समांतर माध्य, यथा प्रमाप, विचलन या सहसंबंध गुणांक प्राचल कहलाते हैं जबकि समग्र की समस्त इकाइयों के स्थान पर यादृच्छिक रूप से चुनी गई इकाइयों से निकाले गए विभिन्न सांख्यिकीय माप प्रतिदर्शज कहलाते हैं।

न्यादर्श से संपूर्ण समग्र के संबंध में निष्कर्ष के लिए यह आवश्यक है कि न्यादर्श पूर्वाग्रह से मुक्त हो। अतः समग्र में से सांख्यिकी न्यादर्श का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए, जिससे न्यादर्श पूर्णरूप से समग्र का प्रतिनिधित्व कर सके।

ऐसी प्रतिदर्श विधियां, जिनमें व्यक्तिगत विचार द्वारा प्रतिदर्श का चुनाव किया जाता है और जब चुनाव प्रायिकता के आधार पर न होकर व्यक्तिपरक होता है, तब ऐसी विधि को गैर दैव प्रतिदर्श विधि की संज्ञा दी जाती है।

प्रतिदर्श प्रणाली के अंतर्गत, जिसमें समग्र के एक छोटे अंग का अध्ययन किया जाता है, विभ्रम दैव (Chance) कारक के कारण उत्पन्न होते हैं, जिसके परिणामस्वरूप समग्र के मापों तथा न्यादर्श के मापों में असमानता दृष्टिगत होती है। इसी असमानता को प्रतिदर्श विभ्रम कहते हैं।

ऐतिहासिक स्रोत के अंतर्गत कागजात, प्रलेख, शिलालेख, खुदाई से प्राप्त वस्तुएं, भूतत्वीय स्रोत आदि को शामिल किया जाता है।

प्रश्नावली की विश्वसनीयता को जांचने के लिए एक ही प्रश्नावली उन्हीं सूचनादाताओं के पास कुछ समय के पश्चात भेजी जानी चाहिए और प्राप्त उत्तरों का मिलान पुराने उत्तरों से किया जाना चाहिए।

सांख्यिकी में अध्ययन के लिए प्राप्त सामग्री का संकलन करने के लिए अनेक विधियों और यंत्रों का उपयोग किया जाता है। अनुसूची इन्हीं विधियों और यंत्रों में से

एक है। वास्तव में, अनुसूची अनेक प्रश्नों की एक ऐसी लिखित सूची होती है, जिसे लेकर शोधकर्ता उत्तरदाता के पास जाता है और अध्ययन विषय से संबंधित विभिन्न प्रश्नों को पूछकर उनके उत्तरों का आलेखन करता है।

टिप्पणी

संकेतकों के संकेतीकरण पर आंकड़ों का विशुद्ध विश्लेषण और उनका उचित अर्थापन निर्भर करता है। अतः संकेतकों का चयन करने में विशेष सावधानियां बरतनी आवश्यक हैं।

सांख्यिकी में संकलित सामग्री का वर्गीकरण तथा संकेतन करने के उपरांत आंकड़ों का व्यवस्थित प्रस्तुतीकरण सांख्यिकीय रीतियों का एक महत्वपूर्ण अंग है और इस रीति से सांख्यकीय सारणियों की संरचना की जाती है।

हमारे द्वारा एकत्र किए गए आंकड़ों को व्याख्या हेतु अधिक सरलता से समझा जा सकता है, यदि उन्हें ग्राफिकली अथवा चित्रीय रूप में प्रस्तुत किया गया हो। आरेख व ग्रॉफ्स से आंकड़ों में विस्तारों, समूहनों, प्रचलनों एवं प्रारूपों के दृश्य संकेत मिलते हैं।

1.9 मुख्य शब्दावली

- **आंकड़े** : वैज्ञानिक मापन के संख्यात्मक परिणाम है।
- **प्रतिदर्श** : संपूर्ण समष्टि का वह भाग है जिसे अध्ययन एवं विश्लेषण हेतु लिया गया है।
- **प्रश्नावली** : यह प्रश्नों का एक लिखित समूह है जो सूचनाएं एकत्र करने के लिए बहुत सारे लोगों को प्रदान किया जाता है।
- **प्राथमिक स्रोत** : प्राथमिक स्रोत वे स्रोते होते हैं जिनसे सर्वेक्षणकर्ता स्वयं पहली बार तथ्यों या विभिन्न सूचनाओं को एकत्रित करता है।
- **प्रकाशित स्रोत** : किसी व्यक्ति, संस्था, राष्ट्र या अंतर्राष्ट्रीय संगठन द्वारा प्रकाशित किए गए संकलित समंकों को प्रकाशित स्रोत कहते हैं।

1.10 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. सांख्यिकी के अर्थ को स्पष्ट करते हुए इसकी मुख्य परिभाषा दीजिए।
2. सांख्यिकी की प्रकृति को वैज्ञानिक क्यों कहा गया है?
3. समग्र एवं प्रतिदर्श पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
4. दैव प्रतिदर्श विधियों के गुण व दोषों के बताइए।
5. प्राथमिक तथा द्वितीयक आंकड़े में क्या अंतर है?
6. गैर प्रतिदर्श विभ्रम के कारण बताइए।
7. आंकड़ों का वर्गीकरण किन उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है?

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

टिप्पणी

1. सांख्यिकी को समझाते हुए इसके कार्य, महत्व व सीमाओं की विवेचना कीजिए।
2. सांख्यिकी की प्रतिदर्श प्रणाली किन सिद्धांतों पर आधारित है?
3. प्रतिदर्श के महत्व एवं गुण व दोषों पर प्रकाश डालिए।
4. प्रतिदर्श विभ्रम तथा गैर प्रतिदर्श विभ्रम के क्या अंतर हैं?
5. प्राथमिक आंकड़े एकत्रित करने की विधियों का उल्लेख कीजिए।
6. द्वितीयक आंकड़े एकत्र करने की विधियों का वर्णन कीजिए।
7. सारणी की विशेषताएं बताइए।

1.11 सहायक पाठ्य सामग्री

1. चंदन, जे. एस., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
2. मोंगा, जी. एस., 'मैथेमेटिक्स एंड स्टैटिसटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स', नई दिल्लीः विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
3. कोठारी, सी. आर., 'क्वांटिटेटिव टेकनिक', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
4. हुडा, आर. पी., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनोमिक्स', नई दिल्ली : मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड।
5. गुप्ता, एस. सी., 'फण्डामेन्टल ऑफ स्टैटिसटिक्स', नई दिल्ली हिमालया पब्लिशिंग हाउस।
6. गुप्ता, एस. पी., 'स्टैटिसटिकल मेथड्स', नई दिल्ली : एस चान्द एण्ड सन्स।

इकाई 2 केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन

टिप्पणी

संरचना

2.0 परिचय
2.1 उद्देश्य
2.2 केंद्रीय प्रवृत्ति माप की अवधारणा
    2.2.1 माध्य, माध्यिका एवं बहुलक
    2.2.2 ज्यामितीय/गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य
2.3 अपकिरण के मापन
    2.3.1 परास
    2.3.2 माध्य विचलन
    2.3.3 प्रमाप विचलन
    2.3.4 विचलन गुणांक
    2.3.5 चतुर्थक विचलन
2.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
2.5 सारांश
2.6 मुख्य शब्दावली
2.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
2.8 सहायक पाठ्य सामग्री

2.0 परिचय

संख्यात्मक तथ्यों के मूल्यों में किसी विशेष मूल्य के आस–पास संकेंद्रित होने की प्रवृत्ति को केंद्रीय प्रवृत्ति कहा जाता है। इस बिंदु को जिसके आस–पास अन्य मूल्यों का जमाव होने की प्रवृत्ति पायी जाती है, केंद्रीय बिंदु कहा जाता है। यदि यह बिंदु श्रेणी के मध्य में स्थिति हो तो इसे केंद्रीय प्रवृत्ति की माप कहा जाता है।

सांख्यिकी एवं गणित में आंकड़ों के समुच्चय का औसत अथवा आंकड़ों के समुच्चय की केंद्रीय प्रवृत्ति आंकड़ों के समुच्चय के 'मध्य' मान का मापन है।

विभिन्न विवरणात्मक सांख्यिकियां होती हैं, जिन्हें आंकड़ों की केंद्रीय प्रवृत्ति के मापन के रूप में चुना जा सकता है। इनके अंतर्गत अंकगणितीय माध्य, माध्यिका व मोड सम्मिलित हैं। माध्य एकल मान है, जिसका अभिप्राय मानों की सूची को प्रतीकबद्ध करने से है। यदि सूची में सभी संख्याएं समान हों तो इस अंक का प्रयोग किया जाता है। यदि संख्याएं समान न हों तो विशिष्ट प्रकार से समुच्चय से मानों को जोड़कर औसत की गणना की जाती है एवं एकल संख्या की संगणना (कंप्यूटिंग) समुच्चय के माध्य के रूप में कर ली जाती है।

इसके लिए हम अंकगणितीय माध्य, माध्यिका एवं बहुलक जैसे सामान्यतः प्रयोग किए जाने वाले मापकों का प्रयोग करते हैं। ये मान न केवल संपूर्ण आंकड़ों का समग्र चित्र प्रस्तुत करने में अति उपयोगी हैं अपितु आंकड़ों के दो अथवा अधिक समूहों/समुच्चयों में तुलनाएं करने के प्रयोजन से भी अति उपयोगी हैं।

टिप्पणी

एक उदाहरण में "दिल्ली में जून का माह कितना गर्म रहा?" जैसे प्रश्नों के उत्तरों में साधारणतया उस माह के लिए औसत की एकल संख्या बता दी जाती है। इसी प्रकार मान लें कि हमें तुलना करने के लिए 10–10 वर्ष के बालकों व बालिकाओं की लंबाई का पता लगाना चाह रहे हैं तो उस आयु के बालकों की औसत लंबाई व उसी आयु की बालिकाओं की औसत लंबाई लेते हैं, हम अंतरों में तुलना करके उन्हें रिकॉर्ड कर सकते हैं।

समंक श्रेणी के बारे में यथेष्ठ ज्ञान प्राप्त करने के लिए न केवल उसका माध्य जानना आवश्यक है बल्कि व्यक्तिगत मानों का उस माध्य से औसत अंतर और श्रेणी रचना तथा स्वरूप आदि के बारे में पूरी जानकारी प्राप्त करना भी आवश्यक है अर्थात यह जानना आवश्यक है कि श्रेणी का प्रत्येक मद, माध्यम से कितनी दूरी पर या कितना बड़ा या छोटा है। विचलन की दूरी, फैलाव, बिखराव या विस्तार को विचलनशीलता कहते हैं।

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों का सांख्यिकी में महत्वपूर्ण स्थान है। इनकी सहायता से कई सांख्यिकीय क्रियाएं एवं गणनाएं संपन्न की जाती हैं।

इस इकाई में केंद्रीय प्रवृत्ति की माप तथा अपकिरण के विभिन्न मापनों का विश्लेषण किया गया है।

2.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- केंद्रीय प्रवृत्ति माप की अवधारणा को जान पाएंगे;
- परास, माध्य, विचलन तथा प्रमाप विचलन को समझ पाएंगे;
- विचलन गुणांक तथा चतुर्थक विचलन से परिचित हो पाएंगे।

2.2 केंद्रीय प्रवृत्ति माप की अवधारणा

चूंकि मानव मस्तिष्क जटिल समकों को पूर्णतया समझने और उनकी तुलना करने में सर्वथा समर्थ नहीं है इसलिए यह जरूरी हो जाता कि विविध तथ्यों, जिनकी तुलना की जानी है, उन्हें सारांश रूप में एक ही अंक द्वारा व्यक्त किया जा सके। वास्तव में ऐसे मूल्य या अंक ही केंद्रीय प्रवृत्ति के माप या सांख्यिकीय माध्य कहलाते हैं।

माध्यों द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समकों की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है। इससे उन समकों को समझना व याद रखना बहुत सुगम हो जाता है। उदाहरणार्थ, 100 करोड़ भारतवासियों की अलग–अलग आयु को याद रखना असंभव है, लेकिन औसत आय सुगमता से याद रखी जा सकती है। अतः माध्य, समकों का विहंगम दृश्य (bird's eye view) प्रस्तुत करते हैं। मोरोने ने ठीक ही कहा है, ''माध्य का उद्देश्य, व्यक्तिगत मूल्यों के समूह का सरल और संक्षिप्त रूप से प्रतिनिधित्व करना है, जिससे मस्तिष्क समूह की इकाइयों के सामान्य आकार को शीघ्रता से ग्रहण कर सके।''

केंद्रीय प्रवृत्ति की विशेषताएं

केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों या माध्यों की कई विशेषताएं होती हैं, जो इस प्रकार हैं–

1. **तुलना में सहायक होना**– माध्य, समकों की समस्त राशि को संक्षिप्त व सरल करके तुलना योग्य बनाते हैं। समकों की तुलना से बहुत महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, विभिन्न देशों की औसत आय की तुलना से ज्ञात किया जा सकता है कि कौन–सा देश सबसे अधिक समृद्धशाली है तथा कौन–सा सबसे कम।
2. **उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में सहायक होना**– माध्य, उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में बहुत अधिक सहायक होते हैं। उदाहरणार्थ, यदि किसी कॉलेज में बी.कॉम. के प्रथम वर्ष की चार कक्षाओं 'क', 'ख', 'ग' एवं 'घ' के विद्यार्थियों के किसी विषय (subject) में औसत नंबर इस प्रकार हैं– 60,58,40 एवं 55 तो इससे यह निष्कर्ष निकलेगा कि कक्षा 'ग' के विद्यार्थी इस विषय में बहुत कमजोर हैं और उनकी इस कमी को दूर करने के लिए विशेष प्रबंध करना आवश्यक है।
3. **सांख्यिकीय विश्लेषण का आधार**– सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक क्रियाएं माध्यों पर आधारित हैं।
4. **न्यादर्शों की विभिन्नता का कम से कम प्रभाव**– यदि एक ही समग्र से उचित रीति द्वारा विभिन्न नमूना लेकर माध्य निकाले जाएं तो उन माध्यों में बहुत अधिक अंतर नहीं आता है।
5. **बीजगणितीय विवेचन संभव**– एक अच्छे माध्य का बीजगणितीय विवेचन संभव है, जैसे–यदि दो कारखानों के मजदूरों की संख्या तथा औसत आय से संबंधित समक दिए गए हों तो दोनों कारखानों के मजदूरों की आय का सामूहिक माध्य निकालना संभव है।

अंकगणितीय माध्य तो केंद्रीय स्थान–निर्धारण का सर्वाधिक प्रयोग किया जाने वाला मापक है, मोड व माध्यिका कुछ प्रकारों के आंकड़ों हेतु एवं कुछ स्थितियों में सबसे उपयुक्त मापक होते हैं। वैसे केंद्रीय प्रवृत्ति के हर मापक में निम्न शर्तें पूर्ण होनी ही चाहिए–

1. यह गणना करने एवं समझने में सरल हो।
2. इसे दृढ़ता से परिभाषित किया गया हो। इसकी एक ही व्याख्या हो ताकि खोजकर्ता के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह अथवा पक्षपात से इसकी उपयोगिता अप्रभावित रहे।
3. यह आंकड़ों का प्रतिनिधि हो। यदि प्रतिदर्श से इसकी गणना की जाए तो प्रतिदर्श इतना यादृच्छिक होना चाहिए कि जिससे वह समष्टि का प्रतिनिधित्व सटीकता से करे।
4. इसमें प्रतिदर्शन स्थिरता हो। यह प्रतिदर्शन के उतार–चढ़ावों से प्रभावित न हो अर्थात यदि हम यादृच्छिक स्तर पर महाविद्यालयी शिक्षार्थियों के 10 भिन्न–भिन्न समूहों को लेते हैं एवं प्रत्येक समूह के औसत की गणना करते हैं तो हमें इनमें से प्रत्येक समूह से लगभग समान मान पाने की अपेक्षा रहेगी।

टिप्पणी

5. यह चरम मानों से बहुत प्रभावित न हो। यदि आंकड़ों में कुछ बहुत छोटी या बहुत बड़ी बातें/वस्तुएं प्रस्तुत हों तो वे औसत के मान को किसी एक ओर सरका कर अनुचित रूप से प्रभावित कर देंगी। अतः औसत समूची शृंखला का वास्तविक प्रारूप नहीं होगा। इसी कारण चुना गया औसत ऐसा होना चाहिए कि जिससे उन चरम मानों द्वारा अनुचित प्रभाव न पड़े।

2.2.1 माध्य, माध्यिका एवं बहुलक

माध्य, माध्यिका एवं बहुलक को निम्न प्रकार समझाया गया है–

(क) माध्य (Mean)

माध्य का सांख्यिकी विज्ञान में बहुत महत्वपूर्ण स्थान है। सांख्यिकीय विश्लेषण की अन्य बहुत–सी रीतियां माध्यों पर आधारित हैं। यही कारण है कि डॉ. बाउले ने सांख्यिकीय को 'माध्यों का विज्ञान' कहा है। माध्यों की सहायता से समक श्रेणी के सभी मूल्यों का सार प्रकट किया जाता है। सांख्यिकी की व्यक्तिगत इकाइयों का अलग–अलग कोई महत्व नहीं होता। माध्यों द्वारा सभी इकाइयों में सामूहिक रूप से पाये जाने वाले मुख्य लक्ष्य स्पष्ट हो जाते हैं तथा उनकी तुलना भी सरल हो जाती है।

माध्य, पूरे समूह का प्रतिनिधित्व करता है। ऐसे माध्य में निम्न गुण होने चाहिए ताकि समकों का ठीक रूप से प्रतिनिधित्व हो सके–

(1) **समझने में सरल** (Easy to understand)– सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग समकों को संक्षिप्त तथा सरल बनाने के लिए किया जाता है। अतः माध्य ऐसा होना चाहिए, जो सुगमता से समझा जा सके, अन्यथा इसका प्रयोग बहुत ही सीमित होगा।

(2) **निर्धारण में सुगमता** (Easy to compute)– माध्य की गणन–क्रिया सरल होनी चाहिए ताकि इसका प्रयोग व्यापक रूप से हो सके। यद्यपि माध्य का निर्धारण यथासंभव सरल होना चाहिए तथापि विशेष परिस्थितियों में परिणामों की शुद्धता के लिए अधिक कठिन माध्यों का प्रयोग भी किया जा सकता है।

(3) **श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित** (Based on all the items of the series)– माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए ताकि एक या अधिक मूल्यों में परिवर्तन होने से माध्य में भी परिवर्तन हो सके। यदि माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं है तो वह पूरे समूह का ठीक प्रकार से प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता।

(4) **न्यूनतम तथा अधिकतम मूल्यों पर अनुचित प्रभाव से बचाव** (Should not be unduly affected by extreme items)– यद्यपि माध्य सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए तथापि किसी विशेष मूल्य का माध्य पर अधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए अन्यथा माध्य, समकों का सही प्रतिरूप व्यक्त नहीं करेगा।

(5) **स्पष्ट व स्थिर** (Rigidly defined)– माध्य की परिभाषा स्पष्ट शब्दों में व्यक्त होनी चाहिए ताकि जो भी व्यक्ति दिए हुए समकों से माध्य निकाले, वह एक ही निष्कर्ष पर पहुंचे। इसलिए यह आवश्यक है कि माध्य, गणितीय सूत्र के रूप में दिया जाए। यदि माध्य के परिगणन में व्यक्तिगत प्रवृत्तियों का प्रभाव पड़ा तो फल भ्रामक तथा अशुद्ध होंगे।

समांतर माध्य— समांतर माध्य अथवा माध्यक, सबसे अधिक प्रचलित माध्य है। इसका प्रयोग सामान्यतः प्रत्येक व्यक्ति द्वारा दैनिक जीवन में किया जाता है। समांतर माध्य वह मूल्य है, जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग में, उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। माध्य या माध्यक निकालने की दो रीतियां हैं—प्रत्यक्ष रीति तथा लघु रीति। आगे हम इन दोनों रीतियों का तीनों प्रकार की श्रेणियों में अलग—अलग अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य का परिगणन

प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम श्रेणी के सभी मूल्यों का योग किया जाता है।

(ii) फिर इस योग को पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है। यह स्मरण रहे कि इस विधि का प्रयोग तभी करना चाहिए, जब चर मूल्यों की संख्या कम हो तथा वे दशमलव में न हों।

सूत्र : $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . x_n}{N} = \frac{\sum X}{N}$

$\overline{x}$ = समांतर माध्य

Σx = पद—मूल्यों का जोड़

N = पदों की संख्या

उदाहरण— नीचे 12 परिवारों की मासिक आय का विवरण दिया गया है। समांतर माध्य की गणना कीजिए—

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
आय	280	180	96	98	104	75	80	94	100	75	600	200

हल— समांतर माध्य का परिगणन **प्रत्यक्ष रीति** द्वारा

परिवारों की संख्या	परिवारों की आय
1	280
2	180
3	96
4	98
5	104
6	75
7	80
8	94
9	100
10	75
11	600
12	200
N=12	**Σx = 1982**

$\Sigma x = 1982, N = 12$

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{N} \text{ or } \frac{1982}{12} = 165.167 \therefore \overline{X} = 165.17$$

टिप्पणी

लघु विधि

इसकी प्रक्रिया निम्न है–

1. सर्वप्रथम दिए हुए मूल्यों में से किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य मान लिया जाता है। वैसे कल्पित माध्य श्रेणी से बाहर का भी कोई मूल्य माना जा सकता है, किंतु सुविधा की दृष्टि से कल्पित माध्य, सदैव श्रेणी के मूल्यों में से ही कोई एक होना चाहिए तथा वह न सबसे छोटा और न सबसे बड़ा, बल्कि मध्य–मूल्य का होना चाहिए।
2. श्रेणी के प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) में से कल्पित–माध्य (A) को घटाकर, विचलन प्राप्त किए जाते हैं, अर्थात $dx=x–A$ ।
3. विचलनों का योग प्राप्त कर लिया जाता है– Σdx या $\Sigma(X–A)$
4. अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$\bar{x}$ = समांतर माध्य

A = कल्पित माध्य

Σdx = विचलनों का योग

N = पदों की कुल संख्या।

उदाहरण– निम्न समकों का समांतर माध्य ज्ञान कीजिए–

क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
पद–मूल्य	96	180	98	75	270	80	102	100	94	75	200	610

हल– समांतर माध्य का परिगणन लघु विधि द्वारा

क्रमांक	**कल्पित विचलन माध्य 200 से**	
1	(96-200)	-104
2	(180-200)	-20
3	(98-200)	-102
4	(75-200)	-125
5	(270-200)	+70
6	(80-200)	-120
7	(102-200)	-98
8	(100-200)	-100
9	(94-200)	-106
10	(75-200)	-125
11	(200-200)	0
12	(610-200)	+410
N=12	$\sum dx = -900 + 480 = -420$	

$$\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

$$= 200 + \frac{-420}{12}$$

$$= 200 - 35 = 165$$

टिप्पणी

खंडित श्रेणी में समांतर माध्य की गणना

1. प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक मूल्य (x) का आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है अर्थात ($x \times f$)

(ii) फिर इन गुणज के योग (Σfx) को कुल इकाइयों की संख्या से भाग दे दिया जाता है (आवृत्ति श्रेणी में आवृत्तियों का जोड़ ही कुल इकाइयों की संख्या होती है, चूंकि $N = \Sigma f$)

(iii) प्रत्यक्ष रीति के अनुसार, सूत्र इस प्रकार है–

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} \text{ or } \bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} (\therefore N = \sum f)$$

2. लघु विधि

(i) सर्वप्रथम दिए हुए मूल्यों में किसी एक को कल्पित माध्य मान लिया जाता है।

(ii) फिर प्रत्येक पद में से कल्पित माध्य घटाकर विचलन प्राप्त कर लिए जाते हैं अर्थात $dx = (x - A)$

(iii) प्रत्येक विचलन *(dx)* को उसकी आवृत्ति *(f)* से गुणा करके, उन गुणज का जोड़ *(Σfdx)* निकाल लिया जाता है।

(iv) अंत में, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} \text{ or } \bar{x} = A + \frac{\sum fdx}{\sum f}$$

यहां A = कल्पित माध्य, Σfdx = विचलनों व आवृत्तियों का जोड़

N = आवृत्तियों का कुल जोड़

उदाहरण– निम्नलिखित खंडित श्रेणी में (i) 15 को शून्य (अर्थात कल्पित माध्य) मानकर समांतर माध्य निकालें तथा (ii) प्रत्यक्ष रीति द्वारा परिणाम की जांच कीजिए।

टिप्पणी

आकार	आवृत्ति	लघु विधि		प्रत्यक्ष विधि
		A = 15 से विचलन	गुणनफल	
(X)	(f)	(dx)	(fdx)	(fx)
20	1	+5	+5	20
19	2	+4	+8	38
18	4	+3	+12	72
17	8	+2	+16	136
16	11	+1	+11	176
15	10	0	0	150
14	7	-1	-7	98
13	4	-2	-8	52
12	2	-3	-6	24
11	1	-4	-4	11

हल

लघु विधि

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

$$= 15 + 0.54 = 15.4$$

प्रत्यक्ष विधि

$$Mean \text{ or } \overline{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{777}{50} = 15.54$$

अखंडित श्रेणी में माध्य का परिकलन

अखंडित श्रेणी में समांतर माध्य ठीक उसी प्रकार निर्धारित किया जाता है, जिस प्रकार खंडित श्रेणी में। सूत्र भी दोनों में एक समान है। परंतु अंतर केवल इतना है कि अखंडित श्रेणी में पहले वर्गों के मध्य मूल्य निकाले जाते हैं जिन्हें *'X'* कहते हैं। इस प्रकार मध्य मूल्य लेने पर अखंडित श्रेणी, खंडित श्रेणी का रूप ले लेती है।

प्रत्यक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम, वर्गों के मध्य–मूल्य ज्ञात किए जाते हैं।

(ii) फिर, मध्य–मूल्यों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का जोड़ (Σfx) प्राप्त कर लिया जाता है।

(iii) अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

उदाहरण– निम्न सारणी से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

वर्ग :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
आवृत्ति :	12	18	27	20	17	6

हल– समांतर माध्य का परिकलन

आकार	मध्यमान	आवृत्ति	आवृत्ति A = 25 से विचलन	लघु विधि गुणनफल	प्रत्यक्ष विधि
(x)	$(M\text{-}V.)$	(f)	(dx)	(fdx)	(fx)
0-10	5	12	-20	-240	60
10-20	15	18	-10	-180	270
20-30	25	27	0	0	675
30-40	35	20	+10	+200	700
40-50	45	17	+20	+340	765
50-60	55	6	+30	+180	330
Total		N=100		$\Sigma fdx = 300$	$\Sigma fx = 2800$

टिप्पणी

प्रत्यक्ष विधि

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

$$= 25 + \frac{300}{100} = 25 + 3$$

$$\therefore \overline{x} = 25 + 3 = 28$$

लघु विधि

$$\overline{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{2800}{100}$$

$$\therefore \overline{x} = 28$$

यदि वर्ग विस्तार समान है तो लघु विधि श्रेष्ठ है और यदि वर्गों का विस्तार असमान है तो फिर प्रत्यक्ष रीति उपयुक्त होगी।

उदाहरण– एक फर्म के 30 कर्मचारियों का मासिक वेतन (रु. में) निम्न प्रकार से है–

139	123	99	133	132	100	80	148	108
116	77	123	148	114	95	144	134	142
62	106	69	126	104	103	140	118	88
85	63	129						

निम्न वेतन वर्ग के कर्मचारियों को फर्म ने क्रमशः 10, 15, 25, 30 और 35 रु. का अधिलाभांश प्रदान किया। 60 रु. से अधिक किंतु 75 रु. से अधिक नहीं, 75 रु. से अधिक किंतु 90 से अधिक नहीं और इसी प्रकार 136–150 तक प्रति कर्मचारी औसत अधिलाभांश ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्न में दिए हुए वेतन–वर्गों में सर्वप्रथम कर्मचारियों को वर्गीकृत करके आवृत्तियां निकाली जाएंगी। तत्पश्चात प्रत्यक्ष विधि द्वारा कुल तथा औसत बोनस ज्ञात कर लिया जाएगा।

टिप्पणी

कुल व औसत बोनस का परिकलन

वर्ग	टेलीबार विधि द्वारा आवृत्ति का प्रदर्शन		कर्मचारियों की संख्या	बोनस	कुल बोनस
			f	(x)	(xf)
60–75	|||	3	3	10	30
76–90	||||	4	4	15	60
91–105	~~||||~~	5	5	20	100
106–120	~~||||~~	5	5	25	125
121–135	~~||||~~ ||	7	7	30	210
136–150	~~||||~~ |	6	6	35	210
Total		**N = 30**	**$\Sigma f = 30$**		**$\Sigma fx = 735$**

$$\text{Average Bonus} = \frac{Total\ Bonus}{No.of\ Employees} = \frac{735}{30} = 24.5$$

माध्य संबंधी कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

(1) **पद विचलन विधि**– लघु रीति को और भी सरल बनाने के लिए पद–विचलन रीति का प्रयोग किया जा सकता है। बशर्ते कि श्रेणी में वर्ग–विस्तार समान हो। लघु रीति और इस रीति में अंतर सिर्फ इतना है कि लघु रीति में जो विचलन किए जाते हैं, उन्हें इस रीति में किसी समापवर्त्तक से भाग देकर संक्षिप्त बना लिया जाता है। इन्हें ही पद विचलन $(d'x)$ कहते हैं। सामान्यतः वर्ग–विस्तार को ही समापवर्त्तक माना जाता है फिर पद–विचलनों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके $(\Sigma fd'x)$ ज्ञात कर लेते हैं। अंत में, समायोजन की दृष्टि $\Sigma fd'x$ में समापवर्त्तक (i) से गुणा कर दी जाती है। इस विधि में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i$$

$\Sigma fd'x$ = पद–विचलनों तथा आवृत्तियों के गुणज का जोड़

i = समापवर्त्तक वर्ग–विस्तार

(2) **संचयी आवृत्ति वितरण**– कभी–कभी वर्गांतरों के संचयी वितरण को सामान्य वितरण में बदल लेना चाहिए।

उदाहरण– निम्न सारणी से समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

प्राप्तांक :	10	20	30	40	50	60	70	80
संचयी आवृत्ति :	25	40	60	75	95	125	190	240

हल– सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति वितरण को सामान्य आवृत्ति वितरण में बदला जाएगा।

टिप्पणी

प्राप्तांक x	मध्य बिन्दु M.P.	आवृत्ति f	पद–विचलन $d'x = \frac{x-45}{10}$	गुणनफल $fd'x$
0-10	5	25	-4	-100
10-20	15	15	-3	-45
20-30	25	20	-2	-40
30-40	35	15	-1	-15
40-50	45	20	0	0
50-60	55	30	+1	+30
60-70	65	65	+2	+130
70-80	75	50	+3	+150
		N=240		$\Sigma fdx = 110$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i = 45 + \frac{110}{240} \times 10$$

$$= 45 + 4.58$$

$$= 49.58$$

(3) **खुले सिरे वाले वर्गांतर**– जब वर्गांतर खुले सिरे वाले दिए हुए हों तो सिद्धांत रूप में ऐसे प्रश्नों या वितरणों में समांतर माध्य का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए बल्कि उनके स्थान पर बहुलक या माध्यक का प्रयोग करना चाहिए। परंतु यदि उक्त प्रश्न का समांतर माध्य निकालने के लिए कहा गया है तब ऐसी दशा में निम्न दो स्थितियों को ध्यान में रखना होगा–

(क) **वर्गों का वर्ग–विस्तार समान हो**– ऐसी स्थिति में पहले वर्ग की 'ऊपरी सीमा' में और अंतिम वर्ग की 'निचली सीमा' में, उनके इष्टतम वर्गों के वर्ग–विस्तार को क्रमशः घटाकर तथा जोड़कर अज्ञात सीमाओं का निध ार्रण कर लेना चाहिए।

(ख) **जब वर्गों का वर्ग विस्तार असमान हो**–नीचे दिए गए उदाहरण में वर्ग विस्तार असमान है– दूसरे वर्ग का विस्तार 20 है, तीसरे का 30 और चौथे का 40 है अर्थात वर्ग–विस्तार क्रमशः 10 में बढ़ रहा है, अतः ऐसी स्थिति में प्रथम वर्ग की निचली सीमा शून्य (10–10) होगी और अंतिम वर्ग की ऊपरी सीमा 150 (100 + 50) होगी अर्थात प्रथम वर्ग 0–10 तथा अंतिम वर्ग 100–150 होगा।

अंक	10–10	10–30	30–60	60–100	100 से अधिक
विद्यार्थियों की संख्या	5	9	16	7	30

(4) **समावेशी वर्गांतर**– जब वर्गांतर समावेशी आधार पर दिए गए हों तो समांतर माध्य निकालने के लिए उन्हें अपवर्जी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होती क्योंकि मध्य–मूल्य वही रहते हैं, भले ही वर्गों का समायोजन किया जाए या न किया जाए।

(5) **असमान वर्गांतर**– जब वर्गांतर असमान हों तो उन्हें समान बनाने के लिए आवृत्तियों के समायोजन की कोई आवश्यकता नहीं होती है बल्कि ऐसे प्रश्न को उनके मूल रूप में ही हल कर देना चाहिए।

टिप्पणी

उदाहरण– निम्न समकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	18–21	22–25	26–35	36–45	46–55
व्यक्तियों की सं.	8	32	54	36	20

हल– समांतर माध्य का परिकलन

आयु	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	$dx = x - 30.5$	fdx
18–21	19.5	8	–11	–88
22–25	23.5	32	–7	–224
26–35	30.5	54	0	0
36–45	40.5	36	+10	+360
46–55	50.5	20	+20	+400
		$f = 150$		$\Sigma fdx = 448$

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fdx}{N} = \frac{448}{150}$$

$$= 30.5 + 2.99 = 33.49$$

अतः माध्यक आयु 33.49 वर्ष।

(6) **ग्राम–चार्लियर** (Gram-Charlier) **विधि द्वारा शुद्धता की जांच**– लघु विधि या पद–विचलन विधि द्वारा समांतर माध्य निकालते समय गणना क्रिया की जांच करने के लिए 'ग्राम–चार्लियर' विधि का प्रयोग किया जाता है।

विधि

(i) सर्वप्रथम प्रत्येक विचलन या पद विचलन में 1 जोड़कर $(dx + 1)$ अथवा $(d'x + 1)$ ज्ञात कर लिया जाता है।

(ii) $(dx + 1)$ या $(d'x + 1)$ में उनकी आवृत्तियों को गुणा करके गुणनफलों का योग $\Sigma[f(dx + 1)]$ या $\Sigma[f(dx' + 1)]$ ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) तत्पश्चात निम्न समीकरणों को प्रयोग किया जाता है–

$\Sigma fdx = \Sigma[f(dx + 1)] - \Sigma f \rightarrow$ लघु विधि प्रयोग करने पर

$\Sigma fd'x = \Sigma[f(d'x + 1)] - \Sigma f \rightarrow$ पद–विचलन विधि प्रयोग करने पर

(iv) यदि उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं तो समझ लेना चाहिए कि गणन–क्रिया शुद्ध है, अन्यथा नहीं।

टिप्पणी

(7) **अज्ञात मूल्य या आवृत्ति का निर्धारण**– समांतर माध्य की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि यदि किसी श्रेणी के इन तीनों मानों $\overline{x}$ N और $\Sigma\,\overline{x}$ में से कोई दो मान ज्ञात हों तो तीसरा मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है–

$$\overline{x} - \frac{\sum x}{N} \text{ or } \frac{\sum fx}{x}$$

(8) **अशुद्ध मूल्यों को शुद्ध बनाना**– कभी–कभी समांतर माध्य निकालते समय भूल से सही पदों के स्थान पर गलत पद लिख लिए जाते हैं, जिससे समांतर माध्य भी गलत हो जाता है। ऐसी स्थिति में सही समांतर माध्य निकालने के लिए अशुद्ध Σx में से अशुद्ध मूल्य घटाकर उसमें शुद्ध मूल्य जोड़ दिया जाता है फिर, शुद्ध Σx को पदों की संख्या *(N)* से भाग देने पर सही समांतर माध्य प्राप्त हो जाता है।

समांतर माध्य के गुण

1. **स्थिरता**– इस माध्य पर प्रतिचयन के उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है, जैसे–यदि किसी एक ही समग्र में से सदैव आधार पर कई बार प्रतिदर्श लिए जाएं तो प्रतिदर्श–माध्यों में अधिक अंतर नहीं होगा। यह गुण अन्य किसी माध य में नहीं पाया जाता है।
2. **सरलता**– समांतर माध्य एक सामान्य बुद्धि वाले व्यक्ति के लिए गणना करने व समझने की दृष्टि से अत्यंत सरल है।
3. **निश्चितता**– समांतर माध्य में निश्चितता का गुण होता है और यह बहुलक व माध्यिका की भांति अंतरगणन व अनुमान पर आधारित नहीं होता।
4. **सही प्रतिनिधित्व**– बहुलक तथा माध्यिका के विपरीत समांतर माध्य श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है, जिसके कारण यह श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व करता है।
5. **बीजगणितीय विवेचन**– समांतर माध्य के अपने कुछ बीजगणितीय गुण हैं, जिस कारण इस माध्य का अन्य सांख्यिकीय रीतियों में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है।

समांतर माध्य में एक आदर्श–माध्य के सभी गुण पाए जाते हैं। फलतः यह सर्वाधिक लोकप्रिय माध्य है।

समांतर माध्य के दोष– एक आदर्श माध्य होने के बावजूद समांतर माध्य निम्न दोषों से ग्रसित है–

1. **अप्रतिनिधित्व**– समांतर माध्य किसी श्रेणी का एक ऐसा मूल्य हो सकता है, जो उस श्रेणी में न होकर कोई बाहर का मूल्य हो।
2. **चरम मूल्यों का प्रभाव**– इस माध्य का सबसे बड़ा दोष चरम मूल्यों का प्रभाव है। अत्यधिक बड़े या छोटे मूल्यों को यह अधिक महत्व देता है। उदाहरणार्थ, चार कर्मचारियों के वेतन क्रमशः 1000, 250, 210, 180 रु. का समांतर माध्य 410 हुआ। स्पष्ट है कि एक अकेले पद–मूल्य (1000) ने औसत को काफी हद तक बढ़ा दिया है।

टिप्पणी

3. **अवास्तविक माध्य**– समांतर माध्य, कभी–कभी पूर्णांक में न होकर दशमलव या भिन्न के रूप में आता है जोकि इसे अवास्तविक बना देता है, जैसे–चार माताओं द्वारा क्रमशः 3,2,1 व 4 बच्चों को जन्म दिया गया, जिसका प्रति माता औसत 2.5 आया। निःसंदेह यह एक हास्यप्रद निष्कर्ष है।
4. **अनुपयुक्तता**– समांतर माध्य का एक अन्य दोष यह है कि इसके अनुपात, दर, प्रतिशत आदि की गणना करना संभव नहीं हो पाता है।
5. **भ्रमात्मक निष्कर्ष**– समांतर माध्य कभी–कभी भ्रमात्मक निष्कर्ष भी देता है। उदाहरणार्थ, जूट उद्योग की दो फर्मों का पिछले तीन वर्षों में लाभ इस प्रकार रहा है–

   A : 5000 रु. + 7000 रु. + 9000 रु. = औसत 7000 रु.

   B : 12000 रु. + 6000 रु. + 3000 रु. = औसत 7000 रु.

   इनके समान स्तर का प्रतीक है। परंतु वास्तविक यह है कि A फर्म उन्नति की ओर अग्रसर है, जबकि B फर्म दिवालियेपन की ओर बढ़ रही है।
6. **गणना संबंधी जटिलता**– स्थिति संबंधी माध्यों, जैसे–भूयिष्ठक व माध्यिका की अपेक्षा समांतर माध्य की गणना क्रिया अधिक जटिल है। प्रथम, यह निरीक्षण द्वारा नहीं निकाला जा सकता। दूसरा, यदि श्रेणी का कोई एक मूल्य भी अज्ञात है तो समांतर माध्य नहीं निकल पाएगा क्योंकि यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है, तीसरा गुणात्मक समकों के लिए समांतर माध्य का प्रयोग नहीं किया जा सकता। चौथा, माध्यिका व भूयिष्ठक की भांति इस माध य का निर्धारण बिंदु–रेखीय रीति द्वारा भी नहीं किया जा सकता।

भारित समांतर माध्य

सरल समांतर माध्य, श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व देता है, जबकि वास्तविकता यह है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अपना अलग–अलग महत्व होता है। कुछ मूल्य अधिक महत्वपूर्ण होते हैं तो कुछ कम। जैसे, एक उपभोक्ता अपना व्यय सभी वस्तुओं पर समान रूप से नहीं करता बल्कि उनके सापेक्षिक महत्व के अनुपात में करता है। इसी प्रकार, एक कारखाने में कर्मचारियों की विभिन्न वेतन वर्गों में संख्या समान न होकर अलग–अलग होती है। अतः ऐसी श्रेणियों में समांतर माध्य निकालते समय इकाइयों के सापेक्षिक महत्व को ध्यान में रखना अत्यावश्यक होता है। इस दृष्टि से निकाले गए माध्य को ही 'भारित समांतर माध्य' कहते हैं।

वास्तविक तथा अनुमानित भार– वास्तविक भार वे होते हैं, जो स्पष्टतः दिए गए हों, जबकि अनुमानित भार स्वयं के मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को देखते हुए मानने पड़ते हैं। भारित समांतर माध्य की गणना विधि की निम्न दो विधियां हैं–

1. प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) - (i) सबसे पहले पद–मूल्यों (X) और भारों (W) को गुणा किया जाता है और इन गुणनफलों का योग (ΣXW) कर लिया जाता है। (ii) फिर, निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{X}W - \frac{\sum WX}{\sum W}$$

$\overline{XW}$ = भारित समांतर माध्य

ΣXW = मूल्यों व भारों के गुणज का योग

ΣW = भारों का योग

2. लघु रीति (Short-Cut Method) - (i) पहले दिए हुए मूल्यों में से किसी एक को कल्पित माध्य *(AW)* मान लिया जाता है और उससे विभिन्न मूल्यों के विचलन *(dx)* लिए जाते हैं। (ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\overline{XW} = AW + \frac{\sum Wdx}{\sum W}$$

AW =कल्पित भारित माध्य

ΣAdx = विचलनों व भारों के गुणज का योग

उदाहरण– किसी कारखाने के कर्मचारियों की संख्या तथा मासिक वेतन नीचे दिया गया है। प्रत्यक्ष तथा लघु–रीति द्वारा वेतन का भारित समांतर माध्य ज्ञात कीजिए–

	मासिक वेतन (रू0)	व्यक्तियों की संख्या
मैनेजर	1000	1
कार्यालय स्टॉफ	200	8
कुशल श्रम	250	20
अकुशल श्रम	140	11

हल–

भारित समांतर माध्य की गणना

कर्मचारी–वर्ग	वेतन (रू.)	कर्मचारियों की संख्या	प्रत्यक्ष रीति	लघु–रीति	
(Group)	**(X)**	**(W)**	**$(X \times W)$**	**$dx = x - 250$**	**(Wdx)**
मैनेजर	1000	1	1000	+750	+750
कार्यालय स्टॉफ	200	8	1600	-50	– 400
कुशल श्रम	250	20	5000	0	0
अकुशल श्रम	140	11	1540	-110	–1210
		$\Sigma W = 40$	$\Sigma WX = 9140$		$\Sigma Wdx = -860$

$$\overline{XW} = \frac{\sum WX}{\sum W} = \frac{9140}{40}$$

$$\overline{XW} = A + \frac{\sum XW}{\sum W} = 250 + \frac{-860}{40}$$

$\therefore \overline{XW} = 228.5$ $\qquad\qquad$ $\therefore \overline{XW} = 228.5$

सरल व भारित माध्य की तुलना– सरल समांतर माध्य, भारित माध्य के बराबर हो सकता है, उससे अधिक भी हो सकता है और कम भी। (i) बराबर ($\overline{X} = \overline{XW}$) – श्रेणी के प्रत्येक मूल्य को समान भार देने की दशा में सरल व भारित समांतर माध्य बराबर होते हैं। (ii) अधिक ($\overline{X} > \overline{XW}$)– जब श्रेणी के छोटे मूल्यों को अधिक भार

टिप्पणी

और बड़े मूल्यों को कम भार दिया जाता है, जब सरल समांतर माध्य, भारित माध्य से अधिक होता है। (iii) कम ($\overline{X} < \overline{X}W$)– जब श्रेणी के छोटे मूल्यों को कम भार तथा बड़े मूल्यों को अधिक भार दिया जाता है, जब सरल समांतर माध्य, भारित माध्य से कम होता है।

भारित समांतर माध्य का प्रयोग कब किया जाए? निम्न दशाओं में भारित–माध्य अधिक उपयुक्त होता है–(i) जब समक–माला की विभिन्न इकाइयों का अलग–अलग सापेक्षिक महत्व हो, (ii) जब समक–माला अनेक उपवर्गों में बंटी हुई हो और उनकी आवृत्तियों में परस्पर काफी अंतर हो, (iii) जब कई समूहों का सामूहिक माध्य ज्ञात करना हो, तथा (iv) जब अनुपातों, प्रतिशतों तथा दरों का माध्य निकालना हो।

सामान्य तथा प्रमापित दरों का सिद्धांत

स्मरण रहे, दो नगरों की स्वास्थ्य स्थित या मृत्यु दरों, जन्म दरों तथा विवाह दरों, बेरोजगारी दरों, परीक्षाफल प्रतिशतों आदि की तुलना करते समय (भारित समांतर माध्य पर आधारित) ''सामान्य एवं प्रमापित दरों के सिद्धांत'' का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के तौर पर यदि दो नगरों की औसत मृत्यु–दरों की तुलना करनी है तो उसके लिए निम्न दो प्रकार की औसत मृत्यु–दरों का मूल्यांकन किया जाता है–

1. **सामान्य मृत्यु–दर** (Crude or General Death Rate) – सामान्य मृत्यु दर के गणन की दो रीतियां हैं– (अ) प्रत्यक्ष रीति, तथा (ब) लघु रीति।

(अ) प्रत्यक्ष रीति (i) सबसे पहले निम्न सूत्र द्वारा प्रत्येक आयु–वर्ग की विशिष्ट मृत्यु–दर निकाल ली जाती है–

$$\text{आयु विशिष्ट मृत्यु दर \%} = \frac{\text{विशिष्ट आयु–वर्ग में मृत्यु–संख्या}}{\text{विशिष्ट आयु–वर्ग की जनसंख्या}} \times 1000$$

(ii) इसके बाद प्रत्येक आयु–वर्ग की प्रति हजार मृत्यु–दर (X) की, उसकी तत्संबंधी जनसंख्या (W) से गुणा की जाती है और गुणज का जोड़ (ΣWX) ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) प्राप्त गुणज के जोड़ (ΣWX) को नगर विशेष की कुल जनसंख्या (ΣW) से भाग देने पर नगर की 'सामान्य मृत्यु दर' ज्ञात हो जाती है।

(ब) लघु रीति– यह रीति सरल है क्योंकि इस रीति में प्रत्येक आयु–वर्ग की (अलग–अलग) प्रति–हजार मृत्यु–दर निकालने की आवश्यकता नहीं होती। केवल निम्न सूत्र का प्रयोग करके सामान्य मृत्यु दर निकाल ली जाती है–

$$\text{सामान्य मृत्यु दर} = \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

(2) प्रमापित मृत्यु–दर (Standardized Death Rate) – जैसा कि हम जानते हैं भारित माध्यों की तुलना का महत्वपूर्ण नियम यह है कि दोनों माध्यों में भार एक समान होने चाहिए। इस दृष्टि से दो नगरों की सामान्य मृत्यु–दर तुलना योग्य नहीं होती क्योंकि दोनों की गणना करते समय अलग–अलग जनसंख्याओं को दोनों माध्यों के लिए भार मान लेना चाहिए। इसकी विधि यह है कि स्थानीय नगर

की आयु–वर्गानुसार प्रति हजार मृत्यु–दरों को, प्रमाप नगर की आयु–वर्गानुसार जनसंख्या से गुणा करके गुणज का जोड़ प्राप्त कर लिया जाता है। फिर, इस योग को प्रमाप नगर की कुल जनसंख्या से भाग देने पर जो भारित माध्य–दर प्राप्त होती है, वह ''स्थानीय नगर की प्रमापित या संशोधित मृत्यु–दर'' कहलाती है। अंत में स्थानीय नगर की SDR और प्रमाप नगर की GDR की आपस में तुलना की जाती है। जिस नगर की औसत मृत्यु–दर कम होती है, वही नगर अधिक स्वस्थ माना जाता है।

प्रमाप नगर का निर्धारण

यदि प्रश्न में दिए समकों से यह बात स्पष्ट न हो कि प्रमाप नगर कौन–सा है तो ध्यान रहे, पहले नगर को ही प्रमाप नगर मान लिया जाता है।

उदाहरण– निम्नलिखित तालिका से अशोधित तथा प्रमापित मृत्यु दरें मालूम कीजिए और बताइए कौन–सा नगर अधिक स्वस्थ है।

आयु वर्ग (वर्ष)	प्रमाप नगर (A)		स्थानीय नगर (B)	
	जनसंख्या	मृतकों की संख्या	जनसंख्या	मृतकों की संख्या
5 से कम	5,000	150	7,500	135
5–25	25,000	500	20,000	500
25–55	15,000	225	20,000	400
55 से अधिक	5,000	300	2,500	125
योग	**50,000**	**1,175**	**50,000**	**1,160**

हल–

औसत मृत्यु–दरों की गणना

आयु वर्ग (वर्ष)	नगर A (प्रमापित)			नगर B स्थानीय		
	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु–दर %	जनसंख्या	मृत्यु	मृत्यु–दर %
	W_1		X_1	W_2		X_2
0–5	5,000	150	30	7,500	135	18
5–25	25,000	500	20	20,000	500	25
25–55	15,000	225	15	20,000	400	20
55 से अधिक	5,000	300	60	2,500	125	50
योग	**50,000**	**1175**		**50,000**	**1160**	

A नगर की सामान्य मृत्यु–दर (GDR या CDR)

$$= \frac{(30\times5000)+(20\times25000)+(15\times15000)+(60\times5000)}{50,000}$$

$$= \frac{11,75,000}{50,000} = 23.5\%$$

लघु रीति द्वारा GDR की गणना

$$\text{A नगर की GDR} = \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$= \frac{1175}{50,000}\times1000 = 23.5\%$$

टिप्पणी

B नगर की सामान्य मृत्यु–दर (GDR या CDR)

$$= \frac{\text{कुल मृत्यु–संख्या}}{\text{कुल जनसंख्या}} \times 1000$$

$$= \frac{1160}{50,000} \times 1000 = 23.2\%$$

सामान्य मृत्यु–दरों के आधार पर दोनों नगरों की तुलना करना उपयुक्त नहीं है क्योंकि दोनों नगरों में भार (वर्गानुसार जनसंख्या) अलग–अलग हैं। उचित तुलना के लिए भारों का समान होना जरूरी है। अतः B नगर की प्रमापित मृत्यु–दर ज्ञात की जाएगी, जिसमें नगर A की जनसंख्या को भार माना जाएगा।

नगर B की प्रमापित मृत्यु दर (SDR)

$$= \frac{(18 \times 5000) + (25 \times 25000) + (20 \times 15000) + (50 \times 5000)}{50,000}$$

$$= \frac{12,65,000}{50,000} = 25.3\%$$

नगर A की GDR=23.5%, नगर B की SDR= 25.3%

अतः दोनों नगरों की तुलना से यह स्पष्ट है कि नगर A अधिक स्वस्थ है क्योंकि उसकी औसत मृत्यु–दर कम है।

(ख) माध्यिका (Median)

किसी समक श्रेणी को आरोही (Ascending – बढ़ते हुए) या अवरोही (Descending–घटते हुए) क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है, उसे माध्यिका कहते हैं। अर्थात माध्यिका स्थिति का माध्य (Average of Position) है। कौनर के शब्दों में ''माध्यिका, समक श्रेणी का वह चर–मूल्य है, जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बांटता है कि एक भाग में सारे मूल्य माध्यिका से अधिक और दूसरे भाग में उससे कम हों।''

उदाहरण के लिए, यदि पांच व्यक्तियों की आय 5,000, 5,200, 5,500, 5,600, 5,800 है तो माध्यिका 5,500 होगा अर्थात दो व्यक्ति ऐसे हैं, जिनकी आय 5,500 रुपये से कम है और दो व्यक्ति ऐसे हैं, जिनकी आय 5,500 रुपये से अधिक। इस प्रकार माध्यिका, श्रेणी के बिल्कुल बीच में स्थित होता है और यह मूल्य श्रेणी को दो बराबर भागों में बांट देता है। माध्यिका से पहले तथा बाद की आवृत्तियां सदा समान रहती हैं। यदि श्रेणी के मदों की संख्या सम या युग्म हैं तो उसमें कोई भी मूल्य बीच में नहीं होगा। ऐसी स्थिति में माध्यिका निकालने के लिए बीच के दो मूल्यों का औसत निकाल लेते हैं। उदाहरणार्थ, यदि 6 व्यक्तियों की आय 5,000, 5,200, 5,500, 5,700, 5,800 तथा 6,500 रुपये है तो माध्यिका 5,500 और 5,700 के बीच अर्थात 5,600 होगा।

माध्यिका का निर्धारण–व्यक्तिगत श्रेणी में

व्यक्ति मूल्यों में माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न क्रियाएं की जाती हैं :

1. सर्वप्रथम, दिए हुए मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित (arrange) किया जाता है। दोनों क्रमों के अनुसार केंद्र बिंदु एक ही होता है। मूल्यों की क्रम संख्याएं (Serial numbers) भी साथ–साथ लिख देनी चाहिए।
2. मूल्यों में क्रमबद्ध करने के पश्चात निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$M = Size\ of\ \frac{N+1}{2} th\ item$$

जहां M = माध्यिका (Median) N = मदों के संख्या

उदाहरण– कर्मचारियों को दिया हुआ वेतन इस प्रकार हैं –

क्रम संख्या	वेतन आरोही क्रम में व्यवस्थित	क्रम संख्या	वेतन आरोही क्रम में व्यवस्थित
1	5,000	5	6,800
2	5,500	6	6,900
3	6,400	7	7,000
4	6,600		

हल–

$$M = Size\ of\ \frac{N+1}{2} th\ item = \frac{7+1}{2} = 4th\ item$$

चौथे मद का मूल्य = 6,600

अर्थात माध्यिका का मूल्य = 6,600 रु.

विच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण

विच्छिन्न आवृत्ति वितरण में माध्यिका ज्ञात करने की विधि निम्नलिखित है–

1. सर्वप्रथम, दिए गए मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।
2. संचयी आवृत्तियां (Cumulative Frequencies) निकालकर श्रेणी को संचयी आवृत्ति माला में बदल लिया जाता है।
3. निम्न सूत्र द्वारा माध्यिका की क्रम संख्या ज्ञात कर ली जाती है।

$$M = Size\ of\ \frac{N+1}{2} th\ item$$ जहां N = आवृत्तियों का योग

4. माध्यिका की क्रम–संख्या का मूल्य, संचयी आवृत्ति की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है। जिस संचयी आवृत्ति में यह क्रम–संख्या प्रथम बार सम्मिलित होती है, उसका मूल्य ही माध्यिका होता है।

टिप्पणी

उदाहरण– निम्न समकों से माध्यिका ज्ञात कीजिए–

आयु	20	21	22	23	24	25	26	27	28
कर्मचारियों की संख्या	8	10	11	16	20	25	15	9	6

हल– माध्यिका का परिगणन

आयु	आवृत्ति	संचयी आवृत्तियां
20	8	8
21	10	18
22	11	29
23	16	45
24	20	65
25	25	90
26	15	105
27	9	114
28	6	120

$$M = \text{मद}\,\frac{N+1}{2}\,\text{का आकार} = \frac{120+1}{2} = 60.5\ \text{मद}$$

60.5 मद का आकार = 24 अर्थात माध्यिका आयु = 24 वर्ष।

माध्यिका का निर्धारण–अविच्छिन्न श्रेणी में

अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करने की प्रणाली निम्नलिखित है–

1. सर्वप्रथम, संचयी आवृत्तियां ज्ञात की जाती हैं।
2. निम्न सूत्र द्वारा केंद्रीय मद ज्ञात किया जाता है।

   $$M = Size\ of\ \frac{N}{2} th\ item$$

   अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका $\frac{N}{2} th\ item$ का ही मूल्य होता है $\frac{N+1}{2} th\ item$ का नहीं। यद्यपि कुछ लेखकों ने अविच्छिन्न श्रेणी में $\frac{N+1}{2}$ का प्रयोग किया है लेकिन ऐसा करना ठीक प्रतीत नहीं होता क्योंकि अविच्छिन्न श्रेणी $\frac{N}{2}$ आवृत्ति वक्र के क्षेत्रफल को ठीक दो भागों में विभाजित करता है। $\frac{N+1}{2}$ नहीं।
3. जिस संचयी आवृत्ति में माध्यिका की संख्या सबसे पहली बार आती है, उससे संबंधित वर्ग को ले लिया जाता है, जिससे माध्यिका का ठीक मूल्य निकाला जाता है। इसकी निम्न व उच्च सीमाओं के अंतर्गत ही कहीं माध्यिका होगी।

टिप्पणी

4. माध्यिका वर्ग से माध्यिका का मूल्य निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$M = L + \frac{N/2 - c.f.}{f} \times i$$

जहां,

L = माध्यिका–वर्ग की निम्न सीमा (Lower limit of median class),

$c.f$ = माध्यिका–वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequency of the class preceding the median class),

f = माध्यिका–वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the median class),

i = माध्यिका–वर्ग का वर्गांतर (Class interval of the median class),

विशेष– अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका–मूल्य ज्ञात करते समय यह कल्पना की जाती है कि प्रत्येक वर्ग की इकाइयों का उसके पूरे वर्गांतर में समान रूप से वितरण हुआ है।

उदाहरण– निम्न समकों से माध्यिका तथा भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए–

अनुपस्थित दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या
5 से कम	29
10 से कम	224
15 से कम	465
20 से कम	582
25 से कम	634
30 से कम	644
35 से कम	650
40 से कम	653
45 से कम	655

हल– माध्यिका का परिगणन

अनुपस्थित दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या (f)	(c.f.)
0–5	29	29
5–10	195	224
10–15	241	465
15–20	117	582
20–25	52	634
25–30	10	644
30–35	6	650
35–40	3	653
40–45	2	655

$$M = Size\ of\ \frac{N}{2} th\ item = \frac{655}{2} = 327.5th\ item$$

अर्थात माध्यिका–वर्ग 10–15 है।

टिप्पणी

$$M = 10 + \frac{327.5 - 224}{241} \times 5 = 10 + 2.15 = 12.15$$

माध्यिका के गुण व दोष

गुण

1. गुणात्मक तथ्यों (qualitative facts) जैसे–ईमानदारी, बुद्धिमत्ता, क्षमता आदि का माध्य ज्ञात करने के लिए माध्यिका सर्वोत्तम मानी जाती है।
2. माध्यिका को समझना और ज्ञात करना बहुत सरल है।
3. माध्यिका पर चरम मूल्यों या सीमांत मदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
4. खुले–सिरे वाली सारणी में माध्यिका मूल्य सुगमता से ज्ञात किया जा सकता है। ऐसी सारणी में माध्यिका निकालने के लिए प्रथम वर्ग की निम्नतम सीमा तथा अंतिम वर्ग की उच्चतम सीमा निश्चित करना आवश्यक नहीं, जबकि माध्यिका निकालते समय ये सीमाएं निश्चित करनी पड़ती हैं।
5. रेखा–चित्र खींचकर माध्यिका मूल्य निर्धारित किया जा सकता है, जबकि माध्यिका में ऐसा संभव नहीं है।
6. माध्यिका एक स्पष्ट और निश्चित माध्य है, भूयिष्ठक की भांति अनिश्चित नहीं है।

दोष

1. माध्यिका में बीजगणित के गुणों का अभाव है, इसलिए उच्चतर गणितीय क्रियाओं में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता। उदाहरणार्थ, माध्यिका मूल्य और मदों की संख्या को गुणा करने से सभी मदों के मूल्यों का जोड़ ज्ञात नहीं किया जा सकता।
2. माध्यिका–मूल्य निर्धारित करने से पूर्व मदों को आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यासित करना पड़ता है, जिसमें काफी समय लगता है।
3. अविच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका ज्ञात करते समय मान्यता की जाती है कि प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियां समान रूप से वितरित हैं लेकिन यह मान्यता सदैव सत्य नहीं होती।
4. माध्यिका–मूल्य निकालते समय श्रेणी के सभी मदों को समान महत्व दिया जाता है।

(ग) बहुलक (Mode)

Mode शब्द की उत्पत्ति लैटिन शब्द *Modust* से हुई है, जिसका अर्थ है–फैशन या रिवाज। सांख्यिकीय में बहुलक उस मान को कहते हैं, जो समक माला में सबसे अधिक

बार आता है अर्थात जिसकी आवृत्ति श्रेणी में सबसे अधिक हो। कुछ विद्वानों में बहुलक की परिभाषाएं निम्न प्रकार दी हैं–

जिजेक के मतानुसार, ''बहुलक वह मूल्य है, जो समूह में सबसे अधिक बार आता है और जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व वाले पदों का जमाव रहता है।''

क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार, ''एक बंटन का बहुलक वह मूल्य है, जिसके निकट श्रेणी की इकाइयां अधिक–से–अधिक केंद्रित होती हैं। उसे श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिरूपी या विशिष्ट मूल्य माना जा सकता है।''

बहुलक का निर्धारण

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निर्धारण–सिद्धांत रूप में एक व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण तब तक नहीं किया जा सकता, जब तक कि उसे खंडित या अखंडित श्रेणी में न बदल लिया जाए। अतः एक व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने की निम्न तीन रीतियां हैं–

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी (Discrete sceries) में बदल कर, या
2. सतत या अखंडित श्रेणी (Continuous series) में बदल कर, अथवा
3. समांतर माध्य (Arithmetic Mean) तथा माध्यिका (Median) की सहायता से बहुलक का अनुमान लगाकर।

1. व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी में बदलना– जब व्यक्तिगत श्रेणी में अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाए जाते हों तब उसे खंडित श्रेणी में बदल लेना चाहिए। फिर, निरीक्षण द्वारा अधिकतम आवृत्ति वाले मूल्य को बहुलक घोषित कर दिया जाता है।

टिप्पणी– व्यवहार में व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण, निरीक्षण द्वारा भी कर लिया जाता हैं बशर्ते कि पदों की संख्या काफी कम हो और बहुलक पूर्णतया सुस्पष्ट हो। उदाहरण नीचे देखिए–

उदाहरण– निम्न श्रेणी का बहुलक ज्ञात कीजिए–

20 22 24 25 22 18 19 22 23 21 22

हल– निरीक्षण द्वारा स्पष्ट है कि 22 पद सबसे अधिक (3) बार आया है। अतः 22, बहुलक पद होगा। फिर, इसे खंडित श्रेणी में बदलने पर भी परिणाम यही रहेगा।

Size (x):	18	19	20	21	22	23	24	25	
Frequency (f)	1	1	1	1	4	1	1	1	$\Sigma f = 11$

अतः बहुलक (Mode) या Z =22

2. सतत या अखंडित श्रेणी में बदलना– जब किसी श्रेणी का कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार पाया जाता है, तब व्यक्तिगत श्रेणी को खंडित श्रेणी में बदलने की प्रक्रिया बेकार सिद्ध होती है क्योंकि सभी मूल्यों की आवृत्ति समान रहने पर बहुलक का निर्धारण करना असंभव होता है। ऐसी स्थिति में व्यक्तिगत मूल्यों को अखंडित श्रेणी में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गांतर (बहुलक वर्गांतर) ज्ञात कर लेना चाहिए।

फिर इस बहुलक वर्ग में से सूत्र द्वारा बहुलक–मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। इसकी विधि आगे स्पष्ट की गई है।

टिप्पणी

3. समांतर माध्य तथा माध्यिका की सहायता से बहुलक निर्धारण– यदि किसी व्यक्तिगत श्रेणी में समांतर माध्य ($\overline{X}$), माध्यिका (M) तथा बहुलक (Z) तीनों ही ज्ञात करने हो तो इन तीनों के पारस्परिक संबंध पर आधारित निम्न सूत्र द्वारा ही बहुलक मूल्य का अनुमान लगाया जाना चाहिए–

$$\left(\overline{X}-Z\right)-3\left(\overline{X}-M\right) \text{ या}$$

$$Z = 3M - 2\overline{X}$$

विशेष– इस सूत्र का प्रयोग केवल असाधारण स्थिति में अथवा परीक्षक द्वारा पूछने पर ही किया जाना चाहिए। उदाहरण नीचे देखिए।

उदाहरण– निम्न समकों से माध्य ($\overline{X}$), माध्यिका (M) तथा बहुलक (Z) = ($3M - 2\overline{X}$) ज्ञात कीजिए।

18.3 20.6 19.3 22.4 20.2 18.8 19.7 20.0

हल– माना इस श्रेणी का माध्य = 19.91 और माध्यिका = 19.85 ज्ञात किया गया है। अतः अब बहुलक का मान अग्रलिखित होगा–

$$Z = 3M - 2\overline{X} = (3\times19.85)-(2\times19.91) = 59.55 - 39.82 = 19.73$$

खंडित श्रेणी में बहुलक का निर्धारण (Mode in Discrete Series)

खंडित श्रेणी में बहुलक निर्धारण की दो रीतियां हैं– अ. निरीक्षण रीति तथा ब. समूहन रीति।

(अ) निरीक्षण रीति– बहुलक निर्धारण की निरीक्षण रीति का प्रयोग केवल तभी करना चाहिए जब आवृत्ति–बंटन निम्न शर्तें पूरी करता हो–

1. श्रेणी की आवृत्तियां नियमित हों अर्थात आवृत्तियां पहले बढ़ें फिर अधिकतम हों और उसके बाद गिरती हुई हों।

   (ii) श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति, केवल एक–ही हो और वह लगभग केंद्र में हो।

   (iii) अधिकतम आवृत्ति से पहले और बाद की आवृत्तियों के योग में अधिक अंतर न हो।

उदाहरण– निम्नलिखित श्रेणी से बहुलक आय ज्ञात कीजिए–

Daily Incomes Rs. (x)	10	15	20	25	30	35	40
No. of Persons (f)	20	32	40	65	48	28	16

हल– उपरोक्त श्रेणी में आवृत्तियां नियमित हैं। अतः निरीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात किया जाएगा। अधिकतम आवृत्ति 65 है, जिसका मूल्य 25 रु. है। अतः बहुलक आय या Z = 25 रु.

विशेष टिप्पणी– ध्यान रहे, यह आवश्यक नहीं कि सभी स्थितियों में अधिकतम आवृत्ति, संकेंद्रण या घनत्व को दर्शाती हो। इसलिए आवृत्ति–संकेंद्रण के सटीक बिंदु की जानकारी (खंडित या अखंडित दोनों श्रेणियों में) समूहन रीति द्वारा कर लेनी चाहिए। दूसरी बात, चूंकि बहुलक अपने अड़ोस–पड़ोस की आवृत्तियों से बेहद प्रभावित होता है इसलिए अधिकतम संकेंद्रण के वास्तविक बिंदु की जानकारी प्राप्त करना अत्यावश्यक है।

(ब) समूहन रीति– समूहन रीति का प्रयोग उस समय किया जाता है, जब समकमाला की आवृत्तियां अनियमित हों, क्योंकि ऐसी स्थिति में अधिकतम आवृत्ति का पता नहीं लग पाता। आवृत्तियां निम्न दशाओं में अनियमित मानी जाती हैं–

(i) जब अधिकतम आवृत्ति या अधिकतम आवृत्ति संकेंद्रण, दो या दो से अधिक स्थानों पर हो।

(ii) जब अधिकतम आवृत्ति केंद्र में न होकर श्रेणी के एकदम शुरू में या फिर अंत में हो।

(iii) जब आवृत्तियां अनियमित रूप से कभी बढ़ती और कभी घटती हुई हों।

(iv) अधिकतम आवृत्ति के अगल–बगल की आवृत्तियां बहुत कम हों परंतु किसी अन्य स्थान पर आवृत्तियों का जमाव अत्यधिक हो। अनियमित आवृत्तियों का एक उदाहरण नीचे दिया गया है–

उदाहरण– नीचे दिए समकों से कॉलर का बहुलक–माप निर्धारित कीजिए–

कॉलर माप सेमी (x)	30	31	32	33	34	35	36	37
व्यक्तियों की संख्या (F)	2	9	3	4	8	7	8	5

हल– यद्यपि निरीक्षण से यही लगता है कि 31 पद बहुलक होगा क्योंकि इसकी आवृत्ति (9) अधिकतम है। परंतु यह निष्कर्ष गलत है क्योंकि आवृत्तियों का वितरण अनियमित हैं। पहली बात तो यह है कि आवृत्ति के बढ़ने–घटने का क्रम बेतरतीब है। दूसरा, अधिकतम आवृत्ति केंद्र में नहीं है और उसकी अगल–बगल की आवृत्तियां भी बहुत छोटी हैं। तीसरा, आवृत्तियों का जमाव श्रेणी के अंतिम भाग में अधिक है। अतः यहां बहुलक का निर्धारण समूहन रीति द्वारा किया जाएगा।

समूहन रीति द्वारा बहुलक–निर्धारण

Collar Size X	आवृत्ति Frequency (i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	अधिकतम आवृत्तियों की संख्या No. of Max Frequency	
30	2	11		14				0
31	9		12		16		|	1
32	3	7				15		0
33	4		12	**19**			|	1
34	8	15			**23**		|||	3
35	7		**15**			**20**	卌	5
36	8	**13**					|||	3
37	5						|	1

समूहन की प्रक्रिया – समूहन क्रिया के लिए एक सारणी बनाई जाती है, जिसमें चर–मूल्यों के अलावा आवृत्तियों के प्रयोग के लिए 6 कॉलम होते हैं। यहां उल्लेखनीय

टिप्पणी

यह है कि समूहन–क्रिया करते समय केवल आवृत्तियों का प्रयोग किया जाता है, पद–मूल्यों का नहीं। क्रिया विधि इस प्रकार है–

पहले खाने में, प्रश्न में दी हुई आवृत्तियां लिखी जाती हैं।

दूसरे खाने में, शुरू से दो–दो आवृत्तियों को जोड़कर उनके योग लिखे जाते हैं, जैसे– 2+9=11, 3+4=7 और

चौथे खाने में, बिना कोई आवृत्ति छोड़े अर्थात शुरू से ही, तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–2+9+3=14 तथा 4+8+7=19, आदि...........

पांचवे खाने में, पहली आवृत्ति छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–9+3+4=16, 8+7+8=23 तथा

छठे खाने में, शुरू की दो आवृत्तियां छोड़कर, तीन–तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं, जैसे–3+4+8=15, 7+8+5=20, आदि........।

विशेष 1. इस क्रिया के बाद प्रत्येक कॉलम की अधिकतम आवृत्ति या आवृत्ति समूह को चिह्नित या रेखांकित कर दिया जाता है। ऐसा करने से विश्लेषण सारणी बनाने में काफी सुविधा हो जाती है।

2. समूहन में न आ सकने वाली आवृत्ति को छोड़ दिया जाता है। जैसे ऊपर दिए उदाहरण के कॉलम 3. में आवृत्ति 5 को और कॉलम 4. में आवृत्ति 8 व 5 को छोड़ दिया गया है।

विशेष – सिद्धांत रूप में यदि आवश्यक हो तो आवृत्तियों को 4–4 तथा 5–5 के समूह में भी जोड़ा जा सकता है। परंतु आमतौर पर 3–3 तक के समूहन से ही बहुलक का निर्धारण हो जाता है। अतः और अधिक समूहन करने के बजाए घनत्व–परीक्षण का प्रयोग कर लेना चाहिए।

विश्लेषण सारणी– विश्लेषण सारणी की तुलना हम वोटों की गिनती करने की प्रक्रिया से कर सकते हैं। जिस प्रकार चुनाव में मतदान के बाद वोटों की गिनती की जाती है, ठीक उसी प्रकार आवृत्तियों का समूहन करने के बाद विश्लेषण सारणी बनाकर हम पता लगाते हैं कि वास्तव में कौन–सा पद मूल्य, बहुलक होने का दावेदार है अर्थात अधिक लोकप्रिय है।

विश्लेषण–सारणी

कॉलम संख्या	पद–मूल्य							
	30	31	32	33	34	35	36	37
(i)		✓						
(ii)					✓	✓		
(iii)						✓	✓	
(iv)				✓	✓	✓		
(v)					✓	✓	✓	
(vi)						✓	✓	✓
Total	0	1	0	1	3	5	3	1

विश्लेषण प्रक्रिया– विश्लेषण सारणी में सबसे पहले, समूहन सारणी के विभिन्न कॉलमों की संख्या क्रमानुसार लिख दी जाती है। इन कॉलम–संख्याओं को आप मतपत्र समझ लीजिए। विश्लेषण सारणी के क्षैतिज भाग में पद–मूल्य लिख दिए जाते हैं। इन्हें आप ''प्रत्याशी'' या ''उम्मीदवार'' समझ लीजिए। अब समूहन तालिका का पहला कॉलम देखिए। इसमें अधिकतम आवृत्ति 9 है। विश्लेषण सारणी में कॉलम (i) के सामने और 31 के नीचे एक टेलीबार या (√) का निशान लगाकर दिखाया गया है। स्पष्ट है कि पहला वोट 31 पद मूल्य (उम्मीदवार) को मिला है। अब दूसरा कॉलम लीजिए। इसमें अधिकतम आवृत्ति–समूह 15 है, जो 8 व 7 का योग है। यह बताता है कि 34 और 35 दोनों बहुलक हैं। अतः इसके कॉलम (ii) के सामने 34 और 35 दोनों के नीचे (√) लगाकर दिखाया गया है। यही क्रिया अन्य कॉलमों के लिए भी की जाएगी।

अंत में जिस पद–मूल्य के सामने अधिकतम चिह्न होते हैं अर्थात जिसको सबसे अधिक वोट मिलते हैं, उस मूल्य को ही बहुलक घोषित कर दिया जाता है। विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि बहुलक मूल्य 31 नहीं, बल्कि 35 है। इसका कारण यह है कि 31 की तुलना में 35 मूल्य के आस–पास आवृत्तियों का जमाव अधिक है।

अतः बहुलक आकार (Modal Size) = 35 सेमी.

