बी.कॉम. द्वितीय वर्ष

प्रबंधन समूह, प्रथम प्रश्नपत्र

सांख्यिकी के सिद्धांत

(Principles of Statistics)

मध्यप्रदेश भोज (मुक्त) विश्वविद्यालय – भोपाल

MADHYA PRADESH BHOJ (OPEN) UNIVERSITY-BHOPAL

COURSE WRITER

Dr. Arbind Kumar Singh, Associate Professor, Department of Statistics, S.N.S.R.K.S. College, Saharsa-852201, Bihar.

Published by Registrar, MP Bhoj (Open) University, Bhopal in 2020

VIKAS®

Vikas® is the registered trademark of Vikas® Publishing House Pvt. Ltd.

VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT. LTD.
E-28, Sector-8, Noida - 201301 (UP)
Phone: 0120-4078900 • Fax: 0120-4078999
Regd. Office: A-27, 2nd Floor, Mohan Co-operative Industrial Estate, New Delhi 1100 44
• Website: www.vikaspublishing.com • Email: helpline@vikaspublishing.com

SYLLABI-BOOK MAPPING TABLE

सांख्यिकी के सिद्धांत

Syllabi	Mapping in Book
इकाई–1 सांख्यिकी– आशय, परिभाषा एवं महत्व, क्षेत्र एवं सीमाएं, सांख्यिकीय अनुसंधान। समंक संकलन की प्रक्रिया, प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक, निदर्शन की रीतियाँ, प्रश्नावली की रचना, समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन, सांख्यिकीय श्रेणियों की रचना एवं प्रकार।	**इकाई 1** **अध्यायः 1** प्रस्तावना **(पृष्ठ 3–19)** **अध्यायः 2** समंक, संकलन की प्रक्रिया, प्राथमिक एवं द्वितीय समंक, निदर्शन की रीतियाँ, प्रश्नावली की रचना, समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन, सांख्यिकीय श्रेणियों की रचना एवं प्रकार **(पृष्ठ 20–64)**
इकाई–2 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप–माध्य, मध्यका, चतुर्थक, भूयिष्ठक, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य	**इकाई 2** **अध्यायः 3** केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप **(पृष्ठ 65–137)**
इकाई–3 अपकिरण एवं विषमता। काल श्रेणी का विश्लेषण– अर्थ, महत्व, संघटक, काल श्रेणी का विघटन, दीर्घकालीन उपनति के माप, चक्रीय व अनियमित उच्चावचनों के माप।	**इकाई 3** **अध्यायः 4** अपकिरण एवं विषमता **(पृष्ठ 138–226)** **अध्यायः 5** काल श्रेणी विश्लेषण **(पृष्ठ 227–289)**
इकाई–4 सहसंबंध– आशय, परिभाषा, प्रकार, सहसंबंध का परिमाण, सहसंबंध की विधियाँ। प्रतीपगमन विश्लेषण– आशय, उपयोग, सहसंबंध एवं प्रतीपगमन में अंतर, रेखीय प्रतीपगमन, प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन गुणांक का परिकलन।	**इकाई 4** **अध्यायः 6** सहसंबंध **(पृष्ठ 290–361)** **अध्यायः 7** रैखिक प्रतीपगमन (समाश्रयण) विश्लेषण **(पृष्ठ 362–409)**
इकाई–5 निर्देशांक– अर्थ, विशेषताएँ, महत्व एवं उपयोग। निर्देशांकों की रचना– जीवन निर्वाह निर्देशांक, फिशर का आदर्श सूचकांक। समंकों का चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन।	**इकाई 5** **अध्यायः 8** सूचकांक निर्देशांक **(पृष्ठ 410–511)** **अध्यायः 9** समंक का आरेखीय चित्रमय और लेखाचित्रीय प्रदर्शन **(पृष्ठ 512–566)**

विषय–सूची

इकाई 2

इकाई 3

इकाई 5

परिचय

टिप्पणी

प्राचीन काल में सांख्यिकी को सिर्फ शासन कला का विज्ञान माना जाता था और इसका प्रयोग अपराधों, सैन्य क्षमता, जनसंख्या और संपत्ति इत्यादि से संबंधित सूचनाओं को एकत्रित करके सैन्य और राजस्व संबंधी योजनाओं को बनाने में किया जाता था। परन्तु आजकल यह सिर्फ प्रशासनिक व्यवस्था का उपोत्पाद नहीं रह गया है, परन्तु यह सभी विज्ञानों, सामाजिक, भौतिक और प्राकृतिक विज्ञानों को आविष्ट करता है, और विभिन्न क्षेत्रों जैसे– कृषि, उद्योग, समाजशास्त्र, बायोमेट्री, योजना, अर्थशास्त्र, व्यवसाय, प्रबंधन, बीमा, लेखाशास्त्र और लेखा परीक्षण में भी इसका विस्तृत प्रयोग होता है। सांख्यिकी (सैद्धान्तिक और विधियाँ) का प्रयोग सरकारों या व्यवसायिक या प्रबंधन संस्थानों द्वारा भविष्य की कार्य योजनाओं और कार्यनीति तय करने में विस्तृत रूप से किया जाता है। बहुत हद तक, आधुनिक सम्यता सांख्यिकी सम्यता बन चुकी है और एच.जी. वेल्स के शब्दों में, ''सांख्यिकीय सोच एक दिन नागरिकता के लिए उतनी ही आवश्यक और प्रभावशाली हो जाएगी जितनी कि पढ़ने और लिखने की क्षमता।'' यह सोचना करीब-करीब असंभव है, मानवीय क्रिया-कलापों का कोई क्षेत्र जहाँ सांख्यिकी ने प्रवेश ना किया हो। विगत वर्षों में सांख्यिकी विज्ञान के विषय ने इतनी प्रगति कर ली है कि सांख्यिकी विधियों का प्राथमिक ज्ञान बहुत सारे उच्च शिक्षा और व्यवसायिक कोर्सों के सामान्य अध्ययन के पाठ्यक्रम का एक भाग बन चुका है।

हिन्दी भाषा में प्रस्तुत पुस्तक एक संतुलित परन्तु निश्चित अवधारणा के साथ लिखी गई है कि यह भारतीय विश्वविद्यालयों के बी.कॉम. (सब्सिडियरी और ऑनर्स) बी.ए. अर्थशास्त्र (सब्सिडियरी और ऑनर्स के छात्रों के पाठ्य-पुस्तक (Text Book) की आवश्यकता पूरी करे। इस पुस्तक को लिखने का मुख्य उद्देश्य है सांख्यिकी के सिद्धान्तों, विधियों और तकनीकों की स्पष्ट सरल, व्यवस्थित और सहज ग्राह्य अभिव्यक्तिकरण विशेषतया व्यवसायिक शास्त्र और अर्थशास्त्र में प्रयास किया गया है कि एक प्रासंगिक विषय की प्राथमिक स्पष्ट व्याख्या से शुरू किया जाए और आगे जटिल और तब कठिन प्रश्नों की जटिलताओं का वर्णन किया गया है। सांख्यिकीविदों द्वारा सबसे प्रचलित प्रयुक्त विधियों और तकनीकों के अनुप्रयोग पर जोर दिया गया है। इस पुस्तक को लिखने में पारदर्शी शैली और सरल अभिव्यक्ति मेरे दो उद्देश्य रहे हैं। गणितीय जटिलता को जहाँ तक संभव हो सका है टालने की कोशिश की गई है। जहाँ वांछित है, संकेताक्षरों और पारिभाषिक शब्दों का स्पष्ट रूप से वर्णन किया गया है और तब सभी गणितीय चरणों का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है।

कई प्रारूपिक प्रश्न जो अधिकतर विभिन्न विश्वविद्यालयी प्रश्न पत्रों से लिया गया है और उसे सरल रूप में साधित किया गया है। ताकि छात्रों को प्रश्नों के हल के विभिन्न तकनीकों से अभिदर्शन हो जाए ताकि उन्हें सिद्धान्तों के मूलभूत अवधारणाओं और इनके अनुप्रयोग की बेहतर और आद्योपांत समझ आ जाए। इसके अतिरिक्त, पाठकों को विषय-वस्तु की उचित गुण-विवेचन उनके आत्म विश्वास को मजबूत करने के लिए कई सतर्कता पूर्वक श्रेणीबद्ध प्रश्नों जो विभिन्न विश्वविद्यालय के प्रश्न पत्रों से ली गई हैं प्रश्नमाला के रूप में प्रत्येक अध्याय के अंत में दी गई हैं। प्रश्नमाला में प्रश्नों के उत्तर प्रत्येक प्रश्न के अंत में दी गई है।

इस पुस्तक में विवेचित प्रासंगिक विषयों को नहीं गिनाएंगे चूँकि विषय सूची में सरसरी निगाह डालने पर इसका बोध हो जाएगा। अध्याय 2 से 5 तक वर्णनात्मक सांख्यिकी को समर्पित है जिसमें कुछ अभिलक्षणों यथा औसत, अपकिरण, ककुदता, सहसंबंध इत्यादि संख्यात्मक समंक का विवरण है। सांख्यिकीय तकनीकों में कई आधुनिक विकास के बावजूद, पुराने प्रासंगिक विषय जैसे वर्गीकरण और सारणीयन (अध्याय 2) और चित्रमय और रेखीय वर्गीकरण (अध्याय 5) विस्तार से वर्णित किया गया है। चूँकि आज भी सरकारी और व्यवसायिक प्रतिष्ठानों में काफी सांख्यिकीय कार्य इसी पर आधारित हैं। आर्थिक और व्यवसायिक संख्याओं के विश्लेषण के वैज्ञानिक उपकरण के रूप में सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग अध्याय 8 (सूचकांक) और अध्याय 5 (काल श्रेणी विश्लेषण) में वर्णित किया गया है।

एक प्रमुख विशेष बात है परिभाषिक शब्दों के प्रयोग में एकरूपता का होना। इस पारिभाषिक शब्दावली को अनुप्रयोग के दृष्टिकोण से भारत सरकार के वैज्ञानिक और तकनीकी शब्दावली आयोग, केन्द्रीय हिन्दी निदेशालय, नई दिल्ली द्वारा प्रकाशित से चयनित है। भारतीय विश्वविद्यालयों और केन्द्र तथा राज्य लोक सेवा आयोग द्वारा इन्हीं शब्दों का प्रयोग होता है।

डॉ. अरविन्द कुमार सिंह
एम.ए. (सांख्यिकी) पटना विश्वविद्यालय
पी.एच.डी.
एसोसिएट प्रोफेसर, सांख्यिकी विभाग,
एस.एन.एस.आर.के.एस. कॉलेज सहरसा, बिहार।

इकाई– 1

टिप्पणी

अध्याय 1 प्रस्तावना (Introduction)

संरचना (Structure)

1.0 परिचय
1.1 उद्देश्य
1.2 अर्थ
1.3 सांख्यिकी की परिभाषा
1.4 सार्थकता और कार्यक्षेत्र
1.5 सीमाएं
1.6 सांख्यिकीय अन्वेषण
1.7 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर
1.8 सारांश
1.9 मुख्य शब्दावली
1.10 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास
1.11 सहायक पाठ्य सामग्री

1.0 परिचय (Introduction)

प्राचीनकाल में, सांख्यिकी विज्ञान का विषय 'शासन कला का विज्ञान' या 'राजाओं का विज्ञान' माना जाता था। यह वह शास्त्र था जो मानव शक्ति के संचालन और देश की भौतिक संपदा के लिए प्रयुक्त होता था। राजा या शासन प्रमुख अपने राज्य के लोगों की जनगणना और राज्य की संपदा का अभिलेख शासन के नीति निर्धारण में करते थे। इसलिए, सभी प्राकृतिक संसाधनों से संबंधित समंक का संकलन शासकों का प्रमुख कार्य था। इस तरह से संकलित समंक या सूचना जमीन को बाँटने में, कर पद्धति को लागू करने में और सामाजिक तथा आर्थिक नीतियों को तैयार करने में उपयोगी थी। इस तरह सांख्यिकी विज्ञान राज्य की शासन कला के उपोत्पाद के रूप में विकसित हुआ।

1.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- सांख्यिकी का अर्थ समझ पाएंगे।
- सार्थकता और कार्यक्षेत्र को समझ पाएंगे।
- सांख्यिकी की सीमाओं का वर्णन कर पाएंगे।
- सांख्यिकी की अन्वेषण का वर्णन कर पाएंगे।

1.2 अर्थ (Meaning)

टिप्पणी

पद 'Statistics' की उत्पत्ति या तो Status (लैटिन), Statista (इटालियन), Statistik (जर्मन) या Statistique (फ्रेंच) से हुई है, जिनमें से प्रत्येक का अर्थ राजनैतिक राज्य से है—

(A) 'Statistics' (एकवचन अर्थ में) से उस विज्ञान का उल्लेख है, जो उन वैज्ञानिक विधियों और सिद्धान्तों को प्रतिपादित करता है जो समंक के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण और व्याख्या में प्रयुक्त होता है। यह प्रेक्षण, अभिलेखन, संगणन, सार प्रस्तुतीकरण, निरूपण और समंक के संबंध में निर्णय लेने के लिए निष्कर्ष निकालने का साधन है।

सांख्यिकी विज्ञान है और तथ्यों के समुच्चय के प्रबंधन की कला है— ''प्रेक्षण, संगणन, अभिलेखन, वर्गीकरण और अन्य बातों में उनकी व्यवस्थित विवेचना करने में।''

—हार्लो

सांख्यिकी विज्ञान है और कला भी। यह संख्यात्मक संहति समंक पर कार्य करता है। यह समंक के संकलन, वर्गीकरण और प्रस्तुतीकरण को समाविष्ट करता है। यह संख्यात्मक समंक के विश्लेषण और विवेचन को आवृत्त करता है। यह संक्षिप्तिकरण, तुलनीयता, व्याख्या और निष्कर्ष की विधि है। यह सिद्धान्तों और विधियों की संहति है, जो अन्वेषकों या लेखकों को उपकरण और तकनीक मुहैया कराते हैं नए-नए विज्ञानों को विकसित करने में।

(B) Statistics (बहुवचन अर्थ में) उन तथ्यों और अंकों का उल्लेख करता है जो उत्पाद या निष्कर्ष हैं जो सांख्यिकीय विधि से प्राप्त किए जाते हैं उनके साधनों, विधियों और तकनीकों का प्रयोग करें।

सभी सांख्यिकी, तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं परंतु सभी तथ्यों के संख्यात्मक विवरण सांख्यिकी नहीं हैं। तथ्यों के संख्यात्मक विवरण को सांख्यिकी बनने के लिए निम्नलिखित आवश्यकताओं को निश्चित रूप से धारण करना चाहिए—

- वे तथ्यों के समुच्चय हैं।
- वे बहुत कारणों से प्रभावित होते हैं।
- वे संख्यात्मक रूप में, अभिव्यक्ति में सक्षम हैं।
- वे व्यवस्थित रूप से संकलित हैं।
- वे एक खास उद्देश्य के लिए प्राप्त किए गए हैं।
- वे युक्तिसंगत ढंग से आकलित किए गए हैं।
- वे तुलना के लिए प्रयुक्त हुए हैं।

सांख्यिकी की परिभाषा की जा सकती है तथ्यों के समुच्चय के रूप में जो चिन्हित स्तर तक बहुविध कारणों से प्रभावित होते हैं, संख्यात्मक रूप से अभिव्यक्त, प्रगणित या आकलित किए जाते हैं, परिशुद्धता के तर्कसंगत स्तर के अनुसार, व्यवस्थित क्रम में संकलित, पूर्वनिर्धारित उद्देश्य के लिए और एक दूसरे के संबंध में प्रतिस्थापित किए गए हैं।

—प्रो. होरेस सेक्रिस्ट

इस तरह, सांख्यिकी तथ्यों का समुच्चय है विशेष अन्वेषण के क्षेत्र से संबंधित। वे ऐसे तथ्य हैं जो समूहों में उपलब्ध हैं और बहुविध कारणों या कारकों से प्रभावित हैं। यद्यपि, वे परिणामों से संबंधित हैं ना कि कारणों से। वे संख्यात्मक रूप से अभिव्यक्त होने में सक्षम हैं और व्यवस्थित रूप से एक योजना के तहत संकलित हैं जो प्रभावकारी ढंग से कार्यान्वित होती है। अन्वेषण का उद्देश्य पूर्व से हीं साफ-साफ और सुस्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए। वे संगणित या आकलित होते हैं, एक तर्कसंगत परिशुद्धता के स्तर के अनुरूप, जो दूसरे संबंधित तथ्यों या अंकों से तुलना किए जाने में सक्षम हैं।

1.3 सांख्यिकी की परिभाषा (Definition of Statistics)

सांख्यिकी की परिभाषा विभिन्न लेखकों द्वारा समय–समय पर विभिन्न ढंग से की गई है जिस कारण विद्वानोचित सामग्रियों के आधार पर सैकडों परिभाषायें है, जो विषय–वस्तु के अर्थ, कार्यक्षेत्र और सीमितता को दर्शाती है। विभिन्न प्रकार की परिभाषाओं के कारणों को मुख्यतया निम्नलिखित रूप से वर्गीकृत कर सकते है–

1. सांख्यिकी विज्ञान की उपयोगिता का क्षेत्र लगातार बढ़ता जा रहा है इसलिए विभिन्न लोगों ने इस विषय के विकास के हिसाब से इसे विभिन्न ढंग से परिभाषित किया है। पुराने समय में सांख्यिकी को शासन कला का विज्ञान कहते थे, परन्तु आजकल इसने करीब-करीब प्रत्येक प्राकृतिक और मानवीय कार्यों के क्षेत्र को अंगीकार कर लिया है। इस वजह से पुरानी परिभाषायें जो अनुसंधान के सीमित और संकुचित क्षेत्र तक परिसीमित थी को नई परिभाषाओं से प्रतिस्थापित कर दिया गया जो अधिगम में (Approach) अधिक विस्तृत और परिष्कृत है।