अखंडित या सतत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण– अखंडित श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए सबसे पहले बहुलक–वर्ग का पता लगाया जाता है। इसकी दो रीतियां हैं। यदि आवृत्तियां नियमित हैं तो निरीक्षण द्वारा और यदि आवृत्तियां अनियमित हैं तो फिर समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण कर लिया जाता है। इसके बाद बहुलक के मूल्य की निम्न सूत्र की सहायता से आंतरिक गणना कर ली जाती है (जो बहुलक वर्ग की सीमाओं के अंदर ही आना चाहिए)–

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$$

या

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times l_2 - l_1$$

$Z =$ बहुलक मूल्य (Value of the mode)

$l_1 =$ बहुलक–वर्ग की निचली सीमा (Lower limit of the modal class)

$f_1 =$ बहुलक–वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the modal class)

$f_o =$ बहुलक–वर्ग से तुरंत पहले वाले वर्ग अर्थात उससे लघुतर वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the pre-modal class, i.e., the class just lower than the modal class)

$f_2 =$ बहुलक–वर्ग के तुरंत बाद वाले अर्थात उससे उच्चतर वर्ग की आवृत्ति (Frequency of the post-modal or succeeding class, i.e. the class just higher than the modal class)

$i =$ बहुलक वर्ग का विस्तार (Magnitude of the modal class or l_2-l_1)

टिप्पणी

सूत्र का आधार

यह सूत्र ऊपर बताई जा चुकी इस मान्यता पर आधारित है कि बहुलक अपने निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियों से प्रभावित होता है। अतः यदि पिछले वर्ग की आवृत्ति, अगले वर्ग की आवृत्ति से बड़ी है तो बहुलक का मूल्य (Z) बहुलक–वर्ग की निचली सीमा (l_1) के अधिक निकट होगा। इसके विपरीत, यदि अगले वर्ग की आवृत्ति पिछले वर्ग की आवृत्ति से बड़ी है तो फिर बहुलक ऊपरी सीमा (l_2) के निकट होगा।

सूत्र का दूसरा रूप– आवृत्तियों के अंतर के रूप में यह सूत्र इस प्रकार भी लिखा जाता है–

निचली (अधर) सीमा में जोड़कर — ऊपरी (अपर) सीमा में घटाकर

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i \qquad\qquad Z = l_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

यहां $\Delta_1 = f_1 - f_0$ तथा $\Delta_2 = f_1 - f_2$

l_1 तथा l_2 = बहुलक–वर्ग की क्रमशः निचली तथा ऊपरी सीमा

पहला सूत्र सबसे सरल है। सदैव पहले सूत्र का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण– निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए–

Class Interval	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Frequency	20	24	32	28	20	16	34	10	8

हल– आवृत्तियां अनियमित होने के कारण बहुलक वर्ग का निर्धारण, समूहन रीति द्वारा किया जाएगा–

समूहन रीति द्वारा बहुलक–वर्ग का निर्धारण

वर्ग (Class)	आवृत्ति (Frequency)						अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग (Classes with Highest Frequencies)	
	आवृत्ति	दो–दो जोड़ (2–2)		तीन–तीन जोड़ (3–3)				
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	Analysis Table	
0-15	20	44		**76**			I	1
5-10	24		**56**		**84**	**80**	II	3
10-15	32	**60**					卌	5
15-20	28		48	64			III	3
20-25	20	36					I	1
25-30	16		50		70	60		0
30-35	34	44		52				1
35-40	10		18					0
40-45	8							0

उपर्युक्त सारणी से पता चलता है कि 10–15 बहुलक–वर्ग है अर्थात बहुलक इन दो सीमाओं के बीच स्थित है। अतः आंतरिक गणना की क्रिया के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

$$M_o \ or\ Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$ [l_1= 10, f_o= 24, f_1 = 32, f_2 = 28, i = 5]

सूत्र में मूल्य निर्धारित करने पर

$$z = 10 + \frac{32-24}{2\times32-24-28}\times5 = 10 + \frac{8\times5}{64-52} = 10 + 3.33 = 13.33$$

दूसरे सूत्र का प्रयोग करने पर –

$$Z = l_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}\times i \qquad\qquad Z = l_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1+\Delta_2}\times i$$

$l_1 = 10, \Delta_1 = f_1 - f_o = 32 - 24 = 8, i = 5$ $\qquad \Delta_2 = f_1 - f_2 = 32 - 28 = 4, i = 5$

$$z = 10 + \frac{8}{8+4}\times 5 = 10 + 3.33 \qquad\qquad Z = 15 - \frac{4}{8+4}\times 5 = 15 - 1.67$$

$$\therefore z = 13.33 \qquad\qquad \therefore z = 13.33$$

बहुलक संबंधी कुछ महत्वपूर्ण तथ्य

1. **वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग**– जब कभी बहुलक–वर्ग की आवृत्ति (f_1) की तुलना में, उससे पहले वाले तथा बाद वाले अर्थात दोनों वर्गों की आवृत्तियां (f_o and f_2) बड़ी हों या दोनों में से कोई एक भी बड़ी हो तो सामान्य सूत्र के स्थान पर नीचे दिए वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करना चाहिए, अन्यथा उत्तर बहुलक वर्ग के बाहर आएगा, जो कि गलत है–

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2}\times i$$

2. **घनत्व परीक्षण**– कभी–कभी समूहन के बाद भी यह देखने में आता है कि दो या दो से अधिक वर्गों की आवृत्तियां, समान–रूप से अधिकतम बार पायी जाती हैं। ऐसी स्थिति में उनमें से बहुलक वर्ग का निर्णय लेने के लिए उन वर्गों की ओर उनके निकटवर्ती (पिछले व अगले) वर्गों की आवृत्तियां जोड़कर उन जोड़ों की तुलना की जाती है। जिस वर्ग–समूह का जोड़ अधिक होता है, वही बहुलक वर्ग मान लिया जाता है। हां, यदि उनका जोड़ भी बराबर आ जाए तो फिर उसे द्वि–बहुलक श्रेणी घोषित कर देना चाहिए अर्थात उस श्रेणी का बहुलक मूल्य अनिश्चित तथा अनिर्धारित है।

3. **समावेशी वर्गांतर**– यदि वर्गांतर समावेशी आधार पर दिए गए हैं तो सूत्र वही रहता है परंतु बहुलक ज्ञात करने से पहले अर्थात आंतरिक गणना करते समय उन्हें अपवर्जी श्रेणी में बदल लेना चाहिए। ऐसा न करने पर उत्तर गलत माना जाएगा।

टिप्पणी

4. **संचयी आवृत्ति श्रेणी या बंटन में बहुलक**– यदि श्रेणी संचयी आवृत्ति बंटन के आधार पर दी हुई है तो बहुलक निकालने के लिए पहले उसे सामान्य आवृत्ति बंटन में बदल लेना चाहिए।

5. **श्रेणी या वर्गांतरों का अवरोही क्रम**– यदि श्रेणी आरोही के स्थान पर अवरोही क्रम में दी गयी है अर्थात ऊपर से नीचे की ओर घटती हुई है तो ऐसी स्थिति में हमारे पास निम्न दो विकल्प हैं–

   (क) **सामान्य सूत्र का प्रयोग**– सामान्य सूत्र का प्रयोग करने की स्थिति में f_0 का मान बहुलक वर्ग से निचले वर्ग की आवृत्ति f_2 बहुल वर्ग से उच्चतर वर्ग की आवृत्ति मानी जाएगी।

   (ख) **संशोधित सूत्र का प्रयोग**– ऐसी स्थिति में सामान्य सूत्र में थोड़ा परिवर्तन करना पड़ता है अर्थात (l_1+) के स्थान पर (l_2-) का प्रयोग किया जाता है। परंतु ध्यान रहे f_0= पिछले–वर्ग की आवृत्ति और f_2= अगले वर्ग की आवृत्ति मानी जाएगी। सूत्र व उदाहरण नीचे देखिए–

आरोही वर्गांतर	**अवरोही वर्गांतर**
$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$	$Z = l_2 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times i$

6. **जब माध्य–मूल्य दिए हों**– कभी–कभी प्रश्न में वर्गांतरों के स्थान पर उनके माध्य–मूल्य दिए होते हैं। चूंकि अखंडित श्रेणी में बहुलक तथा माध्यिका निकालने के लिए वर्गांतरों के लिए वर्गांतरों की दोनों सीमाओं (l_1 तथा l_2) की जानकारी होना आवश्यक है, अतः ऐसी स्थिति में प्रश्न हल करने से पूर्व सूत्र द्वारा वर्गांतरों की ऊपरी तथा निचली सीमाएं ज्ञात कर लेनी चाहिए।

7. **असमान वर्गांतर वाली श्रेणी**– यदि श्रेणी में वर्ग–विस्तार असमान है तो प्रश्न हल करने से पूर्व उसे समान कर लेना चाहिए क्योंकि बहुलक का सूत्र समान–वर्गांतर की मान्यता पर आधारित है।

   महत्वपूर्ण टिप्पणी– यदि प्रश्न में बहुलक–वर्ग और उसके निकटवर्ती दोनों वर्गों (अर्थात बहुलक हेतु आवश्यक तीन वर्गों) का वर्ग विस्तार समान है तो शेष असमान–वर्गों की चिंता किए बिना बहुलक ज्ञात कर लेना चाहिए।

8. **अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण**– यदि किसी सतत आवृत्ति श्रेणी का बहुलक तथा कुल आवृत्तियों का योग ज्ञात हो तो कुछ अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण सूत्र की सहायता से किया जा सकता है।

बहुलक के गुण

1. **श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी आवश्यक नहीं**– बहुलक के लिए श्रेणी के सभी पद–मूल्यों की जानकारी भी आवश्यक नहीं है। एक नियमित आवृत्ति–श्रेणी में बहुलक वर्ग और उसके निकटवर्ती वर्गों की आवृत्तियों के आध ाार पर ही बहुलक ज्ञात किया जा सकता है।

टिप्पणी

2. **सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व**— चूंकि बहुलक श्रेणी का वह मूल्य होता है, जिसकी पुनरावृत्ति सबसे अधिक बार होती है, अतः इस आधार पर बहुलक श्रेणी का सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला माध्य माना जाता है। फिर, बहुलक का मूल्य, श्रेणी में दिए हुए पद—मूल्यों में से ही कोई एक होता है, जबकि अन्य माध्यों पर यह बात लागू नहीं होती।
3. **बिंदुरेखीय रीति द्वारा निर्धारण**— बिंदुरेखीय रीति द्वारा भी बहुलक का निध ार्रण आसानी से किया जा सकता है।
4. **चरम मूल्यों से प्रभावित न होना**— बहुलक पर श्रेणी के चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि अधिकतम आवृत्ति संकेंद्रण प्रायः श्रेणी के मध्य में होता है न कि चरम सीमाओं के आस—पास।
5. **लोकप्रियता**— बहुल एक ऐसा माध्य है, जिसका दैनिक जीवन में काफी प्रयोग किया जाता है, जैसे—जूते, सिले—सिलाए कपड़े आदि। औसत आकार से हमारा अभिप्राय बहुलक के आकार से होता है।
6. **आगणन में सरलता तथा बुद्धिगम्य**— बहुलक का सबसे बड़ा गुण इसकी सरलता है। यह माध्य अधिकतर निरीक्षण से ही ज्ञात हो जाता है फिर, इसका निर्धारण करने में गणितीय परिकलन की भी आवश्यकता नहीं होती।

बहुलक के दोष

1. **अवास्तविक तथा अप्रतिनिधिक**— बहुलक का एक अन्य दोष, इसके द्वारा श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व न कर पाना है। उदाहरण के तौर पर यदि 200 व्यक्तियों में से 10 लोगों की आय 100 रुपये है और शेष 190 लोगों की आय 100 रुपये से कम है तो बहुलक आय 100 रुपये होगी। परंतु यह बहुलक आय पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नहीं करती क्योंकि 200 व्यक्तियों में से यह केवल 10 व्यक्तियों की आय है, जबकि उनसे 19 गुणा (190) व्यक्तियों की आय 100 रुपये से कम है। अतः स्पष्ट है कि कुछ परिस्थितियों में बहुलक से भ्रमात्मक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।
2. **अस्पष्ट अनिश्चित तथा अनिर्धारित**— बहुलक का सबसे बड़ा दोष दूसरी अस्पष्टता एवं अनिश्चितता है। जब श्रेणी के सभी पदों की आवृत्तियां समान हों, तब बहुलक का निर्धारण नहीं किया जा सकता। कभी—कभी एक श्रेणी में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं जो कि हास्यप्रद जान पड़ता है।
3. **बीजगणितीय विवेचन का संभव न होना**— चूंकि बहुलक श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होता इसलिए इस माध्य का बीजगणित विवेचन संभव नहीं है। वास्तव में, इस दोष के कारण ही बहुलक का अन्य सांख्यिकीय रीतियों तथा सूत्रों में बहुत कम प्रयोग हो पाता है।
4. **जटिलता**— जब निरीक्षण द्वारा बहुलक का पता नहीं चल पाता तो फिर उसके लिए समूहन व आंतरिक गणना की प्रक्रिया काफी जटिल सिद्ध होती है।
5. **चरम मूल्यों की उपेक्षा**— यह माध्य चरम मूल्यों को कोई महत्व नहीं देता जो कि गणितीय दृष्टि से उचित नहीं है।

टिप्पणी

बहुलक के एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुणों में से कोई भी गुण नहीं है। ऊपर बताए गए अधिकांश गुण ही इसके प्रमुख अवगुण हैं। सच तो यह है कि बहुलक, माध्य–परिवार का सबसे बिगड़ा हुआ सदस्य है परंतु इसके बावजूद एक अत्यधिक विषम बंटन या गैर–प्रसामान्य बंटन की स्थिति में यह केंद्रीय प्रवृत्ति का सर्वाधिक अर्थपूर्ण माप है, जो अधिकतम संकेंद्रण के बिंदु को सर्वोत्तम रूप में इंगित करता है।

2.2.2 ज्यामितीय / गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य

ज्यामितीय माध्य श्रेणी के समस्त पद मूल्यों के गुणनफल का वह मूल है जितनी कि उस श्रेणी में इकाइयां है। गुणोत्तर माध्य की गणना श्रेणी के समस्त मूल्यों का गुणा करके पदों की संख्या के बराबर उसका मूल्य निकालकर की जाती है।

गुणोत्तर माध्य (G) n मानों के गुणनफल का nवाँ मूल होता है। गुणोत्तर माध्य का सूत्र निम्न है–

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

2, 4, 8 का गुणोत्तर माध्य (G. M.) इनके गुणनफल का घनमूल है।

$$G = \sqrt[3]{2 . 4 . 8} = \sqrt[3]{64} = 4$$

यदि $x_1, x_2.., ..., x_k$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2 ...., f_k$ हैं $(\Sigma f = n)$

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} . x_2^{f_2} .... x_k^{f_k}}$$

गुणोत्तर माध्य की गणना में लघुगणक का प्रयोग किया जा सकता है।

$$\log G = \frac{1}{n}[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_k \log x_k]$$

$$= \frac{\Sigma f \log x}{n}$$

$$G = \text{Antilog } \frac{1}{n} \Sigma f \log x$$

यदि कोई बारम्बारता न हो, तो $G = (x_1 x_2 .... x_n)^{\frac{1}{n}}$ एवं $\log G = \frac{1}{n} \Sigma \log x$

गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की विधियां

गुणोत्तर माध्य को तीन प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है–

1. व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।
2. खंडित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।
3. सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना।

1. व्यक्तिगत श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– व्यक्तिगत श्रेणी से गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न है–

(क) संख्याओं का लघुगणक ज्ञात किया जाता है।

(ख) लघुगणकों का योग किया जाता है।

(ग) लघुगणकों के योग को पदों की संख्या से भाग दिया जाता है तथा भागफल का प्रतिलघुणक ज्ञात किया जाता है। सूत्र रूप में–

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\sum \log X}{N}\right]$$ यहां N = पदों की संख्या

2. खंडित श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– खंडित श्रेणी द्वारा गुणोत्तर माध्य निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है–

(क) विभिन्न मूल्यों के लघुगणक ज्ञात किये जाते हैं।

(ख) प्रत्येक लघुगणक का संबंधित आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग निकाला जाता है।

(ग) गुणनफल के योग में आवृत्तियों के योग (N) से भाग देकर, प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक निकाला जाता है।

सूत्र के अनुसार–

$$\text{G.M.} = Anti\log\left[\frac{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + f_3 \log x_3 \ldots f_n \log x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_n}\right]$$

$$Anti\log = \left[\frac{\Sigma(f \log x)}{n}\right]$$

3. सतत् श्रणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना– सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए वर्गांतरों के मध्य बिंदु (x) निकाल कर उनके लघुगणक ($\log x$) निकाला जाता है। प्रत्येक लघुगणक का संबंधित आवृत्ति से गुणा ($f \times \log x$) करके गुणनफलों का योग $\left[\Sigma(f \log x)\right]$ किया जाता है। योग में आवृत्तियों के योग (Σf) से भाग देकर प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक निकाला जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$G.M. = Anti\log \frac{\Sigma(f \log x)}{N}$$

गुणोत्तर माध्य के गुण एवं उपयोग

गुणोत्तर माध्य के अधिकतर गुण एवं विशेषताएँ समांतर माध्य के सदृश हैं–

(i) गुणोत्तर माध्य आँकड़े में सभी मदों का उपयोग कर उन्हें एक उपयोगी मान में संघनित करता है।

(ii) इसका झुकाव नीचे की ओर होता है। यह बड़े मानों की अपेक्षा छोटे मानों को अधिक महत्व (भार) देता है।

(iii) यह ठीक–ठीक निर्धारित होता है। समान आँकड़े के लिए दो गुणोत्तर माध्य हो सकते हैं।

(iv) यह आँकड़े के किसी एक ओर के मानों को संतुलित करता है। यह परिवर्तन की औसत दरों जैसे सूचकांक और अनुपातों के बीच मापों एवं प्रतिशतों के लिए आदर्श रूप से उपयुक्त होता है।

(v) यह समांतर माध्य की तरह बीजगणितीय गणनाओं के लिए सहज प्रयोग करने लायक होता है।

टिप्पणी

गुणोत्तर माध्य के अवगुण

(i) इसका उपयोग करना एवं इसकी गणना करना कठिन होता है।

(ii) यह धनात्मक मानों के लिए निश्चित होता है और शून्य के ऋणात्मक मानों के लिए प्रयुक्त नहीं हो सकता। एक शून्य समूचे गुणनफल को शून्य में परिवर्तित कर देगा।

हरात्मक माध्य

हरात्मक माध्य एक विशिष्ट प्रकार का माध्य है जो ऐसी समस्याओं जिसमें समय, दर जैसे किलोमीटर, प्रतिघंटा, प्रतिदिन निर्मित इकाइयां, प्रति वर्ष पूरे किये गए अनुबंध आदि से संबंधित चरों से व्यवहार निहित होता है, के समाधान में उपयोगी होता है। अतः हरात्मक माध्य एक सीमित क्षेत्र में प्रयोग होने वाला माध्य है। एक समंकमाला का हरात्मक माध्य उसके मूल्यों के व्युत्क्रमों के मध्य व्युत्क्रम होता है।

हरात्मक माध्य की गणना

हरात्मक माध्य की गणना तीन प्रकार से की जाती है– 1. व्यक्तिग श्रेणी, 2. विच्छिन्न श्रेणी, 3.अविच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना।

1. व्यक्तिग श्रेणी– व्यक्तिगत श्रेणी से हरात्मक माध्य निकालने की प्रक्रिया निमन प्रकार से है–

(क) मूल्यों का व्युत्क्रम ज्ञात करें अर्थात $\frac{1}{x}$ निकालें।

(ख) व्युत्क्रमों का योग करके उन्हें n से भाग दें अर्थात $\frac{\sum \frac{1}{x}}{n}$ ज्ञात करें।

(ग) $\frac{\sum \frac{1}{x}}{n}$ का व्युत्क्रम ज्ञात करें। यही अभीष्ट हरात्मक माध्य होगा।

2. विच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना– विच्छिन्न श्रेणी में मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात करके संबंधित आवृत्ति से गुणा कर दिया जाता है। गुणनफलों के योग को आवृत्तियों के योग से भाग देकर प्राप्त संख्या का व्युत्क्रम ज्ञात किया जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$H.M. = \frac{N}{\sum\left(f \times \frac{1}{x}\right)}$$ जहां $n = \Sigma f$ = आवृत्तियों का योग है।

3. अविच्छिन्न श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालना– सतत् श्रेणी के वर्गों के माध्य बिंदु (m) ज्ञात करके उनके व्युत्क्रम निकाले जाते हैं तथा उनका वर्ग आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों के योग में आवृत्तियों के योग से भाग देकर प्राप्त संख्या का व्युत्क्रम निकाला जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$H.M. = \frac{N}{\Sigma\left(f \times \frac{1}{x}\right)}$$

हरात्मक माध्य के गुण एवं दोष

हरात्मक माध्य के गुण एवं दोषों को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

गुण

1. हरात्मक माध्य समंकमाला के सभी पदों पर आधारित होता है।
2. गति ज्ञात करने में हरात्मक माध्य अधिक उपयोगी होता है।
3. हरात्क माध्य में बड़े मूल्यों के पदों को कम तथा छोटे मूल्यों के पदों को अधिक महत्व दिया जाता है।

दोष

1. हरात्मक माध्य की गणना करना कठिन होता है, अतः सामान्य व्यक्ति इसे कठिनता से ही समझ पाता है।
2. हरात्मक माध्य ऐसी संख्या हो सकती है जो उस श्रेणी में न हो।
3. हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए समंकमाला के समस्त पदों का ज्ञान होना आवश्यक है।

हरात्मक माध्य के विशेष प्रयोग

व्यवहार में हरात्मक माध्य का प्रयोग कुछ विशेष प्रकार की परिस्थितियों में ही किया जाता है। किसी फर्म के लाभ की औसत वृद्धि–दर किसी मात्रा की औसत गति, किसी वस्तु की औसत कीमत जिस पर वह बेची गयी है और चलन वेग की औसत दर आदि ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य विशेष रूप से उपयुक्त है।

माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के मध्य संबंध

समंकमाला के सभी पद यदि समान मूल्य के हो तो उनका माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य समान हो। सूत्र के रूप में–

$$\overline{X} = G.M = H.M.$$

यदि पदों के मूल्य असमान होंगे तो उनका माध्य गुणोत्तर माध्यम से अधिक होगा तथा गुणोत्तर माध्यम हरात्मक माध्यम से अधिक होगा। इसका कारण यह है कि माध्य में बड़े मूल्यों को अधिक तथा छोटे मूल्यों को कम भार दिया जाता है तथा गुणोत्तर माध्यम में बड़े मूल्यों को कम तथा छोटे मूल्यों को अधिक भारत दिया जाता है। सूत्र के अनुसार–

$$\overline{X} > G.M = H.M.$$

टिप्पणी

किन्हीं दो मूल्यों का गुणोत्तर माध्य उनके माध्य तथा हरात्मक माध्य के गुणोत्तर माध्य के बराबर होता है। सूत्र के अनुसार–

$$G.M = \sqrt{\overline{X} \times H.M} \quad \text{or}$$

$$G.M^2 = \overline{X} \times H.M.$$

अपनी प्रगति जांचिए

1. किस अर्थशास्त्री ने सांख्यिकी को 'माध्यों का विज्ञान' कहा है?
   (क) डॉ. बाउले (ख) प्रो. केण्डाल
   (ग) डॉ. मेयर (घ) प्रो. जॉनसन एवं जैक्सन
2. बहुलक, माध्यिका व समांतर माध्य के संबंधों का आपसी सूत्र निम्न में से क्या होगा?
   (क) $z = 3m - 3\overline{y}$ (ख) $M = 3z - 3\overline{x}$
   (ग) $z = 3M - 2\overline{X}$ (घ) $z = 3\overline{x} - 2M$

2.3 अपकिरण के मापन

विचलनशीलता की माप द्वारा एक ऐसा मान ज्ञात किया जाता है, जो समंकमाला का प्रतिनिधित्व करता है। इस मान का बहुत महत्व है लेकिन यह समंकमाला की सब विशेषताओं को स्पष्ट करने में असमर्थ है। माध्य द्वारा यह पता नहीं लग पाता कि श्रेणी के विभिन्न व्यक्तिगत मानों का इससे औसत अंतर क्या है? और श्रेणी की रचना तथा स्वरूप क्या है?

समंक श्रेणी के बारे में यथेष्ठ ज्ञान प्राप्त करने के लिए, न केवल उसका माध्य जानना आवश्यक है बल्कि विभिन्न व्यक्तिगत मानों का उस माध्य से औसत अंतर और श्रेणी रचना तथा स्वरूप, आदि के बारे में पूरी जानकारी प्राप्त करना भी परमावश्यक है, अर्थात यह जानना आवश्यक है कि श्रेणी का प्रत्येक मद, माध्यम से कितनी दूरी पर या कितना बड़ा या छोटा है। विचलन की दूरी, फैलाव, बिखराव या विस्तार को विचलनशीलता कहते हैं। प्रस्तुत इकाई में विचलनशीलता के सभी प्रमुख मापों, शतांशीय तथा प्रतिशतक का विवेचन किया गया है।

विचलनशीलता की मापों का अर्थ है– विचलनशीलता के मापन की विधियां। विचलनशीलता के मापों की सहायता से एक समूह की सजातीय और विषमजातीयता का मापन किया जाता है। एक समूह में विचलनशीलता, जितनी अधिक होती है, समूह में विषमजातीयता उतनी ही अधिक पाई जाती है तथा समूह में सजातीयता उतनी ही अधिक मात्रा में होती है।

विभिन्न मानसिक गुणों की दृष्टि से यदि एक छात्रों का समूह सजातीय है तो ऐसे समूह को शिक्षित और प्रशिक्षित करना अधिक सरल होता है। दूसरी ओर विषमाजतीय समूह के बालकों को शिक्षा देना कठिन होता है। क्योंकि रुचि, आयु तथा अन्य मानसिक योग्यताओं की दृष्टि से उनमें पर्याप्त अंतर होता है।

विक्षेपण के मापक

विक्षेपण के मापन अर्थात विक्षेपण को उस सांख्यिकी के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, जिसमें केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के चारों ओर वस्तुओं के छितराव/बिखराव के विस्तार को दर्शाता है।

विक्षेपण के मापक को 'निरपेक्ष रूप' में अथवा 'सापेक्ष रूप' में प्रदर्शित किया जा सकता है। इसे तब निरपेक्ष रूप में कहा जाता है, जब यह वह वास्तविक परिमाण बताता है, जिसके द्वारा वस्तु का मान केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक से औसत विचलित होता है। निरपेक्ष मापकों को ठोस इकाइयों में प्रदर्शित किया जाता है, मुख्यतः उन इकाइयों में, जिनमें आंकड़ों को प्रदर्शित किया जा चुका है, जैसे– रुपयों, सेंटीमीटर्स, किलोमीटर्स इत्यादि में; इनका प्रयोग आवृत्ति वितरण का विवेचन करने में भी किया जाता है।

विक्षेपण के सापेक्ष मापक की गणना, गुणवत्ता द्वारा इस संदर्भ में निरपेक्ष मापकों को भाग देते हुए की जाती है, जिसमें निरपेक्ष विचलन की गणना कर ली गयी है। यह अपने आप में शुद्ध संख्या है एवं इसे प्रायः प्रतिशत रूप में प्रदर्शित किया जाता है। दो अथवा अधिक वितरणों के मध्य तुलनाएं करने के लिए सापेक्ष मापकों का प्रयोग किया जाता है।

विक्षेपण के मापक में वे समस्त अभिलक्षण होने चाहिए, जिन्हें केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के लिए आवश्यक माना जाता है, जैसे–

(1) यह सभी अवलोकनों पर आधारित हो।

(2) इसे सहजता से समझा जा सके।

(3) इसकी गणना स्पष्टतया सरलता से की जाए।

(4) इस पर प्रतिदर्शन के उतार–चढ़ावों का जितना हो सके, कम प्रभाव पड़े।

(5) इसे बीजगणितीय उपचार में प्रयोग किया जा सके।

विचलनशीलता के मापों का प्रकार

सांख्यिकी के क्षेत्र में प्रायः निम्नलिखित विचलनशीलता के मापों का उपयोग किया जाता है–(1) परास, (2) माध्य विचलन, (3) प्रमाप विचलन, (4) चतुर्थक विचलन एवं (5) विचलन गुणांक।

2.3.1 परास (Range)

एक अंक वितरण की विचलनशीलता का माप परास है। परास का अर्थ उस मान से है, जो एक अंक वितरण के उच्चतम प्राप्तांक को न्यूनतम प्राप्तांक से घटाने पर प्राप्त होता है। इसका सूत्र निम्न है– परास = उच्चतम प्राप्तांक – न्यूनतम प्राप्तांक

प्रकीर्णन का सबसे सरल मापक वितरण की परास है। किसी श्रृंखला की परास उस श्रृंखला के उच्चतम व न्यूनतम मानों के मध्य का अंतर है। यदि एक परीक्षा में 248

टिप्पणी

शिक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में विन्यस्त किया जाये तो परास उच्चतम व न्यूनतम अंकों के मध्य के अंतर के समतुल्य होगी।

आवृत्ति वितरण में परास को वितरण के निम्नतम छोर के वर्ग की निम्नतम सीमा एवं वितरण के ऊपरी छोर के वर्ग की उच्चतम सीमा के मध्य अंतर के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

निम्न तालिका में प्रदर्शित चार कार्यशालाओं में श्रमिकों के साप्ताहिक अर्जन (कमायी) के आंकड़ों का विचार करें—

चार कार्यशालाओं में श्रमिकों के साप्ताहिक अर्जन के आंकड़े

साप्ताहिक अर्जन ₹	श्रमिकों की संख्या			
	कार्यशाला *A*	कार्यशाला *B*	कार्यशाला *C*	कार्यशाला *D*
15–16	...	...	2	...
17–18	...	2	4	...
19–20	...	4	4	4
21–22	10	10	10	14
23–24	22	14	16	16
25–26	20	18	14	16
27–28	14	16	12	12
29–30	14	10	6	12
31–32	...	6	6	4
33–34	...	...	2	2
35–36	...	...	...	...
37–38	...	...	4	...
कुल योग	80	80	80	80
माध्य	25.5	25.5	25.5	25.5

कार्यशाला	परास
A	9
B	15
C	23
D	15

तालिका में दर्शाये इन आंकड़ों से यह स्पष्ट है कि परास अधिक होने से समूह में मानों का भिन्न अधिक है।

परास, निरपेक्ष प्रकीर्णन का मापक है एवं इसका प्रयोग यथावत् भिन्न–भिन्न इकाइयों में व्यक्त दो वितरणों की भिन्नताओं की तुलना करने के लिए उपयोगी नहीं हो सकता। प्रकीर्णन की मापित राशि (जैसे कि पाउंड्स में) की तुलना इन्चेज़ में मापित प्रकीर्णन से नहीं की जा सकती। इस प्रकार आपेक्षिक प्रकीर्णन के मापन की आवश्यकता अनुभव की गयी।

निरपेक्ष मापक को आपेक्षिक मापक में परिणत किया जा सकता है, यदि इसे हम प्रयोजन के लिए किसी अन्य मान को मानक के रूप में मानते हुए इस मानक से भाग

दें तो। हम वितरण के माध्य अथवा किसी अन्य स्थैतिक औसत का प्रयोग मानक के रूप में कर सकते हैं।

टिप्पणी

उपरोक्त तालिका के लिए आपेक्षिक प्रकीर्णन होगा–

कार्यशाला $A = \frac{9}{25.5}$ कार्यशाला $C = \frac{23}{25.5}$

कार्यशाला $B = \frac{15}{25.5}$ कार्यशाला $D = \frac{15}{25.5}$

निरपेक्ष भिन्न को आपेक्षिक में बदलने की एक वैकल्पिक विधि के रूप में चरम सीमा के कुलयोग का प्रयोग मानक के रूप में किया जायेगा। यह चरम सीमा के आइटम्स के कुल योग से चरम सीमा के आइटम्स के अंतर को भाग देने के समतुल्य होगा। इस प्रकार,

$$\text{Relative Dispersion} = \frac{\text{Difference of extreme items, i.e, Range}}{\text{Sum of extreme items}}$$

श्रृंखला के आपेक्षिक प्रकीर्णन को प्रकीर्णन–गुणांक अथवा प्रकीर्णन का अनुपात कहा जाता है। पूर्व में हमारे द्वारा श्रमिकों के साप्ताहिक अर्जन के उदाहरण में गुणांक निम्नानुसार होंगे–

कार्यशाला $A = \frac{9}{21+30} = \frac{9}{51}$ कार्यशाला $B = \frac{15}{17+32} = \frac{15}{49}$

कार्यशाला $C = \frac{23}{15+38} = \frac{23}{53}$ कार्यशाला $D = \frac{15}{19+34} = \frac{15}{53}$

परास के लाभ व परिसीमन

लाभ

प्रकीर्णन के उत्तम मापक में जितने अभिलक्षण होने चाहिए, उनमें से दो ही अभिलक्षण परास में होते हैं–

(अ) इसे समझना सरल है; तथा

(आ) इसकी संगणना सरल है।

परिसीमन

परास से उत्तम मापक के अन्य परीक्षणों की तुष्टि नहीं की जा सकती तथा इसी कारण बहुधा इसे प्रकीर्णन का सरल मापक कह दिया जाता है।

परास में भिन्नता की अवधारणा के रूप में निम्नांकित परिसीमन निहित होते हैं–

(क) चूंकि यह समग्र वितरण में दो चरम प्रकरणों पर आधारित है, अतः परास तब अत्यधिक परिवर्तित हो सकती है। यदि एक भी चरम प्रकरण घट गया तो किसी अन्य प्रकरण की निकासी से कोई प्रभाव नहीं पड़ने वाला।

(ख) इससे केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के सापेक्ष श्रृंखला में मानों के वितरण के विषय में कुछ पता नहीं चलता।

(ग) यदि वितरण में ओपन–एंड क्लोसेज़ हों तो इसकी संगणना नहीं की जा सकती।

(घ) इसमें संपूर्ण आंकड़ों को ध्यान में नहीं रखा जाता। इसे निम्नानुसार दर्शाया जा सकता है। निम्न तालिका में प्रदत्त आंकड़े देखिए–

समान संख्या के किंतु भिन्न भिन्नता वाले प्रकरणों का वितरण

वर्ग	शिक्षार्थियों की संख्या		
	अनुभाग *A*	अनुभाग *B*	अनुभाग *C*
0–10	...	...	...
10–20	1	...	...
20–30	12	12	19
30–40	17	20	18
40–50	29	35	16
50–60	18	25	18
60–70	16	10	18
70–80	6	8	21
80–90	11	...	...
90–100	...	...	...
महायोग	110	110	110
परास	80	60	60

इस तालिका की रचना करते हुए समान संख्या के किंतु भिन्न, भिन्नता वाले तीन वितरणों को प्रदर्शित किया गया है। अनुभाग *A* से दो सीमांत शिक्षार्थियों को हटा देने से इसकी परास *B* अथवा **C** के समतुल्य हो जायेगी।

A की अधिक परास 110 शिक्षार्थियों के समूचे समूह का विवरण नहीं है वरन् मात्र दो सीमांत शिक्षार्थियों का विवरण है। अनुभागों *B* व *C* में परास समान है। अनुभाग B में शिक्षार्थी समूह केंद्रीय प्रवृत्ति की ओर अधिक थे, जबकि अनुभाग *C* में ऐसी स्थिति नहीं थी। इस प्रकार, परास में *B* की अधिक समांगता अथवा *C* के अधिक प्रकीर्णन का पता नहीं चलता। इस प्रभाव के कारण प्रकीर्णन के मापक के रूप में इसका प्रयोग यदा–कदा किया जाता है।

परास के विशिष्ट उपयोग

प्रकीर्णन के मापक के रूप में परास के बहुसंख्य परिसीमनों के बावजूद यह निम्नांकित परिस्थितियों में सर्वाधिक उपयोगी रहती है–

(अ) उन परिस्थितियों में, जहां छोरों में ऐसी कोई दुविधा हो, जहां तैयारी की जानी हो। उन परिस्थितियों में वितरण के विषय में कुछ और जानने से अधिक महत्वपूर्ण यह जानना हो सकता है कि सर्वाधिक छोर–प्रकरण कौन–कौन–से आने वाले हैं। उदाहरण हेतु कोई यात्री उस अंचल के न्यूनतम व अधिकतम तापक्रम को जानना चाहेगा, जहां वह जाने की योजना बना रहा है। तूफान के

पानी की निकासी हेतु विनिर्माण–कार्य करने के लिए 24 घंटों के दौरान अधिकतम वर्षा को जानने की इच्छा अभियंता को होगी।

(आ) प्रतिभूतियों की कीमतों के अध्ययन में परास का विशेष महत्व होता है। बुलियन अथवा शेयर्स की कीमतों में उच्चावचन (उतार–चढ़ाव) दर्शाने के लिए परास का प्रयोग लगातार किया जाता है कि किस समयावधि में अधिकतम–न्यूनतम कीमतें कितनी रहीं। यह जानकारी प्रचालकों (ऑपरेटर्स) के अतिरिक्त अन्य व्यक्तियों के लिए भी उपयोगी हैं क्योंकि इससे बुलियन मार्केट की स्थिरता व निवेश के परिवेश का पता होता है।

(इ) सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण में परास का प्रयोग भिन्न के मापक के रूप में किया जाता है। उदाहरणार्थ हम उस परास को निर्धारित करते हैं, जिस पर यादृच्छिक कारणों से गुणवत्ता में भिन्नताएं आ सकती हैं, जो कि नियंत्रण–सीमाओं के स्थिरीकरण का आधार है।

टिप्पणी

परास के गुण

1. एक अंक–वितरण के सभी प्राप्तांकों का प्रभाव, मध्यमान विचलन की गणना पर पड़ता है। अतः उस अंक वितरण का पूर्ण प्रतिनिधित्व करता है।
2. मध्यमान विचलन की प्रकृति को आसानी से समझा जा सकता है।
3. इस पर चरम मदों का प्रभाव कम पड़ा है।

2.3.2 माध्य विचलन

एक श्रृंखला के किसी माध्य (समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक) से निकाले गए विचलनों के जोड़े के समांतर माध्य को माध्य विचलन कहा जाता है।

मध्यमान विचलन या माध्य विचलन के दोष

1. चिह्नों का परित्याग कर देने से यह माप गणितीय दृष्टिकोण से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक हो जाती है।
2. इसका बीजगणितीय विवेचन संभव नहीं है।
3. माध्य विचलन अधिक विश्वसनीय नहीं है क्योंकि भूयिष्ठक के अनिश्चित होने के कारण उससे निकालना ही अनुपयुक्त है, जबकि माध्यिका चरम सीमाओं से अधिक प्रभावित हो सकती है।

अव्यवस्थित अंक–सामग्री से मध्यमान विचलन की गणना

1. सर्वप्रथम दी हुई अव्यवस्थित अंक–साम्रगी का मध्यमान (M) ज्ञात कीजिए।
2. इसके बाद प्राप्तांकों का मध्यमान से विचलन ज्ञात कीजिए।
3. मध्यमान से सभी विचलन ज्ञात कर लेने के बाद $\Sigma(d)$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. निम्न सूत्र में सभी मान रखकर मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए–

$$AD = \frac{\Sigma|d|}{N}$$

टिप्पणी

d	=	मध्यमान से प्राप्तांकों का विचलन
$\|d\|$	=	d के दोनों ओर खिंची रेखाओं का तात्पर्य है कि विचलन का योगफल निकालते समय धन तथा ऋण चिन्हों का महत्व नहीं दिया जाता है।
N	=	प्राप्तांकों की संख्या
$\Sigma\|d\|$	=	मध्यमान से प्राप्तांकों का विचलन

उदाहरण– निम्न अव्यवस्थित अंक सामग्री का मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए–

28, 28, 30, 35, 34, 33, 32, 36

हल– दिए गए प्राप्तांकों को एक पंक्ति में लिखकर मध्यमान निकालिए, फिर मध्यमान से विचलन निम्न प्रकार ज्ञात कीजिए–

***X*(Score)**	***X–M* = |*d*|**
28	28–32=4
28	28–32=4
30	30–32=2
35	35–32=3
34	34–32=2
33	33–32=1
32	32–32=0
36	36–32=4
	$\Sigma\|d\| = 20$

यहां + तथा – चिह्नों को विलचन ज्ञात करते समय महत्व नहीं दिखाया है।

मध्यमान की गणना : $M = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{256}{8} = 32$

मध्यमान विचलन की गणना : $N = 8, \sum|d| = 20$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$AD = \frac{\sum|d|}{N} = \frac{20}{8} = 2.5$$

उदाहरण– कक्षा के परीक्षण में 11 शिक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के निम्नांकित आंकड़ों से माध्य विचलन की गणना करिएः–

14, 15, 23, 20, 10, 30, 19, 18, 16, 25, 12.

हल– माध्यिका = The size of the $\frac{11+1}{2}$ th item

= size of 6th item 18

Serial No.	Marks	$\|X - Median\|$ $\|d\|$
1	10	8
2	12	6
3	14	4
4	15	3
5	16	2
6	18	0
7	19	1
8	20	2
9	23	5
10	25	7
11	30	12
		$\sum \|d\| = 50$

टिप्पणी

माध्यिका से माध्य विचलन $= \frac{\sum |d|}{N}$

$$= \frac{50}{11} = 4.5 \text{ अंक।}$$

समूहबद्ध आंकड़ों के लिए निम्न द्वारा माध्य विचलन को देखना सरल है:–

माध्य विचलन (M.D.) $= \frac{\sum f|d|}{\sum f}$

व्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन की गणना

1. सर्वप्रथम व्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान ज्ञात किया जाता है।
2. मध्यबिंदु का मध्यमान से विचलन ज्ञात किया जाता है।
3. मध्यमान से मध्यबिंदुओं का विचलन ज्ञात करने के पश्चात् इन विचलनों को संबंधित वर्गांतरों की आवृत्तियों से गुणा कीजिए, अर्थात (fd)।
5. अंत में Σfd का मान ज्ञात करके सूत्र में मूल्य को रखकर मध्यमान विचलन (AD) ज्ञात कर लेते हैं।

सूत्र–

$$AD = \frac{\sum |fd'|}{N}$$

यहां

d' = मध्यबिंदु के मध्यमान से विचलन

$\Sigma|d|$ = मध्यमान से मध्य बिंदुओं के विचलनों का योग जब संबंधित आवृत्तियों से गुणा किया गया है तथा + और – चिह्नों का ध्यान न रखा गया हो।

टिप्पणी

N = आवृत्तियों का कुल योग।

F = आवृत्तियां।

उदाहरण– निम्नखित व्यवस्थित अंक सामग्री से मध्यमान विचलन (AD) ज्ञात कीजिए।

C.I.	f	X Mid-Point	fX	|d'| (X–M)	|fd'|
60-64	1	62	62	19.13	19.13
55-59	2	57	104	14.13	28.26
50-54	3	52	156	9.13	27.39
45-49	4	47	188	4.13	16.52
40-44	6	32	252	.87	5.22
35-39	3	37	111	5.87	17.61
30-34	2	32	64	10.87	21.74
25-29	1	27	27	15.87	15.87
20-24	1	22	22	20.87	20.87
	$N = 23$		$\Sigma fX = 986$		$\Sigma\|fd'\| = 172.61$

हल–

सर्वप्रथम मध्यमान ज्ञात कीजिए–

$$M = \frac{\sum fX}{N} = \frac{986}{23} = 42.869 = 42.87$$

मध्यमान विचलन की गणना

$$\sum|fd'| = 172.61, N = 23$$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$AD = \frac{\sum|fd'|}{N} = \frac{172.61}{23} = 7.50$$

यह अंक सामग्री छोटी विधि द्वारा ज्ञात की गयी है। मध्यमान विचलन के लिए लघु विधि या कल्पित मान का प्रयोग भी किया जाता है।

उदाहरण– निम्नलिखित तालिका से संक्षिप्त विधि द्वारा मध्यमान विचलन ज्ञात कीजिए–

टिप्पणी

C.I.	f	d	fd	X Mid-Point	|d'| (X–M)	|fd'|
60-64	1	–4	+4	62	20	20
55-59	3	–3	+9	57	15	45
50-54	3	–2	+6	52	10	30
45-49	4	–1	+4	47	5	20
40-44	7	0	0	42	0	0
35-39	3	–1	–3	37	5	15
30-34	3	–2	–6	32	10	30
25-29	2	–3	–6	27	15	30
20-24	2	–4	–8	22	20	40
	$N = 28$		$\Sigma fd = 0$			$\Sigma\|fd'\| = 230$

हल–

मध्यमान की गणना–

$$M = A + \left(\frac{\sum fd}{N}\right) \times C.I.$$

$$= 42 + \frac{0}{28} \times 5 = 42$$

मध्यमान विचलन की गणना–

$$AD = \frac{\sum |fd'|}{N} = \frac{230}{28} = 8.21$$

जहां समूहबद्ध पृथक् (डिस्क्रीट) आंकड़ों के लिए $|d| = |X - \text{median}|$ एवं समूहबद्ध सतत आंकड़ों के लिए $|d| = M - \text{median}|$ समूह विशेष के मध्य–मान के रूप में M है। इस सूत्र के प्रयोग को निम्न उदाहरणों द्वारा दर्शाया जा रहा है–

उदाहरण– निम्न आंकड़ों से माध्य विचलन की गणना करें–

वस्तु का आकार	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	3	6	9	13	8	5	4

हल–

Size	*Frequency f*	*Cumulative Frequency*	*Deviations from Median (9)* $\|d\|$	$f\|d\|$
6	3	3	3	9
7	6	9	2	12
8	9	18	1	9
9	13	31	0	0
10	8	39	1	8
11	5	44	2	10
12	4	48	3	12
	48			60

माध्यिका= $\frac{48+1}{2}$ का आकार = 24.5th वस्तु, जो कि 9 है।

इसीलिए विचलनों की गणना 9 अर्थात $|d| = |X-9|$ से की जाती है।

टिप्पणी

माध्य विचलन= $\frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{60}{48} = 1.25$

उदाहरण– निम्न आंकड़े से माध्य विचलन की गणना करें–

X	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
f	18	16	15	12	10	5	2	2

हल

यह सतत चर वाला एक आवृत्ति वितरण है। इस प्रकार विचलनों की गणना मध्यमानों से की जाती है।

X	Mid-value	f	Less than $c.f.$	Deviation from median $\|d\|$	$f\|d\|$
0–10	5	18	18	19	342
10–20	15	16	34	9	144
20–30	25	15	49	1	15
30–40	35	12	61	11	132
40–50	45	10	71	21	210
50–60	55	5	76	31	155
60–70	65	2	78	41	82
70–80	75	2	80	51	102
		80			1182

Median = The size of $\frac{80}{2}$ th item

$$= 20 + \frac{6}{15} \times 10 = 24$$

and then, Mean Deviation $= \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{1182}{80} = 14.775.$

2.3.3 प्रमाप विचलन

किसी श्रेणी के समांतर माध्य के निकाले गए उसके विभिन्न मद–मूल्यों के विचलनों के वर्गों का माध्य वर्गमूल, उस श्रेणी का मानक विचलन या प्रमाणिक विचलन कहलाता है। इसे द्वितीय घात का विचलन या मूल मध्यक वर्ग विचलन भी कहते हैं।

प्रमाणिक विचलन के गुण

(1) अंक वितरण के प्रत्येक अंक से प्रमाणिक विचलन प्रभावित होता है।

(2) प्रमाणिक विचलन, सामान्य संभावना वक्र का मुख्य आधार है।

(3) विचलनशीलता का यह सर्वशुद्ध और विश्वसनीय माप है।

(4) अंक–वितरण के मध्यमान की विश्वसनीयता का अध्ययन प्रमाणिक विचलन के आधार पर किया जाता है।

प्रमाणिक विचलन का उपयोग कब करना चाहिए?

1. जब सर्वाधिक शुद्ध और विश्वसनीय विचलन माप की आवश्यकता हो।
2. जब केंद्रीय मापकों में मध्यमान की गणना की गई हो।
3. जब दो अंक–वितरणों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो।
4. जब सह–संबंध गुणांक तथा मध्यमानों के अंतर की सार्थकता की जांच करनी होती है, तब S.D. (प्रमाणिक विचलन) की गणना आवश्यक होती है।
5. प्रमाणिक विचलन की गणना की आवश्यकता तब भी पड़ती है, जब मूल प्राप्तांकों को प्रमाणिक प्राप्तांकों में बदलना होता है।
6. विचलन गुणांकों और प्रमाणिक त्रुटि के अध्ययन में इसकी आवश्यकता होती है।
7. जब सीमांत प्राप्तांकों को महत्व देना होता है, तब भी S.D. की गणना की जाती है।

अव्यवस्थित अंक–सामग्री का प्रमाणिक विचलन

अव्यवस्थित अंक सामग्री से प्रमाणिक विचलन की गणना के सूत्र निम्नलिखित हैं। इन सभी सूत्रों से S.D. का समान मान प्राप्त होता है–

प्रथम सूत्र – $S.D. = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$

जबकि, d = प्राप्तांकों का मध्यमान से विचलन

Σd^2 = मध्यमान से लिए गए विचलनों के वर्गों का योग

N = प्राप्तांकों की संख्या

द्वितीय सूत्र– $S.D. = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - C^2}$

तृतीय सूत्र– $S.D. = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - (M)^2}$

यहां M = मध्यमान, C = मध्यमान– कल्पित मध्यमान

गणना विधि

1. सर्वप्रथम दी हुई अंक सामग्री क्रमबद्ध कीजिए फिर सभी अंकों का ΣX और N का मूल ज्ञात करके मध्यमान की गणना कीजिए।
2. प्राप्तांकों का मध्यमान से विचलन, $(X–M)$ करके d प्राप्त कर लिया जाता है। यहां + और – चिह्नों को लगाने की आवश्यकता नहीं है।

3. प्रत्येक विचलन का वर्ग करके d^2 प्राप्त करते हैं।
4. अंतिम चरण में Σd^2 और N का मान SD मान में रखते हैं और गणना करके SD का मान प्राप्त कर लिया जाता है।

टिप्पणी

उदाहरण– नीचे दी हुई अव्यवस्थित अंक–सामग्री से प्रमाणिक विचलन की गणना कीजिए।

5, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12

हल– सर्वप्रथम मध्यमान निकालिए–

$$M = \frac{\sum X}{N} = \frac{72}{8} = 9$$

प्राप्तांक	$X–M=d$	d^2
5	5–9=4	16
7	7–9= –2	4
8	8–9= –1	1
9	9–9= –0	0
10	10–9=1	1
10	10–9=1	1
11	11–9=2	4
12	12–9=3	9
		$\Sigma d^2 = 36$

अतः $\Sigma d^2 = 36, \quad N=8$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{36}{8}}$$

$$= \sqrt{4.5}$$

$$= 2.12$$

उदाहरण– निम्न प्राप्तांकों का प्रमाणिक विचलन, द्वितीय सूत्र द्वारा ज्ञात कीजिए–

7, 8, 8, 10, 11, 13, 14, 15

हल– सर्वप्रथम मध्यमान की गणना कीजिए।

$$M = \frac{\sum x}{N} = \frac{86}{8} = 10.75$$

कल्पित माध्य = 11

C = मध्यमान– कल्पित माध्य

= 10.75 – 11.0 = –0.25

टिप्पणी

प्राप्तांक	$X–Am=d$	d^2
7	7–11= –4	16
8	8–11= –3	9
8	8–11= –3	9
10	10–11= –1	1
11	11–11=0	0
13	13–11=2	4
14	14–11=3	9
15	15–11=4	16
N=8		$\Sigma X = 64$

$$\Sigma d^2 = 64, \quad C^2 = (-0.25)^2, N=8$$

इन मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$S.D. = \sqrt{\frac{64}{8} - (-0.25)^2}$$

$$= \sqrt{8 - 0.06} = \sqrt{7.94} = 2.817$$

व्यवस्थित अंक सामग्री से प्रमाणिक विचलन

व्यवस्थित अंक–सामग्री के S.D. की गणना के निम्न तीन सूत्र प्रचलित हैं–

$$S.D. = i\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \quad \text{प्रथम सूत्र}$$

$$S.D. = {}^{i/N}\sqrt{N(\sum fd^2) - (\sum fd)^2} \quad \text{द्वितीय सूत्र}$$

जबकि, $S.D.$ = प्रमाणिक विचलन

i = वर्गांतर का आकार

Σfd = आवृत्तियों एवं विचलनों का योग

Σfd^2 = विचलनों के वर्ग एवं आवृत्तियों के गुणनफल का योग

N = प्राप्तांकों की संख्या

दीर्घ विधि द्वारा $S.D.$ की गणना का सूत्र,

$$S.D. = \frac{\sum fd^2}{N}$$

जबकि d = मध्य बिंदुओं का मध्यमान से विचलन

Σfd^2 = विचलनों के वर्ग एवं आवृत्तियों के गुणनफल का योग

N = प्राप्तांकों की संख्या

संक्षिप्त विधि द्वारा $S.D.$ की गणना

टिप्पणी

गणना विधि

(1) इस विधि द्वारा *S.D.* की गणना करते समय कुछ गणनाएं वैसे ही करनी पड़ती है; जैसे मध्यमान में करनी पड़ती है।

(2) सर्वप्रथम जिस वर्गांतर की आवृत्ति सर्वाधिक होती है या जो वर्गांतर मध्य में होता है, उसमें कल्पित माध्य (AM) मानकर शून्य लगा देते हैं तथा d और fd की गणना करते हैं। अंत में fd^2 की गणना की जाती है।

(3) गणना के तीसरे चरण में Σfd, Σfd^2 तथा N और *C.I.* के मान प्राप्त कर लेते हैं।

(4) गणना के अंतिम चरण में S.D. के सूत्र में सभी मानों को रखकर प्रमाणिक विचलन ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण– निम्नलिखित व्यवस्थित अंक–सामग्री से संक्षिप्त विधि द्वारा S.D. की गणना कीजिए।

C.I.	f	d	fd	fd^2
26-27	1	+4	+4	16
24-25	2	+3	+6	18
22-23	3	+2	+6	12
20-21	5	+1	+5	5
18-19	8	0	0 (21)	0
16-17	4	–1	–4	4
14-15	3	–2	–6	12
12-13	2	–3	–6	18
10-11	1	–4	–4 (20)	16
	N=29		$\Sigma fd = 1$	$\Sigma fd^2 = 101$

हल– यहां $\Sigma fd = 1$, $Sfd^2 = 101$, $N = 29$ तथा $i = 2$

सूत्र में मूल्यों को रखने पर,

(1) **प्रथम सूत्र**– $\sqrt[i]{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt[i]{\frac{101}{29} - \left(\frac{1}{29}\right)^2}$$

$$= \sqrt[2]{3.482 - 0.001}$$

$$2 \times 1.865 = 3.73$$

(2) **द्वितीय सूत्र**–

$$S.D. = \sqrt[i/N]{N(\sum fd^2) - \left(\sum fd\right)^2}$$

$$= {}^{2}/_{29}\sqrt{29\times101-(1)^2} = {}^{2}/_{29}\sqrt{2928}$$

$$\frac{2}{29}\times54.11$$

$$= 3.73$$

टिप्पणी

उदाहरण– दीर्घ विधि द्वारा प्रमाणिक विचलन की गणना कीजिए।

C.I.	*f*	*X* (*Midpoint*)	*fX*	*X–M (d)*	*fd*	fd^2
34-36	1	35	35	11.89	11.89	23.78
31-33	2	32	64	8.89	17.78	26.67
28-30	3	29	87	5.89	17.67	23.56
25-27	5	26	130	2.89	14.45	17.34
22-24	6	23	138	0.11	00.66	00.77
19-21	4	20	80	3.11	12.44	15.55
16-18	3	17	51	6.11	18.33	24.44
13-15	2	14	28	9.11	18.22	27.33
10-12	1	11	11	12.11	12.11	24.22
	N=27		ΣfX=624			Σfd^2=183.66

हल– मध्यमान की गणना,

$$M = \frac{\sum fX}{N} = \frac{624}{27} = 23.11$$

दीर्घ विधि से S.D. की गणना–

$$S.D. = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

$$= \sqrt{6.802} = 2.608$$

2.3.4 विचलन गुणांक

विचलन गुणांक, प्रमाणिक विचलन और संबंधित मध्यमान का अनुपात है। बहुधा इस अनुपात को 100 से गुणा कर दिया जाता है।

विचलन गुणांक का प्रयोग

जब दो या दो से अधिक अंक वितरणों के *N*, *M*, और S.D. तो ज्ञात हों साथ–साथ *M* और S.D. की मान इकाइयां भिन्न–भिन्न हों (जैसे एक वितरण की मापन इकाई सेंटीमीटर में हो तथा दूसरे वितरण की इकाई ग्राम में हो) और इन अंक वितरणों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो तो इस अवस्था में विचलन गुणांक की गणना करके इस गुणांक के आधार पर दोनों समूहों की तुलना की जा सकती है।

इसकी गणना का सूत्र निम्नलिखित है–

$$C.V. = \frac{\sigma\times100}{M}$$

यहां σ = प्रमाणिक विचलन, M = मध्यमान

उदाहरण– एक कक्षा के विद्यार्थियों के शिक्षाशास्त्र में औसत अंक 70 तथा S.D. 8.4 है तथा इसी कक्षा के विद्यार्थियों का इतिहास में औसत प्राप्तांक 54 है तथा S.D. 6.8 है। C.V. की गणना करके परिणामों की विवेचना कीजिए।

टिप्पणी

हल– शिक्षाशास्त्र के C.V. की गणना।

$$C.V. = \frac{\sigma}{M} \times 100 = \frac{8.4}{70} \times 100 = 12$$

अतः इतिहास के प्राप्तांकों में विचलनशीलता, मनोविज्ञान के प्राप्तांकों की अपेक्षा अधिक है।

केंद्रीय प्रवृत्ति और फैलाव के माप

स्व–अध्ययन सामग्री फैलाव के माप पर समस्याओं के हल

उदाहरण– निम्नलिखित शृंखला (अकेली शृंखला) में परास और उसके गुणांक का पता लगाएं–

96, 180, 98, 75, 270, 80, 102, 100, 94.

हल– यहां, L = आइटम का सबसे बड़ा मूल्य = 270

और S = आइटम का सबसे छोटा मूल्य = 75

इसलिए, परास (R) = (L–S) = (270–75) = 195

और परास का गुणांक = $\frac{(L-S)}{(L+S)} = \frac{(270-75)}{(270+75)} = \frac{195}{345} = 0.56$

उदाहरण– निम्नलिखित (अलग) शृंखला में परास और उसके गुणांक का पता लगाएं–

मासिक औसत (in ₹)	100	150	200	250	300	500
मजदूरों की संख्या	30	20	15	10	4	1

हल– यहां, L = आइटम का सबसे बड़ा मूल्य = 500

और S = आइटम का सबसे छोटा मूल्य = 100

इसलिए, परास (R) = (L–S) = (500–100) = 400

और परास का गुणांक = $\frac{(L-S)}{(L+S)} = \frac{(500-100)}{(500+100)} = 0.66$

उदाहरण– निम्नलिखित (लगातार) शृंखला में परास और उसके गुणांक का पता लगाएं–

आकार	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
आवृत्ति	8	15	20	5	3

हल– यहां, L = आइटम का सबसे बड़ा मूल्य = 60

और S = आइटम का सबसे छोटा मूल्य = 10

इसलिए, परास (R) = (L–S) = (60– 10) = 50

और परास का गुणांक = $\frac{(L-S)}{(L+S)}$ = $\frac{(60-10)}{(60+10)}$ = 0.714

टिप्पणी

उदाहरण– निम्न डाटा से चतुर्थक विचलन (या अर्द्ध–अंतःचतुर्थक परास) और उसके गुणांक का पता लगाएं–

आकार	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आवृत्ति	3	2	5	7	9	5	8	10	2	1

हल–

आकार	*आवृत्ति*	*संचित आवृत्ति*
1	3	3
2	2	5
3	5	10
4	7	17
5	9	26
6	5	31
7	8	39
8	10	49
9	2	51
10	1	52
		$N = \Sigma f = 52$

अब, निचला चतुर्थक

Q_1 = $\left(\frac{N+1}{4}\right)$, वें आइटम का आकार

= $\left(\frac{52+1}{4}\right)$, वें आइटम का आकार या $13\frac{1}{4}$, वां आइटम

= 13वां आइटम + $\frac{1}{4}$, (13वें और 14वें आइटम के बीच अंतर)

= $4+\frac{1}{4}(4-4)$, क्योंकि $T_{13} = T_{14} = 4$

और ऊपरी चतुर्थक,

Q_3 = $\frac{3(N+1)}{4}$, वें आइटम का आकार

= $\frac{3}{4}$ (52 + 1) वें आइटम का आकार या $39\frac{3}{4}$ वां आइटम

= 39वां आइटम + $\frac{3}{4}$, (39वें और 40वें आइटम के बीच अंतर)

= $\left[7 + \frac{3}{4}(8-7)\right]$ = 7.75

टिप्पणी

इसलिए, अपेक्षित चतुर्थक विचलन = ½ $(Q_3 - Q_1)$ = ½ (7.75 – 4)

= 1.725

और चतुर्थक विचलन का गुणांक,

$$= \left(\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}\right) = \left(\frac{7.75 - 4}{7.75 + 4}\right) = 0.32$$

उदाहरण– निम्न लगातार श्रृंखला से चतुर्थक विचलन और उसके गुणांक का पता लगाएं–

वजन (पौंड)	व्यक्तियों की संख्या	वजन (पौंड)	व्यक्तियों की संख्या
70–80	12	110–120	50
80–90	18	120–130	45
90–100	35	130–140	20
100–110	42	140–150	8

हल– यहां, हमारे पास है

वजन (पौंड)	आवृत्ति (व्यक्तियों की संख्या)	संचित आवृत्ति (C.F)
70–80	12	12
80– 90	18	30
90–100	35	65
100–110	42	107
110–120	50	157
120–130	45	202
130–140	20	222
140–150	8	230
कुल	$N = \Sigma f = 230$	

यहां $\frac{N}{4} = \frac{1}{4}(230) = 57.5$

$\therefore$ Q_1 = 57.5वें or 58वें आइटम जो 90.100 समूह में निहित हैं।

$$\therefore \quad Q_1 = \left\{L + \left(\frac{\frac{N}{4} - c.f}{f}\right) \times i\right\} = \left\{90 + \left(\frac{\frac{230}{4} - 30}{35}\right) \times 10\right\} = 97.85$$

इसी तरह,

$$\frac{3}{4}N = \frac{3}{4}(230) = 172.5$$

$\therefore$ Q_3 = 172.5वें or 173वें आइटम, जो 120.30 समूह में निहित हैं।

$$\therefore \; Q_3 = \left\{L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - c.f}{f}\right) \times i\right\} = \left\{120 + \left(\frac{\frac{3}{4}(230) - 157}{45}\right) \times 10\right\} = 123.22$$

टिप्पणी

इसलिए, चतुर्थक विचलन $Q = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$

$= \frac{1}{2}$ (123.22 – 97.85) = 12.685

और, चतुर्थक विचलन का गुणांक,

$$= \left(\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}\right) = \left(\frac{123.22 - 97.85}{123.22 + 97.85}\right) = 0.114$$

उदाहरण– पांच मजदूरों की मासिक आय (₹ के हजार में) को 30, 40, 45, 50, 55 के रूप में दिया जाता है। मीडियन से विचलन का पता लगाएं।

हल– N = आइटम की संख्या = 5

आय, पहले से आरोही क्रम में मौजूद थी।

मीडियन = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वें आइटम का आकार

= तीसरे आइटम का आकार = ₹ 45 = M

तालिकाबद्ध रूप में लिखकर, हमारे पास है–

X	$(X - M) = (X - 45)$	$\|X - M\|$
30	– 15	15
40	– 5	5
45	0	0
50	+ 5	5
55	+ 10	10
कुल		$\Sigma\|X - M\| = 35$

$\therefore$ अपेक्षित माध्य विचलन = $\frac{\Sigma |X - M|}{N} = \frac{35}{5}$ = 7

उदाहरण– छात्रों के एक विशिष्ट समूह की गर्दन परिधि का विवरण देते हुए निम्न डेटा के लिए माध्य से माध्य विचलन की गणना करें।

मध्य–मूल्य	30	31.5	33	34.5	36	37.5	39	40.5
छात्रों की संख्या	4	19	30	63	66	29	18	1

हल– तालिकाबद्ध रूप में लिखकर, हमारे पास है–

मध्य–मूल्य (X)	*छात्रों की संख्या* (f)	$d = (X - A) = (X - 36)$	$fd = f(X - A)$
30	4	– 6.0	– 24.0
31.5	19	– 4.5	– 85.5
33	30	– 3.0	– 90.0
34.5	63	– 1.5	– 94.5
36	66	0	0.0
37.5	29	+ 1.5	43.5
39	18	+ 3.0	54.0
40.5	1	+ 4.5	4.5

कुल	$\Sigma f = N = 230$		$\Sigma fd = -192$

($A = 36$ मानते हुए)

टिप्पणी

$$\text{समांतर माध्य} = \left\{A + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)\right\}$$

$$= \left\{36 + \left(\frac{-192}{230}\right)\right\} = 35 \text{ सेमी} = M \text{ (कहिए)}$$

अब, माध्य विचलन के लिए गणना निम्न तालिका में दिखाई जा रही है–

x	f	$\|X - M\| = \|X - 35\|$	$f.\|X - M\|$
30	4	5	20
31.5	19	3.5	66.5
33	30	2	60
34.5	63	0.5	31.5
36	66	1	66
37.5	29	2.5	72.5
39	18	4	72
40.5	1	5.5	5.5
	$N = 230$ ($= \Sigma f$)		394 ($= \Sigma f\|x - M\|$)

$$\therefore \text{ अपेक्षित माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f|\ X - M|}{N} = \frac{394}{230} = 1.77$$

उदाहरण– निम्नलिखित श्रृंखला की माध्यिका से माध्य विचलन की गणना करें–

आकार	4	6	8	10	12	14	16
आवृत्ति	2	4	5	3	2	1	4

हल– $N = \Sigma f = 21$

माध्य, $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वें आइटम का आकार = 8

आकार (X)	आवृत्ति (f)	संचित आवृत्ति	$\|X–M\| = \|X - 8\|$	$f.\|X– M\|$
4	2	2	4	8
6	4	6	2	8
8	5	11	0	0
10	3	14	2	6
12	2	16	4	8
14	1	17	6	6
16	4	21	8	32
	$N = \Sigma f = 21$			$\Sigma f\|X - M\| = 68$

$$\therefore \text{ अपेक्षित माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f\,|\,X - M\,|}{N}$$

$$= \frac{68}{21} = 3.24$$

उदाहरण– निम्नलिखित तालिका के लिए माध्य से माध्य विचलन की गणना करें–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
छात्रों की संख्या	5	8	15	16	6

टिप्पणी

हल– मान लीजिए $A = 25$ (माना गया माध्य)

श्रेणी	आवृत्ति (f)	मध्य–मान (X)	$d = \left(\frac{X-A}{i}\right)$ $\left(\frac{X-25}{10}\right)$	fd	$\|X-M\|$ $=\|X-27\|$	$f.\|X-M\|$
0–10	5	5	– 2	– 10	22	110
10–20	8	15	– 1	– 8	12	96
20–30	15	25	0	0	2	30
30–40	16	35	1	16	8	128
40–50	6	45	2	12	18	108
	$N = \Sigma f$ $= 50$			Σfd $= 10$		$\Sigma f\|X - M\|$ $= 472$

समांतर माध्य $M = \left\{A + \left\{\frac{\Sigma fd}{N}\right\} \times i\right\}$

$$= \left\{25 + \left\{\frac{10}{50}\right\} \times 10\right\}$$

$\therefore$ अपेक्षित माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f\,|X-M|}{N}$

$$= \frac{472}{50} = 9.44$$

और, माध्य विचलन का गुणांक

$$= \frac{\text{माध्य विचलन}}{\text{माध्यिका}}$$

$$= \frac{9.44}{27} = 0.35$$

उदाहरण– निम्नलिखित तालिका के माध्य से माध्य विचलन का पता लगाएं–

से नीचे उम्र	10	20	30	40	50	60	70	80
व्यक्तियों की संख्या	15	30	53	75	100	110	115	125

हल– दिए गए आंकड़ों को तालिकाबद्ध रूप में लिखें, हमारे पास है–

श्रेणी	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
संचित आवृत्ति	15	30	53	75	100	110	115	125
आवृत्ति	15	15 (30–15)	23 (53–30)	22 (75–53)	25 (100–75)	10 (110–100)	5 (115–110)	10 (125–115)

टिप्पणी

गणना निम्न तालिका में दिखाई जा रही है–

श्रेणी	आवृत्ति (f)	माध्य–मूल्य (X)	$d = \left(\frac{X-A}{i}\right) = \left(\frac{X-45}{10}\right)$	fd	|X–M| =|X–35.16|	f |X–M|
0–10	15	5	– 4	– 60	+ 30.16	452.40
10–20	15	15	– 3	– 45	+ 20.16	302.40
20–30	23	25	– 2	– 46	+ 10.16	233.68
30–40	22	35	– 1	– 22	+ 0.16	3.52
40–50	25	45	0	0	+ 9.84	246.00
50–60	10	55	+ 1	+ 10	+ 19.84	190.84
60–70	5	65	+ 2	+ 10	+ 29.84	149.20
70–80	10	75	+ 3	+ 30	+ 39.84	398.40
कुल	$N = \Sigma f = 125$			$\Sigma fd =$ = – 123		$\Sigma f\|X–M\|=$ = 1976.44

मान लीजिए, माना गया समांतर माध्य $A = 45$

समांतर (असली) माध्य,

$$M = \left\{A + \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right) \times i\right\}$$

$$= \left\{45 + \left(\frac{-123}{125}\right) \times 10\right\} = 35.16$$

$\therefore$ अपेक्षित माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f |X - M|}{N} = \frac{1976.44}{125} = 15.8$

उदाहरण– चार छात्रों A, B, C, D द्वारा प्राप्त 5, 7, 9, 11 अंकों से मानक विचलन और उसके गुणांक की गणना करें।

हल–

छात्र का नाम	अंक (X)	$(X-\bar{X}) = (X - 8)$	$(X-\bar{X})^2 = (X - 8)^2$
A	5	– 3	9
B	7	– 1	1
C	9	+ 1	1
D	11	+ 3	9
$N = 4$	$\Sigma X = 32$		$\Sigma(X-\bar{X})^2 = 20$

समांतर माध्य, $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{32}{4} = 8$

मानक विचलन, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5} = 2.23$

और, मानक विचलन का गुणांक,

$$= \left(\frac{\sigma}{\bar{X}}\right) = \frac{2.23}{8} = 0.28$$

टिप्पणी

उदाहरण– निम्नलिखित श्रृंखला के लिए मानक विचलन की गणना करें–

X	0	10	20	30	40	50	60	70	80
f	150	140	100	80	80	70	30	14	0

हल– यहां, हमारे पास हैं–

X	f	fX	$(X-\bar{X})$ = (X – 23)	$(X-\bar{X})^2$ = $(X-23)^2$	$f(X-\bar{X})^2$ $f(X-23)^2$
0	150	0	– 23	529	79350
10	140	1400	– 13	169	23660
20	100	2000	– 3	9	900
30	80	2400	7	49	3920
40	80	3200	17	289	23120
50	70	3500	27	729	51030
60	30	1800	37	1369	41070
70	14	980	47	2209	30926
80	0	0	57	3249	0
	$N = \Sigma f$ = 664	ΣfX = 15,280			$\Sigma f(X-\bar{X})^2$ = 253976

यहां,
$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$$
$$= \left(\frac{15280}{664}\right) \approx 23$$
$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{N}}$$
$$= \sqrt{\frac{253976}{664}} = 19.557$$

उदाहरण– निम्नलिखित के मानक विचलन की गणना करें–

श्रेणी	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
आवृत्ति	6	5	15	10	5	4	3	2

हल– यहां हमारे पास हैं–

श्रेणी	*मध्य–मान*	*आवृत्ति* (X)	$(X-\bar{X})$ (f)	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$
5–10	7.5	6	– 13.7	187.69	1126.14
10–15	12.5	5	– 8.7	75.69	378.45
15–20	17.5	15	– 3.7	13.69	205.35
20–25	22.5	10	1.3	1.69	16.90
25–30	27.5	5	6.3	39.69	198.45
30–35	32.5	4	11.3	127.69	510.76
35–40	37.5	3	16.3	265.69	797.07
40–45	42.5	2	21.3	453.69	907.38
कुल		$N = \Sigma f = 50$			$\Sigma f(X-\bar{X})^2$ = 4140.50

टिप्पणी

यहां, $\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \left\{\frac{7.5(6)+12.5(5)+...+42.5(2)}{50}\right\}$

$$\bar{X} = \frac{1060}{50} = 21.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f\left(X-\bar{X}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{4140.50}{50}} = 9.1$$

मानक विचलन का गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{9.1}{21.2} = 0.429$

उदाहरण— निम्न तालिका से शार्ट–कट विधि द्वारा मानक विचलन और उसके गुणांक की गणना करें—

श्रेणी	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
आवृत्ति	18	44	102	160	57	91

हल— मान लीजिए, माना गया माध्य $A = 32.5$

मध्य–मान (X)	*आवृत्ति (f)*	*(X –A) = d*	d^2	*fd*	fd^2
22.5	18	– 10	100	– 180	1800
27.5	44	– 5	25	– 220	1100
32.5	102	0	0	0	0
37.5	160	5	25	800	4000
42.5	57	10	100	570	5700
47.5	91	15	225	285	4275
कुल	$N = 472$			Σfd = 1255	Σfd^2 = 16875

$\therefore$ मानक विचलन, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16875}{472} - \left(\frac{1255}{472}\right)^2} = \sqrt{35.75 - 7.06} = \sqrt{28.69} = 5.356$$

और, समांतर माध्य,

$$\bar{X} = \left\{A + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)\right\} = \left\{32.5 + \left(\frac{1255}{472}\right)\right\} = 35.15$$

मानक विचलन का गुणांक $= \left(\frac{\sigma}{\bar{X}}\right) = \frac{5.356}{35.15} = 0.152$

उदाहरण— चरण विचलन विधि द्वारा निम्न तालिका से मानक विचलन और उसके गुणांक की गणना करें—

श्रेणी	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
आवृत्ति	3	61	132	153	140	51	2

हल– मान लीजिए माना गया माध्य, A = 55, तो हमें मिलता है–

मध्य–मान	आवृत्ति (X)	$(X-A)$ (f)	$d = \left(\frac{X-A}{i}\right)$ $= (X-55)$	fd $= (X-55)/10$	fd^2
25	3	– 30	– 3	– 9	27
35	61	– 20	– 2	– 122	244
45	132	– 10	– 1	– 132	132
55	153	0	0	0	0
65	140	10	1	140	140
75	51	20	2	102	204
85	2	30	3	6	18
कुल	$N = \Sigma f = 542$			$\Sigma fd = -15$	$\Sigma fd^2 = 765$

टिप्पणी

$\therefore$ मानक विचलन, $\sigma = i \times \sqrt{\left\{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2\right\}}$

$$= 10 \times \sqrt{\left\{\frac{765}{542} - \left(\frac{-15}{542}\right)^2\right\}} = 11.84$$

और, समांतर माध्य,

$$\bar{X} = \left\{A + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) \times i\right\}$$

$$= \left\{55 + \left(\frac{-15}{542}\right) \times 10\right\} = 54.72$$

मानक विचलन का गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{11.84}{54.72} = 0.216$

उदाहरण– अग्रलिखित परिणाम 10 मैचों में दो खिलाड़ियों A और B द्वारा बनाए गए रन के आधार पर प्राप्त किया गया। अधिक सुसंगत खिलाड़ी कौन है?

	खिलाड़ी A	खिलाड़ी B
औसत रन	44.30	62.70
मानक विचलन	4.21	9.83

हल– **खिलाड़ी A के लिए**–

भिन्नता का गुणांक $(C.V_A) = \left(\frac{\sigma}{\bar{X}}\right) \times 100 = \left(\frac{4.21}{44.30}\right) \times 100 = 9.503$

खिलाड़ी B के लिए–

भिन्नता का गुणांक $(C.V_B) = \left(\frac{\sigma}{\bar{X}}\right) \times 100 = \left(\frac{9.83}{62.70}\right) \times 100 = 15.678$

जैसे कि $C\text{–}V_A < C\text{–}V_B$, खिलाड़ी A खिलाड़ी B से ज्यादा सुसंगत है।

उदाहरण– 150 छात्रों का माध्य वजन, 60 किलो है। लड़कों का माध्य वजन 10 किलो के एक मानक विचलन के साथ 70 किलो है। लड़कियों के लिए, माध्य वजन

55 किलो है और मानक विचलन 15 किलो है। लड़कों की संख्या और संयुक्त मानक विचलन का पता लगाएं।

टिप्पणी

हल– (i) $\bar{X}_{12} = \left(\frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2}{N_1 + N_2}\right)$

दिया हुआ है $\bar{X}_{12} = 60, \bar{X}_1 = 70, \bar{X}_2 = 55, N_1 + N_2 = 150$

हमें लड़कों की संख्या का पता लगाना है।

मान लीजिए, $N_1 =$ लड़कों की संख्या

$N_2 =$ लड़कियों की संख्या $= (150 - N_1)$

प्रतिस्थापन पर, हमारे पास है–

$$60 = \left\{\frac{N_1(70) + (150 - N_1)55}{150}\right\}$$

स्थानांतरित करके, $N_1 = 100 \Rightarrow N_2 = 50$

(ii) संयुक्त मानक विचलन–

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2 + N_1 d_1^2 + N_2 d_2^2}{N_1 + N_2}}$$

$N_1 = 50, \sigma_1 = 10,$

$N_2 = 100, \sigma_2 = 15$

$d_1 = |\bar{X}_1 - \bar{X}_{12}| = |70 - 60| = 10$

$d_2 = |\bar{X}_2 - \bar{X}_{12}| = |55 - 60| = 5$

$$\therefore \sigma_{12} = \sqrt{\frac{50(10)^2 + 100(15)^2 + 50(10)^2 + 100(5)^2}{50 + 100}}$$

$\sigma_{12} = 15.28$

उदाहरण– निम्न तालिका से लुप्त जानकारी खोजें–

	समूह I	*समूह II*	*समूह III*	*संयुक्त*
संख्या	50	?	90	200
मानक विचलन	6	7	?	7.746
माध्य	113	?	115	116

हल–

मान लीजिए N_1, N_2, N_3 क्रमशः 1, 2 और 3 समूहों में टिप्पणियों की संख्या का प्रतिनिधित्व करते हैं।

$(N_1 + N_2 + N_3) = 200$

$\Rightarrow (50 + N_2 + 90) = 200$

$\Rightarrow N_2 = 60$

संयुक्त माध्य–

$$\bar{X}_{123} = \left(\frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2 + N_3\bar{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 116 = \left\{\frac{50(113) + 60\bar{X}_2 + 90(115)}{50 + 60 + 90}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{X}_2 = 120 \text{ (On transposing)}$$

संयुक्त मानक विचलन–

$$\sigma_{123} = \sqrt{\frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2 + N_3\sigma_3^2 + N_1d_1^2 + N_2d_2^2 + N_3d_3^2}{N_1 + N_2 + N_3}}$$

$$\sigma_{123} = 7.746, \quad d_1 = \left|\bar{X}_1 - \bar{X}_{123}\right| = |113 - 116| = 3$$

$$\sigma_1 = 6 \quad d_2 = \left|\bar{X}_2 - \bar{X}_{123}\right| = |120 - 116| = 4$$

$$\sigma_2 = 7 \quad d_3 = \left|\bar{X}_3 - \bar{X}_{123}\right| = |115 - 116| = 1$$

$$\sigma_3 = ?$$

इस प्रकार, $\sigma_{123} = \sqrt{\frac{50(6)^2 + 60(7)^2 + 90\sigma_3^2 + 50(3)^2 + 60(4)^2 + 90(1)^2}{50 + 60 + 90}}$

$= 7.746$

$\Rightarrow \quad \sigma_3 = 8$ (स्थानांतरित करने पर)

भिन्नता का गुणांक

मानक विचलन के वर्ग, अर्थात σ^2 को विचरण कहा जाता है और मानक विचलन से अधिक बार निर्दिष्ट किया जाता है।

स्पष्ट है, मानक विचलन σ या उसका वर्ग, विचरण, दो श्रृंखलाओं की तुलना में बहुत उपयोगी नहीं हो सकता, जहां या तो इकाइयां अलग हैं या माध्य मूल्य अलग हैं। इस प्रकार, एक परीक्षा में 5 का σ, जहां माध्य स्कोर 30 है का, जहां एक परीक्षा में माध्य स्कोर 90 है, से पूरी तरह से अलग अर्थ है। स्पष्ट है, दूसरी परीक्षा में परिवर्तनशीलता बहुत कम है। इस समस्या को सुलझाने करने के लिए, हम विभिन्नता के गुणांक, V को परिभाषित और उपयोग करते हैं। जहां,

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

यह प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण– निम्नलिखित पारी की एक श्रृंखला में दो बल्लेबाजों A और B के स्कोर हैं–

A	12	115	6	73	7	19	119	36	84	29
B	47	12	76	42	4	51	37	48	13	0

कौन बेहतर रन लेने वाला है? कौन अधिक निरंतर है?