2. सांख्यिकी (Statistics) शब्दों का प्रयोग एक वचन और बहुवचन में भिन्न-भिन्न अर्थों में होता है। जब बहुवचन के रूप में सांख्यिकी (Statistics) शब्द का प्रयोग होता है तो इसका अर्थ समंको का संख्यात्मक समूह होता है और एकवचन में जब इसका प्रयोग होता है तो इसका अर्थ सांख्यिकीय विधियों का विज्ञान के रूप में होता है जिसको मूर्त रूप से इसके सिद्धांत और तकनीक का प्रयोग संख्यात्मक समंकों के संग्रहण, विश्लेषण और उसके आधार पर निष्कर्ष निकाले जाने से लिया जाता है।

उन सभी परिभाषाओं को उल्लेख करना व्यवहारिक रूप से असंभव है जो जगह के अभाव में सांख्यिकी के लिए संख्यात्मक समंक और सांख्यिकीय विधियों के रूप में परिभाषित हैं। परंतु हम नीचे कुछ चुनी हुई परिभाषायें दे रहे है।

सांख्यिकी के विषय में विद्वानों का मत–कुछ परिभाषायें सांख्यिकी (Statistics) की संख्यात्मक समंक के रूप में–

(a) ''समंक किसी राज्य के निवासियों की स्थिति से सम्बन्धित वर्गीकृत तथ्य है– विशेष रूप से वे तथ्य जिन्हें संख्याओं की तालिका में या किसी भी सारणी या वर्गीकृत व्यवस्था में प्रस्तुत किया सके।''

टिप्पणी

"Statistics are the classified facts representing the conditions of the people in a state, specially those facts which can be stated in number or in tables of number or in any tabular or classified arrangement." **(Webster)**

''सांख्यिकी किसी अनुसंधान के किसी विभाग में तथ्यों का संख्यात्मक विवरण है, जिन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित रूप में प्रस्तुत किया जाता है।''

"Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry placed in relation to each other." **(Bowley)**

3. ''सांख्यिकी से हमारा तात्पर्य ऐसे संख्यात्मक समंक से है जो पर्याप्त सीमा तक बहुत तरह के कारणों से प्रभावित होते है।''

"By statistics, we mean quantitative data affected to a marked extent by multiplicity of causes." **(Yule and Kendal)**

''सांख्यिकी से हमारा तात्पर्य समग्र तथ्यों से है जो पर्याप्त सीमा तक कई कारणों से प्रभावित होते हैं, जिन्हें अंको में व्यक्त किया जा सकता है, जिनकी गणना या अनुमान उचित स्तर के अनुसार की जा सकती है, जिनकी संग्रहण व्यवस्थित ढंग से की जाती है, पूर्व निश्चित उद्देश्यों से की जाती है ताकि उन्हें एक–दूसरे के सम्बन्ध में प्रस्तुत किया जा सकता है।''

"Statistics may be defined as the aggregate of facts affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to a reasonable standard of accuracy, collected in a systematic manner, for a predetermined purpose and placed in relation to each other. **(Prof. Horace Secrist)**

टिप्पणी एवं समीक्षा, समालोचना–

(a) वेबस्टर की परिभाषा के अनुसार, केवल संख्यात्मक तथ्य ही सांख्यिकी कहे जा सकते है। इस अतिरिक्त यह सांख्यिकी के क्षेत्र को राज्य के मामले तक सीमित करता है, सामाजिक विज्ञान तक यह बहुत पुरानी और संकुचित परिभाषा है और आज के समय के अनुसार अपर्याप्त क्योंकि आज सांख्यिकी विज्ञान सभी विज्ञानों सामाजिक, भौतिक और प्राकृतिक को शामिल करता है।

(b) वाउले की परिभाषा वेबस्टर की परिभाषा से ज्यादा व्यापक है क्योकि यह किसी भी विषय के अनुसन्धान में संख्यात्मक तथ्यों से संबधित है। इसके अतिरिक्त यह संख्याओं के तुलनात्मक अध्ययन के अवसर प्रदान करता है, जबकि वेबस्टर की परिभाषा में सिर्फ संख्याओं के वर्गीकरण और सारणीयन तक की व्यवस्था है।

(c) युल और कैण्डल की परिभाषा में चर्चा है कि संख्यात्मक तथ्य कई कारणों से प्रभावित होते हैं। यह ज्यादातर सामाजिक, आर्थिक एवं वाणिज्यिक गतिविधियों में होता है। उदाहरणस्वरूप, एक वस्तु की कीमत कई वजहों से प्रभावित होती है– पूर्ति, माग, आयात, निर्यात, मुद्रा का परिचलन, बाजार में प्रतिस्पर्धात्मक उत्पादों की उपस्थिति इत्यादि। इसी तरह से बाजार में एक खास अनाज की पैदावार कई कारकों पर निर्भर करती है यथाः– बीज की विशेषता,

मिट्टी की उर्वरता, जुताई का प्रकार, सिंचाई की सुविधायें वायुमंडलीय प्रभाव, उर्वरक का प्रयोग इत्यादि।

(d) सेक्रिस्ट की परिभाषा चारों परिभाषाओं में सबसे संपूर्ण है। अब हम इसका परीक्षण विस्तार से करें–

(i) तथ्यों का समुच्चय– साधारण या अलग तथ्य सांख्यिकी नहीं कहे जा सकते जब तक वे एक विशेष अनुसन्धान क्षेत्र के सम्बन्धित तथ्य नही हो। उदाहरण के तौर पर– किसी व्यक्ति की लंबाई या किसी वस्तु की कीमत सांख्यिकी नही है क्योंकि ये समंक असम्बन्धित और अतुलनीय है, जबकि जन्म, मृत्यु, बिक्रि, खरीद, उत्पादन, लाभ इत्यादि तथ्यों का संकलन विभिन्न समय, स्थान के आधार पर करना सांख्यिकी होगा।

(ii) बहुत कारणों से प्रभावित होना– सांख्यात्मक तथ्य कई वजहों से प्रभावित होते हैं। इसका वर्णन टिप्पणी 3 में किया जा चुका है। पदार्थ विज्ञान में वह सम्भव है कि कई कारकों को अलब किया जा सकता है, जो एक तथ्य को प्रभावित करते है परन्तु सामाजिक विज्ञान में ऐसा करना बहुत कठिन है। विशेष रूप से कुछ वैसे कारक जिनकी संख्यात्मक माप नहीं हो सकती। हालाकि ऐसी सांख्यिकीय विधियाँ इजाद कर ली गई हैं जिनमें किसी एक तथ्य पर पड़ने वाले कई तथ्यों के प्रभाव का अध्ययन बहुगुणी (बहुआयामी सह-सम्बन्ध) या किसी एक तथ्य का अलग से उस तथ्य पर प्रभाव (आंशिक सह सम्बन्ध) का अध्ययन किया जा सकता है बशर्ते हर तथ्य के प्रभाव को संख्यात्मक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(iii) संख्यात्मक अभिव्यक्ति– केवल संख्यात्मक समंक सांख्यिकी का निर्माण कहते है। इसलिए ऐसे वक्तव्य ''दिल्ली क निवासियों का जीवन स्तर बढ़ गया है'' या ''किसी खास वस्तु की उत्पादकता बढ़ रही है'' सांख्यिकी का निर्माण नही करते। खासतौर पर गुणात्मक तथ्य जिन्हें संख्यात्मक रूप से नही मापा जा सकता, जैसे– बुद्धिमत्ता, सुन्दरता, ईमानदारी इत्यादि सांख्यिकी, तब तक नहीं कहे जा सकते जब तक इनके प्रत्येक गुण को निर्धारित अंक देकर संख्यात्मक रूप से व्यक्त करने लायक ना बना लिया जाये। उदाहरणस्वरूप– बुद्धिमत्ता सांख्यिकी नही है परंतु बुद्धिमत्ता लब्धि (Intelligence Quotient) जिसे व्यक्ति की बुद्धिमत्ता की संख्यात्मक माप कह सकते है को सांख्यिकी कह सकते है।

(iv) तर्कयुक्त परिशुद्ध के अनुसार गणन या प्राक्कलन– अनुसंधान के किसी भी क्षेत्र का संख्यात्मक समंक उस समष्टि के पूर्ण गणन करने से प्राप्त की जा सकती है। इस स्थिति में प्राप्त समक यथार्थ और शुद्ध होगी (मापने की अशुद्धि व्यक्तिगत पूर्वाग्रह इत्यादि का छोड़कर) हालाकि, अगर पूर्ण गणना उक्त समष्टि का संभव नहीं है। e.g. अगर समष्टि अनन्त है, या परीक्षण विध्वंसनीय है। i.e., अगर परीक्षण के क्रम में वस्तु का विध्वंस हो जाये जैसे बारुद के परीक्षण में, बिजली बल्ब इत्यादि में। और अगर संभव भी है तो कुछ कारणों की वजह से तर्कसंगत नही है (जैसे– अगर समष्टि बहुत बड़ी है, प्रत्येक इकाई की गणना का अर्थ काफी ज्यादा

टिप्पणी

है और हमारे संसाधन, समय और अर्थ के रूप में सीमित है इत्यादि), तब समंक का प्राक्कलन प्रभावशाली तकनीक प्रतिदर्शन और प्राक्कलन विधि द्वारा की जाती है। हालांकि, प्राक्कलित मूल्य उतना सूक्ष्म और परिशुद्ध नही होगा जितना यथार्थ मूल्य। प्राक्कलित मूल्यों की परिशुद्धता की मात्रा अनुसंधान की प्रकृति और उद्देश पर अधिक से अधिक निर्भर करती है। जैसे– व्यक्तियों की शुद्धि ऊँचाई की माप में ईंच के अंशमात्र को भी मापने की कोशिश की जायेगी, जबकि दो जगहो की दूरी है, जैसे दिल्ली आर लंदन के बीच तो कई किलोमीटर को भी नजरअन्दाज किया जा सकता है। जबकि, एक अर्थयुक्त परिणाम पर पहुंचने के लिए एक खास परिशुद्धि के मानक को अवश्य बनाये रखना होगा।

(v) व्यवस्थित क्रम में संग्रहित करना– समंक बहुत ही व्यवस्थित क्रम में संग्रहित होना चाहिए। इसलिए, किसी भी सामाजिक – आर्थिक सर्वेक्षण के लिये एक उचित व्यवस्था अनुसंधान की दिशा के हिसाब से और प्रशिक्षित व्यक्तियों (जांचकर्ता) की सेवा साक्षात्कार करके समंक इकट्ठी करने के लिए लेना चाहिए। ऐसी व्यवस्था करनी चाहिए कि व्यक्तिगत पूर्वाग्रह कम से कम हो। स्पष्टतः समंक जो अव्यवस्थित ढंग से इकट्ठी की जाती है वो परिशुद्धि की तर्कयुक्त मानक के अनुरूप नही होगी और उन पर आधारित निष्कर्ष गलत या भ्रामक परिणाम देंगे।

(vi) पूर्व निर्धारित उद्देश से इकट्ठा करना– यह सबसे आवश्यक है कि तहकीकात का उद्देश साफ–साफ और ठोस रूप से परिभाषित होना चाहिए और समंक को इकट्ठा करते वक्त इन उद्देशों ध्यान रखना चाहिए। ऐसी कोशिश नही की जानी चाहिए कि बहुत सारे समकों को इकट्ठा कर लें जिसमें बहुत समंकों का ना तो कभी परीक्षण किया जाता है ना हि विश्लेषण। हमें ऐसी सूचनाओं को एकत्रित करने में समय बर्बाद नही करना चाहिये जो हमारे तहकीकात के लिए अनावश्यक है। साथ ही यह भी सुनिश्चित करना चाहिये कि कोई जरूरी समंक में छूट जाये। उदाहरण के लिए, अगर तहकीकात का उद्देश निम्न आर्थिक वर्गीय लोगों के जीवन स्तर का सूचकांक ज्ञात करना है तो हमें बस वैसी वस्तुओं का ही चुनाव करना चाहिए जो इस वर्ग के लोग इस्तेमाल करते है। अतः इस सूचकांक के लिए इस तरह की वस्तुओं का समंक जैसे स्कूटर, कार, रेफ्रीजरेटर, टेलीविजन सेट, उच्च स्तरीय श्रृंगार सामग्री इत्यादि बिल्कुल अनुपयोगी होगी।

(vii) तुलनीय (Comparable)– व्यवहारिक तौर पर, सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए समंको को तुलनीय होना चाहिए ये किसी इकाई के साथ तुलना किये जाते है, सामान्यतः समय या स्थान के साथ उदाहरणस्वरूप, विभिन्न वर्षों में किसी देश की जनसंख्या संबंधित समंक या विभिन्न देशों की जनसंख्या का समंक किसी खास वर्ष में सांख्यिकी का निर्माण करते हैं क्योंकि ये परस्पर तुलनीय है। जबकि किसी व्यक्ति के जूतों की माप का समंक और उसकी बुद्धि लब्धि आई.क्यूं. का समंक सांख्यिकी का निर्माण नही करते है

क्योंकि ये आपस में तुलनीय नहीं है। समंको के तर्कसंगत तुलना के लिए समंको को समरूप होना चाहिए तथा उन्हें समान संवृत्ति (Phenomenon) या विषय से संबंधित होना चाहिए।

(e) होरेस सेक्रिस्ट की परिभाषा और ऊपर वर्णित टिप्पणी 4 के विवेचना के आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि: ''सभी सांख्यिकी संख्यात्मक विवरण के तथ्य होते है, परन्तु सभी संख्यात्मक विवरण के तथ्य सांख्यिकी नहीं होते है।''

(f) हम नीचे सांख्यिकी परिभाषा, जहाँ सांख्यिकी एकवचन के रूप में प्रयुक्त होती है, i.e., सांख्यिकी, सांख्यिकीय विधि के रूप में, देते है।

सांख्यिकी के संबंध में वे क्या कहते है, कुछ परिभाषाएँ सांख्यिकी, सांख्यिकीय विधियों के रूप में–

(i) सांख्यिकी को गणना का विज्ञान कह सकते है– **Bowley A.L.**

(ii) सांख्यिकी को उचित रूप से माध्यों का विज्ञान कहा जा सकता है। **Bowley A.L.**

(iii) सांख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक अवयवों को सम्पूर्ण मानकर उनका सभी रूपों में मापन करता है, जो अपने सभी अभिव्यक्तियों में पूर्ण माने जाते हैं। **Bowley A.L.**

(iv) सांख्यिकी प्राक्कलन (मूल्यांकन) और संभाव्यता प्रायिकता का विज्ञान है। **Boddington**

(v) सांख्यिकी का विज्ञान सामूहिक, प्राकृतिक या सामाजिक संघटना के निष्कर्ष से निर्णय से निर्णय की विधि है जो प्राक्कलनों के विश्लेषण या गणन या संग्रहण से प्राप्त होती है।

(vi) सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसका संबंध संख्यात्मक तथ्यों के वर्गीकरण और सारणीयन से है जो व्याख्या, वर्णन और संवृत्ति (Phenomenon) की तुलना का आधार है। **Lovin**

(vii) सांख्यिकी ऐसा विज्ञान है जो संख्यात्मक समंको की संग्रहण विधि वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना और व्याख्या से किसी भी क्षेत्र के अनुसंधान पर प्रकाश डालती है। **Selligman**

(viii) सांख्यिकी को संख्यात्मक समंकों, संग्रहण, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण और व्याख्या के विज्ञान के रूप में परिभाषित कर सकते है।

(ix) सांख्यिकी ऐसे विधियों के विज्ञान के रूप में जाना जा सकता है जो कि अनिश्चितताओं के बीच बुद्धिमानीपूर्वक निर्णय ले ले। **Wallis and Roberts**

(x) सांख्यिकी निर्णय लेने की ऐसी विधि का नाम है जिसमें संख्यात्मक समंक और परिकलित जोखिम अनिश्चितता की स्थिति मे ली जाती है। **Prof. Ya-Lun-Chau**

टिप्पणी

(xi) सांख्यिकी विज्ञान वह प्रणाली है जिसके द्वारा किसी एक गणना या अनुमानों के संग्रहण के विश्लेषण से प्राप्त परिणामों के द्वारा सामूहिक, प्राकृतिक या सामाजिक घटनाओं का विवेचन किया जाता है।

The Science and art of handling aggregate of facts– observing, enumeration, recording, classifying and otherwise systematically treating them.

वह विज्ञान और कला जिससे तथ्यों का औसत–निरीक्षण, संगणना, रिकार्डिंग, वर्गीकरण और दूसरे ढंग से व्यवस्थित ढंग से उनसे व्यवहार करें।

कुछ टिप्पणी और निरीक्षण (अवलोकन)–

(i) प्रथम तीन परिभाषायें जो बोवले ने दिये हैं, अपर्याप्त हैं।

(ii) बोर्डिंगटन की परिभाषा भी सांख्यिकी के अर्थ और कार्य का वर्णन करने में असक्षम है क्योंकि यह सिर्फ प्रायिकता और प्राक्कलन तक सीमित है जो आधुनिक सांख्यिकीय साधनों का सिर्फ एक हिस्सा है और अपनी अभिव्यक्ति में सांख्यिकी के विज्ञान का वर्णन नहीं करता है।

(iii) किंग की परिभाषा भी अपर्याप्त हैं क्योंकि यह सांख्यिकी को सिर्फ सामाजिक विज्ञान तक सीमित रखता है। लोविन की परिभाषा काफी संतोषजनक है, हालाँकि अपूर्ण है। सेलिंग मैन की परिभाषा, हालाँकि बहुत छोटी और सामान्य है परंतु बहुत बोधगम्य है। हालाँकि इन सभी परिभाषाओं में ऐसा लगता है कि क्राक्सटन और काउडेन द्वारा दी गई परिभाषा सबसे अच्छी है।

(iv) वालिस और रॉबस्टर्स की परिभाषा काफी आधुनिक है चूँकि सांख्यिकीय विधियाँ हमें वैध निर्णय तक पहँचाने में मदद करती है। 10 नवम्बर पर प्रा. चाऊ की परिभाषा का परिमार्जित रूप है।

(v) हालों की परिभाषा सांख्यिकी को विज्ञान और कला दोनों ही बताती है। विज्ञान– क्योंकि यह साधन और नियम देता है, अनुसंधान के श्रोत से इकट्ठी की गई संख्यात्मक जानकारी के विश्लेषण के लिए और कला, चूँकी इसे बगैर किसी बगैर किसी इन्कार के कहा सकता है कि इसका आधार संख्यात्मक समंक पर आधारिक है। जिसे इस दृष्टिकोण से इकट्ठी की जाती है कि एक विशेष संतुलन और स्थिरता रहे ताकि पूर्ण या करीब–करीब पूर्ण निष्कर्ष पर पहुंच सके। एक सांख्याकीविद् किसी समस्या का हल करने में एक कलाकार के समान असफल हो जायेगा यदि सांख्यिकीय साधनों का इस्तेमाल करके वक्त उसके पास अपेक्षित कार्यदक्षता, अनुभव और धैर्य नहीं है।

1.4 सार्थकता और कार्यक्षेत्र (Signification or Workspace)

सांख्यिकी का मुख्य उद्देश्य है जटिल संहति समंक को संक्षिप्त रूप में आसान बनाना। यह भविष्य के लिए प्रवृत्तियों और उपनतियों की ओर संकेत करता है। यह

संहति समंक पर प्रकाश डालता है महत्वपूर्ण निर्णय लेने में और भविष्य में उठाए जाने वाले कदम के संबंध में। यह ज्ञात समंक से अज्ञात को सिद्ध करने में सहायक होता है। यह नए ज्ञान का आधार देता है और कार्यप्रणाली की विधि का पथ प्रदर्शन करता है। यह प्रयास करता है संहति समंक में स्थित छिपे तथ्यों को उजागर करने में।

इन दिनों, सांख्यिकी के बगैर योजना सोची भी नहीं जा सकती। सांख्यिकी मानवीय ज्ञान के क्षेत्र की आँखें बन चुका है। वे निर्णय करने की विधि का बेशकीमती (अमूल्य) और अनिवार्य साधन बन चुके हैं। सांख्यिकी का कार्यक्षेत्र मानवीय ज्ञान के उन सभी क्षेत्रों में फैल चुका है जिनमें काफी तथ्यों का अध्ययन नए ज्ञान के लिए किया जाता है। इसका कार्यक्षेत्र दिन-ब-दिन बढ़ रहा है विशेषकर आधुनिक व्यापार में, प्रबंधक भविष्य में उठाये जाने वाले कदमों के बारे में काफी अनिश्चितता का सामना कर रहे हैं। निर्णय करने की विधि उनके लिए कठिन साबित हो रही है। यह सांख्यिकी विज्ञान हीं हैं, उन सभी लोगों को हल प्रदान करता है जो भविष्य के लिए योजना बनाते हैं।

''विज्ञानों का सांख्यिकी के बगैर कोई जड़ नहीं;

सांख्यिकी बगैर विज्ञान का कोई फल नहीं।''

आजकल, अन्वेषण का शायद ही कोई क्षेत्र है जहाँ सांख्यिकी विधियाँ प्रयुक्त नहीं होती हैं। सांख्यिकी की सार्थकता इसके कार्यक्षेत्र को रोज-रोज बढ़ा रही है। सांख्यिकी विषय का रूपान्तरण 'राजाओं के विज्ञान' से 'समष्टि के विज्ञान' में हो रहा है। यह प्राथमिक साधन हो चुका है नए ज्ञान की खोज या अनुसंधान के लिए।

1.5 सीमाएं (Limitations)

यद्यपि सांख्यिकी विज्ञान मानवीय ज्ञान के लिए समस्त ब्रम्हांड में प्रयुक्त होती है, परन्तु फिर भी यह निम्नलिखित सीमितता से ग्रसित है–

- सांख्यिकी गुणात्मक पहलू को नजरअंदाज कर देता है।
- सांख्यिकी व्यक्तिगत मदों का अध्ययन नहीं करता है।
- सांख्यिकी के नियम सख्त सुनिश्चित नहीं होते हैं।
- सांख्यिकी पूरे तथ्यों को नहीं प्रकट करता है।
- सांख्यिकी साधनों का दुरूपयोग हो सकता है।

आजकल सांख्यिकी विज्ञान के विरुद्ध काफी पूर्वाग्रह या व्यक्तिगत धारणा है। कुछ लोगों को सांख्यिकी में अंधी श्रद्धा है और वे इसकी बिना पर कुछ भी बलपूर्वक कहने को तत्पर रहते हैं। कुछ लोगों को इस पर कुछ भी विश्वास नहीं होता और सांख्यिकी के बारे में प्रतिकूल सोचते हैं। वे निम्न प्रकार से कहते हैं–

''सांख्यिकी किसी भी बात को सिद्ध कर सकता है।''
''सच्चाई का एक औंस, टनों सांख्यिकी को पैदा कर सकती है।''

टिप्पणी

''सांख्यिकी सामान्य को प्रकट कर देती है परन्तु आवश्यक को छुपा देती है।''

''सांख्यिकी गीली मिट्टी के समान है जिससे कोई भगवान या शैतान गढ़ सकता है जैसा वह चाहे।''

''तीन प्रकार के झूठ हैं– झूठ, सफेद झूठ और सांख्यिकी''

उपर्युक्त वक्तव्य सांख्यिकी के बारे में अविश्वासनीयता प्रकट करते हैं। वे सांख्यिकी विज्ञान के लिए अपकीर्ति लाते हैं। यह सभी सांख्यिकी तकनीकों की सीमितता और दुरुपयोग के कारण हैं। सांख्यिकी, प्राकृतिक रूप से, निर्दोष हैं। कठिनाई सांख्यिकी विज्ञान के साथ नहीं है परन्तु लोगों के साथ है जो सांख्यिकी की विधियों और साधनों का गलत इस्तेमाल करते हैं अपने उद्देश्य की प्राप्ति के लिए। किसी को सांख्यिकीय साधनों पर दोषारोपण नहीं करना चाहिए; बल्कि साधनों के इस्तेमालकर्ता पर दोषारोपण करना चाहिए। सांख्यिकी की सीमाओं को चिन्हित करने के लिए और इसके साधनों को सावधानीपूर्वक इस्तेमाल कर, अविश्वास को कम किया जा सकता है।

1.6 सांख्यिकीय अन्वेषण (Statistical Investigation)

''सांख्यिकीय अन्वेषण' का अर्थ है पूछ-ताछ या सर्वेक्षण या ज्ञान की खोज जो संख्यात्मक क्रम में अभिव्यक्त किये जा सकते हैं। यह तकनीकी विधि है, जिसके लिए विशिष्ट ज्ञान और दक्षता वांछनीय है। यह निम्नलिखित दो चरणों को आलिप्त करता है–

A. अन्वेषण की योजना (Planning of the Enquiry)

B. अन्वेषण की योजना का कार्यान्वयन (Executing the plan of Enquiry)

A. अन्वेषण की योजना– सांख्यिकी अन्वेषण में पहला कदम इसकी योजना तैयार करना है। इसमें आगे के चरण निम्नलिखित हैं–

(i) अन्वेषण का 'उद्देश्य' स्पष्टता और सुनिश्चितता से परिभाषित होनी चाहिए। यह संकलन योग्य समंक की प्रकृति को निर्धारित करता है और समंक के विश्लेषण का प्रयुक्त प्रकार। यह समंक के संकलन में बर्बादी और भ्रम को रोकता है। यह संदर्भहीन समंक के संकलन को रोकने में सहायता करता है।

(ii) अन्वेषण के 'कार्यक्षेत्र' का निर्धारण पहले से हीं हो जाना चाहिए। यह क्षेत्र को नियत करने में मदद करता है सूचना के प्रकार के संबंध में, विषयवस्तु की प्रकृति और अन्वेषण का क्षेत्र। यह अन्वेषण के उद्देश्य के लिए समंक के संकलन के नियत मात्रा का निर्धारण करता है।

(iii) समंक संकलन की 'इकाईयों' का भी निर्धारण किया जाना है। सांख्यिकीय इकाई आधार है जिसके बिना पर समंक संकलित किए जाते हैं और व्याख्या किए जाते हैं। यह एक चीज है या वस्तु या परिमाण जो सुपरिभाषित है और किस गिनती या मान से अभिनिर्धारित है। यह परिमाण का मानक माप है। इसे असंदिग्ध, विशिष्ट, उचित

और समरूप होना चाहिए समंक की माप के लिए। सांख्यिकीय इकाईयों के उदाहरण हैं– एक व्यक्ति, एक फर्म, एक परिवार, एक घंटा, एक मील, एक वेतन, एक जन्म दर, अंक, वजन, ऊँचाई, लीटर, पाउंड, रुपये और इसी तरह।

(iv) विभिन्न 'स्रोतों' जिनसे समंक संकलित किए जाते हैं सतर्कतापूर्वक अभिनिर्धारित किए जाने चाहिए। स्रोत या तो 'प्राथमिक' हो सकते हैं या 'द्वितीयक'।

आँकड़े जो पहली बार अन्वेषक द्वारा मूल रूप से संकलित किए जाते हैं अन्वेषण के विशिष्ट उद्देश्य की पूर्ति के लिए 'प्राथमिक समंक' कहे जाते हैं। वैसे आँकड़े जो पहले किसी दूसरे द्वारा संकलित किये जाते हैं और फिर अन्वेषक उनका इस्तेमाल करते हैं ''द्वितीयक समंक'' कहे जाते हैं।

(v) प्राथमिक समंक संकलित करने की 'दो तकनीकें' हैं– जनगणना विधि और प्रतिदर्श विधि। 'जनगणना' विधि सम्पूर्ण गणन को आलिप्त करता है और जनसंख्या (समष्टि) के प्रत्येक इकाई का अभिलेखन करती है। 'प्रतिदर्श विधि में जनसंख्या (समष्टि) के एक भाग का चुनाव किया जाता है जो जनसंख्या के अभिलक्षणों को प्रस्तुत करती है। प्रतिदर्श समष्टि का पर्याप्त परिमित समुच्चय है।

समंक के संकलन की तकनीक का चुनाव कई कारकों पर निर्भर करता है– आँकड़ों के स्रोत, आँकड़े की प्रकृति, अन्वेषण के उद्देश्य, निधि और समय की उपलब्धता, और दूसरी स्थितियों पर।

(vi) 'अन्वेषण' के विभिन्न प्रकार होते हैं, जिन पर अन्वेषणकर्त्ता को विचार करना चाहिए। ''राजकीय अनुसंधान'' सरकार के लिए की जाती है। 'अर्द्ध-सरकारी अनुसंधान' संस्थानों द्वारा की जाती है जिसे सरकार द्वारा संरक्षण प्राप्त होता है। 'गैर-सरकारी अन्वेषण', निजी संस्थानों द्वारा की जाती है। 'आवृत्तिमूलक अन्वेषण' कुछ पहले की गई अन्वेषण की आवृत्ति या निरंतरता के लिए की जाती है। 'गोपनीय अन्वेषण' बातों को गोपनीय रखने के लिए की जाती है। 'गैर-गोपनीय अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण की सूचना जन साधारण में देना होता है।

'प्रत्यक्ष अन्वेषण' तब सम्पादित की जाती है जब संवृत्ति का अध्ययन संख्यात्मक रूप से मापे जाने में सक्षम होती है, जैसे– उम्र, वजन, वेतन और अंक। ''अप्रत्यक्ष अन्वेषण'' तब सम्पादित की जाती है, जब संवृत्ति का अध्ययन संख्यात्मक रूप से मापे जाने में सक्षम नहीं होती है जैसे– सुंदरता, इमानदारी और बुद्धि। 'नियमित अन्वेषण' आवर्त्तकाल में समय के बराबर अंतराल पर की जाती है। 'तदर्थ अन्वेषण' तब सम्पादित की जाती है जब यह आवश्यक होता है, समय की निरंतरता के बगैर। 'जनगणना अन्वेषण' तब की जाती है जब सम्पूर्ण जनसंख्या के मदों की गणना की जानी होती है विश्लेषण के अभिलेखन के लिए। ''प्रतिदर्श अन्वेषण'' तब की जाती है जब विश्लेषण के लिए समष्टि का एक भाग यदृच्छया चुनी जाती है।

टिप्पणी

'प्राथमिक अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण मौलिक आँकड़ों के संकलन से संबंधित होती है। 'प्रतिदर्श अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण समष्टि से प्रतिदर्श के संकलन से संबंधित होती है। 'विस्तृत अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण की विषयवस्तु समंक के बहुत सारे पहलुओं को आच्छादित करती है। 'सीमित अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण की विषयवस्तु समंक के केवल एक या दो पहलुओं को आच्छादित करती है। 'पथ-प्रदर्शक अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण द्वारा अपेक्षित परिणाम संक्षिप्त हैं। 'समाविष्ट अन्वेषण' तब की जाती है जब अन्वेषण द्वारा अपेक्षित परिणाम विस्तार में हैं।

(vii) उस फ्रेम को चुनना आवश्यक है जिसके अन्दर आँकड़े को संकलित किया जाना है। एक 'फ्रेम' एक संरचना, हाशिया या सीमांत है जहाँ आँकड़े तैयार रूप में उपलब्ध हैं। एक फ्रेम हो सकता है निर्देशिका (Directory), मतदाता सूची शहर योजना, राज्य का मानचित्र या राशन कार्डधारियों की सूची। फ्रेम अन्वेषण योजना के सम्पूर्ण संरचना को निर्धारित करता है। फ्रेम को चुनते वक्त, इसके आधार की उचित तहकीकात इसके विश्वसनीयता के संबंध में की जाती है।

(viii) 'परिशुद्धता का स्तर' के संबंध में निर्णय समंक के विश्लेषण के लिए अन्वेषक द्वारा की जाती है। यद्यपि परिणाम की संपूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करने में असंभव है, परंतु एक तर्कयुक्त स्तर की शुद्धता लक्ष्य की जाती है। परिशुद्धता के स्तर का अनुपालन संकलित आँकड़ों की प्रकृति, आकार और प्रकार पर निर्भर करती है।

(ix) कई 'विविध विचारणायएं' हैं जिनपर ध्यान देना होता है यथा समय कारक, कोष की उपलब्धता, कर्मचारियों की नियुक्ति, सरकारी नीति, आर्थिक स्थितियाँ और दूसरी आनुषांगिकताएं (Contingencies)।

इस तरह, अन्वेषण की उचित योजना, समुचित विचार और सतर्कता काफी आवश्यक है हमारे समंक संकलन को शुरू करने से पहले।

B. अन्वेषण की योजना का कार्यान्वयन– सांख्यिकीय अनुसंधान का दूसरा कदम है। जब एक बार अनुसंधान की योजना तैयार हो जाती है, अन्वेषक उस योजना को कार्यरूप में परिणत करने के लिए आगे बढ़ता है। निम्नलिखित विभिन्न चरण हैं अन्वेषण योजना के कार्यान्वयन का–

(i) एक उपयुक्त 'संस्था (organisation)' खड़ी की जाती है अन्वेषण के योजना के प्रदर्शन पर निगाह रखने के लिए। अन्वेषण की प्रकृति और उद्देश्य संस्था के आकार को निर्धारित करेगी। सामान्यतया, अस्तित्वगत संस्था का उपयोग उद्देश्य के लिए अस्थाई तौर पर किया जाता है।

(ii) कई तरह के 'प्रपत्रों (Forms)' की आवश्यकता होती है समंक को संकलित करने के लिए और उन्हें व्यस्थित रूप से आलेखित करने के लिए। कई प्रकार के प्रपत्र तैयार और प्रिंट किए जाते हैं अन्वेषण के उद्देश्य के लिए। प्रश्नावली (Questionnaires), अनुसूची (Schedules),

पत्र (Letters) और दूसरे प्रपत्र उपलब्ध करवाए जाते हैं समंक के संकलन और आलेखन के लिए।

(iii) कार्य की विशिष्टता के हिसाब से अन्वेषण के कार्य के लिए 'कर्मचारियों की नियुक्ति की जाती है। उपयुक्त चुनाव और प्रशिक्षण और कार्य समनुदेशन (Job assignment) सतर्कता से किया जाना चाहिए। पर्याप्त संख्या में सुपरवाईजर, किरानी, फील्ड कार्यकर्त्ता आदि नियुक्त किए जाते हैं।

(iv) कार्यकलापों पर प्रभावी 'नियंत्रण' स्थापित किया जाता है। कार्यकलापों की योजनागत प्रदर्शन को वास्तविक प्रदर्शन से नियमित रूप से तुलना की जाती है। योजनागत और वास्तविक प्रदर्शन के बीच विभिन्नता की जाँच की जाती है और सुधार के लिए तुरंत प्रभावी कदम उठाए जाते हैं।

(v) एक उपयुक्त 'अनुगमन कार्य (Follow up work)' भी किया जाना चाहिए विलंबित कार्य की स्थितियों और गैर-प्रत्युत्तर (Non-response) घटनाओं से निपटने के लिए। प्रत्येक प्रयास किया जाता है समय सीमा के अंदर सूचनाओं को संकलित करने के लिए।