हल– दो बल्लेबाजों, A और B में से जो बेहतर रन लेने वाला है, तय करने के लिए, हमें उनकी बल्लेबाजी औसत का पता लगाना चाहिए। जिसका औसत उच्च होगा, एक बेहतर बल्लेबाज के रूप में माना जाएगा।

टिप्पणी

बल्लेबाजी में निरंतरता का निर्धारण करने के लिए, हमें विभिन्नता के गुणांक का निर्धारण करना चाहिए। यह गुणांक जितना कम होगा, खिलाड़ी उतना अधिक सुसंगत होगा।

A			B		
स्कोर X	X	X^2	स्कोर X	X	X^2
12	–38	1,444	47	14	196
115	+65	4,225	12	–21	441
6	–44	1,936	76	43	1,849
73	+23	529	42	9	81
7	–43	1,849	4	– 29	841
19	–31	961	51	18	324
119	+69	4,761	37	4	16
36	–14	196	48	15	225
84	+34	1,156	13	–20	400
29	–21	441	0	–33	1,089
$\Sigma X = 500$		17,498	$\Sigma X = 330$		5,462

बल्लेबाज A:

$$\bar{X} = \frac{500}{10} = 50$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{17,498}{10}} = 41.83$$

$$V = \frac{41.83 \times 100}{50}$$

$= 83.66$ प्रतिशत

बल्लेबाज B:

$$\bar{X} = \frac{330}{10} = 33$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5,462}{10}} = 23.37$$

$$V = \frac{23.37}{33} \times 100$$

$= 70.82$ प्रतिशत

A बेहतर बल्लेबाज है क्योंकि B के 33 की तुलना में उसका औसत 50 है, लेकिन B अधिक सुसंगत है क्योंकि A के 83.66 की तुलना में उसके मामले में भिन्नता 70.8 है।

उदाहरण– निम्न तालिका साल 1914 और 1918 में एक कॉलेज में दाखिल किए गए छात्रों की उम्र का वितरण देती है। पता लगाएं कि दोनों समूहों में से उम्र में अधिक परिवर्तनशील कौन–सा है।

टिप्पणी

उम्र	छात्रों की संख्या	
	1914	1918
15	–	1
16	1	6
17	3	34
18	8	22
19	12	35
20	14	20
21	13	7
22	5	19
23	2	3
24	3	–
25	1	–
26	–	–
27	1	–

हल–

आयु	माना गया मान–21 1914				माना गया माध्य–19 1918			
	f	x'	fx'	fx'^2	f	x'	fx	fx'^2
15	0	–6	0	0	1	–4	–4	16
16	1	–5	–5	25	6	–3	–18	54
17	3	–4	–12	48	34	–2	–68	136
18	8	–3	–24	72	22	–1	–22	22
19	12	–2	–24	48			–112	
20	14	–1	–14	14				
			–79		35	0	0	0
21	13	0	0	0	20	1	20	20
22	5	1	5	5	7	2	14	28
23	2	2	4	8	19	3	57	171
24	3	3	9	27	3	4	12	48
25	1	4	4	16	147		+103	495
26	0	5	0	0			–9	
27	1	6	6	36				
	63		+28	299				
			–51					

1914 समूह :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx'^2}{N} - \left[\frac{\sum(fx')}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{299}{63} - \left(\frac{-51}{63}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4.746 - 0.64} = \sqrt{4.106}$$

$$= 2.02.$$

$$\bar{x} = 21 + \left(\frac{-51}{63}\right) = 21 - 0.80 = 20.2$$

टिप्पणी

$$V = \frac{2.02}{20.2} \times 100$$
$$= 0.1 \times 100 = 10$$

1918 समूह :

$$\sigma = \sqrt{\frac{495}{147} - \left(\frac{-9}{147}\right)^2} = \sqrt{3.3673 - 0.0037}$$
$$= \sqrt{3.3636} = 1.834$$
$$\bar{x} = 19 + \left(\frac{-9}{147}\right)$$
$$= 19 - 0.06 = 18.94$$
$$V = \frac{1.834}{18.94} \times 100$$
$$= 9.68$$

1914 समूह की भिन्नता का गुणांक 10 और 1918 समूह का 9.68 है। इसका मतलब है कि केवल मात्र लेकिन 1914 समूह अधिक परिवर्तनशील है।

2.3.5 चतुर्थक विचलन

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

किसी भी श्रेणी के तृतीय व प्रथम चतुर्थकों के आधे को चतुर्थक विचलन कहते हैं। चतुर्थक विचलन का दूसरा नाम 'अर्द्ध मध्यांक–चतुर्थक प्रसार' भी है।

चतुर्थक विचलन के गुण

1. इसका समझना व निर्धारण करना सरल है।
2. विचलन के इस माप पर चरम मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।
3. जहां श्रेणी के मध्य भाग का ही अध्ययन करना है, वहां इस माप का प्रयोग होता है।

चतुर्थक विचलन के दोष

1. चतुर्थक विचलन, श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता।
2. इसका बीजगणितीय विवेचन संभव नहीं है।
3. निर्देशन– परिवर्तन का इस पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है।
4. इससे समंकमाला की रचना का ठीक से पता नहीं चलता है।

इसका प्रयोग कब करना चाहिए?

1. जब अंक–वितरण पूर्ण हों।
2. जब प्रमाणिक विचलन की गणना न की जा सके।

3. जब प्रतिदर्श छोटा हो।
4. जब मध्यांक की गणना की गई हो।
5. जब अंक वितरण सामान्य तथा पूर्ण हो।

टिप्पणी

अव्यवस्थिति अंक सामग्री से चतुर्थक विचलन की गणना

अव्यवस्थित अंक सामग्री से Q की गणना का सूत्र निम्न है–

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

जबकि $$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{पद}$$

$$Q_3 = \left\{\frac{3(N+1)}{4}\right\} \text{पद}$$

गणना विधि–

(1) दी हुई अव्यवस्थित सामग्री से पहले Q_1 फिर Q_3 की गणना कीजिए अंत में सूत्र में Q_3 और Q_1 के मान रखकर Q का मान ज्ञात कर लीजिए।

(2) Q_1 और Q_3 की गणना में केवल N का मान ज्ञात होना आवश्यक है।

(3) Q_1 और Q_3 ज्ञात करने से पहले दिये हुए प्राप्तांकों को क्रम में व्यवस्थित कर लीजिए।

उदाहरण– प्राप्तांक 12, 13, 11, 14, 13, 18, 17, 16, 15

हल– क्रम में व्यवस्थित प्राप्तांकः– 11, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 17, 18

$N = 9$

Q_1 की गणना :

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{पद}$$

$$= \left(\frac{9+1}{4}\right) \text{पद}$$

$$= \left(\frac{10}{4}\right) \text{पद}$$

$$= 2.5 \text{ पद}$$

$$= 12.5$$

Q_3 की गणना :

$$Q = \left\{\frac{3(N+1)}{4}\right\} \text{पद}$$

$$= \left\{ \frac{3(9+1)}{4} \right\} \text{ पद}$$

टिप्पणी

$$= \left(\frac{30}{4} \right) \text{ पद}$$

$$= 7.5 \text{ पद}$$

$$= 16.5$$

***Q* की गणना :**

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{16.5 - 12.5}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

व्यवस्थित अंक सामग्री से Q की गणना

व्यवस्थित अंक सामग्री से Q की गणना निम्न सूत्र द्वारा की जाती है–

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

जबकि Q = चतुर्थक विचलन

Q_3 = तृतीय चतुर्थक अथवा वह चतुर्थक, जिसके नीचे 75ः आवृत्तियां होती है।

Q_1 = प्रथम चतुर्थक (अर्थात जिसके नीचे 25ः आवृत्तियां हो)

Q_3 की गणना करने का सूत्र–

$$Q_3 = L + \left(\frac{3N/4 - F}{f} \right) \times C.I$$

Q_1 की गणना करने का सूत्र–

$$Q_1 = L + \left(\frac{N/4 - F}{f} \right) \times C.I.$$

यहां

L = उस वर्गांतर की निम्नतम शुद्ध सीमा, जिसके नीचे Q_1 पड़ता है या Q_3 पड़ता है।

F = उस वर्गांतर की नीचे की संचित आवृत्ति, जिसमें Q_1 या Q_3 है।

f = उस वर्गांतर की आवृत्ति, जिसमें Q_1 या Q_3 है।

$C.I.$ = वर्गांतर का आकार।

टिप्पणी

गणना विधि

(1) दिये हुये अंक वितरण को आरोही क्रम में लिखिए, फिर दी हुई आवृत्तियों को संचित आवृत्तियों में परिवर्तित कीजिए।

(2) सर्वप्रथम Q_1 की गणना कीजिए। इसके बाद Q_3 की।

(3) Q_3 तथा Q_1 का मान प्राप्त कर लेने के बाद Q की गणना, दिये हुए सूत्र की सहायता से कीजिए।

उदाहरण– निम्नलिखित व्यवस्थित अंक सामग्री से Q की गणना कीजिए।

C.I.	***f***	***F***
120-124	2	46
115-119	4	44
110-114	6	40
105-109	8	34
100-104	9	26
95-99	7	17
90-94	5	10
85-89	3	5
80-84	2	2
	N=46	

हल–

Q_1 की गणना–

$$Q = L + \left(\frac{N/4 - F}{f}\right) \times C.I.$$

यहां, $L = 94.5,\ N/4 = \frac{46}{4} = 11.5, F = 10, f = 7$

सूत्र में, इन मूल्यों को रखने पर

$$Q_1 = 94.5 + \left(\frac{115 - 10}{7}\right) \times 7$$

$$= 94.5 + \frac{1.5 \times 7}{7}$$

$$= 94.5 + 1.5 = 96$$

Q_3 की गणना $= Q_3 = L + \left(\frac{3N/4 - F}{f}\right) \times C.I.$

टिप्पणी

प्रश्न में $L = 109.5$, $3N/4 = 34.5$, $F = 34$, $F = 6$ $C.I. = 5$

सूत्र में मूल्यों को रखने पर,

$$Q_3 = 109.5 + \left\{\frac{34.5 - 34}{6}\right\} \times 5$$

$$= 109.5 + \frac{.5 \times 5}{6}$$

$$=109.5+.416$$

$$=109.08$$

Q की गणना–

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{109.08 - 96}{2} \quad = \frac{13.08}{2} \quad = 6.54$$

चतुर्थक विचलन गुणक– चतुर्थक विचलन, विचलनशीलता की निरपेक्ष माप है। इसका सापेक्ष माप, चतुर्थक विचलन गुणक कहलाता है। इसे ज्ञात करने के लिए चतुर्थक विचलन के निरपेक्ष माप को दोनों Q_1 तथा Q_3 के माध्य से भाग दे दिया जाता है। सूत्र के रूप में–

$$Q.D = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

अपनी प्रगति जांचिए

3. विचलनशीलता को कितने प्रकार से मापा जा सकता है?
   (क) दो (ख) तीन
   (ग) चार (घ) पांच
4. परास का सूत्र निम्न में से कौन सा है?
   (क) परास = उच्चतम प्राप्तांक × न्यूनतम प्राप्तांक
   (ख) परास = उच्चतम प्राप्तांक + न्यूनतम प्राप्तांक
   (ग) परास = उच्चतम प्राप्तांक – न्यूनतम प्राप्तांक
   (घ) परास = उच्चतम प्राप्तांक ÷ न्यूनतम प्राप्तांक

2.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

टिप्पणी

1. (क)
2. (ग)
3. (घ)
4. (ग)

2.5 सारांश

माध्यों द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समकों की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है। इससे उन समकों को समझना व याद रखना बहुत सुगम हो जाता है।

समांतर माध्य एक सामान्य बुद्धि वाले व्यक्ति के लिए गणना करने व समझने की दृष्टि से अत्यंत सरल है।

बहुलक तथा माध्यिका के विपरीत समांतर माध्य श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होता है, जिसके कारण यह श्रेणी का सही प्रतिनिधित्व करता है।

सरल समांतर माध्य, श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्व देता है, जबकि वास्तविकता यह है कि श्रेणी के विभिन्न मूल्यों का अपना अलग–अलग महत्व होता है।

किसी समक श्रेणी को आरोही (Ascending – बढ़ते हुए) या अवरोही (Descending–घटते हुए) क्रम में व्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है, उसे माध्यिका कहते हैं।

विचलनशीलता की माप द्वारा एक ऐसा मान ज्ञात किया जाता है, जो समंकमाला का प्रतिनिधित्व करता है। विक्षेपण के मापक को 'निरपेक्ष रूप' में अथवा 'सापेक्ष रूप' में प्रदर्शित किया जा सकता है। इसे तब निरपेक्ष रूप में कहा जाता है, जब यह वह वास्तविक परिमाण बताता है, जिसके द्वारा वस्तु का मान केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक से औसत विचलित होता है।

2.6 मुख्य शब्दावली

- **विचलनशीलता** : वह सीमा, जहां तक समंक एक माध्य मूल्यों के दोनों ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं।
- **विस्तार** : समंकमाला में सबसे बड़े पद तथा सबसे छोटे पद का अंतर।
- **समांतर माध्य** : समांतर माध्य वह मूल्य है जो किसी श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग में, उन पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।
- **बहुलक** : बहुलक उस मान को कहते हैं जो समंक माला में सबसे अधिक बार आता है।

2.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. माध्य से आप क्या समझते हैं? इसके गुणों को बताइए।
2. भारित समांतर माध्य से क्या अभिप्राय है? इसकी गणना विधि को स्पष्ट कीजिए।
3. माध्यिका किसे कहते हैं? विच्छिन्न श्रेणी में माध्यिका का निर्धारण किस प्रकार किया जाता है?
4. बहुलक को परिभाषित करते हुए इसके गुण व दोषों को बताइए।
5. शतांशीय मान की गणना विधियों को समझाइए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. केंद्रीय माप से आप क्या समझते हैं? इसकी मुख्य विशेषताओं का वर्णन कीजिए।
2. समांतर माध्य को समझाते हुए इसके गुण व दोषों की विवेचना कीजिए।
3. माध्यिका के गुण व दोषों का वर्णन कीजिए।
4. निम्न समंकों से माध्यिका ज्ञात कीजिए–

   ऊंचाई इंच में– 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66

   विद्यार्थियों की संख्या– 15, 20, 32, 35, 33, 22, 20, 10, 8
5. 50 छात्रों के प्राप्तांकों के वितरण से माध्यिका एवं बहुलक निकालें–

   प्राप्तांक से अधिक– 0, 10, 20, 30, 40, 50

   छात्रों की संख्या– 50, 48, 40, 10, 10, 3

2.8 सहायक पाठ्य सामग्री

1. चंदन, जे. एस., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
2. मोंगा, जी. एस., 'मैथेमेटिक्स एंड स्टैटिसटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली: विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
3. कोठारी, सी. आर., 'क्वांटिटेटिव टेकनिक', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
4. हुडा, आर. पी., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनोमिक्स', नई दिल्ली : मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड।
5. गुप्ता, एस. सी., 'फण्डामेन्टल ऑफ स्टैटिसटिक्स', नई दिल्ली हिमालया पब्लिशिंग हाउस।
6. गुप्ता, एस. पी., 'स्टैटिसटिकल मेथड्स', नई दिल्ली : एस चान्द एण्ड सन्स।

इकाई 3 सहसंबंध

टिप्पणी

संरचना

3.0 परिचय
3.1 उद्देश्य
3.2 सहसंबंध की अवधारणा
    3.2.1 कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक
    3.2.2 स्पीयर मैन का कोटि अंतर सहसंबंध गुणांक
    3.2.3 कोटि सार्थकता परीक्षण
3.3 प्रतीपगमन विश्लेषण
    3.3.1 प्रतीपगमन समीकरण
    3.3.2 प्रतीपगमन गुणांक
    3.3.3 प्रतीपगमन का उपयोग एवं अनुप्रयोग
3.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
3.5 सारांश
3.6 मुख्य शब्दावली
3.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
3.8 सहायक पाठ्य सामग्री

3.0 परिचय

भौतिक विज्ञान में भविष्य कथन की क्षमता अन्य विषयों की अपेक्षा अधिक होती है। भौतिक विज्ञान ऐसे ठोस सिद्धांतों एवं वैज्ञानिक नियंत्रणों पर आधारित है, जिसके आधार पर विशिष्ट परिस्थितियों के अंतर्गत, किसी एक घटना के संबंध विश्वास के साथ पूर्णतः सत्य भविष्य–कथन किया जा सकता है। अन्य विषयों में भी भविष्य कथन विश्वसनीय ढंग से किया जा सकता है। परंतु उनमें विश्वास की मात्रा उतनी अधिक नहीं होती। भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में कार्य–करण (Cause and Effect) के संबंध को सामान्यतः सरलतापूर्वक नियंत्रित किया जा सकता है। परंतु मनोविज्ञान व शिक्षा के क्षेत्र में कार्य–करण के संबंधों को समझना अपेक्षाकृत कठिन होता है, क्योंकि मानव–व्यवहार एक जटिल प्रक्रिया है तथा उसको प्रभावित करने वाले कारकों का ठीक–ठीक पता लगाना एक कठिन समस्या है। लेकिन इन समस्याओं के होते हुए भी मनोवैज्ञानिकों ने अपने सिद्धांतों के निर्माण में वैज्ञानिक पद्धति को ही अपने अध्ययन का मूल आधार बनाया तथा कार्य–करण के संबंध को समझने के लिए सहसंबंध विधियों (Correlation Techniques) का सहारा लिया है। वास्तव में, आज के वैज्ञानिक युग में मनोवैज्ञानिक चरों (Variables) की व्याख्याओं में भी वैसी ही वैज्ञानिक विचारधारा की कठोरता, शुद्धता व वस्तुनिष्ठता सक्रिय दिखाई पड़ती है, जैसी भौतिक विज्ञान में दिखलायी पड़ती है और इसके लिए मनोवैज्ञानिक भी सहसंबंध विधियों को सक्रिय रूप में उपयोग में ला रहे हैं।

इस इकाई में सहसंबंध एवं उसके प्रकार, सहसंबंध गुणांक का विस्तार एवं विधियां तथा सहसंबंध गुणांक की गणना विधियों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

टिप्पणी

3.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- सहसंबंध की अवधारणा को जान पाएंगे;
- कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक की विवेचना कर पाएंगे;
- कोटि सार्थकता परीक्षण की जांच कर पाएंगे;
- प्रतीपगमन विश्लेषण को समझ पाएंगे।

3.2 सहसंबंध की अवधारणा

जब दो या दो से अधिक चरों (Variables) तथा घटनाओं में साहचर्यात्मक संबंध (Associative Relationship) पाया जाता है, तो ऐसे पारस्परिक संबंध को सहसंबंध कहते हैं।

अन्य शब्दों में–सहसंबंध से दो चरों में पाये जाने वाले संयुक्त–संबंध (Joint-relation) का पता लगाया जाता है।

फरग्यूसन (Ferguson) के शब्दों में–''सहसंबंध का उद्देश्य दो चरों में पायी जाने वाली संबंध की मात्रा का पता लगाना होता है।''

सहसंबंध की दिशायें (Directions of Correlation)

दो घटनाओं या चरों के मध्य में सहसंबंध प्रायः दो दिशाओं–समान दिशा में अथवा विपरीत दिशा में हो सकता है

समान एवं विपरीत दिशा (Equal and Opposite Direction)

जब दो चरों की पारस्परिक अंतः क्रिया में, एक चर की मात्रा जैसे–जैसे बढ़ती है परिणामस्वरूप दूसरे चर की मात्रा में भी तद्नुसार वृद्धि होती है तब सहसंबंध समान दिशा में होता है। इसके विपरीत, जब दो चरों की पारस्परिक अंतःक्रिया में एक चर की मात्रा बढ़ती है और दूसरे चर की मात्रा घटती है अर्थात् दूसरे चर पर विपरीत प्रभाव पड़ता है, तब सहसंबंध विपरीत दिशा में होता है।

इन चरों (Variables) में ऋणात्मक (Negative) सहसंबंध पाया जाता है।

सहसंबंध के प्रकार

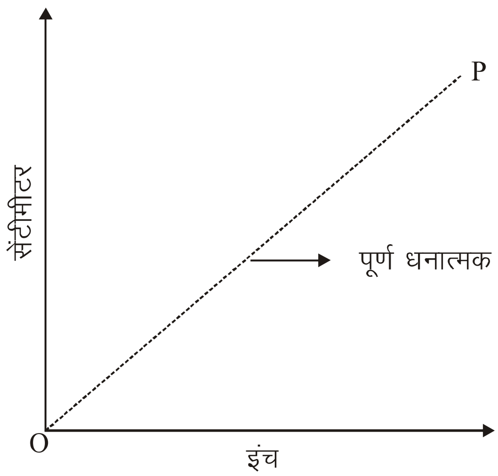
प्रायः सहसंबंध चार प्रकार का होता है।

1. धनात्मक सहसंबंध (Positive Correlation)

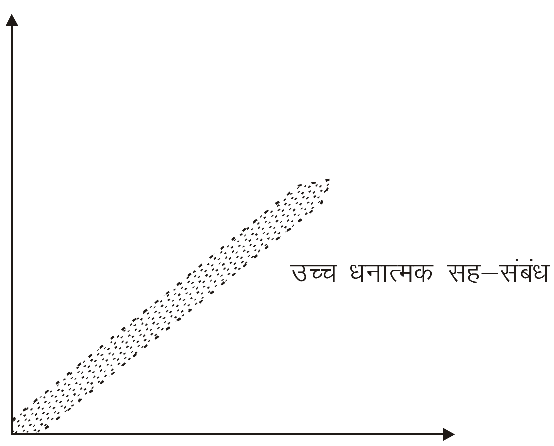
जब दो चरों (Variables) में एक चर की मात्रा बढ़ने पर दूसरे चर की मात्रा में भी वृद्धि होती है। अथवा एक चर की मात्रा में कमी होने पर दूसरे चर की मात्रा में भी कमी आती है तो दोनों चरों की ऐसी अनुरूपता को धनात्मक सहसंबंध कहते हैं। जब दो चर एक ही दिशा में परिवर्तित होते हैं तो उनमें धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है। अन्य शब्दों में जब दोनों चर साथ–साथ एक ही दिशा मे घटते अथवा बढ़ते हैं तो उनमें

धनात्मक सहसंबंध मध्यम एवं निम्न प्रकार का हो सकता है। धनात्मक सहसंबंध तीन प्रकार के होते हैं–

(i) पूर्णतः धनात्मक सहसंबंध (Perfect Positive Correlation) : जब दो चरों की मात्राएं समान दिशा में समान अनुपात में घटती–बढ़ती हैं तो उनमें पूर्णतः धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है। इस प्रकार का सहसंबंध एक सरल रेखा का रूप लिये हुए होता है और यह रेखा नीचे से ऊपर उठती हुई होती है। इस चित्र में OP रेखा पूर्णतः धनात्मक सहसंबंध को स्पष्ट करती है।



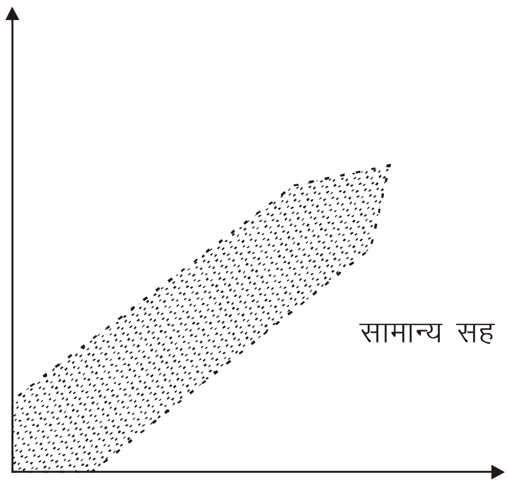
(ii) उच्च श्रेणी का धनात्मक सहसंबंध (High Positive Correlation) : कभी–कभी धनात्मक सहसंबंध पूर्ण न होकर उच्च श्रेणी का भी हो सकता है। ऐसी स्थिति में सहसंबंध एक पतली रेखा न होकर कुछ मोटी रेखा के रूप में दिखाई देता है।



चित्र में उच्च धनात्मक सहसंबंध को दर्शाया गया है इस स्थिति में दोनों चर एक दिशा में बढ़ते अथवा घटते हैं लेकिन एक अनुपात में नहीं।

(iii) मध्यम अथवा निम्न सहसंबंध (Medium or Low Correlation) : जब दोनों चरों के मध्यमानों का वितरण पर्याप्त मात्रा में मध्य रेखा के इधर–उधर फैला रहता है तब दोनों चरों में सहसंबंध मध्यम अथवा निम्न हो सकता है। ऐसे सहसंबंध को सामान्य सहसंबंध भी कहा जा सकता है यह स्थिति निम्न चित्र में स्पष्ट है–

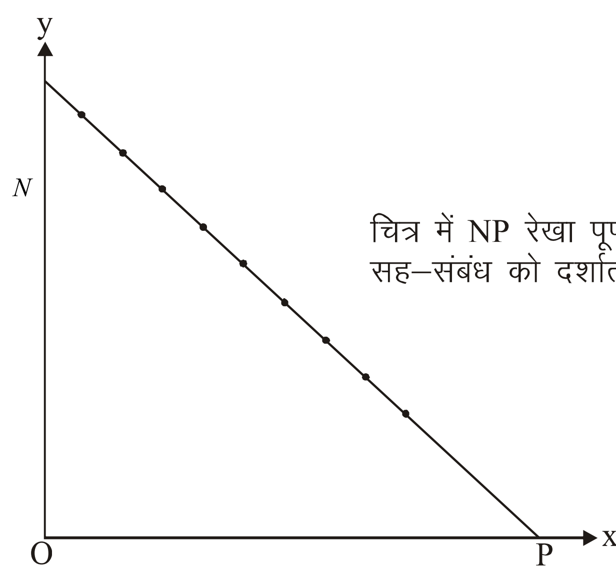
टिप्पणी



2. ऋणात्मक सहसंबंध (Negative Correlation)

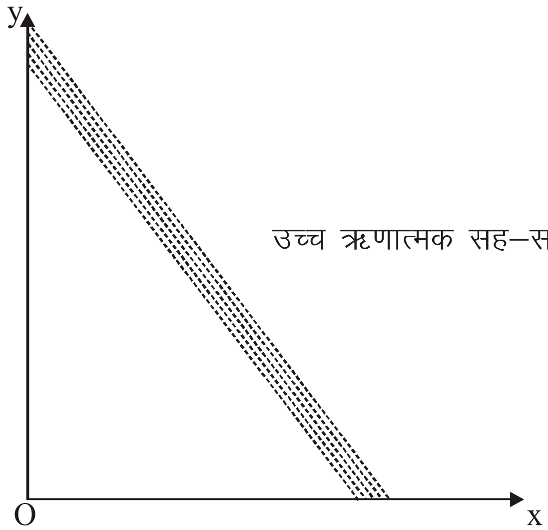
जब दो चरों (Variables) को मात्रा में एक चर की मात्रा घटने पर दूसरे चर की मात्रा बढ़ती है अथवा एक चर की मात्रा बढ़ने पर दूसरे चर की मात्रा घटती है तो ऐसी स्थिति में उनमें ऋणात्मक सहसंबंध पाया जाता है। अन्य शब्दों में ऋणात्मक सहसंबंध की स्थिति में दोनों चर विपरीत दिशा में चलते हैं। चरों की बहिर्मुखता तथा अन्तर्मुखता ऋणात्मक सहसंबंधों का एक अच्छा उदाहरण है। ऋणात्मक सहसंबंध भी धनात्मक सहसंबंध की धनात्मक सहसंबंध की भांति पूर्ण, उच्च श्रेणी का अथवा सामान्य (मध्यम / उच्च) हो सकता है।

(i) पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (Perfect Negative Correlation) : जब दो चरों की मात्राएं समान अनुपात में विपरीत दिशा में घटती अथवा बढ़ती है तो उनमें पूर्णतः ऋणात्मक सहसंबंध पाया जाता है। इस प्रकार का सहसंबंध एक सरल रेखा के रूप में होता है जो ऊपर से नीचे गिरती हुई होती है जैसा निम्न चित्र में स्पष्ट है–



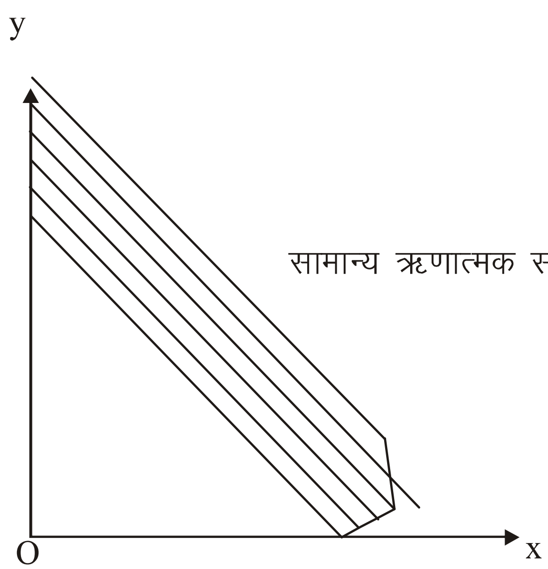
(ii) उच्च ऋणात्मक सहसंबंध (High Negative Correlation) : धनात्मक सहसंबंध की भांति ऋणात्मक सहसंबंध भी कभी–कभी पूर्ण न होकर उच्च श्रेणी का भी हो

सकता है। दोनों श्रेणियों में उच्च ऋणात्मक सहसंबंध को निम्न रेखा चित्र के मध्यम से स्पष्ट किया जा सकता है।



टिप्पणी

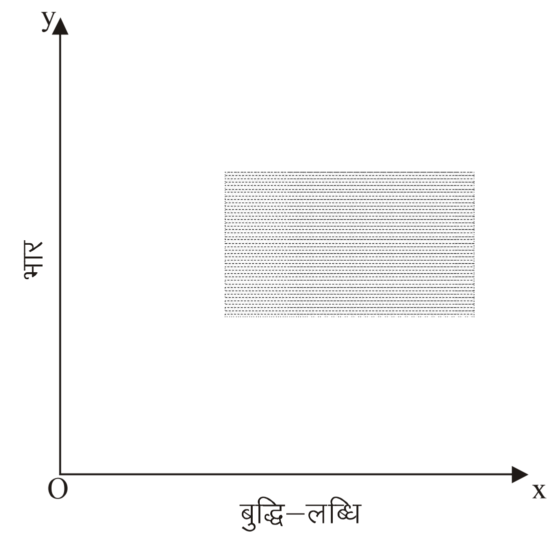
(iii) मध्यम/निम्न (सामान्य) ऋणात्मक सहसंबंध (Moderate Negative Correlation) : जब दोनों चरों के मध्यमानों का वितरण मध्य रेखा के दोनों ओर फैला रहता है तो सामान्य ऋणात्मक सहसंबंध होता है। जैसा निम्न चित्र में स्पष्ट है ऐसी स्थिति में सहसंबंध रेखा पतली न होकर काफी मोटी होती है।



3. शून्य सहसंबंध (Zero Correlation)

जब दो चरों में से कोई भी चर एक दूसरे को प्रभावित नहीं करता है, तब ऐसी स्थिति में दोनों चरों में सहचर्यात्मक संबंध (Associative Relationship) भी शून्य होता है, और उनमें सहसंबंध की मात्रा भी शून्य होती है। जैसे एक बालक के भार (Weight) तथा उसकी बुद्धिलब्धि (IQ) में कोई भी चर एक दूसरे पर प्रभाव नहीं डालता है अतः इन दोनों चरों में शून्य सहसंबंध की मात्रा शून्य है ऐसे सहसंबंध को निम्नांकित चित्र के माध्यम से भी स्पष्ट किया जा सकता है।

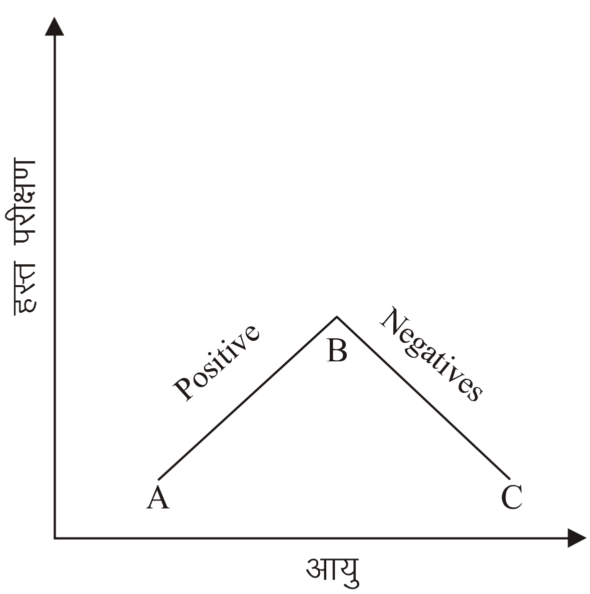
टिप्पणी



इस आकृति में बुद्धिलब्धि को x अक्ष पर तथा भार को y अक्ष पर दर्शाया गया है। चित्र को देखने से पता चलता है कि बुद्धि व भार के मान मध्य रेखा के चारों ओर बिखरे हुए हैं। इनमें न तो ऋणात्मक और न ही धनात्मक सहसंबंध है।

4. वक्र–रेखीय सहसंबंध (Curuilinear Correlation)

सहसंबंध के उपरोक्त तीन मुख्य प्रकारों के अतिरिक्त एक अन्य प्रकार का भी सहसंबंध पाया जाता है, जिसे वक्र–रेखीय सहसंबंध कहते हैं सहसंबंध की ऐसी स्थिति में दोनों चरों में सहसंबंध एक विशेष सीमा तक धनात्मक होता है और आगे चलकर जब दो चरों में सहसंबंध पहले धनात्मक तथा फिर ऋणात्मक होता है तब सहसंबंध रेखा केवल सीधी (Linear) न होकर आगे जाकर कुछ वक्र (Curve) वाली होती है जैसा निम्न चित्र में स्पष्ट है।



ऊपर चित्र में स्पष्ट है कि जैसे–जैसे आयु बढ़ती है, बालक के हस्त परीक्षण (High Grip Test) में प्राप्तांक भी बढ़ते चले जाते हैं परंतु एक विशेष अवस्था के बाद इसी

टिप्पणी

परीक्षण में प्राप्तांक घटने लगते हैं चित्र में बिन्दु A से B तक धनात्मक सहसंबंध है और B से C तक ऋणात्मक सहसंबंध है प्रारंभ जैसे–जैसे आयु बढ़ती है व्यक्ति की हस्त परीक्षण शक्ति भी बढ़ती है अर्थात् एक उम्र के बाद शारीरिक तथा आयु में ऋणात्मक सहसंबंध दृष्टिगोचर होने लगता है। इस प्रकार सहसंबंध पहले एक दिशा की ओर अग्रसर होता है और उसके पश्चात् दूसरी दिशा में। इस प्रकार के दो चरों में पाये जाने वाले सहचर्यात्मक संबंध को वक्र–रेखीय (Curvilinear) सहसंबंध कहते हैं।

निरर्थक सहसंबंध (Nonsensical Correlation)

कभी–कभी साधारण अध्यनकर्ता अपने अध्ययन में दो पूर्णतः असह–संबंधित चरों में भी सहसंबंध की स्थिति स्थापित करने का प्रयत्न करते हैं ऐसा तब ही होता है जब अध्ययनकर्ता को दोनों चरों में पारस्परिक कार्य–कारण के संबंध का ठीक ज्ञान नहीं होता है। जैसे अध्ययनकर्ता अपने आंकड़ों के आधार पर यह सिद्ध करने का प्रयास करता है कि देश में जैसे–जैसे सड़कों की संख्या बढ़ रही है वैसे–वैसे बीमारों की संख्या भी बढ़ रही है। यह प्रयास निरर्थक है क्योंकि इन आंकड़ों का परस्पर कोई संबंध नहीं है।

सहसंबंध गुणांक (Correlation Co-efficient)

सहसंबंध से केवल यही ज्ञात होता है कि दोनों चरों Variables में पारस्परिक संबंध किस प्रकार का है–धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य। इसके अतिरिक्त हम यह ज्ञात कर सकते हैं कि सहसंबंध थोड़ा है, सामान्य है अथवा अधिक है परंतु इसके द्वारा दोनों चरों में सहसंबंध की मात्रा का परिशुद्ध (Precise) वस्तुनिष्ठ (Objective) तथा स्पष्ट ज्ञान उपलब्ध नहीं होता है। इस दोष को दूर करने के लिए सहसंबंध को सहसंबंध गुणांक के रूप में व्यक्त किया जाता है। सहसंबंध गुणांक एक प्रकार का ऐसा सूचकांक Index है जिससे दो चरों में एक का ज्ञान होने पर दूसरे चर के भविष्य में भविष्य कथन किया जा सकता है।

सहसंबंध गुणांक दो चरों में पाये जाने वाला ऐसा अनुपात है जिससे यह पता लगता है कि एक चर में होने वाले परिवर्तन दूसरे चर में होने वाले परिवर्तनों पर कितनी मात्रा में आधारित है, अथवा किस मात्रा में उनका अनुसरण करते हैं।

सहसंबंध गुणांक का विस्तार (Magnitudeal Co-efficient Correlation)

सामान्यतः सहसंबंध गुणांक का मान +1.00 से –1.00 तक आता है। अर्थात् इसके सभी मान +1.00 से –1.00 तक की सीमाओं के अंतर्गत ही रहते हैं जब सहसंबंध गुणांक का मान (+) में आता है तब वह धनात्मक सहसंबंध का प्रतीक होता है और जब इसका मान (–) में आता है तब ऋणात्मक सहसंबंध कहलाता है। इन दोनों दशाओं के विपरीत जब सहसंबंध गुणांक का मान शून्य (Zero) होता है तब सहसंबंध शून्य कहलाता है। सहसंबंध के विस्तार को निम्न प्रकार से भी समझाया जा सकता है।

उदाहरण : एक परीक्षा में 10 छात्रों ने अर्थशास्त्र एवं वाणिज्य में निम्न अंक प्राप्त किए।

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अर्थशास्त्र	30	25	23	29	24	28	31	22	32	26
वाणिज्य	32	27	25	34	26	36	38	24	39	28

हल :

क्रम संख्या *x*	**अर्थशास्त्र *x***	**वाणिज्य *y***	**Rank *x***	**Rank *y***	**कोटि अंतर *D***	**कोटि अंतरों के वर्ग का योग $\sum D^2$**
1	30	32	3	5	–2	4
2	25	27	7	7	0	0
3	23	25	9	9	0	0
4	29	34	4	4	0	0
5	24	26	8	8	0	0
6	28	36	5	3	2	4
7	31	38	2	2	0	0
8	22	24	10	10	0	0
9	32	39	1	1	0	0
10	26	28	6	6	0	0
योग						**8**
				N = 10 **$\sum D^2 = 8$**		

$$P = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$P = 1 - \frac{6(8)}{10(10^2-1)} \quad P = 1 - \frac{48}{10(99)} = P = 1 - \frac{48}{990}$$

$$P = 1 - 0.048 = 0.952 \quad \text{or} \quad 0.95$$

विवेचन–दोनों विषयों में अत्याधिक उच्च श्रेणी का धनात्मक सहसंबंध है।

सहसंबंध गुणांक का विस्तार

धनात्मक सह–संबंध

+ 1.00 पूर्ण धनात्मक सह–संबंध
+ 1.00 से + 0.99 → उच्च श्रेणी का सह–संबंध
+ 0.99 से + 0.70 → सामान्य सह–संबंध
+ 0.70 से + 0.40 → निम्न परन्तु निश्चित सह–संबंध
+ 0.40 से + 0.20 → सूक्ष्म एवं नगण्य सह–संबंध

ऋणात्मक सह–संबंध

– 0.20	सूक्ष्म एवं नागण्य सह–संबंध
– 0.40	निम्न परन्तु निश्चित सह–संबंध
– 0.70	सामान्य सह–संबंध
– 0.99	उच्च श्रेणी का ऋणात्मक सह–संबंध
+ 1.00	पूर्ण ऋणात्मक सह–संबंध

टिप्पणी

सहसंबंध गुणांक की विशेषताएं (Properties of Co-efficient of Correlation)

सहसंबंध गुणांक की प्रमुख विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. **प्रसार** (Range) : सहसंबंध गुणांक का मान –1.00 से लेकर +1.00 के बीच होता है। सहसंबंध गुणांक (τ) का मान कभी भी –1 से कम अथवा सैद्धान्तिक प्रसार –1 से +1 तक है।
2. **इकाइयों का प्रभाव नहीं** (No Effect of Units) : सहसंबंध गुणांक एक शुद्ध अंक है इसकी कोई इकाई नहीं होती है। यदि प्राप्तांकों की इकाइयों को बदल दिया जाए तो सहसंबंध गुणांक के मान में कोई अंतर नहीं आता है यही कारण है कि लंबाई को चाहे इंचों में नापे अथवा सेमी में, किसी दूसरे चर के साथ लंबाई का सहसंबंध गुणांक का मान अपरिवर्तित रहता है।
3. **प्राप्तांकों में स्थिरांक जोड़ने, घटाने, गुणा या भाग करने का प्रभाव नहीं** (No Effect of Addition, Subtraction, Multiplication or Division of Constant): किसी एक अथवा दोनों चरों के प्राप्तांकों में किसी स्थिरांक (Constant) को जोड़ने, घटाने, गुणा करने अथवा भाग देने पर सहसंबंध गुणांक अप्रभावित रहता है। सहसंबंध गुणांक (τ) की यह विशेषता गणना कार्य में अत्यंत उपयोगी हैं। इस विशेषता के कारण ही बड़े प्राप्तांकों से सहसंबंध गुणांक ज्ञात करते समय सभी प्राप्तांकों से किसी स्थिरांक को घटाने का सुझाव दिया जाता है। दोनों चरों से अलग–अलग स्थिरांक घटाये जा सकते हैं।
4. **सहसंबंध कारणता नहीं** (Correlation is not a Causation) : सहसंबंध कभी भी कार्य–करण संबंध का द्योतक नहीं होता है। कभी–कभी ऐसा भ्रमवश समझ लिया जाता है। यदि x तथा y के बीच सहसंबंध है तो तीन संभावनाएं हो सकती हैं–

   (i) x का कारण y है।

   (ii) y का कारण x है।

   (iii) x व y दोनों का कारण कोई तीसरा चर z है।

केवल सहसंबंध गुणांक के आधार पर इन तीनों में से किसी एक को स्वीकार कर लेना अथवा अन्यों को अस्वीकार करना उचित नहीं होता है।

3.2.1 कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक

गुणनफल–आघूर्ण सहसंबंध विधि का प्रतिपादन कार्ल पियरसन के द्वारा 1896 में फ्रांसिस गाल्टन के द्वारा विकसित विचारों के आधार पर किया गया था पियरसन के नाम पर इस विधि को पियरसनियन विधि तथा इस विधि से प्राप्त गुणांक को पियरसन सहसंबंध गुणांक कहा जाता है। इस विधि के अंतर्गत दोनों चरों पर विभिन्न व्यक्तियों के प्राप्तांकों के सापेक्ष Z प्राप्तांकों की गुणाओं का आघूर्ण अर्थात् गुणनफल–आघूर्ण (Moment of Product) ज्ञात किया जाता है। यह गुणनफल आघूर्ण ही दोनों चरों के बीच सहसंबंध की मात्रा को बताता है जिसे अंग्रेजी के अक्षर r (आर) से प्रदर्शित किया जाता है।

$$r = \frac{\sum Zx\, Zy}{N}$$

टिप्पणी

आघूर्ण वास्तव में विज्ञान/गणित से लिया गया शब्द है, किन्हीं अंकों का आघूर्ण उन अंकों के माध्यम से उनकी दूरियों का मध्यमान होता है। आघूर्ण की $\Sigma(X-M)/N$ या $\Sigma(X-M)/N\Sigma X/N$ से लिखा जा सकता है। द्विचर आघूर्ण में दो चरों के प्राप्तांकों के उनके मध्यमानों से लिये गये विचलनों की गुणा करते हैं इसलिए इसे गुणनफल आघूर्ण भी कहते हैं। यह आघूर्ण दो चरों के साथ–साथ परिवर्तित हो रहे विचलन को भी व्यक्त करता है इसलिए इसे सहसंबंध प्रसरण भी कहते हैं। गुणनफल–आघूर्ण सहसंबंध गुणांक दोनों चरों के गुणनफल–आघूर्ण का दोनों चरों के मानक विचलनों के गुणनफल के साथ अनुपात है अतः

$$r = \frac{\Sigma_{xy}/N}{\delta_x \cdot \delta_y}$$

गुण्नफल–आघूर्ण सहसंबंध गुणांक के इस सूत्र को निम्नवत् ढंग से भी लिखा जा सकता है–

$$\frac{\Sigma \frac{x}{\delta x} \cdot \frac{y}{\delta y}}{N} \quad \text{क्योंकि} \quad \frac{x}{\delta_x} = Z_x \; \frac{y}{\delta_y} = zy \quad \text{अतः} \quad r = \frac{\Sigma z_x \cdot z_y}{N}$$

यह सहसंबंध ज्ञात करने का मूल एवं परिभाषिक सूत्र है किन्तु इस सूत्र से सहसंबंध गुणांक की गणना करना जटिल होता है। क्योंकि सभी प्राप्तांकों को z में बदलना पड़ता है तथा मानक विचलन एवं मध्यमान के दशमलव संख्या में होने पर घटाने व भाग की गणना जटिल व श्रम साध्य हो जाती है। इसलिये इस सूत्र को सरल रूप में बदलने की आवश्यकता हुई। गुणनफल–आघूर्ण सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए इस सूत्र को निम्न प्रकार से सरल रूप में बदला जा सकता है।

$$r = \frac{\Sigma xy}{N \cdot \delta x \cdot \delta y}$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = \frac{\Sigma(X-\overline{X})(4-\overline{4})}{\sqrt{\Sigma(X-\overline{X})^2 \; \Sigma(Y-\overline{Y})^2}}$$

$$r = \Sigma xy - \frac{(\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x^2)}{N}}\sqrt{\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{N}}}$$

or

$$r = \frac{N \cdot \Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N \cdot \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{N \cdot \Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

यह रीति सर्वश्रेष्ठ मानी जाती है क्योंकि इस रीति द्वारा सहसंबंध गुणांक का निश्चित रूप से तथा अंकात्मक रूप से अध्ययन किया जा सकता है। यह रीति गणितीय दृष्टि से उपयुक्त है क्योंकि यह प्रमाप विचलन व समान्तर माध्य पर आधारित है।

टिप्पणी

गुणांक निकालने की विधि (Method Calculation of Coefficient)

1. इस रीति के अंतर्गत सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों का समान्तर माध्य निकाला जाता है। 2. तत्पश्चात् दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य से विचलन ज्ञात किया जाता है पहली श्रेणी के विचलनो को '*dx*' तथा दूसरी श्रेणी के विचलनों को '*dy*' कहते हैं। 3. दोनों श्रेणियों के विचलनों का वर्ग d_x^2 तथा d_y^2 ज्ञात करके उनका योग किया जाता है। 4. दोनों विचलनों को परस्पर गुणा करके (*dxdu*) योग ज्ञात किया जाता है। और अन्त में निम्न सूत्र द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात किया जाता है।

$$r = \frac{\sum dx\,dy}{N \cdot \delta \cdot \delta y} \text{ या } r = \frac{\sum dx\,dy}{\sqrt{\sum d_x^2}\sqrt{\sum d_y^2}} \text{ जहां } \begin{matrix} dx = (X - \overline{X}) \\ dy = (Y - \overline{Y}) \end{matrix} \text{ है।}$$

उपरोक्त सूत्र x तथा y के सह–विचरण (Co-Variance) पर आधारित है। अर्थात् $\sum xy / N$ इसलिए इसे सह–विचरण रीति भी कहा जाता है।

उदाहरण : निम्न समंकों की सहायता से कार्ल पियरसन सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

यहां $\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = 150$ $N = 9$ $\delta \times 5.8$ $\delta y = 3.2$ $\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = \Sigma dxdy$

हल :

$$r = \frac{\sum dxdy}{N \cdot \delta x \cdot \delta y} = \frac{150}{(9)(5.8)(3.2)} = \frac{150}{167.04} = +0.898$$

उदाहरण :

X =	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23
Y =	12	16	14	11	15	19	22	16	15	20

हल :

X श्रेणी			*y* श्रेणी			
x	$(X-\overline{X})$ *Dx*	$(X-\overline{X})^2$ d_x^2	*y*	dy^{y-y}	$d_y^{2\,y-y}$	*dxdy*
17	–3	9	12	–4	16	12
18	–2	4	16	0	0	0
19	–1	1	14	–2	4	2
19	–1	1	11	–5	25	5
20	0	0	15	–1	1	0
20	0	0	1.9	+3	9	0
21	+1	1	22	+6	36	6
21	+1	1	16	0	0	0
22	+2	4	15	–1	1	–2
23	+3	9	20	+4	16	12
200	0	30	160	0	108	+35

टिप्पणी

$\overline{X} = \frac{\Sigma y}{N}$ $\qquad$ $\overline{Y} = \frac{\Sigma y}{N}$

$\overline{X} = \frac{200}{10}$ $\qquad$ $\overline{Y} = \frac{160}{10}$

$X = 20$ $\qquad$ $\overline{Y} = 16$

$\delta x = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2}{N}}$ $\qquad$ $\delta y \sqrt{\frac{\Sigma d_y^2}{N}}$

$\delta x = \sqrt{\frac{30}{10}}$ $\qquad$ $\delta y = \sqrt{\frac{108}{10}}$

$\delta x = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\delta y = \sqrt{10.8}$

$\delta x = 1.73$ $\qquad$ $\delta y - 3.28$

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{N(\delta x)\,(\delta y)}$$

$$= \frac{35}{10(1.73)\,(3.28)} = +0.615$$

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d_x^2}\sqrt{\Sigma d_y^2}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{30 \times 108}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{3240}}$$

$$= \frac{35}{56.9}$$

$$= +0.615$$

इस विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए $r = \frac{\Sigma dxdy}{N \cdot \delta x \cdot \delta y}$ सूत्र की अपेक्षा $r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma d_x^2}\sqrt{\Sigma d_y^2}}$ का प्रयोग करना चाहिए क्योंकि इस सूत्र में δx तथा δy अलग–अलग निकालने की आवश्यकता नहीं होती है। यह सूत्र ऊपर बताये गये मूल सूत्र का ही सरल रूप है। इस सूत्र का प्रयोग करने में सापेक्षिकतः परिकलन (Calculation) कम करना पड़ता है, समय भी कम लगता है लेकिन $r =$ की शुद्धता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

परन्तु उपर्युक्त उदाहरण में एक विशेष बात देखने में आयी है कि दोनों चरों के मध्यमान (Means) पूरी संख्या (Round Figures) में ही आये हैं। यदि दोनों चरों के मध्यमान (Mean) पर दशमलव में आते हैं तो उन्हें मूल पदों से घटाने पर संबंधित विचलन (dx) तथा (dy) भी दशमलव में होंगे तथा उनके गुणनफल का मान भी

अधिकतर दशमलव में होगा तो ऐसी स्थिति में गणना करना कठिन हो जाता है और हल करने में त्रुटियां भी आ सकती हैं। इस प्रकार की त्रुटियों की आशंका को दूर करने के लिए सहसंबंध गुणांक के लिए एक दूसरे सूत्र का प्रयोग किया जाता है जो कि कल्पित मध्यमान पर आधारित होता है।

टिप्पणी

कल्पित मध्यमान विधि (Assumed Mean Method)

इस सूत्र में दोनों चरों के अथवा एक चर के कल्पित मध्यमान को मान लिया जाता है जो वास्तविक मध्यमान के आगे वाली या पहले वाली पूरी संख्या को कल्पित कर लिया जाता है यह कल्पित मध्यमान को पूरी संख्या बनाने के लिए वास्तविक मध्यमान से घटाया या जोड़ा जाता है उसे शुद्धता का मान कहते हैं। यह शुद्धता M–Assumed Mean की होती है। यदि शुद्धता की आवश्यकता दोनों चरों में पड़ती है तो दोनों ही चरों में कल्पित मध्यमान का स्वतंत्र रूप से प्रयोग किया जा सकता है। कल्पित मध्यमान द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए इस सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

सूत्र

$$\frac{\frac{\sum dxdy}{N} - (\overline{X} - A)(\overline{Y} - A)}{\left[\frac{\sum d_x^2}{N} - (\overline{X} - A)^2\right]\left[\frac{\sum d_y^2}{N} - (\overline{Y} - A)^2\right]}$$

उदाहरण : दो विषयों में 10 विद्यार्थियों ने निम्न अंक प्राप्त किये हैं इनके आधार पर दोनों विषयों में सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए–

विद्यार्थी क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गणित	25	32	18	24	29	33	28	19	23	25
विज्ञान	27	34	21	27	23	35	31	23	18	16

हल :

	गणित x श्रेणी			विज्ञान y श्रेणी			
क्रम संख्या	x	A = 26 (X–A) dx	d_x^2	y	$\frac{A=26}{(y-A)}dy$	d_y^2	$dxdy$
1	25	–1	1	27	+1	1	–1
2	32	+6	36	34	+8	64	48
3	18	–8	64	21	–5	25	40
4	24	–2	4	27	+1	1	–2
5	29	+3	9	23	–3	9	–9
6	33	+7	49	35	+9	81	63
7	28	+2	4	31	+5	25	10
8	19	–7	49	23	–3	9	21
9	23	–3	9	18	–8	64	24
10	25	–1	1	16	–10	100	10
योग	256		226	255		379	204

टिप्पणी

$\sum x = 256$	$\sum y = 255$
$X = \frac{\sum x}{N}$	$Y = \frac{\sum y}{N}$
$\overline{X}\frac{256}{10}$	$\overline{Y} = \frac{255}{10}$
$\overline{X} = 25.6$	$\overline{Y} = 25.5$
$\overline{X} - A$	$\overline{Y} - A$
$25.6 - 26 = (-.4)$	$25.5 - 26 = (-.5)$
$(\overline{X} - A)^2$	$(\overline{Y} - A)^2$
$(25.6 - 26)^2$	$(25.5 - 26)^2$
$(-.4)^2$	$(-.5)^2$
$= .16$	$.25$

$$r = \frac{\frac{\sum dxdy}{N} - (\overline{X} - A)(\overline{Y} - A)}{\left[\sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N} - (\overline{X} - A)^2}\right]\left[\frac{\sum d_y^2}{N} - (\overline{Y} - A)^2\right]}$$

$$\frac{\frac{204}{10} - (-.4)(-.5)}{\left[\frac{226}{10} - (-0.4)\right]\left[\frac{379}{10} - (-0.5)\right]}$$

$$\frac{20:4 - (+0.2)}{\sqrt{[22.6 - 0:16][37.9 - 0.25]}}$$

$$\frac{20.2}{\sqrt{(22.44)}\,37.65}$$

$$\frac{20.2}{\sqrt{844.9}} = \frac{20.2}{29.07} = 0.69$$ उच्च धनात्मक सहसंबंध

लघु प्राप्तांक विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात करना

(Correlation by Reduced Score Method)

कभी–कभी मनोवैज्ञानिक प्रयोगों में दोनों चरों के आंकड़े काफी बड़े–बड़े होते हैं तथा प्रयासों अथवा निरीक्षणों की संख्या भी काफी बड़ी होती है इस प्रकार की संख्याओं से गणना करना अत्यधिक कठिन हो जाता है, संख्याओं के बड़े तथा विषम होने के कारण सावधानी रखते हुए भी भूल होने की आशंका बनी रहती है। ऐसी स्थिति से निपटने के लिए लघु प्राप्तांक विधि (Reduced Score Method) का प्रयोग अधिक उपयोगी रहता है। इस विधि की प्रमुख विशेषता यही है कि इसमें बड़े आंकड़ों को घटाकर सरलतापूर्वक कम कर दिया जाता है इससे गणना का भार कम हो जाता है और परिणाम में भी शुद्धता की कमी नहीं होती है। उदाहरण के लिए नीचे सहसंबंध गुणांक को इसी विधि से निकाला गया है।

उदाहरण : एक कम्प्यूटर प्रोग्राम को सीखने में 20 विद्यार्थियों की बुद्धिलब्धि (I.Q) तथा सीखने के समय के मध्यमानों को निम्न तालिका में दिया गया है। इन दिए गये आंकड़ों के आधार पर सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

टिप्पणी

विद्यार्थियों की क्रम संख्या	बुद्धिलब्धि	सीखने का समय
1	92	110
2	108	86
3	96	112
4	85	120
5	110	82
6	108	85
7	96	112
8	113	90
9	98	81
10	88	118
11	94	112
12	106	82
13	115	80
14	94	110
15	118	100
16	120	80
17	99	102
18	100	90
19	98	100
20	106	86

हल :

	x श्रेणी			*y* श्रेणी			
	X	*dx*	d_x^2	*x*	*dy*	d_y^2	*Dxdy*
1	92	−8	64	110	10	100	−80
2	108	8	64	86	−14	196	−112
3	96	−4	16	112	12	144	−48
4	85	−15	225	120	20	400	−300
5	110	10	100	82	−18	324	−180
6	108	8	64	85	−15	225	−120
7	96	−4	16	112	12	144	−48
8	113	13	169	90	10	100	−130
9	98	−2	4	81	−19	361	+38
10	88	−12	144	118	18	324	−216
11	94	−6	36	112	12	144	−72
12	106	6	36	82	−18	324	−108
13	115	15	225	80	−20	400	−300
14	94	−6	36	110	10	100	−60
15	118	18	324	100	0	0	00
16	120	20	400	80	−20	400	−400
17	99	−1	1	102	+2	4	−2
18	100	0	0	90	−10	100	00
19	98	−2	4	100	0	0	00
20	106	6	36	86	−14	196	−84
योग		−6 +104 +44	1964		−158 +96 −62	3986	−2260 +38 −2222

$\sum dx = +44 \qquad \sum dy = -62$

$\sum d_x^2 = 1964 \qquad \sum d_y^2 = 3986$

$\sum dxdy - 2222$

टिप्पणी

$$\frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sqrt{\left[\sum d^2x - \frac{(\sum dx)^2}{N}\right]\left[\sum d^2y - \frac{(\sum dy)^2}{N}\right]}}$$

$$\frac{-2222 - \frac{(+44)\,(-62)}{20}}{\sqrt{\left[1964 - \frac{(44)^2}{20}\right]\left[3986 - \frac{(62)^2}{20}\right]}}$$

$$\frac{-2222 - (-136.4)}{\sqrt{[1964 - 96.8][3986 - 192.2]}}$$

$$\frac{-2222 + 136.4}{\sqrt{[1867.2][3793.8]}}$$

$$\frac{-2085.6}{7083783.36}$$

$$\frac{-2085.6}{2661.537} = 0.784$$

उपरोक्त दोनों चरों (x तथा y) के निरीक्षण से पता चलता है कि इनके मध्यमानों का विस्तार 80 से लेकर 120 तक फैला हुआ है लघु प्राप्तांक विधि के अंतर्गत प्रत्येक चर में से एक स्थिर संख्या (Constant Number) घटानी होती है, वह संख्या ऐसी होनी चाहिए जिसके घटाने से प्राप्तांक का मान काफी कम से कम हो सके। इस उदाहरण के आधार पर यदि हम स्थिर संख्या 100 चुनते हैं तो शेष प्राप्तांक लघु संख्या ± 20 रहती है। यह संख्या सुविधाजनक है दोनों चरों के लिए स्थिर संख्या 100 चुनने से हमारा गणना कार्य काफी सरल हो जाता है यह स्थिर संख्या कुछ भी हो सकती है, तथा दोनों चरों के लिए स्थिर संख्या अलग–अलग हो सकती है और प्रायः अलग ही होती है स्थिर संख्या का चयन करते समय माननीय कसौटी यह है कि संख्या ऐसी होनी चाहिए कि प्राप्तांकों को घटाने से प्राप्त शेष संख्या कम से कम रहे। जिससे गणना (Calculation) का कार्य सरल से सरल हो सके।

मूल प्राप्तांकों से सहसंबंध गुणांक निकालने की विधि (Method of Coefficient of Correlation from Raw Scores)

इस विधि से सहसंबंध गुणांक ज्ञात करना अधिक सरल होता है। इस विधि में विचलन नहीं लिये जाते बल्कि मूल्यों का सीधे ही प्रयोग किया जाता है। इसमें गणित कार्य कम करना पड़ता है। इस विधि से सहसंबंध गुणांक निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$r = \frac{N\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[N \times \sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[N \times \sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$$

टिप्पणी

उदाहरण : निम्न सारणी से मूल प्राप्तांकों का प्रयोग करते हुए सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

X–	3	4	6	7	10	11	14	16	18	20
Y–	1	3	5	4	8	7	9	10	13	12

हल :

x	x^2	*y*	*y2*	X^4
3	9	1	1	3
4	16	3	9	12
6	36	5	25	30
7	49	4	16	28
10	100	8	64	80
11	121	7	49	77
14	196	9	81	126
16	256	10	100	160
18	324	13	169	234
20	400	12	144	240

$$\frac{N \times \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{\left[N \times \sum x^2 - (\sum x)^2\right]\left[N \times \sum y^2 - (\sum y)^2\right]}}$$

$$\frac{10 \times 990 - (109)(72)}{\sqrt{10(1507) - (109)^2}\sqrt{10(658) - (72)^2}}$$

$$\frac{9900 - 7848}{\sqrt{15070 - 11881}\sqrt{6580 - 5184}}$$

$$\frac{2052}{\sqrt{3189 \times 1396}} = \frac{2052}{\sqrt{4451844}} = \frac{2052}{2109.93} = +0.97$$

गेन्स विधि (Gains Method)

यह विधि कोटि अंतर विधि Rank Difference Method का ही सरल रूप है इसके अंतर्गत दोनों चरों की कोटियों में केवल धनात्मक अंतरों की ही गणना की जाती है जबकि ऋणात्मक संख्या में आने वाले पदमूल्यों को छोड़ दिया जाता है। इस विधि द्वारा प्राप्त सहसंबंध गुणांक का सांकेतिक चिन्ह (Symbol) R होता है इस विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$R = 1 - \frac{6\sum G}{(N^2 - 1)}$$

यहां R = गेन्स विधि द्वारा प्राप्त सहसंबंध गुणांक है।

$\sum G$ = धनात्मक अंतरों का योग यहां G Gain को संक्षिप्त रूप में व्यक्त करता है।

N = निरीक्षणों की संख्या है।

टिप्पणी

उदाहरण : निम्न सारणी में दिये गये मध्यमानों का गेन्स विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिए।

विद्यार्थी	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	38	35	30	32	26	46	50	42	36	20
y	40	30	35	25	30	45	55	40	40	10

हल :

क्रम संख्या	x	y	R^1	R^2	G R^1-R^2	G R^2-R^1
1	38	40	4	4	0	0
2	35	30	6	7.5	—	1.5
3	30	35	8	6	2	—
4	32	25	7	9	—	2
5	26	30	9	7.5	1.5	—
6	46	45	2	2	0	0
7	50	55	1	1	0	0
8	42	40	3	4	—	1
9	36	40	5	4	1	—
10	20	10	10	10	0	0
योग					$\sum G = 45$	$\sum G = 4.5$

Note: $\sum G$ के दोनों स्तंभों का योग समान (Equal) होना चाहिए।

$$R = 1-\frac{6\sum G}{N^2-1}$$

$$= 1-\frac{6(4.5)}{10^2-1}$$

$$= 1-\frac{27}{100-1}$$

$$= 1-\frac{27}{99}$$

$$= 1-.2727$$

$$= 0.727 \text{ or } +0.73$$ धनात्मक सहसंबंध है।

सहसंबंध गुणांक को ज्ञात करने की प्रमुख विधियों का वर्णन ऊपर किया गया है। इनमें प्रथम क्रमांतर विधि Rank Difference Method तथा दूसरी आघूर्ण गुणनफल विधि (Product Moment Method) क्रामांतर विधि का प्रयोग केवल उसी स्थिति में अधिक उपयुक्त रहता है जब दोनों चरों के आंकड़े केवल कोटियों के आधार पर व्यक्त किए जाते हैं और संख्या (N) अथवा प्रेक्षित आवृत्तियां कम रहती हैं इसीलिए कोटि–अंतर

विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक (P) की गणना अप्राचल विधियों (Non-Parametric Method) में की जाती है।

टिप्पणी

3.2.2 स्पीयर मैन का कोटि अंतर सहसंबंध गुणांक

चार्ल्स स्पीयरमैन ने व्यक्तिगत समंकमालाओं में सहसंबंध ज्ञात करने की एक सरल रीति का प्रतिपादन किया है। इस रीति को कोटि–अंतर या क्रमान्तर–रीति भी कहते हैं। यह रीति उन परिस्थितियों के लिए अधिक उपयुक्त मानी जाती है जहां तथ्यों को केवल कोटि क्रम (Rank-Order) के अनुसार ही रखा जा सकता है उदाहरण के लिए जैसे सुंदरता का अंकात्मक माप संभव नहीं लेकिन फिर भी विभिन्न इकाइयों की सुंदरता को देखकर अर्थात् गुण की अधिकता के आधार पर उन्हें पहला, दूसरा, तीसरा इत्यादि क्रम प्रदान किया जा सकता है। इस विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक का सांकेतिक चिन्ह (Symbol) = P होता है।

इस विधि में सर्वप्रथम X तथा Y श्रेणी के पद–मूल्यों को अलग–अलग कोटि क्रम प्रदान किए जाते हैं। इसमें सबसे बड़ी संख्या को 1 (एक) उससे छोटी को 2 (दो) फिर तीन इस प्रकार क्रम निश्चित किया जाता है। तत्पश्चात् X श्रेणी के क्रमों में से Y श्रेणी के क्रमों को घटाकर क्रमान्तरों के अंतर (D = Rank X–Rank Y) की गणना की जाती है। ध्यान रखने की बात है कि $\sum D$ क्रमान्तरों के अंतर का योग सदैव (0) शून्य होता है। फिर क्रमान्तरों का वर्ग निकालकर उनका योग किया जाता है अर्थात् $\sum D^2$ ज्ञात किया जाता है और अंत में निम्न सूत्र का प्रयोग करके सहसंबंध ज्ञात किया जाता है।

$$P = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} \quad or \quad P = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

उदाहरण : दो परीक्षणों में छात्रों के प्राप्तांक निम्न प्रकार हैं कोटि–अंतर विधि द्वारा दोनों परीक्षणों में सहसंबंध ज्ञात कीजिए।

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
परीक्षण I	15	12	13	18	16	20	19	17	14	21
परीक्षण II	25	30	28	22	24	20	21	23	27	19

	परीक्षण I	**परीक्षण II**	**Rank I**	**Rank II**	**कोटि अंतर D**	**कोटि अंतरों के वर्गों का योग $\sum D^2$**
1	15	25	7	4	3	9
2	12	30	10	1	9	81
3	13	28	9	2	7	49
4	18	22	4	7	–3	9
5	16	24	6	5	1	1
6	20	20	2	9	–7	49
7	19	21	3	8	–5	25
8	17	23	5	6	–1	1
9	14	27	8	3	5	25
10	21	19	1	10	–9	81
					–25 + 25 =0	330

टिप्पणी

$$P = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$P = 1 - \frac{6(330)}{10(10^2-1)}$$

$$P = 1 - \frac{1980}{10(99)}$$

$$P = 1 - \frac{1980}{990}$$

$$P = 1 - 2$$

$$P = -1$$

3.2.3 कोटि सार्थकता परीक्षण

Sir Wiliam S. Gosset (उपनाम *student*) ने एक सार्थकता परीक्षण का विकास किया और यह प्रतिचयन सिद्धांत के छोटे प्रतिदर्श विश्लेषण में सार्थक योगदान देता है। जब जनसंख्या विचरन अज्ञात हो तो परीक्षण सामान्यत: t वितरण पर आधारित *student* का t परीक्षण कहते हैं।

सामान्य वितरण की तरह t वितरण भी सम्मित होता है परंतु सामान्य वितरण की तुलना में संतोषजनक होना चाहिए। और आगे हरेक संभव प्रतिदर्श आकार का t वितरण भिन्न होता है। अगर प्रतिदर्श आकार बड़ा हो तो t वितरण का आकार संतोषजनक नहीं होगा और लगभग सामान्य वितरण के बराबर हो जायेगा। वास्तविकता में 30 से बड़े प्रतिदर्श आकार के लिए t वितरण सामान्य के बहुत समीप होता है और हम उसका उपयोग लगभग सामान्य t वितरण की तरह करते हैं। जहाँ n छोटा है तो t वितरण सामान्य से दूर होगा परन्तु जब n अंतंत हो तो यह सामान्य वितरण की तरह होगा।

छोटे प्रतिदर्श के संदर्भ में t परीक्षण उपयोग करने के लिए सबसे पहले t के मान की गणना की जाती है तब दिए गए स्वतंत्र कोटी (*Degrees of Freedom*) के निश्चित सार्थकता स्तर पर t के सारणी मान से तुलना की जाती है। अगर t का परिकलित मान सारणी मान ($t_{0.05}$) से अधिक हो तो हम कह सकते हैं कि अंतर 5% स्तर पर सार्थक है लेकिन यदि परिकलित मान t_0 सारणी मान की तुलना में कम है तो अंतर को सार्थक नहीं माना जायेगा।

जब दो स्थिति मौजूद हो तो t-परीक्षण का उपयोग होगा।

(*i*) प्रतिदर्श आकार 30 से कम हो, जब $n \leq 30$

(*ii*) जनसंख्या मानक विचलन ज्ञात हो

t-परीक्षण की मान्यताएँ निम्नलिखित हैं।

(*i*) जनसंख्या सामान्य या लगभग सामान्य है।

(*ii*) विश्लेषण स्वतंत्र है और प्रतिदर्श को यादृच्छिक रूप से लिया गया है।

(*iii*) माप की कोई त्रुटि नहीं है।

(*iv*) दो प्रतिदर्श के विश्लेषण में अगर दो जनसंख्या माध्य की समानता का परीक्षण करना है तो जनसंख्या विचरन को समान माना जायेगा।

टिप्पणी

t मान की गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का सामान्यतः उपयोग किया जाता है।

(*i*) किसी यादृच्छिक प्रतिदर्श के माध्य का सार्थकता परीक्षण करने के लिए

$$t = \frac{|\bar{X} - \mu|}{S/\ SE_{\bar{X}}\bar{X}}$$

जहाँ $\bar{X}$ = प्रतिदर्श का माध्य।

μ = ब्रह्मांड का माध्य।

$S.E._{\bar{X}}$ = छोटे प्रतिदर्श के विश्लेषण में माध्य का $S.E.$ और इसकी गणना ऐसे होगी।

$$S.E._{\bar{X}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}}$$

और स्वतंत्र कोटी = $(n - 1)$

उपरोक्त सूत्र को ऐसे लिखा जा सकता है।

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{S.E._{\bar{x}}} = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\dfrac{\sqrt{\dfrac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{|\bar{x} - \mu|}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n-1}}} = X\sqrt{n}$$

अगर हम छोटे प्रतिदर्श के विश्लेषण में जनसंख्या माध्य (μ) के संभावय सीमा की गणना करना चाहते हैं तो हम निम्नलिखित में से किसी का उपयोग कर सकते हैं।

(*a*) संभावय सीमा 95% विश्वास स्तर पर

$$\mu = \bar{X} \pm SE_{\bar{x}}\,(t_{0.05})$$

(*b*) संभावय सीमा 99% विश्वास स्तर पर

$$\mu = \bar{X} \pm SE_{\bar{x}}\,(t_{0.05})$$

दूसरे विश्वास स्तर के लिए विश्वास सीमा से इसी तरह से सारणी को ध्यान में रखकर परिकलित किया जा सकता है जैसे हमने $t_{0.05}$ a में और $t_{0.01}$ b में ऊपर लिया है।

टिप्पणी

(*ii*) दो प्रतिदर्श के माध्य के बीच अंतर का परीक्षण

$$t = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

जहाँ, $\bar{X}_1$ = प्रतिदर्श 1 का माध्य

$\bar{X}_2$ = प्रतिदर्श 2 का माध्य

$SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ = दो प्रतिदर्श माध्य के अंतर का प्रमाप त्रुटि

$$SE_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_{1i} - \bar{x}_2)^2 + \Sigma(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= X\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

और स्वतंत्र कोटी = $(n_1 + n_2 - 2)$

जब वास्तविक माध्य भिन्न में हो काल्पनिक माध्य का उपयोग सुगम होता है। ऐसे विश्लेषण में अंतर का मानक विचलन

$$\sqrt{\frac{\Sigma(x_{1i} - x_1)^2 + \Sigma(x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

उपरोक्त सूत्र की गणना निम्नलिखित लघु रीति सूत्र से की जा सकती है।

$$\frac{\sqrt{\Sigma(x_{1i} - A_1)^2} + \Sigma(x_{2i} - A_1)^2 - n_1(x_{1i} - A_2)^2 - n_2(x_{2i} - A_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

जहाँ, A_1 = प्रतिदर्श 1 का काल्पनिक माध्य।

A_2 = प्रतिदर्श 2 का काल्पनिक माध्य।

X_1 = प्रतिदर्श 1 का वास्तविक माध्य।

X_2 = प्रतिदर्श 2 का वास्तविक माध्य।

(*iii*) परिकलित सहसंबंध गुणांक का सार्थकता परीक्षण

$$t = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \times \sqrt{n - 2}$$

यहाँ t स्वतंत्र कोटी $(n - 2)$ पर आधारित है।

(*iv*) अंतर परीक्षण के संदर्भ में

अंतर परीक्षण युग्म आँकड़ों के विश्लेषण में लागू होता है और इसके संदर्भ में t की गणना निम्नलिखित है :

$$t = \frac{\bar{x}_{Diff} - 0}{\sigma_{Diff}\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}_{Diff} - 0}{\sigma_{Diff}}\sqrt{n}$$

टिप्पणी

जहाँ, $\bar{X}_{Diff}$ या $\bar{D}$ = प्रतिदर्श मदों के अंतर का माध्य

0 = प्राक्कलन पर शून्य मान कि यहाँ कोई अंतर नहीं है।

σ_{Diff} = अंतर का मानक विचलन

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\left(D - \bar{X}_{Diff}\right)^2}{n-1}}$$

या

$$= \sqrt{\frac{\Sigma D^2 - \left(\bar{D}\right)^2 n}{n-1}}$$

D = अंतर

n = स्वतंत्र कोटी $(n - 1)$ पर आधारित दो प्रतिदर्श में युग्मों की संख्या।

निम्नलिखित उदाहरण उपरोक्त सूत्र से t परीक्षण के अनुप्रयोग को दर्शाते हैं।

CHI-वर्ग परीक्षण (CHI-SQUARE TEST)

Chi-वर्ग परीक्षण *Bivariatetabular* विश्लेषण के लिए सांख्यिकी सार्थकता का अप्राचलिक परीक्षण है। किसी भी उपयुक्त सांख्यिकी सार्थकता परीक्षण में आपके पास प्राक्कलन की स्वीकारिता या अस्वीकारिता के लिए विश्वास कोटी होती है। विशिष्टत:, *Chi*-वर्ग परीक्षण एक सांख्यिकी प्राक्कलन परीक्षण है जिसमें जब शून्य-प्राक्कलन यथार्थ हो तो सांख्यिकी परीक्षण में *Chi*-वर्ग वितरण होता है। इसे भिन्न प्रतिदर्श (व्यक्तियों का) जो उनके व्यवहार जिसे हम चयनित प्रतिदर्श से सामान्यीकरण कर सके कि कुछ विशिष्टता में भिन्न होना चाहिए। प्रतिदर्श आँकड़ों के सार्थकता की जाँच में उपयोगी विभिन्न परीक्षणों में *Chi*-वर्ग परीक्षण का विकास *Pro. Fisher* ने किया इसे एक महत्वपूर्ण परीक्षण माना जाता है।

Chi-वर्ग एक सांख्यिकी माप जिससे ब्रह्मांड के विश्लेषित और प्रत्याशित आँकड़ों के सार्थक अंतर का निर्धारण संभव है और जिसे संकेतानुसार χ^2 (उच्चारण *ki*-वर्ग) लिखते हैं। *Chi*-वर्ग परीक्षण हमें दो से अधिक जनसंख्या समानुपात जो समान माने जा सकते हैं के परीक्षण में सक्षम करता है। *Chi*-वर्ग परीक्षण लागू कर सकने की स्थिति में दोनों बारम्बारताओं को समान रूप से समूहित और सैद्धान्तिक वितरण को विश्लेषित बारम्बारता के समान समायोजन समान कुल बारम्बारता के समान समायोजन समान कुल बारम्बारता के लिए अवश्य करना चाहिए। χ^2 को निम्नलिखित सूत्र की सहायता से गणना करते हैं।

$$\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(f_0 - f_e)}{f_e}\right\}^2$$

जहाँ, f_0 = विश्लेषित बारम्बारता का माध्य, और

f_e = प्रत्याशित बारम्बारता का माध्य

टिप्पणी

χ^2 का मान सार्थक है या नहीं यह χ^2 के सारणी मान (इस किताब के अंत में परिशिष्ट भाग में दिया गया है) दिए गए स्वतंत्र कोटी निश्चित विश्वास स्तर (सामान्यत: 5% स्तर लिया जाता है) देख कर ज्ञात कर सकते हैं।