(vi) एक अपरिष्कृत आँकड़ा 'संकलित' की जाती है और आगे संसाधित की जाती है। यह संपादित, वर्गीकृत, सरलीकृत, तालिकाबद्ध की जाती है और अंत में आवृत्ति बंटन या लेखाचित्र या आरेख के रूप में प्रस्तुत की जाती है। आगे के अध्ययन के लिए समंक को व्यवस्थित ढंग से उपयुक्त प्रकार से प्रस्तुत करना आवश्यक है।

(vii) समंक के प्रतिनिधि अभिलक्षणों को प्रकट करने के लिए प्रस्तुत किए गए समंक का उचित गणितीय विश्लेषण' किया जाना चाहिए।

(viii) परिशुद्ध निर्णय करने के लिए विश्लेषित समंक को उचित रूप से समझा और सर्तकता से व्याख्यायित किया जाता है।

(ix) समंक के प्रतिनिधि अभिलक्षणों को प्रकट करने के लिए प्रस्तुत किए गए समंक का उचित गणितीय 'विश्लेषण' किया जाना चाहिए। सांख्यिकीय विश्लेषण विभिन्न गणितीय तकनीकों का इस्तेमाल कर उपस्थित समंक को संक्षिप्त कर देता है और इसे एक अंक से भी प्रदर्शित किया जा सकता है। विश्लेषण की यह विधि समंक की व्याख्या करने में सहायता करता है और समंक के बारे में निर्णय करने में।

(x) परिशुद्ध निर्णय करने के लिए विश्लेषित समंक को उचित रूप से समझा और सतर्कता से व्याख्यायित किया जाता है। अन्त में, यह आवश्यक हो जाता है परिणामों और निष्कर्षों को 'रिपोर्ट (आलेखन)' के रूप में मूर्त रूप देना। आलेखन प्रस्तुति अन्वेषण के कार्यान्वयन का अंतिम चरण है। इस तरह से तैयार आलेखन संबद्ध उच्च अधिकारियों के पास आगे की कार्यवाही के लिए प्रस्तुत की जाती है।

इस तरह, सांख्यिकीय अन्वेषण, कार्य योजना और योजनागत अन्वेषण के प्रभावी कार्यान्वयन की लम्बी विधि है। इसमें विशेष योग्यता प्राप्त, दक्ष और प्रबंधन योग्यता वांछित है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. सांख्यिकी परिभाषित की जाती है तथ्यों के __________ तौर पर
   (क) गुणात्मक (ख) समुच्चय के
   (ग) भ्रामक (घ) वास्तविकता के
2. सांख्यिकी उपेक्षा करती है __________ पक्षों को।
   (क) धनात्मक (ख) गुणात्मक
   (ग) वास्तविक (घ) इनमें से कोई नहीं
3. सच्चाई का एक औंस सांख्यिकी का __________ उत्पादित करेगी।
   (क) मनों (ख) टनों
   (ग) कई किलो (घ) इनमें से कोई नहीं
4. सांख्यिकीय अन्वेषण आवेष्टित करती है योजना और __________।
   (क) गैर योजना (ख) अन्वेषण
5. मूल रूप संकलित समंग __________ समंग कहलाती है।
   (क) प्राथमिक (ख) द्वितीयक
   (ग) गवेपित (घ) इनमें से कोई नहीं
6. सभी मदों को गणना की तकनीक __________ विधि कहलाती है।
   (क) सांख्यिकी (ख) सारणीयन
   (ग) प्राथमिक (घ) जनगणना
7. कुछ मदों का चुनाव समष्टि से __________ विधि कहलाती है।
   (क) प्रतिदर्श (ख) अन्वेषण
   (ग) सांख्यिकी (घ) योजना

1.7 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (ख)
2. (ख)
3. (ख)
4. (ख)

5. (क)
6. (ग)
7. (क)

टिप्पणी

1.8 सारांश (Summary)

सांख्यिकीय विज्ञान प्राचीन काल के शासन कला विज्ञान से आगे निकल कर आधुनिक समय में यह सभी विज्ञानों सामाजिक, भौतिक और प्राकृतिक विज्ञानों का आविष्ट करता है और विभिन्न क्षेत्रों, जैसे– कृषि, उद्योग, समाज शास्त्र, बायोमेट्री योजना, अर्थशास्त्र, व्यवसाय, प्रबंधक, बीमा, लेखाशास्त्र और लेखा परीक्षण में उसका विस्तृत प्रयोग होता है। बहुत हद तक आधुनिक सभ्यता सांख्यिकी सभ्यता बन चुकी है और सांख्यिकी विधियों का प्राथमिक ज्ञान बहुत सारे अन्य शिक्षा और व्यावसायिक कोर्सो के सामान्य अध्ययन के पाठ्यक्रम का एक भाग बन चुका है।

इसकी उत्पत्ति status (लैटिन) statista (इटालियन) statistik (जर्मन) या statistique (फ्रेंच से हुई), जिनका अर्थ राजनैतिक राज्य से है। परन्तु कालांतर में सांख्यिकी विज्ञान का प्रयोग एकवचन और बहुवचन दोनों रूप में किया गया।

सांख्यिकी का मुख्य उद्देश्य है जटिल संहति समंक को संक्षिप्त रूप में आसान बनाकर भविष्य के लिए प्रवृत्तियों और उपनतियों की ओर संकेत करना। यह ज्ञात समंक से अज्ञात को सिद्ध करने में सहायक होता है।

बहुत सारे गुणों के बावजूद यह विज्ञान सीमितताओं से भी ग्रसित है।

सांख्यिकी अन्वेषण (Statistical Investigation)

यह तकनीकी विधि है, जिसके लिए विशिष्ट ज्ञान और दक्षता वांछनीय है। यह दो चरणों में सम्पन्न की जाती है–

A. अन्वेषण की योजना

B. अन्वेषण योजना का कार्यान्वयन

अन्वेषण का उद्देश्य स्पष्टता और सुनिश्चितता से परिभाषित होनी चाहिए। यह सन्दर्भहीन समंक को रोकने में सहायता करता है। अन्वेषण का कार्यक्षेत्र का निर्धारण पहले से ही हो जाना चाहिए। समंक की इकाईयों का भी निर्धारण उनके परिमाण के आधार पर समरूप होना चाहिए। विभिन्न स्रोतों का अभिनिर्धारण किया जाना चाहिए। यथा– प्राथमिक और द्वितीयक स्रोत।

प्राथमिक समंक संकलन की दो तकनीकें हैं–

जनगणना विधि– जिसमें जनसंख्या के प्रत्येक इकाई का अभिलेखन होता है और प्रतिदर्श विधि– जिसमें जनसंख्या के उस भाग का चुनाव किया जाता है जो जनसंख्या के अभिलक्षणों को प्रस्तुत करती है।

अन्वेषण के विभिन्न प्रकार हैं जिन पर अन्वेषणकर्ता को विचार कर की जाती है उस फ्रेम को चुनना भी आवश्यक होता है जिसके अन्दर आँकड़े संकलत किए

जाते हैं। 'परिशुद्धता का स्तर' के संबंध में निर्णय समंक के विश्लेषण के लिए अन्वेषक द्वारा की जाती है। और विविध विचारणाए यथा–समय कारक, कोष की उपलब्धता, कर्मचारियों की युक्ति, सरकारी नीति, आर्थिक स्थितियाँ और आनुषांगिकताएँ का भी ध्यान रखना होता है।

1.9 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **सांख्यिकी**: Statistics
- **अन्वेषण**: Investigation

1.10 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. पद 'Statistics' को बहुवचन अर्थ में वर्णित करें।
2. 'सांख्यिकी किसी भी चीज को सिद्ध कर सकती है' समीक्षा करें।
3. सांख्यिकी की किन्हीं चार सीमितताएं बताएं।
4. सांख्यिकी का कार्यक्षेत्र क्या है?
5. 'Statistics' को एकवचन अर्थ में परिभाषित करें।
6. आप 'सांख्यिकी की इकाईयों' से क्या समझते हैं?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. हार्लो द्वारा दी गई सांख्यिकी की परिभाषा की व्याख्या करें।
2. प्रो. होरेस सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा की आवश्यकताओं का संक्षेप में वर्णन करें।
3. 'प्राथमिक समंक' क्या है? कैसे यह द्वितीयक समंक से भिन्न होती है?
4. सांख्यिकीय अनुसंधान क्या है? सांख्यिकीय अनुसंधान में आवेष्टित चरणों का संक्षेप में उल्लेख करें।
5. सांख्यिकी की सार्थकता और कार्यक्षेत्र का उल्लेख करें।

1.11 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamentals of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

टिप्पणी

अध्याय 2 समंक, संकलन की प्रक्रिया, प्राथमिक एवं द्वितीय समंक, निदर्शन की रीतियाँ, प्रश्नावली की रचना, समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन, सांख्यिकीय श्रेणियों की रचना एवं प्रकार

संरचना (Structure)

2.0 परिचय (Introduction)

प्रथम अध्याय में बताया जा चुका है, सांख्यिकी संख्यात्मक समूह के समुच्चय हैं। वस्तुतः केवल संख्यात्मक समंक ही सांख्यिकी के लिए आवश्यक अवयव हैं।

देखने में ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकीय अनुसंधान का पहला कदम समंक का संकलन है, परन्तु एक वैज्ञानिक रूप से तैयार किए गए (सक्षम और सुनियोजित) सांख्यिकीय अनुसंधान में समंकों का संकलन किसी भी तरह पहला कदम नहीं है। समंकों के संकलन का उपक्रम करने से पहले सांख्यिकीय अनुसंधान के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं का ध्यानपूर्वक परीक्षण कर लेना आवश्यक है जिसे हम समंकों के संकलन की प्राथमिकताएं कहेंगे— अनुसंधान का उद्देश्य और

कार्यक्षेत्र, सांख्यिकी इकाई, सूचनाओं का स्रोत, समंक एकत्रित करने की विधि, अभिसंक्षित परिशुद्धता और अनुसंधान का प्रकार।

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप–

- अनुसंधान के उद्देश्य को साफ और ठोस रूप से परिभाषित करना।
- किसी भी सांख्यिकीय अनुसंधान में पहला और सर्वाधिक महत्वपूर्ण कदम है।
- सांख्यिकीय अनुसंधान में सबसे महत्वपूर्ण कारक है कि वास्तविक समंक का संकलन सही और उपयुक्त हो।

2.2 समंक का संकलन (Compilation Data)

अपरिष्कृत आँकड़े, आँकड़ों को संकलित करने की विधि से उत्पन्न होते हैं। एक सांख्यिकीविद्, अपना अन्वेषण कार्य आँकड़ों को संकलित करने से शुरू करता है। ''गणना की विधि, संगणना या माप के साथ अपरिष्कृत आँकड़े का आलेखन समंक का संकलन कहलाता है।'' यह सभी सांख्यिकीय अन्वेषणों या सर्वेक्षणों का प्रारंभिक चरण है।

2.3 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक (Primary and Secondary Data)

सांख्यिकीय अन्वेषण के उद्देश्य और कार्यक्षेत्र को निर्धारित करने के बाद, एक अन्वेषक को समंक संकलन की उचित विधि को निर्धारित करना होता है। दो मुख्य स्रोत हैं समंक को संकलित करने का– प्राथमिक स्रोत और द्वितीयक स्रोत–

1. **प्राथमिक स्रोत**– समंक जो पहली बार मौलिक रूप से संकलित किए जाते हैं 'प्राथमिक समंक' कहलाते हैं। प्राथमिक समंक के स्रोत इस प्रकार हैं–

(a) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत प्रेक्षण

(b) अप्रत्यक्ष मौखिक साक्षात्कार

(c) स्थानीय एजेन्ट द्वारा सूचना

(d) डाक प्रश्नावली विधि

(e) संगणकों द्वारा अनुसूची

(a) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत प्रेक्षण– अन्वेषक व्यक्तिगत तौर पर सूचकों से मिलता है। सूचकों के आमने-सामने होकर अन्वेषक प्रत्यक्ष रूप से समंक संकलित करना शुरू करता है। संकलित समंक प्रत्यक्ष, अधिक विश्वसनीय और शुद्ध होता है। सूचकों द्वारा भी अच्छा प्रत्युत्तर मिलेगा।

समंक संकलन की यह विधि सिर्फ गहन अध्ययन के लिए उपयुक्त है। यह अधिक समय, अधिक पैसा, और अधिक मानव शक्ति खपत करने वाली है। इसके लिए वांछित है दक्ष और अनुभवी अन्वेषक।

वे सूचकों से सूचना लेते हैं और सूचकों के साथ साक्षात्कार के आधार पर समंक का व्यवस्थित रूप से आलेखन करते हैं।

एक अन्वेषक वांछित समंक को संकलित करने के लिए स्थानीय एजेन्ट या संवाददाता विभिन्न स्थानों पर नियुक्त करता है।

(b) **अप्रत्यक्ष मौखिक साक्षात्कार**– एक अन्वेषक समंक संकलित करने के लिए अनुभवी संगणकों की नियुक्ति करता है। संगणकों को सूचकों से मिलने का निर्देश दिया जाता है। वे सूचकों से सूचना लेते हैं और सूचकों के साथ साक्षात्कार के आधार पर समंक का व्यवस्थित रूप से आलेखन करते हैं। वे सही और संगत सूचना को संकलित करते हैं। यह विधि कम खर्चीली और कम समय खपत करने वाली है। यद्यपि, यह अन्वेषक के व्यक्तिगत प्रभाव और निरीक्षण की कमी से ग्रसित होता है।

(c) **स्थानीय एजेन्ट द्वारा सूचना**– एक अन्वेषक वांछित समंक को संकलित करने के लिए स्थानीय एजेन्ट या संवाददाता विभिन्न स्थानों पर नियुक्त करता है। खास स्थानों पर रहने वाले एजेन्टों से यह अपेक्षित है उनकी अपनी विधि का इस्तेमाल सूचकों से सूचना प्राप्त करने के लिए। आगे, उनसे अपेक्षित है संकलित समंक का ब्यौरा अन्वेषक को प्रस्तुत करने का। यह विधि ज्यादातर अखबारों और विभिन्न सरकारी विभागों द्वारा अपनाई जाती है। यह कम खर्चीली और अधिक विस्तृत क्षेत्र के समंक के संकलन की विधि है। यद्यपि, यह स्थानीय एजेन्टों के व्यक्तिगत पूर्वाग्रहों और सनक से ग्रसित होता है। संकलित सूचना परिशुद्ध हो भी सकता है नहीं भी।

(d) **डाक द्वारा प्रश्नावली विधि**– इस विधि में '**प्रश्नावली**' तैयार की जाती है जो प्रश्नों की सूची होती है। एक प्रश्नावली में विभिन्न प्रकार के प्रश्न होते हैं जिनमें उत्तर देने के लिए पर्याप्त जगह होता है। यह सूचक या उत्तरदाता द्वारा भरा जाता है जिन्हें यह प्रश्नावली डाक द्वारा भेजी जाती है एक व्याख्या पत्र के साथ। सूचकों से विनम्रतापूर्वक उस पत्र में लिखा जाता है कि अन्वेषण में सहयोग करें और प्रश्नावली को ठीक से भरकर पुनः डाक से भेजें। सूचकों को आश्वस्त किया जाता है कि उनकी जानकारी को गोपनीय रखा जाएगा। यह विधि सामान्यतया शोध–छात्रों द्वारा अपनाई जाती है। सामान्यतया, सभी डाक खर्च अन्वेषक द्वारा वहन किए जाते हैं।

प्रश्नावली प्रश्नों की सूची होती है। यह महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। यह सतर्कता, दक्षता और ज्ञान से तैयार की जाती है। पूछे गए प्रश्नों को स्पष्ट, छोटा, संक्षिप्त, संपोषी, अनाक्रामक, शालीन, असंदिग्ध और हाँ या ना के क्रम में उत्तर देने लायक होना चाहिए। उन्हें अधिक गोपनीय भी नहीं होना चाहिए और न ही सूचकों या प्रत्यर्थियों की

भावना को चोट पहुँचाने वाला होना चाहिए। उसे निश्चित रूप से सूचकों के सामान्य शिक्षा स्तर के अनुकूल होना चाहिए।

प्रश्नावली विधि की सबसे बड़ी कमी है कि इसका इस्तेमाल तभी हो सकता है जब प्रत्यर्थी शिक्षित हो। यह अशिक्षित प्रत्यर्थियों के साथ उपयोग में नहीं लाई जा सकती है। यह तभी प्रभावी होता है जब प्रत्यर्थी अपनी इच्छा से आगे आकर प्रश्नावली का उत्तर देते हैं। बहुत बार वे सही जानकारी को छुपा सकते हैं और जल्द उत्तर देने में असफल हो सकते हैं। वे अपनी आय, जायदाद और आदतों को लिखित रूप में देने में हिचकिचा सकते हैं। इसके अतिरिक्त सूचकों के पास शंका की स्थिति में समाधान का कोई अवसर नहीं होता।