30 से अधिक स्वतंत्र कोटी के लिए $\sqrt{2\chi^2}$ के वितरण को लगभग समान माना जाता है जहाँ $\sqrt{2\chi^2}$ वितरण का माध्य $\sqrt{2df-1}$ और मानक विचलन 1 है। अगर χ^2 का अभिकलित मान सारणी मान से ज्यादा हो तो विश्लेषित और प्रत्याशित बारम्बारता के अंतर को सार्थक माना जाता है परन्तु यदि सारणी मान अभिकलित मान से ज्यादा हो तो विश्लेषित और प्रत्याशित बारम्बारता के अंतर को असार्थक माना जाता है उदाहरण परिणाम तक पहुँचते हैं और ऐसे परिणाम को नजरअंदाज करते हैं।

स्वतंत्र कोटि (Degrees of Freedom)

अगर, वहाँ 10 बारम्बारता वर्ग और एक स्वतंत्र प्रतिबंध है तो स्वतंत्र कोटि $(10-1) = 9$ होगा। यदि n समूहों की संख्या और एक प्रतिबंध जिसे विश्लेषित और प्रत्याशित बारम्बारता के योग से रखा गया तो $df = (n-1)$ जब दो प्रतिबंध अंकगणितीय माध्य के समान पहले की तरह रखा गया तब $df = (n-2)$ और ऐसी ही। आसंग सारणी विश्लेषण में (एक सारणी जिसमें दो स्तंभ और दो अधिक स्तंभ या दो कतार पंतु दो से अधिक स्तंभ सारणी या दो कतार और दो से अधिक स्तंभ सारणी) या 2×2 सारणी विश्लेषण में स्वतंत्र कोटि की गणना ऐसे होगी।

$$dF = (C-1)(r-1)$$

C = स्तंभों की संख्या

r = कतारों की संख्या

परीक्षण के अनुप्रयोग की स्थिति

(*a*) अंकित एवं उपयोगी विश्लेषण को यादृच्छिक आधार पर संग्रह किया गया है।

(*b*) प्रतिदर्श के सारे सदस्यों या मदों को अवस्थ स्वतंत्र होना चाहिए।

(*c*) किसी समूह में कम संख्या उदाहरणत: 10 से कम नहीं होनी चाहिए।

(*d*) मदों की कुल संख्या अधिक होनी चाहिए। छोटे समूहों में भी इसकी संख्या कम से कम 50 होनी चाहिए।

(*e*) प्रतिबंध रेखीय होना चाहिए। प्रसंग जो आसंग सारणी में बारम्बारता कक्ष में रेखीय समीकरण में शामिल हो को रेखीय प्रतिबंध कहते हैं।

Chi-वर्ग परीक्षण के अनु-प्रयोग का क्षेत्र

Chi-वर्ग परीक्षण बहुत सारे समस्याओं में लागू होता है। यह परीक्षण वास्तविकता में एक तकनीक है जिससे उपयोग से हमारे लिए संभव है :

(*a*) *Fit* होने की अच्छाई का परीक्षण।

(*b*) एक बारम्बारता वितरण संख्या की एकरूपता का परीक्षण।

(*c*) प्राक्कलन स्थापित करने में।

(*d*) दो गुणों के मध्य संबंध का सार्थकता परीक्षण।

(*e*) दो चरों की निर्भरता का परीक्षण।

दूसरे शब्दों में *Chi*-वर्ग परीक्षण निर्भरता, *Fit* होने की अच्छाई और एकरूपता का एक परीक्षण है। *Chi*-वर्ग परीक्षण का उपयोग जनसंख्या विचरण में भी किया जाता है।

Fit होने की अच्छाई के रूप में, χ^2 परीक्षण हमें वितरण के विश्लेषित आँकड़ा काल्पनिक सैद्धान्तिक वितरण जैसे द्वि-पद वितरण (*Binomial Distribution*), प्वॉयसन वितरण (*Poisson Distribution*) और सामान्य वितरण में कितने अच्छे से उचित है देखने में सक्षम करता है।

निर्भरता परीक्षण के रूप में, χ^2 दो विशेषता संयुक्त है या नहीं यह वर्णन करने में सक्षम करता है। उदाहरण के लिए, हम यह जानना चाहते हैं कि एक नई दवाई बुखार की रोकथाम कर सकती है या नहीं और χ^2 परीक्षण इस विषय में मदद कर सकता है। ऐसे स्थिति में हम शून्य-प्राक्कलन कर सकते हैं कि दो विशिष्टता (नई दवाई और बुखार की रोकथाम) स्वतंत्र है। इसका अर्थ है कि नई दवाई बुखार की रोकथाम में प्रभावी नहीं है। इसे इस तरह भी कह सकते हैं कि χ^2 संबंध कोटि या दो गुणों के संबंध का रूप की माप नहीं है परन्तु यह साधारणतः दो विशिष्टताओं के ऐसे संख्या या संबंध के सार्थकता जाँच की तकनीक है।

एकरूपता परीक्षण के रूप में, χ^2 परीक्षण यह कहने में मदद करता है कि भिन्न प्रतिदर्श समान ब्रह्मांड से लिए गए हैं। इस परीक्षण के द्वारा हम वर्णन करते हैं कि ज्ञात प्राक्कलन के साथ प्रतिदर्श के आधार पर अभिकलित परिणाम सपोषक है या परिणाम दिए प्राक्कलन का समर्थन करने में असफल हो जाता है। ऐसे परीक्षण के निर्णय प्रक्रिया तकनीक में मुख्य रूप से उपयोग कर सकते हैं।

जनसंख्या विचरण के परीक्षण के रूप में, मुख्यतः छोटे प्रतिदर्श के विश्लेषण में विश्वास अंतराल के द्वारा जनसंख्या विचरण की सार्थकता परीक्षण के रूप में भी उपयोग कर सकते हैं।

Chi-वर्ग मान ज्ञात करने में शामिल सोपान

निम्नलिखित विविध सोपान शामिल है :

(*a*) प्रत्याशित बारम्बारता की गणना।

(*b*) वास्तविक बारम्बारता और प्रत्याशित बारम्बारता के अंतर और अंतर का वर्ग ज्ञात करना।

(*c*) परिणाम $(f_0 - f_e)^2$ में ज्ञात संख्या को संबंधित। प्रत्याशित बारम्बारता से विभाजित करना। $\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$ ज्ञात करने के लिए।

(*d*) $\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$ का योग ज्ञात करना जिसे χ^2 मान कहते हैं और संकेतानुसार $\frac{\Sigma(f_0 - f_e)^2}{f_e}$ लिखते हैं।

ऐसे ज्ञात χ^2 मान को संबंधित χ^2 सारणी मान से तुलना करते हैं और अनुमान उपरोक्त कथनानुसार करते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण *Chi*-वर्ग परीक्षण का वर्णन करता है।

टिप्पणी

उदाहरण– निम्नलिखित आँकड़ों से χ^2 का मान ज्ञात करें :–

वर्ग	A	B	C	D	E
विश्लेषित बारम्बारता	8	29	44	15	4
सैद्धान्तिक (या प्रत्याशित) बारम्बारता	7	24	38	24	7

हल–क्योंकि कुछ बारम्बारता 10 से कम है, सबसे पहले हमें दिए गए आँकड़ों को निम्नलिखित तरह से पुनः समूहित करना होगा और तब χ^2 के मान की गणना करनी होगी।

वर्ग	विश्लेषित बारम्बारता	प्रत्याशित बारम्बारता	$(f_0 - f_e)$	$\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}$
A और *B*	$(8 + 29) = 27$	$(7 + 24) = 31$	6	36/31
C	44	38	6	36/38
D और *E*	$(15 + 4) = 19$	$(24 + 7) = 31$	– 12	144/31

$$\therefore \qquad \chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right\} = 6.76 \text{ लगभग}$$

Yates का सुधार

F-Yates ने अभिकलित χ^2 मान में सुधार (2×2) सारणी के साथ सुझाव दिया जब कक्षा बारम्बारता छोटी (कक्षा बारम्बारता नहीं हों) किसी भी विश्लेषण में 5 से कम होनी चाहिए हालांकि 10 अच्छा है पूर्वोक्त और χ^2 केवल सार्थकता स्तर पर हो। *Yates* द्वारा दिये सुधार को *Yates* का सुधार के रूप में लोकप्रिय ढंग से जानते हैं। इसमें प्रत्याशित बारम्बारता से विश्लेषित बारम्बारता के विचलन में कमी शामिल है जिससे निश्चित रूप से χ^2 का मान कम होगा।

सुधार को नियम विश्लेषित बारम्बारता के एक सारणी के हरेक कक्षा (2×2) में इस तरह करता है जिससे प्रत्याशित बारम्बारता से विश्लेषित बारम्बारता में उस कक्षा के लिए 0.5 कमी हो और हरेक कक्षा में इस तरह के समायोजन से सीमांत योग प्रभावित नहीं होता।

Yates के सुधार लागू करने पर χ^2 का मान ज्ञात करने का सूत्र को लिखा जाता है।

$$\chi^2 = \frac{N.(ad - bc - 0.5N)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

टिप्पणी

अगर हम सामान्य सूत्र $\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(F_0 - F_e)^2}{F_e}\right\}$ से Chi-वर्ग मान की गणना करते हैं तब Yates सुधार को इस तरह लागू किया जाता है।

$$\chi^2\,(\text{सुधार}) = \left[\left\{\frac{|F_{01} - F_{e1}| - 0.5}{F_{e1}}\right\}\right]^2 + \left[\frac{|F_{02} - F_{e2}| - 0.5}{F_{e2}}\right]^2 + \ldots\ldots$$

Chi-वर्ग (χ^2) की योगात्मक विशेषता

χ^2 का एक महत्वपूर्ण गुण इसकी योगात्मक प्रवृत्ति है। इसका अर्थ है विभिन्न χ^2 मान को एक साथ जोड़ सकते हैं और यदि स्वतंत्र कोटि है तो उसे भी जोड़ सकते हैं यह संख्या χ^2 के कुल मान का स्वतंत्र कोटी देता है। यदि χ^2 के कुछ मान जो समान आँकड़ों के कुछ प्रतिदर्शों से लिए हो तब इसके योगात्मक प्रवृत्ति के कारण हम विभिन्न χ^2 मान को मिश्रित कर सकते हैं आसान रूप से जोड़ कर। विभिन्न χ^2 मान का ऐसा योग एक χ^2 का मान देता है जिसके उपयोग से चयनित समस्या के बारे में अच्छी सोच का निर्माण कर सकते हैं। निम्नलिख्ति उदाहरण χ^2 के योगात्मक विशेषता को बताता है।

Chi-वर्ग (χ^2) परीक्षण की महत्वपूर्ण विशेषता

(*a*) यह परीक्षण बारम्बारता पर आधारित होता है। माध्य और मानक विचलन की तरह प्राचल पर नहीं।

(*b*) यह परीक्षण प्राक्कलन परीक्षण में उपयोगी होता है आकलन में नहीं।

(*c*) इस परीक्षण में योगात्मक गुण होता है।

(*d*) इस परीक्षण का उपयोग मिश्रित आसंग Contingency सारणी जिसमें several कक्षा हो और यह परीक्षण शोध कार्य में बहुत उपयोगी होता है।

(*e*) यह एक महत्वपूर्ण अप्राचलिक परीक्षण है जिसमें जनसंख्या के बारे में कोई आसान मान्यताएँ नहीं है और प्राचल मान की कोई आवश्यकता नहीं है। इसे गणितीय सूचना कम शामिल होती है।

Goodness of Fit

यह परीक्षण है कि कैसे सैद्धांतिक वितरण में विश्लेषित बारम्बारता वितरण Fit है। इस परीक्षण के लिए हमें सांख्यिकी Chi-वर्ग का उपयोग करना होगा जो लिखा जायेगा।

$$\chi^2 = \Sigma\frac{(O-E)^2}{E} = \Sigma\frac{O^2}{E} - n$$

O = विश्लेषित बारम्बारता

E = प्रत्याशित बारम्बारता

जहाँ n = कुल बारम्बारता और $d.f = n - 1$

अगर χ^2 का अभिकलित मान > χ^2 के सारणी मान से दिए गए सार्थकता स्तर पर, तो हम शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करते हैं। यहाँ विश्लेषित और प्रत्याशित बारम्बारता में कोई सार्थक अंतर नहीं है।

टिप्पणी

जनसंख्या विचरन परीक्षण

χ^2 का उपयोग कभी-कभी जनसंख्या विचरन की विश्वास अंतराल से सार्थकता परीक्षण में किया जाता है। इसका अर्थ है हम χ^2 परीक्षण यदि एक यादृच्छिक प्रतिदर्श सामान्य जनसंख्या से लिया गया है जिसका माध्य (μ) और निनिर्दिष्ट विचरन $(\sigma_p)2$ की जाँच में कर सकते हैं। इस स्थिति में शून्य प्राक्कलन के लिए सांख्यिकी परीक्षण होगा।

$$\chi^2 = \Sigma \frac{\left(X_i - \bar{X}_s\right)^2}{\left(\sigma_p\right)^2} = \frac{n\left(\sigma_s\right)^2}{\left(\sigma_p\right)^2} \quad \text{स्वतंत्र कोटी } (n-1)$$

अभिकलित मान की एक निश्चिम सार्थकता स्तर पर $df(n-1)$ से सारणी मान से तुलना कर के हम प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार कर सकते हैं। यदि अभिकलित मान सारणी मान के बराबर या कम है तो शून्य प्राक्कलन को स्वीकार परंतु यदि अभिकलित मान सारणी मान से अधिक है तो शून्य प्राक्कलन अस्वीकार होगा। इन सभी को एक उदाहरण से स्पष्ट किया जाता है।

उदाहरण–10 छात्रों का वजन निम्नलिखित है।

SL. No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वजन (kg)	38	40	45	53	47	43	55	48	52	49

हल– सबसे पहले हम मानक विचलन की गणना करेंगे।

प्रतिदर्श मानक विचलन की गणना

Sl. No.	X_i वजन (kg)	$X_i - \bar{X}_s$	$\left(X_i - \bar{X}_s\right)^2$
1	38	–9	81
2	40	–7	49
3	45	–2	04
4	53	+6	36
5	47	+0	00
6	43	–4	16
7	55	+8	64
8	48	+1	01
9	52	+5	25
10	49	+2	04
$n = 10$	$\Sigma X_i = 470$		$\Sigma\left(X_i - \bar{X}_s\right)^2 = 280$

टिप्पणी

$$\bar{X}_s = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{470}{10} = 47\ kg$$

$$\therefore \qquad \sigma_s = \sqrt{\frac{\Sigma\left(X_i - \bar{X}_s\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{280}{10}} = \sqrt{28} = 5.3\ kg$$

$$\therefore \qquad (\sigma_s)^2 = 28$$

शून्य प्राक्कलन $H_0 : (\sigma_p)^2 = (\sigma_s)^2$ लेने पर

सांख्यिकी परीक्षण $\chi^2 = \dfrac{n\left(\sigma_s\right)^2}{\left(\sigma_p\right)^2} = \dfrac{10 \times 28}{20} = \dfrac{280}{20} = 14$

इस विश्लेषण में स्वतंत्र कोटी $(n - 1) = (10 - 1) = 9$

5: सार्थकता स्तर पर सारणी मान $\chi^2 = 16.92$ और 1: सार्थकता स्तर पर 21.67 df 9 के लिए 1 दोनों विश्लेषण में सारणी मान अभिकलित मान से ज्यादा हैं। इसलिए हम शून्य प्राक्कलन को स्वीकार कर सकते हैं और निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दिया गया वितरण 20 वर्ग kg 5% और 1% सार्थकता स्तर पर लिया जा सकता है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. फ्रांसिस गाल्टन द्वारा कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक कब विकसित किया गया?

(क) सन् 1876 (ख) सन् 1886

(ग) सन् 1896 (घ) सन् 1906

2. Chi वर्ग परीक्षण का विकास निम्न में से किस अर्थशास्त्री द्वारा किया गया?

(क) प्रो. मार्शल (ख) प्रो. फिशर

(ग) प्रो. राबर्ट्स (घ) प्रो. वॉडिंगटन

3.3 प्रतीपगमन विश्लेषण

प्रतीपगमन (*Regression*) शब्द का प्रथम उपयोग सर फ्रांसिस गाल्टन द्वारा 1877 में किया गया जिनके अध्ययन ने यह दिखाया कि लंबे माता-पिता के बच्चों में लंबाई की प्रवृत्ति जनसंख्या के औसत लम्बाई के पीछे या लौट आने की होती है। उन्होंने एक चर का दूसरे चर से पूर्वानुमान करने की प्रक्रिया के लिए प्रतीपगमन शब्द का प्रतिपादन किया। उन्होंने उस प्रक्रिया जिसके द्वारा कुछ चरों के उपयोग से दूसरे का पूर्वानुमान किया जाता है का वर्णन करने के लिए प्रतीपगमन शब्द का निर्माण किया। जहाँ चरों के बीच एक पूर्ण सुव्यवस्थित संबंध हो, तो दूसरे चर (ज्ञात या स्वतंत्र चर) के आधार पर इस संबंध के उपयोग से एक चर (अज्ञात या निर्भर चर) का अनुमान और पूर्वानुमान करना संभव है। जैसे एक *Banka Bank* के व्यापार क्षेत्र में

टिप्पणी

प्रति व्यक्ति आय के आधार पर जमा का अनुमान लगा सकता है। एक विपणन मैनेजर विज्ञापन खर्च के क्रम में परिवर्तन के कुल बिक्री राजस्व पर अनुमानित परिवर्तन के आधार पर अपना विज्ञापन खर्च की योजना तैयार कर सकता है। समानतः एक अस्पताल संचालक कुल संख्या के आधार पर अपने बिस्तरों की जरूरत की परियोजना बना सकता है। ऐसे पूर्वानुमान प्रतीपगमन विश्लेषण के उपयोग से किये जा सकते हैं। एक अनुसन्धानकर्ता प्रतीपगमन विश्लेषण के उपयोग से अपने सिद्धांत के कारण और प्रभाव संबंध की जाँच कर सकता है। इन सबसे इस बात की व्याख्या होती है कि व्यापार और उद्योग के समस्याओं का पूर्वानुमान करने के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण एक अत्याधिक उपयोगी तकनीक है।

प्रतीपगमन की परिकल्पना

प्रतीपगमन तकनीक का पूर्वानुमान करते समय, यह हमेशा माना जाता है :–

(*a*) निर्भर और स्वतंत्र चरों के बीच एक वास्तविक संबंध है।

(*b*) निर्भर चरों का मान यादृच्छिक हो परंतु स्वतंत्र चरों का मान अचर परिणाम में बिना किसी त्रुटि के हो और जिन्हें प्रयोगकर्ता के द्वारा चुना गया हो।

(*c*) संबंधों की दिशा के विषय में स्पष्ट संकेत हो। इसका अर्थ यह है कि आश्रित चर स्वतंत्र चर का फलन हो। (उदाहरण के लिए, जब हम यह कहते हैं कि विज्ञापन की बिक्री पर प्रभाव है तब हम यह कह रहे होते हैं कि बिक्री का विज्ञापन पर प्रभाव है)।

(*d*) प्रतीपगमन प्रारूप का उपयोग करने समय स्थिति (जो भी निर्भर और स्वतंत्र चरों के बीच प्रतीपगमन के द्वारा अनुमान लगाते समय) समान हो। दूसरे शब्दों में, आसान शब्दों में अर्थ है प्रतीपगमन समीकरण की गणना करते समय संबंध में परिवर्तन नहीं होना चाहिए।

(*e*) इस विश्लेषण का उपयोग श्रेणी (और श्रेणी के बाहर के मूल्यों के लिए नहीं) के अंदर के मूल्यों, जिसके लिए यह मान हो, का पूर्वानुमान करने में किया गया है।

3.3.1 प्रतीपगमन समीकरण

एक सामान्य रेखी प्रतीपगमन विश्लेषण की स्थिति में, दिए गए चरों के बीच रेखीय संबंध ($Y = a + bX$ के प्रकार वर्णित संबंध) की पूर्वधारणा के आधार पर एक चर का उपयोग दूसरे चर के पूर्वानुमान में किया जाता है। जिस चर का पूर्वानुमान करना है उसे निर्भर चर और जिसके आधार पर करना है उसे स्वतंत्र चर कहते हैं।

सामान्य रेखीय प्रतीपगमन प्रारूप[1] (या प्रतीपगमन रेखा) को लिखा जाता है ऐसे,

$$Y_i = a + bX_i + e_i$$

---

1. साधारणतः Y के प्रतीपगमन को $\hat{Y}$ से संकेत किया जाता है और लिखा जाता है, ऐसे,

$$\hat{Y} = a + bX_i$$

यह पूर्वधारणा है कि निकाय के यादृच्छ विक्षोभ का औसत या परिलक्षित मान शून्य होता है। इस प्रतीपगमन प्रारूप को Y का X पर प्रतीपगमन रेखा के रूप में जाना जाता है जिसके लिए Y का मान दिए गए X के मानों से अनुमानित किया जाता है।

जहाँ, Y_i = निर्भर चर है

X_i = स्वतंत्र चर है

e_i = अपूर्वानुमानित यादृच्छिक तत्व (साधारण अवशिष्ट या त्रुटि पद कहते हैं)

(*a*) *a Y* के अन्तःखण्ड (*Intercept*) को बताता है, जब स्वतंत्र चर का मान शून्य हो तो अन्तःखण्ड आश्रित चर के मान का महत्त्व बताता है।

(परन्तु इस पद का प्रयोगात्मक अर्थ केवल उसी समय होगा जब स्वतंत्र चर के लिए शून्य मान संभव हो।)

(*b*) *b* अचर है, जो प्रतीपगमन रेखा की ढाल का संकेत देता है। रेखा की ढाल से स्वतंत्र चर के इकाई में बदलाव से निर्भर चर के मान में बदलाव का संकेत मिलता है।

अगर दोनों अचर ज्ञात हैं तो *Y* के लिए हमारे पूर्वानुमान की सटीकता e_i के मान के परिमाण पर निर्भर करती है। यदि प्रारूप में सभी e_i का मान बहुत बड़ा हो तो पूर्वानुमान उतना बेहतर नहीं होता है लेकिन यदि ये मान छोटे होते हैं तो पूर्वानुमान $\left(\hat{Y}\right)$ मान वास्तविक मान $\left(Y_i\right)$ के सन्निकट होगा।

प्रतीपगमन प्रारूप के अन्तःखण्ड एवं ढाल का अनुमान (प्रतीपगमन समीकरण अनुमान) दो नियतांक या मानदंड '*a*' एवं '*b*', जोकि प्रतीपगमन प्रारूप में समूची जनसंख्या या ब्रह्मांड के लिए होता है, मुख्यतः अज्ञात होते हैं एवं प्रतिदर्श सूचनाओं से इनका अनुमान लगाया जाता है।

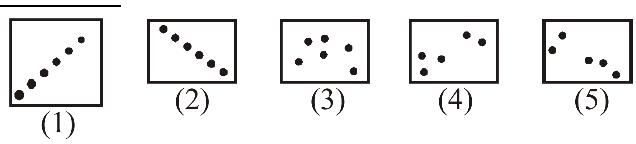
अनुमान के लिए प्रयुक्त दो विधियाँ निम्नलिखित हैं :–

(*a*) विक्षेप चित्र विधि

(*b*) न्यूनतम वर्ग विधि।

(क) विक्षेप चित्र विधि

इस विधि में विक्षेप का उपयोग होता है और इसे बिंदु चित्र विधि भी कहते हैं। विक्षेप चित्र विधि[2] दो ज्ञात चरों का आरेखीय प्रस्तुतीकरण है, उदाहरण स्वतंत्र चरों को *X-axis* और जिस चर का अनुमान करना है, निर्भर चर को *graph paper* के *Y axis* पर दिखाते हैं।

2. 

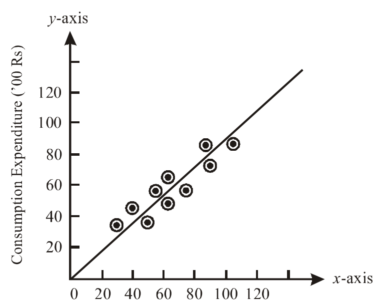
विक्षेप–आरेख की पूर्वधारणा में संभावित पाँच रूप ऊपर दिए गए चित्र में दर्शाए गए हैं। प्रथम चित्र धनात्मक संबंध का पूर्ण सूचक है, दूसरा चित्र ऋणात्मक संबंध दिखाता है, तीसरा चित्र कोई संबंध नहीं दिखाता है, चौथा चित्र धनात्मक संबंध दिखाता है एवं पाँचवा चित्र दो विचाराधीन चरों के बीच ऋणात्मक संबंध दर्शाता है।

टिप्पणी

चित्र को ध्यान में रखकर निम्नलिखित सूचनाएँ प्राप्त की गई हैं।

आय X (रुपए सौ में)	खपत व्यय Y (रुपये सौ में)
41	44
65	60
50	39
57	51
96	80
94	68
110	84
30	34
79	55
65	48

यह विक्षेप–आरेख आश्रित चरों के मानों के पूर्वानुमान के लिए अपने आप में पर्याप्त नहीं है। दो चरों के बीच संबंधों की कुछ औपचारिक अभिव्यक्ति पूर्वानुमान उद्देश्यों के लिए आवश्यक होती है। इस उद्देश्य के लिए, एक स्केल की मदद से विक्षेप आरेख में बिन्दुओं से होकर एक सरल रेखा खींची जाती है और इस तरह से खींची गई रेखा का अन्त:खण्ड एवं उसकी ढाल निर्धारित की जाती है और तब उस रेखा को परिभाषित किया जा सकता है।

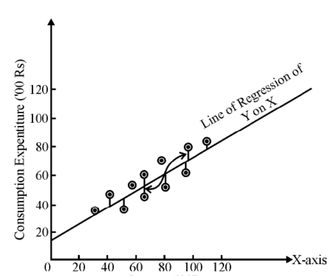


चित्र

(ख) न्यूनतम वर्ग विधि

रेखा (प्रतिगमन रेखा या उपयुक्त रेखा) को निश्चित करने की न्यूनतम वर्ग रीति एक विधि है जो निश्चित रेखा वर्गित उर्ध्वाधर विचलनों के योग को न्यूनतम करता है। दूसरे शब्दों में, निश्चित होने वाली रेखा प्रकीर्ण आरेख के बिन्दुओं के जरिए इस तरह जाएगा कि रेखा से इन बिन्दुओं का उदग्र विचलन के वर्गों का योग न्यूनतम होगा।

न्यूनतम वर्ग मानदण्डों का अर्थ नीचे के चित्र के जरिए समझा जा सकता है, जहाँ प्रकीर्ण आरेख के पहले वाले चित्र में इसे उस रेखा के साथ पुन: दिखाया गया जो आँकड़ा के निश्चित न्यूनतम वर्ग रेखा को दर्शाता है।



प्रकीर्ण आरेख, प्रतिगमन रेखा एवं लघु उदग्र रेखा 'e' दिखाते हुए

टिप्पणी

उपरोक्त आरेख में, रेखा का लम्बवत् विचलन का व्यक्ति बिन्दु छोटी लम्बवत् रेखा से जुड़े बिन्दुओं के छोटे उदग्र रेखा के रूप में दिखाई पड़ता है। ये विचलन प्रतीक 'e' के रूप में दिखाया जाता है। 'e' का मान एक बिन्दु से दूसरे तक बदलता है। कुछ स्थितियों में यह धनात्मक होता है, जबकि कुछ में यह ऋणात्मक होता है। यदि खींची गई रेखा न्यूनतम वर्ग रेखा हो, तब Σe_i का मान संभावनाएँ न्यूनतम होगा। ऐसा इसीलिए क्योंकि इस गुण के कारण यह विधि न्यूनतम वर्ग विधि के रूप में जाना जाता है।

हम वर्ग विचलन के योग को न्यूनतम करने पर जोर क्यों देते हैं, यह ऐसा प्रश्न है जिसकी व्याख्या आवश्यक है। यह वास्तविक मान Y से अनुमानित मान P से अनुमानित मान $\hat{Y}$ तक विचलनों को $\left(Y-\hat{Y}\right)$ या e_i के रूप में व्यक्त करते हैं, तब यह तर्कपूर्ण है कि हमें $\Sigma\left(Y-\hat{Y}\right)$ या $\sum_{i=1}^{n} e_i$ यथासंभव छोटा चाहिए।

हालांकि $\Sigma\left(Y-\hat{Y}\right)$ या $\sum_{i=1}^{n} e_i$ को केवल जाँच करना अनुचित होगा, चूँकि कोई e_i धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। किन्तु e_i के अपने चिह्न से मुक्त विशाल मान एक घटिया पूर्वानुमान बताते हैं। भले ही $\sum_{i=1}^{n} |e_i|$ की गणना करते समय हम चिह्नों की अवहेलना करें, कठिनाईयाँ आएंगी ही। अत: मानक विधि प्रत्येक अवलोकन को वर्ग कर चिह्नों के प्रभाव हो हटाना है। प्रत्येक पद को वर्ग करने के दो उद्देश्य है–

(i) यह अधिकतम त्रुटियों का विस्तार करता है एवं (ii) यह धनात्मक या ऋणात्मक मानों के प्रभाव को स्थगित करता है (चूँकि एक ऋणात्मक मान को वर्ग करने पर यह धनात्मक हो जाता है। निरपेक्ष मानों के योग के बजाए त्रुटियों के योग के वर्ग को न्यूनतम करना यह बताता है कि कुछ अधिक त्रुटियों की तुलना में कुछ त्रुटियाँ अधिक हैं। अत: प्रतिगमन रेखा को प्राप्त करने में हम इस विधि का अनुसरण करते हैं कि वर्ग विचलनों का योग न्यूनतम होगा एवं इस आधार पर 'a' एवं 'b' स्थिरांकों का मान एवं रेखा की ढाल निकल सकता है। यह निम्नलिखित दो सामान्य समीकरणों की सहायकता से किया जा सकता है[3]:

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

3. यदि हम प्रत्येक चर में केंद्रीभूत होते हैं, अर्थात् इसके मूल को इसका माध्य मानते हैं, तब दो समीकरण होंगे।

$$\Sigma Y = na + b\Sigma X$$
$$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

किन्तु चूँकि ΣY एवं ΣX शून्य होगा, पहला समीकरण एवं दूसरे समीकरण का पहला पद गायब हो जाएगा तथा हमारे पास निम्नलिखित समीकरण होगा :

$$\Sigma XY = b\Sigma X^2$$
$$b = \Sigma XY/\Sigma X^2$$

'a' का मान इस तरह निकाला जा सकता है,

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

उपरोक्त दो समीकरणों में, 'a' एवं 'b' अज्ञात हैं एवं अन्य सभी समान अर्थात् $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma X^2, \Sigma XY$ गुणनफलों का योग एवं प्रतिदर्श आँकड़ा से अभिकलित गुणनफलों का योग है तथा 'n' का अर्थ प्रतिदर्श में अवलोकनों की संख्या है।

टिप्पणी

उदाहरण– दिए गए प्रतिदर्श के सूचना के लिए न्यूनतम वर्ग रीति से उचित प्रतीपगमन रेखा बनाएँ।

विश्लेषण	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आय (X) (00रु.)	41	65	50	57	96	94	110	30	79	65
खपत व्यय (Y) ('00 रु.)	44	60	39	51	80	68	84	34	55	48

हल–हमें न्यूनतम वर्ग रीति से प्रतीपगमन रेखा दिए गए आँकड़ों से बनानी है। हमें सामान्य समीकरण से a और b के मानों की गणना करनी है और दिए गए प्रतिदर्श के आँकड़ों की सारणी में $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma XY, \Sigma X^2$ का प्रतीपगमन समीकरण के लिए संकलन करना होगा।

प्रतीपगमन समीकरण के लिए संकलन

विश्लेषण	आय X('00 रु.)	खपत व्यय ('00 रु.)	XY	X^2	Y^2
1	41	44	1840	1681	1936
2	65	60	3900	4225	3600
3	50	39	1950	2500	1521
4	57	51	2907	3249	2601
5	96	80	7680	9216	6400
6	94	68	6392	8836	4624
7	110	84	9240	12100	7056
8	30	34	1020	900	1156
9	79	55	4345	6241	3025
10	65	48	3120	4225	2304
$n = 10$	$\Sigma X = 687$	$\Sigma Y = 563$	$\Sigma XY = 42358$	$\Sigma X^2 = 53173$	$\Sigma Y^2 = 34223$

सामान्य समीकरण में मानो को रखने पर,

$$563 = 10\,a + 6876$$

$$42358 = 687\,a + 53173\,b$$

इन दोनों समीकरणों को हल करने पर

$$a = 14 \text{ और } b = 0.616$$

तब, जरूरी प्रतीपगमन रेखा के लिए समीकरण होगा,

$$\hat{Y} = a + bX_i$$

$$\hat{Y} = 14 + 0.616X_i$$

यह समीकरण को Y का X पर प्रतीपगमन कहते हैं जिससे Y का मान चर के लिए गए मान के अनुमान लगा सकते हैं।[4]

समीकरण की सटीकता की जाँच

ऊपर बताए गए अनुसार प्रतीपगमन रेखा ज्ञात कर उसकी सटीकता भी जाँची जा सकती है। इस उद्देश्य के लिए जो विधि प्रयुक्त होती है वह न्यूनतम वर्ग रीति, जिसमें व्यक्तिगत धनात्मक एवं ऋणात्मक त्रुटियों का योग शून्य होता है, के रैखिक गणितीय गुणों पर आधारित है। दूसरे शब्दों में, सत्यता की जाँच करने वाले समीकरण का उपयोग करते l e; ;g Kkr djuk vko';d gSfd in $\Sigma\left(Y-\hat{Y}\right)$ शून्य है या नहीं, यदि ऐसा है तो इसी बात की आश्वस्ता हो जाती है कि समीकरण की सत्यता निर्धारण में कोई त्रुटि नहीं है।

पूर्वानुमान की समस्या

जब हम पूर्वानुमान या अनुमान की बात करते हैं, तो हम मुख्यतः $Y_i = a + bX_i + e_i$ इस संबंध की बात करते हैं तब प्रतीपगमन समीकरण $\hat{Y} = a + bX_i$, X के विशिष्ट मानों से जुड़े Y का अनुमान लगाने में एक आधार प्रदान करता है। उदाहरण में हमने आय एवं खपत संबंधी आँकड़ों के लिए प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त किया जो इस प्रकार है :–

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616X_i$$

इस समीकरण के आधार पर हम X के दिए गए मान के लिए Y का एक बिन्दु अनुमान लगा सकते हैं। माना कि हमें व्यक्तिगत खपत व्यय ज्ञात करनी हैं जबकि आय रु. 10,000 है। इसके लिए हम अपने समीकरण में $X = 100$ प्रतिस्थापित कर खपत व्यय का एक अनुमान इस तरह पा सकते हैं :–

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616\ (100)$$
$$= 75.60$$

इस प्रकार, प्रतीपगमन संबंध बताता है कि 10,000 रु. आय वाले व्यक्ति खपत पर लगभग 7560 रु. व्यय कर सकते हैं। लेकिन यह केवल एक अनुमानित या अपेक्षित मान है और यह संभव है कि उस व्यक्ति की उसी आय के साथ वास्तविक खपत व्यय विचलित होती है अगर ऐसा होता है तो हमारे अनुमान में त्रुटि होती है जिसकी संभावना, एक व्यक्ति के विषय में अनुमान लगाने पर, अधिक हो जाती है। अन्तराल–अनुमान विधि बेहतर है और यह उस अंतराल को बताता है जिसमें अपेक्षित खपत व्यय निर्धारित किया जाता है।

---

4. इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि X के मान से चर Y के मान का अनुमान लगाने वाले समीकरण का प्रयोग चर Y के दिए गए मानो से चर X के मान का अनुमान लगाने में नहीं करना चाहिए। दूसरा प्रतीपगमन समीकरण (जोकि X का प्रतीपगमन समीकरण, $X = a + bY$ के Y पर आधारित कहलाता है) दोनों प्रयुक्त मानो को व्युत्क्रम कर देता है जो Y के मान से X का अनुमान लगाता है।

टिप्पणी

यह स्मरणीय है कि अंतराल जितना ही बड़ा होगा आश्वशता का स्तर उतना ही बड़ा होगा लेकिन अंतराल का बड़ा होना विश्वास के एक विशेष स्तर से जुड़ा होता है एवं प्रतिदर्श में उपस्थित विचरणशीलता (इस स्थिति में खपत व्यय) पर निर्भर करता है। इस विचरणशीलता को मानक विचलन की त्रुटि के पद 'e' के द्वारा मापा जाता है एवं इसे अनुमान की मानक त्रुटि के रूप में जाना जाता है।

अनुमान की मानक त्रुटि

अनुमान की मानक त्रुटि एक माप है जो सांख्यिकविदों द्वारा अनुमान के समीकरण की विश्वसनीयता मापने हेतु विकसित की गई। मानक विचलन की तरह, मानक त्रुटि ($S.E.$) $\hat{Y}$, प्रतीपगमन रेखा के सापेक्ष Y के अवलोकित मानों की विचरणशीलता मापता है। अनुमान की मानक त्रुटि ($\hat{Y}$ का $S.E.$) इस प्रकार से ज्ञात की जाती है :–

$$\hat{Y} \text{ का } S.E. \text{ (या } S_e) = \sqrt{\frac{\Sigma\left(Y-\hat{Y}\right)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\Sigma e^2}{n-2}}$$

जहाँ, $\hat{Y}$ का $S.E.$ (या S_e) = अनुमान की मानक त्रुटि

Y = Y का अवलोकित मान

$\hat{Y}$ = Y का अनुमानित मान

e = त्रुटि पद = $\left(Y-\hat{Y}\right)$

n = प्रतिदर्श में अवलोकनों की संख्या

स्मरणीय–ऊपर दिए गए समीकरण में n के बदले में $n-2$ का उपयोग किया जाता है क्योंकि यह वास्तविकता है कि स्वतंत्रता की दो कोटियाँ प्रतिदर्श अवलोकनों की रेखा के सापेक्ष, जिसमें a एवं b दो नियतांकों का स्थान उसी प्रतिदर्श अवलोकनों के द्वारा निर्धारित किया जाता है, विचरणशीलता के अनुमान के आधारीकरण में विलुप्त हो जाती है।

S_e के वर्ग को त्रुटि पद की विचरणशीलता भी कहा जाता है जो कि विश्वसनीयता की एक मूल माप है। विचरणशील जितनी अधिक होगी 'e' का परिमाण उतना ही महत्त्व होगा एवं आँकड़ों के पूर्वानुमान में प्रतीपगमन विश्लेषण उतना ही कम विश्वसनीय होगा।

अनुमान की मानक त्रुटि की विवेचना एवं बड़े और छोटे प्रतिदर्शों में अनुमान के लिए निश्चितता सीमाओं का निर्धारण :

अनुमान का $S.E.$ (SE_e) जितना बड़ा होगा, तो प्रतीपगमन रेखा के सापेक्ष दिए गए अवलोकनों का विक्षेपण उतना ही बड़ा होगा। लेकिन यदि अनुमान का $S.E.$ शून्य हो तो अनुमान के समीकरण को परतंत्र चरों का संपूर्ण अनुमानक या पूर्वानुमान कहा जाएगा।

बड़े प्रतिदर्शों की दशा में, जहाँ $n > 30$, तो ऐसा माना जाता है कि अवलोकित बिन्दुएँ मुख्यत: प्रतीपगमन रेखा के सापेक्ष वितरित होती हैं। और इन्हें इस प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है :–

टिप्पणी

SE_e सीमाओं के 68% सारे बिन्दुएँ $\hat{Y} \pm 1$ के अन्दर

SE_e सीमाओं के 95.5% सारे बिन्दुएँ $\hat{Y} \pm 2$ के अन्दर

SE_e सीमाओं के 99.7% सारे बिन्दुएँ $\hat{Y} \pm 3$ के अन्दर

इसे इस प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है,

1. Y का अवलोकित मान मुख्यत: $\hat{Y}$ के प्रत्येक अनुमानित मान के सापेक्ष वितरित होता है एवं

2. वितरण की विचरणशीलता $\hat{Y}$ के प्रत्येक संभव मान के सापेक्ष समान होती है।

छोटे प्रतिदर्शों की दशा में, जहाँ $n \leq 30$ एवं वितरण 't' को दो सीमाओं के सटीक निर्धारण में उपयोग किया जाता है।

ऐसा इस प्रकार से किया जाता है,

$$\text{उच्च सीमा} = \hat{Y} + 't'(SE_e)$$

$$\text{निम्न सीमा} = \hat{Y} - 't'(SE_e)$$

जहाँ, $\hat{Y}$ = दिए गए मान X के लिए Y का अनुमानित मान

SE_e = अनुमान की मानक त्रुटि

't' = एक विशिष्ट विश्वास के स्तर के लिए स्वतंत्रता की दी गई कोटियों के लिए सारणी मान 't' का

3.3.2 प्रतीपगमन गुणांक

प्रतीगमन गुणांक वह अनुमान है जो यह दर्शाता है कि एक श्रेणी के चर मूल्यों में एक का परिवर्तन होने से दूसरी श्रेणी के चर मूल्यों में औसतन कितना परिवर्तन होगा। प्रतीपगमन समीकरण की तरह प्रतीपगमन गुणांक भी दो प्रकार के होते हैं–

(i) X का Y प्रतीपगन गुणांक– इसे bxy संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह गुणांक दर्शाता है कि X चर में एक इकाई का परिवर्तन होने पर Y में कितना परिवर्तन होगा। इसकी गणना निम्न समीकरण द्वारा की जाती है–

$$\text{bxy} = \text{r}\,\frac{\sigma x}{\sigma y}, \text{bxy} = \text{X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक।}$$

कभी-कभी समीकरण Y के अनुमान को Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण भी कहा जाता है जो इस प्रकार से लिखा जा सकता है :–

$$\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right) = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X_i - \bar{X}\right)$$

या,

$$\hat{Y} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X_i - \bar{X}\right) + \bar{Y}$$

टिप्पणी

जहाँ, $r = X$ एवं Y के बीच सामान्य सहसंबंध गुणांक

$\sigma_Y = Y$ का मानक विचलन

$\sigma_X = X$ का मानक विचलन

$\bar{X} = X$ का माध्य

$= Y$ का माध्य

$= Y$ का मान जो अनुमानित किया जाना है

$X_i = X$ का कोई भी दिया गया मान जिसके लिए Y अनुमानित किया जाना है

यह उस सूत्र पर आधारित है जिसका हमने उपयोग किया है

अर्थात्, $\hat{Y} = a + bX_i$

(ii) Y का X प्रतीपगन गुणांक– इसे byx संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह गुणांक बतलाता है कि X चर में एक इकाई का परिवर्तन होने पर Y में कितना परिवर्तन होगा। byx का माप Y की X पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल को भी व्यक्त करता है। इसकी गणना के लिए निम्न समीकरण का प्रयोग किया जाता है–

X_i के गुणांक को इस प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$X_i \text{ का गुणांक} = byx = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

(इसे X पर Y का प्रतीपगमन गुणांक या प्रतीपगमन रेखा Y का X पर ढाल के रूप में भी जाना जाता है)।

$$byx = \frac{\Sigma XY - n\overline{XY} \times \sqrt{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2}}{\sqrt{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2}\sqrt{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2}\sqrt{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2}}$$

$$= \frac{\Sigma XY - n\overline{XY}}{\Sigma X^2 - n\bar{X}^2}$$

एवं $$a = -r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} - b\bar{X} \qquad (\text{चूंकि } b = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})$$

इसी प्रकार, X का अनुमान समीकरण को Y पर X का प्रतीपगमन समीकरण भी कहा जाता है। जिसे इस प्रकार से दिखाया जा सकता है :–

$$\left(\hat{X} - \bar{X}\right) = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(Y - \bar{Y}\right)$$

$$\hat{X} = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(Y - \bar{Y}\right) + \bar{X}$$

एवं X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक (या b_{XY}) $= r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = \frac{\Sigma XY - n\overline{XY}}{\Sigma Y^2 - n\bar{Y}^2}$

टिप्पणी

यदि हमें ऊपर बताए गए अनुसार, दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात हों एवं नियतांकों 'a' एवं 'b' के मानों के साथ उसे हल कर X एवं Y के मान ज्ञात किए जाते हैं तब प्राप्त X एवं Y के मान X के माध्य मान $\left(\bar{X}\right)$ एवं Y के माध्य मान $\left(\bar{Y}\right)$ होते हैं।

यदि हमें दो प्रतीपगमन गुणांक (b_{XY} एवं b_{YX}) ज्ञात हो तो हम सहसंबंध गुणांक के मान केवल प्रतीपगमन गुणांकों के गुणनफल का वर्गमूल लेकर ज्ञात कर सकते हैं जो इस प्रकार है :

$$r = \sqrt{b_{XY} . b_{XY}} = \sqrt{r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} . r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}}$$
$$= \sqrt{r . r} = r$$

r के ($\pm$) चिन्ह दिए गए प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्हों के आधार पर निर्धारित किए जाते हैं। यदि प्रतीपगमन गुणांक का चिन्ह ऋणात्मक है तो r का चिन्ह भी ऋणात्मक होता है और यदि प्रतीपगमन गुणांक का चिन्ह धनात्मक है तो r का चिन्ह भी धनात्मक लिया जाता है। (यह स्मरणीय है कि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का चिन्ह समान होता है चाहे वह ऋणात्मक हो या धनात्मक यह सहसंबंध गुणांक के चिन्ह के द्वारा निर्धारित होते हैं)

उदाहरण– निम्नलिखित सूचनाएँ दी गई हैं :–

	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
माध्य	39.5	47.5
मानक विचलन	10.8	17.8

X एवं Y के बीच सामान्य सहसंबंध गुणांक $= + 0.42$

Y एवं X का अनुमान समीकरण ज्ञात करें।

हल–Y के अनुमान समीकरण को इस प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :–

$$\therefore \quad \left(\hat{Y} - \bar{Y}\right) = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X_i - \bar{X}\right)$$

$$\hat{Y} = r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(X_i - \bar{X}\right) + \bar{Y}$$

$$= 0.42\frac{17.8}{10.8}\left(X_i - 39.5\right) + 47.5$$
$$= 0.69X_i - 27.25 + 47.5$$
$$= 0.69X_i + 20.25$$

इसी प्रकार से, X के अनुमान समीकरण इस तरह ज्ञात किया जा सकता है :–

$$\therefore \quad \left(\hat{X} - \bar{X}\right) = r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(Y_i - \bar{Y}\right)$$

टिप्पणी

$$= r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(Y_i - \overline{Y}\right) + \overline{X}$$

$$= 0.42\frac{10.8}{17.8}\left(Y_i - 47.5\right) + 39.5$$

$$= 0.26Y_i - 12.35 + 39.5$$

$$= 0.69Y_i + 27.15$$

3.3.3 प्रतीपगमन का उपयोग एवं अनुप्रयोग

1. प्रतीपगम विश्लेषण का पूर्वानुमान और भविष्यवाणी में व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है।
2. प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग दो चरों के बीच औसत संबंध की प्रकृति का अध्ययन करना है ताकि एक चर के आधार पर दूसरे चर का पूर्वानुमान लगाया जा सके।
3. प्रतीपगमन विश्लेषण में जहां एक चर को आश्रित चर के रूप में लिया जाता है वहां दूसरे चर को स्वतंत्र चर माना जाता है। इस प्रकार यह कारण–परिणाम संबंध के अध्ययन को संभव बनाता है।
4. प्रतीपगमन गुणांक मूल बिंदु में परिवर्तन के प्रति स्वतंत्र होते हैं परंतु पैमाने के प्रति स्वतंत्र नहीं होते हैं।
5. प्रतीपगमन विश्लेषण उस विभ्रम का माप करता है जो अनुमान लगाते समय प्रतीपगमन रेखा के प्रयोग के कारण उत्पन्न होता है।
6. प्रतीपगमन गुणांकों की सहायता से सहसंबंधा गुणांक ज्ञात कर सकते हैं।

प्रतीगमन का अनुप्रयोग व्यापक होता है क्योंकि यह दो चरों के बीच गैर-रेखीय संबंध का अध्ययन करता है।

अपनी प्रगति जांचिए

3. प्रतीपगमन शब्द का प्रथम उपयोग सर फ्रांसिस गाल्टन द्वारा किब किया गया?

(क) सन् 1850 (ख) सन् 1867

(ग) सन् 1877 (घ) सन् 1887

4. प्रतीपगमन कितने प्रकार के होते हैं?

(क) दो (ख) तीन

(ग) चार (घ) पांच

3.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. (ग)
2. (ख)

3. (ग)
4. (क)

टिप्पणी

3.5 सारांश

जब दो चरों की पारस्परिक अंतः क्रिया में, एक चर की मात्रा जैसे–जैसे बढ़ती है परिणामस्वरूप दूसरे चर की मात्रा में भी तद्नुसार वृद्धि होती है तब सहसंबंध समान दिशा में होता है। जब दो चर एक ही दिशा में परिवर्तित होते हैं तो उनमें धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है। अन्य शब्दों में जब दोनों चर साथ–साथ एक ही दिशा मे घटते अथवा बढ़ते हैं तो उनमें धनात्मक सहसंबंध मध्यम एवं निम्न प्रकार का हो सकता है।

सहसंबंध गुणांक दो चरों में पाये जाने वाला ऐसा अनुपात है जिससे यह पता लगता है कि एक चर में होने वाले परिवर्तन दूसरे चर में होने वाले परिवर्तनों पर कितनी मात्रा में आधारित है। सहसंबंध गुणांक एक शुद्ध अंक है इसकी कोई इकाई नहीं होती है। किसी एक अथवा दोनों चरों के प्राप्तांकों में किसी स्थिरांक (Constant) को जोड़ने, घटाने, गुणा करने अथवा भाग देने पर सहसंबंध गुणांक अप्रभावित रहता है।

यह सहसंबंध ज्ञात करने का मूल एवं परिभाषिक सूत्र है किन्तु इस सूत्र से सहसंबंध गुणांक की गणना करना जटिल होता है। क्योंकि सभी प्राप्तांकों को z में बदलना पड़ता है तथा मानक विचलन एवं मध्यमान के दशमलव संख्या में होने पर घटाने व भाग की गणना जटिल व श्रम साध्य हो जाती है।

यह विधि कोटि अंतर विधि Rank Difference Method का ही सरल रूप है इसके अंतर्गत दोनों चरों की कोटियों में केवल धनात्मक अंतरों की ही गणना की जाती है जबकि ऋणात्मक संख्या में आने वाले पदमूल्यों को छोड़ दिया जाता है।

3.6 मुख्य शब्दावली

- **सहसंबंध** : जब दो या दो से अधिक चरों तथा घटनाओं में सहाचर्यात्मक संबंध पाया जाता है तो ऐसे पारस्परिक संबंध को सहसंबंध कहते हैं।
- **प्रतीपगमन** : प्रतीपगमन दो चरों के बीच संबंध को आकर्षित करने के लिए उपयोग की जाने वाली एक सांख्यिकीय विधि है।
- **समावर्तक** : वह राशि जिससे दो या अधिक राशियों के अलग–अलग भाग देने पर शेष कुछ भी न बचे।

3.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. सहसंबंध से आप क्या समझते हैं?
2. सहसंबंध गुणांक की विशेषताओं का संक्षेप में वर्णन कीजिए।
3. स्पीयर मैन के महत्व एवं उपयोग को समझाइए।

4. प्रतीपगमन विश्लेषण को परिभाषित कीजिए।
5. प्रतीपगमन के महत्व एवं उपयोग को समझाइए।

टिप्पणी

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. सहसंबंध को समझाते हुए इसके प्रकारों का उल्लेख कीजिए।
2. कार्ल पियर्सन की सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने की विधि को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।
3. निम्न आंकड़ों से कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए–

   आकार– 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

   आवृत्ति– 3, 6, 9, 13, 8, 5, 4
4. प्रतीपगमन विश्लेषण पर प्रकाश डालिए।
5. प्रतीपगमन समीकरण की व्याख्या कीजिए।
6. निम्नलिखित समंकों से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध ज्ञात कीजिए–

   पति का आयु वर्ष में : 22 26 27 28 30 31 33 35

   पत्नी की आयु वर्ष में : 18 20 22 27 28 30 31 32

3.8 सहायक पाठ्य सामग्री

1. चंदन, जे. एस., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
2. मोंगा, जी. एस., 'मैथेमेटिक्स एंड स्टैटिसटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स', नई दिल्लीः विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
3. कोठारी, सी. आर., 'क्वांटिटेटिव टेकनिक', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
4. हुडा, आर. पी., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनोमिक्स', नई दिल्ली : मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड।
5. गुप्ता, एस. सी., 'फण्डामेन्टल ऑफ स्टैटिसटिक्स', नई दिल्ली हिमालया पब्लिशिंग हाउस।
6. गुप्ता, एस. पी., 'स्टैटिसटिकल मेथड्स', नई दिल्ली : एस चान्द एण्ड सन्स।

इकाई 4 काल श्रेणी विश्लेषण

टिप्पणी

संरचना

4.0 परिचय
4.1 उद्देश्य
4.2 काल श्रेणी विश्लेषण की संकल्पना एवं घटक
4.2.1 गुणात्मक एवं योगात्मक प्रादर्श
4.2.2 चल माध्य की विधियां
4.2.3 न्यूनतम वर्ग विधि
4.2.4 काल–श्रेणी विश्लेषण का महत्व
4.3 सूचकांक की अवधारणा, महत्व एवं प्रकार
4.3.1 सूचकांक के महत्व
4.3.2 सूचकांक के प्रकार : लैस्पियर, पाश्चे एवं फिशर का सूचकांक
4.3.3 सूचकांक निर्माण की समस्याएं एवं सीमाएं
4.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
4.5 सारांश
4.6 मुख्य शब्दावली
4.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
4.8 सहायक पाठ्य सामग्री

4.0 परिचय

सांख्यिकी विज्ञान में स्थिर दशाओं तथा गतिशील दशाओं दोनों के विश्लेषण की तकनीकों का विकास किया गया है। अर्थव्यवस्था गतिशील होती है स्थिर नहीं तथा गतिशीलता का संबंध समय घटक से होता है। आर्थिक विश्लेषण में क्रमागत परिवर्तन एक आधारभूत विचार है। उत्पादन, राष्ट्रीय आय, बिक्री आदि अनेक आर्थिक तथ्यों का हम गतिमय चित्र लेना चाहते है। स्थिर चित्र नहीं क्योंकि ये परिवर्तन का चित्र प्रस्तुत करते है। संख्यात्मक तथ्य जिनका संकलन समयान्तर से किया जाता है काल श्रेणी का रूप ले लेता है समय की इकाई, वर्ष, मास, दिन अथवा घंटा मात्र एक विधि है जिससे समस्त तथ्यों को एक सामान्य व स्थिर संदर्भ बिंदु से संबंधित करना संभव हो जाता है। वाणिज्य तथा अर्थशास्त्र के क्षेत्र में आर्थिक परिवर्तनों के कारणों को खोजना विश्लेषण की सबसे कठिन समस्या है। इस प्रकार की खोज के लिए काल श्रेणी समंकों का विश्लेषण किया जाता है। अतः एक संख्याशास्त्री के लिए वाणिज्य तथा अर्थशास्त्र के क्षेत्र से संबंधित समंकों के व्यावहारिक उपयोगों के रूप में काल श्रेणियों का विश्लेषण अत्यंत ही महत्वपूर्ण होता है। काल श्रेणी के विश्लेषण का एक मुख्य उद्देश्य भावी घटनाओं की गतिविधि का यथार्थ अनुमान लगाने के लिए आर्थिक तथ्यों में होने वाले परिवर्तनों को समझना, निर्वचन करना एवं मूल्यांकित करना है। अर्थशास्त्र के सिद्धांतों में व्यापारिक चक्रों के अनेक कारण दिए हैं, काल श्रेणियों का विश्लेषण उन कारणों की सत्यता की जांच करता है।

इस इकाई में काल श्रेणी विश्लेषण तथा सूचकांक की अवधारणा को विस्तार से समझाया गया है।

4.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

टिप्पणी

- काल श्रेणी विश्लेषण की संकल्पना एवं घटक को जान पाएंगे;
- चल माध्य की विधियों की विवेचना कर पाएंगे;
- सूचकांक की अवधारणा, प्रकार एवं महत्व को समझ पाएंगे।

4.2 काल श्रेणी विश्लेषण की संकल्पना एवं घटक

संख्यात्मक तथ्य जिनका संकलन समयांतर से किया जाता है काल श्रेणी का रूप ले लेता है। काल श्रेणी विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य भावी घटनाओं की गतिविधियों का सही ढंग से अनुमान लगाना है ताकि आर्थिक तथ्यों में होने वाले उच्चावचनों को समझा जा सके, उनका निर्वचन किया जा सके और उनका मूल्यांकन किया जा सके।

केने व कीपिंग के अनुसार, "समय पर आधारित समंक समूह काल श्रेणी कहलाता है।"

या-लुन-चाऊ के अनुसार, "एक काल श्रेणी के किसी आर्थिक चर अथवा मिश्रित चरों, जिनका संबंध विभिन्न समयावधियों से होता है, के अवलोकनों के संकलन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

वर्नर जेड हिर्श के अनुसार, "समय के क्रमिक बिंदुओं के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल श्रेणी कहलाता है।"

काल श्रेणी विश्लेषण विधि वहाँ बिल्कुल सही होता है जहाँ भविष्य के भूतकाल जैसे होने की उम्मीद होती है। काल श्रेणी में अध:स्थ कल्पना यह है कि वही कारक भूतकाल की भाँति आर्थिक क्रिया के भावी प्रारूप को प्रभावित करना जारी रखेंगे। ये तकनीक थोड़े जटिल होते हैं और इन्हें प्रयोग करने के लिए दक्ष लोगों की जरूरत होती है।

काल श्रेणी के घटक

काल श्रेणी के ऐतिहासिक समंक किसी समयावधि में हुए परिवर्तनों से प्रभावित होते हैं। समंकों पर पड़ने वाले प्रभावों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्न वर्ग में वर्गीकृत किया जा सकता है। ये वर्गीकृत प्रभाव ही काल श्रेणी के चार महत्वपूर्ण घटक कहलाते है जो निम्न प्रकार से है-

1. समदर्श प्रवृत्ति या सामान्य प्रवृत्ति (Secular Trend or Simply Trend) (T)

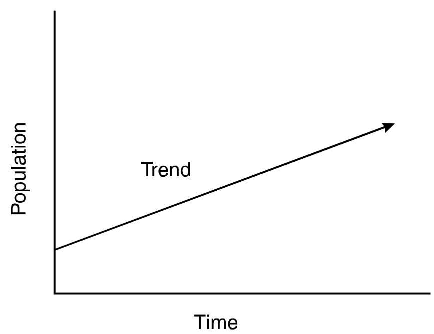
प्रवृत्ति समय के थोड़े दीर्घ काल में चर (Y) के काल श्रेणी मान में एक सामान्य दीर्घकालीन परिवर्तन है। चर (Y) वह कारक है जिसमें हम भविष्य के लिए मूल्यांकन में रुचि रखते हैं। यह विक्रय, जनसंख्या, अपराध-दर, इत्यादि हो सकता है।

प्रवृत्ति एक सामान्य शब्द है, जिसका प्रयोग जनसंख्या प्रवृत्ति, मुद्रा-स्फीति प्रवृत्ति एवं जन्म-दर जैसे शब्दों के रूप में दिन-प्रति-दिन के वार्तालाप में बहुतायत में होता है। ये चर समय के सुदीर्घकाल में अवलोकित होते हैं और समय से सम्बन्धित परिवर्तनों में उल्लेखित एवं गणना किए जाते हैं और इन परिवर्तनों की प्रवृत्ति स्थापित होती है।

टिप्पणी

कई प्रकार की प्रवृत्तियाँ होती हैं; श्रेणी धीमी या तीव्र दर बढ़ती हुई हो सकती है या ये विभिन्न दरों से घटती हुई भी हो सकती हैं। कुछ तुलनात्मक रूप से स्थिर एवं कुछ एक समयांतराल में वृद्धि से पतन या पतन से वृद्धि के विपरीत भी हो सकती है। ये परिवर्तन कुछ पहचाने जा सकने योग्य प्रभावों के परिणाम के रूप में सामान्य प्रवृत्ति के आँकड़े के बढ़ते या घटते परिणाम के रूप में हो सकते हैं।

यदि एक प्रवृत्ति निर्धारित की जा सकती है और परिवर्तन की दर का पता लगाया जा सकता है, तब भविष्य में उसी श्रेणी मूल्यों पर अंतरिम आकलन भी किया जा सकता है। हालांकि, ऐसे पूर्वानुमान इस धारणा पर आधारित होते हैं कि स्थिर वृद्धि या पतन को प्रभावित करने वाली दशाओं के भविष्य में तार्किक रूप से अपरिवर्तित रहने की उम्मीद की जाती है। इन दशाओं में परिवर्तन पूर्वानुमानों को प्रभावित करता है। एक उदाहरण के रूप में, समयांतराल में जनसंख्या में वृद्धि सम्मिलित काल श्रेणी को इस तरह दिखाया जा सकता है;



2. चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations) (*C*)

चक्रीय उच्चावचन का अर्थ होता है नियमित उतार-चढ़ाव या वह प्रारूप जो एक दीर्घ समयांतराल में बार-बार आता है। परिवर्तन चक्रीय तभी कहलाते हैं यदि वे एक वर्ष से अधिक के समयांतराल में घटते हैं। ये वे परिवर्तन हैं जो आर्थिक तेजी या मंदी के परिणामस्वरूप होते हैं। ये ऊपर-नीचे हो सकते हैं, एवं कई वर्षों के समयांतराल वाले एवं बार-बार घटित होने वाले होते हैं – प्रायः दो से दस वर्षों तक होने वाले ये परिवर्तन प्रबलता या विस्तार में भी अलग होते हैं और परिवर्तन का प्रत्येक चरण धीरे-धीरे अपने अनुसरण करने वाले चरण को परिवर्तित करता है। कुछ अर्थशास्त्री मानते हैं कि व्यवसाय चक्र बारह से पन्द्रह वर्षों वाले चार चरणों में पूरा होता है। ये चार चरण हैं: समृद्धि, मंदी, तनाव एवं पुनर्प्राप्ति। हालांकि, इन चक्रों के कारणों एवं प्रकृति से सब सहमत नहीं हैं।

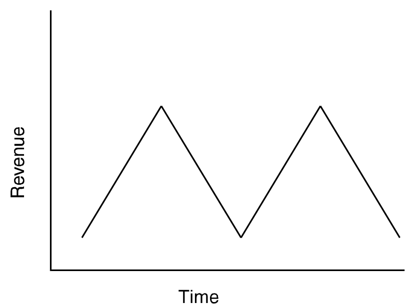
फिर भी, चक्रीय विचरण के पूर्वानुमान एवं निर्धारण नीतिगत योजना के लिए अति महत्त्वपूर्ण होते हैं, ऐसे मापों की विश्वसनीयता निम्नलिखित कारणों से संदेहास्पद होती हैं:–

(*i*) ये चक्र नियमित अंतराल में नहीं आते। 1956 से 1981 के बीच 25 वर्षों में अमेरिका में, यह आकलन किया जाता है कि पूरी अर्थव्यवस्था के चक्रीय क्रियाकलाप में अगस्त 1956, अप्रैल 1960, दिसम्बर 1969, नवम्बर 1973 एवं जनवरी 1980 में शीर्ष पर था। यह बतलाता है कि ये समय, प्रबलता एवं प्रारूप में विस्तृत रूप से अलग होते हैं, इसीलिए प्रवृत्तियों के मूल्यांकन को अति कठिन बनाते हैं।

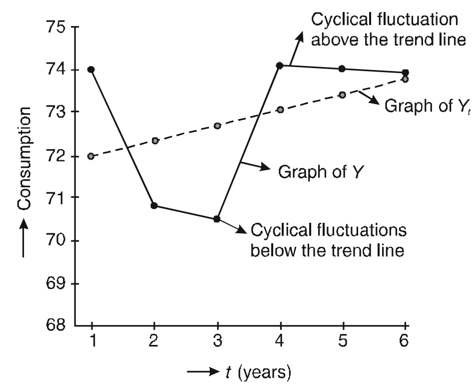
(*ii*) चक्रीय विचरण कई अनियमित एवं यादृच्छिक बलों से प्रभावित होते हैं जिन्हें न तो पृथक रूप से पहचाना और अलग किया जा सकता है, और न ही उनके प्रभाव सही-सही मापे जा सकते हैं।

टिप्पणी

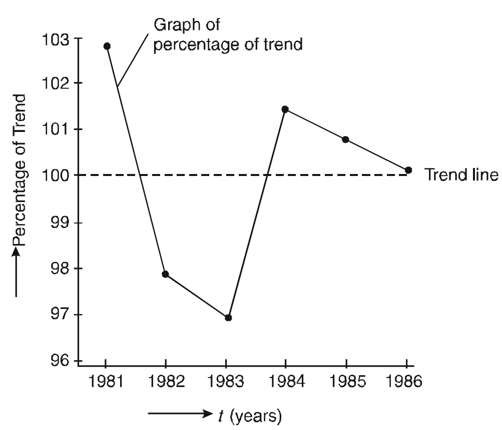
एक उद्योग में समय के विरुद्ध में राजस्व के लिए चक्रीय विचरण को ग्राफीय रूप में निम्नांकित रूप से दर्शाया जाता है।



निम्नलिखित ग्राफ वास्तविक ऊर्जा खपत (Y), प्रवृत्ति रेखा (Yt) एवं चक्रीय उच्चावचनों को 6 सालों के समय-अन्तराल के लिए प्रवृत्ति रेखा के ऊपर एवं नीचे दिखाता है।



इसी तरह हम प्रवृत्ति के प्रतिशत के रूप में चक्रीय विचरण का ग्राफ खींचते हैं। यह प्रक्रम प्रवृत्ति रेखा को समाप्त करता है एवं काल-श्रेणी के चक्रीय अवयवों को पृथ्क करता है। यह अवश्य समझा जाना चाहिए कि चक्रीय उच्चावचनों को सही से परिलक्षित नहीं किया जा सकता है इसलिए हम भविष्य के चक्रीय विचरणों को जो ऐसे विगत चक्रीय विचरणों पर आधारित होते हैं परिलक्षित नहीं कर सकते।



प्रवृत्ति के प्रतिशत का मान यह दर्शातें हैं कि 1981 में, ऊर्जा की वास्तविक खपत परिलक्षित प्रतिशत का 102.82 था एवं 1983 में वास्तविक खपत परिलक्षित खपत का 96.97 प्रतिशत था।

3. आर्तव विचरण (Seasonal Variations) (*S*)

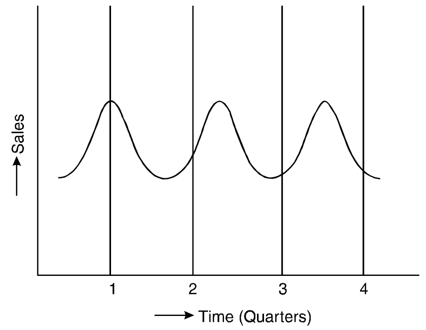
आर्तव विचरण परिवर्तन के प्रतिरूपों को एक साल या उससे कम की अवधि में पुनरावृत्त करने से संबंधित है। तब से ये साल-दर-साल पुनरावृत्त होते हैं एवं स्थिर घटनाओं के द्वारा लाए जाते हैं। उदाहरण के लिए, उपहार देने की प्रथा की वजह से ग्राहक उत्पादों का विक्रय क्रिसमस से पहले बढ़ जाता है। नए मॉडलों के आने से अमेरिका में ऑटोमोबाइल का विक्रय साल के अन्तिम तीन से चार महीनों में बहुत ही ज्यादा होता है। इन आँकड़ों को महीने में एक बार या साल में चार बार मापा जा सकता है।

चूंकि ये विचरण बारह महीने की अवधि में पुनरावृत्त होते हैं, इनका अनुमान अच्छी तरह से लगाया जा सकता है। कुछ कारक जो आर्तव विचरण उत्पन्न करते हैं निम्नलिखित हैं:–

(*i*) **मौसम एवं जलवायु**–जलवायु में परिवर्तन एवं मौसम की दशा का विक्रय पर गहरा प्रभाव होता है। उदाहरण के लिए, छाते का विक्रय भारत में सबसे ज्यादा मानसून के समय होता है। उसी प्रकार, जाड़े के मौसम में ऊनी वस्त्रों एवं गर्म पेय की बहुत ज्यादा माँग होती है और ग्रीष्म ऋतु में पंखों एवं एअर कंडीशनर का विक्रय बढ़ जाता है।

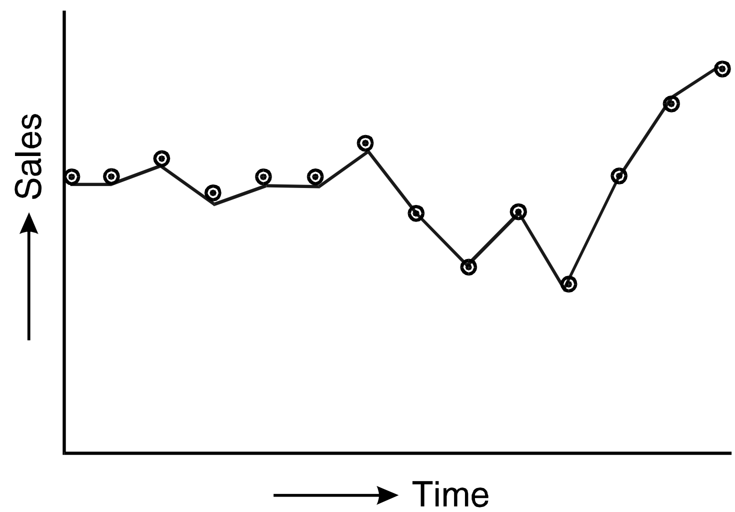
(*ii*) **रीति-रिवाज एवं त्योहार**–आर्तव खर्चों के प्रतिभूतियों पर रीति-रिवाजों एवं प्रथाओं का असर पड़ता है। उदाहरण के लिए, मदर डे या वेलेनटाइन डे के अवसरों पर अमेरिका में उपहारों के विक्रय में वृद्धि देखी जाती है। भारत में वैशाखी एवं दीवाली जैसे त्योहारों का मतलब है मिठाईयों एवं कैंडी की अभूतपूर्व माँग। बच्चों के हाई स्कूल या कॉलेज से ग्रेजुएट करने पर उन्हें उपहार देने की प्रथा सारे संसार में प्रसिद्ध है। इसके अनुसार, जून के महीने में जब बहुत सारे छात्र ग्रेजुएट होते हैं तब उपहारों के विक्रय में वृद्धि हो जाती है।

आर्तव व्यवहारों का सटीक आकलन व्यवसाय प्रयोजनों एवं उत्पादन क्षेत्र, सूची नियंत्रण, संसाधन, विज्ञापन आदि का निर्धारण करने में किया जाता है। एक दिए गए मद के चार पुनरावृत्त त्रैमासिक में विक्रय की आर्तव अस्थिरता को इस प्रकार से दर्शाया जा सकता है :



4. अनियमित या यादृच्छ विचरण (Irregular or Random Variance (*I*))

ये विचरण संभावित कारकों की वजह से आकस्मिक, यादृच्छ एवं सामान्य होते हैं। इस प्रकार से ये पूरी तरह से पूर्वाभास के बाहर हैं। इन अस्थिरताओं की वजह बाढ़, अकाल, हड़ताल या युद्ध के रूप में ऐसी विलीत घटनाएँ हैं। माँग में आकस्मिक परिवर्तन या यांत्रिकी विकास में सफलता इस वर्ग में शामिल किए जा सकते हैं। भविष्यवाणी के मॉडल एवं तकनीकियों इन अनिश्चित परिवर्तनों का असर पृथक करना एवं मापन करना बिल्कुल ही असम्भव है। इस घटना को ग्राफीय रूपों में इस प्रकार से दिखाया जा सकता है:



4.2.1 गुणात्मक एवं योगात्मक प्रादर्श

काल श्रेणी का विश्लेषण करते समय, एक काल श्रेणी पर पड़ने वाले विभिन्न प्रकार के प्रभावों को अलग-अलग किया जाता है। परंपरागत काल श्रेणी विश्लेषण में सामान्यतः दो मान्यताएं होती है- योगात्मक तथा गुणात्मक

गुणात्मक प्रादर्श

पारम्परिक रूप से ऐसा पाया जाता है कि काल-श्रेणी का मान (Y) चर मान (T) के प्रभाव, आर्तव विचरण (S), चक्रीय विचरण (C) एवं अनियमित अस्थिरता (I) का फलन है। ये संबंध मान्यताओं एवं उद्देश्यों के मान पर निर्भर करते हैं। इन चार संघटकों में गुणन संबंध होता है, अर्थात काल-श्रेणी का कोई भी अवलोकन चार प्रकार के संघटकों का गुणनफल होता है। फिर भी, पारम्परिक काल श्रेणी मॉडल को गुणन के रूप में इस प्रकार दिखाया जा सकता है :

$$Y = T \times S \times C \times I$$

योगात्मक प्रादर्श

यह मॉडल उन परिस्थितियों के लिए उपयुक्त है जहाँ प्रतिशत परिवर्तन श्रेणी के परिवर्तन को अच्छी तरह निरूपित करते हैं एवं अवयवों को परम मान के रूप में न देखकर आपेक्षिक मानों के रूप में देखा जाता है। काल श्रेणी के अवलोकन उपनति, सामयिक चक्रीय तथा अनियमित उच्चावचनों में योग संबंध होते हैं अर्थात काल श्रेणी का कोई भी

अवलोकन चार संघटकों का योग है। इस संघटकों को परिभाषित करने का एक अन्य तरीका जोड़ के रूप में इस प्रकार है :

$$Y = \quad T + S + C + I$$

टिप्पणी

यह मॉडल तब उपयोगी है जब काल-श्रेणी में विचरण परम मान होते हैं एवं उन्हें इन चार भागों में विभक्त किया जा सकता है एवं प्रत्येक भाग को स्वतन्त्र रूप में मापा जा सकता है।

4.2.2 चल माध्य की विधियां

यदि काल-श्रेणी बिल्कुल संतुलित हो बिना किसी विशेष प्रवृत्ति, चक्रीय व आर्तव प्रभावों और हमारा उद्देश्य माध्य विधियों द्वारा काल-श्रेणी के अनियमित अवयवों को समकारित करना हो तो समकारी पद्धति भविष्य की प्रवृत्ति का पूर्वानुमान सही ढंग से लगाने में मदद करती है। इस तरह के समकारिता के लिए दो पद्धतियाँ हैं जो निम्नलिखित हैं :–
1. चल माध्य 2. घातांक समकारी

1. **चल माध्य–**चल माध्य की संकल्पना इस विचार पर आधारित है कि किसी समय में काल-श्रेणी के किसी बड़े अवयव का प्रवृत्ति पर छोटा प्रभाव होता है, यदि उस समय में अवलोकन के पूर्व और अवलोकन के बाद के मानों का माध्य लिया जाए। उदाहरण के लिए, यदि हम किसी समय-अंतराल के लिए तीन-अन्तरालों वाले चल माध्य को ज्ञात करने से संबद्ध हैं तो हम इन मानों का माध्य इन समय-अन्तरालों में लेते हैं, समय-अन्तराल में इन मानों के तुरंत पहले का मान एवं इन मानों के तुरंत बाद का मान। इस संकल्पना को हम एक उदाहरण की मदद से समझ सकते हैं।

उदाहरण–माना कि दिया गया टेबल (सारणी) किसी डीलर द्वारा किसी साल के प्रथम दो महीनों में प्रथम 6 हफ्तों में बेचे गए कार की संख्या निरूपित करता है। हमारा उद्देश्य तीन-हफ्तों के चल माध्य को ज्ञात करना है।

सप्ताह	बिक्री
1	20
2	24
3	22
4	26
5	21
6	22

हल– प्रथम तीन हफ्तों के लिए चल माध्य होगा :–

$$\text{चल माध्य} = \frac{20+24+22}{3} = \frac{66}{3} = 22$$

टिप्पणी

इस चल-माध्य का उपयोग हम चौथे हफ्ते में बिकी कार की संख्या का पूर्वानुमान लगाने में कर सकते हैं। चूंकि चौथे हफ्ते में बिकी कारों की वास्तविक संख्या 26 है, हमें ज्ञात होता है कि पूर्वानुमान में अशुद्धि (26-22) = 4 है। अगले तीन हफ्तों के लिए चल-माध्य का परिकलन चौथे हफ्ते के मान को जोड़कर एवं प्रथम हफ्ते के मान को छोड़कर तथा दूसरे, तीसरे एवं चौथे हफ्ते का माध्य लेकर किया जाता है।

$$\text{अत:} \qquad \text{चल माध्य} = \frac{24 + 22 + 26}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

तब इसे पाँचवे हफ्ते में हुए विक्रय का पूर्वानुमान समझा जा सकता है। चूंकि पाँचवें हफ्ते में हुए विक्रय का वास्तविक मान 21, इसलिए पूर्वानुमान में हुई अशुद्धि $(21 - 24) = -(3)$ है।

3 से 5 हफ्तों के लिए अगला चल-माध्य, छठे हफ्ते के पूर्वानुमान के रूप में इस प्रकार दिया जा सकता है :–

$$\text{चल माध्य} = \frac{22 + 26 + 21}{3} = \frac{69}{3} = 23$$

छठे हफ्ते के लिए वास्तविक एवं पूर्वानुमान मान में अशुद्धि $(22 - 23) = -1$ है। (अब चूंकि सांतवें हफ्ते के विक्रय का वास्तविक मान अज्ञात है, अत: इन मानों के पूर्वानुमान लगाने की कोई आवश्यकता नहीं है)