(e) संगणकों द्वारा अनुसूची– **'एक अनुसूची'** प्रश्नों का उत्तर पाने की एक युक्ति है जो संगणकों द्वारा भरी जाती है ना कि सूचकों द्वारा। यह प्रश्नावली के ही समान है। यह संगणकों के माध्यम से भेजी जाती है जिनसे अपेक्षित है कि वे सूचकों से उत्तर प्राप्त करें और अनुसूची के प्रश्नों के उत्तर लिखें। संगणकों को अनुसूची के साथ सूचकों से मिलने जाना होता है, अनुसूची के प्रश्नों को उनसे पूछकर उत्तर को आलेखित करना होता है। यह विधि बड़े संस्थानों और अनुसंधान केन्द्रों द्वारा अपनाई जाती है। संगणकों से अपेक्षित है कि वे सूचकों को अन्वेषण के उद्देश्य और कार्यक्षेत्र का विवरण दें और सूचना उपलब्ध कराने की आवश्यकता और उपयोगिता के बारे में उन्हें प्रभाव में लायें। सूचना उपलब्ध कराने की आवश्यकता और उपयोगिता के बारे में। यह विस्तृत अन्वेषणों में लाभदायक है और यह विश्वसनीय और शुद्ध सूचना उपलब्ध करवाता है। संगणक सूचकों के प्रत्यक्ष संसर्ग में रहता है और उन अनुदेशों का पालन करता है जो अन्वेषक द्वारा अन्वेषण के लिए विशिष्ट है। यद्यपि, यह विधि अत्यधिक खर्चीली है चूँकि संगणकों को वेतन बड़े पैमाने पर दी जाती है। यह डाक द्वारा प्रश्नावली के मुकाबले ज्यादा समय खपत करने वाली भी है।

इन सभी उपर्युक्त स्रोतों से प्राथमिक समंक संकलित किए जा सकते हैं। यद्यपि, प्राथमिक समंक संकलित करने की दूसरी विधियाँ हैं– स्थानीय रिपोर्ट, स्थानीय पूछताछ, टेलीफोन कॉल्स, फैक्स और दूसरी विधियाँ जो विकसित देशों में प्रयुक्त होती हैं।

2. द्वितीयक स्रोत– ऐसे समंक जो किसी दूसरे द्वारा संकलित की गई हैं और अन्वेषक द्वारा प्रयुक्त की जाती है 'द्वितीयक समंक' कहलाती है। द्वितीयक समंक के स्रोत हैं–

(a) प्रकाशित समंक

(b) अप्रकाशित समंक

(a) प्रकाशित समंक– द्वितीयक समंक के स्रोत हैं सभी सरकारी प्रकाशन, राष्ट्रीय और अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाएं, व्यापारिक संघों और चैम्बर ऑफ कॉमर्स। वे जर्नल, रिपोर्ट, बुलेटिन, पत्रिकाओं और पाक्षिकों के रूप में

हो सकते हैं जिनमें बहुमूल्य और तैयार सूचनाएं होती हैं। यहाँ तक कि अनुसंधान केन्द्र और शिक्षण संस्थाएं भी बहुत तरह की सूचनाएं प्रकाशित करती हैं जो सामान्य तौर पर लाभदायक होती हैं।

(b) **अप्रकाशित समंक**– द्वितीयक समंक के ऐसे स्रोत भी हैं जो अप्रकाशित होती हैं। निजी फर्म या व्यापारिक प्रतिष्ठान अपने प्रयोग के लिए समंक संकलित करते हैं रिकार्ड के लिए भविष्य में प्रयोग के लिए। ये रिकार्ड प्रकाशित या प्रसारित वे दूसरों द्वारा प्रयोग के लिए उपलब्ध करवाए जा सकते हैं। अन्वेषक इन रिकार्ड को निजी फर्म से प्राप्त कर सकते हैं। उसे सबसे पहले स्वयं संतुष्ट हो जाना चाहिए उनकी विश्वसनीयता, परिशुद्धता, पर्याप्तता और उद्देश्य की उपयुक्तता के लिए और तब वह इनका प्रयोग कर सकता है।

2.4 समंक संकलित करने की तकनीक (Technique of Collecting Data)

समंक संकलित करने की दो विधियाँ हैं– जनगणना विधि और प्रतिदर्श विधि। इन तकनीकों के प्रयोग की समस्या समंक संकलित करने के लिए सिर्फ प्राथमिक समंक संकलन में होती है–

(a) समंक संकलन की जनगणना विधि जनसंख्या के प्रत्येक व्यक्ति (मद) की संगणना को आवृत्त करता है। यह समष्टि के प्रत्येक मद की गणना है। अन्वेषण की विषयवस्तु जो समष्टि के प्रत्येक इकाई से संबंधित है, को गिना जाता है और रिकार्ड किया जाता है। कोई भी मद अन्वेषक द्वारा अनदेखा नहीं किया जाता है। जनसंख्या के सभी मदों को अवलोकित और रिकार्ड किया जाता है। यह समंक संकलित करने की सबसे पुरानी और सबसे सीधी तकनीक है। यह सम्पूर्ण जनसंख्या का अध्ययन करने में सहायता करता है और गहन और शुद्ध ज्ञान प्राप्त करने में। यद्यपि, यह तकनीक अधिक खर्चीली है, अधिक श्रम साध्य है और अधिक समय खपत करने वाली है। यह सबसे कठिन और भीमकाय कार्य है जनसंख्या के सभी मदों की गिनती करना। इस प्रकार की तकनीक सिर्फ सरकार द्वारा 10 वर्ष के अन्तराल पर अपनाई जाती है।

(b) समंक संकलित करने की प्रतिदर्श तकनीक आलिप्त करता है जनसंख्या के एक हिस्सा या भाग का चुनाव जो अध्ययनाधीन है। सिर्फ थोड़े मद ही प्रतिदर्श आधार पर चुने जाते हैं। ऐसे मदों से अपेक्षित है कि वे जनसंख्या (समष्टि) के अभिलक्षणों को प्रदर्शित करें जो प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित हैं। जनसंख्या का परिमित उपसमुच्चय (Finite subset) 'प्रतिदर्श' कहलाता है। इकाईयों की संख्या जो यदृच्छया चुनी जाती हैं 'प्रतिदर्श आमाप (Sample Size) कहलाती है। प्रतिचयन हमें जनसंख्या (समष्टि) के बारे में निष्कर्ष निकालने में सहायता करती है। प्रतिदर्श समंक संकलित करने की तकनीक किफायती, समय बचत करने वाली, आसान और व्यवहारिक है। यद्यपि, चुने प्रतिदर्श हमेशा जनसंख्या के गुणों को प्रदर्शित नहीं करते हैं।

2.5 निदर्शन की रीतियाँ/विधियाँ (Methods of Sampling)

सांख्यिकी संख्यात्मक समंक पर कार्य करता है। इसका मुख्य उद्देश्य अपरिमित जनसंख्या समष्टि के संख्यात्मक गुणों के बारे में निष्कर्ष निकालना है। जनसंख्या का एक अंश जो प्रतिदर्श कहलाता है जनसंख्या से विश्लेषण के उद्देश्य से चुना जाता है। जनसंख्या विश्लेषण, 'परिशुद्ध' संख्यात्मक मान देता है जो 'प्राचल (Parameters)' कहलाता है। प्रतिदर्श विश्लेषण 'सन्निकट' संख्यात्मक मान देता है जो 'प्रतिदर्शज (Statistics)' कहलाता है। प्राचल वास्तविक मान देता है और प्रतिदर्शज प्राक्कलित मान। निदर्शन की दो विधियाँ हैं– यादृच्छिक और गैर-यादृच्छिक–

1. यादृच्छिक निदर्शन (Random Sampling)– यादृच्छिक निदर्शन दैवयोग चुनाव का संकेत करती है। यादृच्छिक चुनाव का अर्थ जनसंख्या से मदों का बेतरतीब चुनाव नहीं है। कुछ यांत्रिक साधनों का प्रयोग प्रतिदर्श चुनाव के लिए होता है। इस तरह प्रत्येक मद जो प्रतिदर्श आधार पर चुने जाते हैं को बराबर प्रायिकता है प्रतिदर्श आकार में आने का। इसका संकेत अदृश्य संभावना का है जो मदों के चुनाव को अकेले निर्धारित करती है।

पद 'प्रतिदर्श' 'आकस्मिक' विधि के अर्थ में प्रयुक्त नहीं होती है। चुनाव पद्धति में पक्षपात के लिए कोई जगह नहीं होता है। जनसंख्या से मदों के चुनाव को व्यक्तिगत पक्षपात या निर्णय से स्वतंत्र होना चाहिए। यादृच्छिक निदर्शन की कई विधियाँ हैं जैसे 'किसी बर्तन से चिट निकालना', चिट वाले ड्रम को घुमाना' और प्रिंटेड 'संख्या तालिका' का व्यवहार। यादृच्छिक निदर्शन की व्यवहार में सबसे महत्वपूर्ण विधि लॉटरी विधि है।

2. गैर-यादृच्छिक निदर्शन– गैर-यादृच्छिक प्रतिचयन कुछ स्तर का सुविचारित चुनाव है चुनाव को अधिक से अधिक वैज्ञानिक बनाने के लिए। यह उद्देश्यपूर्ण प्रतिचयन है जिसमें चुनने वाला मानवीय समझदारी का प्रयोग करता है। निम्नलिखित गैर-यादृच्छिक निदर्शन की विधियाँ हैं।

'क्रमबद्ध (Systematic) (अर्द्ध-यादृच्छिक) निदर्शन में जनसंख्या के मदों की सूची या तो वर्णक्रम से, या भौगोलिक या संख्यात्मक क्रम से तैयार की जाती है। पहला, ग्यारहवाँ, ईक्कीसवीं...........मदों का चुनाव किया जाता है। चुनाव की विधि तब तक जारी रहती है जब तक हम वांछित प्रतिदर्श आकार प्राप्त करते हैं।

'स्तरीकृत (Stratified)' निदर्शन में, जनसंख्या विभिन्न स्तर या खंड में बाँटी जाती है मदों के समांगी अभिलक्षणों के आधार पर। प्रत्येक स्तर को उप-समष्टि के रूप में माना जाता है। प्रत्येक स्तर से मदों का चुनाव यादृच्छिक आधार पर किया जाता है।

गुच्छ (Cluster) निदर्शन में, समष्टि विभिन्न गुच्छों में विभक्त की जाती है जिनमें मदों के हिसाब से असमांगी अभिलक्षण होते हैं। प्रत्येक गुच्छ को समष्टि के सभी प्रकार के मद होते हैं। प्रत्येक गुच्छ से मदों का चुनाव यादृच्छिक आधार पर होता है।

'युग्म (Double) निदर्शन' में, प्रतिदर्श दो समुच्चयों में दो विभिन्न स्तरों पर ली जाती है। यदि पहला समुच्चय संतोषजनक परिणाम नहीं देता है, प्रतिदर्श के दूसरे समुच्चय की पहले में जोड़कर परिणाम को मजबूती प्रदान किया जाता है।

'बहुविध (Multiple) निदर्शन' में, प्रतिदर्श विधि विभिन्न चरणों में पूरी की जाती है– प्रथम चरण, द्वितीय चरण और इसी तरह आगे। प्रथम चरण में कुछ जिलों का चुनाव किया जाता है, दूसरे चरण में कुछ प्रखंडों का चुनाव किया जाता है, तीसरे चरण में कुछ गाँवों को चुना जाता है। इस प्रकार, चुनाव की प्रक्रिया प्रत्येक चरण तक जाती है प्रतिदर्श के आकार को घटाते हुए।

'नियतांश (Quota) निदर्शन' में, एक अन्वेषक नियतांश के अंदर समंक संकलित करता है जो अभिलक्षणों जैसे, आय वर्ग, उम्र वर्ग, कामगार वर्ग के आधार पर और आगे इसी तरह। नियतांश के अंदर मदों का चुनाव व्यक्तिगत निर्णय पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए– 500 लोगों के साक्षात्कार में, 60% घरेलू महिलायें, 25% किसान और 15% छात्र का चुनाव करना है। इसलिए एक नियतांश नियत किया जाता है जिसके अन्दर कई समूह बनाए जाते हैं निदर्श के चुनाव के लिए।

'सुविधायुक्त निदर्शन (Convenience Sampling)' में, एक निदर्श सुविधापूर्वक प्राप्त किया जाता है, तैयार उपलब्ध स्रोतों से जैसे, 'टेलीफोन डायरेक्ट्री', राशन कार्डधारियों की सूची और वोटरों की सूची।

'आनुक्रमिक निदर्शन (Sequential Sampling)' में कई प्रतिदर्श जनसंख्या से एक के बाद एक निकाली जाती है जो पहले के निदर्श परिणामों पर आधारित है। अगर पहला निदर्श स्वीकार योग्य नहीं है, निदर्श को अस्वीकृत कर दी जाती है। तब दूसरा समूह लिया जाता है जिससे मदों को चुना जाता है। यह विधि तब तक जारी रहती है जब तक अन्तिम निर्णय ना लें, लिया जाय निदर्श स्वीकार करने का।

इस तरह, निदर्शन विधि का चुनाव समष्टि की प्रकृति, निदर्श की इकाई, निदर्श के आकार और अन्वेषण के उद्देश्य पर निर्भर करती है।

2.6 प्रश्नावली की तैयारी (Preparation of Questionnaire)

एक प्रश्नावली को सतर्कतापूर्वक तैयार किया जाता है प्राथमिक समंक को संकलित करने के लिए। इसके लिए दक्षता और अनुभव वांछित है। प्रश्नावली की रूपरेखा तैयार करने में कोई बद्ध नियम नहीं है। यद्यपि, एक आदर्श प्रश्नावली के लिए निम्नलिखित पथ-प्रदर्शक नियमों का अवलोकन किया जाता है–

1. प्रश्नों की संख्या– प्रश्नावली में युक्तिसंगत संख्या में प्रश्न होने चाहिए। यह सब अन्वेषण की प्रकृति, कार्यक्षेत्र और उद्देश्य पर निर्भर करता है। आदर्श रूप में 20 से 25 प्रश्न होने चाहिए जिन्हें पूछा जाना है। प्रति-प्रश्न पूछना उपयुक्त है, जब प्रश्नों के लम्बे उत्तर हों।

2. सरल और सुस्पष्ट प्रश्न– इस तरह से पूछे गये प्रश्न को सरल, संक्षिप्त और सुस्पष्ट होना चाहिए। उन्हें सूचकों को आसानी से समझ में आने लायक होना चाहिए। अस्पष्ट और जटिल प्रश्नों से बचना चाहिए। प्रश्नों में तकनीकी पदों का

प्रयोग नहीं होना चाहिए। पदों के अर्थ, अगर आवश्यकता हो, स्पष्ट रूप से परिभाषित होने चाहिए।

3. उचित क्रमबद्धता– चुने गए प्रश्न चरण दर चरण व्यवस्थित रूप से क्रमबद्ध होने चाहिए। प्रश्न पूछने की एक तार्किक श्रृंखला होनी चाहिए एक के बाद एक प्राथमिकता के अनुसार। सामान्यतया प्रश्नों के क्रम हैं– नाम, लिंग, उम्र, पता, शैक्षणिक योग्यता, व्यवसाय, वैवाहिक स्थिति, बच्चे इत्यादि।

4. प्रीतिकर प्रश्न– पूछे गए प्रश्न सूचकों के मनोभाव पर चोट पहुँचाने वाले नहीं होने चाहिए। यह बेहतर होगा कि कोई गोपनीय प्रश्न न पूछे जाएं। प्रश्न व्यक्तिगत या निजी बातों से संबंधित न हों। प्रश्नों को प्रीतिकर होना चाहिए ताकि सूचक बगैर किसी दुविधा के उनका उत्तर दे सके।

5. व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ– प्रश्नावली में शंका के समाधान के लिए व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ होनी चाहिए। सूचकों को कठिन प्रश्नों को समझने के लिए जहाँ आवश्यक हो वो व्याख्यात्मक टिप्पणी का आश्रय ले सकें। प्रश्नों का उत्तर देने में उनका सही मार्गदर्शन होना चाहिए।

6. वस्तुनिष्ठ प्रश्न– प्रश्नों के उत्तर 'हाँ' या 'ना' रूप में होने चाहिए। सूचकों को स्वतंत्रपूर्वक और जल्दी में उत्तर देने की गुंजाईश होनी चाहिए। अगर एक किसी प्रश्न की माँग अधिक उत्तरों की है, तो प्रश्नों को उप-प्रश्नों में बाँटा जाता है। अगर वे उत्तर नहीं देना चाहते हैं, तो उन्हें 'डैश' या लागू नहीं लिखने के लिए बोला जाता है। इसका अर्थ है कि, सिर्फ दिलचस्पी रखने वाले सूचकों से अपेक्षित है ऐसे प्रश्नों का उत्तर देना।

7. सह पत्र– अन्वेषक को सूचकों के साथ मधुर संबंध बनाना पड़ता है। इसलिए एक सह पत्र स्व-पता लिखा लिफाफा और प्रश्नावली सूचकों को भेजी जाती है। अन्वेषक को स्वयं की पहचान और उसके अन्वेषण के बारे में संक्षिप्त जानकारी सूचकों को देनी होती है। उसे विनम्रतापूर्वक सूचकों को समंक संकलन के लिए सहयोग के लिए निवेदन करना चाहिए और उन्हें आश्वस्त करना चाहिए कि इस तरह से संकलित समंक गोपनीय रखा जाएगा। इसके अलावा, सूचकों को जल्द उत्तर देने के लिए भेंट या प्रोत्साहन दिया जाता है। सह पत्र को संक्षिप्त, सरल, आकर्षक और संयत होना चाहिए।

8. रूपरेखा का पुनर्विलोकन– प्रश्नावली की रूपरेखा तैयार करने के बाद, यह आवश्यक है कि इसकी पूर्णता की जाँच अच्छी तरह कर ली जाये। अगर कोई कमी या गलती है तो उसे सतर्कतापूर्वक जाँचकर सुधार कर दिया जाना चाहिए। अन्त में रूपरेखा को प्रयोग के लिए अनुशासित किया जाता है। इसे साफ-साफ रूपांकित और आकर्षक ढंग से छपाया जाना चाहिए।

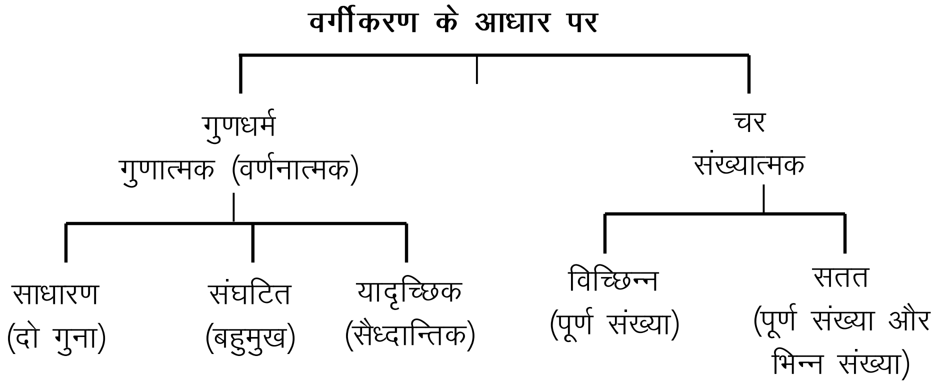
2.7 वर्गीकरण (Classification)

एक वृहदाकार संकलित समंक को वर्गीकृत किया जाना है या व्यवस्थित ढंग से क्रम से सजाना है। एक बेतरतीब समंक अपरिष्कृत रूप में होता है। इसका अध्ययन और विश्लेषण आसानी से नहीं हो सकता है। इसलिए अपरिष्कृत समंक का वर्गीकरण बहुत आवश्यक है।

"वर्गीकरण समंक को समूह या वर्गों में व्यवस्थित करने की विधि है उनके अभिलक्षणों या गुणधर्म के अनुसार।"

वर्गीकरण के उद्देश्य हैं समंक को सरल रूप में 'प्रदर्शित करना', समंक को तुलनीय अध्ययन के अनुरूप बनाना, दूसरे समंक से संबंध बनाना और समंक को विश्लेषण और व्याख्या के लिए उपलब्ध करना।

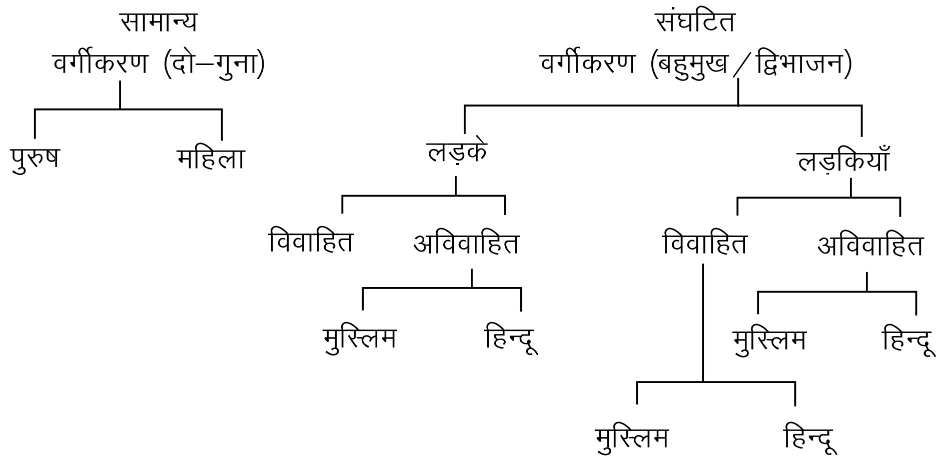
वर्गीकरण का मुख्य उद्देश्य असमानता के अंदर समानता लाना है। वर्गीकरण बहुत बड़े समंक को व्यवस्थित और आकार को संक्षिप्त करने में मदद करता है। इसका कार्य अपरिष्कृत समंक को व्यवस्थित समंक में रूपान्तरित करना है। यह जटिल समंक को सामान्य बनाता है।



'गुणधर्म' का अर्थ है व्यक्ति या वस्तु का गुण या अभिलक्षण। उदाहरण के लिए, लड़का-लड़की, विवाहित-अविवाहित, लम्बा-ठिगना, हिन्दू-मुस्लिम इत्यादि।

'चर' वह संख्या है जो एक अवलोकन से दूसरे में बदलता रहता है दिए गए मानों के समुच्चय के अंदर। 'विचर' चर का एक खास मान है दिए गए मूल्यों में से। यह एक व्यक्तिगत चर का मान है। उदाहरण के लिए, अंक, वजन, वेतन, विक्रय, ऊँचाई आदि।

'गुणात्मक' वर्गीकरण समंक के समूहन से संबंधित है गुणधर्म के अनुसार। 'सामान्य' वर्गीकरण सिर्फ दो गुणधर्मों को आवेष्टित करता है। 'संघटित' वर्गीकरण दो से अधिक गुणधर्मों को आवेष्टित करता है।



'यादृच्छिक वर्गीकरण का संबंध उन गुणधर्मों से है, जो स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं हैं और दो गुणधर्मों के बीच कोई दृढ़ निश्चित सीमा नहीं है। दो गुणधर्मों के

बीच विभाजन सैद्धान्तिक है और यह व्यक्ति से व्यक्ति के सोच में अन्तर होता है। उदाहरण के लिए, लम्बा और ठिगना, शिक्षित और अशिक्षित, निपुण और अनाड़ी, हम यथार्थ अन्तर इन दो गुणों के बीच नहीं कर सकते हैं। विभाजन यादृच्छिक या सैद्धान्तिक होगा।

'संख्यात्मक' वर्गीकरण का संबंध समंक के समूहन से है संख्या के अनुसार जिन्हें मापा या गिना जा सकता है।

एक 'विच्छिन्न' चर सिर्फ पूर्णांक संख्याओं को लेता है, जैसे– 1, 5, 13, 18, 45 और 50 आदि। यह भिन्न मान नहीं लेता, जैसे– 1.95, 6.82, 15.36, 54.7 आदि।

एक 'सतत' चर सभी संभव मान लेता है, पूर्णांक और भिन्न एक समान, जैसे– 4, 5.6, 7, 19, 22.8, 30.5, 37, 48.9 आदि।

2.8 सारणीयन (Tabulation)

संकलित और वर्गीकृत समंक सारणी के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। 'सारणीयन' का अर्थ है समंक का सारणी के रूप में क्रमिक व्यवस्थापन, स्तंभों और पंक्तियों में। यह संबंधित संख्यात्मक समंक का तार्किक सूचीकरण है उदग्र स्तंभों और क्षैतिज पंक्तियों में व्याख्यात्मक टिप्पणी के साथ। सारणीयन का मुख्य उद्देश्य समंक को सारणी रूप में संक्षिप्त करना है जो आसानी से समझा और व्याख्या किया जा सके।

समंक के सारणीयन की विधि के निम्नलिखित लाभ हैं–

(i) यह जटिल समंक को संक्षिप्त रूप में करके सरल बनाता है।

(ii) यह कम जगह लेता है और अधिक जानकारी देता है।

(iii) यह तुलनात्मक अध्ययन सुसाध्य बनाता है और विभिन्न मदों और गुणधर्मों के बीच संबंध स्थापित करता है।

(iv) यह सम्पूर्ण समंक को एक दृष्टि में प्रकट कर देता है।

2.9 सारणी के भाग (Part of a Table)

एक सारणी स्तंभों और पंक्तियों में जगह का क्रमिक विभाजन है। निम्नलिखित सारणी के विभिन्न भाग हैं–

(i) सारणी संख्या– अगर रिपोर्ट में सारणियों के लिए संख्याओं का व्यवहार होता है, प्रत्येक सारणी की एक संख्या होनी चाहिए उनकी पहचान और संदर्भ के लिए। साधारणतः, संख्या सारणी के शीर्ष पर रहती है।

(ii) शीर्षक (Title)– एक सारणी का एक उपयुक्त शीर्षक होना चाहिए जो शीर्ष पर उभरे अक्षरों में रहता है। शीर्षक संक्षेप में सारणी के अंतर्वस्तु

का वर्णन करता है। जहाँ तक संभव हो, शीर्षक को समंक के विषयवस्तु के संबंध में पूर्ण और असंदिग्ध होना चाहिए। इसे स्पष्ट, सही शब्दों में और स्वयं व्याख्यात्मक होना चाहिए।

(iii) अनुशीर्षक (Captions)– वे सूचनाओं को उदग्र स्तंभों के शीर्ष पर दर्शाई गई शीर्षक का उल्लेख करते हैं। अनुशीर्षक के अन्तर्गत, उप-शीर्षक हो सकते हैं। वे छोटे अक्षरों में इकाईयों के साथ (अगर कोई है) लिखे जाते हैं।

(iv) स्थूण (Stubs)– वे क्षैतिज पंक्तियों के सबसे बायें दर्शाई गई सूचना के शीर्षक का उल्लेख करते हैं। वे वही कार्य करते हैं जो अनुशीर्षक द्वारा की जाती हैं। अनुशीर्षक और स्थूण अन्तर-परिवर्तनीय हैं।

(v) आकृति (Body)– यह संख्यात्मक सूचना से संबंधित है जो अनुशीर्षक और स्थूण में प्रदर्शित है। यह सारणी का सबसे महत्वपूर्ण भाग है जो सम्पूर्ण समंक को आकर्षक और परिशुद्धता से प्रदर्शित करता है। यह सारणी का सबसे बड़ा हिस्सा आच्छादित करता है।

(vi) शीर्ष-टिप्पणी (Headnote)– यह संक्षिप्त टिप्पणी है जो ज्यादातर कोष्ठक में दी जाती है ठीक शीर्षक से नीचे। यह शीर्षक का भूमिकात्मक या अनुपूरक टिप्पणी है। यह सांख्यिकीय इकाईयों या मापों से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण तथ्यों को वर्णित करने के लिए प्रयुक्त होता है, जैसे– 000′ में, मिलियन में, करोड़ में, क्विंटल में इत्यादि।

(vii) पाद टिप्पणी (Footnote)– यह संक्षिप्त टिप्पणी है जो सारणी के नीचे दिया जाता है। वे सारणी के किसी भी भाग से जुड़े हो सकते हैं तारक चिन्ह (*) का प्रयोग कर दर्शाने के लिए व्याख्या नीचे दी गई है।

(viii) स्रोत टिप्पणी (Source Note)– जब द्वितीयक समंक का प्रयोग होता है, एक स्रोत टिप्पणी सारणी के सबसे नीचे दिया जाता है, पाद टिप्पणी के नीचे। यह प्रकाशन का नाम और दैनंदिनी या पाक्षिक का नाम धारित करता है जिससे यह समंक संकलित किया गया है।

2.10 सारणी के प्रकार (Types of Tables)

सांख्यिकीय तालिकाएं विभिन्न तरीकों से तैयार की जाती हैं जिसका चुनाव उद्देश्य कार्यक्षेत्र, प्रकृति और अन्वेषण के विस्तार पर निर्भर करता है। निम्नलिखित आवश्यक प्रकार की तालिकाएं हैं–

(i) सरल तालिका (One-way Table)– सरल सारणियाँ ऐसी तालिकायें हैं जो समंक के एक अकेले अभिलक्षण के बारे में जानकारी देती है। ये अधिकांशतः एक गुण सारणी के रूप में जानी जाती है।

(ii) द्वि–गुण तालिकाएं (Two-way Tables)– वे द्वि-गुण तालिकाएं कहलाती हैं जो समंक के दो अभिलक्षणों के बारे में सूचना देती हैं। समंक के दो गुणधर्म अन्तर्सम्बधित होते हैं। उदा. छात्रों की संख्या–

लड़का और लड़कियाँ, पुरुष– विवाहित और अविवाहित, महिला– विवाहित और अविवाहित।

(iii) त्रि–गुण तालिकाएं (Three-way Tables)– त्रि–गुण तालिकाएं वे तालिकाएं हैं जिनमें समंक तीन अभिलक्षणों के संबंध में सूचना उपलब्ध कराती है। वे एक ही समंक के तीन अन्तर्सम्बधित गुणधर्मों से संबंधित सूचना उपलब्ध कराती हैं। उदाहरण के लिए, छात्रों की संख्या– लड़का और लड़कियाँ, विवाहित और अविवाहित, और स्नातक और स्नातक से नीचे।

(iv) बहुविध तालिकाएं (Manifold Tables)– वे जटिल तालिकायें भी कहलाती हैं जो एक ही समंक के कई अभिलक्षणों को प्रकट करती हैं। वे उच्च स्तर तालिकायें हैं जिसमें उसी समंक के तीन अन्तर्सम्बधित अभिलक्षणों से अधिक प्रकट होती हैं।

इस तरह, जैसे तालिका का क्रम बढ़ता जाता है समंक के गुणधर्म के साथ, तालिका जटिल से जटिलतर होती जाती है। व्यवहार में, सामान्यतया त्रि-गुण तालिकाएं प्रयुक्त होती हैं।

निम्नलिखित तालिकाओं की रूपरेखा हैं–

1. सरल तालिका–

केनरा बैंक में कर्मचारियों की संख्या दर्शाते हुए तालिका, उम्र समूह के अनुसार

उम्र (वर्षों में)	कर्मचारियों की संख्या
30 से नीचे	15
30-40	18
40-50	9
50 और ऊपर	3
	कुल = 45

2. द्वि–गुण तालिका

केनरा बैंक में कर्मचारियों की संख्या दर्शाते हुए तालिका उम्र और लिंग के अनुसार

लिंग / उम्र (वर्षों में)	कर्मचारियों की संख्या		कुल
	पुरुष	महिला	
30 से नीचे	9	6	15
30-40	10	8	18
40-50	2	7	9
50 और ऊपर	–	3	3
कुल	21	24	45

टिप्पणी

3. त्रि–गुण तालिका

केनरा बैंक में कर्मचारियों की संख्या दर्शाती तालिका
उम्र, लिंग और वैवाहिक स्थिति के अनुसार

वैवाहिक स्थिति / लिंग	कर्मचारियों की संख्या						
	पुरुष			महिला			
उम्र समूह	वि.	अ.वि.	कुल	विवाहित	अविवाहित	कुल	
30 से नीचे	3	6	9	2	4	6	15
30-40	2	8	10	4	4	8	18
40-50	1	1	2	7	–	7	9
50 से ऊपर	–	–	–	3	–	3	3
कुल	6	15	21	16	8	24	45

वि. = विवाहित   अ.वि. = अविवाहित

उदाहरण 2.1: एक साफ–सुथरा खाली तालिका प्रदर्शित करें कॉलेज विद्यार्थियों से संबंधित उनके संकाय (कला, वाणिज्य और विज्ञान), वर्ग (प्रीयुनिवर्सिटी और डिग्री), लिंग (पुरुष और महिला) और वर्ष (1982-83)

हल: छात्रों की संख्या ए.वी. कॉलेज, बंगलौर में वर्ष 1982 और 1983 के दौरान पढ़ने वाले (शीर्ष टिप्पणी: ....)

वर्ष–लिंग / संकाय /वर्ग	1982			1983			सम्पूर्ण योग
	महिला	पुरुष	योग	महिला	पुरुष	योग	
प्री.यू. कला डिग्री							
प्री.यू. कॉमर्स डिग्री							
प्री.यू. विज्ञान डिग्री							
योगफल							

पाद टिप्पणी   स्रोत टिप्पणी

उदाहरण 2.2: लोकसभा में 600 सदस्य उपस्थित थे, एक प्रस्ताव पर बहस के दौरान जिस पर वोट हुआ और 400 वोट प्रस्ताव के पक्ष में पड़े।

सदन में सरकार के 380 और 65 विपक्ष के सदस्य ने प्रस्ताव के पक्ष में वोट दिया। सभी सदस्य इन दो भागों में बँटें हैं और कोई अनुपस्थिति नहीं थे।

उपर्युक्त सूचना को तालिकाबद्ध करें।

हल: तालिका लोकसभा में मतपत्रों का विवरण दर्शाते हुए जिसमें चर्चा के दौरान एक प्रस्ताव पर मतदान हुआ।

टिप्पणी

मतदान \ सदस्य	सत्ता पक्ष	विपक्ष	कुल
पक्ष में	335	65	400
विरुद्ध	45	155	200
कुल	380	220	600

उदाहरण 2.3: एक बड़े फैक्ट्री में 1986 में कामगारों की संख्या 540 थी जिसमें 30% महिलायें थीं और बाकी पुरुष। 1988 में कामगारों की संख्या बढ़ गई, 100 महिलायें और 200 पुरुष। 1990 में, कुल कामगारों की संख्या इसके 1988 की संख्या से 25% बढ़ गई। महिला कामगार 340 थीं। समंक को तालिकाबद्ध करें।

हलः तालिका एक फैक्ट्री में कामगारों की संख्या 1986, 1988 और 1990 के लिए दर्शाते हुए।

लिंग के अनुसार \ कामगारों की संख्या	1986	1988	1990
पुरुष	378	578	710
महिला	162	262	340
कुल	540	840	1050

उदाहरण 2.4: दिए अनुपात को संगत संख्याओं में परिवर्तित करें और एक पूर्ण तालिका बनायें निम्नलिखित सूचना के लिए।

वर्ष 1994 में, एक शहर के तीन कॉलेजों A, B और C की कुल संख्या 3:1:4 के अनुपात में थी। A कॉलेज की कुल संख्या 3000 थी। सभी कॉलेजों में लड़कियों और लड़कों का समानुपात 1:3 था। संकायवार वितरण लड़कियों और लड़कों का संकाय कला, विज्ञान और वाणिज्य में क्रमशः 2:1:2 के अनुपात में है सभी कॉलेजों में।

हलः तालिका दर्शाते हुए A, B और C कॉलेज में लड़कियों और लड़कों की संख्या विभिन्न संख्याओं में 1994 के दरम्यान।

कॉलेज / लिंग / संकाय	A			B			C		
	लड़कियाँ	लड़के	कुल	लड़कियाँ	लड़के	कुल	लड़कियाँ	लड़के	कुल
कला	300	900	1200	100	300	400	400	1200	1600
विज्ञान	150	450	600	50	150	200	200	600	800
वाणिज्य	300	900	1200	100	300	400	400	1200	1600
कुल	750	2250	3000	250	750	1000	1000	3000	4000