हमारा उद्देश्य है प्रवृत्ति का आकलन करना एवं भविष्य के लिए दिए गए चर के मानों का यथासंभव पूर्वानुमान लगाना ताकि यादृच्छ विचरणों से यह पूर्वानुमान बिल्कुल स्वतंत्र हो। ऐसा करने हेतु, पहले कहे गए अनुसार, हमें व्यक्तिगत अशुद्धियों का योग जितना कम हो फिर भी ज्ञात होनी चाहिए। फिर भी, ये अशुद्धियाँ अनियमित एवं यादृच्छ होती हैं, ऐसी उम्मीद की जाती है कि कुछ अशुद्धियाँ नकारात्मक एवं कुछ सकारात्मक होती है, इस प्रकार से इन अशुद्धियों का योग पूरी तरह से विक्षिप्त होता है और वे शून्य के सन्निकट होते हैं। प्रत्येक व्यक्तिगत पूर्वानुमान अशुद्धि का वर्ग कर और फिर उनका माध्य लेकर इस परेशानी को दूर किया जा सकता है।

मुख्यत: इन अशुद्धियों का न्यूनतम मान 'अशुद्धियों के वर्ग के योग के माध्य' में न्यूनतम मान प्रदान करता है। इसे इस प्रकार से दिखाया जाता है:–

सप्ताह	काल श्रेणी मान	चल माध्य	अशुद्धि	अशुद्धि का वर्ग
1	20			
2	24			
3	22			
4	26	22	4	16
5	21	24	–3	9
6	22	23	–1	1

टिप्पणी

तब, अशुद्धियों के वर्ग के योग के माध्य को माध्य वर्ग अशुद्धि (*MSE*) के रूप में भी जाना जाता है।

$$MSE = \frac{16 + 9 + 1}{3} = \frac{26}{3} = 8.67$$

MSE के मान का उपयोग पूर्वानुमान की शुद्धता ज्ञात करने की विधि में किया जाता है और यह विधि *MSE* का न्यूनतम मान प्रदान करती है जो सभी से ज्यादा परिशुद्ध होती है। चल-माध्य में उपस्थित आँकड़ों के मानों में परिवर्तन कर हम *MSE* के मानों को प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि चल-माध्य ज्ञात करने के लिए हमने 3 के स्थान पर 4 अन्तरालों का उपयोग कर *MSE* का मान परिकलित किया था तो *MSE* का मान कम होगा। इस प्रकार से, प्रयास एवं त्रुटि विधि में आँकड़ों के मान की संख्या का चयन पूर्वानुमान ज्ञात करने में इस तरह से किया जाता है कि *MSE* के मान का परिणाम न्यूनतम हो।

घातांक समकारी (Exponential Smoothing)–चल-माध्य विधि में, प्रत्येक अवलोकन, जिनका उपयोग चल-माध्य परिकलन में होता है, का समान महत्त्व होता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक मान चल माध्य के परिकलन में समान रूप से सहयोग देता है बिना समय-अन्तरालों की संख्या पर निर्भरता के। बहुत से वास्तविक स्थितियों में यह एक वास्तविक अवधरणा नहीं होती है। एक समय-अंतराल में पर्यावरण की गतिकी के कारण, इस बात की संभावना अधिक होती है कि अगले समय का पूर्वानुमान उसके ठीक पहले के पूर्वानुमान के सन्निकट होता है। उसके काफी दूरस्थ पूर्वानुमान की तुलना में।

एक बार a के मान का चयन हो जाने पर घातांक समकारी विधि उपयोग करने में आसान हो जाता है। $F_{(t+1)}$ का परिकलन करने के लिए केवल दो सूचनाओं Y_t एवं F_t की आवश्यकता होती है।

घातांक समकारी विधि आरम्भ करने के लिए, माना कि F_t अवधि t में काल-श्रेणी का वास्तविक मान है जो Y_l है। अतः दूसरी अवधि के लिए पूर्वानुमान होगा:

$$F_2 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)\, F_1$$

लेकिन यदि $F_1 = Y_1$ तब

$$F_2 = \alpha Y_1 + (1 - \alpha)\, Y_1$$
$$= Y_1$$

अब हम घातांक समकारी विधि का उपयोग कार विक्रय के पूर्वानुमान में पहले बताए गए चल-माध्य की स्थिति में करते हैं।

दिए गए आँकड़े निम्नलिखित हैं :–

टिप्पणी

सप्ताह	काल–श्रेणी मान (Y_t)
1	20
2	24
3	22
4	26
5	21
6	22

माना, $\alpha = 0.4$

चूंकि परिकलित किए गए F_2 जो कि $Y_1 = 20$ के तुल्य है, हम F_3 का मान ज्ञात कर सकते हैं जो इस प्रकार है:

$$F_3 = 0.4Y_2 + (1 - 0.4)\ F_2$$

चूंकि, $F_2 = Y_1$, हम पाते हैं

$$F_3 = 0.4\ (24) + 0.6\ (20) = 9.6 + 12$$
$$= 21.6$$

लगातार अवधियों के लिए इसी प्रकार मानों का परिकलन किया जा सकता है :–

$$F_4 = 0.4Y_3 + 0.6\ F_3$$
$$= 0.4\ (22) + 0.6\ (21.6)$$
$$= 8.8 + 12.96$$
$$= 21.76$$
$$F_5 = 0.4Y_4 + 0.6\ F_4$$
$$= 0.4\ (26) + 0.6\ (21.76)$$
$$= 10.4 + 13.056$$
$$= 23.456$$
$$F_6 = 0.4Y_5 + 0.6\ F_5$$
$$= 0.4\ (21) + 0.6\ (23.456)$$
$$= 8.4 + 14.07$$
$$= 22.47$$

एवं, $F_7 = 0.4Y_6 + 0.6\ F_6$

$$= 0.4\ (22) + 0.6\ (22.47)$$
$$= 8.8 + 13.48$$
$$= 22.28$$

अब हम घातांक समकारी पूर्वानुमान के मानों की तुलना 6 अवधियों के वास्तविक मान से करते हैं एवं पूर्वानुमान त्रुटि का परिकलन करते हैं।

सप्ताह	काल-श्रेणी	घातांक समकारी	त्रुटि $(Y_t - F_t)$
1	20	–	–
2	24	20.000	4.0
3	22	21.600	0.4
4	26	21.760	4.24
5	21	23.456	– 2.456
6	22	22.470	– 0.47

टिप्पणी

(Y_7 के मान अज्ञात होने के कारण F_7 के मान को महत्त्व नहीं दिया जाता है)

घातांक समकारी विधि चल माध्य का उपयोग करती है जिसमें बहुत ही सटीक पूर्वानुमान के लिए मानों को उपयुक्त भार प्रदान किए जाते हैं। विगत समय-अंतराल के बढ़ते प्रभाव को ध्यान में रखते हैं जिससे हम बीते हुए समय में आगे बढ़ते हैं। समय-अंतराल में नीचे बढ़ते हुए घटता हुआ प्रभाव घातांकीय रूप से विस्तृत होता है अतः इसका नाम घातांक समकारी है।

इस विधि में, समय t के लिए समकारित मान जो उस अवधि के वास्तविक मान का भारित माध्य है एवं पूर्व अवधि $(t-1)$ का समकारित माध्य है, जो अगली अवधि $(t+1)$ के लिए पूर्वानुमान बन जाता है। तब समय-अन्तराल $(t+1)$ के लिए घातांक समकारी मॉडल इस प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :–

$$F_{(t+1)} = \alpha Y_t + (1-\alpha) F_t$$

जहाँ, $F_{(t+1)}$ = काल-श्रेणी के अन्तराल $(t+1)$ के लिए पूर्वानुमान

Y_t = काल-श्रेणी के अन्तराल t का वास्तविक मान

α = समकारी गुणांक $(0 \le \alpha \le 1)$

F_t = काल-श्रेणी के अन्तराल t के लिए पूर्वानुमान

निर्णय लेने वाले द्वारा a के मान का चयन समकारिता के एक अंश पर निर्भर करता है। a के छोटे मान का अर्थ समकारिता का अधिकतम अंश है। α के अधिक मान का अर्थ समकारिता का कम अंश है। जब $\alpha = 1$ है तो समकारिता नहीं होगी और इस तरह अगले समय-अन्तराल के लिए पूर्वानुमान वर्तमान समय में काल-श्रेणी के वास्तविक मान के बिल्कुल समान होगा। इसे इस प्रकार से दर्शाया जा सकता है:–

$$F_{(t+1)} = \alpha Y_{\text{t}} + (1-\alpha) F_r$$

जहाँ $\alpha = 1$

$$F_{(t+1)} = Y_t + 0F_t = Y_t$$

अब हम इस विधि के लिए MSE के मान का परिकलन करते हैं जहाँ α का चयनित मान 0.4 है। पहले दी गई सारणी के अनुसार :

टिप्पणी

पूर्वानुमान त्रुटि	पूर्वानुमान त्रुटि वर्ग
$\frac{(Y_t - F_t)}{4}$	$\frac{(Y_t - F_t)}{16}$
0.4	0.16
4.24	17.98
– 2.456	6.03
– 0.47	0.22
कुल = 40.39	

तब, $MSE = 40.39/5$
$= 8.08$

MSE का पूर्व मान 8.67 था। अतः वर्तमान विधि ज्यादा सही है।

α के मान का चयन बहुत महत्त्वपूर्ण है। घातांक समकारी मॉडल को हम एक बार फिर से समझते हैं।

$$F_{(t+1)} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) F_t$$
$$= \alpha Y_t + F_t - \alpha F_t$$
$$= F_t + \alpha (Y_t - F_t)$$

जहाँ $(Y_t - F_t)$ समय-अन्तराल t में पूर्वानुमान त्रुटी है। सावधानीपूर्वक α के मानों का चयन कर पूर्वानुमान की शुद्धता को और बढ़ाया जा सकता है। यदि काल-श्रेणी में यादृच्छ विचरण हो तो α के मान में छोटा सा परिवर्तन भी मान्य है (जो समकारी गुणांक या समकारी स्थिरांक के रूप में जाना जाता है) दूसरी तरफ, आपेक्षिक रूप से थोड़े यादृच्छ विचरण वाले $(Y_t - F_t)$ α का एक बड़ा मान काल-श्रेणी के लिए वांछनीय होता है।

आर्तव विचरण की माप के लिए यह सबसे लोकप्रिय विधि है। इस आधार मान से दूरस्थ विचरणों के द्वारा मापा गया आर्तव विचरण के अंग से जुड़े 100 के माध्य पर आर्तव सूचकांक निर्भर करता है। उदाहरण के लिए, गर्मी के 3 महीने में तालाब पर नौकाओं के भाड़े की आर्तवता को समझते हैं एवं आर्तव सूचकांक 135 ज्ञात करते हैं एवं हमें यह भी ज्ञात है कि पूरे विगत साल का कुल नौका भाड़ा 1680 था तो हम नौकाओं के लिए गर्मी के भाड़े की संख्या ज्ञात कर सकते है।

तिमाही किराये वाली नौकाओं की औसत संख्या = 1680/4 = 420

ग्रीष्म तिमाही के लिए आर्तव सूँची 135 का मतलब है कि ग्रीष्म किराया औसत ग्रीष्म किराये का 135 प्रतिशत है।

अतः ग्रीष्म किराया = 420 × 135/100 = 567

आर्तव सूची ज्ञात करने के लिए आवश्यक चरणों को नीचे दिये 'उदाहरण' के द्वारा दिखाया जा सकता है।

टिप्पणी

उदाहरण

साल	प्रति तिमाही किराया				कुल
	I	II	III	IV	
1991	350	300	450	400	1500
1992	330	360	500	410	1600
1993	370	350	520	440	1680

हल–चरण–I चार तिमाही कुल चल काल श्रेणी के लिए प्रथम चरण है। ये कुल योग मध्य आँकड़ों से जुड़ा होना है। जो चार तिमाही के लिए निम्नलिखित है।

साल	तिमाही	किराया	कुल चल
1991	I	350	
	II	300	
			1500
	III	450	
	IV	400	

चार तिमाही के दिये गये मानों के लिए कुल चल 1500 है। जो बस चार तिमाही के मानो का कुल योग है। 1500 का ये मान 300 एवं 450 के माध्य अगले स्तम्भ में स्थित है। चार तिमाही के अगले चल कुल के लिए, प्रथम तिमाही के मान को छोड़ देते हैं। जो 350 है, कुल योग में से एवं 5वें तिमाही के मान को जोड़ देते हैं। और यह कुल योग दो मानों 450 एवं 400 के बीच स्थित है। चल कुल के इन मानो को दी गई सारणी में स्तम्भ चार में दिखाया गया है।

चरण–II–अगले चरण में तिमाही चल माध्य का परिकलन किया जाता है।

साल	तिमाही	किराया	तिमाही चल कुल	तिमाही चल माध्य	तिमाही के छ्रित चल माध्य	वास्तविक से केन्द्रीय चल माध्य का प्रतिशत
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	I	350				
	II	300				
			1500	375.0		
	III	450			372.50	120.80
			1480	370.0		
	IV	400			377.50	105.96
			1540	385.0		
1992	I	330			391.25	84.35
			1590	397.5		
	II	360			398.75	90.28
			1600	400.0		

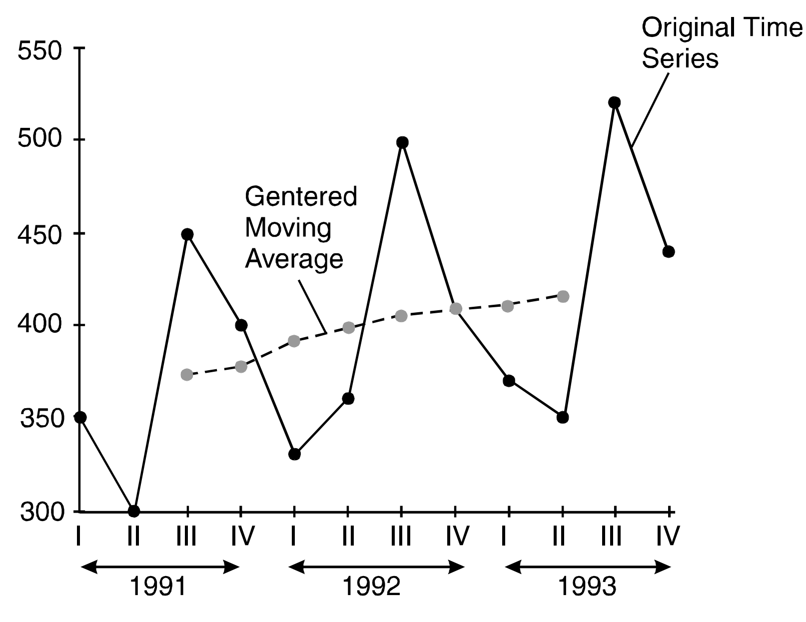
टिप्पणी

	III	500			405.00	123.45
			1640	410.0		
	IV	410			408.75	100.30
			1630	407.5		
1993	I	370			410.00	90.24
			1650	412.5		
	II	350			416.25	84.08
			1680	420.0		
	III	520				
	IV	440				

चरण–III–लगातार चार तिमाही के चल माध्य का मान ज्ञात करने के बाद हम इन चल माध्यों पर अपना ध्यान केंद्रित करते हैं। जैसा की सारण से स्पष्ट है कि तिमाही चल माध्य तिमाहियों के बीच आता है। इसका कारण यह है कि तिमाही की संख्या सम है जो चार है। यदि हमारे पास विषम संख्या वाला समय अन्तराल होता जैसे की एक हफ्ते के सात दिन तब ये चल माध्य पहले ही केंद्रित होगा और हमें तीसरे चरण कि आवश्यकता नहीं पड़ती इस प्रकार हम अपने माध्यों को इस प्रकार जोड़ते हैं कि प्रत्येक माध्य अपने तिमाही से जुड़ा हो न कि दो तिमाहियों के बीच हो यह स्तम्भ छः में दिखाया गया है जहाँ केंद्रीय चल माध्य को दो लगातार चल माध्यों के रूप में परिकलित किया गया है।

चल माध्य का उद्देश्य आर्तव एवं अनियमित उच्चावचनों (S व I)को कुल काल श्रेणी से अलग करना है ताकि यह माध्य श्रेणी के चक्रिय एवं प्रवृत्ति अवयवों को प्रदूषित कर सके।

जैसे कि नीचे दिये गए ग्राफ में दिखाया गया है कि केन्द्रित चल माध्म ने मूल काल श्रेणी के शीर्ष और गर्त को समकारित कर दिया है।



चरण–IV–सारणी के स्तम्भ सात में परिकलित की गई प्रतिष्या शामिल है। जो केंद्रीय चल माध्य से सम्बधित वास्तविक मानो के प्रतिशत है। उदाहरण के लिए प्रथम चाल तिमाही के लिए केंद्रीय चल माध्य 372.50 है। जिससे सम्बंधित वास्तविक मान सारणी के 450 दिया गया है ताकि वास्तविक मान से केंद्रीय चल माध्य का प्रतिशत हो. ...

$$\frac{\text{वास्तविक मान}}{\text{केंद्रीय चल माध्य मान}} \times 100 = \frac{450}{372.5} \times 100 = 120.80$$

चरण–V–इस चरण का उद्देश्य बचे हुए चक्रिय एवं अनियमित उच्चावचनों जो अभी भी सारणी के स्तम्भ सात में उपस्थित हैं कि समाप्त करना है। यह प्रत्येक तिमाही के परिवर्तित माध्य को परिकलित किया जा सकता है। तीन सालों के समय अन्तरालों में प्रत्येक तिमाही के लिए परिवर्तित माध्य का परिकलन इस प्रकार से किया जा सकता है।

(*a*) स्तम्भ सात में दिये गये मानों की एक सारणी तैयार करें (वास्तविक से चल माध्य मान का प्रतिशत) तीन सालों में प्रत्येक तिमाही के लिए इस प्रकार दिखाया जा सकता है।

साल	तिमाही I	तिमाही II	तिमाही III	तिमाही IV
1991	–	–	120.80	105.96
1992	84.35	90.28	123.45	100.30
1993	90.24	84.08	–	–

(*b*) प्रत्येक तिमाही के लिए हम इन मानों का माध्य लेते हैं। यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि 3 सालों के बदले में हम कई साल एवं कई तिमाही लेते हैं तब प्रत्येक तिमाही के उच्च एवं निम्न मानों को हम छोड़ सकते हैं एवं बचे हुए आँकड़ों का माध्य लेते हैं। प्रत्येक तिमाही के उच्च एवं निम्न मानों को छोड़कर हम चक्रीय एवं अनियमित उच्चावचनों को कम कर सकते हैं जो बाद में बचे हुए मानों का माध्य लेने के बाद समकारित हो जाता है। तब परिवर्तित माध्य को हम आर्तव अवयव का सूचकांक कहते हैं। प्रत्येक तिमाही आँकड़े के लिए हम परिवर्तित माध्य की इस प्रकार से दिखा सकते हैं।

$$\text{तिमाही I} = \frac{84.35 + 90.24}{2} = 87.295$$

$$\text{तिमाही II} = \frac{90.28 + 84.08}{2} = 87.180$$

$$\text{तिमाही III} = \frac{120.80 + 123.45}{2} = 122.125$$

$$\text{तिमाही IV} = \frac{105.96 + 100.30}{2}$$
$$= 103.13$$

टिप्पणी

$$\text{कुल} = 399.73$$

परिकलित किया गया परिवर्तित माध्य प्रारंभिक आर्तव सूचकांक है। यह माध्य 100% या 4 तिमाहियों के लिए कुल 400 होना चाहिए। फिर भी हमारा कुल 399.73 है जिसका सुधार निम्नलिखित चरणों में किया जाता है।

चरण–VI–पहले हम समायोजन गुणांक ज्ञात करते हैं। यह संभावित या अपेक्षित कुल 400 को वास्तविक कुल 399.73 से भाग देकर ज्ञात करते हैं :

$$\text{समायोजन} = \frac{400}{399.73} = 1.0007$$

प्रत्येक तिमाही के लिए परिवर्तित माध्य को समायोजन गुणांक से गुणा करने पर प्रत्येक तिमाही का आर्तव सूचकांक मिलता है जो इस प्रकार है,

$$\text{तिमाही I} = 87.295 \times 1.0007 = 87.356$$
$$\text{तिमाही II} = 87.180 \times 1.0007 = 87.241$$
$$\text{तिमाही III} = 122.125 \times 1.0007 = 122.201$$
$$\text{तिमाही IV} = 103.13 \times 1.0007 = 103.202$$
$$\text{कुल} = 400.000$$

(त्रुटियों की वजह से इस माध्य आर्तव सूचकांक को लगभग 100 के निकट माना जाता है) इस विधि का तार्किक महत्व इस पर आधारित है कि केन्द्रिय चल माध्य लौकिक प्रवृत्ति एवं चक्रीय उच्चावचनों ($T \times C$) के प्रभाव को समाप्त करता है। इसे इस प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

$$\frac{T \times S \times C \times 1}{T \times C} = S \times 1$$

जहाँ ($T \times S \times C \times 1$) प्रवृत्ति का प्रभाव, आर्तव विचरण, चक्रीय उच्चावचन एवं अनियमित विचरण हैं।

अत: चल माध्य का अनुपात आर्तव एवं अनियमित अवयवों का प्रभाव दर्शाता है। फिर भी इन अनुपातों का साल भर के प्रत्येक तिमाही के लिए माध्य लिया जाता है तब अधिक से अधिक या वृच्छ या अनियमित उच्चावचनों को इस प्रकार समाप्त किया जा सकता है, $\frac{S \times 1}{1} = S$ एवं यह हमें आर्तव प्रभावों के मान प्रदान करता है।

अनियमित विचरण एवं आर्तव समायोजन की माप

अनियमित विचरण स्वभाव से यादृच्छ एवं परिलिखित नहीं होते हैं तथा कम समय अन्तरालों में उत्पन्न होते हैं। इस तरह वजह से हम गणितीय रूपों में इनकी व्याख्या नहीं

टिप्पणी

कर सकते हैं। मुख्यत: इनकी व्याख्या प्रायोगिक रूप से एवं तार्किक बुद्धि द्वारा की जा सकती है। उदाहरण के लिए ब्राजील एवं कोलम्बिया में जाड़े का लंबा समय कॉफी बिन के मूल्यों में वृद्धि करता है क्योंकि जाड़े के समय कॉफी के पौधे नष्ट हो जाते हैं। इसी प्रकार, एक अनियमित कारक के रूप में पर्रियन खाड़ी युद्ध ने वायुयान एवं जहाज की यात्रा में वृद्धि कर दी इसका कारण आदमियों एवं आपूर्त्तियों का आवागमन था। फिर भी, काल-श्रेणी आँकड़ों से दूसरे अवयवों को समाप्त कर अनियमित अवयवों को पृथक किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, काल-श्रेणी आँकड़ों में $(T \times S \times C \times I)$ अवयव हैं, यदि हम आँकड़ों से $(T \times S \times C)$ अवयव समाप्त कर दें तो हमारे पास केवल (I) अवयव बचेंगे। पहले दिए गए उदाहरण के अनुसार हम (I) अवयव को इस प्रकार निर्धारित कर सकते हैं। नीचे दिए गए आँकड़े पहले ही प्रदान किए जा चुके है या निर्धारित किए जा चुके हैं।

साल	तिमाही	किराया काल-श्रेणी मान $(T \times S \times C \times I)$	केन्द्रिय चल माध्य $(T \times C)$	$T \times S \times C \times I/(T \times C) = S \times I$
1991	I	350	–	–
	II	300	–	–
	III	450	372.50	1.208
	IV	400	377.50	1.060
1992	I	330	391.25	0.843
	II	360	398.75	0.903
	III	500	405.00	1.235
	IV	410	408.75	1.003
1993	I	370	410.00	0.902
	II	350	416.25	0.841
	III	520	–	–
	IV	440	–	–

प्रत्येक तिमाही के लिए आर्तव सूचकांक पहले ही इस प्रकार परिकलित किए जा चुके हैं।

तिमाही I = 87.356

तिमाही II = 87.241

तिमाही III = 122.201

तिमाही IV = 103.202

टिप्पणी

आर्तव प्रभावों को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है

तिमाही I = 87.356/100 = 0.874

तिमाही II = 87.241/100 = 0.872

तिमाही III = 122.201/100 = 1.222

तिमाही IV = 103.202/100 = 1.032

साल	तिमाही	$(S \times I)$	(S)	(I)
1991	I	–	–	–
	II	–	–	–
	III	1.208	1.222	0.988
	IV	1.060	1.032	1.027
1992	I	0.843	0.874	0.965
	II	0.903	0.872	1.036
	III	1.235	1.222	1.011
	IV	1.003	1.032	0.972
1993	I	0.902	0.874	1.032
	II	0.841	0.872	0.964
	III	–	–	–
	IV	–	–	–

आर्तव समायोजन

बहुत बार हम यह पढ़ते हैं कि काल-श्रेणी के मान आर्तव रूप से समायोजित होते हैं। यह मूल काल-श्रेणी मानों को उनके आर्तव सूचकांकों से भाग देने पर किया जा सकता है। ये आवर्तित मान विभिन्न समय-अन्तरालों के मानो से तुलनात्मक अध्ययन प्रदान करते हैं। उदाहरण के लिए, किराए की नौकाओं की माँग की तुलना करने के लिए, तीसरे तिमाही की माँग के साथ दूसरे तिमाही की माँग की तुलना करना उपयुक्त नहीं हैं, चूंकि माँग पारम्परिक रूप से अधिक है। फिर भी जब हम आर्तव प्रभावों को काल-श्रेणी के मान से अलग कर लेते हैं तब हम इन माँगों की मानो का तुलनात्मक अध्ययन कर सकते हैं। प्रत्येक तिमाही में नौकाओं की माँग के लिए आर्तव रूप से समायोजित मान पहले निर्धारित किए गए मानों पर आधारित होता है जो इस प्रकार से दर्शाया जा सकता है।

साल	तिमाही	किराया $(T \times S \times C \times I)$	(S) मान	आर्तव समायोजित मान	लगभग
1991	I	350	–	–	–
	II	300	–	–	–
	III	450	1.222	368.25	368
	IV	400	1.032	387.60	388
1992	I	330	0.874	377.57	378
	II	360	0.872	412.80	413

	III	500	1.222	409.16	409
	IV	410	1.032	397.29	397
1993	I	370	0.874	423.34	423
	II	350	0.872	401.38	401
	III	520	–	–	–
	IV	440	–	–	–

टिप्पणी

प्रत्येक तिमाही के लिए आर्तव रूप से समायोजित मान इस प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$\frac{\text{मूल मान}}{\text{आर्तव सूचकांक}},$$

ये गणनाएँ काल-श्रेणी के चारों अवयवों लौकिक-प्रवृत्ति (T), आर्तव विचरण (S), चक्रीय विचरण (C) एवं अनियमित विचरण (I) को पृथक करने एवं निर्धारित करने का काम पूरा करती है।

4.2.3 न्यूनतम वर्ग विधि

न्यूनतम वर्ग विधि दीर्घकालीन उपनति मूल्य को मापने की सर्वोत्तम विधि है। इस विधि का प्रयोग मुख्यत: इसलिए किया जाता है क्योंकि यह सरल व व्यावहारिक विधि है जो कुछ निश्चित कसौटियों के अनुसार सर्वोचित उपमूल्यों को बताती है। महत्वपूर्ण गणितीय विशेषताओं के कारण इस विधि को न्यूनतम वर्ग रीति के नाम से जाना जाता है। उपनति मूल्यों की गणना 'न्यूनतम वर्ग विधि' से इस प्रकार की जाती है कि वास्तविक मूल्यों (y) तथा उपनति मूल्यों (y^1) के विचलनों का योग शून्य होता है। इसमें प्रयोग की जाने वाली आधारभूत समीकरण निम्न प्रकार से है-

$y = a + bx$

जहां $y =$ उपनति मूल्य

$x =$ समय की इकाई

a और $b =$ अचर मूल्य

उद्देश्य- न्यूनतम वर्ग विधि निम्न दो उद्देश्यों को पूरा करती है-

1. अवलोकित मूल्यों के सर्वोपयुक्त रेखा से उदग्र विचलनों का योग शून्य होता है।

$$\sum(y - y_c) = 0$$

2. सर्वोपयुक्त रेखा से ज्ञात विचलनों के वर्ग का योग अन्य किसी सरल रेखा के ज्ञात विचलनों के वर्ग की तुलना में न्यूनतम होता है।

$$\sum(y - y_c)^2 = 0$$

न्यूनतम वर्ग विधि की गणना दो विधियों से की जाती है- (1) दीर्घ विधि, (2) लघु विधि।

टिप्पणी

दीर्घ विधि- दीर्घ विधि द्वारा उपनति मूल्य को निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है-

1. समय बिंदुओं (x) को प्राकृतिक संख्या 1, 2, 3, ... से प्रयोग की जाती है। ये प्राकृतिक संख्या x द्वारा व्यक्त की जाती है तथा इनका योग $\sum x$ होता है।
2. प्राकृतिक संख्या जो x को प्रतिनिधित्व करती है, के वर्ग निकाले जाते हैं। इनके वर्गों का योग $\sum x^2$ द्वारा ज्ञात करते हैं।
3. x तत्संबंधी y से गुणा करके उनका जोड़ $\sum xy$ निकाला जाता है।
4. y मूल्यों का योग $\sum y$ द्वारा ज्ञात करते हैं।
5. $\sum x, \sum x^2, \sum ty$ व $\sum y$ निकालने के बाद निम्न प्रसामान्य समीकरणों से a और b का मूल्य ज्ञात करते हैं। a और b ज्ञात होने के बाद सरल रेखा के आधारभूत समीकरण $\sum u = a + bx$ से उपनति मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

लघु विधि- उपनति मूल्य को लघु विधि द्वारा निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है-

1. समय बिंदुओं में माध्य को 0 मानकर वर्षों का काल विचलन निकालते हैं जो कि शून्य से पहले की ओर ऋणात्मक −1, −2, −3, ... और बाद में धनात्मक +1, +2, +3 .... आदि होता है। इसका बीजगणितीय योग $\sum x$ शून्य होता है।
2. यदि समय बिंदुओं का माध्य समय बिंदु एक से ज्यादा है तो शून्य को छोड़कर शेष संख्या समय बिंदुओं का समय विचलन होता है।
3. इसके बाद $\sum y.$ $\sum xy$ तथा $\sum x^2$ की गणना करते हैं।
4. a और b का मान निम्न समीकरण के द्वारा करते हैं-

   $a = \sum y/n,\ b = \sum xy/\sum x^2$
5. अंत में समीकरण $y = a + bx$ से उपनति मूल्य ज्ञात करते हैं।

गुण- न्यूनतम वर्ग विधि में निम्न गुण पाए जाते हैं-

1. न्यूनतम वर्ग विधि प्रवृत्ति माप की सर्वोत्तम विधि है।
2. इस विधि द्वारा प्राप्त की गई रेखा, सर्वोपयुक्त रेखा होती है क्योंकि यह वह रेखा है जिससे धनात्मक एवं ऋणात्मक विचलनों का योग शून्य होता है अर्थात $\sum(y - y_c) = 0$ और विचलन वर्गों का योग $\sum(y - y_c)^2 = 0$ न्यूनतम होता है।
3. यह विधि व्यक्तिगत अभिनति नहीं होती है।
4. इस विधि के द्वारा अगले वर्षों के लिए सर्वोपयुक्त पूर्वानुमान लगाए जा सकते हैं।
5. इस विधि द्वारा सभी वर्गों के लिए उपनति मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं।

दोष- न्यूनतम वर्ग विधि में कुछ दोष भी पाए जाते हैं जो निम्न प्रकार से हैं-

1. इस विधि द्वारा पूर्वनुमान केवल दीर्घकालीन विचरणों पर आधारित होते हैं और मौसमी, चक्रीय तथा अनियमित विचरणों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता है।
2. इस विधि की गणित क्रिया बहुत जटिल है और इसमें समय भी अधिक लगता है।
3. मूल समंकों में मूल्यों का अंतर करने पर उपनति समीकरण बदल जाता है।

4.2.4 काल-श्रेणी विश्लेषण का महत्व

काल-श्रेणी विश्लेषण का महत्व आज के आर्थिक एवं व्यावसायिक युग में बहुत अधिक है। उपभोग, उत्पादन, मूल्य, व्यापार तथा व्यवसाय से संबंधित अल्पकालीन तथा दीर्घकालीन परिवर्तनों की निकटतम जानकारी समाज के सभी वर्गों के लिए जानना आवश्यक है। विशेषकर व्यावसायिक क्षेत्र में, भूतकाल में होने वाले विभिन्न प्रकार के परिवर्तनों के आधार पर ही व्यवसायी अपनी वर्तमान नीति का निर्धारण कर पाता है। भावी प्रवृत्तियों व परिवर्तनों का पूर्वानुमान काल-श्रेणी के विश्लेषण द्वारा ही संभव है।

काल-श्रेणी के विश्लेषण का उद्देश्य आर्थिक तथ्यों के परिवर्तन को समझना, निर्वचन करना तथा उनका मूल्यांकन करना व उनके आधार पर भविष्य की गतिविधियों का अनुमान करना होता है। अतीत के परिवर्तनों के आधार पर ही भविष्य की गतियों का पूर्वानुमान किया जाता है। काल-श्रेणी विश्लेषण का महत्व केवल अर्थशास्त्रियों अथवा व्यापारियों के लिए ही नहीं है अपितु वैज्ञानिक, समाजशास्त्री, जीव-विज्ञानवेत्ता, सरकार, कृषक आदि सभी वर्गों के लिए महत्वपूर्ण है। काल-श्रेणी के विश्लेषण का महत्व निम्न कारणों से है-

1. **भूतकालीन परिवर्तनों से अनुभव प्राप्त करना**- काल-श्रेणी विश्लेषण के अध्ययन से भूतकालीन अनुभव को समझा जा सकता है। जैसे- भूतकाल में क्या परिवर्तन हुए थे? उनके क्या कारण थे तथा क्या परिस्थितियां थीं जिनमें परिवर्तन हुए थे। इन सभी प्रश्नों के उत्तर भूतकालीन समंकों के विश्लेषण से दिए जा सकते हैं।
2. **भविष्य के बारे में पूर्वानुमान लगाना**- काल-श्रेणी विश्लेषण के अध्ययन से भविष्य में होने वाले परिवर्तनों के विषय में अनुमान लगाया जा सकता है। यह व्यावसायिक पूर्वानुमान की एक महत्वपूर्ण तकनीक है। इसके लिए भूतकालीन तथ्यों एवं समंकों के आधार पर भविष्य के लिए ऐसे गणितीय प्रारूपों को तैयार किया जाता है जिससे भावी पूर्वानुमान लगाने में सुविधा रहती है।
3. **तुलनात्मक अध्ययन में सहायक**- काल-श्रेणी का विश्लेषण तुलनात्मक अध्ययन में भी सहायक है। एक बार जब आंकड़े कालनुक्रमिक रूप से विन्यसित कर लिए गए होते हैं, तो एक काल अवधि और दूसरी काल अवधि के बीच तुलना सुविधाजनक हो जाती है। यह काल-श्रेणी के विभिन्न संघटकों के प्रभावों का अध्ययन तथा पृथक्करण करके तुलना करने के लिए वैज्ञानिक आधार प्रदान करता है।
4. **व्यापार चक्र का अनुमान लगाना**- काल-श्रेणी विश्लेषण के अंतर्गत चक्रीय उच्चावचनों के कारण व्यापार में होने वाले उतार-चढ़ावों का अनुमान लगाया जा सकता है और इसी आधार पर व्यापारिक एवं आर्थिक क्रियाओं को घटाया या बढ़ाया जा सकता है।
5. **सामयिक परिवर्तनों का अध्ययन**- काल-श्रेणी विश्लेषण की सहायता से जीवन के विभिन्न क्षेत्रों में विशेषत: आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में होने वाले सामयिक परिवर्तनों का अध्ययन किया जाता है एवं इन परिवर्तनों के निष्कर्षों से लाभ उठाया जा सकता है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

1. काल श्रेणी के कितने घटक होते हैं?
   (क) तीन (ख) चार
   (ग) पांच (घ) सात
2. $Y = T \times S \times C \times I$ फलन में I क्या दर्शाता है?
   (क) चक्रीय विचरण (ख) आर्तव विचरण
   (ग) अनियमित अस्थिरता (घ) चल माध्य

4.3 सूचकांक की अवधारणा, महत्व एवं प्रकार

सूचकांक एक विशेष प्रकार का औसत (माध्य) होता है। इन्हें समय, भौगोलिक स्थितियाँ या कुछ अन्य गुणों के संदर्भ में एक घटना के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन की माप के लिए बनाया गया है। जैसा कि हमने देखा है माध्यों का प्रयोग दो या अधिक शृंखलाओं की तुलना में होता है, क्योंकि वे अपनी केन्द्रीय प्रवृत्तियों को दर्शाते हैं। किन्तु यदि दो या अधिक शृंखलाओं वाली इकाईयाँ भिन्न-भिन्न हैं, या शृंखलाएँ विभिन्न प्रकार के मदों से बनी हैं, औसत का प्रयोग इनकी तुलना में नहीं हो सकता। उदाहरण के लिए, यदि हम मूल्य स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन की जाँच करना चाहते हैं, हम औसतों का उपयोग कर ऐसा नहीं कर सकते, क्योंकि विभिन्न प्रकार की वस्तुएँ विभिन्न इकाईयों जैसे प्रति मीटर, प्रति किलोग्राम, प्रति मीट्रिक टन इत्यादि में व्यक्त किए जाते हैं। इन स्थितियों में, हमें कुछ विशेष प्रकार के औसत की जरूरत पड़ती है, जो हमें मूल्य स्तर में परिवर्तन की माप में सक्षम कर सकें। सूचकांक ऐसा ही एक औसत हैं।

व्हेलडन के अनुसार, सूचकांक आँकड़ा, जहाँ वास्तविक परिवर्तन की माप करना मुश्किल या संभव नहीं है, के आपेक्षिक परिवर्तनों को दर्शाने वाला एक सांख्यिकीय उपकरण है।

एफ. वाई. एजवर्थ के अनुसार, सूचकांक विस्तार में परिवर्तनों, जो स्वयं में वास्तविक माप या प्रयोग में प्रत्यक्ष मूल्यांकन संदेहास्पद न हो, जैसे विचरणों के द्वारा दर्शाया जाता है।

मूलतः सूचकांक मूल्य स्तर में परिवर्तनों के प्रभाव की माप के लिए विकसित किया गया था। किन्तु, आज सूचकांक का प्रयोग औद्योगिक उत्पादन में परिवर्तनों, व्यावसायिक क्रियाकलापों के स्तर में उतार-चढ़ाव, कृषि उत्पादन में परिवर्तनों, इत्यादि की माप में भी होता है। वास्तव में, हम यह जानना चाहते हैं कि अर्थव्यवस्था में क्या हो रहा है, हमें औद्योगिक उत्पादन, कृषि उत्पादन एवं व्यवसाय क्रियाकलाप जैसे कुछ महत्त्वपूर्ण सूचकांकों को देखना होगा।

जी. सिम्पसन एवं **एफ. काफ्का** के शब्दों में, सूचकांक आज सर्वाधिक प्रयुक्त सांख्यिकीय उपकरणों में से एक है। इन्हें अर्थव्यवस्था की नब्ज देखने में प्रयोग किया

जाता है एवं इनका मुद्रा स्फिति या मुद्रा विस्फिति प्रवृत्तियों के संकेतक के तौर पर भी उपयोग किया जाता है।

4.3.1 सूचकांक के महत्व

आर्थिक एवं व्यापार स्थितियों के विश्लेषण में सूचकांक संख्याएं अपरिहार्य (अविभाज्य) हो चली हैं, यद्यपि इनका प्रयोग लगभग सभी विज्ञानों में किया जाता है– प्राकृतिक, सामाजिक एवं भौतिक। सूचकांक संख्याओं के प्रमुख उपयोगों को निम्नानुसार सारगर्भित किया जा सकता है:–

1. **ये उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में सहायक हैं**– कीमतों, उत्पादन, लाभों, आयात्–निर्यात, कार्मिक एवं वित्तीय विषयों से संबंधित आंकड़ों की सूचकांक संख्याएं उपयुक्त नीतियां गढ़ने व कार्यकारी निर्णयों को करने के लिए ही अविभाज्य हैं।

   उदाहरण हेतु जीवनस्तर सूचकांक संख्याओं की लागत से नियोक्ताओं को अपने कर्मचारियों के वांछित भत्तों में वृद्धि करने का निर्णय करने में तथा उनके जीवनस्तर की लागत में परिवर्तनों के अनुरूप उनके वेतन–भत्तों को समायोजित करने में सहायता मिलती है।

2. **सूचकांक संख्याओं से विचरणों व प्रवृत्तियों के अध्ययन में सहायता रहती है**– चूंकि सूचकांक संख्याओं में किसी समयावधि के दौरान परिघटना के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तनों का अध्ययन किया जाता है, अतः इसे निर्मित समय श्रृंखलाओं से हम अध्ययन की जाने वाली परिघटना के साधारण विचरण का अध्ययन कर पाते हैं। उदाहरण हेतु भारत में गत दस वर्षों के लिए थोक कीमतें की सूचकांक संख्याओं का अध्ययन करके हम कह सकते हैं कि भारत में साधारण कीमत स्तर बढ़ रहा है एवं हर वर्ष यह बढ़ते जा रहा है। इसी के समान गत कुछ वर्षों के लिए उत्पादन (औद्योगिक एवं कृषि), ट्रेड आयतन, आयात्–निर्यात् इत्यादि की सूचकांक संख्याओं के परीक्षण द्वारा हम उत्पादन एवं व्यापार गतिविधि के विचरणों के बारे में उपयोगी निष्कर्षों तक पहुंच सकते हैं।

3. **अपस्फीति में सूचकांक संख्याएं अति उपयोगी हैं**– समय–श्रृंखला विश्लेषण में सूचकांक संख्याओं का प्रयोग कीमत परिवर्तनों के लिए मौलिक आंकड़ों के समायोजन के लिए अथवा जीवनस्तर परिवर्तनों की लागत के लिए वेतन परिवर्तनों को समायोजित करने के लिए किया जाता है तथा इस प्रकार सांकेतिक वेतनों को वास्तविक वेतनों में रूपांतरित कर लिया जाता है। उपयुक्त सूचकांक संख्याओं के द्वारा सांकेतिक आय को वास्तविक आय में एवं सांकेतिक बिक्री को वास्तविक बिक्री में बदला जा सकता है।

4.3.2 सूचकांक के प्रकार : लैस्पियर, पाश्चे एवं फिशर का सूचकांक

सूचकांक रचना की विधियों को मुख्यत: दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है:

(*a*) अभारित सूचकांक (*Unweighted Index*)

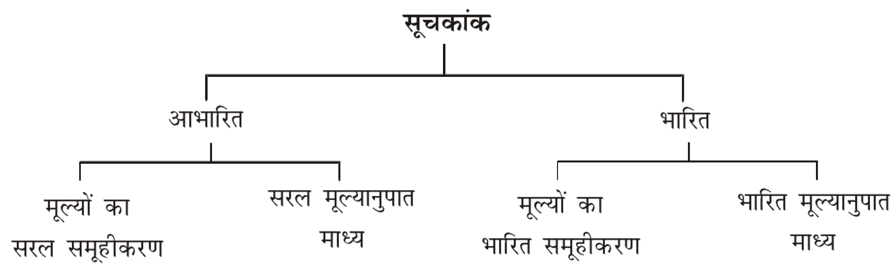
(*b*) भारित सूचकांक (*Weighted Index*)

अभारित सूचकांक की स्थिति में, भार स्पष्टत: निर्धारित नहीं होते, जबकि भारित सूचकांक की स्थिति में विभिन्न मदों से भार स्पष्टत: निर्धारित होते हैं। इनमें से प्रत्येक प्रकारों की आगे निम्नलिखित दो शीर्षकों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है:

(*i*) सरल मूल्य समूही विधि (*Aggregate of Prices Method*)

(*ii*) सरल मूल्यानुपात माध्य विधि (*Average of Price Relatives Method*)

निम्नलिखित चार्ट इन विभिन्न विधियों को दर्शाता है



अ. अभारित सूचकांक (Unweighted Index Numbers)

1. मूल्यों का सरल समूहीकरण–इस विधि के अन्तर्गत, चालू वर्ष में सभी वस्तुओं के कुल मूल्यों को आधार वर्ष में इन वस्तुओं के कुल मूल्यों से विभाजित कर भागफल को 100 से गुणा किया जाता है। संकेत सूत्र के रूप में,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$

$$P_{01} = \frac{\text{चालू वर्ष के कीमतों का योग}}{\text{आधार वर्ष की कीमतों का योग}} \times 100$$

P_{01} = आधार वर्ष की कीमतों के आधार पर चालू वर्षों की कीमतों का सूचकांक

जहाँ $\underline{\Sigma}P_1$ = चालू वर्ष की कीमत

$\underline{\Sigma}P_0$ = इन विभिन्न वस्तुओं का आधार वर्ष की कीमत

सूचकांक रचना की यह विधि अति सरल है एवं इसकी गणना निम्नलिखित चरणों में की जाती है।

(*i*) $\underline{S}\,P_0$ एवं $\underline{S}\,P_1$ प्राप्त करने के लिए प्रत्येक समयावधि में विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों का योग रूपये में ज्ञात करना।

(*ii*) प्रदत्त समयावधि कुल मूल्य, $\underline{S}\,P_1$ को आधार समयावधि में कुल मूल्य, $\underline{S}\,P_0$ से विभाजित कर, परिणाम को प्रतिशत में व्यक्त करना एवं भागफल को 100 से गुणा करना।

उदाहरण–निम्नलिखित आँकड़े से, 1981 को आधार वर्ष लेते हुए 1982 के लिए सरल समूहीकरण विधि द्वारा मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए:

वस्तुएँ	मात्रक	1981 में मूल्य	1982 में मूल्य
दूध	लीटर	2.00	2.50
मक्खन	किलोग्राम	12.00	15.00
पनीर	किलोग्राम	10.00	12.00
ब्रेड	एक	2.00	2.50
अंडा	दर्जन	4.00	5.00
		$\Sigma P_0 = 30.00$	$\Sigma P_1 = 37.00$

टिप्पणी

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100$$

$$= \frac{37}{30} \times 100 = 123.33\%$$

इसका अर्थ यह है कि 1981 की तुलना में, सूचकांक में शामिल वस्तुओं के मूल्यों में 1982 में शुद्ध (123.33) 23.33 प्रतिशत की वृद्धि हुई।

इस विधि की दो कमियाँ हैं:

(*i*) इकाई जिसमें प्रत्येक वस्तु का मूल्य होता है, वास्तविक मूल्यों के सरल समूह में छुपे हुए भार को दर्शाता है। उदाहरण के लिए, उदाहरण 1 में दूध को प्रति लीटर में व्यक्त किया गया है। यदि इसे प्रति गैलन के रूप में व्यक्त किया जाता, तो संभवत: सूचकांक भिन्न होता।

(*ii*) सभी वस्तुओं को उनके संबंधित महत्त्व के प्रतिकूल समान (भार) महत्त्व दिया जाता है।

2. सरल मूल्यानुपात माध्य विधि– इस विधि से, प्रत्येक वस्तु के मूल्यानुपात की गणना की जाती है एवं उनका औसत ज्ञात किया जाता है। इस सूचकांक की रचना में निम्नलिखित चरण सम्मिलित हैं:

प्रदत्त समयावधि में प्रत्येक वस्तु के मूल्य से मूल्यानुपात को विभाजित कर P_1 को आधार समयावधि मूल्य P_0 से विभाजित करना एवं परिणाम को प्रतिशत में व्यक्त करना, अर्थात् प्रत्येक वस्तु के लिए $\frac{P_1}{P_0} \times 100$ ज्ञात करना।

संकेत सूत्र में, $R = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमत}}{\text{आधार वर्ष की कीमत}} \times 100$

$$R = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

माध्य अवधि आधार

$$R = \frac{\text{चालू वर्ष की कीमत}}{\text{औसत कीमत}} \times 100$$

या

टिप्पणी

$$R = \frac{P_1}{P\bar{x}} \times 100$$

$R =$ मूल्यानुपात

$P_1 =$ चालू वर्ष की कीमत

$P_0 =$ आधार वर्ष की कीमत

$\bar{x} =$ औसत कीमत

उदाहरण–उदाहरण में दिए गए आँकड़ा से, 1981 को आधार मानकर 1982 के लिए मूल्य सूचकांक की गणना, सरल मुल्यानुपात विधि से कीजिए।

हल–मूल्य सूचकांक की रचना

वस्तुएँ	मात्रा	1981 में मूल्य	1982 में मूल्य P_0 (रूपये में)	मूल्यानुपात P_1 (रूपये में)
दूध	लीटर	2.00	2.50	$\frac{2.50}{2.00} \times 100 = 125$
मक्खन	किलोग्राम	12.00	15.00	$\frac{15}{12} \times 100 = 125$
पनीर	किलोग्राम	10.00	12.00	$\frac{12}{10} \times 100 = 120$
ब्रेड	एक	2.00	2.50	$\frac{2.50}{2.00} \times 100 = 125$
अंडा	दर्जन	4.00	5.00	$\frac{5}{4} \times 100 = 125$
$N = 5$		$\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) = 620$		

$$P_{01} = \frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{N} = \frac{620}{5} = 124$$

सरल मूल्यानुपात माध्य विधि सरल समूही मूल्य विधि से दो अर्थों में श्रेष्ठ है:

(*i*) चूँकि हम यहाँ प्रति लीटर मूल्य की प्रति लीटर मूल्य से, एवं प्रति किलोग्राम मूल्य प्रति किलोग्राम मूल्य से तुलना करते हैं, विभिन्न प्रकार के मात्रकों के उपयोग के कारण छुपा हुआ भार पूर्णत: हट जाता है।

(*ii*) सूचकांक चरम वस्तुओं से प्रभावित नहीं होता क्योंकि सभी वस्तुओं को समान महत्त्व दिया जाता है।

हालांकि, अभारित सूचकांक की सबसे बड़ी कमी यह है कि सूचकांक में सम्मिलित सभी संख्याओं को समान महत्त्व या भार दिया जाता है, जो कि उचित नहीं है। इसी कारण से अभारित सूचकांकों का व्यवहार में कम उपयोग होता है।

लैस्पियर, पाश्चे एवं फिशर का सूचकांक

आ. भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers)

1. मूल्यों का भारित समूहीकरण–ये सूचकांक सरल समूही प्रकार के समान है, किन्तु इसमें मौलिक अन्तर यह है कि भार सूचकांक में सम्मिलित विभिन्न वस्तुओं से स्पष्टतः निर्धारित होते हैं। भारों के निर्धारण में लेखकों में मतभेद है। परिणामस्वरूप, कई प्रकार की सूत्र विधियाँ सूचकांक रचना के लिए बनाई जा चुकी हैं। कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र विधियाँ निम्नलिखित हैं:

(क) लैस्पियर विधि (Laspeyre's Method)–इस विधि में आधार वर्ष मात्राओं को भार के रूप में लिया जाता है। सूचकांक निकालने का सूत्र है:

जहाँ,

P_1 = चालू वर्ष में मूल्य

P_0 = आधार वर्ष में मूल्य

q_0 = आधार वर्ष में मात्रा

इस विधि के अनुसार, प्रत्येक वर्ष के लिए सूचकांक तीन चरणों में प्राप्त किया जाता है:

(*a*) प्रत्येक वर्ष में प्रत्येक वस्तु के मूल्य को उस वस्तु के आधार वर्ष मात्रा से गुणा किया जाता है। आधार वर्ष के लिए, प्रत्येक उत्पाद को P_0q_0 से एवं चालू वर्ष को P_1q_0 से दर्शाया जाता है।

(*b*) प्रत्येक वर्ष के उत्पादों को जोड़ा जाता है एवं $\underline{\Sigma}P_1q_0$ तथा $\underline{\Sigma}P_0q_0$ प्राप्त किया जाता है।

(*c*) $\underline{\Sigma}P_1q_0$ को $\underline{\Sigma}P_0q_0$ से विभाजित किया जाता है एवं भागफल को 100 से गुणाकर सूचकांक प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण–निम्नलिखित आँकड़े से, 1972 को आधार वर्ष लेकर 1982 के लिए मूल्य सूचकांक की गणना लैस्पियर विधि से कीजिए

टिप्पणी

	1972		1982	
वस्तु	मूल्य (रु.)	मात्रा (इकाई)	मूल्य (रु.)	मात्रा (इकाई)
A	2	8	4	6
B	5	10	6	5
C	4	14	5	10
D	2	19	2	13

हल– आधार वर्ष (1972) मूल्य को P_0 से, आधार वर्ष मात्रा को q_0 से, चालू वर्ष (1982) मूल्य को P_1 से एवं चालू वर्ष मात्राा को q_1 से दिखाने पर

वस्तु	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_1q_0
A	2	8	4	6	16	32
B	5	10	6	5	50	60
C	4	14	5	10	56	70
D	2	19	2	13	38	38
					$\Sigma P_0q_0 = 160$	$\Sigma P_1q_0 = 200$

$$\text{लैस्पियर विधि से मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0} \times 100$$

$$= \frac{200}{160} \times 100 = 125$$

लैस्पियर विधि का व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। यह प्रदत्त समयावधि मूल्य में मूल्यांकित वस्तुओं की सूची का आधार वर्ष समयावधि से समूही मान में परिवर्तन को बताता है।

हालांकि, इस सूचकांक में एक कमी है। यह समय के साथ उपभोग प्रारूप में हो रहे परिवर्तनों पर विचार नहीं करता।

(ख) पाश्चे सूचकांक (*Paasche's Index*)–इस विधि में, चालू वर्ष मात्राओं (q_1) को भार के रूप में लिया जाता है। सूचकांक निकालने का सूत्र है**:**

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1} \times 100$$

पाश्चे सूचकांक एवं लास्पेयरे सूचकांक दोनों को ज्ञात करने सभी चरण समान है, अन्तर केवल इतना है कि इसमें प्रत्येक वर्ष में प्रत्येक वस्तु के मूल्य को चालू वर्ष में उस वस्तु की मात्रा से गुणा किया जाता है, न कि आधार वर्ष में उसकी मात्रा से।

टिप्पणी

उदाहरण–उदाहरण में 6 प्रदत्त आँकड़ों को लेकर 1972 को आधार लेते हुए 1982 के लिए मूल्य सूचकांक की गणना पाश्चे विधि से कीजिए।

हल– पाश्चे सूचकांक निकालना

वस्तु	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_1q_0
A	2	8	4	6	12	24
B	5	10	6	5	25	30
C	4	14	5	10	40	50
D	2	19	2	13	26	26
					$\Sigma P_0q_0 = 103$	$\Sigma P_1q_0 = 130$

$$\text{पाश्चे विधि से मूल्य सूचकांक} = \frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1} \times 100$$

$$= \frac{130}{103} \times 100 = 126.21$$

हालांकि, इस विधि में उपभोग प्रारूप में परिवर्तनों पर भी विचार किया जाता है, किन्तु प्रत्येक समयावधि या वर्ष के लिए संबंधित मात्राओं के आँकड़े को संग्रह करने की आवश्यक इस विधि को अधिक खर्चीला बनाता है। अत: जहाँ वस्तुओं की संख्या अत्यधिक हो, पाश्चे विधि को वरीयता दी जाती है।

बाउले-ड्रोविश विधि (Bowley-Drobisch Method)–यह विधि लैस्पियर एवं पाश्चे सूचकांकों का सरल समांतर माध्य है। बाउले-ड्रोविश सूचकांक निकालने का सूत्र है**:**

$$P_{01} = \frac{\dfrac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_1} + \dfrac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1}}{2} \times 100$$

$$P_{01} = \frac{L+P}{2}$$

जहाँ, L = लैस्पियर सूचकांक

P = पाश्चे सूचकांक

उदाहरण–1970 को आधार लेकर बाउले-ड्रोविश विधि से 1976 के लिए मूल्य-सूचकांक की गणना कीजिए।

	1970		1976	
वस्तु	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
1	2	20	5	15
2	4	4	8	5
3	1	10	2	12
4	5	5	10	6

टिप्पणी

हल–बाउले-ड्रोविश सूत्र से मूल्य सूचकांक की गणना

वस्तुएँ	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_0q_1	P_1q_0	P_1q_1
1	2	20	5	15	40	30	100	75
2	4	4	8	5	16	20	32	40
3	1	10	2	12	10	12	20	24
4	5	5	10	6	25	30	50	60
					$\Sigma P_0q_0 = 91$	$\Sigma P_0q_0 = 92$	$\Sigma P_1q_0 = 202$	$\Sigma P_1q_1 = 199$

बाउले-ड्रोविश सूत्र के अनुसार,

$$P_{01} = \frac{\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0} + \frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1}}{2} \times 100$$

$$= \frac{\frac{202}{91} + \frac{199}{92}}{2} \times 100$$

$$= \frac{2.2198 + 2.1630}{2} \times 100$$

$$= 4.3828 \times 50 = 219.14$$

मार्शल-एजवर्थ विधि (Marshall-Edgeworth Method)–इस विधि में, आधार वर्ष एवं चालू वर्ष मात्राओं के योग को भार के रूप में लिया जाता है।

सूचकांक निकालने का सूत्र है:

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 \left(q_0 + q_1\right)}{\Sigma P_0 \left(q_0 + q_1\right)} \times 100$$

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1q_0 + \Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0 + \Sigma P_0q_1} \times 100$$

उदाहरण– उदाहरण में प्रदत्त आँकड़े के लिए 1970 को आधार लेकर 1976 के लिए मार्शल-एजवर्थ विधि से मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए:

हल– मार्शल एजवर्थ सूत्र से मूल्य सूचकांक की गणना:

वस्तुएँ	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_0q_1	P_1q_0	P_1q_1
1	2	20	5	15	40	30	100	75
2	4	4	8	5	16	20	32	40
3	1	10	2	12	10	12	20	24
4	5	5	10	6	25	30	50	60
					$\Sigma P_0q_0 = 91$	$\Sigma P_0q_0 = 92$	$\Sigma P_1q_0 = 202$	$\Sigma P_1q_1 = 199$

टिप्पणी

मार्शल–एजवर्थ सूत्र के अनुसार,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma P_0 (q_0 + q_1)} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_0 q_0 + \Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0 + \Sigma P_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{202 + 199}{91 + 92} \times 100$$

$$= \frac{401}{183} \times 100$$

$$= 219.125$$

केली विधि (Kelly's Method)–इस विधि में, न तो आधार वर्ष और न ही चालू वर्ष को भार के रूप में लिया जाता है। इसके बदले, कुछ संदर्भ वर्ष की मात्राएँ या दो या अधिक वर्षों की औसत मात्रा को भार के रूप में लिया जाता है।

सूचकांक निकालने का सूत्र है:

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q} \times 100$$

जहाँ q कुछ संदर्भ वर्ष की मात्रा है।

उदाहरण–निम्नलिखित आँकड़े से 1980 को आधार लेकर केली विधि से 1981 के लिए मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए।

वस्तुएँ	मात्रा	180 में मूल्य	1981 में मूल्य
ईंट	10 इकाई	100	160
लकड़ी	7 इकाई	200	210
बोर्ड	15 इकाई	50	60
बालू	9 इकाई	20	30
सीमेंट	10 इकाई	10	14

हल– केली विधि से सूचकांक की गणना

वस्तु	q	P_0	P_1	P_0q	P_1q
ईंट	10	100	160	1000	1600
लकड़ी	7	200	210	1400	1470
बोर्ड	15	50	60	750	900
बालू	9	20	30	180	200
सीमेंट	10	10	14	100	140
				ΣP_0q = 3430	ΣP_1q = 4380

टिप्पणी

केली विधि के अनुसार,

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1 q}{\Sigma P_0 q} \times 100$$

$$= \frac{4380}{3430} \times 100$$

$$= 127.697$$

(ग) फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Number)–यह लैस्पियर एवं पाश्चे सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य है।

सूचकांक निकालने का सूत्र है:

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}} \times 100$$

निम्नलिखित कारणों से फिशर के सूत्र को आदर्श सूचकांक कहा जाता है:

(*i*) यह आधार वर्ष एवं चालू वर्ष दोनों के मूल्यों एवं मात्राओं को लेता है।

(*ii*) यह गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करता है, जो सैद्धांतिक रूप से सूचकांक गणना के लिए सर्वोत्तम माध्य है।

(*iii*) यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण एवं तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण दोनों को संतुष्ट करता है।

(*iv*) यह भार दोषों से मुक्त होता है। लैस्पियर एवं पाश्चे विधियों में भार गुणोत्तर रूप से एक दूसरे से विपरीत होता है इसीलिए यह दोष पूर्णतः समाप्त हो जाता है।

उदाहरण– 1979 को आधार लेते हुए वर्ष 1980 के लिए फिशर के आदर्श विधि से मूल्य सूचकांक निकालिए।

	1979		1980	
वस्तुएँ	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
A	20	8	40	6
B	50	10	60	5
C	40	15	50	10
D	20	20	20	15

हल– फिशर के आदर्श सूत्र से मूल्य सूचकांक की गणना।

टिप्पणी

वस्तुएँ	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_0q_1	P_1q_0	P_1q_1
A	20	8	40	6	160	120	320	240
B	50	10	60	5	500	250	600	300
C	40	15	50	10	600	400	750	500
D	20	20	20	15	400	300	400	300
					ΣP_0q_0	ΣP_0q_0	ΣP_1q_0	ΣP_1q_1
					= 1660	= 1070	= 2070	=1340

फिशर के आदर्श सूत्र से मूल्य सूचकांक है:

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_0} \times \frac{\Sigma P_1q_1}{\Sigma P_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{2070}{1660} \times \frac{1340}{1070}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.247 \times 1.252} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5612} \times 100$$

$$= 1.25 \times 100 = 125$$

मात्रा या मूल्य सूचकांक संख्या

मूल्य सूचकांक निश्चित मालों के मूल्य-स्तर में परिवर्तन को मापता है। दूसरी ओर, मात्रा या सूचकांक संख्या उत्पादित, उपयोग किए गए या वितरित समानों की भौतिक मात्रा में परिवर्तन को मापता है। ये सूचकांक महत्त्वपूर्ण सूचक होते हैं जो आर्थिक जगत में निर्गत का स्तर सूचित करते हैं।

मात्रा सूचकांक संख्या का निर्माण करने में, सांख्यिकविद् जो समस्याओं का सामना करते हैं वो उन समस्याओं के समान हैं जो मूल्य सूचकांक का निर्धारण करने में उत्पन्न होते हैं। इस स्थिति में हम मात्रात्मक परिवर्तन मापते हैं एवं फिर उसे तोलते हैं जिसमें मूल्यों को भारों के रूप में इस्तेमाल करते हैं। मात्रा सूचकांक को P के स्थान पर q प्रतिस्थापित कर आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

विभिन्न विधियों से मात्रा सूचकांक :–

(*i*) लेसपेरि विधि $$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1P_0}{\Sigma q_0P_0} \times 100$$

(*ii*) पाश्चे विधि $$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1P_1}{\Sigma q_0P_1} \times 100$$

टिप्पणी

(*iii*) बाउले-ड्रोविश विधि $$Q_{01} = \frac{\dfrac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} + \dfrac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}}{2} \times 100$$

(*iv*) मार्शल-एजवर्थ विधि $$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 (P_0 + P_1)}{\Sigma q_0 (P_0 + P_1)} \times 100$$

(*v*) फिशर आइडियल इन्डेक्स $$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} \times \frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}} \times 100$$

(*vi*) केली विधि $$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P}{\Sigma q_0 P} \times 100$$

उदाहरण– साल 1982 के लिए मात्रा सूचकांक का परिकलन करें जहाँ आधार 1980 = 100। इन आँकड़ों के लिए निम्नलिखित विधियों का उपयोग करें:–

(*i*) लेसपेरि विधि, (*ii*) पाश्चे विधि, (*iii*) बाउले-ड्रोविश विधि, (*iv*) मार्शल-एजवर्थ विधि एवं (*v*) फिशर आइडियल सूत्र।

	मूल्य (*Prices*)		मात्रा (*Quantities*)	
माल (*Commodity*)	1980	1982	1980	1982
A	5.00	6.50	5	7
B	7.75	8.80	6	10
C	9.63	7.75	4	6
D	12.50	12.75	9	9

हल–मात्रा सूचकांक का परिकलन

माल	P_0	q_0	P_1	q_1	q_0P_0	q_0P_1	q_1P_0	q_1P_1
A	5.00	5	6.50	7	25.00	32.50	35.00	45.50
B	7.75	6	8.80	10	46.50	52.80	77.50	88.00
C	9.63	4	7.75	6	38.52	31.00	57.78	46.50
D	12.50	9	12.75	9	112.50	114.75	112.50	114.75
							$\Sigma q_0P_0 = 222.52$	$\Sigma q_0P_1 = 231.05$
							$\Sigma q_1P_0 = 282.78$	$\Sigma q_1P_1 = 294.75$

(*i*) लैस्पियर का मात्रा-सूचकांक या $$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} \times 100$$

$$= \frac{282.78}{222.52} \times 100 = 127.08$$

(*ii*) पाश्चे का मात्रा-सूचकांक या

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1} \times 100$$

$$= \frac{294.75}{231.05} \times 100 = 127.57$$

(*iii*) बाउले-ड्रोविश का मात्रा सूचकांक या

$$Q_{01} = \frac{\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} + \frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}}{2} \times 100$$

$$= \frac{\frac{282.78}{222.52} + \frac{294.75}{231.05}}{2} \times 100$$

$$= \frac{1.2708 + 1.2757}{2} \times 100$$

$$= 127.325$$

(*iv*) मार्शल-एजवर्थ का मात्रा सूचकांक या

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 P_0 + \Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_0 + \Sigma q_0 P_1} \times 100$$

$$= \frac{282.78 + 294.75}{222.52 + 231.05} \times 100$$

$$= 127.329$$

(*v*) फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा मात्रा सूचकांक या

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 P_0}{\Sigma q_0 P_0} \times \frac{\Sigma q_1 P_1}{\Sigma q_0 P_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{282.78}{222.52} \times \frac{294.75}{231.05}} \times 100$$

$$= 1.273 \times 100$$

$$= 12.3$$

2. भारित मूल्यानुपात माध्य– भारित मूल्यानुपात माध्य के अंतर्गत निम्नलिखित सूचकांकों को समझाया गया है–

जैसा कि पहले बताया गया है कि आधार नियत या परिवर्तनशील हो सकते हैं। यह नियत कहा जाता है जब तुलना की अवधि या आधार वर्ष सभी वर्त्तमान वर्षों के लिए नियत हो। इस प्रकार, यदि 1971, 1972, 1973 एवं 1974 का सूचकांक 1970 को आधार मानकर ज्ञात किया जाए तो इस प्रकार के सूचकांक को हम नियत आधार सूचकांक कहते हैं। वहीं दूसरी ओर, सूचकांक संख्याओं की सम्पूर्ण श्रेणी किसी एक आधार वर्ष से संबंधित नहीं होती है लेकिन विभिन्न वर्षों के सूचकांक प्रत्येक वर्ष के मूल्य को उससे

टिप्पणी

पूर्व के साथ जोड़कर प्राप्त किए जाते हैं, तो इस प्रकार के सूचकांक को शृंखला आधार सूचकांक कहते हैं। उदाहरणस्वरूप, शृंखला आधार सूचकांक की स्थिति में, 1974 के लिए 1973 आधार होगा, 1973 के लिए 1972 आधार होगा, 1972 के लिए 1971 आधार होगा और आगे भी इसी प्रकार से। शृंखला आधार सूचकांक द्वारा प्राप्त संबंधों को संबंधित संबंध कहते हैं। जहाँ नियत आधार विधि द्वारा प्राप्त संबंधों को शृंखला संबंध कहते हैं।

उदाहरण– निम्नलिखित आँकड़े 6 वर्षों के लिए गेहूं के थोक मूल्यों को दर्शाते हैं।

(*a*) 1980 को आधार मानकर एवं

(*b*) शृंखला आधार विधि द्वारा सूचकांक संख्याओं की रचना करें।

साल	मूल्य (प्रति क्विंटल)	साल	मूल्य (प्रति क्विंटल)
1980	100	1983	130
1981	120	1984	140
1982	125	1985	150

हल– 1980 को आधार मानकर सूचकांक संख्याओं का परिकलन

साल	गेहूं का मूल्य	सूचकांक संख्या	साल	गेहूं का मूल्य	सूचकांक संख्या
1980	100	100	1983	130	$\frac{130}{100}\times 100 = 130$
1981	120	$\frac{120}{100}\times 100 = 120$	1984	140	$\frac{140}{100}\times 100 = 140$
1982	125	$\frac{125}{100}\times 100 = 125$	1985	150	$\frac{150}{100}\times 100 = 150$

(*ii*)शृंखला मूल्यानुपात सूचकांक की रचना (शृंखला आधार विधि)

साल	गेहूं का मूल्य	शृंखला मूल्यानुपात सूचकांक	साल	गेहूं का मूल्य	शृंखला मूल्यानुपात सूचकांक
1980	100	100	1983	130	$\frac{130}{125}\times 100 = 104$
1981	120	$\frac{120}{100}\times 100 = 120$	1984	140	$\frac{140}{130}\times 100 = 107.692$
1982	125	$\frac{125}{120}\times 100 = 104.167$	1985	150	$\frac{150}{140}\times 100 = 107.14$

मूल्य सूचकांक संख्याएँ

मूल्य का तात्पर्य है मात्रा एवं मूल्य का गुणन। अत: एक मूल्य सूचकांक 'V' किसी दिए गए साल के मानों के योग में आधार वर्ष के मान के योग से भाग देना है। इस प्रकार सूत्र है,

$$V = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_0} \times 100$$

जहाँ V= मूल्य सूचकांक

चूंकि बहुत सी स्थितियों में सूत्र में दिए गए मानों को इस प्रकार से निरूपित किया जा सकता है :–

$$V = \frac{\Sigma V_1}{\Sigma V_0}$$

इस प्रकार के सूचकांक में मूल्य एवं मात्रा दोनों अंश में चर हैं। भारों का उपयोग नहीं किया जाता है क्योंकि ये मानों में अंतर्निहित है। अत: एक मूल्य सूचकांक मानों का कुल समाकलन है।

श्रृंखला मूल्यानुपातों का श्रृंखला अनुपातों में परिवर्तन

श्रृंखलानुपात या श्रृंखला सूचकांक या तो सीधे प्राप्त किए जा सकते है याश्रृंखला मूल्यानुपात कोश्रृंखला अनुपात में बदल कर जिसके लिए निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है:

वर्तमान वर्ष के लिए श्रृंखलानुपात

$$= \frac{\dfrac{\text{वर्तमान वर्ष के लिए}}{\text{श्रृंखला मूल्यानुपात}} \times \dfrac{\text{विगत वर्ष के लिए}}{\text{श्रृंखलानुपात}}}{100}$$

आधार परिवर्तन

कभी-कभी एक अवधि से दूसरी अवधि में आधार को परिवर्तित करना आवश्यक होता है। ऐसा इसलिए आवश्यक हो जाता है कि या तो पूर्व का आधार इतना पुराना और बेकार हो गया है कि तुलनात्मक उद्देश्यों में उसका उपयोग नहीं किया जा सकता है या फिर तुलना विभिन्न आधार अवधियों वाले सूचकांक संख्याओं की दूसरी श्रेणी से किया जाना है। ऐसा दो तरहों से किया जा सकता है:

(*i*) नए आधार के साथ श्रेणी का पुनर्निर्माण कर। इसका तात्पर्य है कि प्रत्येक व्यक्तिगत मदों के मूल्यों का उसके नए आधार के साथ निर्माण कर एक संपूर्ण नई श्रेणी तैयार की जाती है।

(*ii*) लघु रीति का उपयोग कर जो इस प्रकार है : श्रेणी के प्रत्येक सूचकांक संख्याओं को नए आधार के रूप में चयनित समयावधि के सूचकांक संख्या से भाग दें एवं भागफल को 100 से गुणा करें।

टिप्पणी

सांकेतिक रूप में,

सूचकांक संख्या (नए आधार वर्ष पर आधारित)

$$= \frac{\text{वर्तमान वर्ष का पुराना सूचकांक संख्या}}{\text{नए आधार वर्ष का पुराना सूचकांक संख्या}} \times 100$$

संयोजन

कभी-कभी सूचकांक संख्याओं की श्रेणी असतत् होती है क्योंकि इसका आधार काफी पुराना होकर अपनी पहचान खो देता है। सूचकांक संख्याओं की एक नयी श्रेणी का परिकलन कुछ नए आधार वर्ष के साथ किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक सूचकांक संख्या का भार पुराना हो जाता है तब नए भारों के साथ एक नयी श्रेणी की रचना की जाती है। इससे सूचकांक संख्याओं की दो श्रेणियाँ बनती हैं। कभी-कभी यह आवश्यक हो जाता है कि सूचकांक संख्याओं की दोनों श्रेणियों को संयोजित कर एक संतत श्रेणी बनाई जाए। सूचकांक संख्याओं की एक पुरानी श्रेणी को एक संशोधित श्रेणी के साथ जोड़कर एक सतत् श्रेणी की रचना करने की विधि को संयोजन कहते हैं। संयोजन की विधि बहुत साधारण है एवं उस विधि के समान है जो आधार परिवर्तन के लिए अपनाई जाती है। संयोजित सूचकांक संख्याओं का परिकलन निम्नलिखित सूत्र से किया जाता है–

नया आधार वर्ष संयोजित

$$\text{सूचकांक संख्या} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष का पुराना सूचकांक सं.} \times \text{पुरानी सूचकांक सं.}}{100}$$

उदाहरण– सूचकांक A को 1969 में शुरू किया गया एवं 1975 तक जारी रहा जिसमें एक दूसरा सूचकांक B शुरू किया गया। सूचकांक B को सूचकांक A से संयोजित कर 1969 से अब तक के लिए सूचकांक संख्याओं की नई श्रेणी की रचना करें :

साल	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
(A) ससूचकांक सं.	100	120	130	200	300	350	400
(पुराना वर्ष)	1975	1976	1977	1978	1979	1980	
(B) सूचकांक सं. (नया)	100	110	90	110	98	96	

हल– सूचकांक B का संयोजन सूचकांक A के साथ किया जाता है

साल	पुरानी सूचकांक संख्याएँ	नयी सूचकांक संख्याएँ	सूचकांक B का संयोजन सूचकांक A के साथ (आधार 1969 = 10)
1969	100		
1970	120		
1971	130		

1972	200		
1973	300		
1974	350		
1975	400	100	$\frac{400 \times 100}{100} = 400$
1976		110	$\frac{400 \times 110}{100} = 440$
1977		90	$\frac{400 \times 90}{100} = 360$
1978		110	$\frac{400 \times 110}{100} = 440$
1979		98	$\frac{400 \times 98}{100} = 382$
1980		96	$\frac{400 \times 96}{100} = 384$

नए एवं पुराने सूचकांक संख्याओं के बीच तुलनात्मक अध्ययन के लिए संयोजन बहुत ही उपयोगी है।

वियोजन

वियोजन एक विधि है जो परिवर्तनशील मूल्य स्तरों के प्रभावों को स्वीकृति प्रदान करता है। बढ़ते हुए मूल्य-स्तर के साथ मुद्रा की क्रय-क्षमता घटती है। इसके परिणामस्वरूप, वास्तविक मूल्य का मान घटता है एवं वास्तविक मूल्य मौद्रिक मूल्य से कम हो जाता है। वास्तविक मूल्य मान प्राप्त करने के लिए मौद्रिक मान को मल्यों के स्तर बढ़ने की हद तक घटाया जाता है। मौद्रिक मूल्यों में सूचकांक संख्याओं का उपयोग कर वास्तविक मूल्यों को ज्ञात करने की प्रक्रिया, जो मूल्य स्तरों में परिवर्तन स्वीकृति करती है, वियोजन कहलाती है। अत: वियोजन एक प्रक्रिया है जिसके द्वारा मौद्रिक मूल्यों एवं आयों की श्रेणी को मूल्य-परिवर्तन के लिए संशोधित किया जा सकता है ताकि वास्तविक मूल्यों व आयों का स्तर ज्ञात किया जा सके।

यह निम्नलिखित सूत्र की मदद से किया जाता है:

$$\text{वास्तविक मूल्य} = \frac{\text{मैट्रिक मूल्य}}{\text{मूल्य सूचकांक}} \times 100$$

$$\text{वास्तविक मूल्य सूचकांक} = \frac{\text{वर्तमान वर्ष के लिए वास्तविक मूल्य}}{\text{आधार वर्ष के लिए वास्तविक मूल्य}} \times 100$$

जीवन निर्वाह लागत सूचकांक या उपभोक्ता मूल्य सूचकांक संख्याएँ

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक संख्या, मजदूरी करने वाले परिवारों द्वारा बनाए गए वस्तुओं एवं सेवाओं के मूल्यों में परिवर्तन की एक सांख्यिक माप है। एकत्रित किए गए मूल्य भोजन, कपड़ा, भाड़ा, ईंधन, दवा, परिवहन, बिजली, मनोरंजन आदि जैसी मदों के थोक मूल्य होते हैं।

यह सूचकांक उपभोक्ताओं के जीवन स्तर से जुड़े कुछ चयनित समानों के संचयनों के मूल्यों में परिवर्तन के प्रभावों का अध्ययन करता है। सामान्य मूल्य सूचकांक संख्याएँ ऐसा नहीं कर सकती हैं।

टिप्पणी

जीवन निर्वाह लागत सूचकांक संख्याएँ आर्थिक सूचक की तरह उसी रूप में कार्य करती हैं जैसे मुद्रा की क्रय-क्षमता मापने में थोक मूल्य सूचकांक संख्याएँ कार्य करती हैं।

इन सूचकांक संख्याओं का अलग-अलग संकलन निम्नलिखित के लिए किया जाता है:

(*i*) लोगों के विभिन्न वर्गों के लिए

(*ii*) विभिन्न क्षेत्रों या समान क्षेत्रों के लिए

(*iii*) विभिन्न समय-अन्तरालों के लिए

(*iv*) विभिन्न पेशाओं के लिए

इसका कारण यह है कि प्रत्येक वर्ग व क्षेत्रों का अपने समानों के प्रति अलग चुनाव होता है जिसका गुण एवं मात्रा समय-दर-समय एवं स्थान-दर-स्थान के लिए भिन्न होता है। इतना ही नहीं, थोक मूल्य, जो जीवन निर्वाह सूचकांक संख्याओं का आधार होता है, समय-दर-समय एवं स्थान-दर-स्थान बदलते रहते हैं।

रचना

जीवन निर्वाह लागत सूचकांक संख्यओं की रचना में प्रयुक्त चरण, सामान्य सूचकांक संख्या की रचना हेतु प्रयुक्त चरणों के ही समान होते हैं।

(*i*) सर्वप्रथम लोगों का समूह, जिसके लिए सूचकांक संख्या की रचना होती है, निर्धारित किया जाता है।

(*ii*) समूह के प्रतिदर्श परिवारों की बजट संबंधी जाँच-पड़ताल की जाती है।

(*iii*) उन मदों को सम्मिलित किया जाता है जो समूह के लोगों द्वारा साधारणतया उपयोग किए जाते हैं।

(*iv*) इन मदों की मूल्य सूची उन क्षेत्रों से प्राप्त की जाती है जहाँ पर ये लोग रहते हैं या जहाँ से वे खरीदारी करते हैं।

(*v*) विभिन्न सामानों, जो अपनी उपयोगिता पर निर्भर करते हैं जैसा कि पारिवारिक बजटों की छान-बीन से पता चलता है, को उपयुक्त प्रदान किया जाता है। जीवन निर्वाह लागत सूचकांक संख्याएँ वास्तविक मूल्यों के भारित समूहन या मूल्य अनुपातों के भारित माध्य द्वारा परिकलित की जाती है।

जीवन निर्वाह लागत सूचकांक संख्याओं की सीमाएँ

(*i*) गलत या अप्रदर्शित मदों के चयन की संभावना।

(*ii*) जीवन-स्तर के परिवर्तनों का न मापा जा सकना।

(*iii*) स्फीति के प्रभावों का अपर्याप्त परावर्तन, काला-बाजारी मूल्य, गुणों में परिवर्तन, सामान आदि।

टिप्पणी

(*iv*) भारों का एच्छिक कार्यभार।

(*v*) परिवारों के अनुभवों का अप्रदर्शन।

(*vi*) पुर्नगणना की बार-बार आवश्यकता।

4.3.3 सूचकांक निर्माण की समस्याएं एवं सीमाएं

विभिन्न प्रकार के सूचकांकों को निकालने में विभिन्न प्रकार की समस्याएँ आती हैं। हम यहाँ उन समस्याओं की चर्चा करेंगे, जिन्हें मूल्यों के सूचकांक निकालने से पहले अवश्य हल कर लेना चाहिए।

प्रयोजन परिभाषा

यह आवश्यक है कि सूचकांक का उद्देश्य अच्छी तरह परिभाषित हो। यह संग्रह किए जाने वाले आँकड़े की प्रकृति, आधार वर्ष के चुनाव, प्रयुक्त सूत्र एवं अन्य संबंधित बातों के निर्णय में सहायक होगा। उदाहरण के लिए, यदि सूचकांक का उद्देश्य उपभोक्ता मूल्यों की माप करना है तो इसमें थोक मूल्य अवश्य शामिल नहीं होना चाहिए। इसी प्रकार, यदि एक उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का उद्देश्य कम आय वाले परिवारों के जीवन निर्वाह लागत में परिवर्तनों की माप करना है, तब इस बात का अधिक ध्यान रखा जाना चाहिए कि इसमें उच्च आय एवं मध्यम आय वाले परिवारों द्वारा प्रयुक्त वस्तुओं को सम्मिलित नहीं किया जाए। वास्तव में, सूचकांक निकालने से पहले, हमें यह अवश्य पता होना चाहिए कि हम किसकी माप करना चाहते हैं एवं इस माप के उपयोग का उद्देश्य क्या है।

आधार अवधि का चयन (Selection of a Base Period)

विभिन्न समयावधियों से संबंधित मूल्यों के बीच तुलना करने के लिए, संदर्भ का कुछ बिन्दु लगभग स्थापित होना चाहिए। संदर्भ का यह बिन्दु आधार अवधि कहलाता है। किसी समयावधि के मूल्य मानक के रूप में लिए जाते हैं एवं 100 प्रतिशत के परिमाण के रूप में निर्धारित किए जाते हैं। यद्यपि आधार अवधि का चयन मूलत: सूचकांक के उद्देश्य पर निर्भर करेगा, आधार के में चुनाव में दो महत्त्वपूर्ण दिशानिर्देशों पर विचार करना आवश्यक है।

(*i*) आधार वर्ष को सामान्य एवं स्थायी आर्थिक स्थितियों वाला वर्ष होना चाहिए। इसे असमान्यताओं एवं यादृच्छ या अनियमित उच्चावचनों जैसे युद्ध, भकम्प, अकाल, हड़ताल, ताला-बंदी, उछाल, गिरावटें आदि से स्वतन्त्र होना चाहिए। कभी-कभी एक साल का चयन कठिन होता है जो सभी स्थितियों में सामान्य हो। ऐसी परिस्थितियों में हम कुछ सालों के माधय को आधार के रूप में ले सकते हैं। माध्य विधि आधिक्य के प्रभाव को कम कर देती है।

(*ii*) आधार वर्ष को विगत वर्ष से अधिक दूरस्थ नहीं होना चाहिए। चूंकि सूचकांक संख्याएँ निर्णय लेने में उपयोगी होती हैं एवं आर्थिक गतिविधियाँ प्राय: कम समय के लिए होती है इसलिए हमें उस आधार का चुनाव करना चाहिए जो अधययन में सम्मिलित वर्ष के काफी निकट हो। यदि आधार वर्ष विगत वर्ष से अधिक दूरस्थ हो तो हम वैध एवं सार्थक तुलनात्मक अधययन नहीं कर पाएँगे क्योंकि उस

अन्तराल में लोगों के स्वाद, रीति-रिवाजों, आदतों आदि में कुछ परिवर्तन अवश्य होंगे। यह विभिन्न वस्तुओं की उपभुक्ता प्रतिभूतियों को एक निश्चित हद तक प्रभावित करती है और तुलना को कठिन बनाती है।

नियत आधार एवं शृंखला आधार

आधार वर्ष के चयन के समय इस बात का निर्णय लिया जाता है कि आधार नियत होगा या नहीं। यदि तुलना का समय सभी वर्तमान वर्षों के लिए नियत हो तो उसे नियत आधार विधि कहा जाता है। वहीं दूसरी ओर, यदि वर्तमान वर्ष का मूल्य विगत वर्ष के मूल्यों से संबंधित हो एवं नियत वर्ष या अवधि के साथ न हो तो उसेशृंखला आधार विधि कहते हैं।शृंखला आधार विधि उन स्थितियों में उपयोगी होता है जहाँ लोगों के फैशन, स्वाद एवं आदतों में तुरन्त और लगातार परिवर्तन होता हो। ऐसी दशाओं में विगत वर्षों के साथ तुलनात्मक अध्ययन ज्यादा महत्वपूर्ण होती हैं।

वस्तुओं या मदों का चुनाव

सूचकांक संख्या की रचना करते समय सभी मदों को सम्मिलित करना, जिसके मूल्य-परिवर्तन सूचकांक संख्या के द्वारा निरूपित होते हैं, असम्भव है। इसलिए एक प्रतिदर्श के चयन की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए एक सामान्य उद्देश्य वाले थोक मूल्यों के सूचकांक की रचना करते समय सभी मदों को शामिल करना असम्भव होता है। इसलिए संपूर्ण समूह में से केवल कुछ ही प्रदर्शनीय मदों का केवल चुनाव किया जाता है।

प्रतिदर्श के चुनाव के समय निम्नलिखित बातों का धयान रखा जाना चाहिए :—

(*i*) चयनित वस्तु का मद को, लोगों के स्वाद, रीति-रिवाजों एवं आवश्यकताओं जिससे सूचकांक संख्याएँ संबंधित होती हैं, दर्शाना चाहिए।

(*ii*) इसे गुणात्मक दृष्टिकोण से स्थायी होना चाहिए एवं जहाँ तक संभव हो सके इसे स्तरीय होना चाहिए ताकि कुछ समय बीत जाने के बाद भी वो आसानी से पहचाना जा सके।

(*iii*) प्रतिदर्श को यथासंभव विशाल होना चाहिए। सैद्धान्तिक रूप से, मदों की संख्या जितनी बड़ी होगी, सूचकांक संख्या उतना ही सटीक परिणाम देगा। लेकिन इस बात का अवश्य धयान रखा जाना चाहिए कि मदों की संख्या यदि बड़ी होगी तो लागत और समय भी ज्यादा होगी। अत: मदों की संख्या, सूचकांक के उद्देश्य एवं उपलब्ध कोष के आधार और सूचकांक संख्या की रचना में लगे समय, के आधार पर निर्धारित की जाती है।

(*iv*) चूँकि बाजार में विभिन्न प्रकार की वस्तुएँ बेची जाती हैं, निर्णय लेना पड़ता है कि किस प्रकार को सूचकांक में सम्मिलित किया जाए। साधारण रूप में, सामान्य प्रयोग में आने वाली सभी वस्तुएँ सम्मिलित की जानी चाहिए एवं किसी वस्तु के लिए अतिरिक्त भार से बचना चाहिए, इन प्रकारों के मूल्यों का सूचकांक निकालने से पहले औसत निकालना चाहिए।

टिप्पणी

मूल्य दर ज्ञात करना

मदों का चयन करने के बाद अगला प्रश्न है मूल्यों को एकत्रित करना। एक समान बाजार में बाजार में वस्तु का मूल्य स्थान-दर-स्थान एवं दुकान-दर-दुकान परिवर्तित होता है। चूँकि यह संभव नहीं है कि सभी मदों को एक सूचकांक-संख्या में शामिल किया जाए। इसलिए एक चुनाव आवश्यक है जो स्थानों एवं दुकानों को निरूपित कर सके। साधारणत: ऐसे स्थान एवं दुकानों का चुनाव किया जाता है जहाँ बड़ी मात्रा में वस्तुआं को खरीद कर बेचा जा सके। स्थानों और दुकानों का चुनाव करने के बाद जहाँ मूल्य दर प्राप्त किए जाते हैं, अगला कदम है कुछ प्रतिनिधियों की नियुक्ति करना जो समय-दर-समय मूल्य दरों संबंधित सूचनाएँ प्रदान करते हैं। इन प्रतिनिधियों की नियुक्ति के समय इस बात का ध्यान रखा जाता है कि वे निष्पक्ष एवं विश्वसनीय हों। यदि मूल्य दर कुछ विश्वसनीय संगठनों द्वारा प्रकाशित किए जाते हैं तो जर्नल एवं पत्रिकाओं के रूप में इन मूल्य दरों का उपयोग किया जा सकता है।

चूँकि मूल्य दो तरह से उद्धृत किए जा सकते हैं या तो वस्तु की मात्रा मुद्रा की प्रति इकाई के रूप में या मुद्रा की मात्रा को प्रति इकाई वस्तु के रूप में, इन दोनों रूपों में से मूल्य दर व्यक्त करने से संबंधित एक निर्णय लिया जाता है। दूसरी विधि जो मुद्रा को प्रति इकाई वस्तु के रूप में व्यक्त करना है, मुख्यत: प्रयुक्त होती है एवं दुविधाओं से स्वतंत्र होती है। इसलिए यह बेहतर है कि एक वस्तु X का मूल्य 50 पैसे प्रति किलोग्राम के रूप में व्यक्त किया जाए न कि 2 किलो प्रति इकाई रुपया।

मूल्य दर से संबंधित अन्य निर्णय यह है कि थोक मूल्य या खुदरा मूल्य संग्रह किए जाने हैं या नहीं। यह सूचकांक के उद्देश्य पर निर्भर करेगा। उदाहरण के लिए, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की स्थिति में, थोक मूल्य बिल्कुल ही प्रतिनिधिक नहीं होते, क्योंकि सभी उपभोक्ता अपने सामान थोक में नहीं खरीदते। इसी प्रकार, यदि कुछ वस्तुओं के मूल्यों को सरकार द्वारा नियंत्रित किया जाता है, तब ऐसे नियंत्रित मूल्यों को भी इसमें शामिल नहीं करना चाहिए और न ही ब्लैक मार्केट मूल्यों को जो काफी ऊँचे होते हैं।

मूल्य दर से संबंधित दूसरा निर्णय प्रत्येक माह या सप्ताह संग्रहित मूल्य दरों की संख्या से संबंधित है। सामान्यत: दरों की बड़ी संख्या, बेहतर होता है। साधारण रूप से, हालांकि साप्ताहिक सूचकांक की स्थिति में प्रति सप्ताह न्यूनतम दर एवं मासिक सूचकांक की स्थिति में प्रति मास न्यूनतम चार दर। मूल्य दरों की बारम्बारता के निर्धारण में, इस मुख्य दिशानिर्देश का पालन करना चाहिए कि दरों की संख्या ऐसी हो दरों की आपूर्ति करने वाली एजेंसी इसे आसानी से एवं नियमित रूप से भेज सकें।

माध्य का चुनाव

चूँकि सूचकांक संख्या विशिष्ट माध्य होते हैं, इसलिए यह निर्णय लिया जाना आवश्यक है कि सूचकांक संख्या का निर्माण करने के लिए किस विशेष माध्य (जैसे, समान्तर माध्य, बहुलक, माध्यिका, हरात्मक माध्य व गुणोत्तर माध्य) का प्रयोग करना चाहिए। बहुलक, माध्यिका एवं हरात्मक माध्यों का उपयोग कभी भी सूचकांक संख्या का निर्माण करने में नहीं होता है।

अत: समान्तर माध्य एवं गुणोत्तर माध्यों में एक का चुनाव किया जाता है। यद्यपि सैद्धान्तिक रूप से गुणोत्तर माध्य इस उद्देश्य के लिए बेहतर है एवं गणन संक्रियाओं में आसानी होने की वजह से समान्तर माध्य बहुत ज्यादा प्रयुक्त होते हैं।

भारों का चुनाव

सूचकांक संख्याओं में सम्मिलित सभी मदें समान महत्व की हैं। इसलिए यह आवश्यक है कि कुछ उपयुक्त विधियाँ विकसित की जाएँ जिसके द्वारा विभिन्न मदों के परिवर्तनशील महत्वों पर विचार किया जाए। ऐसा भार प्रदान किया जाता है। पद 'भार' सूचकांक के निर्माण में विभिन्न मदों के आपेक्षिक महत्त्व को संबोधित करता है।

भार प्रदान करने की दो विधियाँ हैं: (*i*) अप्रत्यक्ष एवं (*ii*) प्रत्यक्ष। अप्रत्यक्ष भारण में, एक माल या उसकी विविधाताओं को सूचकांक में विभिन्न मदों के महत्त्वों के कुछ बाह्य प्रमाण होते हैं। प्रत्यक्ष भार दो प्रकार के होते हैं : (*i*) मात्रा भार एवं (*ii*) मूल्य भार। मात्रा भार का अर्थ है उत्पन्न माल की मात्रा जो किसी विशेष समय अंतराल में उपभुक्त या वितरित होते हैं। मात्रा भारों का प्रयोग सूचकांक संख्या का निर्माण करने के लिए सम्मिलित विधि का उपयोग किया जाता है। दूसरी ओर, यदि आपेक्षित मूल्य की माध्य विधि का प्रयोग किया जाता है तब मूल्यों को भार के रूप में उपयोग किया जाता है।

एक उपयुक्त सूत्र का चयन

सूचकांक संख्याओं का निर्माण करने के लिए बहुत-से सूत्रों का प्रतिपादन किया गया है। इसलिए यह निर्णय लेना आवश्यक है कि उस उद्देश्य के लिए कौन-सा सूत्र ज्यादा उपयुक्त होगा। सूत्रों का चुनाव मूल या वर्तमान वर्ष में चयनित मालों के मूल्य एवं मात्रा संबंधित आँकड़ों की उपलब्धता पर निर्भर करता है।

सीमाएं

सूचकांक व्यक्तियों की आर्थिक नीति के समझने में अत्यंत उपयोगी है किंतु सूचकांक के कुछ सीमाएं हैं जो निम्नलिखित है-

1. सूचकांक द्वारा समस्याओं का समाधान स्पष्ट नहीं होता है, इसके द्वारा प्राप्त होने वाले परिणाम लगभग ठीक नहीं होते हैं इसलिए इनके द्वारा प्राप्त परिणाम पूर्ण रूप से विश्ववसनीय नहीं होते हैं।
2. सूचकांक सामान्यतया नमूनों पर निर्भर करता है। यदि प्राप्त किये गए नमूने संपूर्ण क्षेत्र या मूल्य का प्रतिनिधित्व नहीं करता है तो ज्ञात किया गया सूचकांक गलत हो सकता है।
3. विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए सूचकांक की रचना की जाती है, जैसे- मात्रा परिवर्तन, भार परिवर्तन या मूल्य परिवर्तन। अत: इसका उपयोग अन्य उद्देश्यों के लिए नहीं किया जा सकता है।
4. सूचकांक द्वारा हम अंतर्राष्ट्रीय तुलना नहीं कर सकते हैं क्योंकि यह केवल किसी अर्थव्यवस्था की झलक को दर्शाता है।
5. सूचकांक की रचना करते समय गलत आधार वर्ष, अनुपयुक्त भार, गलत सूत्र आदि गलत होने पर गड़बड़ी अधिक होने की संभावना होती है। इस तरह से इस प्रकार की रचना का परिणाम भी गलत हो सकता है।

सूचकांक संख्याओं के उपयोग एवं महत्व

सूचकांक संख्याएँ आर्थिक एवं व्यवसायिक स्थितियों के विश्लेषण के लिए अनिवार्य हो गई हैं यद्यपि ये सभी विज्ञान के क्षेत्रों – प्राकृतिक, सामाजिक एवं भौतिक में उपयोग की जाती हैं। सूचकांक संख्याओं के महत्त्वपूर्ण उपयोगों को निम्नलिखित रूप में दर्शाया जा सकता है :–

(1) ये उपयुक्त नीतियों के निर्धारण में मदद करते हैं

मूल्यों, उत्पादन, लाभों, आयातों एवं निर्यातों, मानवों एवं वित्तीय मुद्दों से संबंधित आँकड़ों की सूचकांक संख्याएँ किसी भी संगठन के लिए उपयुक्त नीतियों के निर्धारण एवं कार्यकर्ताओं के निर्णयों के प्रतिपादन के लिए अनिवार्य है। उदाहरण के लिए, जीवन निर्वाह लागत सूचकांक संख्याएँ, कार्यपालकों को अपने कार्यकर्त्ताओं के महँगाई भत्ता में वृद्धि संबंधी निर्णयों या उनके वेतन एवं मजदूरी को उनके जीवन-स्तर में परिर्वन के अनुसार समायोजित करने में, मदद करती हैं।

(2) सूचकांक संख्याएँ चलन एवं प्रवृत्तियों के अध्ययन में मदद करती हैं

चूंकि सूचकांक संख्याएँ किसी समयावधि में घटना के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन का अध्ययन करती हैं, तो इस प्रकार से बनी काल-श्रेणी हमें घटनाओं के सामान्य प्रवृत्ति के अध्ययन योग्य बनाती हैं। उदाहरण के लिए, भारत में विगत दस सालों के थोक मूल्यों की सूचकांक संख्याओं का अध्ययन कर हम कह सकते हैं कि भारत में सामान्य मूल्य स्तर उदग्र प्रवृत्ति दर्शाती है जो साल-दर-साल बढ़ रही है। इसी प्रकार, उत्पादन की सूचकांक संख्याओं का परीक्षण कर, व्यवसाय की मात्रा, आयात एवं निर्यात आदि जो विगत कुछ सालों के हैं, हम उत्पादन की प्रवृत्ति एवं व्यवसायिक कार्यकलापों के विषय में महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

(3) सूचकांक संख्याएँ वियोजन में काफी उपयोगी होती हैं

काल-श्रेणी विश्लेषण में, सूचकांक संख्याओं का उपयोग, मूल्य परिवर्तन के लिए मूल आँकड़ों को समायोजित करने में, किया जाता है और इस प्रकार असामान्य मजदूरी को वास्तविक मजदूरी में रूपान्तरित किया जाता है। और तो और असामान्य आय को वास्तविक आय में, एवं असामान्य विक्रय को वास्तविक विक्रय में उपयुक्त सूचकांक संख्याओं द्वारा रूपान्तरित किया जाता है।

अपनी प्रगति जांचिए

3. लास्परे विधि किस पर आधारित है

   (क) वर्तमान वर्ष (ख) आधार वर्ष

   (ग) औसत वर्ष (घ) गत वर्ष

4. फिशर का आदर्श सूचकांक किसका प्रयोग करता है?

   (क) हरात्मक माध्य (ख) भारित माध्य

   (ग) गुणोत्तर माध्य (घ) समांतर माध्य

4.4 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

टिप्पणी

1. (ख)
2. (ग)
3. (ख)
4. (ग)

4.5 सारांश

काल श्रेणी के ऐतिहासिक समंक किसी समयावधि में हुए परिवर्तनों से प्रभावित होते हैं। समंकों पर पड़ने वाले प्रभावों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्न वर्ग में वर्गीकृत किया जा सकता है।

चक्रीय उच्चावचन का अर्थ होता है नियमित उतार-चढ़ाव या वह प्रारूप जो एक दीर्घ समयांतराल में बार-बार आता है। परिवर्तन चक्रीय तभी कहलाते हैं यदि वे एक वर्ष से अधिक के समयांतराल में घटते हैं। ये वे परिवर्तन हैं जो आर्थिक तेजी या मंदी के परिणामस्वरूप होते हैं।

चल-माध्य विधि में, प्रत्येक अवलोकन, जिनका उपयोग चल-माध्य परिकलन में होता है, का समान महत्त्व होता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक मान चल माध्य के परिकलन में समान रूप से सहयोग देता है बिना समय-अन्तरालों की संख्या पर निर्भरता के। बहुत से वास्तविक स्थितियों में यह एक वास्तविक अवधरणा नहीं होती है।

अनियमित विचरण स्वभाव से यादृच्छ एवं परिलिखित नहीं होते हैं तथा कम समय अन्तरालों में उत्पन्न होते हैं। इस तरह वजह से हम गणितीय रूपों में इनकी व्याख्या नहीं कर सकते हैं।

सूचकांक एक विशेष प्रकार का औसत (माध्य) होता है। इन्हें समय, भौगोलिक स्थितियाँ या कुछ अन्य गुणों के संदर्भ में एक घटना के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन की माप के लिए बनाया गया है।

मूल्य सूचकांक निश्चित मालों के मूल्य-स्तर में परिवर्तन को मापता है। दूसरी ओर, मात्रा या सूचकांक संख्या उत्पादित, उपयोग किए गए या वितरित समानों की भौतिक मात्रा में परिवर्तन को मापता है।

मूल्य का तात्पर्य है मात्रा एवं मूल्य का गुणन। अत: एक मूल्य सूचकांक '*V*' किसी दिए गए साल के मानों के योग में आधार वर्ष के मान के योग से भाग देना है।

आधार वर्ष के चयन के समय इस बात का निर्णय लिया जाता है कि आधार नियत होगा या नहीं। यदि तुलना का समय सभी वर्तमान वर्षों के लिए नियत हो तो उसे नियत आधार विधि कहा जाता है।

4.6 मुख्य शब्दावली

टिप्पणी

- **सूचकांक :** सूचकांक दो या अधिक स्थितियों में संबंधित, पृथक चरों के एक समूह के विस्तार में अनुपातिक परिवर्तन की की माप करता है। सूचकांक का प्रयोग किसी समयावधि में मूल्यों, मजदूरी उत्पादन, रोजगार, राष्ट्रीय आय, इत्यादि में परिवर्तनों की माप में होता है।
- **मूल्य सूचकांक :** परिमाण सूचकांक अपने सामान्य रूप में आधार अवधि में कुल मूल्य की चालू अवधि में सभी वस्तुओं के कुल मूल्य से तुलना करता है।
- **परिमाण सूचकांक :** ये संख्याएँ उत्पादित, वितरित या उपमुक्त वस्तुओं के भौतिक परिमाणों में परिवर्तनों की माप करते हैं।
- **आधार अवधि :** इसका अर्थ वह संबंधित बिन्दु होता है जो मूल्यों के सूचकांक रचना में स्थापित होते हैं।
- **संयोजन :** संयोजन सूचकांक की पुरानी शृंखला से संशोधित शृंखला से इसे सतत् बनाने के लिए जोड़ने हेतु अपनाई गई प्रक्रिया है।
- **अवस्फीति :** इसे सामान्य मूल्य स्तर में गिरावट के रूप में परिभाषित किया जाता है।

4.7 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. काल श्रेणी से आप क्या समझते हैं?
2. दीर्घकालीन प्रवृत्ति से आप क्या समझते हैं?
3. मौसमी परिवर्तन तथा चक्रीय उच्चावनों में अंतर स्पष्ट कीजिए।
4. सूचकांक संख्याओं के विभिन्न उपयोग कौन–कौन से हैं?
4. सूचकांक के महत्व को समझाइए।

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. काल श्रेणी के विभिन्न घटकों का वर्णन कीजिए।
2. काल श्रेणी की योगात्मक एवं गुणात्मक प्रादर्श को स्पष्ट कीजिए।
3. आधार परिवर्तन से आप क्या समझते हैं? सूचकांक संख्याओं के आधार को परिवर्तित करना क्यों आवश्यक है?
4. किन कारणों से फिशर सूचकांक को आदर्श फिशर सूचकांक कहा जाता है?
5. सूचकांक संख्याओं के निर्माण में किन–किन बिंदुओं को ध्यान में रखना होता है। उनकी समस्या एवं सीमाओं का वर्णन कीजिए।

4.8 सहायक पाठ्य सामग्री

1. चंदन, जे. एस., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
2. मोंगा, जी. एस., 'मैथेमेटिक्स एंड स्टैटिसटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स', नई दिल्लीः विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
3. कोठारी, सी. आर., 'क्वांटिटेटिव टेकनिक', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
4. हुडा, आर. पी., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनोमिक्स', नई दिल्ली : मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड।
5. गुप्ता, एस. सी., 'फण्डामेन्टल ऑफ स्टैटिसटिक्स', नई दिल्ली हिमालया पब्लिशिंग हाउस।
6. गुप्ता, एस. पी., 'स्टैटिसटिकल मेथड्स', नई दिल्ली : एस चान्द एण्ड सन्स।

इकाई 5 प्रायिकता

टिप्पणी

संरचना

5.0 परिचय
5.1 उद्देश्य
5.2 प्रायिकता की अवधारणा
5.2.1 प्रायिकता के नियम
5.2.2 सशर्त प्रायिकता
5.2.3 द्विपद वितरण
5.3 अनुसंधान : अवधारणा एवं प्रकार
5.3.1 अनुसंधान के उद्देश्य
5.3.2 अनुसंधान के प्रकार
5.3.3 शोध के विभिन्न चरण
5.3.4 अनुसंधान चयन की समस्या
5.4 परिकल्पना : अवधारणा एवं प्रकार
5.4.1 परिकल्पना के प्रकार
5.4.2 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया
5.4.3 परिकल्पना का परीक्षण एवं त्राुटियां
5.5 अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन
5.5.1 प्रतिवेदन लेखन के उद्देश्य एवं सिद्धांत
5.5.2 प्रतिवेदन की रूपरेखा एवं महत्व
5.5.3 प्रतिवेदन लेखन की समस्याएं
5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर
5.7 सारांश
5.8 मुख्य शब्दावली
5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

5.0 परिचय

प्रायिकता या संयोग रोजमर्रा के जीवन में बोला जाने वाला बहुत ही साधारण शब्द है एवं संभव, संभाविता या होना सभी के समान अर्थ हैं।

प्रायिकता को किसी विशेष घटना के घटित होने के माप के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। यह शून्य एवं एक के बीच का एक अंकीय मान है जहाँ शून्य प्रायिकता किसी घटना के घटित न होने को एवं एक प्रायिकता किसी घटना के अवश्य घटित होने को दर्शाता है।

अनुश्चितता हमारे जीवन का एक अभिन्न अंग है। यद्यपि भविष्य के बारे में सही जानकारी होना मानवीय शक्ति से परे की बात है लेकिन इन भावी घटनाओं के प्रति हम अपना अनुमान प्राय: प्रायिकता के रूप में व्यक्त करते हैं चाहे अनुमान शतप्रतिशत सही हो या गलत। सामान्य जीवन में संभावना या प्रायिकता शब्द का प्रयोग अक्सर मिलता है।

बहुत से अनियंत्रित एवं अज्ञात चरों के प्रभाव की वजह से बहुत से निर्णयों का प्रतिफल बिल्कुल सटीक अनुमानित नहीं किया जा सकता है, इसीलिए यह आवश्यक

है कि सभी ज्ञात जोखिमों को वैज्ञानिक विधियों से जाँचा जाए। प्रायिकता सिद्धान्त को कभी-कभी अनिश्चितताओं का विज्ञान कहा जाता है जो इस तरह के मूल्यांकन में सहायक होते हैं। यह निर्णय लेने वाले को केवल सीमित सूचनाओं के जरिए जोखिम का विश्लेषण करने एवं उनमें से कम-से-कम जोखिम वाली रणनीति चुनने में सहायता करता है।

अनुसंधान द्वारा समस्या से संबंधित किसी नए ज्ञान की खोज के प्रयास किए जाते हैं। इस दिशा में कार्य आरंभ करने से पूर्व सबसे पहले अपने ज्ञान, सूचना तथा अनुभव के आधार पर एक संभावित कार्यकरण संबंध या पूर्वकल्पना का निर्माण कर लिया जाता है। पूर्वकल्पना के आधार पर ही ज्ञान की खोज की जाती है और इनके द्वारा अनुसंधान कार्य में आगे बढ़ने में हमें मदद प्राप्त होती है। इस प्रकार सांख्यिकीय अनुसंधान में पूर्वकल्पनाओं का निर्माण आवश्यक है।

इस इकाई में प्रायिकता की अवधारणा, अनुसंधान चयन की समस्या, परिकल्पना का परीक्षण व अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन को समझाया गया है।

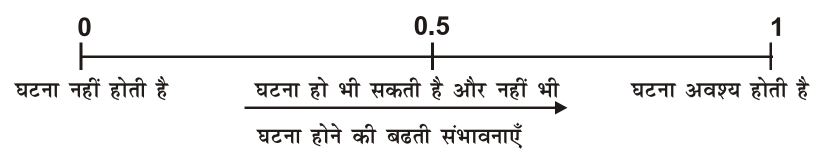
5.1 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप—

- प्रायिकता की अवधारणा को जान पाएंगे;
- अनुसंधान की अवधारणा एवं प्रकार की विवेचना कर पाएंगे;
- परिकल्पना की अवधारणा एवं प्रकार को समझ पाएंगे;
- परिकल्पना परीक्षण का विश्लेषण कर पाएंगे;
- अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन की प्रक्रिया को जान पाएंगे।

5.2 प्रायिकता की अवधारणा

प्रायिकता को किसी विशेष घटना के घटित होने की संभावना के माप के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। यह शून्य एवं एक के बीच का एक अंकीय मान है जहाँ शून्य प्रायिकता किसी घटना के घटित न होने की संभावना को एवं एक प्रायिकता किसी घटना के अवश्य घटित होने की संभावना को दर्शाता है। उदाहरण स्वरूप, यदि रेडियो की मौसम रिपोर्ट वर्षा के शून्य के करीब प्रायिकता को दर्शाता है तो इससे यह कहा जा सकता है कि वर्षा होने की संभावना नहीं है लेकिन यदि रिपोर्ट वर्षा होने की 90% संभावना को दर्शाता है तो हम समझते हैं कि वर्षा अवश्यंभावी है। 50% वर्षा होने की प्रायिकता या संभावना यह दर्शाती है कि वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी। इस संभाविता को इस तरह से दर्शाया जा सकता है:



भविष्य की घटनाओं से जुड़ी अनिश्चितताओं का मापन एवं उनका विश्लेषण करने हेतु प्रायिकता का सिद्धान्त हमें एक यांत्रिकी प्रदान करता है। प्रायिकता या तो व्यक्तिगत विचारों पर आधारित हो सकती है या तो वस्तुनिष्ठ हो सकती है। व्यक्तिगत विचारों पर आधारित प्रायिकता मूल रूप से व्यक्तिगत होती है ताकि एक व्यक्ति उपलब्ध सूचनाओं के आधार पर किसी विशेष घटना के परिणाम को अपने व्यक्तिगत अहसास, अनुभव, निर्णय एवं उम्मीदों के साथ प्रायिकता प्रदान कर सके। किसी एक ही घटना के परिणाम को दो विभिन्न व्यक्ति दो अलग-अलग प्रायिकताएँ प्रदान कर सकते हैं।

दूसरी तरफ, किसी घटना की वस्तुनिष्ठ प्रायिकता को उसके घटित होने की आपेक्षिक बारम्बारता के रूप में अंततः परिभाषित किया जा सकता है। दूसरे शब्दों में, किसी प्रतिफल की प्रायिकता जिसमें हम सम्मिलित होते हैं, अनुकूल प्रतिफल या सफल प्रतिफल कहा जाता है जो अनुकूल प्रतिफलों की संख्या में सभी प्रतिफलों की संख्या से भाग देकर परिकल्पित किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, यदि (S) सफल प्रतिफल की संख्या एवं (n) सभी प्रतिफल की संख्या दर्शाता है तो (s/n) द्वारा एक सफल प्रतिफल की प्रायिकता को दर्शाया जा सकता है।

प्रयोग—एक प्रयोग कोई भी क्रियाकलाप है जो आँकड़े देता है। उदाहरणस्वरूप, एक सिक्के का उछाला जाना एक सांख्यिकीय प्रयोग है। एक प्रयोग की पहचान दो गुणों के आधार पर होती है:

(*i*) प्रत्येक प्रयोग के कई संभव प्रतिफल होते हैं एवं ये सारे प्रतिफल पहले से ही ज्ञात होते हैं।

(*ii*) किसी भी प्रतिफल का अनुमान निश्चित तौर पर नहीं लगाया जा सकता है।

इस उदाहरण में, हम आश्वस्त नहीं होते कि प्रतिफल 'हेड' होगा या 'टेल'। कुछ प्रयोग एवं उसके संभव प्रतिफल इस तरह से दिए जा सकते हैं :—

प्रयोग	**संभव प्रतिफल**
1. एक सिक्के का उछाला जाना	हेड, टेल
2. पासे का फेंका जाना	$1, 2, 3, 4, 5, 6$
3. एक उत्पाद लॉट से एक मद का चयन	अच्छा, खराब
4. एक नए उत्पाद का लाया जाना	सफलता, असफलता

प्रायिकता : स्वयंसिद्ध, विशिष्ट एवं आपेक्षिक बारम्बारता

प्रायिकता सिद्धान्त को संयोग का सिद्धान्त भी कहा जाता है और उसे मानक सूत्रों द्वारा गणितीय विधि से व्युत्पन्न किया जा सकता है। किसी प्रायिकता को एक वास्तविक संख्या, $p \in [0, 1]$ के रूप में व्यक्त किया जाता है तथा प्रायिकता संख्या को प्रतिशतता (0 प्रतिशत से 100 प्रतिशत के बीच) के रूप में व्यक्त किया जाता है न कि दशमलव में। उदाहरणस्वरूप, 0.55 की प्रायिकता को 55 प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। जब हम कहते हैं कि कोई प्रायिकता 100% है तो इसका अर्थ है कि घटना अवश्यम्भावी है जबकि 0% का तात्पर्य है कि घटना असम्भव है। हम एक प्रतिफल की प्रायिकता को अनुपात के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरणस्वरूप, हमारे पास दो प्रायिकताएँ

हैं, जो, 'जीतने की संभावना' (1/4) एवं 'हारने की संभावना' (3/4), तब गणितीय सूत्रों का उपयोग कर हम कह सकते हैं,

'जीतने की संभावना' : 'हारने की संभावना' = 1/4 : 3/4 = 1 : 3

टिप्पणी

जब हम भविष्य का अनुमान लगाते हैं तो प्रायिकता को अस्पष्ट रूप में उपयोग करते हैं। उदाहरणस्वरूप, हम कह सकते हैं कि कल वर्षा होगी शायद या शायद कल अवकाश होगा। यह किसी व्यक्ति के व्यक्तिगत विचारों पर आधारित प्रायिकता है जो अनुमान लगाता है लेकिन प्रायिकता के 50% से अधिक होने में विश्वास करता है।

विभिन्न प्रकार के प्रायिकता सिद्धान्त निम्नलिखित हैं :

(*i*) प्रायिकता का विशिष्ट सिद्धान्त

(*ii*) प्रायिकता का स्वयंसिद्ध सिद्धान्त

(*iii*) अनुभव के आधार पर प्रायिकता का सिद्धान्त

(1) प्रायिकता का विशिष्ट सिद्धान्त

प्रायिकता का विशिष्ट सिद्धान्त अनुकूल प्रतिफलों की संख्या एवं सभी प्रतिफलों की संख्या पर आधारित है। प्रायिकता को इन दोनों संख्याओं के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है। 'अनुकूल' शब्द व्यक्तिगत मान नहीं है जो प्रतिफलों को प्रदान किया जाता है बल्कि एक विशिष्ट शब्दावली का उपयोग किया जाता है यह दर्शाने के लिए कि एक प्रतिफल दिए गए एक घटना से संलग्न हैं।

प्रायिकता की विशिष्ट परिभाषा

यदि किसी घटना (E) के प्रतिफलों की संख्या N_E है एवं सभी प्रतिफलों की संख्या N है तो किसी घटना की प्रायिकता E को $p_E = \frac{N_E}{N}$ के पदों में परिभाषित किया जाता है।

उदाहरणस्वरूप, एक मानक ताश के पैकेट में 52 पत्ते (बिना जोकर के) हैं। यदि हम यादृच्छ रूप से उसमें से एक पत्ता निकालते हैं तो हम संभावित प्रतिफल के रूप में सभी पत्तों के बारे में सोच सकते हैं। इस तरह, सभी प्रतिफलों की संख्या 52 होगी। सभी प्रतिफल घटनाओं एवं उनकी प्रायिकताओं का परिकलन कर हमारे पास निम्नलिखित संभावनाएँ हैं–

- 52 पत्तों में 13 क्लब हैं। अतः यदि क्लब होने की घटना प्रायिकता से संबंधित है तो 13 अनुकूल प्रतिफल हैं और इस घटना की प्रायिकता है $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- 4 राजा हैं (हर सूट में)। तब एक राजा होने की प्रायिकता है $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

* एक राजा या एक क्लब होने की क्या प्रायिकता है? यह उदाहरण कुछ ज्यादा ही जटिल है। हम प्रतिफलों की संख्या को प्रत्येक घटना के लिए अलग-अलग सीधे तौर पर जोड़ नहीं सकते हैं $(4 + 13 = 17)$ चूंकि ये एक प्रतिफल की गिनती दो बार (क्लब का राजा) कर लेता है। इसका सही उत्तर : $\frac{16}{52}$ और $\frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$ से मिलता है।

यदि हमें प्रायिकता के समीकरण, p (क्लब) $+p$ (राजा) $-p$ (क्लब का राजा) से मिलता है।

- विशिष्ट प्रायिकता की सीमाएँ हैं क्योंकि प्रायिकता की यह परिभाषा सभी प्रतिफलों को असंदिग्ध रूप में परिभाषित करती है एवं इसका उपयोग केवल ताश के पत्ते चुनने, पासे फेंकने या थैलियों से गेंद निकालने जैसी परिस्थितियों में किया जा सकता है। हम समान संभावनाओं वाले प्रतिफल की परिस्थिति में प्रायिकता का परिकलन नहीं कर सकते हैं।

टिप्पणी

ऐसा नहीं है कि प्रायिकता का विशिष्ट सिद्धान्त उसकी दर्शाई गई सीमाओं की वजह से उपयोगी नहीं है। हम इसका उपयोग एक महत्वपूर्ण मार्गदर्शक कारक के रूप में उन अनिश्चित घटनाओं की प्रायिकता एवं स्वयंसिद्ध प्रायिकता का परिकलन करते हैं जिनका जिक्र यहाँ पर किया गया है।

घटना होने की बारम्बारता

प्रायिकता का यह तरीका विशेष रूप से वैज्ञानिक शाखाओं के सुदूर क्षेत्रों में इस्तेमाल किया जाता है। यह इस विचार पर आधारित है कि किसी घटना से संबद्ध प्रायिकता को पुनरावृत्त प्रयोगों के द्वारा मापा जा सकता है।

प्रायिकता बारम्बारता की माप के रूप में : यदि n प्रयोगों में n_A बार एक घटना A घटित होती है तो हम घटना A की प्रायिकता को इस तरह से परिभाषित करते हैं :

$$PA = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

यह संभव नहीं है कि अनगिनत बार प्रयोग किए जाएँ। फिर भी, एक बड़ी संख्या में प्रयोग किया जा सकता है जहाँ संख्या की अधिकता मापी जाने वाली प्रायिकता एवं परिशुद्ध मापन पर निर्भर करती है।

प्रायिकता की परिभाषा–सीमा में अनुक्रम $\frac{n_A}{n}$ जो हर बार समान परिणाम देता है। इसे समझने के लिए हम एक सिक्के को अनगिनत बार उछालने का प्रयोग करते हैं। हम हेड के आने की प्रायिकता की आशा करते हैं। परिणाम निम्नलिखित अनुक्रम के रूप में आ सकता है :–

HTHHTTHHHHTTTTHHHHHHHHTTTTTTTTHHHHHHHHHHHHHHHH TTTTTTTTTTTTTTTT...

यह साबित होता है कि प्रत्येक बार k हेड एवं k टेल एक के बाद एक समान प्रायिकता वाले पैटर्न में आता है।

इस उदाहरण के लिए, अनुक्रम $\frac{n_A}{n}$ की पुनरावृत्ति $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{2}{3}$ के बीच होती है जो अभिसरित नहीं होता है। यह अनुक्रम शायद सही हो भी सकता है और नहीं भी। यहाँ दी गई परिभाषा अभिसरण को व्यक्त नहीं करती है लेकिन कुछ हद तक प्रायिकता में अभिसरण को दिखाता है। बिल्कुल सही प्रतिपादन करने की समस्या का हल प्रायिकता के स्वयंसिद्ध सिद्धान्त का उपयोग करके किया जा सकता है।

(2) प्रायिकता का स्वयंसिद्ध सिद्धान्त

टिप्पणी

प्रायिकता का स्वयंसिद्ध सिद्धान्त प्रायिकता का सबसे सामान्य तरीका है और इसका उपयोग प्रायिकता के सबसे कठिन प्रश्नों को हल करने में किया जाता है। हम स्वयंसिद्ध कथनों के एक समूह से आरम्भ करते हैं प्रायिकता की समष्टि को परिभाषित करता है। ये स्वयंसिद्ध कथन सहजबुद्धि से तुरन्त नहीं आते अपितु ये प्रायिकता के विशिष्ट सिद्धान्त का उपयोग कर विकसित होते हैं।

(3) अनुभव के आधार पर प्रायिकता का सिद्धांत

अनुभवजन्य प्रायिकता का दूसरा नाम प्रायोगिक प्रायिकता है। प्रायिकताओं को निर्धारित करने के लिए अनुभवजन्य तरीका वास्तविक प्रयोगों के आँकड़ों पर निर्भर करता है न कि समान संभावनाओं की अवधारणा पर। इन प्रयोगों में प्रायिकताओं को एक घटना के होने की बारम्बारता के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। यदि घटना $f(E)$ एवं प्रयोगों की संख्या द हो तो यह $p(E) = f(E)/n$ के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरणस्वरूप, एक सिक्के की उछाल में हेड आने की अनुभवजन्य प्रायिकता हेड की संख्या में सभी उछालों की संख्या से भाग देने पर मिलती है।

इन अनुभवजन्य प्रायिकताओं एवं सैद्धान्तिक प्रायिकताओं के बीच में संबंध के विषय में बड़ी संख्याओं के नियम ने बताया। यह नियम कहता है कि एक प्रयोग में जैसे-जैसे प्रयासों की संख्या बढ़ती जाती है तो अनुभवजन्य प्रायिकता सैद्धान्तिक प्रायिकता के निकट पहुँचती है। इसलिए यदि एक पासे को कई बार फेंके तो प्रत्येक संख्या लगभग $1/6$ बार आएगा। अनुभवजन्य प्रायिकता का अध्ययन सांख्यिकी कहलाता है।

यादृच्छ प्रयोग एवं यादृच्छ चर

एक प्रयोग यादृच्छ होता यदि हम उसके प्रतिफलों का अनुमान प्रयोग किए बिना नहीं लगा सकते। एक यादृच्छ प्रयोग को कई बार प्रयोगिक और सैद्धान्तिक रूप से ठुकराया जा सकता है। हम एक सिक्के को उछाल सकते हैं एवं एक पासे को फेंक सकते हैं और यह कई बार करके हम उसके प्रतिफलों का अध्ययन करते हैं। किसी भी प्रतिफल का परिणाम उसके बाद के परिणामों को प्रभावित कर भी सकता है और नहीं भी कर सकता है। इस तरह किसी भी सिक्के या पासे की फेंक पहले की सभी फेंक से स्वतन्त्र होती है। लेकिन यदि कार्ड के समूह से एक कार्ड निकाल कर उसे पुनः वापस नहीं रखा जाता है तो दूसरी बार किया गया प्रयोग पहले के परिणाम से अवश्य प्रभावित होता है।

एक घटना के यादृच्छ गुणों को प्रकृति के नियमों के जटिल गुण, विशिष्ट नियमों की जानकारी का अभाव एवं सैद्धान्तिक या प्रयोगिक मुश्किलों की वजह से नकारा नहीं जा सकता है जो कई सारे अच्छे या बुरे कारकों या हमारे कार्य के तरीकों के अवगुणों को प्रभावी बनाते हैं।

एक यादृच्छ चर प्रायिकता चर है। प्रत्येक यादृच्छ चर के मान के साथ प्रायिकता का एक विशिष्ट मान जुड़ा होता है। इस कथन का तात्पर्य है कि जब हम एक प्रयोग जैसे एक सिक्के को उछालते हैं तो हम निश्चित तौर पर यह नहीं कह सकते कि परिणाम क्या होगा। यादृच्छ शक्ति प्रतिफल निर्धारित करती है, यद्यपि प्रत्येक प्रतिफल की समान संभाव्यता होती है। एक यादृच्छ चर एक राशि है जो विभिन्न अवलोकनों में विभिन्न मान ग्रहण कर सकती है।

प्रतिदर्श समष्टि

टिप्पणी

एक सिक्के की उछाल–चूंकि, एक प्रतिदर्श समष्टि सभी संभावित घटनाओं या एक प्रयोग के सभी प्रतिफलों का समूह होता है। उदाहरणस्वरूप, एक सिक्के की उछाल में दो संभावित प्रतिफल होते हैं जो हेड और टेल हैं। तब इस प्रयोग के लिए प्रतिदर्श समष्टि *S* से निरूपित होगा–

$$S = [H, T]$$

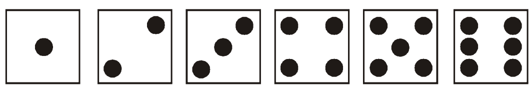
ताकि प्रतिदर्श समष्टि की प्रायिकता 1 हो

या, $P [S] = P [H, T] = 1$

ऐसा इसलिए है कि सिक्के की उछाल में एक हेड या टेल अवश्य आता है।

पासे का फेंका जाना

पासे का फेंका जाना प्रतिदर्श समष्टि का एक महत्त्वपूर्ण प्रयोग है। एक साधारण पासा एक छोटा सा घन है जिसकी सतहों पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 संख्याएँ होती हैं। ये पासे या तो वास्तविक संख्याओं से चिन्हित होते हैं या नीचे दिखाए गए चित्र की तरह बिन्दुओं की संख्या से इंगित होते हैं।



जब हम एक पासे को फेंकते हैं तो छः सतहों में से कोई भी परिणाम के तौर पर आ सकता है क्योंकि कुल छः सतह हैं। इसलिए प्रतिदर्श समष्टि

$$S = [1, 2, 3, 4, 5, 6] \text{ एवं } P [S] = 1,$$

चूंकि उन छः सतहों में से एक अवश्य ही आएगा।

दो सिक्कों की उछाल

दो सिक्कों की उछाल में प्रतिदर्श समष्टि का प्रयोग होता है। दोनों सिक्कों को एक ही साथ या बारी-बारी से उछाला जाता है। दोनों ही स्थितियों के बीच अन्तर यह है कि दूसरी स्थिति में आसानी से यह पता लगाया जा सकता है कि कौन सा पहला सिक्का है और कौन-सा दूसरा है। जब दो एक-समान सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं तब [H, H], [H, T] एवं [T, T] के रूप में तीन संभावित प्रतिफल मिलते हैं। यदि अलग-अलग सिक्कों को बारी-बारी से उछाला जाता है तो [H, H], [H, T], [T, H], [T, T] के रूप में चार संभावित प्रतिफल मिलते हैं। इसे संक्षिप्त रूप में इस तरह से दर्शाया जा सकता है : [HH, HT, TH, TT] अतः एक प्रयोग का प्रतिफल उसकी प्रकृति पर निर्भर करता है।

एक समान सिक्कों के लिए प्रतिदर्श समष्टि,

$$S = [H, H], [H, T], [T, T]$$

अलग-अलग सिक्कों के लिए प्रतिदर्श समष्टि

$$S = [HH, HT, TH, TT] \text{ या}$$

$$[H, H], [H, T], [T, H], [T, T]$$

दो पासों का फेंका जाना:

दो पासों की फेंक के लिए इसी प्रकार से प्रतिदर्श समष्टि का परिकलन किया जाता है।

S = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

नोट–पासे पर सबसे छोटी संख्या 1 है। यदि दोनों बार पासा 1 दिखाता है तब योग 2 है। इसी प्रकार पासे पर सबसे बड़ी संख्या 6 है यदि दोनों पासा 6 दिखाता है तो योग 12 है।

घटनाएं

घटना एक प्रतिफल है या किसी क्रियाकलाप के प्रतिफलों का समूह है या किसी प्रयास का एक परिणाम है। उदाहरणस्वरूप, तीन सिक्कों के एक साथ उछाल में दो हेड का आना एक घटना है।

प्रारंभिक घटना

प्रारंभिक घटना को एक साधारण घटना भी कहा जाता है जो किसी प्रयोग का एकमात्र सम्भव प्रतिफल है। उदाहरणस्वरूप, एक सिक्के की उछाल में हेड का आना एक प्रारंभिक घटना है। यदि एक प्रारंभिक घटना का संकेत (E) है तो उस घटना (E) की प्रायिकता को P [E] के रूप में दर्शा सकते हैं।

संयुक्त घटना

एक संयुक्त घटना को यौगिक घटना भी कहा जाता है, जिसमें दो या अधिक प्रारंभिक घटनाएँ होती हैं। उदाहरणस्वरूप, एक ताश के पैकेट से एक काले इक्के का निकाला जाना संयुक्त घटना है। चूंकि इसमें दो प्रारंभिक घटनाएँ काला एवं इक्का है।

पूरक घटना

किसी घटना A का पूरक उन सभी प्रतिफलों का समूह है जो A में नहीं है। इस A के पूरक को A′ (A प्राइम) से दर्शाते हैं। इसका तात्पर्य है कि A में निहित प्रतिफल एवं A′ के बाहर के प्रतिफल का योग कुल प्रतिदर्श समष्टि के समान होगा।

अत: $P[A] + P[A'] = P[S] = 1$

या, $P[A] = 1 - P[A']$

उदाहरणस्वरूप, यदि एक सवारी हवाई जहाज में 300 सीट हैं और ये लगभग भरी हुई हैं लेकिन पूर्णत: भरी नहीं हैं तो A घटना भरी हुई सीटों की संख्या दर्शाता है एवं A' खाली सीटों की संख्या दर्शाता है। माना कि 287 सीटें यात्रियों से भरी हुई हैं एवं 13 सीट केवल खाली हैं। तब परिचारिका खाली सीटों की गिनती करेगी जो 13 हैं और यह बताएगी कि 287 लोग जहाज में हैं। यह विधि 287 भरे हुए सीटों की गिनती करने की तुलना में ज्यादा आसान है। तदुनुसार, ऐसी परिस्थिति में घटना A' को जानना घटना A को जानने की तुलना में ज्यादा प्रभावकारी होता है।

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ

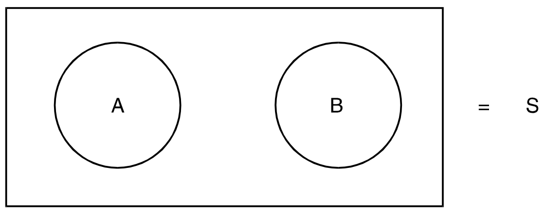
दो घटनाओं को परस्पर अपवर्जी कहा जाता है यदि दोनों घटनाएँ एक अकेले प्रयोग के प्रतिफल के रूप में एक घटित नहीं हो सकती हैं। उदाहरणस्वरूप, यदि हम एक सिक्के को उछालते हैं तो प्रतिफल के रूप में हेड आएगा या टेल आएगा पर दोनों एक साथ नहीं आएँगे। अत: ये परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

टिप्पणी

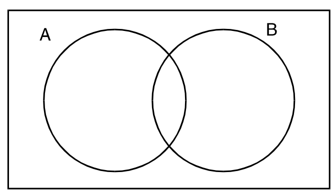
वेन आरेख

घटनाओं की संकल्पना, उनके संबंध एवं प्रतिदर्श समष्टि को समझने का आसान तरीका वेन आरेख का प्रयोग है। प्रतिदर्श समष्टि को आयताकार क्षेत्र से दर्शाया जाता है जबकि घटनाओं और उनके बीच के संबंधों को आयत के अंदर ही वृत्ताकार क्षेत्रों के द्वारा दर्शाया जाता है।

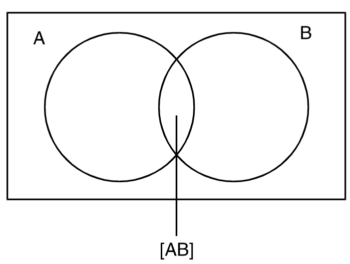
उदाहरणस्वरूप, दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ A एवं B को वेन आरेख द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है:



घटना P [A∪B] को वेन आरेख में इस प्रकार से दर्शाया जाता है।



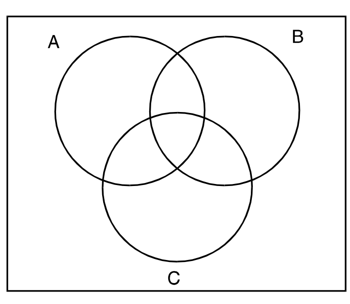
घटना [AB] को इस प्रकार दर्शाया जाता है।



चित्र तीन घटनाओं का सम्मिलन

तीन घटनाओं का सम्मिलन

सम्मिलन के लिए दो घटनाओं को जोड़ने का प्रक्रम तीन घटनाओं तक विस्तृत किया जा सकता है ताकि घटनाओं A, B एवं C का सम्मिलन P [A∪B∪C] होता है। इस सम्मिलन को वेन आरेख में इस प्रकार से दर्शाया जाता है:



चित्र तीन घटनाओं का सम्मिलन

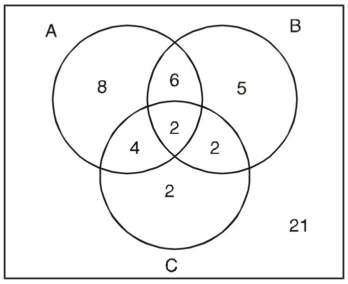
उदाहरण– माना एक सर्वेक्षण में 50 छात्रों के नमूने को लिया जाता है एवं उनकी पाठन संबंधी आदतों का एक समष्टि तैयार किया जाता है। सर्वेक्षण के परिणाम कुछ इस तरह से है:

टिप्पणी

घटना	*छात्रों की संख्या*	*पढ़ी जाने वाली पत्रिकाएँ*
[A]	20	Time
[B]	15	Newsweek
[C]	10	Filmfare
[AB]	8	Time and Newsweek
[AC]	6	Time and Filmfare
[BC]	4	Newsweek and Filmfare
[ABC]	2	Time and Newsweek and
Filmfare		

यदि इस 50 छात्रों की समष्टि से यादृच्छ रूप से एक छात्र का चयन किया जाए तो इस बात की प्रायिकता क्या है कि वह छात्र उन तीनों पत्रिकाओं में से किसी का भी पाठक नहीं है।

हल–इस प्रश्न को वेन आरेख द्वारा इस प्रकार से हल किया जा सकता है।



चूंकि 21 छात्र ऐसे हैं जो उन तीनों पत्रिकाओं में से किसी का भी अध्ययन नहीं करते हैं। अत: 50 छात्रों के उस समष्टि में से चुने गए उस छात्र द्वारा किसी भी पत्रिका को नहीं पढ़ने की प्रायिकता होगी $21/50$।

यह प्रश्न तीन घटनाओं के सम्मिलन के प्रायिकता के सूत्र की मदद से भी हल किया जा सकता है जो इस प्रकार है:

$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[AB] - P[AC] - P[BC] + P[ABC]$$

$$= \frac{20}{50} + \frac{15}{50} + \frac{10}{50} - \frac{8}{50} - \frac{6}{50} - \frac{4}{50} + \frac{2}{50} = \frac{29}{50}$$

यह उस 50 छात्रों की समष्टि से चुने गए एक छात्र द्वारा तीनों पत्रिकाओं या तो *Time* या *Newsweek* या *Filmfare* या किसी भी दो के संयोग या फिर तीनों के पढ़े जाने की प्रायिकता है। अत: उस छात्र के द्वारा किसी भी पत्रिका के नहीं पढ़े जाने की प्रायिकता होगी $\left[1 - \frac{29}{50}\right]$।

स्वतंत्र एवं परतंत्र घटनाएँ

टिप्पणी

दो घटनाएँ A एवं B स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि दोनों में से किसी भी एक के घटित होने पर असर दूसरे पर नहीं पड़े। उदाहरणस्वरूप, यदि दो सिक्कों को उछाला जाता है तो एक उछाल का परिणाम दूसरे से पूर्णतः स्वतंत्र होता है। किसी भी एक उछाल में हेड के रूप में प्रतिफल आने की प्रायिकता हमेशा ½ होगी। बिना इस बात की निर्भरता पर कि दूसरे उछाल का परिणाम क्या होगा। अतः ये दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं।

माना कि एक सिक्के की 10 उछाल में पहले के 9 उछाल में हेड आता है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि 10वें उछाल में भी हेड आएगा? यह सोचने की एक मनोवैज्ञानिक प्रवृत्ति होगी कि 10वें उछाल में टेल आएगा क्योंकि पहले के नौ उछालों में हेड आ चुका है। फिर भी, सिक्के को 10 बार उछालने की सभी घटनाएँ स्वतंत्र हैं एवं पहले के किसी भी परिणाम का असर 10वें उछाल के परिणाम पर नहीं होगा। इस प्रकार, 10वें उछाल में सिक्के के ऊपर हेड आने की प्रायिकता ½ होगी।

दूसरी ओर, 52 पत्तों के एक पैक से दो पत्ते निकालने की घटना पर ध्यान देते हैं। दूसरे पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता इस बात पर निर्भर करेगी कि पहले निकाला गया पत्ता इक्का था या नहीं। इस प्रकार, दोनों घटनाएँ स्वतंत्र नहीं हैं।

5.2.1 प्रायिकता के नियम

जब दो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों तो उनमें से किसी एक के भी होने की प्रायिकता उनके अलग-अलग होने की प्रायिकता के योग के तुल्य होगी। उदाहरण के लिए, हम एक पासे के फेंके जाने पर 5 या 6 आने की घटना पर विचार करते हैं। घटना A 5 आने एवं घटना B 6 आने को निरूपित करता है जबकि दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

$$P[A \text{ या } B] = P[A] + P[B]$$

$$P[5 \text{ या } 6] = P[5] + P[6]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

P[A या B] को $P[A \cup B]$ के रूप में दर्शाया जाता है एवं P [A सम्मिलन B] के रूप में जाना जाता है।

यदि घटनाएँ A एवं B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं तो घटना A या घटना B या दोनों के होने की प्रायिकता होगी : घटना A के होने की प्रायिकता + घटना B के होने की प्रायिकता – दोनों घटनाएँ A एवं B के होने की प्रायिकता

या, $$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \text{ और } B]$$

P[A और B] को $P[A \cap B]$ के रूप में लिखा जाता है एवं P[A उभयनिष्ठ B] या केवल P[AB] के रूप में माना जाता है।

घटना [A और B] में वे सभी घटनाएँ निहित हैं जो A और B दोनों में एक साथ हैं। उदाहरण के लिए, 52 पत्तों के एक पैकेट से पत्ता निकालने के प्रयोग पर विचार करते हैं–

माना, घटना A = एक इक्का का आना

टिप्पणी

घटना B = एक हुकुम का आना

घटना [AB] = एक हुकुम के इक्के का आना

इस प्रकार, $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[AB]$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ऐसा इसलिए है कि पूरे 52 पत्तों के पैक में 4 इक्के, 13 हुकुम एवं 1 हुकुम का इक्का है। P[AB] को घटाने के पीछे तर्क यह है कि हुकुम के इक्के की गिनती दो बार हो जाती है – एक बार घटना । (4 इक्के) एवं एक बार फिर घटना B (13 हुकुम जिसमें इक्के भी शामिल हैं)

$P[A \cup B]$ के लिए दूसरा उदाहरण जहाँ घटनाएँ A एवं B परस्पर नहीं हैं, निम्नलिखित हैं :–

माना कि, 100 लोगों के सर्वेक्षण से ये पता लगा कि 50 लोग India Today पढ़ते हैं, एवं 30 व्यक्ति Time पत्रिका पढ़ते हैं तथा उनमें से 10 लोग India Today एवं Time दोनों पढ़ते हैं तब :–

घटना [A] = 50

घटना [B] = 30

घटना [AB] = 10

चूंकि घटना [AB] का 10 दो बार शामिल है, A एवं B दोनों में, तो घटना [AB] को एक बार घटाना होगा घटना $[A \cup B]$ निर्धारित करने हेतु, इसका मतलब है एक व्यक्ति India Today या Time या दोनों पढ़ता है।

अतः $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[AB]$

$$= \frac{50}{100} + \frac{30}{100} - \frac{10}{100} = \frac{70}{100} = 0.7$$

गुणा का नियम

गुणा का नियम तब लागू होता है जब घटना A एवं B दोनों के एक साथ होने की प्रायिकता को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। यदि दो घटनाएँ स्वतन्त्र हैं एवं दोनों घटनाएँ स्वतन्त्र नहीं हैं तो उस दशा में गुणा का नियम अलग-अलग होता है।

यदि A और B दोनों घटनाएँ स्वतंत्र हैं तो दोनों के एक साथ होने की प्रायिकता उनके अलग-अलग होने की प्रायिकताओं के गुणनफल के तुल्य होगी। घटनाओं A एवं B के स्वतंत्र होने के लिए यह एक कड़ी शर्त है।

$$P[AB] = P[A] \times P[B] \text{ या } P[A]\,P[B]$$

एक उदाहरण लेते हैं, यदि हम एक सिक्के को दो बार उछालते हैं तो पहले उछाल में हेड आने एवं दूसरे उछाल में टेल आने की प्रायिकता दर्शायी जाती है:

$$P[HT] = P[H] \times P[T] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

यदि घटनाएँ A एवं B स्वतंत्र नहीं है तात्पर्य कि किसी घटना के होने की प्रायिकता दूसरी घटना के होने या न होने की प्रायिकता पर निर्भर करती है। तो दोनों घटनाओं के होने की प्रायिकता दी जाती है :–

$$P[AB] = P[A] \times P[B/A \text{ का दिया गया प्रतिफल}]$$

इस संबंध को इस प्रकार से भी लिखा जा सकता है:

$$P[AB] = P[A] \times P[B/A]$$

$$= P[A]\, P[B/A]$$

जहाँ, $P[B/A]$ का तात्पर्य है कि घटना B तभी घटती है जब घटना A घट चुकी है। उदाहरण के लिए, माना कि एक कटोरे में 6 काली एवं 4 उजली गेंदें हैं। एक गेंद यादृच्छ रूप से निकाला जाता है। तब तक दूसरी गेंद पहली गेंद को बिना उस कटोरे में प्रतिस्थापित किए निकाली जाती है। दूसरे गेंद के काले या उजले होने की प्रायिकता पहले गेंद के उजले या काले होने के परिणाम पर निर्भर करेगी। दोनों गेंदों के काले होने की प्रायिकता इस प्रकार से दी जा सकती है,

$$P[\text{दो काली गेंद}] = P[\text{पहली बार में काला होना}] \times P\left[\frac{\text{दूसरी बार में काला होना}}{\text{पहली बार में काला होना}}\right]$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ऐसा इसलिए है कि, प्रथम बार में 10 बार में 6 काले गेंद हैं, लेकिन यदि प्रथम गेंद काली है तब हमारे पास 9 में से 5 काली गेंदें हैं।

5.2.2 सशर्त प्रायिकता

बहुत से अवसरों पर, एक प्रबन्धक को उस घटना का प्रतिफल जानना पड़ता है जो पहले ही घटित हो चुकी हैं और कभी-कभी दूसरी घटना का प्रतिफल जो पहले घट चुकी घटना के प्रतिफल पर निर्भर करती है, का पता लगाना पड़ता है। हम यहाँ यह जानने को आतुर हैं कि कैसे अतिरिक्त सूचनाओं का उपयोग पहली घटना के प्रतिफल की दूसरी घटना के प्रतिफल पर निर्भरता ज्ञात करने में किया जाता है। उदाहरण के लिए, हम जानते हैं कि टूथपेस्ट का एक नया ब्रान्ड बाजार में आया है। निर्माता के पास प्रतियोगी बाजार के अध्ययन पर आधारित कुछ योजनाएँ हैं जिससे वह उस उत्पाद की सफलता का आकलन कर सकता है। अब वह इस उत्पाद को बिना राष्ट्रीय स्तर पर विपणन किए कुछ चुने हुए स्थानों पर चुने हुए स्टोर में लाता है। जाँच-बाजार से बहुत ही सकारात्मक प्रतिक्रिया का आना राष्ट्रीय स्तर पर उस उत्पाद के सफल होने के प्रति उस निर्माता का विश्वास सिद्ध करता है। अत: निर्माता का उस उत्पाद के विक्रय की उच्च प्रायिकता का अनुमान जाँच-बाजार से आने वाले सकारात्मक-प्रतिक्रिया से प्रतिबन्धित है।

माना, दो घटनाएँ A एवं B हैं। तो घटना A की प्रायिकता (जबकि घटना B की प्रायिकता दी गई है), दिखाई जाती है इस प्रकार से :–

$$P[A/B] = \frac{P[AB]}{P[B]}$$

जहाँ, $P[A/B]$ का तात्पर्य है घटना A की प्रायिकता है उस शर्त पर कि घटना B हो चुकी है एवं P[A/B] को घटना A एवं घटना B की युगल प्रायिकता कही जाती है जहाँ P[AB] शून्य के तुल्य नहीं है।

उदाहरणस्वरूप, माना कि हम एक पासे को फेंकते हैं और यह जानते हैं कि उस पर आने वाली संख्या 4 से बड़ी है। हम यह जानना चाहते हैं कि आने वाली संख्या के सम होने की प्रायिकता क्या होगी। जबकि यह दिया गया है कि आने वाली संख्या 4 से बड़ी होगी।

माना, घटना A = सम

एवं घटना B = 4 से बड़ी

तो $[\text{सम}/4 \text{ से बड़ी}] = \dfrac{P[\text{सम एवं } 4 \text{ से बड़ी}]}{P[4 \text{ से बड़ी}]}$

या, $$P[A/B] = \frac{P[AB]}{P[B]} = \frac{(1/6)}{(2/6)} = 1/2$$

लेकिन, स्वतन्त्र घटनाओं के लिए,

$$P[AB] = P[A]\,P[B]$$

इस प्रकार, इस संबंध को प्रतिबन्धित प्रायिकता के सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :–

$$P[A/B] = \frac{P[AB]}{P[B]} = \frac{P[A]\,P[B]}{P[B]}$$
$$= P[A]$$

इसका तात्पर्य है कि P[A] घटना B के प्रतिफल पर निर्भर किए बिना समान रहेगी। उदाहरण के लिए, यदि हम जानना चाहें कि एक सिक्के की उछाल में दूसरी बार में हेड आने की प्रायिकता क्या होगी यदि यह दिया गया है कि प्रथम उछाल में हेड आया था तो वह प्रायिकता हमेशा ही $\frac{1}{2}$ होगी क्योंकि दोनों घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ हैं एवं प्रथम घटना का प्रतिफल दूसरी घटना के प्रतिफल पर निर्भर नहीं करता है।

5.2.3 द्विपद वितरण

द्विपद वियोजन (या द्विपद प्रायिकता वियोजन) सबसे ज्यादा प्रयोग होने वाला प्रायिकता वियोजन है, जोकि एक असतत् अनियमित चर राशि से संबंधित होता है और इस तरह यह एक असतत् प्रायिकता वियोजन का उदाहरण भी है। द्विपद वियोजन असतत् आँकड़ों की व्यवस्था करता है, जिसके परिणामस्वरूप इसे बरनौली प्रक्रिया भी कहते हैं। एक निर्धारित संख्या में एक सिक्के को उछालना बरनौली प्रक्रिया है और इस प्रकार सिक्के

उछालने के परिणाम को द्विपद वियोजन द्वारा दर्शाते हैं। स्विस गणितज्ञ जैकब बरनौली का नाम इस वियोजन से जुड़ा है। यह वियोजन उन स्थितियों में लागू होता है जहाँ किसी प्रयोग के कई बार प्रयत्न होते हैं जहाँ केवल एक या दो परिणाम (जो सफलता या असफलता से सूचित होते हैं) उन्हें प्रत्येक प्रयत्न का फल कह सकते हैं।

बरनौली प्रक्रिया

बरनौली प्रक्रिया के निम्नलिखित लक्षण है :–

(अ) द्विविभाजन–इसका अर्थ है कि हर प्रयत्न के केवल दो पास्परिक संभावित परिणाम होते हैं, उदाहरण के तौर पर 'असफलता' या 'सफलता' 'हाँ' या 'ना', 'शीर्ष' या 'पृष्ठ' इत्यादि।

(ब) स्थिरता–इसका अर्थ है कि किसी प्रयोग में परिणाम की प्रायिकता ज्ञात होती है (या दी गई होती है) और सदैव समय के साथ स्थिर होती है अर्थात् सभी प्रयत्नों के लिए समान होती है।

(स) स्वतन्त्रता–इसका अर्थ है कि प्रयत्न सांख्यिकी रूप से स्वतंत्र होती है अर्थात् किसी विशिष्ट प्रयत्न में किसी परिणाम या घटना का होना, दूसरे प्रयत्न या प्रयत्नों के होने से स्वतंत्र होता है।

द्विपद वियोजन का प्रायिकता फलन

एक अनियमित चर राशि X, द्विपद वियोजन में, n प्रयत्नों में सफलता की संख्या हैं। तो उसका द्विपद वियोजन का प्रायिकता फलन इस प्रकार लिखा जायेगा :–

$$f(x = r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots n$$

जहाँ, n = प्रयत्नों की संख्या

$q = (1 - p)$ = एक प्रयत्न में 'असफलता' की प्रायिकता

r = 'n' प्रयत्नों में सफलताओं की संख्या

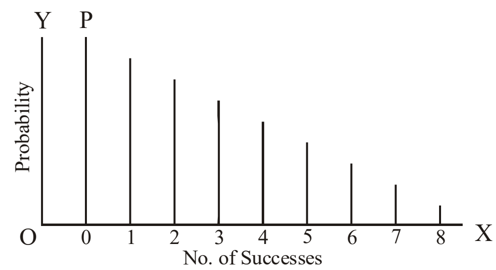
द्विपद वियोजन के मानदंड

यह वियोजन p और n के मूल्यों पर निर्भर करता है जो वास्तव में इनके मानदंड हैं। p की जानकारी X की प्रायिकता की व्याख्या करती हैं जबकि n को समस्या की परिभाषा द्वारा जानते हैं। n प्रयत्नों में एकदम सही r घटनाओं के होने की प्रायिकता हम ऊपर दिये गये द्विपद फलन का उपयोग करके ज्ञात कर सकते हैं।

p का मूल्य द्विपद वियोजन की रूप रेखा का भी विवरण देता है। यदि हम इसे ज्यामितीय रूप में प्रदर्शित करें, तो इन संदर्भ में इसके सामान्य सिद्धांत निम्न प्रकार हैं :–

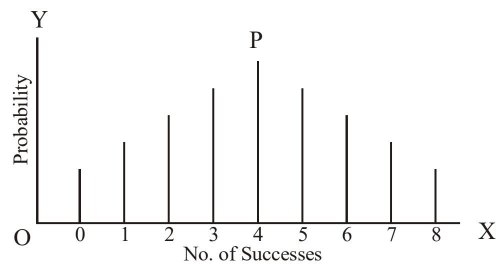
(*a*) जब p छोटा (जैसे 0.1) होता है, तो द्विपद वियोजन दायीं ओर खिसक जाता है अर्थात् ग्राफ चित्र 1 की तरह दिखाई देता है।

टिप्पणी



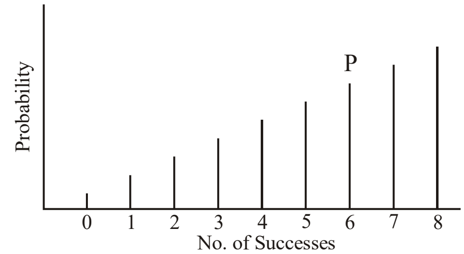
चित्र 1

(*b*) यदि p, 0.5 के बराबर है, तो द्विपद वियोजन सममितीय होता है तथा ग्राफ चित्र 2 की तरह दिखता है।



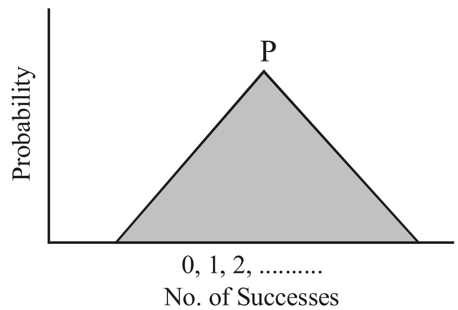
चित्र 2

(*c*) जब p, 0.5 से बड़ा है तो द्विपद वियोजन बायीं ओर खिसक जाता है और ग्राफ का रूप, चित्र 3 की तरह हो जाता है।



चित्र 3

लेकिन यदि 'p' सदैव स्थिर है और 'n' का मूल्य बढ़ रहा है तो 'n' के बढ़ने से सीधी लाइनें ना केवल संख्या में अधिक हो जाती है बल्कि एक गुच्छे में एक साथ जुड़ कर बल का आकार ले लेती हैं, अर्थात्, द्विपद वियोजन सममितीय हो जाता है और ग्राफ चित्र 4 के समान दिखाई देता है।



चित्र 4

टिप्पणी

द्विपद वियोजन के महत्वपूर्ण साधन

द्विपद वियोजन की अनियमित चर राशि का अपेक्षित मूल्य [*i.e.*, $E(x)$] या अनियमित चर राशि का मध्यमान $(\bar{X})$ $n.p$ के बराबर होता है और अनियमित चर राशि का असंगति प्रमाण $n.p.q$ या $n.p.(1-p)$ के बराबर होता है। तदनुसार, द्विपद वियोजन का मानक विचलन $\sqrt{n.p.q}$ के बराबर होता है। द्विपद वियोजन के अन्य महत्त्वपूर्ण साधन निम्न प्रकार हैं :–

$$\text{स्कीवनेस} = \frac{1-2p}{\sqrt{n.p.q}}$$

द्विपद वियोजन का उपयोग

द्विपद वियोजन का उपयोग सबसे अधिक उचित उन परिस्थितियों में होता है जो ऊपर दी गई दशाओं को पूरा करती हैं। दो ऐसी परिस्थितियाँ उदाहरण के तौर पर नीचे दी जा रही हैं :–

1. एक सिक्के को 10 बार उछालने पर 6 शीर्ष की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए।
2. एक मशीन जो औसत रूप से 8 प्रतिशत वस्तुएँ खराब बनाती हैं, उसमें 10 वस्तुओं में से 3 की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए

उदाहरण– एक सिक्के को 10 बार उछाला जाता है। यहाँ अनियमित चर राशि X, सिक्के के ऊपर से आने पर शीर्षों की संख्या है। द्विपद प्रायिकता फलन का उपयोग करके X के सभी संभावित मूल्यों की प्रायिकता ज्ञात करें और फिर यह सिद्ध करें कि द्विपद वियोजन का मध्यमान : $\bar{X} = n.p$ और असंगति प्रसरण : $\sigma^2 = n.p.q$

हल–यदि हम एक ठीक प्रकार के सिक्के को उछालें तो ऊपर या तो शीर्ष आयेगा या पृष्ठ। अतः $p(\text{शीर्ष}) = \frac{1}{2}$ और $q(\text{पृष्ठ}) = \frac{1}{2}$। अतः आवश्यक प्रायिकता फलन होगा,

$$f(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$
$$r = 0, 1, 2\ldots10$$