उदाहरण 2.5: 1807 औरतों में, जिनका बम्बई के एक कपड़ा फैक्ट्री में साक्षात्कार लिया गया, 512 कपड़ा क्षेत्र से थे और बाकी गैर-कपड़ा क्षेत्र से।

विवाहित औरतों में जो कपड़ा क्षेत्र की थीं, 247 अनुभवी थीं और 73 अनुभवहीन, जबकि गैर-कपड़ा क्षेत्र के लिए संगत अंक क्रमशः 49 और 520 थे।

अनुभवहीन औरतों की कुल संख्या 1341 थी जिसमें 111 कपड़ा क्षेत्र में रहती थीं। कुल औरतों में, 918 अविवाहित थीं, और उनमें, कपड़ा क्षेत्र और गैर-कपड़ा क्षेत्र के अनुभवी औरतों की संख्या क्रमशः 154 और 16 थीं। समंक को तालिकाबद्ध करें।

हलः कपड़ा क्षेत्र में रहने वाली औरतों की वैवाहिक स्थिति और उनका कपड़ा उद्योग, बम्बई में साक्षात्कार

क्षेत्र और वैवाहिक स्थिति / अनुभव	कपड़ा क्षेत्र			गैर-कपड़ा क्षेत्र			कुल योग		
	वि.	**अ.वि.**	**कुल**	**वि.**	**अ.वि.**	**कुल**	**वि.**	**अ.वि.**	**कुल**
अनुभवी	247*	154*	401	49*	16*	65	296	170	466
अनुभवहीन	73*	38	111*	520*	710	1230	593	748	1341*
कुल	320	192	512*	569	726	1295*	889	918*	1807*

वि. = विवाहित अ.वि. = अविवाहित

(**संकेतन–** *चिन्हांकित अंक दिए गए हैं)

उदाहरण 2.6: दक्षिणी रेलवे में 1970 में दुर्घटनाओं की कुल संख्या 3,500 थी, और यह 1971 में 300 से घट गई और 1972 में 700 से। मीटर गेज परिखंड में दुर्घटनाओं की कुल संख्या 1970 में 245, 1971 में 346 और 1972 में 428 दर्शाई गई।

मीटर गेज में, ''गैर-क्षतिपूरक'' स्थितियाँ 1970 में 49, 1971 में 77 और 1972 में 108 थी। 'क्षतिपूरक' स्थितियाँ ब्रॉड गेज में 1970 में 2867, 1971 में 2587 और 1972 में 2152 थीं।

उपर्युक्त सूचना को तालिकाबद्ध करें।

हलः दक्षिणी रेलवे में 1970-72 अवधि में दुर्घटनाओं की संख्या (ब्रॉड गेज और मीटर गेज के अनुसार वर्गीकृत)

वर्ष गेज / क्षतिपूर्ति	1970			1971			1972		
	बी.जी.	**एम.जी.**	**कुल**	**बी.जी.**	**एम.जी.**	**कुल**	**बी.जी.**	**एम.जी.**	**कुल**
क्षति पूरक	2867*	196	3063	2587*	269	2856	2152*	320	2472
गैर-क्षति पूरक	388	49*	437	267	77*	344	220	108*	328
कुल	3255	245*	3500*	2854	346*	3200*	2372	428*	2800*

बी.जी.–ब्रॉड गेज एम.जी.–मीटर गेज

(**संकेतन–** चिन्हांकित *अंक दिये गये हैं)

उदाहरण 2.7: एक सुपर बाजार पाँच मुख्य खंडों में बाँटी जाती है– किराना, सब्जियाँ, दवाईयाँ, वस्त्र और नवीन वस्तु। सभी खंडों ने निम्नलिखित बिक्री आलेखित किया 1981, 1982 और 1983 में।

1981 में, किराना में बिक्री थी 6,25,000 रु., सब्जियों में 4,05,000 रु. कम किराना से, दवाईयों में 4,88,000 रु. जो नवीन वस्तु की बिक्री का दुगुना है। वस्त्र की बिक्री कुल बिक्री का 30% है वर्ष के दरम्यान।

1982 में, कुल बिक्री पिछले वर्ष की बिक्री से 10% वृद्धि प्रदर्शित किया जबकि किराना और सब्जी की बिक्री में 8% और 10% वृद्धि दर्ज की गई अपने संगत 1981 के आँकड़ों से, दवाई में 13,000 रु. की कमी आई और वस्त्र की बिक्री 5,36,000 रुपयों की दर्ज की गई।

1983 में, कुल बिक्री उतनी ही रही जितनी 1982 में, किराना में 22,000 रु., सब्जी में 32,000 रु. और दवाई में 10,000 रु. की गिरावट आई। वस्त्रों की बिक्री 4,81,000 रु. अधिक हुई नवीन वस्तुओं की बिक्री की तुलना में।

हलः तालिका सुपर बाजार के विभिन्न खंडों में 1981, 1982 और 1983 के दरम्यान बिक्री दर्शाते हुए।

वर्ष / **खंड**	**1981** **रु.**	**1982** **रु.**	**1983** **रु.**
किराना	6,25,000	6,75,000	6,53,000
सब्जी	2,20,000	2,42,000	2,10,000
दवाई	4,88,000	4,75,000	4,65,000
वस्त्र	6,75,857	5,36,000	8,15,572
नवीन वस्तु	2,44,000	5,50,143	3,34,571
कुल	22,52,857	24,78,143	24,78,143

स्केत– परिकलन के लिए।

टिप्पणी

खंड	1981		1982		1983	
किराना		625000	6,25,000 + 50,000	675000	675000 - 22000	653000
सब्जी	625000 -405000	22000	220,000 + 22,000	242000	242000 - 32000	210000
दवाईयाँ		488000	488,000 - 13,000	475,000 53,600	475000 - 10000	465000
वस्त्र	30%	675857	अन्तर	5,50,000	अन्तर	815572 334571
नवीन वस्तु	488000	244000	2252857 + 225286	2478143		2478143
कुल		2252857	10% वृद्धि कुल में		अन्तर*	1150143 481000
*(1577000 × 30)70=675857 कि. + स.+ द.+ न.प.		= (15,77,00) या				669143
(1577000 × 100/70		= 2252857				

उदाहरण 2.8: 1,00,000 गीत स्रोताओं के बीच एक सर्वेक्षण किया गया और उनसे पूछा गया कि वे अपनी वरीयता पसंद के अनुसार बतायें शास्त्रीय गायन, सुगम संगीत, लोक गीत, फिल्मी गीत और पॉप गीत के बारे में। उतने ही पुरुष स्रोताओं से साक्षात्कार लिया गया जितने महिला स्रोता।

सर्वेक्षण ने इंगित किया कि स्रोताओं का प्रतिशत जिसने शास्त्रीय, सुगम और लोक गीतों को वरीयता दी क्रमशः 8, 13 और 4 हैं। महिलाओं की वास्तविक संख्या प्रत्येक पहले दो प्रकार के लिए 6,000 थी।

स्रोताओं में जिन्होंने लोकगीत पसंद किया, पुरुष स्रोताओं की संख्या उतनी ही थी जितनी महिला स्रोताओं की जबकि, फिल्मी गानों को पसंद करने वालों की संख्या डेढ़ गुनी थी बाकी सभी दूसरे गीतों को मिलाकर; पॉप गीत पसंद करने वालों की संख्या फिल्मी गीत पसंद करने वालों से एक चौथाई थी। पॉप संगीत सुनने वालों के 60 प्रतिशत महिलाएं थीं।

लिंग और संगीत के प्रकार के अनुसार, स्रोताओं का वितरण दर्शाते हुए एक तालिका का निर्माण करें।

हलः विभिन्न प्रकार के संगीत में संगीत स्रोताओं (पुरुष और महिलाओं) की संख्या प्रदर्शित करती तालिका।

टिप्पणी

लिंग / संगीत	%	पुरुष	महिला	कुल
शास्त्रीय	8*	2,000	6,000*	8,000*
सुगम	13	7,000	6,000*	13,000*
लोक	4*	2,000*	2,000*	4,000*
फिल्मी	60	33,000	27,000	60,000
पॉप	15	6,000	9,000	15,000
कुल	100*	50,000*	50,000*	1,00,000*

स्केत– शा. + सु. + लो. + फि. + पॉ. = 100 पॉ. = $\frac{1}{4}$ फिल्मी (दिया गया है)

$$8 + 13 + 4 + \text{फि.} + \text{पॉ.} = 100$$
$$25 + \text{फि.} + \text{पॉ.} = 100$$
$$\text{फि.} + \text{पॉ.} = 75$$
$$\text{फि.} + \frac{1}{4}\ \text{फि.} = 75$$
$$4\ \text{फि.} + \text{फि.} = 300$$
$$5\ \text{फि.} = 300$$
$$\text{फि.} = 300/5 = 60$$
$$\therefore\ \text{पॉ.} = 15$$

चिन्हांकित * अंक दिए गए हैं।

उदाहरण 2.9: निम्नलिखित सूचना को तालिका रूप में प्रदर्शित करें उपयुक्त अनुशीर्षक जितनी स्पष्टता और आसानी से आप दे सकते हैं। 1965 में एक फैक्ट्ररी के कुल 1750 कर्मचारियों में, 1200 कर्मचारी एक श्रमिक संघ के सदस्य थे। 200 महिला कर्मचारियों में 175 श्रमिक संघ की सदस्या नहीं थीं।

1970 में, श्रमिक संघ के सदस्यों की संख्या बढ़कर 1510 हो गई जिनमें 1290 पुरुष थे। दूसरी तरफ, गैर-श्रमिक संघ के कर्मचारियों की संख्या घटकर 208 हो गई जिनमें 180 पुरुष थे।

1975 में, फैक्ट्ररी के वेतन पूँजी में 1800 कर्मचारी श्रमिक संघ से जुड़े थे और 50 नहीं जुड़े थे। 1975 में सभी कर्मचारियों में, 300 महिलाएं थीं जिनमें 8 श्रमिक संघ से नहीं जुड़ी थीं।

हल: फैक्ट्ररी के श्रमिक संघ के सदस्यों का तुलनात्मक अध्ययन वर्ष 1965, 1970 और 1975 में

टिप्पणी

सदस्यता / लिंग / वर्ष	श्रमिक संघ के सदस्य			गैर-श्रमिक संघ के सदस्य			कुल योग फल
	पुरुष	महिला	कुल	पुरुष	महिला	कुल	
1965	1,175	25*	1200*	375	175*	550	1750*
1970	1,290*	220	1510*	180*	28	208*	1718
1975	1,508	292*	1800*	42	8*	50*	1850
कुल	3,973	537	4510	597	211	808	5,318

स्केत– चिन्हांकित * अंक दिए गए और बाकी बचे अंक उनसे निकाले गए हैं।

उदाहरण 2.10: अप्रैल 1986 में बंगलौर विश्वविद्यालय की बी.कॉम. परीक्षा में 4000 छात्र शामिल हुए जिसमें 60% छात्र बंगलौर शहर के महाविद्यालयों से थे और बाकी ग्रामीण क्षेत्र के महाविद्यालयों के।

परीक्षा में बैठने वाले कुल छात्रों का 75% लड़के थे और बाकी लड़कियाँ। परीक्षा के परिणाम में 40% छात्र सफल हुए। लड़के और लड़कियों का अनुपात जो परीक्षा में पास हुए 2:3 था।

हलः छात्रों की संख्या जो बंगलोर विश्वविद्यालय के बी.कॉम. परीक्षा अप्रैल, 1986 में शामिल हुए।

बंगलोर / लिंग / परिणाम	शहरी महाविद्यालय			ग्रामीण महाविद्यालय			कुल		
	लड़के	लड़कियाँ	कुल	लड़के	लड़कियाँ	कुल	लड़के	लड़कियाँ	कुल
उत्तीर्ण	384	576	960	256	384	640	640	960	1,600
अनुत्तीर्ण	1,416	24	1,440	944	16	960	2360	40	2,400
कुल	1,800	600	2,400	1,200	400	1,600	3,000	1,000	4,000

उदाहरण 2.11: एक कॉलेज द्वारा आयोजित ट्रिप में 80 लोग थे जिसमें औसत में प्रत्येक ने 15.50 रु. दिये। 60 छात्रों ने 16 रु. प्रत्येक दिया। अध्यापन कर्मचारियों से अधिक पैसे लिए गए। नौकरों की संख्या 6 (सभी पुरुष) थे जिनसे कुछ नहीं लिया गया। महिलाओं की संख्या कुल प्रतिभागियों का 20% था जिनमें एक महिला कर्मचारी थी।

उपर्युक्त सूचना को तालिकाबद्ध करें।

हलः तालिका ट्रिप के सदस्यों और उनके योगदान को दर्शाते हुए।

सदस्यगण	लिंग			पति सदस्य	
	पुरुष	महिला	कुल	योगदान	कुल
छात्र	45	15	60	16.00	960
कर्मचारी	13	1	14	20.00	280
नौकर	6	–	6	–	–
	64	16	80	15.50	1,240

स्केत– कुल योगदान = औसत योगदान × 15.50 = 1,240 रुपये। कर्मचारियों का योगदान बाकी की राशि है छात्रों के योगदान के बाद = 1,240 – 960 = 280।

उदाहरण 2.12: एक अखबार के स्तंभ में एक परिवार में रहने वाले लोगों में इन्फ्लूएन्जा (फ्लू) होने के बारे में निम्नलिखित अनुच्छेद था।

''ठीक 1,00,000 निवासियों में 1/5 भाग ने यक्ष्मा के लक्षण प्रदर्शित किए और उनमें 5,000 लोगों को फ्लू का संक्रमण था; परन्तु उनमें से सिर्फ 1,000 संक्रमित घरों में रहते थे।

इसके विपरीत यक्ष्मा ग्रस्त 1/15 भाग लोगों को जिन्हें फ्लू नहीं था उन्हें संक्रमण का खतरा था।

सब मिलाकर 21,000 लोग फ्लू से ग्रस्त थे और 41,000 लोगों को संक्रमण का जोखिम था, परन्तु संख्या जिन्हें फ्लू था परन्तु यक्ष्मा नहीं ऐसे घरों में रहते थे, जहाँ फ्लू का रोगी नहीं था, सिर्फ 2,000 था।''

उपर्युक्त सूचना प्रदर्शित करते हुए तालिका का निर्माण करें, उचित शीर्षक के साथ।

हलः

एक ही परिवार में रहने वाले यक्ष्माग्रस्त लोगों के बीच फ्लू होने को प्रदर्शित करती तालिका

संक्रमण / आक्रमण	फ्लू से ग्रस्त			फ्लू से आक्रमण नहीं			सम्पूर्ण योग फल
	संक्रमित घर में रहने वाले	गैर-सं. घर में रहने वाले	योग	संक्रमित घर में रहने वाले	गैर-सं. घर में रहने वाले	योग	
टी.वी. का आक्रमण	1,000	4,000	5,000	1,000	14,000	15,000	20,000
टी.वी. का आक्रमण नहीं	14,000	2,000	16,000	25,000	39,000	64,000	80,000
कुल	15,000	6,000	21,000	26,000	53,000	79,000	1,00,000

टी.बी. = सं. घर गैर-सं. घर सं. घर गैर-सं. घर

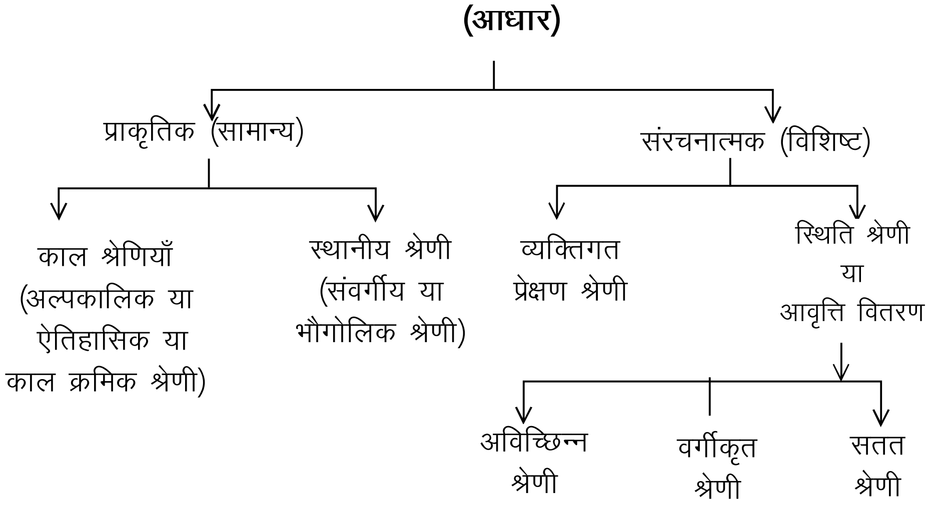
2.11 क्रमबद्धता, श्रेणिबद्धता (Serialization)

श्रेणिबद्धता का संबंध समंक के एक खास क्रम में तर्कपूर्ण सूचीकरण या व्यवस्थापन से है। समंक को विभिन्न श्रेणियों में क्रमवार सूचीबद्ध की जाती है, चीजों या गुणधर्मों को मापा, गिना या तौला जाता है और तब वे एक के बाद एक रक्खी जाती हैं श्रेणिबद्धता की विधि में। इस तरह, श्रेणिबद्धता का अर्थ है समंक का तर्कपूर्ण या क्रमवार व्यवस्थापन समय या क्षेत्र या स्थिति के अनुसार।