इन फलन के लिए प्रयोग के लिए द्विपद प्रायिकता वियोजन की निम्न सारणी बनाई गई है।

X_i (शीर्षों की संख्या)	प्रायिकता pr_i	$X_i pr_i$	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X})^2.p_i$
0	${}^{10}C_0\, p^0\, q^{10} = 1/1024$	0/1024	–5	25	25/1024
1	${}^{10}C_1\, p^1\, q^9 = 10/1024$	10/1024	–4	16	160/1024
2	${}^{10}C_2\, p^2\, q^8 = 45/1024$	90/1024	–3	9	405/1024
3	${}^{10}C_3\, p^3\, q^7 = 120/1024$	360/1024	–2	4	480/1024
4	${}^{10}C_4\, p^4\, q^6 = 210/1024$	840/1024	–1	1	210/1024
5	${}^{10}C_5\, p^5\, q^5 = 252/1024$	1260/1024	0	0	0/1024

टिप्पणी

6	$^{10}C_6\, p^6\, q^4 =$ 210/1024	1260/1024	1	1	210/1024
7	$^{10}C_7\, p^7\, q^3 =$ 120/1024	840/1024	2	4	480/1024
8	$^{10}C_8\, p^8\, q^2 =$ 45/1024	360/1024	3	9	405/1024
9	$^{10}C_9\, p^9\, q^1 =$ 10/1024	90/1024	4	16	160/1024
10	$^{10}C_{10}\, p^{10}\, q^0 =$ 1/1024	10/1024	5	25	25/1024
		$\Sigma\bar{X}$ = 5120/1024 $\bar{X}$ = 5		वियोजन = σ^2 = $\Sigma(X_i - \bar{X})^2.pr_i$ = 2560/1024 = 2.5	

द्विपद वियोजन का मध्यमान $n.p = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ है तथा इस वियोजन का असंगति प्रसारण $n.p.q = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2.5$ के बराबर हैं।

ये मूल्य ऊपर दी गई सारणी में दिये गये मूल्यों के समान हैं। इस प्रकार ये मूल्य को मानकों की आँकलित मूल्यों से सत्यापित है जैसा कि ऊपर दी गई सारणी में दिखाया गया है।

अपनी प्रगति जांचिए

1. प्रायिकता में किन घटनाओं का अध्ययन होता है?
   (क) निश्चितता (ख) अनिश्चितता
   (ग) सामान्य (घ) शून्य
2. द्विपद वितरण किस अर्थशास्त्री से संबंधित है?
   (क) पास्कल (ख) कार्ल पियर्सन
   (ग) जैकब बरनौली (घ) आर.ए. फिशर

5.3 अनुसंधान : अवधारणा एवं प्रकार

अनुसंधान शब्द अंग्रेजी के रिसर्च शब्द का हिन्दी अनुवाद है। अनुसंधान का तात्पर्य एक ऐसे सत्य की लगातार खोज करते रहना है, जो कि पूर्णरूपेण ज्ञात नहीं हो सका है तथा जिसको लेकर जिज्ञासा बनी हुई है।

शोध, खोज, अनुसंधान, अन्वेषण आदि सभी शब्द हिन्दी भाषा के पर्यायवाची शब्द हैं, जिसे आंग्ल भाषा में रिसर्च (Research) कहा जाता है। फ्रेंच भाषा के सर्चियर (Cerchier) शब्द से इस मूल शब्द की उत्पत्ति हुई है। जिसका अर्थ "अधिक" सुनिश्चित होने के लिए पुनः–पुनः खोजना है। अनुसंधान को एक व्यवस्थित प्रक्रिया कहा गया है, जो पूर्णरूपेण सुनियोजित है, जिसके द्वारा नवीन ज्ञान की खोज की जाती है। अंग्रेजी शब्द (Research) का शाब्दिक अनुवाद है– पुनः पुनः अन्वेषण करना, खोजना, नवीन–नवीन तथ्यों की जानकारी देना।

शोध एक ऐसी गतिविधि है, जिसमें नवीन ज्ञान की खोज एवं उपलब्ध ज्ञान को सत्यापित करने का प्रयास किया जाता है। यह एक उच्च बौद्धिक क्रियाकलाप है,

जिसमें अनुसंधानकर्ता उपलब्ध ज्ञान के सहारे नवीन तथ्यों और सूचनाओं की खोज करता है। विभिन्न विद्वानों ने अनुसंधान को परिभाषित किया है, जिसका विवरण इस प्रकार है–

टिप्पणी

वेबस्टर्स न्यू इंटरनेशनल डिक्शनरी के अनुसार "अनुसंधान सिद्धांतों के लिए तथ्यों की खोज में एक सतर्कतापूर्ण, आलोचनात्मक खोज या परीक्षण है अथवा किसी वस्तु को सुनिश्चित करने के क्रम में परिश्रमपूर्ण खोज है।"

एल.बी. रेडमैन (L.B. Radman) के अनुसार "नए ज्ञान को प्राप्त करने के लिए सुव्यवस्थित प्रयास ही अनुसंधान है।"

पी. एम. कुक ने "Research" शब्द के प्रारंभिक अक्षरों को लेकर जो विशेषताएं प्रदान की हैं, वे इस प्रकार हैं–

R - Rational way of thinking (चिंतन का तर्कयुक्त रास्ता)

E - Expert and exhaustive treatment (विशेषज्ञ और सांगोपांग प्रतिपादन)

S - Search for solution (समाधान हेतु खोज)

E - Exactness (यथार्थता)

A - Analysis (विश्लेषण)

R - Relationship of facts (तथ्यों में संबंध)

C - Critical observation, careful recording, constructive attitude and condensed generalizations (आलोचनात्मक अवलोकन, सतर्क अभिलेखन, रचनात्मक सोच, घनीभूत सामान्यीकरण)

H - Honesty and hard working (ईमानदारी और कठिन परिश्रम)

उपर्युक्त अनुसंधान परिभाषाओं के आधार पर यह कहा जा सकता है कि अनुसंधान मात्र एक खोज नहीं है अपितु यह वैज्ञानिक, उद्देश्यपूर्ण, तर्कयुक्त और व्यवस्थित खोज है। शोधार्थी इसे आलोचनात्मक एवं तर्कयुक्त ढंग से करता है।

जोन वेस्ट के अनुसार, "शोध ऐसी व्यवस्थित प्रक्रिया है जो नई खोज करती है तथा संकलित एवं सुसंगठित ज्ञान का विकास करती है।"

दी एडवांस्ड लर्नर्स डिक्शनरी में शोध को इस प्रकार परिभाषित किया गया है– "ज्ञान की किसी भी शाखा में ध्यानपूर्वक नए तथ्यों की खोज के लिए किए गए अन्वेषण या परीक्षण को शोध कहते हैं।"

स्पार एवं स्वेंसन के अनुसार, "कोई भी विद्वतापूर्ण अन्वेषण जो सत्य, तथ्य एवं निश्चितता प्राप्ति के लिए किया जाता है वही शोध है।"

रेडमैन तथा मोरी के शब्दों में "नवीन ज्ञान प्राप्ति के व्यवस्थित प्रयत्न को हम शोध कहते हैं।"

इस प्रकार शोध द्वारा विद्यमान ज्ञान में अभिवृद्धि होती है। यह सत्य की ऐसी खोज है, जिसमें अध्ययन, अवलोकन, तुलना तथा प्रयोगों द्वारा किसी निश्चित विषय को विकसित किया जाता है। शोध द्वारा किसी एक निश्चित समस्या का वस्तुपरक तथा

क्रमबद्ध तरीके से हल खोजने का प्रयत्न किया जाता है। इस प्रकार शोध का उद्देश्य अनुत्तरित प्रश्नों के उत्तरों की खोज वैज्ञानिक प्रणाली द्वारा करना है।

टिप्पणी

5.3.1 अनुसंधान के उद्देश्य

अनुसंधन के तीन प्रमुख उद्देश्य हैं– 1. सैद्धांतिक उद्देश्य 2. व्यावहारिक उद्देश्य और 3. व्यक्तिगत उद्देश्य। शोध के इन सभी उद्देश्यों का विस्तारपूर्वक वर्णन निम्न प्रकार से है–

1. सैद्धांतिक उद्देश्य

शोध मूल रूप से ज्ञान की वृद्धि का साधक है। इस दृष्टि से शोध का सैद्धांतिक उद्देश्य तथ्यों, घटनाओं अथवा समस्याओं के विषय में ज्ञान प्राप्त करना है, जिससे पुराने तथ्यों का सत्यापन, नए तथ्यों की खोज, नए सिद्धांतों का निर्माण तथा परीक्षण किया जा सकता है। इस प्रकार शोध के निम्नलिखित सैद्धांतिक उद्देश्य हो सकते हैं–

(अ) प्रयोगों द्वारा सिद्ध तथ्यों के आधार पर अवधारणाओं की रचना करना।

(ब) पुराने तथ्यों की जांच एवं नवीन तथ्यों की जानकारी प्राप्त करना।

(स) पूर्व स्थापित सिद्धांत की जांच तथा परीक्षण करना।

(द) घटना एवं तथ्यों के मध्य कार्य, कारण संबंध को खोजना।

2. व्यावहारिक उद्देश्य

यद्यपि शोध का प्राथमिक उद्देश्य सैद्धांतिक ज्ञान में अभिवृद्धि करना होता है तथापि उस ज्ञान का व्यावहारिक धरातल पर उपयोग न होने पर ऐसा शोध अर्थहीन हो जाता है। अतः शोध के व्यावहारिक उद्देश्य निम्नलिखित हैं–

(अ) सर्वोत्कृष्ट विकल्प की खोज करना।

(ब) भविष्य के लिए योजनाओं के निर्माण में सहयोग।

(स) सांख्यिकीय समस्याओं को सुलझाने में सहायक।

(द) किसी घटना के स्पष्ट कारणों के बारे में गहन जांच कर, उस समस्या को नियंत्रित करना।

(य) विभिन्न चरों में परस्पर संबंध स्थापित कर परिकल्पनाओं को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत करना।

3. व्यक्तिगत उद्देश्य

एक सहज प्रश्न उठता है कि कोई व्यक्ति आखिरकार शोध करने के लिए क्यों अभिप्रेरित होता है? इस प्रश्न के उत्तर में शोध के व्यक्तिगत उद्देश्य निम्नलिखित हो सकते हैं–

(अ) शोध के आधार पर रोजगार व उन्नति प्राप्त हो सकती है क्योंकि बहुत से ऐसे पेशे हैं, जिनमें प्रवेश के लिए किसी व्यक्ति को शोध करना आवश्यक होता है।

(ब) कोई व्यक्ति समाज सेवा की दृष्टि से भी शोध एवं अनुसंधान कर सकता है।

(स) शोध करने का व्यक्तिगत उद्देश्य समाज में सम्मान प्राप्त करना भी हो सकता है।

(द) कुछ व्यक्ति रचनात्मक कार्य करने में आनंद का अनुभव प्राप्त करते हैं।

(य) कुछ शोधकर्ता उन मान्यताओं को सुलझाने संबंधी चुनौती स्वीकार करना उचित समझते हैं, जिनका वर्तमान में कोई हल नहीं हैं।

(र) सरकारी निर्देशों के आधार पर भी शोध करना अनिवार्य हो सकता है।

टिप्पणी

5.3.2 अनुसंधान के प्रकार

अनुसंधान के वर्गीकरण के कई आधार हैं। इनका विवरण अग्रलिखित हैं–

(क) उद्देश्य के आधार पर

अध्ययन के उद्देश्य के आधार पर शोध निम्न प्रकार का हो सकता है–

1. **मौलिक सैद्धांतिक शोध**– मौलिक अनुसंधान में यह भी देखा जाता है कि क्या परिवर्तित परिस्थितियों में पुराने सिद्धांत उचित हैं अथवा नहीं। यदि पुराने सिद्धांत वर्तमान संदर्भ में ठीक न हों तो उन्हें अस्वीकृत कर नए सिद्धांतों का प्रतिपादन किया जाता है। वास्तव में मौलिक अनुसंधान का उद्देश्य उपलब्ध ज्ञान में अभिवृद्धि कर उसे समष्टि में प्रयुक्त करने योग्य बनाना है।

   दूसरे शब्दों में, व्यावहारिक अथवा क्रियात्मक शोध के लिए मौलिक शोध एक आधारशिला है। मौलिक शोध सामग्री प्रदान करता है जिसके आधार पर किसी निष्कर्ष पर पहुंचा जा सकता है। इस अनुसंधान के प्रारंभिक चर में बहुत–सी समस्याएं आती हैं और लागत भी अपेक्षाकृत अधिक आती है। इस बात का खतरा भी बना रहता है कि इसके निष्कर्ष पहली बार में सही सिद्ध होंगे अथवा नहीं तथा इन सिद्धांतों को लागू करने में क्या–क्या कठिनाइयां आ सकती हैं, इत्यादि। लेकिन अंततः वैकल्पिक समाधान प्राप्त हो ही जाता है। अतः मौलिक सैद्धांतिक शोध का कोई विकल्प नहीं है।

2. **व्यावहारिक शोध**– व्यावहारिक शोध में मौलिक शोध से प्राप्त परिणामों को वास्तविक घटनाओं तथा परिस्थितियों पर लागू कर प्राप्त परिणामों के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं। पी.वी. यंग के अनुसार, ज्ञान की खोज का निश्चित संबंध लोगों की प्राथमिक आवश्यकताओं एवं कल्याण से होता है। वैज्ञानिकों की मान्यता यह होती है कि समस्त ज्ञान मूलभूत रूप से इस अर्थ में उपयोगी होता है कि वह इस सिद्धांत के निर्माण में या किसी कला को व्यवहार में लाने में सहायक होता है। सिद्धांत और व्यवहार आगे जाकर एक दूसरे में मिल जाते हैं। इस प्रकार व्यावहारिक अनुसंधान की संज्ञा उसे दी जाती है, जिसमें ज्ञान प्राप्ति, मानवीय भाग्य के सुधार में सहायता प्रदान कर सके।

(ख) प्रकृति के आधार पर

शोध को प्रकृति के आधार पर निम्न भागों में बांटा जा सकता है–

1. **अन्वेषणात्मक शोध**– जब शोध का उद्देश्य कार्य–कारण संबंध की खोज करना होता है तब अन्वेषणात्मक शोध किया जाता है। जैसे किसी उद्योग का लाभ लगातार घटने के कारणों की जांच करने के लिए अन्वेषणात्मक शोध करना

टिप्पणी

होगा। इसका संबंध नवीन तथ्यों की खोज से है। जहां अर्जित ज्ञान सीमित है तथा प्रयोगात्मक अनुसंधान संभव नहीं है, वहां अन्वेषणात्मक शोध किया जाता है। यह शोध विवरणात्मक शोध का मार्ग प्रशस्त करता है। अन्वेषणात्मक शोध के आधार पर वर्तमान अवधारणाओं का स्पष्टीकरण एवं नवीन अवधारणाओं की खोज की जाती है।

2. **विवरणात्मक शोध**– उपलब्ध तथ्यों, ज्ञान तथा सांख्यिकीय समकों के आधार पर अध्ययन की विषय–वस्तु का विस्तारपूर्वक स्पष्टीकरण करना विवरणात्मक शोध कहलाता है। इसके लिए विषय सामग्री की पूर्ण जानकारी होना आवश्यक है। इतना ही नहीं, यह जानकारी तथ्य संगत तथा यथार्थ भी होनी चाहिए। तभी इसके द्वारा प्राप्त निष्कर्ष लक्ष्य प्राप्ति में सहायक सिद्ध होंगे। विवरणात्मक शोध के लिए विश्वसनीयता और यथार्थ बहुत आवश्यक हैं। प्राप्त विश्वसनीय तथ्यों एवं समकों का विश्लेषण कर प्राप्त परिणामों से नई जानकारी तथा नए अर्थ का निरूपण करना इस शोध का विषय है। अतः ऐसे शोध का चुनाव करने से पूर्व यह ध्यान रखना होगा कि इसके लिए पर्याप्त समक तथा सामग्री उपलब्ध हो। इसके अतिरिक्त शोधकर्ता का तटस्थ होना तथा निरपेक्ष होना भी सही परिणाम प्राप्त करने के लिए आवश्यक है। इस शोध के द्वारा किसी घटना अथवा परिस्थिति का परिशुद्ध एवं क्रमवार विस्तृत ज्ञान प्राप्त होता है किसी चर की पुनरावृत्ति का अध्ययन करने के लिए भी विवरणात्मक शोध किया जा सकता है। चरों के मध्य परस्पर साहचर्य के बारे में पता लगाना विवरणात्मक शोध का विषय हो सकता है।

3. **निदानात्मक शोध**– निदानात्मक शोध किसी समस्या के समाधान की खोज के लिए किया जाता है। इसमें सही समाधान प्राप्त करने लिए समस्या के कारणों का गहन अध्ययन किया जाता है। इस हेतु समकों का संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन किया जाता है। अध्ययन के समय जिन कारणों का पता लगता है, उनमें से यथार्थ और महत्वपूर्ण कारणों को अन्य कारणों से अलग कर उनका गहन अध्ययन किया जाता है। जिससे समस्या का शीघ्र समाधान खोजने में मदद मिले। इससे प्राप्त परिणामों के आधार पर समस्या को दूर करने में मदद मिलती है। निदानात्मक शोध में समस्या को किस तरह सुलझाया जाए इसका वर्णन एवं विश्लेषण प्रस्तुत किया जाता है।

(ग) तथ्यों के आधार पर

तथ्यों के आधार पर आंकड़ों का स्वरूप निम्नानुसार है–

प्रयोगात्मक शोध – इस शोध के द्वारा विभिन्न कारकों के प्रभाव का वैज्ञानिक पद्धति से पता लगाया जाता है। यह शोध प्रयोग की अवधारणा पर आधारित होता है। प्रयोग वास्तव में एक प्रकार का नियंत्रित अन्वेषण है। इस प्रकार के शोध में सामान्यतया दो या दो से अधिक घटनाओं, कारकों या चरणों के मध्य कार्य–कारण संबंध की अनेक परिस्थितियों का अध्ययन किया जाता है। इसमें दो समान समूह को लेकर एक समूह को पूर्णत : नियंत्रित रखा जाता है। दूसरे समूह को बाह्य कारणों से प्रभावित करने के लिए स्वतंत्र रखा जाता है। इस

प्रकार परिवर्तन लाने वाले कारणों का ज्ञान प्राप्त हो जाता है। लेकिन यह शोध सूचनाओं की उपलब्धि पर निर्भर है। संक्षेप में, ऐतिहासिक घटनाचक्र इस शोध के अध्ययन का विषय हो सकता है। जिससे वर्तमान परिस्थितियों का निर्माण करने वाले कारणों की खोज की जा सकती है।

टिप्पणी

अनुसंधान और परिकल्पना

परिकल्पना अध्ययन कार्य को निश्चितता प्रदान करती है। परिणामस्वरूप अनुसंधानकर्ता को यह पता चल जाता है कि उसे क्या और कितना अध्ययन करना है। किन समकों को एकत्रित करना है और कौन–से समक काम के नहीं है। इस प्रकार परिकल्पना अनुसंधान क्षेत्र को सीमित करती है। यह इसलिए भी आवश्यक है कि परिणामात्मक परिकल्पना द्वारा किसी अनुसंधानकर्ता की शोध की दिशा का निर्धारण भी हो जाता है। इसके निर्माण के पश्चात एक शोधकर्ता का प्रयास उद्देश्यपूर्ण अर्थपूर्ण तथा वैज्ञानिक विधि के अनुकूल हो जाता है। अंत में यह कहना गलत नहीं होगा कि परिकल्पना एक शोधकर्ता के सत्य ढूंढ निकालने के कार्य में सहायक सिद्ध होती है। लेकिन परिकल्पना निर्माण की कुछ सीमाएं भी हैं। यथा कोई अनुसंधानकर्ता त्रुटिवश परिकल्पना को ही अपने शोध का निष्कर्ष मान लेता है और इसके लिए वे तथ्यों को इस प्रकार संकलित, विश्लेषित करता है, जिससे परिकल्पना की सत्यता प्रमाणित हो जाए। इस संबंध में श्री वेस्टावे की इस चेतना को स्मरण रखना आवश्यक है कि परिकल्पनाएं वे लोरियां हैं जो असावधान अनुसंधानकर्ता को सुला देती हैं।

परिकल्पना निर्माण संबंधी कथन

परिकल्पना निर्माण संबंधी कथन निम्न प्रकार से हैं–

(अ) **सकारात्मक कथन** : कभी–कभी परिकल्पना का निर्माण एक सकारात्मक कथन के रूप में होता है। लघु उद्योगों में औद्योगिक रुग्णता का मुख्य कारण वित्त का अभाव है। व्यापार में अभिवृद्धि तथा विज्ञापन व्यय में धनात्मक सहसंबंध है। बैंकों की उदार साख नीति उद्योगों में अधिक स्कंध के लिए उत्तरदायी है।

(ब) **नकारात्मक कथन** : इस प्रकार की परिकल्पना में कथन नकारात्मक रूप में होता है। विश्वविद्यालय की संरचना दोषपूर्ण है। लड़के, लड़कियों से अधिक बुद्धिमान नहीं होते हैं। सहकारी बैंकों द्वारा खेतिहर मजदूरों को समय पर पर्याप्त वित्त उपलब्ध नहीं कराया जाता है।

(स) **शून्य परिकल्पनाएं कथन** : इसमें यह मानकर चलते हैं कि प्राचल तथा प्रतिदर्शज में समानता है। पंजाब नेशनल बैंक तथा यूको बैंक की लाभदायिकता में सार्थक अंतर नहीं है। सार्वजनिक क्षेत्र की इस्पात कंपनियों तथा निजी क्षेत्र की इस्पात कंपनियों की श्रम उत्पादकता समान है। राजकीय उपक्रमों की कार्यशील पूंजी को सीधी रेखा के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

5.3.3 शोध के विभिन्न चरण

शोध प्रक्रिया के विभिन्न चरणों के अंतर्गत किसी शोध कार्य को संपन्न करने के लिए उन्हें क्रमबद्ध तरीके से सम्मिलित किया जाता है। जैसे– 1. समस्या का निर्धारण, 2. साहित्य सर्वेक्षण, 3. परिकल्पना का निर्माण, 4. अनुसंधान– अभिकल्प तैयार करना, 5.

समकों का संग्रहण एवं संपादन, 6. प्रतिदर्शज अभिकल्प का निर्धारण, 7. समकों का वर्गीकरण एवं विश्लेषण 8. परिकल्पना परीक्षण, 9. सामान्यीकरण व निर्वचन तथा 10. शोध कथासार तैयार करना। यहां पर प्रमुख चरणों को संक्षेप में समझाया जा रहा है–

टिप्पणी

1. **समस्या का निर्धारण**– समस्त वैज्ञानिक शोध प्रश्न या समस्या के निर्धारण से आरंभ होते हैं। सर्वप्रथम किसी कठिनाई का अनुभव किया जाता है, जिससे समस्या की पहचान होती है। इसके बाद समस्या का निर्धारण होता है। यह एक कठिन कार्य है लेकिन किसी भी शोधकर्ता को इस चुनौती को स्वीकार करना पड़ता है। समस्याएं तीन प्रकार की होती हैं–(अ) आनुभाविक समस्याएं, (ब) विश्लेषणात्मक समस्याएं तथा, (स) मानवीय समस्याएं।

   आनुभाविक समस्याओं के समाधान तथ्यात्मक अनुभव के आधार पर ढूंढे जाते हैं। विश्लेषणात्मक समस्याएं अवधारणाओं से संबंधित होती हैं। मानवीय समस्याएं मूल्यात्मक निर्णयों पर निर्भर होती हैं। मानवीय समस्याओं के दो रूप हो सकते हैं।

   (अ) **मूल्यांकनात्मक**– उदाहरण के लिए भारत में उच्च शिक्षा का स्तर श्रेष्ठ है।

   (ब) **निर्देशात्मक**– उदाहरण के लिए देश में उच्च शिक्षा का स्तर श्रेष्ठ होना चाहिए।

2. **साहित्य सर्वेक्षण**– समस्या का निर्धारण होने के पश्चात एक शोधकर्ता को समस्या से संबंधित विषय पर उपलब्ध विषय सामग्री यथा पुस्तकों, पत्रिकाओं, प्रतिवेदनों तथा अन्य पाठ्य–सामग्री का गहन अध्ययन करना चाहिए। इसी प्रकार यदि इस विषय से संबंधित कोई शोध प्रकाशित अथवा अप्रकाशित हो तो उनका भी विषद अध्ययन करना चाहिए। इसके बिना शोधकर्ता अपने उद्देश्य में सफल नहीं हो पाएगा। आजकल इंटरनेट की सुविधाएं भी हर जगह पर उपलब्ध हैं। अतः शोधकर्ता को इसकी अधिक से अधिक सहायता लेकर उच्च कोटि का अध्ययन करके संबंधित विषय सामग्री को अपने शोध में सम्मिलित कर उसे उपयोगी बनाना चाहिए।

3. **परिकल्पना का निर्माण**– वैज्ञानिक अध्ययन में परिकल्पनाओं का निर्माण बहुत आवश्यक है। परिकल्पना को प्राकल्पना, पूर्व–कल्पना, उपकल्पना आदि नामों से भी जाना जाता है। यह एक काम चलाऊ सामान्यीकरण है, जिसकी शोध के दौरान जांच की जाती है। यह सत्य भी सिद्ध हो सकती है अथवा असत्य भी सिद्ध हो सकती है। गुडे एवं हाट्ट के शब्दों में परिकल्पना ऐसी मान्यता है, जिसका परीक्षण करने के लिए प्रयोगात्मक जांच की जाती है। बोगार्डस के अनुसार 'परीक्षित किए जाने वाले प्रस्तावों को परिकल्पना कहा जाता है।''

   वेबस्टर्स न्यू इंटरनेशल डिक्शनरी ऑफ इंग्लिश लैंग्वेज के अनुसार, ''परिकल्पना एक विचार, दशा या सिद्धांत होती है, जो संभवतः बिना किसी विश्वास के स्वीकार कर ली जाती है, जिससे उसके तार्किक परिणाम निकाले जा सकें और ज्ञात या निर्धारित किए जाने वाले तथ्यों की सहायता से इस विचार की सत्यता

की जांच की जा सके।" इस प्रकार तात्कालिक सामान्यीकरण अथवा निष्कर्ष को परिकल्पना कहते हैं। इसकी आरंभिक अवस्था में यह कल्पना, अनुमान अथवा अन्तःप्रेरणा हो सकती हैं लेकिन अंततः यह शोध की आधारशिला है। एक परिकल्पना स्पष्ट, सरल, उपलब्ध तकनीक से संबंधित, अनुभवसिद्ध, वस्तुनिष्ठ तथा विषय के निर्धारित सिद्धांतों के अनुरूप होनी चाहिए।

4. **अनुसंधान अभिकल्प**– शोध कार्य करने की योजना या शोध प्रकिया की रूपरेखा को ही अनुसंधान अभिकल्प अथवा शोध संरचना कहते हैं। एफ.एन. कलिंजर के शब्दों में अनुसंधान अभिकल्प अन्वेषण की योजना, संरचना एवं रणनीति है, जिसकी रचना इस प्रकार की जाती है कि शोध प्रश्नों के उत्तर प्राप्त हो सकें तथा प्रसरण को नियंत्रित किया जा सके। यह एक ऐसी संपूर्ण रूपरेखा है, जिसमें वे सभी रूपरेखाएं होती हैं जो एक शोधकर्ता के परिकल्पनाओं के निर्माण से लेकर समकों के अंतिम विश्लेषण विद्यमान रहती हैं।

   अनुसंधान अभिकल्प में शोध का विषय, अध्ययन की प्रकृति, विषय का परिचय, उद्देश्य, अवधारणाओं, चरों एवं परिकल्पनाओं का वितरण, समयावधि समक एकत्रीकरण का आधार व प्रविधियां, वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण तथा निर्वचन तकनीकों का विवरण, शोध सीमाएं तथा संदर्भ ग्रंथों की सूची आदि विषयवस्तु सम्मिलित होती है।

   अनुसंधान अभिकल्प लचीला होना चाहिए, जिससे उसे आवश्यकतानुसार संशोधित एवं परिवर्तित किया जा सके क्योंकि एक अनुसंधान अभिकल्प को प्रभावित करने वाले विविध घटक होते हैं, जैसे समंकों की अपर्याप्तता, समयाभाव, साधनों की उपलब्धता, अनुसंधानकर्ता की योग्यता तथा असामान्य कारक जैसे आर्थिक, राजनैतिक तथा प्राकृतिक घटनाएं।

अनुसंधान अभिकल्प की विषयवस्तु

अनुसंधान अभिकल्प की विषयवस्तु को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

1. **शोध–विषय का शीर्षक**– शोध का शीर्षक बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इसके आधार पर अध्ययन किए जाने वाले विषय की प्रकृति व क्षेत्र का ज्ञान होता है। शीर्षक यथासंभव संक्षिप्त होना चाहिए लेकिन साथ ही उसके द्वारा विषय का पर्याप्त ज्ञान भी संभव होना चाहिए।
2. **अध्ययन प्रकृति**– एक शोधकर्ता अन्वेषणात्मक, निदानात्मक, प्रयोगात्मक अथवा विवरणात्मक आदि कौन–सा अध्ययन कर रहा है, यह भी एक अनुसंधान अभिकल्प में स्पष्ट होना चाहिए। भिन्न प्रकार के अध्ययन के लिए भिन्न प्रकार की तकनीक का प्रयोग आवश्यक है। अतएव शोध संरचना में अध्ययन की प्रकृति का स्पष्ट होना आवश्यक है।
3. **अध्ययन का उद्देश्य**– एक शोध संरचना में अध्ययन का उद्देश्य अवश्य लिखा जाना चाहिए। यह वाक्यों अथवा प्रश्नों के रूप में भी होते हैं। प्रमुख उद्देश्यों के साथ सहायक उद्देश्यों का उल्लेख भी आवश्यक है। एक शोधकर्ता को शोध – सरंचना लिखते समय उद्देश्यों का ध्यान रखना आवश्यक है।

टिप्पणी

4. **अध्ययन का क्षेत्र**– अध्ययन को अर्थपूर्ण बनाने के लिए इसके क्षेत्र के बारे में ज्ञान होना अपरिहार्य है। इससे अध्ययन संक्षिप्त या उद्देश्यानुकूल हो जाता है। क्षेत्र का निर्धारण समय, धन तथा समकों की उपलब्धता पर निर्भर करता है। उदाहरणार्थ– लोक उपक्रमों में इस्पात की उत्पादकता विषय का अध्ययन करते समय लोक उपक्रमों में देश अथवा विदेश के क्या सभी इस्पात उपक्रमों को लिया जाएगा अथवा केवल कुछ चुने हुए उपक्रमों को लिया जाएगा। इस्पात में इस्पात को अथवा इस्पात से निर्मित वस्तुओं को सम्मिलित किया जाएगा अथवा नहीं। उत्पादकता में केवल श्रम उत्पादकता की चर्चा की जाएगी अथवा इसमें सभी आगतों जैसे सामग्री, संयंत्र आदि की उत्पादकता भी सम्मिलित है। अतः यदि अध्ययन का क्षेत्र स्पष्ट नहीं किया जाता तो एक शोधकर्ता शोध करते समय भटक सकता है।

4. **साहित्य सर्वेक्षण**– एक शोधकर्ता को अनुसंधान अभिकल्प में साहित्य सर्वेक्षण के संदर्भ में स्पष्ट करना आवश्यक है। साहित्य सर्वेक्षण के अंतर्गत एक शोधकर्ता को यह बताना होता है कि जिस विषय पर वह शोध कर रहा है, उससे संबंधित क्या–क्या साहित्य उपलब्ध हैं और विभिन्न विद्वानों द्वारा संबंधित विषयों पर क्या–क्या शोध किया गया है तथा कौन–सा ऐसा अनुत्तरित प्रश्न है, जिसका शोध करना उसके लिए आवश्यक है। यदि साहित्य सर्वेक्षण न किया जाए तो संपूर्ण शोध कार्य निरर्थक हो सकता है। क्योंकि हो सकता है कि पर्याप्त धन तथा श्रम का अपव्यय करने के पश्चात जो निष्कर्ष उसने निकाले हैं, वे निष्कर्ष पहले से ही कोई शोधकर्ता निकाल चुका हो।

5. **अवधारणा चर एवं परिकल्पना**– अवधारणा तथा चर सुपरिभाषित होने चाहिए। उदाहरण के लिए, कार्यकुशलता एक अवधारणा है। एक अनुसंधान अभिकल्प के अंतर्गत शोध में प्रयुक्त की जाने वाली अवधारणाओं को परिभाषित करना आवश्यक है क्योंकि बिना सुस्पष्ट परिभाषा के यह भय सदैव बना रहेगा कि कोई शब्द कहीं अलग–अलग अर्थों में प्रयुक्त न हो जाए। उदाहरणार्थ, कार्यकुशलता श्रमिकों की भी हो सकती है अथवा मशीनों की भी। श्रमिकों की कार्यकुशलता में निर्माणी श्रमिक सम्मिलित हो सकते हैं अथवा प्रबंधक वर्ग भी। इसी प्रकार चरों की भी सुस्पष्ट व्याख्या होना आवश्यक है जैसे शुद्ध लाभ अनुपात। यहां यह अनुपात शुद्ध लाभ तथा विक्रय दो चरों के मध्य संबंध स्थापित करता है।

अब प्रश्न उठता है कि शुद्ध लाभ से पूर्व से है अथवा नहीं। या शुद्ध लाभ परिचालन लाभ है या इसमें अपरिचालन आय तथा व्यय का भी समायोजन किया गया। इसी प्रकार विक्रय केवल नकद बिक्री है अथवा कुल बिक्री है। क्या विक्रय में ऐसा माल, जो ग्राहक को स्वीकृति के लिए भेजा गया है, सम्मिलित किया गया है अथवा नहीं? इसका भी उल्लेख होना आवश्यक है।

शोध के लाभ

शोध गतिविधियों के अनेक लाभ हैं। प्रमुख लाभ निम्न प्रकार से हैः

1. शोध के द्वारा किसी विषय एवं प्रकरण का अध्ययन गहराई से किया जा सकता है। इससे यह लाभ होता है कि संबंधित विषय में नए आयाम जुड़ते हैं

टिप्पणी

और विषय के क्षेत्र में वृद्धि के साथ–साथ उसे बौद्धिक जगत में मान्यता भी मिलती है।

2. शोध से वैज्ञानिक सोच का विकास होता है। इसलिए कि अनुसंधान में आलोचनात्मक एवं तर्कपूर्ण चिंतन किया जाता है। इससे वैज्ञानिक सोच को बढ़ावा मिलता है। वैज्ञानिक सोच ही मानवता को प्रगति और अभ्युदय की ओर ले जाती है।

शोध की अवधि : एक शोध अभिकल्प में शोध अवधि का स्पष्ट उल्लेख होना आवश्यक है। वाणिज्य संकाय में इसकी आवश्यकता बहुत अधिक है। जैसे राजकीय उपक्रमों का कार्यशील पूंजी विश्लेषण करते समय यदि यह उल्लेख न किया जाए कि यह किस अवधि से संबंधित है तो संभव है कि शोधकर्ता एक ऐसी समयावधि का चुनाव कर ले, जिसका अध्ययन पहले से किया जा चुका है। शोध की अवधि कम से कम पांच या सात वर्ष की अवश्य होनी चाहिए। अन्यथा उन्नति का सही पता नहीं लग पाएगा तथा उसके आधार पर पूर्वानुमान भी लगाना संभव नहीं हो पाएगा। इसके अतिरिक्त समक संग्रहण की विधि, विश्लेषण तथा निर्वचन, शोध की सीमाएं, समय एवं धन की आवश्यकता, घटनाओं को चुनने का प्राथमिक आधार, संदर्भ ग्रंथों की सूची, एक अनुसंधान अभिकल्प में दिया जाना नितांत आवश्यक है।

5.3.4 अनुसंधान चयन की समस्या

किसी समस्या के निवारण हेतु किया जाने वाला अनुसंधान अनुसंधानकर्ता के लिए एक समस्या के रूप में जाना जाता है, जिसे शोधकर्ता सैद्धांतिक एवं प्रायोगिक रूप से अनुभव करता है और उसका समाधान खोजना चाहता है। हम इसे इस तरह भी कह सकते हैं कि "यह वह कथन है, जिसे शोधार्थी प्रतिपादित करता है।" यह एक प्रस्तावित प्रश्न है, जिसका समाधान खोजा जाना है या यह ऐसा कथन है, जिसका परीक्षण किया जाना है। करलिंगर के अनुसार– "समस्या एक प्रश्नवाचक वाक्य अथवा कथन है, जिसमें दो या दो से अधिक चरों के मध्य संबंध ज्ञात किया जाता है।"

टाउनसेण्ड ने भी कहा है कि– "समस्या तो समाधान के लिए प्रस्तावित एक प्रश्न है।"

एक अनुसंधान समस्या के प्रमुख घटक इस प्रकार हो सकते हैं–

1. यह आवश्यक है कि ऐसा व्यक्ति अथवा समूह जिसको कोई समस्या हो। यदि वह व्यक्ति अथवा समूह अनुसंधान के माध्यम से समस्या का समाधान चाहता है, उसे हम अनुसंधान उपभोक्ता (Research Consumer) कहेंगे।
2. अनुसंधान उपभोक्ता का कोई उद्देश्य, लक्ष्य अथवा इच्छा होनी चाहिए, जिससे अनुसंधान के माध्यम से उसे प्राप्त किया जा सके।
3. अनुसंधान समस्या के उद्देश्य को प्राप्त करने हेतु वैकल्पिक माध्यम का होना आवश्यक है।
4. शोधार्थी के मस्तिष्क में विकल्पों के चयन को लेकर संदेह जरूर रहना चाहिए। अर्थात यदि शोधार्थी के मन में संदेह है तो वह अवश्य यह निर्णय लेगा कि कौन–सा रास्ता बेहतर एवं प्रभावकारी है।

अनुसंधान समस्या ऐसी होनी चाहिए, जोकि शोधार्थी से समस्या का सर्वोत्तम समाधान खोजने की अपेक्षा करे।

शोध–समस्या चयन के सिद्धांत

अनुसंधान समस्या का चयन आसान कार्य नहीं है। कोई भी अनुसंधान समस्या चयनित की जाए, उसका चयन बड़ी सावधानीपूर्वक करना चाहिए। अनुसंधान समस्या चयन करने से पूर्व शोधार्थी को गहन अध्ययन करना चाहिए। चयन की जा रही अनुसंधान समस्या के ऊपर अनुसंधान प्रतिवेदनों, अनुसंधान आलेखों आदि का व्यापक अवलोकन करना चाहिए। यदि शोधार्थी को वैज्ञानिक विधि का ज्ञान नहीं है तो वह अनुसंधान कार्य अच्छे ढंग से संपादित नहीं कर पाएगा। शोधार्थी के द्वारा अनुसंधान समस्या का चयन करते समय निम्नलिखित मानदण्डों को ध्यान में रखना चाहिएः

1. समस्या को दो या दो से अधिक चरों के मध्य संबंध को आभिव्यक्त करना चाहिए।
2. बहुत संकीर्ण और अत्यंत अस्पष्ट समस्या के चयन से बचना चाहिए।
3. समस्या को इस प्रकार प्रतिपादित करें, जिससे उसके माध्यम से मानव जाति का कल्याण हो सके।
4. ऐसी समस्या चयनित की जानी चाहिए, जिसका प्रयोगाश्रित परीक्षण (Empirical Test) किया जा सके।
5. समस्या चयन करते समय यह ध्यान रखें कि वह मौलिक हो। मौलिकता अनुसंधान का आधार है।
6. शोधार्थी को अपनी रुचि के अनुकूल समस्या चयनित करनी चाहिए। अर्थात शोधार्थी की रुचि एवं इच्छा के अनुकूल ही अनुसंधान समस्या हो, जिससे कि बेहतर परिणाम प्राप्त हो सके।
7. अनुसंधान समस्या का चयन करते समय पूर्व से किए जा रहे अध्ययनों की जानकारी रखनी चाहिए।
8. अनुसंधान समस्या महत्वपूर्ण होनी चाहिए, जिससे कि इस पर व्यय किए गए समय, श्रम एवं धन को उचित ठहराया जा सके।

गुडे एवं हाट्ट के मानदण्ड

गुडे एवं हाट्ट ने समस्या चयन के लिए निम्नलिखित मानदण्ड दिए हैं–

1. शोधार्थी की अभिरुचि, बुद्धिमता, जिज्ञासा और प्रेरणा।
2. व्यावहार्यता और कार्यान्वयन योग्यता।
3. समस्या की अत्यावश्यकता।
4. प्रत्याशित परिणामों का अनुमान और उनका प्रतिनिधित्व कर रहे क्षेत्र के लिए महत्व।
5. संसाधन, प्रशिक्षण और कर्मचारियों की व्यक्तिगत योग्यता, विशिष्ट उपकरणों, विधियों, समय और प्रयोजक की उपलब्धता, प्रशंसकों का सहयोग।

टिप्पणी

कोचरन और कॉक्स के मानदण्ड

कोचरन और कॉक्स (Cocharan and Cox) ने सुझाव दिया है कि भावी शोधार्थी को निम्नलिखित प्रश्न प्रस्तुत करने चाहिए और अनुसंधान के लिए समस्या का चयन करना चाहिए–

1. क्या विषय क्षेत्र मेरी अभिरुचि का है?
   (अ) क्या अभिरुचि शुद्ध रूप से बौद्धिक है?
   (ब) क्या अभिरुचि आर्थिक प्रतिदान के पुरस्कार, पद के आगे बढ़ने की संभावना और सत्ता में वृद्धि के कारण है?
2. क्या परिणाम प्रायोगिक अथवा व्यावहारिक एवं उपयोगितापरक होंगे?
3. क्या विषय क्षेत्र सत्यापित ज्ञान में अंतरालों को प्रस्तुत करता है, जिन्हें पूरित किए जाने की आवश्यकता है?
4. क्या विषय क्षेत्र को पुनः काम करने अथवा सुधारने की आवश्यकता है?
5. क्या विषय क्षेत्र सत्यापित ज्ञान की वर्तमान सीमाओं से आगे खोज के विस्तार की अनुमति देता है?
6. क्या विषय क्षेत्र मूलभूत एवं महत्वपूर्ण है?

इसलिए समस्या का चयन करते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि समस्या ऐसी हो, जो प्रायोगिक एवं सैद्धांतिक समस्याओं का वास्तविक समाधान प्रदान करे। साथ ही वह वर्तमान वैज्ञानिक ज्ञान की सीमाओं अथवा ज्ञान राशि में वृद्धि करे। समस्या समकालीन महत्व की होने के साथ–साथ ऐसी हो, जो प्रमुख मानवीय समस्याओं का समाधान दे सके।

विषय क्षेत्र एवं प्रकरण

सांख्यिकी क्षेत्र में खोज के लिए कुछ विषय क्षेत्रों एवं प्रकरणों का विवरण इस प्रकार है–

1. सांख्यिकी समंकों का वर्गीकरण तथा सूचीकरण–उपयोग एवं अनुप्रयोग।
2. सांख्यिकीय अनुसंधान/सर्वेक्षण का आयोजन
3. समंकों का संकलन।
4. समंकों का संपादन एवं प्रस्तुतीकरण।
5. समंकों का विश्लेषण।
6. समंकों का निर्वचन तथा प्रतिवेदन तैयार करना।

समस्या का सीमांकन एवं इसके चरण–

समस्या के सीमांकन से आशय अनुसंधान के लिए चयनित समस्या या प्रकरण की सीमाओं के निर्धारण से है। यह सीमांकन विषय–वस्तु की दृष्टि से भी हो सकता है। अर्थात विषय का कितना विस्तार लिया गया है अथवा अध्ययन की भौगोलिक सीमाओं के द्वारा सीमांकन किया जा सकता है। भौगोलिक सीमा गांव, कस्बा, जिला, संभाग, राज्य आदि हो सकती है। शोधार्थी के द्वारा प्रतिदर्श में यह स्पष्ट उल्लेख किया जाता

टिप्पणी

है कि प्रतिदर्श की कौन–सी विधि ली गई है और किन–किन के कालखण्ड का भी निर्धारण किया जा सकता है। इसका लाभ यह है कि अनुप्रयोगी आंकड़े न लेकर उपयोगी आंकड़े संकलित किए जाएं। अनुसंधान समस्या के सीमांकन के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुपालन किया जाना चाहिए:

1. सामान्य रूप में समस्या का कथन

समस्या का प्रतिपादन सामान्य रूप से करना चाहिए। समस्या का कथन करते समय यह ध्यान अवश्य रखें कि वह प्रायोगिक, वैज्ञानिक अथवा बौद्धिक अभिरुचि की हो। इसके लिए शोधार्थी पायलट अध्ययन (Pilot study) कर सकता है। समस्या का कथन करते समय इस बात का भी ध्यान रखें कि उसका जो समाधान दिया जाएगा, उसकी व्यवहार्यता हो।

2. समस्या की प्रकृति को समझना

समस्या का सीमांकन करते समय स्पष्ट रूप से उसकी प्रकृति और मूल को समझना चाहिए। किसी भी समस्या को समझने का सुगम रास्ता यह है कि हम उस समस्या के उद्देश्यों को खोजें। समस्या की प्रकृति को अच्छी तरह समझने के लिए संबंधित विषय के विशेषज्ञों से परामर्श किया जाना चाहिए। शोधार्थी को जिस समस्या का अध्ययन करना है, उसकी प्रकृति, वातावरण एवं क्षेत्र के बारे में उस विषय का ज्ञान रखने वाले विशेषज्ञों से जानकारी लेनी चाहिए।

3. उपलब्ध साहित्य का सर्वेक्षण करना

शोधार्थी को एक विशिष्ट अनुसंधान समस्या की सीमाओं का निर्धारण अथवा सीमांकन करने से पूर्व उस समस्या से संबंधित उपलब्ध संपूर्ण साहित्य का सर्वेक्षण करना चाहिए, जिससे कि उसे संबंधित क्षेत्र के सिद्धांतों, अनुसंधान प्रतिवेदनों, अभिलेखों आदि का ज्ञान हो जाए। उसे, जो अनुसंधान कार्य चल रहे हैं या हो चुके हैं, उनकी समीक्षा करनी चाहिए। इससे शोधार्थी को वर्तमान सिद्धांतों के मध्य अंतराल का पता चलेगा। इसके साथ–साथ यह भी पता चलेगा कि प्रस्तुत अध्ययन करते समय उसे किन–किन कठिनाइयों का सामना करना होगा। विभिन्न अध्ययनों के सर्वेक्षण से शोधार्थी को न केवल उपयोगी सुझाव प्राप्त होंगे अपितु वर्तमान अध्ययन के लिए नई विधियों अथवा मार्ग का भी पता चलता है। इसके माध्यम से शोध को एक नई दिशा प्राप्त होगी।

4. परिचर्चाओं द्वारा विचारों का विकास

शोधार्थी को अपने सहयोगियों, शिक्षकों और उस विशिष्ट विषय पर विशेषज्ञता रखने वाले विशेषज्ञों से परिचर्चा करनी चाहिए। इस परिचर्चा का लाभ यह होता है कि समस्या से संबंधित बहुत से नए विचार मिल जाते हैं। इसे हम अनुभव सर्वेक्षण (Experience survey) के नाम से भी जानते हैं। जिन लोगों के पास अनुभव होता है अगर उनसे बातचीत की जाए तो कुछ न कुछ नई बात उभर कर आती है। इन विशेषज्ञों की सलाह शोधार्थी के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण है।

5. अनुसंधान समस्या का पुनः अभिव्यक्तिकरण

अंतिम रूप से शोधार्थी को अनुसंधान समस्या की प्रक्रिया, प्रस्ताव के रूप में पुनः अभिव्यक्त करनी चाहिए। एक बार यदि समस्या की प्रकृति समझ ली गई है, वातावरण

को परिभाषित कर लिया गया है, परिचर्चाएं कर ली गई हैं, उपलब्ध साहित्य का सर्वेक्षण किया गया है तो समस्या को विश्लेषणात्मक या उसे कार्यात्मक पदों में पुनः अभिव्यक्त करना कठिन कार्य नहीं है। पुनः अभिव्यक्त करने के द्वारा शोधार्थी अनुसंधान समस्या को जहां तक संभव हो सकता है, विशिष्ट पदों के रूप में प्रस्तुत करता है, जिससे कि यह व्यावहारिक रूप से कार्य करने में सक्षम हो जाए। साथ ही यह शोधार्थी को प्रक्रिया परिकल्पना (Working hypothesis) के विकास में सहायता कर सकती है।

इसके अतिरिक्त अनुसंधान समस्या का सीमांकन करते समय निम्नलिखित बिंदुओं को भी ध्यान में रखा जाना चाहिए–

(अ) जो भी तकनीकी पद, शब्द अथवा वाक्यांश प्रयोग किए जाएं, उनका अनुसंधान में क्या आशय है? इसको स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए।

(ब) अनुसंधान समस्या से संबंधित मूलभूत अवधारणाओं का कथन स्पष्ट रूप से किया जाना चाहिए।

(स) अनुसंधान के मूल्य का स्पष्ट कथन दिया जाना चाहिए।

(द) समस्या का सीमांकन करते समय उपलब्ध तथ्यों के स्रोत और काल खण्ड की उपयुक्तता पर विचार करना चाहिए।

(य) अनुसंधान समस्या का निर्धारण करते समय अनुसंधान का क्षेत्र और उसकी सीमाओं का स्पष्ट उल्लेख किया जाना चाहिए।

अपनी प्रगति जांचिए

3. "नवीन ज्ञान प्राप्ति के व्यवस्थित प्रयत्न को शोध कहते हैं।" उपरोक्त कथन किस अर्थशास्त्री का है?

   (क) जोन वेस्ट (ख) स्पार एवं स्वेंसन

   (ग) रेडमैन तथा मोरी (घ) पी.एम. कुक

4. शोध का उद्देश्य जब कार्य-करण संबंधित खोज हो तब वह कौन-सा शोध कहलाता है?

   (क) विवरणात्मक शोध (ख) अन्वेषणात्मक शोध

   (ग) निदानात्मक शोध (घ) प्रयोगात्मक शोध

5.4 परिकल्पना : अवधारणा एवं प्रकार

परिकल्पना अथवा प्राक्कलन एक जनसंख्या के बारे में एक कथन या मान्यता है। निर्णय करने के उद्देश्य में प्राक्कलन को सत्यापित करना होता है तब इसे स्वीकार या अस्वीकार किया जाता है। यह विश्लेषण की मदद से किया जाता है। हम प्रतिदर्श की जाँच करते हैं और ज्ञात परिमाण के आधार पर निर्णय लेते हैं। निर्णय करने की प्रक्रिया का विभिन्न क्षेत्रों में सार्थक उपयोग होता है जैसे विपणन, व्यवसाय और प्रबंधन।

टिप्पणी

सांख्यिकी निर्णय प्रक्रिया और परिकल्पना

एक प्रतिदर्श के आधार पर सांख्यिकी प्राक्कलन की जाँच से हमें प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने का निर्णय लेने में मदद मिलती है। प्रतिदर्श के आँकड़े हमें प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने में समर्थ करते हैं। जब प्रतिदर्श के आँकड़े हमें जनसंख्या के बारे में अपूर्ण सूचना प्रदान करें तो परीक्षण के नतीजों को अंतिम या अचुनौती योग्य नहीं समझना चाहिए। प्रतिदर्श नतीजों पर आधारित प्रक्रिया जो प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय को समर्थ करती है। इसे प्राक्कलन परीक्षण (*Hyposthesis Testing*) या सार्थकता परीक्षण (*Test of Significance*) कहते हैं।

Note 1:—परीक्षण जो प्राक्कलन के विरुद्ध सबूत, अगर कोई है देता है, को सामान्यत: शून्य प्राक्कलन *(Null Hyposthesis)* कहते है। परीक्षण से यह सिद्ध नहीं होता की प्राक्कलन को सही करना है। यह इसके विरुद्ध कुछ सबूत दे सकता है।

प्राक्कलन परीक्षण प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय लेने की प्रक्रिया है।

अगर प्रतिदर्श में अतर्कसंगत प्रायिकता (घटना का स्तर) (सार्थकता स्तर) है तो प्राक्कलन अस्वीकार होगा। साधारणत: प्रायिकता स्तर 0.05 और 0.01 लिया जाता है। इनको 5% और 1% सार्थकता स्तर कहते हैं।

Note 2:—प्राक्कलन की स्वीकारिता का अर्थ है कि अगर कोई प्रतिदर्श में कोई सबूत है तो हमें दूसरी तरह से विश्वास करना चाहिए।

प्राक्कलन की अस्वीकारिता हमें बताता है कि यह गलत है। इस तरह से समस्या रखना आसान है क्योंकि समस्या में अनिश्चिता होती है। इस संदर्भ में हमें हमेशा विस्तार से प्राक्कलन को बतलाना चाहिए जिसे हम अस्वीकार करना चाहते हैं।

प्राक्कलन, जिसे अस्वीकार करना है, को शून्य प्राक्कलन (*Null Hypothesis*) कहते हैं और इसे H_0 से संकेत करते है।

अगर H_0 को अस्वीकार करते हैं तो यह एक स्वीकारिता के वैकल्पिक प्राक्कलन को बताता है जिसे H_1 से संकेत करते है।

उदाहरणत: एक नये *Fragrance Soap* को बाजार में लाया गया है। शून्य प्राक्कलन H_0, जो अस्वीकार किया जायेगा, बताता है कि नया *Soap* पुराने से अच्छा नहीं है।

इसी तरह एक *die* को फेकने में संदेह है। *die* को किसी

शून्य प्राक्कलन $H_0 : P = \dfrac{1}{\sigma}$ छ: दिखाने के लिए

वैकल्पिक प्राक्कलन $H_1 P \neq \dfrac{1}{\sigma}$

उदाहरणत:, किसी दुर्घटना की जगह पर पायी गई खोपड़िया *Race X* या *Y* से उनके व्यास के आधार पर संबंधित हो सकती है। हम जनसंख्या माध्य m जो खोपड़ी आने को वर्णित करता है का प्राक्कलन परीक्षण कर सकते है। हमारे पास निम्नलिखित प्राक्कलन है।

$$H_0 : \mu = \mu_x,$$

$$H_1 : \mu = \mu_y$$

यहाँ हमें शून्य प्राक्कलन पर जोर नहीं देना चाहिए। क्योंकि सुरक्षित प्राक्कलन भी सही हो सकता है।

टिप्पणी

5.4.1 परिकल्पना के प्रकार

परिकल्पना के दो प्रकार होते हैं- शून्य और वैकल्पिक परिकल्पना।

(क) शून्य परिकल्पना : जिस प्राक्कलन की जाँच करनी होती है, उसे शून्य परिकल्पना कहते हैं और इसे H_0 से संकेत करते हैं।

(ख) वैकल्पिक परिकल्पना : जिस प्राक्कलन को किसी दूसरे संभव स्तर के विरूद्ध जाँच किया जाता है उसे वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं। वैकल्पिक को साधारणतः H_1 से संकेत किया जाता है।

शून्य प्राक्कलन का अर्थ है कि सांख्यिकी और जनसंख्या प्राचल में कोई अंतर नहीं है। प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}$ और जनसंख्या m के बीच कोई अंतर नहीं है, का परीक्षण करने में हम शून्य प्राक्कलन लिख सकते हैं।

$$H_0 : \bar{X} = \mu$$

वैकल्पिक प्राक्कलन होगा,

$$H_1 : \bar{X} = \mu$$

इसका अर्थ है $\bar{X} > \mu$ या $\bar{X} < \mu$। इसे दो- Tailed प्राक्कलन कहते है।

वैकल्पिक प्राक्कलन $H_1 : \bar{X} > \mu$ दायाँ Tailed है।

वैकल्पिक प्राक्कलन $H_1 : \bar{X} < \mu$ बायाँ Tailed है।

यह एक पक्षीय या one tailed प्राक्कलन है।

Note 1—वैकल्पिक प्राक्कलन H_1 प्राचल के सारे मूल्य जिनका शून्य प्राक्कलन वर्णन नहीं करता है को समाविष्ट करता है।

Note 2—सांख्यिकीय प्राक्कलन परीक्षण एक नियम है जो प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय में मार्गदर्शन करता है।

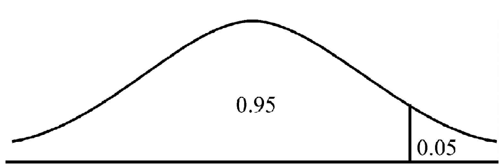
One tailed परीक्षण शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार करता है जब प्रतिदर्श सांख्यिकी जनसंख्या मूल्य से बड़ा हो या छोटा हो किसी निश्चित सार्थकता स्तर पर।

1. हम अगर प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}$ जनसंख्या माध्य m से अधिक है, का परीक्षण करना है। तब शून्य प्राक्कलन होगा।

$$H_0 : \bar{X} > \mu$$

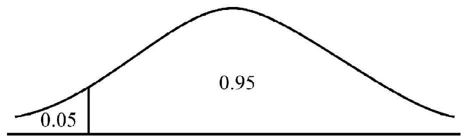
2. दूसरे स्थिति में शून्य-प्राक्कलन होगा,

$$H_1 : \bar{X} < \mu$$



टिप्पणी

$$H_0:\ \bar{X} > \mu$$



$$H_0:\ \bar{X} < \mu$$

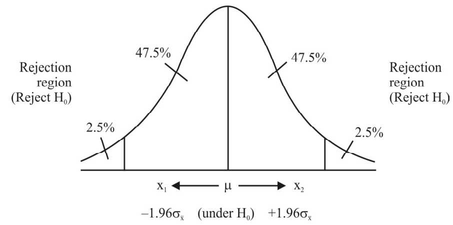
यह दोनों स्थितियाँ *one tailed* परीक्षण पर पहुँचती हैं और इसे *two tailed* परीक्षण की तरह प्रयोग करना चाहिए। यहाँ आलोचनात्मक अस्वीकारिता एक पक्ष से होगी दायाँ पक्ष के लिए $\bar{X} > \mu$ और बाये पक्ष के लिए $\bar{X} < \mu$। दोनों चित्र यहाँ 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर दिखाते हैं।

5.4.2 परिकल्पना परीक्षण की प्रक्रिया

परिकल्पना परीक्षण की सामान्य प्रक्रिया में निम्नलिखित स्तर होते हैं।

1. **शून्य-परिकल्पना के साथ-साथ वैकल्पिक प्राक्कलन का मूल्यांकन इसका अर्थ है** जिस जनसंख्या का परीक्षण करना है, के प्राचल के काल्पनिक मान का मूल्यांकन। उदाहरणतः माना कि हमें यह प्राक्कलन करना है कि हमारे कॉलेज छात्रों का औसत *IQ 130* है। इस प्राक्कलन का परीक्षण करना चाहते है। तब यह हमारा शून्य-प्राक्कलन बन जायेगा और वैकल्पिक प्राक्कलन होगा कि यह औसत *IQ 130* नहीं है। इन कथनों का वर्णन निम्नलिखित हैं।
$$H_0 : \mu = 130$$
$$H_1 : \mu \neq 130$$
2. **प्रतिचयन के सार्थकता उत्तर युग्मों को स्थापित करना** सार्थकता स्तर *Type* त्रृटि करने की प्रायिकता को सूचित करता है और सामान्यतः इसे 0.05 के बराबर लिया जाता है। जिसका अर्थ है कि प्राक्कलन परीक्षण के बाद और निर्णय लेने के बाद हम शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने की त्रृटि करते हैं जब यह सत्य है, 5 प्रतिशत के आधार पर। कभी-कभी a का मूल्य 0.01 स्थापित किया जाता है परन्तु यह शोधकर्त्ता पर निर्भर करता है स्थिति या विश्लेषण की संवेदनशीलता के आधार पर वह मान को चुनता है।
3. **एक उचित सांख्यिकी का निर्धारण–** इसका अर्थ है दिए गए आँकड़ों की जानकारी के आधार पर स्थिति या विश्लेषण के अंतर्गत उचित प्रायिकता वितरण का चुनाव/ सामान्य वितरण में z अंक सारणी या T-वितरण (छोटे प्रतिदर्श के लिए आगे चर्चा होगी।) का अक्सर उपयोग होता है।
4. **अस्वीकारिता (आलोचनात्मक) क्षेत्र को परिभाषित करना।:** आलोचनात्मक क्षेत्र (*Critical Region*) को सार्थकता स्तर के मान में चुनाव के आधार पर स्थापित किया जायेगा। उदाहरणतः अगर हम d का मान 0.05 चुनते है और हम जनसंख्या प्रचाल μ का परीक्षण करने के लिए मानक सामान्य वितरण को हमारे सांख्यिकी परीक्षण के रूप में उपयोग करते हैं, तब जैसा हमने पहले चर्चा की है,

शून्य प्राक्कलन की मान्यता (जनसंख्या प्रचाल का मानक मान) और प्रतिदर्श परिणाम के विश्लेषण से प्राप्त मान का अंतर का अनुमान $\alpha = 0.05$ पर ± 1.96 $\sigma_{\bar{X}}$ से ज्यादा का माना जाता है। इस संबंध को निम्नांकित आरेख से दिखाया जा सकता है।



इस आरेख में, यदि प्रतिदर्श सांख्यिकी $\bar{X}$ शून्य प्राक्कलन के मान्यता का अन्तराल m के काल्पनिक मान 1.966 $\bar{X}$ के अंदर रहता है तब 95 प्रतिशत के विश्वास स्तर (या 0.5 सार्थकता स्तर) पर शून्य प्राक्कलन को शुद्ध मानकर स्वीकार करते हैं। $\bar{X}$ और m का अंतर जो X_1 और m या x_2 और m के बीच कोई भी हो सकता है और m को आकस्मिक या संयोग तत्व के कारण m को सार्थक नहीं मानना या पर्याप्त कारण से शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करना। इसलिए सभी व्यवहारिक क्रिया के लिए $\bar{X}$ के मान को m के बराबर माना जाता है $\bar{X}$ आरेख में दर्शाए X_1 और X_2 के बीच कोई भी मान हो सकता है। तथापि अगर $\bar{X}$ का मान उपरी भाग में x_2 के नीचे रहता है या नीचली भाग में x_1 के नीचे तब $\bar{X}$ का मान और m के अंतर को सार्थक समझा जायेगा और यह शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार करने का कारण होाग। तब समय का 5 प्रतिशत $\bar{X}$ के मान और m के मान को अंतर समय के 2.5 प्रतिशत से सार्थक होगा $\bar{X}\,m$ से बहुत ज्यादा ऊपर (X_2 के नीचे) होगा और m समय के 2.5 प्रतिशत के बहुत नीचे (x_1 के नीचे) होगा और अस्वीकारिता का क्षेत्र वक्र के पिछले क्षेत्र में माध्य के विस्तार के दोनों तरफ होगा। इस अस्वीकारिता क्षेत्र को आलोचनात्मक क्षेत्र कहते हैं।

5. **आँकड़ा संग्रह और प्रतिदर्श विश्लेषण (Data Collection and Sample Analysis)**–इसमें प्रतिदर्श के आँकड़ों का वास्तविक संग्रह और गणना होती है। पूर्व स्थापित आकार n के प्रतिदर्श का संग्रह और जनसंख्या प्रचाल के अनुमान की गणना की जाती है। यह अनुमान सांख्यिकी परीक्षण मान होता है। उदाहरणतः, अगर जनसंख्या माध्य μ के प्राक्कलन का परीक्षण कर रहे हैं तब सांख्यिकी परीक्षण प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}$ होगा। तब हम यह सांख्यिकी परीक्षण प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}$ होगा। तब हम यह सांख्यिकी परीक्षण करेंगे कि यह आलोचनात्मक क्षेत्र के अंदर रहता है या स्वीकारिता क्षेत्र में। उदाहरण के लिए अगर हम कॉलेज के छात्रों का औसत IQ 130 है यह परीक्षण करना चाहते हैं तब हमारे जनसंख्या माध्य μ को परीक्षण करना होगा। हम दिए गए आकार n से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लेंगे और

टिप्पणी

इसके माध्य $\bar{X}$ की गणना करेंगे फिर हम यह परीक्षण करेंगे कि $\bar{X}$ का मान दिए गए सार्थकता स्तर में स्वीकारिता क्षेत्र या आलोचनात्मक क्षेत्र में रहता है।

6. **निर्णय लेना** (Making the Decision)—सांख्यिकी निर्णय करने के पहले एक निर्णय नियम को स्थापित करना होगा। ऐसा नियम जिसके आधार पर शून्य प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करना है। निर्णय नियम परीक्षण के प्रत्यक्ष क्रिया के लिए एक औपचारिक कथन होता है। उदाहरणत: यह नियम ऐसा हो सकता है : शून्य प्राक्कलन को स्वीकार करे यदि प्रतिदर्श सांख्यिकी $\bar{X}$ का मान स्वीकारिता क्षेत्र के अंदर रहता है नहीं तो शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार करे।

   नियम स्थापित करने पर शून्य-प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार किया जा सकता है।

एक सिरे और दो सिरे वाला परीक्षण (One Tail and Two Tail Tests)

जैसा हमने अब तक प्रतिदर्श सांख्यिकी $\bar{X}$ या तो बहुत ज्यादा ऊपर या बहुत ज्यादा नीचे हो जनसंख्या प्राचल के, की स्थिति में शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार करने पर चर्चा की है; जिसका अर्थ है अस्वीकारिता का क्षेत्र सामान्य वक्र के दोनों सीमांत (या सीमा) में होता है। उदाहरणत: यदि हम कॉलेज के छात्रों का औसत IQ 130 के बराबर है इसका परीक्षण कर रहे हैं। तब शून्य प्राक्कलन $H_0 : \mu = 130$ अस्वीकार होगा यदि चयलित प्रतिदर्श ऐसा माध्य $\bar{X}$ देता है जो या μ की तुलना बहुत ज्यादा या कम हो।

इसका वर्णन इस तरह कर सकते हैं।

$$H_0 : \mu = 130$$
$$H_1 : \mu \neq 130$$

इसका अर्थ है कि $\alpha = 0.05$ (9.5% विश्वास अंतराल) पर H_0 को स्वीकार करने के लिए $\bar{X}$ का मान μ का के काल्पनिक मान $\pm 1.96\ \sigma_{\bar{X}}$ के अंदर होना चाहिए।

शून्य प्राक्कलन दूसरे शब्दों में, $\dfrac{\bar{X} - \mu\left(H_0 \text{ के अंदर}\right)}{\sigma_{\bar{X}}}$ ± 1.96 से कम होना चाहिए (पद $\dfrac{\bar{X} - \mu\left(H_0 \text{ के अंदर}\right)}{\sigma_{\bar{X}}}$ को आलोचनात्मक अनुपात या CR कहते हैं)।

इसका अर्थ है, $\alpha = 0.05$ परख H_0 को स्वीकार करें यदि आलोचनात्मक प्रतिशत CR ± 1.96 के अंदर है और H_0 को अस्वीकार करें यदि CR –1.96 से कम है या +1.96 से अधिक है। अगर यह सटीक 1.96 है तब हम H_0 को स्वीकार कर सकते हैं।

दूसरी तरफ कुछ स्थितियों में अस्वीकारिता क्षेत्र वक्र के एक सीमांत के नीचे रहता है जो या तो सीमा के दाँये सीमांत या सीमा के बाँयें सीमांत में हो सकता है। इस स्थिति के परीक्षण को एक-सीमा परीक्षण (one tailed test) के नाम से जानते हैं और शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार करते हैं यदि प्रतिदर्श सांख्यिकी का मान केवल इस एक अस्वीकारिता क्षेत्र में रहता है।

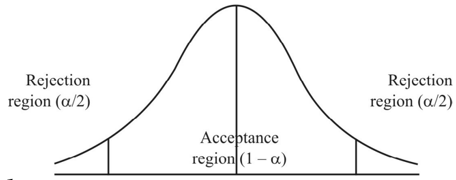
टिप्पणी

उदाहरणतः, माना कि हम 9 *Volt* बैटरी का उत्पादन कर रहे हैं और हम दावा करते हैं कि हमारी बैटरी एक औसत μ 100 घंटे तक चलती है। यदि कोई हमारे दावे की सत्यता का परीक्षण करना चाहता है तो वह हमारे बैटरी में से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श ले सकता है और इस प्रतिदर्श का औसत ($\bar{X}$) ज्ञात कर सकता है। वह हमारे दावे को अस्वीकार कर सकता है यदि $\bar{X}$ का परिकलित मान 100 घंटे से कम हो परन्तु यदि $\bar{x}$ का मान 100 से अधिक हो तो वह दावे को अस्वीकार नहीं कर सकता है। यहाँ इस स्थिति में अस्वीकारिता क्षेत्र वक्र के बायें सीमा के सीमांत में होगा।

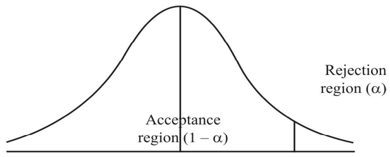
समानतः, यदि हम कम कैलोरी वाली *Ice Cream* बनाते हैं और हम दावा करते हैं कि 500 कैलोरी प्रति पाउंड के औसत से इसमें कैलोरी है और एक शोधकर्ता हमारे दावे का परीक्षण करना चाहता है तो वह एक प्रतिदर्श लेकर $\bar{x}$ का मान परिकलित कर सकता है।

अगर $\bar{x}$ का मान 500 कैलोरी से बहुत ज्यादा हो तब वह हमारे दावे को अस्वीकार कर देगा। किन्तु यदि $\bar{x}$ का मान 500 से बहुत अधिक हो तो वह हमारे दावे को अस्वीकार कर सकता है। परन्तु अगर $\bar{x}$ का मान 500 कैलोरी से बहुत कम हो तो वह हमारे दावे को अस्वीकार नहीं कर सकता है। यहाँ इस विश्लेषण में अस्वीकारिता क्षेत्र वक्र के केवल दायें सीमा का सीमांत होगा। इन अस्वीकारिता और स्वीकारित क्षेत्र को सामान्य वक्र आरेख में नीचे दर्शाया गया है।

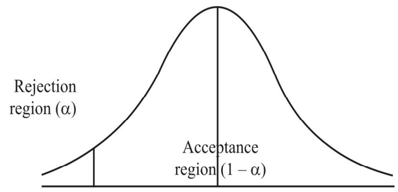
(a) *Two-tailed test*



(b) *Right-tailed test*



(c) *Left-tailed test*



जनसंख्या माध्य का परीक्षण (वृहत प्रतिदर्श) [Test Involving a Population Mean (Large Sample)]

इस तरह के परीक्षण में समान जनसंख्या से लिए गए प्रतिदर्श के गणित प्रतिदर्श माध्य की तुलना में दिया गया माध्य तार्किक है या नहीं जाँचने का निर्णय शामिल रहता है।

टिप्पणी

जनसंख्या से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है और इसके सांख्यिकी $\bar{X}$ की गणना की जाती है। जनसंख्या माध्य μ के बारे में एक मान्यता ली जाती है कि यह प्रतिदर्श माध्य के बराबर है और $\left(\bar{X}-\mu\right)$ का अंतर सार्थक है या नहीं यह देखने के लिए एक परीक्षण किया जाता है। (यह अंतर सार्थक नहीं होता है यदि यह दिए गए सार्थकता स्तर में स्वीकारिता क्षेत्र के अंदर रहता है यदि यह अस्वीकारिता क्षेत्र या क्रांतिक क्षेत्र के अंदर रहता है तो यह सार्थक होता है।

यह भी ध्यान में रखें कि यदि जनसंख्या अज्ञात है तो इसे समान रूप से बाँटा जायेगा। तब प्रतिदर्श का आकार वृहत होगा। सामान्यत: 30 से ज्यादा। यदि जनसंख्या ज्ञात है और समान रूप से वितरित है और जनसंख्या का मानक विचलन ज्ञात है तो एक छोटा प्रतिदर्श का आकार भी स्वीकार होगा।

एक समानुपात में शामिल परीक्षण (Tests Involving a Single Proportion)

अब तक हमने जनसंख्या प्राचल μ के साथ काम किया है जो मात्रात्मक आँकड़ों को परिवर्तित करता है। यह गुणात्मक आँकड़ों के लिए उपयोगी नहीं होता। ऐसे गुणात्मक आँकड़ों के लिए प्राचल की अभिरूपी है कि जनसंख्या समानुपात घटना के किसी एक परिणाम का समर्थन करता है। बहुत सारी स्थितियों में हमें अवश्य ही जनसंख्या समानुपात या प्रतिशत के बारे में कथन की वैद्धयता का परीक्षण करना चाहिए। उदाहरणत: अगर कोई नेता यह दावा करता है कि किसी दिए विषय पर 60 प्रतिशत जनसंख्या उसके विचार का समर्थन करती है तो हम इस दावे को व्यक्तियों के यादृच्छिक प्रतिदर्श से परीक्षण कर सकते हैं और इस नेता के बारे में व्यक्तियों के विचार पूछ सकते हैं और व्यक्तियों के प्रतिशत का औसत ज्ञात कर सकते हैं और व्यक्तियों के प्रतिशत का औसत ज्ञात कर सकते हैं जो उसके विचार का समर्थन करते हैं और फिर परीक्षण कर सकते हैं कि प्रतिदर्श प्रतिशत जनसंख्या प्रतिशत के उसके दावे से सार्थक रूप से भिन्न है। यह तकनीक गुणात्मक आँकड़ों के विश्लेषण में उपयोगी है जहाँ हम किसी गुण के उपस्थित या अनुपस्थित होने पर परीक्षण कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम बेरोजगारी स्थिति पर सरकार के आँकड़ों की सत्यता का परीक्षण करना चाहते हैं। माना कि सरकार के आँकड़े संकेत देते हैं कि श्रमिकों का 9 प्रतिशत बेरोजगार है। हम हमेशा यादृच्छिक प्रतिदर्श ले सकते हैं और इसकी सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

इस तरह के आँकड़े द्विपद वितरण (Binomial Distribution) का अनुसरण करते हैं।

प्रतिदर्श समानुपात $\quad p = \dfrac{x}{n}$

अगर n वृहत हो तो $\quad np \geq 5$

और $\quad n\,(1-p) \geq 5$

तब यह लगभग सामान्य वितरण होगा और Z सांख्यिकी परीक्षण का उपयोगा होगा।

टिप्पणी

जहाँ,
$$Z = \frac{p-\pi}{\sigma_P}$$
π = जनसंख्या समानुपात

p = प्रतिदर्श समानुपात

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \quad \text{या} \quad \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

फिर Z का परिकलित मान से Z के क्रांतिक मान की तुलना होगी, शून्य-प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के लिए।

5.4.3 परिकल्पना का परीक्षण एवं त्रुटियां

एक सामान्य प्राक्कलन वह है जो पूर्ण जनसंख्या वितरण का महत्त्व बताता है।

उदाहरणत:

1. $H_0 : X \sim Bi(150, 1/2), p$ दिया है $(p = 1/2)$
2. $H_0 : X \sim N(8,30)$, μ और s^2 दिया है।

एक मिश्रित जनसंख्या वितरण प्राक्कलन पूर्णत: विनिर्दिष्ट नहीं होता है। निम्नलिखित उदाहरण इस तथ्य को स्पष्ट कर देगा।

1. $X \sim Bi(150, p)$ और $H_1 : p > 0.5$
2. $X \sim N(0,S^2)$ और $H_1 : s^2$ विनिर्दिष्ट नहीं है।

मिश्रित प्राक्कलन में एक या अधिक स्वतंत्र प्राचल होते हैं। हम रेडियोएक्टिव तत्व के कण के क्षय पूर्णत: घातांकीय होता है अज्ञात जीवनसीमा के साथ के प्राक्कलन का उल्लेख कर सकते हैं। यह एक मिश्रित प्राक्कलन है।

सामान्य प्राक्कलन का परीक्षण

भाषा अभियंत्रण के बहुत से अनुप्रयोग में प्राक्कलन परीक्षण की आवश्यकता होती है। माना कि हमें किसी व्यक्ति के व्याख्यान के पढ़ने या स्वत: व्याख्यान करने में अंतर करना है। अगर परीक्षण का उद्देश्य पढ़ने या स्वत: व्याख्यान करने में चुने सांख्यिकी के आधार पर अंतर करना है। अगर परीक्षण का उद्देश्य पढ़ने या स्वत: व्याख्यान करने में चुने सांख्यिकी के आधार पर अंतर करना है और माध्य स्वर समय को दोनों स्थिति में अंकित करना है। यह सामान्य प्राक्कलन परीक्षण है क्योंकि यह एक जनसंख्या प्राचल को सम्मिलित करता है।

किसी विश्लेषण के संभावीय परिणाम के बारे में वैकल्पिक अभिकथन इस परीक्षण की परिकल्पना में निहित रहती है। एक अभिकथन दोनों विश्लेषण के कोई अंतर नहीं है। यह शून्य प्राक्कलन के जिसे H_0 से संकेत करते हैं। जिसका अभिकथन है पढ़ने में स्वर के माध्य इकाई का समय बराबर है स्वत: व्याख्यान करने के।

यहाँ दूसरा अभिकथन यह हो सकता है जिसे हम वैकल्पिक प्राक्कलन कहते हैं जिसे H_1 या H_a से संकेत करते हैं। एक वैकल्पिक प्राक्कलन का कथन हो सकता है

कि व्याख्यान पढ़ने का समय स्वतः व्याख्यान से कम होगा। एक सेकेंड भी इसे उलट सकता है।

टिप्पणी

एक सिरे या दो सिरे वाला प्राक्कलन

किसी वैकल्पिक प्राक्कलन के चुनाव का निर्णय कार्य के लिए भाषा अभियंता के एक दिशा या दूसरे के अंतर लिखित करने के कारक पर निर्भर करता है। इन उदाहरण को अंतर एक दिशा में करने या दोनों दिशा में करने के आधार पर एक सिरे या दो सिरे वाले प्राक्कलन के रूप में निर्दिष्ट करना चाहिए। यहाँ पढ़ने और स्वतः व्याख्यान करने के माध्य में वृहत अंतर अनुसरित दिशा के प्रति लापरवाह वैकल्पिक प्राक्कलन के पक्ष में सबूत दे सकता है।

यह महत्वपूर्ण है एक सिरे और दो सिरे वाले परीक्षण में विभेदीकरण करना। यह शून्य प्राक्कलन का समर्थन करता है और सार्थक अंतर के अभिकथन के निर्णय को प्रभावित करता है। एक सिरे वाला परीक्षण में दो सिरे वाले परीक्षण की तुलना में छोटे माध्य के अंतर की आवश्यकता होती है। दोनों विश्लेषण पढ़ने और स्वतः व्याख्यान करने में अभिकलित समय और समान वकता से लिया गया प्रतिदर्श। परन्तु यदि इसे स्वतंत्र समूह से संबंधित समूह परीक्षण की आवश्यकता होती है तो सांख्यिकी की गणना ऐसे होगी।

$$\text{सांख्यिकी की गणना} + = \frac{\text{विश्लेषण}_1 \text{ का माध्य} - \text{विश्लेषण}_2 \text{ का माध्य}}{\text{अंतर का S.E.}}$$

20 वक्ताओं का अंकित माध्य स्वर इकाई समय 38.6 सेंटी सेकेंट और स्वतः व्याख्यान का समय 33.4 सेंटी सेकेंड और माध्य के अंतर का मानक विचलन 2.65 है तब सांख्यिकी का मान 1.96 [= (38.6 – 33.4) / 2.65] होगा। इस t मान का उपयोग प्रतिदर्श माध्य जो समान (शून्य-प्राक्कलन) या भिन्न (वैकल्पिक प्राक्कलन) वितरण से हो की भिन्नता को स्थापित करने में किया जाता है।

निर्णय नियम का निर्माण वैकल्पिक प्राक्कलन के समर्थन स्तर का निर्धारण करने में किया जाता है। मूलतः इसमें समान वितरण के प्रतिदर्श की मान्यता का अनुबंध रहता है। परंतु यदि माध्य की प्रायिकता में अधिक भिन्नता होती है तो कोई एक भिन्न जनसंख्या से लिए गए प्रतिदर्श से वैकल्पिक उपसंहार के बारे में सोच सकता है।

ऐसा अनुबंध खंडित प्रायिकता स्तर पर किया जाता है। अगर वहाँ प्रतिदर्श के समान वितरण से संबंध रखने का 5 प्रतिशत से कम संयोग है तब यह प्राक्कलन सार्थकता स्तर पर भिन्न वितरण से लिए गए प्रतिदर्श वैकल्पिक प्राक्कलन का समर्थन करता है। अगर वहाँ प्रतिदर्श के समान वितरण से संबंध होने का 5 प्रतिशत से अधिक संयोग है तो शून्य-प्राक्कलन का समर्थन होगा। परिकल्पित उदाहरण में t का मान 1.96 पर 19 स्वातन्त्र्य कोटी (*Degree of Freedom*) यह नहीं बताता है कि प्रतिदर्श भिन्न जनसंख्या से लिए गए हैं। इसलिए शून्य प्राक्कलन स्वीकार होगा।

परीक्षण सांख्यिकी

यह आँकड़ों के प्रतिदर्श से परिकलित प्राचल का निर्धारण करता है जो शून्य प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के निर्णय में उपयोगी होता है।

प्राक्कलन परीक्षण के सांख्यिकी परीक्षण को दिया गया है।

$$Z = \frac{Y - \mu_0}{\sigma_7}$$

$$= \frac{Y - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$ जहाँ संकेत का अर्थ साधारण है।

टिप्पणी

क्रांतिक मान (*s*)

इसका वर्णन शून्य-प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने के मापदंड का निर्णय करने के लिए उपयोगी प्रारंभिक मान के रूप में किया जा सकता है। यह परीक्षण के सार्थकता स्तर पर निर्भर करता है।

सार्थकता स्तर

सार्थकता स्तर का अर्थ है कि प्रतिचयन उच्चावनों के कारण अधिक से अधिक कितनी संख्याएं गलत हो सकती हैं। यद्यपि सार्थकता स्तर कुछ भी हो सकता है किंतु व्यवहार में 1 प्रतिशत तथा 5 प्रतिशत सार्थकता-स्तर का प्रयोग ही अधिक प्रचलित है। इन दोनों स्तरों में से 5 प्रतिशत का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर का अर्थ है कि प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण अधिक से अधिक 5 प्रतिशत संख्याएं गलत हो सकती हैं जबकि 1 प्रतिशत सार्थकता का अर्थ है कि उच्चावचनों के कारण अधिाक से अधिक 1 प्रतिशत संख्याएं गलत हो सकती हैं।

इसे शून्य-प्राक्कलन को गलत रूप से अस्वीकार करने के लिए निश्चित प्रायिकता के रूप में दिया रहता है और प्रकार I त्रुटि की प्रायिकता है। इसका निर्णय शोध करने वाले व्यक्ति या शाखा करती है।

क्रांतिक क्षेत्र

इस क्षेत्र का वर्णन प्राक्कलन परीक्षण में शून्य-प्राक्कलन के अस्वीकारिता के कारण के सांख्यिकी परीक्षण समूह के रूप में करते हैं। इसके लिए प्रतिदर्श को दो परस्पर अपवर्जी क्षेत्र में बाँटा जाता है। यह क्षेत्र शून्य-प्राक्कलन H_0 को अस्वीकार करने का आधार देता है।

P मान

यह एक प्रायिकता मान है जो p मान के रूप में जाना जाता है। यह शून्य-प्राक्कलन द्वारा दिया गया यथार्थ मान और एकल संयोग द्वारा विश्लेषित मान की तुलना में सांख्यिकी परीक्षण में सीमांत मान प्राप्त करने की प्रायिकता है। यह शून्य-प्राक्कलन को गलत रूप से अस्वीकार करने की प्रायिकता है।

प्रभाव

एक सांख्यिकी प्राक्कलन परीक्षण का प्रभाव शून्य-प्राक्कलन को अस्वीकार जब यह यथार्थ रूप से गलत हो को मापने की क्षमता है। इसलिए प्रभाव से ही सही निर्णय लिया जाता है। इसे पुन: बताया जा सकता है कि प्रभाव प्रकार II की त्रुटि नहीं करना है। इसे दिया जाता है प्रकार II त्रुटि करने की प्रायिकता को 1 से घटाना।

गणितीय रूप से लिखा जा सकता है।

प्रभाव $= 1 - P$ (प्रकार II त्रुटि) $= (1 - \beta)$?

परीक्षण का अधिकतम प्रभाव 1 हो सकता और न्यूनतम σ हो सकता है। हम ऐसा परीक्षण करना चाहते हैं जिसमें उच्च प्रभाव हो। के समकक्ष/सामान्यत: 0.8 को सही निर्णय प्रक्रिय के लिए अच्छा माना जाता है।

टिप्पणी

प्रमाप त्रुटि

सांख्यिकी के प्रमाप त्रुटि (S.E.) की धारणा का उपयोग प्रतिदर्श की परिशुद्धता का परीक्षण करने में और अनुकूल जनसंख्या प्राचल के लिए विश्वास सीमा देने में किया जाता है।

सांख्यिकी प्रतिदर्श अंकगणितीय माध्य, प्रतिदर्श समानुपात p इत्यादि हो सकता है।

किसी ऐसे सांख्यिकी के लिए S.E. सांख्यिकी के प्रतिदर्श वितरण का मानक विचलन होगा। नीचे S.E. का सामान्य उपयोग दिया गया है।

$$\text{S.E.}(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{S.E.}(P) = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$$

दो माध्य के अंतर का S.E.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ या दो समानुपात p_1, p_2 प्रतिदर्श आकार n, n_2 का वर्णन ऐसे करते हैं,

$$\text{S.E.}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\text{S.E.}(p_1 - p_2) = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

जहाँ n विश्लेषणों की संख्या है।

$\bar{x}$ प्रतिदर्श माध्य है।

μ जनसंख्या माध्य है।

s प्रतिदर्श मानक विचलन है।

σ जनसंख्या का मानक विचलन है।

p प्रतिदर्श समानुपात है, $q = 1 - p$

p जनसंख्या समानुपात है $Q = 1 - p$

प्रकार I एवं प्रकार II त्रुटियाँ (Type I and Type II Errors)

त्रुटि करना : प्रकार I और प्रकार II

हम कितने तरह से त्रुटि कर सकते हैं?

हम प्राक्कलन को अस्वीकार करते हैं जब यह सही हो सकता है। यह प्रकार I त्रुटि है।

हम प्राक्कलन को स्वीकार करते हैं जब यह गलत हो सकता है। यह प्रकार II त्रुटि है।

दूसरी यथार्थ स्थिति इच्छित है।

हम प्राक्कलन को स्वीकार करते हैं जब यह सत्य है। हम प्राक्कलन को अस्वीकार करते हैं जब यह गलत है।

	H_0 स्वीकार करे	H_0 अस्वीकार करे
शुद्ध H_0	शुद्ध H_0 को स्वीकार करे इच्छित	शुद्ध H_0 को अस्वीकार करे प्रकार I त्रुटि
	अशुद्ध H_0	अशुद्ध H_0 को स्वीकार करे प्रकार II त्रुटि
अशुद्ध H_0 को अस्वीकार करे इच्छित		

सार्थकता स्तर प्रकार 1 त्रुटि की प्रायिकता में समाविष्ट रहती है। 5 प्रतिशत का अर्थ है प्रकार I त्रुटि करने की प्रायिकता 0.05 है। *I* प्रतिशत स्तर का अर्थ है प्रकार I त्रुटि करने की प्रायिकता 0.01 है।

सार्थकता स्तर को कम करने का अर्थ प्रकार I त्रुटि की प्रायिकता कम करना है जो अच्छा है परंतु दुर्भाग्यवश यह प्रकार II त्रुटि करने का अइच्छित स्थिति का कारण बनता है।

जोड़ने के लिए

- प्रकार I त्रुटि : H_0 को अस्वीकार करना जब H_0 शुद्ध हो।
- प्रकार II त्रुटि : H_0 को स्वीकार करना जब H_0 अशुद्ध हो।

ध्यान दें : सांख्यिकी परीक्षण का सार्थकता स्तर प्रकार I त्रुटि करने की प्रायिकता है। इसे ˙ से संकेत किया जाता है।

जहाँ, α = प्रायिकता (H_0 अस्वीकार/शुद्ध H_0)

$1 - \alpha$ = प्रायिकता (H_0 स्वीकार/अशुद्ध H_0)

प्रकार II त्रुटि करने की प्रायिकता को β से संकेत किया जाता है,

β = प्रायिकता (H_0 स्वीकार/अशुद्ध H_0)

$1 - \beta$ = प्रायिकता (H_0 अस्वीकार/अशुद्ध H_0)

= (परीक्षण सही रूप से H_0 को अस्वीकारता है जब H_0 असत्य हो।)

$1-\beta$ को परीक्षण का power कहते हैं। यह सार्थकता स्तर α प्रतिदर्श आकार n और प्राचल मान पर निर्भर करता है।

परीक्षण प्रभाव एवं सार्थकता स्तर

एक सांख्यिकी प्राक्कलन परीक्षण एक परीक्षण है जिसमें प्राक्कलन परीक्षित होता है। यह प्राक्कलन पर निर्भर समूहित आँकड़ों का विश्लेषण करता है। निर्णय प्रक्रिया में ऐसे

विश्लेषण अधिक इच्छित होता है। यह कुछ मुख्य चर का मान क्रांतिक मान जिससे प्राक्कलन की सत्यता का अनुमान किया जाता है की तुलना में की गणना करता है। ऐसे विश्लेषण में ऐसे चर (s) का मान क्रांतिक मान से बहुत अलग होता है इसलिए यह प्राक्कलन को अस्वीकार करता है।

टिप्पणी

कुल मिलाकर प्राक्कलन परीक्षण में चार स्तर होते हैं-

1. **कथन**–दो कथन बनाएँ जो प्राक्कलन हैं। ये हैं 'शून्य प्राक्कलन' और 'वैकल्पिक प्राक्कलन'। शून्य प्राक्कलन को H_0 से संकेत किया जाता है और वैकल्पिक प्राक्कलन को H_a से। H_0 और H_a परस्पर अपवर्जी है। अगर H_0 शुद्ध है तो H_0 H_a अवश्य ही अशुद्ध होगा और विलोमत:।
2. **निर्णय योजना**–शांत प्राचल की गणना के लिए सूत्र निश्चित करें और प्रतिदर्श आँकड़ा के उपयोग का वर्णन करने के विश्लेषण योजना की रूपरेखा तैयार करें और शून्य प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करने का निर्णय के लिए क्रांतिक प्राचल की गणना करें।
3. **प्रतिदर्श आँकड़ा विश्लेषण**–क्रांतिक प्राचल का मान जैसे माध्य, समानुपात, t मान, z मान और शोधकर्ता द्वारा नियत दूसरे प्राचल।
4. **नतीजे की व्याख्या**–निर्णय नियम के आधार पर शून्य प्राक्कलन को स्वीकार या अस्वीकार करना।

किसी भी परीक्षण में त्रुटि हो सकती है और यह सांख्यिकी के लिए भी सत्य है। सांख्यिकी दो प्रकार के त्रुटि प्रकार I और प्रकार II की व्याख्या करती है।

- **प्रकार *I* त्रुटि**–प्रकार *I* त्रुटि का वर्णन शून्य प्राक्कलन की अस्वीकारिता जब यह शुद्ध हो के रूप में किया जाता है। यह गलत निर्णय का संकेत देता है। प्रकार *I* त्रुटि करने की प्रायिकता को सार्थकता स्तर, जिसका नाम *alpha* और ग्रीक शब्द α से संकेत करते हैं, कहते हैं।
- **प्रकार II त्रुटि**–प्रकार II त्रुटि शून्य प्राक्कलन की स्वीकारिता जब यह गलत हो है। यह भी गलत निर्णय का संकेत देता है, प्रकार II की प्रायिकता को Beta और ग्रीक शब्द β से संकेत कहते हैं। इस प्रायिकता की प्रशंसा परीक्षण के प्रभाव के रूप में करते हैं।

क्रांतिक क्षेत्र को प्राक्कलन परीक्षण के सारे परिणामों का समूह कहते हैं जो शून्य प्राक्कलन के अस्वीकारिता एवं वैकल्पिक प्राक्कलन की स्वीकारिता की अगुवाई करता है और जिसे C से संकेत करते हैं।

परीक्षण का प्रभाव

एक परीक्षण ज्यादा प्रभावशाली होता है यदि यह स्पष्ट निर्णय की स्थिति बनाता है। ऐसे निर्णय के सार्थक निर्णय का उत्पादन करने की प्रायिकता को परीक्षण का प्रभाव कहते हैं। यह प्रायिकता सही निर्णय लेने के प्रभाव का महत्व बताता है। यह प्रकार II त्रुटि, β (*Beta*) होने की प्रायिकता है। इसलिए परीक्षण का प्रभाव $= (1 - \beta)$

सांख्यिकी परीक्षण का प्रभार प्रतिदर्श आकार और दिए सार्थकता स्तर के अंतर से प्रभावित होता है। 1 का प्रभाव सुस्त है परंतु व्यावहारिकता में 0.80 या अधिक को शून्य प्राक्कलन के प्रस्थान का निर्णय के लिए अच्छे मान के रूप में लिया जाता है।

टिप्पणी

सार्थकता का निर्माण परिमाण को नापसंद करने का कथन है। यहाँ शून्य प्राक्कलन को सार्थक माना जायेगा। सामान्यत: उपयोगी स्थिति में प्रायिकता को 0.05, 0.01, और 0.001 लिया जाता है। परीक्षण का प्रभाव कमजोर सार्थकता स्तर से बढ़ता है जिसे संक्षिप्त सीमा में रखा जाता है।

इससे सही रूप से शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने के सांख्यिकी परीक्षण परिणाम प्राप्त करने और सही निर्णय करने संयोग बढ़ता है। परंतु इससे प्रकार I त्रुटि करने का जोखिम बढ़ता है।

प्रभाव के लिए कोई-कोई व्यावहारिक मानक नहीं है। व्यावहारिकता में 0.80 या अधिक शून्य-प्राक्कलन से प्रस्थान का पता करने के लिए अच्छा माना जाता है।

परीक्षण का आकार / सार्थकता स्तर (α)

सामान्य प्राक्कलन परीक्षण में सार्थकता स्तर गलत रूप से शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने की प्रायिकता है। मिश्रित प्राक्कलन में यह प्रायिकता का ऊपरी परिबद्ध है जो शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने का आधार तैयार करता है।

दिए गए सार्थकता स्तर में अधिकतम प्रभाव को अधिक प्रभावशाली परीक्षण माना जाता है।

परीक्षण के प्राचल के सभी माने के अधिकतम प्रभाव को अधिक समरूप प्रभावशाली परीक्षण (*Uniformly most powerful test*)—(*UMP*) कहते हैं।

जब परीक्षण का प्रभाव इकाई के समीप हो तो परीक्षण अनुरूप होता है और इसे अनुरूप परीक्षण कहते हैं।

H_0 के लिए अन-भिन्नत परीक्षण *(Unbiased Test)* में अस्वीकारिता की प्रायिकता $H_0 >$ के सार्थकता स्तर के यथार्थ; और d^0 सार्थकता स्तर है जब H_0 यथार्थ है।

अधिक समरूप प्रभावशाली अब-भिन्नत परीक्षण (*UMPU*) सभी अन-भिन्नत परीक्षण में *UMP*

z-परीक्षण

r के सार्थकता परीक्षण के लिए z–परीक्षण छोटे प्रतिदर्श या z–रूपांतरण के लिए।

Prof. R.A. Fisher ने छोटे प्रतिदर्श के सहसंबंध गुणांक के सार्थकता परीक्षण के लिए एक परीक्षण दिया जिसे सामान्यत: z–परीक्षण कहते हैं, परीक्षण करते समय प्रतिदर्श के r का z में रूपांतर होता है इसलिए परीक्षण को $\bar{z}$ रूपांतरण भी कहते हैं।

$\bar{z}$ का रूपांतरण ऐसे करते हैं:

$$z = \frac{1}{2}\ \log_e \frac{1+r}{1-r} = 1.15129\ \log_{10} \frac{1+r}{1-r}$$

जहाँ r प्रतिदर्श के आधार पर सह-संबंध गुणांक का प्रतिनिधित्व करता है।

टिप्पणी

सांख्यिकी z का उपयोग परीक्षण करने (i) जहाँ r का अवलोकित मूल्य दिए गए प्राक्कलन या जनसंख्या सह-संबंध के ज्ञात मान से सार्थक भिन्न हो। (ii) अगर r के दो प्रतिदर्श मान एक दूसरे से सार्थक भिन्न हो। z के प्रमाप त्रुटि गणना ऐसी होगी :–

$$S.E._x = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

जहाँ, n का अर्थ प्रतिदर्श में युग्मों की संख्या है।

और $$\mu = 1.151129 \log_{10}\left[\frac{1+p}{1-p}\right]$$

जहाँ p जनसंख्या और μ जनसंख्या माध्य का प्रतिनिधित्व करते हैं।

(ध्यान दें अगर p अज्ञात है तो इसका मान 0 लिया जाता है, इस स्थिति में $\mu = 0$)

अंततः सामान्य मानक विचर (*Standard Normal Variate*) $S.N.V.$ की गणना ऐसे होगी।

$$\text{S.N.V.} = \frac{|z-\mu|}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = (z-\mu)\sqrt{n-3}$$

अगर $S.N.V.$ का मान 1.96 से ज्यादा हो तो अंत 5% स्तर पर सार्थक होगा।

निम्नलिखित उदाहरण z परीक्षण के अनुप्रयोग को सार्थकता परीक्षण या r को स्पष्ट कर देंगे।

उदाहरण– युग्मों के प्रतिदर्श जो प्राक्कलन सह संबंध $p = 0.7$ के विरुद्ध लिए गए हैं के सह-संबंध गुणांक $r = 0.5$ का सार्थकता परीक्षण करें। z रूपांतरण का उपयोग करें।

हल–जनसंख्या में सह-संबंध गुणांक 0.7 प्राक्कलन को इस विश्लेषण में जाँचा जायेगा।

z रूपांतरण का प्रयोग करने पर हमें ज्ञात होगा।

$$z = 1.5129 \log_{10}\left[\frac{1+r}{1-r}\right]$$

$$= 1.5129 \ \log_{10}\left[\frac{1+0.5}{1-0.5}\right]$$

$$= 1.5129 \ \log \ \frac{1.5}{0.5}$$

$$= 1.15129 \ \log.3$$

$$= 1.15129 \times 0.4771$$

$$= 0.549$$

$$\mu = 1.15129 \ \log_{10}\left[\frac{1+0.7}{1-0.7}\right]$$

टिप्पणी

$$= 1.15129 \log\left[\frac{1.7}{0.3}\right]$$

$$= 1.15129 \log 5.67 \quad = 0.868$$

$$\text{S.N.V.} = \frac{\overline{|z-\mu|}}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = \frac{\overline{0.549-0.868}}{\frac{1}{\sqrt{19-3}}}$$

$$= \frac{0.319}{1}\sqrt{16}$$

$$= 0.319 \times 4 = 1.276$$

क्योंकि अंतर (0.319) केवल 1.276 गुणा है *S.E.* के, यह 5% स्तर पर असार्थक है और यह प्रतिचयन उच्चावात के कारण हुआ है। दूसरे शब्दों में प्राक्कलन सही है और p को 0.7 लिया जा सकता है।

जैसा कि ऊपर कहा गया है z परीक्षण को दो स्वतंत्र सह संबंध गुणांक के अंतर की सार्थकता परीक्षण के लिए भी उपयोग किया जाता है। इस कार्य के लिए सर्वप्रथम सभी r_1 और r_2 का रूपांतरण क्रमशः z_1 और z_2 मान में समान तरीके (जैसा ऊपर बताया गया है) करना है और तब $\overline{z}_1$ और $\overline{z}_2$ के अंतर के प्रमाप त्रुटि की गणना ऐसे होगी।

$$S.E._{Diff\ \overline{z}_1 - \overline{z}_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}$$

जहाँ, n_1 = प्रतिदर्श 1 में युग्मों की संख्या

n_2 = प्रतिदर्श 2 में युग्मों की संख्या

अंततः हम प्रतिशत की गणना कर सकते हैं $= \dfrac{|\overline{z}_1 - \overline{z}_2|}{S.E._{\sqrt{z_1 - \overline{z}_2}}}$

अगर यह प्रतिशत 1.96 से अधिक है तो अंतर 5% स्तर पर सार्थक होगा और यदि अंतर 2.5758 से अधिक है तो अंतर 1% स्तर पर सार्थक होगा।

F-परीक्षण (F-TEST)

व्यवसायिक निर्णयों में, हमें प्राय यह निर्धारित करना होता है कि विभिन्न प्रतिदर्श माध्यों के बीच कोई महत्वपूर्ण अन्तर है या नहीं जिससे कि उन विभिन्न समूहों के माध्यों के बीच अंतर का निष्कर्ष निकाला सके। यदि हमें दो से अधिक प्रतिदर्श माध्यों बीच तुलना करना हो तो? उदाहरण स्वरूप, किसी एक कम्पनी में कार्यरत 4 विभिन्न विक्रेताओं के माध्य विक्रय आँकड़ों के बीच महत्वपूर्ण अन्तर ज्ञात किया जाना है। या, 5 विभिन्न स्थानों में 4 परिवारों के माध्य मासिक व्यय समान है या नहीं, या एक दूरभाष कम्पनी को यह पता लगाना है कि न्यूयार्क शहर के पाँच स्थानों में किसी दिए प्राप्त सूचनाओं के लिए माध्य आवेदनों की संख्या क्या है। इन प्रकार के निर्धारणों के लिए जिस प्रक्रिया का उपयोग किया जाता है उसे चर विश्लेषण कहा जाता है।

यह तकनीकी सांख्यिकी विश्लेषणों में प्रयुक्त शक्तिशाली तकनीकों में एक है जिसका विकास *R.A. Fisher* के द्वारा किया गया। इसे *F*-परीक्षण भी कहा जाता है।

टिप्पणी

चर विश्लेषण में दो तरह के वर्गीकरण प्रयुक्त होते हैं। चर विश्लेषण का एक तरीका वह है जिसमें केवल एक तथ्य या चर को ही शामिल किया जाता है। उदाहरण के लिए 3 विक्रेताओं की बिक्री में अन्तर की जाँच के लिए हम लोग केवल एक कारक पर विचार करते हैं जो कि विक्रेताओं की विक्रय योग्यता है। दूसरे प्रकार के वर्गीकरण में उत्तरदायी चर एक से अधिक कारकों द्वारा प्रभावित होते हैं। उदाहरण के लिए, विक्रय केवल विक्रेताओं की विक्रय योग्यता से ही प्रभावित नहीं होता है अपितु, मूल्य या दिए गए क्षेत्र में विज्ञापन की हदों से प्रभावित होता है।

सरलता एवं अनिवार्यता के दृष्टिकोण से, हमारा परिचर्चा एक तरफे चर विश्लेषण तक ही सीमित है। नल संकल्पना जो हम जाँच करने जा रहे हैं इस अवधारणा पर आधारित है कि विभिन्न समुदायों के माध्यों के बीच कोई महत्वूपर्ण अन्तर नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि हम त्रय समुदायों के माध्यों के बीच अंतर की जाँच कर रहे हैं।

तो, $$H_0 = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots\ldots = \mu_k$$

वैकल्पिक संकल्पना (H_1) के अनुसार, कम-से-कम दो माध्य एक दूसरे से भिन्न हैं। नल संकल्पना की पुष्टि के लिए सभी माध्यों को समान होना चाहिए। यदि एक माध्य दूसरे के समान नहीं हो तो नल संकल्पना को नहीं माना जा सकता है। विभिन्न समुदायों के माध्यों का समान्तर तुलनात्मक अध्ययन चर विश्लेषण या *ANOVA* के रूप में जाना जाता है।

अवधारणाएँ

ANOVA तकनीकी निम्नलिखित अवधारणाओं पर आधारित है :

(*i*) n आकार वाला प्रत्येक प्रतिदर्श यादृच्छ रूप से चुना जाता है प्रत्येक प्रतिदर्श दूसरे प्रतिदर्श से स्वतंत्र होता है।

(*ii*) समुदाय सामान्यतया वितरित होते हैं।

(*iii*) समुदायों जिनसे प्रतिदर्श चुना जाता है के समान प्रसरण होते हैं अर्थात् $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots\ldots = \sigma_k^2, k$ समुदायों के लिए,

चर विश्लेषण के पीछे तर्क

हम इसे चर विश्लेषण क्यों कहते हैं, जबकि हम माध्यों के लिए जाँच करते हैं। हम इसे माध्यों का विश्लेषण क्यों नहीं कहते? हम चरों का विश्लेषण कर माध्यों के लिए जाँच कैसे करते हैं? वास्तव में, यह ज्ञात करने के लिए कि विभिन्न समुदायों के माध्य समान हैं या नहीं हम एक चर, σ^2, की माप पर विचार करते हैं। समुदाय चर, σ^2 का अनुमान करने के लिए σ^2 का दो विभिन्न अनुमान अलग विधियों द्वारा परिकलित किया जाता है। एक तरीका है σ^2 का अनुमान उस प्रकार से परिकलित करना जिससे समुदाय माध्य एक समान न हो। इसका अर्थ है कि समुदाय माध्यों के मानों में अन्तर σ^2 के मान को नहीं बदलता है।

टिप्पणी

σ^2 का अनुमान चरों का माध्य है जो प्रत्येक प्रतिदर्श में पाया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि हम n आकार वाले 10 प्रतिदर्शों को लेते हैं तो प्रत्येक प्रतिदर्श का एक माध्य और एक चर होता है। तब इन 10 चरों का माध्य σ^2 का एक अनुमानक होता है जो समुदाय चर है एवं इसका मान इस बात पर निर्भर नहीं करता है कि समुदाय माध्य समान है या नहीं। वास्तव में ऐसा सभी प्रतिदर्श चरों को लेकर एक उभय समुदाय चर का अनुमान कर किया जाता है जो कि सभी प्रतिदर्श चरों का माध्य होता है। इस उभय चर का प्रतिदर्शों का चर या σ^2 अन्तर्गत कहा जाता है।

σ^2 का अनुमान ज्ञात करने का दूसरा तरीका केन्द्रिय सीमा प्रमेय पर आधारित है जो कि नल संकल्पना पर आधारित है। इसका अर्थ है कि यदि समुदाय माध्यों के बीच कोई अन्तर नहीं हो तो दूसरे विधि से परिकलित σ^2 का मान प्रथम विधि से परिकलित σ^2 के मान से ज्यादा भिन्न नहीं होना चाहिए।

अतः, यदि σ^2 के ये दो मान लगभग समान हों तो नल संकल्पना की मान्यता स्थापित होती है। दूसरा तरीका निम्नलिखित परिणाम प्रदर्शित करता है।

केन्द्रिय सीमा प्रमेय पर आधारित हमने पहले पाया कि प्रतिदर्श माध्यों की मानक त्रुटि इस प्रकार ज्ञात की जा सकती है,

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

या, चर होगा : $$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

माध्य की मानक त्रुटि की वर्ग $(\sigma_{\bar{x}})^2$ ज्ञात कर उसे n से गुणा कर σ^2 का अनुमान लगा सकते है। σ^2 का अनुमान लगाने की इस विधि को $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ कहते हैं। अब, यदि नल संकल्पना सत्य है तो $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ मान लगभग $\sigma^2_{\text{अन्तर्गत}}$ मान के समान होना चाहिए। इन दोनों मानों में एक महत्वपूर्ण अन्तर यह निष्कर्ष देता है कि यह अन्तर समुदाय माध्यों के बीच अन्तर का परिणाम है।

लेकिन, हम यह कैसे जानते हैं कि इन दोनों मानों में अन्तर महत्वपूर्ण है या नहीं? हमें यह कैसे पता चलता है कि यह अन्तर यादृच्छ प्रतिदर्श त्रुटि की वजह से है या समुदाय माध्यों के बीच मास्तविक अंतर की वजह से।

R.A. Fisher ने इन सवालों के जबाब देने के लिए फिशर टेस्ट या *F*-टेस्ट विकसित की। उन्होंने यह निर्धारित किया कि $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ एवं $\sigma^2_{\text{अंतर्गत}}$ मानों में अंतर को एक अनुपात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जो *F*-टेस्ट है,

$$\frac{\sigma^2 \text{ मध्य}}{\sigma^2 \text{ अन्तगर्त}}$$

उपर्युक्त स्थिति में, यदि समुदाय माध्य बिल्कुल समान हो तो $\sigma^2_{\text{मध्य}}, \sigma^2_{\text{अन्तर्गत}}$ के समान होगा एवं F का मान 1 होगा।

फिर भी, प्रतिदर्श त्रुटियों एवं विभिन्न परिवर्तनों के कारण इन दोनों मानों के कुछ फर्क होता है चाहे नल संकल्पना सत्य हो अर्थात समुदाय माध्य समान हों। दोनों चरों में

टिप्पणी

विभिन्नता का हद एवं F का मान हमारे नल संकल्पना को मानने या न मानने के निर्णयों को प्रभावित करता है। यह निष्कर्ष निकालना तार्किक है कि यदि समुदाय माध्य समान नहीं है तो प्रतिदर्श माध्य एक-दूसरे से भिन्न होंगे जिसके परिणाम स्वरूप $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ का मान अधिक होगा एवं F का मान अधिक होगा। तदनुसार, F के अधिक मान की वजह से नल संकल्पना को न मानने का निर्णय अधिक होगा। लेकिन F का मान कितना बड़ा हो कि नल संकल्पना को न माना जाए। इसका उत्तर यह है कि F का परिकलित मान F के चरम मान से बड़ा होना चाहिए।

स्वतंत्रता की कोटि

हमने वक्र के समूहों में F वितरण की बात कही जिसमें प्रत्येक वक्र $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ एवं $\sigma^2_{\text{अन्तर्गत}}$ की स्वतंत्रता की कोटि दर्शाता है। इसका अर्थ है कि स्वतंत्रता की कोटि F अनुपात के अंश एवं हर दोनों से संबंधित होता है।

(*i*) **अंश**—चूँकि प्रतिदर्शों के बीच अन्तर, σ^2 मध्य विभिन्न प्रतिदर्शों से आता है एवं यदि प्रतिदर्शों की संख्या K हो तो अंश से जुड़ी स्वतंत्रता की कोटि $(K–1)$ होगी।

(*ii*) **हर**—हर K प्रतिदर्शों के चरों का माध्य विचरण है एवं चूँकि प्रत्येक प्रतिदर्श में प्रत्येक विचरण प्रतिदर्श के आकार (n) से जुड़ा होता है तब स्वतंत्रता की कोटि $(n-1)$ होगी। अत: स्वतंत्रता की कुल कोटियाँ K प्रतिदर्शों के स्वतंत्रता की कोटियों के कुल योग के बराबर होगी।

या, $df = K(n-1)$, जहाँ प्रत्येक प्रतिदर्श का आकार n है।

F-वितरण

F वितरण के मुख्य गुण निम्नलिखित हैं:

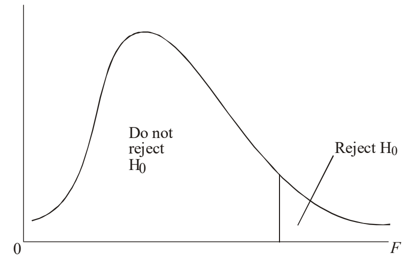
(*i*) सामान्य वितरण के विपरित, जो कि एक ही प्रकार के वक्र बिना माध्य मान एवं मानक विचलन की निर्भरता के रखता है, F-वितरण एक वक्रों का समूह है। एक विशिष्ट वक्र दो मापदंडों द्वारा निर्धारित किया जाता है। ये दो मापदंड है अंश में स्वतंत्रता की कोटियाँ एवं हर में स्वतंत्रता की कोटियाँ। वक्र की आकृति स्वतंत्रता की कोटियों की संख्या में परिवर्तन के साथ बदलती है।

(*ii*) यह एक सतत वितरण है एवं F का मान ऋणात्मक नहीं होता है।

(*iii*) F वितरण को प्रदर्शित करने वाला वक्र धनात्मक दिशा में होता है।

(*iv*) F का मान सैद्धांतिक रूप से शून्य से अनंत के बीच होता है।

F वितरण वक्र का आरेख निम्नलिखित है :



परितयक्त क्षेत्र केवल वक्र के दाहिने छोड़ की ओर है क्योंकि Z वितरण एवं t वितरण के विपरित जिसके मान ऋणात्मक थे, F वितरण के मान धनात्मक है एवं F के चरम मान से अधिक है जो कि नल संकल्पना को न मानने का निर्णय देता है।

F का परिकलन

चूँकि F अनुपात में केवल दो तत्व है जो कि प्रतिदर्श एवं प्रतिदर्शों के बीच विचरण है, हम संकल्पनाओं के विषय में पहले चर्चा की गई है, अब हम इन विचरणों की गणना करते हैं:

यदि प्रतिदर्श के सभी माध्य बिल्कुल समान हों एवं सभी प्रतिदर्श समुदायों को प्रदर्शित करते हों तो कोई भी विचरण नहीं होगा। लेकिन यह स्थिति कभी नहीं होता है। हमारे पास विचरण हमेशा होता है प्रतिदर्शों के बीच एवं प्रतिदर्शों के अन्दर, चाहे हम इन प्रतिदर्शों को यादृच्छ रूप से ले एवं एक ही जनसंख्या में से। यह विचरण कुल विचरण कहलाता है।

कुल विचरण को $\Sigma\left(X-\bar{\bar{X}}\right)^2$ से निरूपित करते हैं जहाँ X सभी प्रतिदर्शों के लिए व्यक्तिगत अवलोकन को दिखाता है एवं $\bar{\bar{X}}$ सभी प्रतिदर्श माध्यों का कुल माध्य है जो (μ) के समान है, समुदाय माध्य को वर्गों का कुल योग या SST कहा जाता है। यह कुल विचरण दो तत्वों की देनों को प्रदर्शित करता है जो इस प्रकार है:

(*A*) **प्रतिदर्शों के बीच विचरण**—प्रतिदर्शों के बीच विचरण विभिन्न उपचारों के प्रभाव के कारण होता है, इसका अर्थ है कि समुदाय माध्य एक कारक से प्रभावित होता है, इस तरह से समुदाय माध्य को अलग करता है। इस विचरण को प्रतिदर्शों के बीच वर्गों का योग कहा जाता है। एवं इसे SSB कहा जाता है।

SSB निम्नलिखित चरणों में परिकलित किया जाता है:

(*i*) n आकार वाले K प्रतिदर्शों को लें एवं प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य ज्ञात करें अर्थात, $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3 \ldots\ldots \bar{X}_k$

(*ii*) कुल माध्य $\bar{\bar{X}}$ ज्ञात करें ताकि, $\bar{\bar{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i}{k}$

(*iii*) विभिन्न प्रतिदर्शों के माध्य एवं कुल माध्य के बीच अन्तर ज्ञात करें अर्थात, $\left(\bar{X}_1-\bar{\bar{X}}\right), \left(\bar{X}_2-\bar{\bar{X}}\right), \left(\bar{X}_3-\bar{\bar{X}}\right), \ldots\ldots \left(\bar{X}_k-\bar{\bar{X}}\right)$

(*iv*) इन विचलनों को वर्ग करें या अलग-अलग अन्तर करें, प्रत्येक वर्ग विचलन को उसके प्रतिदर्श आकार से गुणा करें एवं सभी गुणनफलों का योग ज्ञात करें ताकि, $\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{X}_i-\bar{\bar{X}}\right)^2$ जहाँ $n_i = i$th प्रतिदर्श का आकार

यह SSB का मान होगा।

टिप्पणी

जहाँ, n_1 = प्रतिदर्श 1 में मदों की संख्या

n_2 = प्रतिदर्श 2 में मदों की संख्या

n_k = प्रतिदर्श K में मदों की संख्या

$\bar{X}_1$ = प्रतिदर्श 1 का माध्य

$\bar{X}_2$ = प्रतिदर्श 2 का माध्य

$\bar{X}_k$ = प्रतिदर्श K का माध्य

$\bar{\bar{X}}$ = कुल माध्य या सभी प्रतिदर्शों में सभी मदों का माध्य

(*v*) SSB को स्वतंत्रता की कोटियों से भाग दें जो $(K-1)$ है जहाँ K प्रतिदर्शों की l ą; k gS oa; g $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ है जहाँ K प्रतिदर्शों की संख्या है एवं यह $\sigma^2_{\text{मध्य}}$ का मान देता है ताकि,

$$\sigma^2_{\text{माध्य}} = \frac{SSB}{(k-1)}$$

(इसे प्रतिदर्शों के बीच माध्य वर्ग या MSB कहा जाता है।)

(*B*) **प्रतिदर्शों में विचरण**–एक दिए गए प्रतिदर्श में प्रत्येक अवलोकन एक ही समुदाय से आता है इससे कुछ विचरण अवश्यभावी हो जाते है। ये विचरण प्रतिदर्श त्रुटियों या दूसरे प्राकृतिक कारणों की वजह से होते हैं। यह विचरण या वर्गों का योग निम्नलिखित चरणों में परिकलित होता है:

(*i*) प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य मान परिकलित करें अर्थात् $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3 \ldots\ldots, \bar{X}_k$

(*ii*) एक बार में एक प्रतिदर्श को लें एवं प्रतिदर्श में प्रत्येक मद का विचलन माध्य से लें। सभी प्रतिदर्शों के लिए ऐसा करें ताकि हमें प्रतिदर्श के प्रत्येक मानों में अंतर पता चले।

(*iii*) इन अन्तरों को वर्ग करें एवं इन वर्ग अंतरों का कुल योग लें। इस योग को SSW या प्रतिदर्श के अंदर वर्गों का योग कहा जाता है।

(*iv*) इस SSW को स्वतंत्रता की कोटियों से भाग दें। स्वतंत्रता की कोटियाँ है। (यदि सभी प्रतिदर्शों का आकार समान हो, तो $df = K(n-1)$, चूँकि $(n-1)$ प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए स्वतंत्रता की कोटियाँ है एवं प्रतिदर्शों की संख्या K है।

(*v*) SSW/df को σ^2 अन्तर्गत भी कहा जाता है या MSW (प्रतिदर्शों के अन्तर्गत वर्गों के योग का माध्य)

अब F का मान इस प्रकार से परिकलित किया जा सकता है:

$$\text{F} = \frac{\sigma^2 \text{ मध्य}}{\sigma^2 \text{ अन्तगर्त}} = \frac{SSB/df}{SSW/df} = \frac{SSB/(K-1)}{SSW/(N-1)} = \frac{MSB}{MSW}$$

टिप्पणी

अपनी प्रगति जांचिए

5. वैल्पिक प्राक्कलन को निम्न में से किस संकेत में व्यक्त करते हैं?

(क) H_o (ख) H_1

(ग) H_2 (घ) H_3

6. निम्न में से किस प्रकार की सार्थकता का प्रयोग अधिक होता है?

(क) 1% तथा 3% (ख) 1% तथा 4%

(ग) 1% तथा 5% (घ) 1% तथा 9%

5.5 अनुसंधान प्रतिवेदन लेखन

अनुसंधान (शोध) कार्य का अंतिम तथा सबसे अधिक महत्वपूर्ण चरण प्रतिवेदन लेखन है। प्रतिवेदन के द्वारा एक शोधकर्ता शोध विषय से संबंधित तथ्यों का संकलन करने तथा उनका सारणीयन एवं विवेचन कर लेने के पश्चात उन पर आधारित निष्कर्षों को व्यवस्थित रूप में दूसरों के सामने प्रस्तुत करता है। एक शोधकर्ता द्वारा प्राप्त निष्कर्ष चाहे कितने भी महत्वपूर्ण हों लेकिन यदि शोध प्रतिवेदन के द्वारा उनका पाठकों में समुचित रूप से संप्रेषण नहीं हो पाता तो उनका कोई भी व्यावहारिक महत्व नहीं होता है। पूर्व में किया हुआ शोध आगे होने वाले शोध के लिए नींव का कार्य करता है। वैज्ञानिक एवं सामाजिक शोध में विभिन्न शोध कार्यों के बीच यह तारतम्य बहुत महत्वपूर्ण होता है। प्रतिवेदनों के द्वारा यह तारतम्य बनता है।

गुडे एवं हाट ने इस संबंध में लिखा है, "प्रतिवेदन का निर्माण करना अनुसंधान का अंतिम चरण है और इसका उद्देश्य रुचि रखने वाले लोगों को अध्ययन के समस्त परिणाम को पर्याप्त विस्तार से बतलाना है एवं इस प्रकार सुव्यवस्थित करना है कि पाठक तथ्यों को जानने और स्वयं के लिए निष्कर्षों की प्रमाणिकता को निश्चित करने के योग्य बन जाए।"

प्रतिवेदन के स्वरूप के संबंध में यह ध्यान रखना जरूरी है कि ये किस प्रकार के पाठकों को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है, उसके पाठक विभिन्न प्रकार के हो सकते हैं। शोध प्रतिवेदनों के पाठकों में अन्य सामाजिक वैज्ञानिक बहुधा सबसे महत्वपूर्ण होते हैं? जैसे यदि लोक प्रशासन या व्यापार प्रबंध के क्षेत्र में कोई शोध कार्य हुआ हो तो संभवतः प्रशासक या प्रबंधक भी उसके विषय में जानना चाहेंगे। जन साधारण के कुछ लोग भी उसमे रुचि रखने वाले हो सकते हैं। सामाजिक वैज्ञानिक शोध के सिद्धांत और प्रक्रियाओं में भी रुचि ले सकते हैं जबकि अन्य लोग उसके निष्कर्षों को ही जानना चाहेंगे। अतः प्रतिवेदन लिखते समय शोधकर्ता को यह ध्यान रखना होता है कि उसके पाठक मुख्यतः कौन लोग होंगे। इस दृष्टिकोण से प्रतिवेदन के आरंभ से अंत तक अध्ययन विषय की विभिन्न इकाइयों, पारिभाषिक शब्दों, तथ्यों तथा निष्कर्षों को इस प्रकार प्रस्तुत करना आवश्यक होता है कि उनकी प्रासंगिकता एवं अभिप्राय को सभी के द्वारा समझा जा सके।

निष्कर्षतः कह सकते हैं कि प्रतिवेदन इस तरह प्रस्तुत किया जाए जिससे कोई भी पाठक आनंद लेकर अपने ज्ञान की बढ़ोतरी कर सके।

5.5.1 प्रतिवेदन लेखन के उद्देश्य एवं सिद्धांत

टिप्पणी

वस्तुतः एक शोधकर्ता के लिए शोध की प्रक्रिया के सभी चरण समान रूप से महत्वपूर्ण होते हैं, लेकिन जनसामान्य की रुचि मुख्यतः शोध निष्कर्षों में ही होती है। शोध प्रतिवेदन लेखन के प्रमुख उद्देश्यों को निम्नांकित रूप में समझा जा सकता है–

1. **तथ्यों एवं निष्कर्षों को लिखित रूप प्रदान करना**–शोध प्रतिवेदन शोध से प्राप्त ज्ञान का एक लिखित रूप है जिसके द्वारा एक ओर शोध की वास्तविकता से अन्य व्यक्ति भी अवगत होते हैं तथा दूसरी ओर ऐसा ज्ञान एक धरोहर के रूप में सुरक्षित हो जाता है। विभिन्न समाज वैज्ञानिक जब सर्वेक्षण अथवा शोध के माध्यम से भिन्न–भिन्न प्रकार की समस्याओं का अध्ययन करते हैं तो शोध प्रतिवेदन द्वारा ही उसके निष्कर्षों को जनसामान्य तक पहुंचाया जाता है।
2. **संभावित शोध का मार्ग प्रशस्त करना**–प्रतिवेदन का उद्देश्य शोध से प्राप्त निष्कर्षों एवं तथ्यों को जनसामान्य से परिचित कराने के साथ ही साथ नवीन शोध कार्यों की संभावनाओं के लिए भी मार्ग प्रशस्त करना होता है। एक शोधकर्ता जब किसी विशेष समस्या को लेकर अध्ययन करता है तथा उसकी गहराई में जाकर कुछ निष्कर्ष प्रस्तुत करता है तो इस प्रकार के अध्ययन से शोध के अनेक नवीन क्षेत्र भी स्वयं ही स्पष्ट होने लगते हैं।
3. **अध्ययन संबंधित संपूर्ण तथ्यों को व्यवस्थित करना**–शोध प्रतिवेदन का एक मुख्य उद्देश्य अध्ययन से संबंधित संपूर्ण तथ्यों को व्यस्थित रूप प्रदान करना होता है। एक सामाजिक अध्ययन चाहे कितना भी सीमित अथवा परिशुद्ध हो, उससे संबंधित तथ्य इतने विभिन्नतायुक्त एवं संख्या में अधिक होते हैं कि उन्हें व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किए बिना उसका कोई उपयोग नहीं किया जा सकता। इसी उद्देश्य के संदर्भ में विभिन्न तथ्यों की प्रवृत्तियों को सारणियों, रेखाचित्रों एवं दंड–चित्रों के रूप में प्रदर्शित किया जाता है।
4. **विभिन्न अध्ययन पद्धतियों की सार्थकता का मूल्यांकन**–प्रत्येक शोध प्रतिवेदन में शोधकार्य में प्रयुक्त होने वाली पद्धतियों तथा प्रविधियों का उल्लेख किया जाता है। ऐसे विवेचन से यह ज्ञात करना संभव हो जाता है कि किसी विशेष प्रकार के अध्ययन में किन्हीं विशेष पद्धतियों तथा प्रविधियों का उपयोग किस सीमा तक उपयोगी हो सकता है। इन प्रविधियों के उपयोगी होने पर इन्हें और अधिक विकसित करने का प्रयत्न किया जाता है तथा उनके अनुपयोगी होने पर वैकल्पिक प्रविधियों को विकसित करने के लिए प्रयत्न किए जाने लगते हैं। वास्तविकता यह है कि अधिकांश नवीन प्रविधियों का विकास विभिन्न प्रकार के शोध प्रतिवेदनों से प्राप्त अनुभवों का ही परिणाम रहे हैं।
5. **तथ्यों में निहित कार्य–कारण के संबंध का स्पष्टीकरण**–वस्तुतः कोई भी सामाजिक घटना शून्य में घटित नहीं होती। प्रत्येक घटना का कोई न कोई कारण और प्रभाव अवश्य होता है। शोध प्रतिवेदन का उद्देश्य विभिन्न प्रकार के

टिप्पणी

तथ्यों में व्याप्त कार्यकारण के संबंधों को इस प्रकार स्पष्ट करना होता है जिससे सामान्य व्यक्ति भी किसी विशेष घटना के लिए उत्तरदायी कारणों के तुलनात्मक प्रभाव को समझ सकें। इसी उद्देश्य की पूर्ति के लिए प्रतिवेदन के अंतर्गत विभिन्न चरों अथवा कारकों के सहसंबंध की प्रकृति और उनकी सीमा को विभिन्न सांख्यिकीय प्रविधियों द्वारा स्पष्ट किया जाता है।

6. **निष्कर्षों की वैधता की जांच**—शोध प्रतिवेदन का अंतिम, लेकिन सबसे अधिक महत्वपूर्ण उद्देश्य शोध अध्ययन द्वारा प्राप्त निष्कर्षों की वैधता की जांच करना है। अध्ययनकर्ता प्रतिवेदन को तैयार करने की प्रक्रिया में अपनी त्रुटियों को स्वंय ही ज्ञात कर सकता है, यदि उसे कुछ तथ्य संदेहपूर्ण प्रतीत होते हैं तब पुनर्परीक्षण के द्वारा उन्हें ठीक किया जा सकता है।

इस प्रकार प्रतिवेदन को तैयार करने से जहां एक ओर शोधकर्ता को तथ्यों की प्रामाणिकता की जांच कर लेने का अवसर मिलता है वहीं सामान्य व्यक्ति भी प्रतिवेदन की सहायता से निष्कर्षों की प्रामाणिकता को समझ सकते हैं।

शोध प्रतिवेदन तैयार करने के सामान्य सिद्वांत

1. प्रतिवेदन को पाठकों के प्रकार विषय (विशेषज्ञ, प्रायोगिक, शोधकर्ता, एवं जनसाधारण) के अनुसार तैयार किया जाना चाहिए।
2. प्रतिवेदन स्वयं शोधकर्ता के साथ संचार करने वाला न होकर पाठकों एवं श्रोताओं के साथ संचार करने वाला होना चाहिए।
3. प्रतिवेदन स्पष्ट तथा सार्थक होना चाहिए।
4. प्रतिवेदन यथा संभव सूक्ष्म होना चाहिए।
5. समझने के लिए प्रत्येक स्थान पर आवश्यक सूचना अवश्य दी जानी चाहिए।
6. प्रतिवेदन के अंतर्गत विस्तार एवं सूक्ष्मता का उचित समावेश होना चाहिए।
7. पाठकों को समालोचना हेतु पर्याप्त सूचना प्रदान की जानी चाहिए।
8. सकारात्मक एवं नकारात्मक दोनों ही प्रकार के निष्कर्षों को प्रस्तुत किया जाना चाहिए। उन मदों का भी उल्लेख किया जाना चाहिए जिनसे शोधकर्ता किसी भी निष्कर्ष पर नहीं पहुंच सका है।
9. अध्ययन विषय के यथा संभव परिणामों को अन्य अध्ययन के परिणामों तथा सामान्य समस्याओं से संबंधित किया जाना चाहिए।
10. कार्य रीतियों, विशिष्ट समस्याओं तथा अन्य शीर्षकों से संबंधित ऐसी सूचना को यथा संभव सम्मलित किया जाना चाहिए जो अन्य शोधकर्ताओं के लिए अभिरुचिपूर्ण हो।
11. फुटनोटों का प्रयोग आवश्यकतानुसार अवश्य ही किया जाना चाहिए।
12. सार्थक परीक्षणों से प्राप्त परिणामों को स्पष्ट रूप से व्यक्त किया जाना चाहिए।
13. व्यावहारिक अनुसंधान प्रतिवेदन में यह भी स्पष्ट रूप से बताया जाना चाहिए कि शोध परिणामों का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है तथा इनकी प्रायोगिकता संबंधी सीमाएं क्या हैं?

टिप्पणी

14. प्रतिवेदन का कार्य, प्रारचना तैयार होते ही आरंभ कर देना चाहिए तथा शीघ्र अतिशीघ्र समाप्त किया जाना चाहिए।
15. अंतरिम प्रतिवेदन तैयार करते रहना चाहिए। ऐसा करना विशेष रूप से व्यावहारिक अनुसंधान में आवश्यक है।
16. प्रतिवेदन की भाषा बहुत संतुलित होनी चाहिए। पारिभाषित शब्दों का उपयोग जरूरत के अनुरूप ही करना चाहिए। मुहावरेदार, लच्छेदार तथा अतिशयोक्तिपूर्ण भाषा का उपयोग नहीं करना चाहिए।
17. प्रतिवेदन में तथ्यों का विश्लेषण व व्याख्या वैज्ञानिक तौर पर और सुस्पष्ट रूप में की जानी चाहिए, अर्थात प्रतिवेदन में बताई गई बातें तथ्य युक्त तथा प्रयोग सिद्ध होनी चाहिए।
18. प्रतिवेदन के किसी भी तथ्य को पुनः दोहराया नहीं जाना चाहिए, क्योंकि ऐसा करने से प्रतिवेदन को पढ़ते समय पाठक उब सकते हैं। अतः तथ्यों को क्रमिक रूप सें व्यवस्थित करना चाहिए।

5.5.2 प्रतिवेदन की रूपरेखा एवं महत्व

एम. पार्टन ने प्रतिवेदन की निम्न रूपरेखा प्रस्तुत की है–

1. प्रस्तावना संबंधी सामग्री
   (क) शीर्षक पृष्ठ
   (ख) संदर्भ सारणी
   (ग) उदाहरणों, सारणियों एवं चार्टों की सूची,
   (घ) प्रस्तावना, प्राक्कथन अथवा संचारण पत्र,
   (ङ) परिणामों का सारांश सार अथवा संस्तुतियां
2. प्रतिवेदन का मुख्य विषय अथवा विषय–वस्तु
   (i) परिचय
      (क) उद्देश्य–समस्या का कथन एवं परिभाषा,
      (ख) विषय क्षेत्र–सर्वेक्षण का समय स्थान एवं सामग्री,
      (ग) संगठन एवं कार्यरीति (यहां सामान्य विवरण होना चाहिए, किंतु विस्तृत विवरण परिशिष्टों में होना चाहिए)
         ⇨ प्रयोग में लाई गई प्रणालियां एवं प्रविधियां
         ⇨ अनुसूचियां अथवा प्रश्नावलियां अथवा प्रयुक्त पत्रों की प्रतिलिपियां
         ⇨ इन्हें कभी–कभी परिशिष्टों में भी रखा जाता है।
   (ii) परिणामों का विश्लेषण एवं प्रस्तुतिकरण
      (क) तथ्यों का प्रतिवेदन–आकड़ों, सारणियों, रेखाचित्रों इत्यादि का प्रस्तुतीकरण
      (ख) आंकड़ों का विश्लेषण एवं विवेचन,

(ग) प्रस्तुत किए गए आंकड़ों पर आधारित निष्कर्ष एवं संभव संस्तुतियां,

(घ) आवश्यक सामग्री का सूक्ष्म सारांश (यदि यह ऊपर एक में नहीं दिया गया है।)

टिप्पणी

3. पूरक सामग्री

(i) परिशिष्ट (इनमें प्रायः सर्वेक्षण में प्रयुक्त प्रतिदर्शन (निर्दशन) एवं अन्य प्रणालियों का विस्तृत प्रतिवेदन होता है।)

(क) ग्रंथ सूची

(ख) सूची

(ग) शब्द–संग्रह (यदि परिभाषा की आवश्कता रखने वाले वैज्ञानिक शब्दों का प्रयोग किया है।

यदि अनुसंधान कार्य विभिन्न चरणों में किया गया है तो रैचेल मार्क्स द्वारा प्रस्तावित निम्न प्रतिवेदन रूपरेखा को प्रयोग में लाया जा सकता है।

शीर्षक

1. सामान्य परिचय
2. सामग्री एवं ढंगों का सामान्य विवरण
3. प्रथम चरण
   (क) परिचय
   (ख) सामग्री एवं ढंग
   (ग) परिणामों का प्रस्तुतीकरण
   (घ) परिणामों पर विचार–विमर्श
4. द्वितीय चरण
5. तृतीय चरण
6. सामान्य विचार–विमर्श।

प्रतिवेदन की संरचना

एफ.एन. कलिंजर ने शोध प्रतिवेदन की संरचना को इस प्रकार प्रस्तुत किया है

1. समस्या – (क) सिद्धांत, परिकल्पनाएं, परिभाषा, (ख) पूर्व अनुसंधान साहित्य
2. विधिवत आंकड़ा, संग्रह
   (क) प्रतिदर्श एवं निदर्शन ढंग,
   (ख) परिकल्पनाओं का परीक्षण किस प्रकार किया गया था (विधितंत्र), प्रयोगात्मक कार्य–रीतियां, उपकरणों का प्रयोग,
   (ग) चरों का परिमापन,
   (घ) विश्लेषण के सांख्यिकीय तरीके,
   (ङ) पूर्व परीक्षण के सांख्यिकीय तरीके,

(च) पूर्व परीक्षण एवं अध्ययन।

3. परिणाम, विवेचन एवं निष्कर्ष।

टिप्पणी

युनाइटेड नेशंस स्टेटिस्टिकल ऑफिस द्वारा 1950 में प्रकाशित, 'रेकेमेन्डेशन्स कन्सर्निंग दि प्रिपरेशन ऑफ रिपोर्ट ऑफ सैम्पलिंग सर्वेज के अंतर्गत निम्न को सम्मिलित करने की संस्तुति की गई है–

1. सर्वेक्षण का सामान्य विवरण,
2. सर्वेक्षण की प्रचना
3. प्रतिदर्श की इकाइयों के चुनाव का ढंग
4. कर्मचारीगण एवं उपकरण
5. सांख्यिकीय विश्लेषण एवं गणनात्मक कार्य रीति,
6. लागत संबंधी विश्लेषण
7. सर्वेक्षण की यथार्थता

शोध प्रतिवेदन में निम्न बातों का समावेश होना भी आवश्यक है, जो प्रतिवेदन के मूल उद्देश्यों की प्राप्ति में सहायक हैं –

1. शोध की समस्या
2. विषय क्षेत्र और सीमाएं
3. उद्देश्य
4. परिकल्पनाएं
5. प्रतिदर्श का स्वरूप
6. आधार सामग्री संग्रह की पद्धतियां
7. विश्लेषण की पद्धतियां
8. निष्कर्ष
9. निष्कर्षों की व्याख्या

प्रतिवेदन में सर्वप्रथम शोध की समस्या का स्पष्टीकरण होना चाहिए। शोधकर्ता को अपने शोध के विषय क्षेत्र और सीमाओं का निर्माण करना होता है। अतः शोधकर्ता को यह बताना होता है कि उसमें किस समुदाय, समूह या संगठन के किस भाग का और किस काल से संबंधित अध्ययन किया गया है।

शोध के उद्देश्यों का स्पष्ट उल्लेख भी प्रतिवेदन में होना चाहिए, अर्थात अध्ययन वर्णनात्मक या कार्य–कारण संबंधित अथवा समन्वेषी है। तत्पश्चात यह बताना चाहिए कि वर्णन किन सप्रत्ययों और चरों से संबंधित है। अध्ययन की उपकल्पनाओं का स्पष्टीकरण भी आवश्यक है, शोध के दौरान इनमें होने वाले सुधारों, यदि कोई हों तो उनका भी स्पष्टीकरण होना चाहिए। प्रतिवेदन में प्रतिचयन की पद्धति और प्रतिदर्श के स्वरूप का पूरा वर्णन होना चाहिए। प्रतिवेदन में आधार सामग्री संग्रह की मुख्य पद्धतियों और अन्य पद्धतियों का भी ब्यौरेवार वर्णन होना चाहिए।

आधार–सामग्री प्रस्तुत करने वाली सारणियां और इनका विश्लेषण प्रायः प्रतिवेदन के सबसे महत्वपूर्ण भाग होते हैं। विश्लेषण की प्रविधियों का ब्यौरेवार वर्णन होना चाहिए। यदि सांख्यकीय परीक्षण किए जाए जो सार्थकता स्तर आदि तथा परिणाम, जैसे माध्य या सहसंबंध के मूल्य बताने चाहिए।

टिप्पणी

शोध के निष्कर्ष चाहे शोधकर्ता के विचारों के अनुकूल प्राप्त हो या प्रतिकूल वह शोध की समस्या से संबंधित सारे तथ्य और निष्कर्ष देने के लिए बाध्य होता है और अंत में निष्कर्षों की व्याख्या करता है।

निष्कर्षों की व्याख्या में मुख्यत तीन बातों का समावेश होना आवश्यक है–

1. शोध के द्वारा प्राप्त हुए अनुमान दूसरी परिस्थितियों में किस सीमा तक लागू हो सकते हैं?
2. शोध की वे कौन–सी विशिष्ट परिस्थितियां हैं, जो अनुमानों के सामान्यीकरण को सीमित करती हैं?
3. शोध के द्वारा किन प्रश्नों का उत्तर नहीं मिल सका या कौन से नये प्रश्न उठे?

प्रतिवेदन के अंत में बहुधा एक सारांश भी दिया जाता है जिसमें समस्या, प्रविधियां, प्राप्त तथ्यों और निष्कर्षों का संक्षिप्त विवरण होता है।

प्रतिवेदन का महत्व

प्रतिवेदन में सारे शोध कार्य का सार होता है, यही कारण है कि इसके शोध कार्य में महत्व को सभी विद्वान स्वीकार करते हैं। शोध प्रतिवेदन लेखन के महत्व निम्नलिखित हैं–

1. प्रतिवेदन में उल्लिखित प्रणालियां भविष्य में शोध करने वालों के लिए काफी महत्वपूर्ण होती हैं। इन प्रणालियों के आधार पर नई प्रणालियों की भी खोज की जा सकती है।
2. प्रतिवेदन का व्यावहारिक महत्व भी होता है। समाज की कई कठिनाइयों का निदान इसके द्वारा किया जा सकता है।
3. नवीन शोध अध्ययनों के लिए मौजूदा प्रतिवेदन उपकल्पना का आधार बन सकता है।
4. प्रतिवेदन में कई शोध अध्ययन विषयों की विषय–वस्तु विद्यमान होती है। प्रतिवेदन मुख्यतः समस्याओं के हल, भावी परीक्षणों के आधार के रूप में सहायक, ज्ञान के प्रसार में उपयोगी एवं लाभदायक होती है।
5. यह ज्ञान के विस्तार में सहायक होती है।

5.5.3 प्रतिवेदन लेखन की समस्याएं

गुडे एवं हाट के अनुसार, ''प्रारंभ में ऐसा प्रतीत होता है कि प्रतिवेदन को लिखना एक सरल कार्य है क्योंकि यह केवल विभिन्न प्रकार के पूछे गए सवालों, सवालों का उत्तर प्राप्त करने के लिए प्रयुक्त प्रविधियों एवं उत्तरों पर आधारित सामग्री का एक विवरण मात्र है। वास्तव में, यह काम शायद ही सरल हो।'' वस्तुतः प्रतिवेदन को प्रस्तुत करते

टिप्पणी

समय एक अध्ययनकर्ता को अनेक समस्याओं का सामना करना पड़ता है। इन समस्याओं का प्रभावपूर्ण ढंग से निराकरण किए बिना अध्ययनकर्ता एक संतुलित प्रतिवेदन प्रस्तुत नहीं कर सकता। सामान्यतः अध्ययनकर्ता को प्रतिवेदन तैयार करते समय जिन समस्याओं का सामना करना पड़ता है उन्हें संक्षेप में इस प्रकार समझा जा सकता है।

1. **पारिभाषिक अथवा तकनीकी शब्दों की समस्या**– प्रत्येक विषय के अपने कुछ निजी पारिभाषिक एवं तकनीकी शब्द होते हैं। प्रतिवेदन प्रस्तुत करने में इन प्रामाणिक पारिभाषिक शब्दों का उपयोग आवश्यक होता है। परंतु इन पारिभाषिक एवं तकनीकी शब्दों का समुचित एवं सर्वमान्य रूप से प्रयोग कर सकना एक जटिल समस्या है। इसका प्रमुख कारण यह है कि सभी सामाजिक वैज्ञानिकों के लिए एक विशेष शब्द का एक सामान्य अर्थ नहीं होता बल्कि वे उसे अपने ढंग से पारिभाषित करते हैं। जबकि प्राकृतिक विज्ञानों में पारिभाषिक शब्दों में प्रयोग करने की दिशा में विशेष प्रगति हुई है और इन विज्ञानों में इसीलिए ऐसे विशेष शब्दों तथा वाक्यों की अधिकता है, जिनका अभिप्राय बिना किसी अपवाद के सभी के लिए और सभी स्थानों पर बराबर होता है अथवा समझा जाता है।

   इसके अतिरिक्त ज्ञान की कोई शाखा नवीन होने के कारण विकासोन्मुखी होती है, तो विभिन्न तकनीकी शब्दों का अर्थ बदलते रहने की संभावना भी बढ़ जाती है। इस दशा में किसी सर्वमान्य अर्थ में तकनीकी शब्दों का प्रयोग करना और भी कठिन हो जाता है।

2. **गंभीरता की समस्या**–प्रत्येक शोधकर्ता की यह इच्छा होती है कि उसके द्वारा प्रदर्शित शोध के प्रतिवेदन का स्तर जहां तक संभव हो ऊंचा होना चाहिए ताकि उच्च क्षेत्रों के विद्वानों और पाठकों में वह प्रसिद्ध हो सकें। इससे शोधकर्ता आवश्यक रूप से पारिभाषिक एवं तकनीकी शब्दों का प्रयोग अत्यधिक करता है। जिससे प्रतिवेदन न केवल अपनी स्वभाविकता को खत्म कर देता है बल्कि अधिक क्लिष्ट होने के कारण बहुत सारे तथ्य अस्पष्ट बने रहते हैं।

3. **पाठकों के ज्ञान के स्तर की समस्या**–एक उत्तम प्रतिवेदन के लिए यह आवश्यक समझा जाता है कि प्रतिवेदन की भाषा एवं प्रस्तुतीकरण का स्तर सामान्य पाठकों के ज्ञान की सीमा के अनुसार होना चाहिए। सामान्यतः कहा जाता है कि शोध का लेखन सामान्य जनमानस के लिए उपयोगी नहीं है। चूंकि इसका स्तर इतना उच्च है कि सामान्य पढ़ा–लिखा व्यक्ति तथ्यों को नहीं समझ सकता। आज के वर्तमान युग के विद्वानों का मानना है कि कोई भी खोज अथवा शोध चाहे वह प्राकृतिक संसार से संबंधित हो अथवा सामाजिक संसार से, वह तब तक सार्थक नहीं हो सकती जब तक उस खोज का निष्कर्ष जनजीवन का एक हिस्सा नहीं बन जाता है। अतः मुश्किल यह होती है कि प्रतिवेदन लिखने वाले अध्ययनकर्ता को संबधित लोगों के ज्ञान के स्तर को भांपना होता है। जो एक मुश्किल काम माना जाता है और ऐसा नहीं होने से प्रतिवेदन की सार्थकता कम हो जाती है, उसे ऐसे अध्ययन से कोई लाभ प्राप्त नहीं हो पाता।

4. **वस्तुनिष्ठता की समस्या**—एक उत्तम प्रतिवेदन के लिए यह आवश्यक है कि प्रतिवेदन लेखन के प्रत्येक स्तर पर वस्तुनिष्ठता को बनाए रखा जाए। इसमें विपरीत प्रतिवेदन को प्रस्तुत करने में स्वयं शोधकर्ता की अभिनति तथा उसका पर्यावरण बाधा डालता है। वास्तव में सामाजिक विज्ञान में अध्ययन विषय की प्रकृति इस प्रकार होती है जिसका प्रत्यक्ष अथवा परोक्ष रूप से स्वयं अध्ययनकर्ता एक अंग होता है। उसकी अपनी एक विशेष जाति, धैर्य, मनोवृत्ति, संस्कृति, आदर्श एवं विचार आदि होते हैं, जिनके रहते अध्ययनकर्ता के लिए तटस्थ रूप से घटनाओं का अध्ययन करना एवं प्रतिवेदन में पक्षपातरहित होकर उन्हें स्पष्ट कर सकना प्रायः कठिन प्रतीत होता है। अतः स्पष्ट है कि प्रतिवेदन में कोई निष्कर्ष प्रस्तुत करते समय अध्ययनकर्ता की भावनाओं का समावेश हो जाने से वस्तुनिष्ठता को बनाए रखना एक कठिन समस्या बन जाती है।
5. **सांख्यिकीय सीमाएं**—गुडे एवं हाट का कथन है कि प्रतिवेदन को प्रस्तुत करने में एक प्रमुख समस्या सांख्यकीय सीमाओं से संबंधित है। एक अध्ययनकर्ता जब अध्ययन क्षेत्र के कार्य के द्वारा बहुत से आंकड़े एवं तथ्य एकत्रित करता है तो वह उनकी प्रवृत्ति को स्पष्ट करने के लिए साधारणतया गणितीय आध्ययन का सहारा लेता है। सांख्यिकीय गणनाएं मुख्यतः निदर्शन की इकाइयों से प्राप्त आंकड़ों का आधार मानकर की जाती है, लेकिन इस बारे में प्रमाण नहीं प्रस्तुत किया जा सकता कि अध्ययनकर्ता द्वारा लिया गया निदर्शन निश्चय ही संपूर्ण समग्र का प्रतिनिधित्व करने वाला है। इसका तात्पर्य यह नहीं कि प्रतिवेदन में सांख्यिकीय का उपयोग न किया जाए बल्कि इसके उपयोग के लिए एवं इनके आधार पर व्यवहारों के वास्तविक मूल्यांकन करने के लिए अत्यधिक सावधानी भी आवश्यक होती है।

अपनी प्रगति जांचिए

7. अनुसंधान कार्य का सबसे अधिक महत्वपूर्ण चरण कौन-सा है?
   (क) प्रतिवेदन लेखन (ख) तथ्यों का संग्रह
   (ग) प्रायिकता (घ) समस्या का निदान
8. प्रतिवेदन में किन भाषाओं का प्रयोग नहीं करना चाहिए?
   (क) मुहावरेदार (ख) लच्छेदार
   (ग) अतिशयोक्तिपूर्ण (घ) उपरोक्त सभी

5.6 अपनी प्रगति जांचिए प्रश्नों के उत्तर

1. (ख)
2. (ग)
3. (ग)

टिप्पणी

4. (ख)
5. (ख)
6. (ग)
7. (क)
8. (घ)

5.7 सारांश

प्रायिकता को किसी विशेष घटना के घटित होने की संभावना के माप के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। यह शून्य एवं एक के बीच का एक अंकीय मान है जहाँ शून्य प्रायिकता किसी घटना के घटित न होने की संभावना को एवं एक प्रायिकता किसी घटना के अवश्य घटित होने की संभावना को दर्शाता है।

भविष्य की घटनाओं से जुड़ी अनिश्चितताओं का मापन एवं उनका विश्लेषण करने हेतु प्रायिकता का सिद्धान्त हमें एक यांत्रिकी प्रदान करता है। प्रायिकता का यह तरीका विशेष रूप से वैज्ञानिक शाखाओं के सुदूर क्षेत्रों में इस्तेमाल किया जाता है। प्रारंभिक घटना को एक साधारण घटना भी कहा जाता है जो किसी प्रयोग का एकमात्र सम्भव प्रतिफल है।

शोध एक ऐसी गतिविधि है, जिसमें नवीन ज्ञान की खोज एवं उपलब्ध ज्ञान को सत्यापित करने का प्रयास किया जाता है। यह एक उच्च बौद्धिक क्रियाकलाप है, जिसमें अनुसंधानकर्ता उपलब्ध ज्ञान के सहारे नवीन तथ्यों और सूचनाओं की खोज करता है।

मौलिक शोध सामग्री प्रदान करता है जिसके आधार पर किसी निष्कर्ष पर पहुंचा जा सकता है। इस अनुसंधान के प्रारंभिक चर में बहुत–सी समस्याएं आती हैं और लागत भी अपेक्षाकृत अधिक आती है। व्यावहारिक शोध में मौलिक शोध से प्राप्त परिणामों को वास्तविक घटनाओं तथा परिस्थितियों पर लागू कर प्राप्त परिणामों के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं।

निर्देशात्मक परिकल्पना बताती है कि दो या दो से अधिक चर विधेयात्मक या निषेधात्मक रूप से जुड़े हुए हैं यथा यदि वेतन बढ़ता है तो कीमतें घटती हैं या गरीबी विपरीत रीति से शिक्षा के साथ जुड़ी हुई है।

शोध का शीर्षक बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इसके आधार पर अध्ययन किए जाने वाले विषय की प्रकृति व क्षेत्र का ज्ञान होता है।

किसी समस्या के निवारण हेतु किया जाने वाला अनुसंधान अनुसंधानकर्ता के लिए एक समस्या के रूप में जाना जाता है, जिसे शोधकर्ता सैद्धांतिक एवं प्रायोगिक रूप से अनुभव करता है और उसका समाधान खोजना चाहता है।

एक सांख्यिकी प्राक्कलन परीक्षण का प्रभाव शून्य–प्राक्कलन को अस्वीकार जब यह यथार्थ रूप से गलत हो को मापने की क्षमता है। इसलिए प्रभाव से ही सही निर्णय

लिया जाता है। इसे पुनः बताया जा सकता है कि प्रभाव प्रकार II की त्रुटि नहीं करना है।

टिप्पणी

सामान्य प्राक्कलन परीक्षण में सार्थकता स्तर गलत रूप से शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने की प्रायिकता है। मिश्रित प्राक्कलन में यह प्रायिकता का ऊपरी परिबद्ध है जो शून्य प्राक्कलन को अस्वीकार करने का आधार तैयार करता है।

प्रतिवेदन के द्वारा एक शोधकर्ता शोध विषय से संबंधित तथ्यों का संकलन करने तथा उनका सारणीयन एवं विवेचन कर लेने के पश्चात उन पर आधारित निष्कर्षों को व्यवस्थित रूप में दूसरों के सामने प्रस्तुत करता है।

प्रतिवेदन का उद्देश्य शोध से प्राप्त निष्कर्षों एवं तथ्यों को जनसामान्य से परिचित कराने के साथ ही साथ नवीन शोध कार्यों की संभावनाओं के लिए भी मार्ग प्रशस्त करना होता है।

प्रत्येक शोध प्रतिवेदन में शोधकार्य में प्रयुक्त होने वाली पद्धतियों तथा प्रविधियों का उल्लेख किया जाता है।

5.8 मुख्य शब्दावली

- **प्रायिकता :** प्रायिकता कुल प्राप्तियों की संख्या एवं अनुकूल प्राप्तियों की संख्या पर आधारित सिद्धांत है।
- **घटना :** घटना किसी गतिविधि की प्राप्ति अथवा प्राप्तियों का समूह अथवा परीक्षण का परिणाम है।
- **संयुक्त घटना :** संयुक्त घटना को यौगिक घटना भी कहा जाता है क्योंकि इसमें दो या अधिक आवश्यक घटनाएं होती हैं।
- **प्रतिदर्श :** यह किसी क्रियाकलाप की समस्त संभावित घटनाओं अथवा प्राप्तियों का संग्रह है।
- **शाध प्रतिवेदन :** शोधकर्ता शोध विषय से संबंधित तथ्यों का संकलन, सारणीयन एवं विवेचन कर उन्हें व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करता है।

5.9 स्व–मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास

लघु–उत्तरीय प्रश्न

1. प्रायिकता से आप क्या समझते हैं?
2. यादृच्छ प्रयोग तथा यादृच्छ चर में क्या अंतर है?
3. घटना से क्या तात्पर्य है? प्रारंभिक, संयुक्त तथा पूरक घटना को समझाएं।
4. अनुसंधान से क्या अभिप्राय है? इसके मुख्य उद्देश्यों को संक्षेप में समझाइए।
5. अनुसंधान समस्या के सीमांकन के लिए किन चरणों का अनुपालन किया जाना चाहिए?

टिप्पणी

दीर्घ–उत्तरीय प्रश्न

1. प्रायिकता के विभिन्न सिद्धांतों का विस्तार से वर्णन कीजिए।
2. परस्पर अपवर्जी घटनाएं क्या हैं? स्पष्ट कीजिए।
3. सशर्त प्रायिकता की विस्तृत विवेचना कीजिए।
4. प्रकृति के आधार पर अनुसंधान को कितने भागों में बांटा गया है? विश्लेषण कीजिए।
5. अनुसंधान चयन की समस्या शोध में किस प्रकार महत्वपूर्ण होती है? इस विषय पर प्रकाश डालिए।

5.10 सहायक पाठ्य सामग्री

1. चंदन, जे. एस., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनॉमिक्स', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
2. मोंगा, जी. एस., 'मैथेमेटिक्स एंड स्टैटिसटिक्स फॉर इकोनॉमिक्स', नई दिल्लीः विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
3. कोठारी, सी. आर., 'क्वांटिटेटिव टेकनिक', नई दिल्ली : विकास पब्लिशिंग हाउस प्राइवेट लिमिटेड।
4. हुडा, आर. पी., 'स्टैटिसटिक्स फॉर बिजनेस एण्ड इकोनोमिक्स', नई दिल्ली : मैकमिलन इण्डिया लिमिटेड।
5. गुप्ता, एस. सी., 'फण्डामेन्टल ऑफ स्टैटिसटिक्स', नई दिल्ली हिमालया पब्लिशिंग हाउस।
6. गुप्ता, एस. पी., 'स्टैटिसटिकल मेथड्स', नई दिल्ली : एस चान्द एण्ड सन्स।