सांख्यिकी श्रेणिबद्धता को परिभाषित की जा सकती है चीजों, घटनाओं या गुणधर्मों का व्यवस्थापन एक खास या तर्कयुक्त या क्रमबद्ध रूप में। तीन प्रकार की श्रेणियाँ होती हैं समय क्षेत्र या स्थिति पर आधारित– काल श्रेणी, भौगोलिक

श्रेणी और स्थिति श्रेणी। सांख्यिकीय श्रेणी तैयार की जाती हैं वर्गीकृत समंक को ठीक से व्यवस्थित तरीके से प्रस्तुत करने के लिए। वर्गीकरण का संबंध समंक को विभिन्न समूहों या उप-समूहों में विभाजन से है, जबकि श्रेणिबद्धता संबंधित है समंक का व्यवस्थापन क्रमबद्ध रूप में। दोनों विधियों का लक्ष्य समंक को आगे के विश्लेषण के लिए प्रदर्शित करने से है।

सांख्यिकीय श्रेणियों के प्रकार



''काल श्रेणी'' **(ऐतिहासिक या काल क्रमिक या अल्पकालिक)** ऐसा है जिसमें समंक समय या अवधि के अन्तराल के आधार पर व्यवस्थित हैं। इस श्रेणी में चर का मान तिथियों, सप्ताहों, महीनों, वर्षों, दशकों, या शतकों के संबंध में रखी जाती हैं। इस प्रकार की श्रेणियाँ आर्थिक और व्यापारिक अध्ययनों में बहुतायत से पायी जाती है। समय सबसे महत्वपूर्ण कारक है जिसके अनुसार समंक व्यवस्थित की जाती है।

''स्थानिक श्रेणी'' **(भौगोलिक या संवर्गीय)** ऐसा है जिसमें समंक स्थल के अन्तरों या भौगोलिक क्षेत्र के आधार पर व्यवस्थित होती है। चर के मान गांवों, शहरों, जिलों, क्षेत्रों, मंडलों, राज्यों या राष्ट्रों के संदर्भ में वर्णनानुक्रम से या मानों के चढ़ते क्रम में प्रदर्शित की जाती है।

''व्यक्तिगत श्रेणी'' ऐसी है जिसमें समंक उसी तरह दर्शाई जाती है जैसे वे अवलोकित होती हैं। चर के मान आकार में छोटे या संख्या में सीमित होते हैं। अवलोकनों को तथ्यतः आलेखित की जाती है और प्रस्तुत की जाती है, जैसे वे संकलित की जाती हैं, साधारणतया, वे अपरिष्कृत और असंगठित रूप में होती हैं। यद्यपि, उन्हें क्रम (array) में मूल्यों के चढ़ते या गिरते हुए क्रम में व्यवस्थित कर संयोजित की जा सकती है। चूँकि चरों के मूल्य आकार में छोटे हैं संकलित समंक को संघनित करने की आवश्यकता नहीं है। इसलिए व्यष्टिक अवलोकन या श्रेणी अवर्गीकृत हैं।

''स्थिति श्रेणी'' **(Condition Series)** ऐसा है जिसमें समंक भौतिक स्थिति के अनुसार व्यवस्थित हैं जैसे आयु, ऊँचाई और वजन किसी दिए समय में उनके घटित होने के सापेक्ष। इस श्रेणी में, समंक आकार में विभिन्नता या चीजों के परिमाण से दर्शाई जाती हैं। चर के मूल्य आकार में बड़े या संख्या में असीमित

टिप्पणी

होते हैं। उनसे वांछित हैं विश्लेषण का प्रदर्शन से पहले संघनित किया जाना। संकलित समंक के आकार को छोटा करने के लिए एक आवृत्ति वितरण बनाया जाना होता है। स्थिति श्रेणियाँ तीन प्रकार की होती हैं–

(i) विच्छिन्न (Discrete) (असतत या अवर्गीकृत) श्रेणी– जब समंक में चर के मूल्य व्यक्तिगत रूप से पृथक और पूर्णांक है, हमें विच्छिन्न रूप की आवृत्ति वितरण प्राप्त हो सकता है। यह सिर्फ तभी संभव है जब चर के मूल्यों का आकार छोटा है अवलोकनों की संख्या की तुलना में। चूँकि, श्रेणी में प्रत्येक मूल्य पुनरावृत्त होती है। चरों के बीच एक निश्चित अन्तराल होता है जो श्रेणी को मूल्यों में असतत करती है। कोई भिन्नात्मक मान नहीं होते हैं। प्रत्येक मूल्य एक निश्चित आवृत्ति लेती है उसके श्रेणी में पुनरावृत्ति के अनुसार।

(ii) वर्गीकृत श्रेणी (Classified Series)– अगर समंक में चर के मूल्य व्यक्तिगत रूप से पृथक और पूर्णांक हैं, हमें विच्छिन्न प्रकार का आवृत्ति वितरण मिलता है। यह तभी संभव है जब चर के मूल्यों का आकार छोटा है अवलोकनों की संख्या की तुलना में। अगर चर के मूल्य और अवलोकनों की संख्या दोनों आकार में बड़े हैं, हम मूल्यों को वर्गीकृत कर सकते हैं समंक को संक्षिप्त करने के उद्देश्य से।

सभी निश्चित पूर्णांक (मूल्य) विभिन्न वर्गों (वर्ग–अन्तराल) में वर्गीकृत किए जाते हैं चर के सभी विस्तार के मूल्यों को बाँटकर। प्रत्येक वर्ग अन्तराल के लिए दो सीमाएं हैं– निम्न सीमा और उच्च सीमा। दोनों सीमाएं अंतर्वेशित की जाती है एक खास वर्ग अन्तराल में प्रेक्षणों को गिनकर। वर्ग अन्तराल एक स्तंभ में एक क्रम से रखी जाती हैं और उनकी आवृत्तियाँ दूसरे में। इस विधि से संकलित समंक पर्याप्त संघनित किए जाते हैं और प्रदर्शित। वर्ग अन्तराल, इस श्रेणी के अंदर, 'अंतर्वेशित वर्ग अन्तराल' कही जाती हैं। एक मूल्य का अन्तर होता है पूर्ववर्त्ती वर्ग अन्तराल के उच्च सीमा और उत्तरवर्त्ती वर्ग अन्तराल के निम्न सीमा के बीच।

(iii) सतत श्रेणी (Continuous Series)– जब समंक में चर का मूल्य पूर्णांक नहीं हैं। हमें वर्गीकृत श्रेणी नहीं मिलती है। पूर्णांक के बदले, हम चर के मूल्य भिन्न में पाते हैं। वर्ग अन्तराल बनाने की अंतर्वेशित विधि चर के भिन्नात्मक मूल्यों के लिए उपयुक्त नहीं है। इन परिस्थितियों में हम सतत वर्ग अन्तराल बनाते हैं जो ''वर्ग अन्तराल की बहिर्वेशित विधि'' कहलाती है। प्रत्येक वर्ग अन्तराल की सिर्फ निम्न सीमा अंतर्वेशित की जाती है प्रेक्षणों को एक विशिष्ट वर्ग अन्तराल में गिनते वक्त। उच्च सीमा गिनने की विधि से बहिर्वेशित की जाती है।

चरों के सभी मूल्य (पूर्णांक और भिन्न एक समान) सतत हैं और एक दिए विस्तार में मध्यवर्त्ती मान लेता है। वर्ग अन्तराल (बहिर्वेशित विधि) जुड़े होते हैं शुरू से अंत तक बिना टूटे और वे एक स्तंभ में श्रेणीबद्ध होते हैं संबंधित आवृत्ति दूसरे स्तंभ में ली जाती है। इस विधि से, संकलित समंक यथेष्ट रूप से संघनित की जाती है और प्रदर्शित की जाती है। कोई अन्तराल नहीं होता है पूर्ववर्त्ती वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा और उत्तरवर्त्ती वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा के बीच, चूँकि वे एक और समान हैं।

2.12 सांख्यिकीय श्रेणी का निर्माण (Construction of Statistical Series)

समंक को संयोजित करने की विधि में एक संख्यात्मक संवृत्ति से संबंधित निम्नलिखित चार श्रेणियों का विचार किया जाता है–

(i) व्यक्तिगत श्रेणी (ii) विच्छिन्न श्रेणी

(iii) वर्गीकृत श्रेणी (iv) सतत श्रेणी

हम समंक के विभिन्न अवस्थाओं का एक संख्यात्मक दृष्टांत से वर्णन करेंगे। हम लोग एक परीक्षा में 100 छात्रों के निम्नलिखित अंकों पर विचार करें, रोल नम्बर के क्रम में व्यवस्थित।

सारणी क्र. 2.1: 100 छात्रों के अंक (20 पूर्णांक से)
(अपरिष्कृत, असंगठित या वर्गीकृत समंक)

5	14	10	16	8	15	1	14	9	6
11	3	8	12	6	4	11	17	7	10
18	10	15	9	8	14	8	5	15	4
10	13	4	18	2	6	10	7	13	8
16	7	14	11	9	4	11	9	3	7
1	8	10	5	13	7	15	8	19	16
6	17	11	15	6	3	18	12	9	4
14	11	9	4	14	11	8	7	19	10
15	8	19	11	7	16	10	3	6	14
10	19	3	20	8	11	20	14	9	19

उपर्युक्त आलेखित समंक ''अपरिष्कृत या असंगठित''समंक कहलाते हैं। अंक इतने अनियंत्रनीय और बिखरे हैं। सावधानीपूर्वक पढ़ने के बाद भी, उनमें समाविष्ट विवरण स्पष्ट नहीं हैं। अंकों को आलेखित किया जाता है जैसे वे संकलित की जाती हैं वे संगठित नहीं हैं। यद्यपि, वे क्रमवार संगठित और प्रदर्शित की जा सकती हैं बेहतर तरीके से। अपरिष्कृत समंक व्यस्थित किए जा सकते हैं मूल्यों के बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में यह व्यवस्थापन 'क्रमबद्धता' कहलाती है। अब परीक्षा में 100 छात्रों के अंक संगठित रूप में निम्न जैसे प्रदर्शित की जाती है।

सारणी क्र. 2.2: 100 छात्रों के अंक (20 पूर्णांक से)
(संगठित या क्रमबद्ध) (सारणी क्र. 2.1 के संदर्भ में।)

क्र.स.	अंक	क्र.स.	अंक	क्र.स.	अंक	क्र.स.	अंक	क्र.स.	अंक
1	1	21	6	41	9	61	11	81	15
2	1	22	6	42	9	62	11	82	15
3	2	23	6	43	9	63	11	83	15

4	3	24	7	44	9	64	11	84	15
5	3	25	7	45	9	65	11	85	16
6	3	26	7	46	9	66	12	86	16
7	3	27	7	47	9	67	12	87	16
8	3	28	7	48	10	68	13	88	16
9	4	29	7	49	10	69	13	89	17
10	4	30	8	50	10	70	13	90	17
11	4	31	8	51	10	71	14	91	18
12	4	32	8	52	10	72	14	92	18
13	4	33	8	53	10	73	14	93	18
14	4	34	8	54	10	74	14	94	19
15	5	35	8	55	10	75	14	95	19
16	5	36	8	56	10	76	14	96	19
17	5	37	8	57	11	77	14	97	19
18	6	38	8	58	11	78	14	98	19
19	6	39	7	59	11	79	15	99	20
20	6	40	8	60	11	80	15	100	20

अपरिष्कृत समंक को क्रमबद्ध करने में, हमें क्रम संख्याओं का इस्तेमाल करना है रौल नम्बर के बदले चर के मूल्यों के क्रम को बनाए रखने के लिए। क्रमबद्ध करने से समंक संघनित नहीं होता है। अवलोकनों का आकार वही रहता है। यद्यपि, समंक का प्रस्तुतीकरण अपरिष्कृत समंक से बेहतर दिखती है। इस प्रकार का समंक का प्रस्तुतीकरण आवश्यक है सांख्यिकीय विश्लेषण के उद्देश्य के लिए।

यद्यपि, क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत समंक बेहतर दिखता है अपरिष्कृत समंक से, यह कठिन है समंक का वास्तविक सार्थकता एक नजर में। इसलिए हम समंक को आगे अधिक आकर्षक और संघनित रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं एक आवृत्ति वितरण की सहायता से।

'आवृत्ति' एक श्रेणी में चर के प्रत्येक मूल्य का कितनी बार घटित होता है। यह चर के खास मूल्य की पुनरावृत्ति की संख्या से संबंधित है। यह दर्शाई जानी है, गिनती की सहायता से, एक खास मूल्य या वर्ग के विरुद्ध। इसलिए यह एक खास घटना या चीज या मूल्य के घटित होने की दर है।

आवृत्ति वितरण (Frequency Distribution)– चर (या गुणधर्मों) का सारांश प्रस्तुतीकरण है उनके परिमाण के अनुसार या तो व्यक्तिगत रूप से या समूह या वर्गों में जो व्यवस्थित किया जाता है। यह चर के विभिन्न मूल्यों को अंकित करता है एक स्तंभ में और उनकी आपेक्षिक आवृत्तियाँ दूसरे में। यह समंक के वर्गीकरण की एक प्रणाली है संवृत्ति के आधार पर जो संख्यात्मक माप में समर्थ है। यह आवृत्ति तालिका या आवृत्ति चार्ट या आवृत्ति श्रेणी भी कहलाती है।

सांख्यिकीय श्रेणी के आधार पर हम तीन प्रकार का आवृत्ति वितरण निम्न प्रकार से निर्मित कर सकते हैं–

टिप्पणी

(i) विच्छिन्न (असतत) आवृत्ति वितरण Discrete (Discontinuous) Frequency Distribution

(ii) वर्गीकृत आवृत्ति वितरण (Grouped Frequency Distribution)

(iii) सतत आवृत्ति वितरण (Continuous Frequency Distributions)

(i) विच्छिन्न आवृत्ति वितरण– चर जो सिर्फ निश्चित या विशिष्ट पूर्णांक मूल्य ले सकते हैं 'विच्छिन्न चर' कहलाते हैं। वे दो पूर्ण संख्याओं के सभी संभव भिन्न मान नहीं लेते हैं। विच्छिन्न आवृत्ति वितरण निर्माण करते वक्त हम चर के प्रत्येक मूल्य को जितनी बार श्रेणी में आती हैं गिनते हैं। यह सुसाध्य की जाती है मिलान चिन्हों (Tally Marks) की तकनीक से।

'मिलान चिन्ह' छोटी उदग्र रेखाएं हैं जो एक दूसरे के समानान्तर खींची जाती हैं वे एक खास मूल्य या वर्ग के सामने खींची जाती हैं आवृत्तियों की गिनती को सुगम बनाने के लिए। सामान्यतया एक पाँच बारों (चिन्हों) का ब्लाक गणन विधि के लिए प्रयुक्त होती है, जैसे '𝍸' (चार उदग्र छोटी रेखा और एक उनको काटती हुए टेढ़ी रेखा)। यह विधि गणन की विधि को अधिक आसान बना देती है पाँच आवृत्तियों की एक इकाई के रूप में।

सारणी क्र. 2.3: 100 छात्रों के अंक (20 पूर्णांक में) (विच्छिन्न आवृत्ति वितरण) (संदर्भ सारणी क्र. 2.2)

अंक	मिलान	चिन्ह	अंक	मिलान	चिन्ह
1	||	2	11	𝍸 ||||	9
2	|	1	12	||	2
3	𝍸	5	13	|||	3
4	𝍸 |	6	14	𝍸 |||	8
5	|||	3	15	𝍸 |	6
6	𝍸 |	6	16	||||	4
7	𝍸 ||	7	17	||	2
8	𝍸 𝍸	10	18	|||	3
9	𝍸 ||	7	19	𝍸	5
10	𝍸 ||||	9	20	||	2
				कुल	100

चर के मूल्य संख्या में 20 हैं (20 पूर्णांक अंक का) जबकि अवलोकनों की संख्या (छात्र) एक सौ हैं। इस विच्छिन्न प्रकार के वितरण में (सारणी 2.3), सम्पूर्ण समंक काफी हद तक संघनित किए गए हैं और दर्शाये गये हैं जिसमें हम चर के प्रत्येक मूल्य को जितनी बार वे आई हैं गिनते हैं। अंकों की संवृत्ति चर कहलाती है। अंक अपने आप में चर के मूल्य कहलाते हैं। छात्रों की संख्या जो अंक स्कोर करते हैं एक आवृत्ति कहलाती है। इस प्रकार का वितरण उपयुक्त है जब चर के मूल्य कम हैं और अवलोकनों की संख्या अधिक।

(ii) वर्गीकृत आवृत्ति वितरण– जब अवलोकनों की संख्या और चर के मूल्यों की संख्या दोनों आकार में बड़े हैं, विच्छिन्न आवृत्ति वितरण उपयुक्त नहीं है। चर के मूल्यों के सम्पूर्ण विस्तार को संघनित किया जाता है इन्हें उपयुक्त समूहों या वर्गों में बाँटकर। प्रत्येक वर्ग को दो सीमाएं हैं– निम्न सीमा और उच्च सीमा। जैसे चर के मूल्य पूर्णांक या पूर्ण संख्या हैं, (भिन्नात्मक नहीं) वर्गों की 'अन्तर्वेशी विधि तैयार की जाती है। दोनों सीमाएं समाविष्ट की जाती हैं अवलोकनों की संख्या को गिनते वक्त एक खास वर्ग के सापेक्ष। यद्यपि, एक का अन्तर है पूर्ववर्ती वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा और उत्तरवर्ती वर्ग अन्तराल के निम्न सीमा के बीच।

मान लें हम तालिका 2.1 में पहले से प्रदर्शित 100 छात्रों के अंकों पर विचार करें। यद्यपि चर के मूल्य संख्या में 20 हैं यह मानते हुए कि वे आकार में बड़े हैं, हम उन्हें विभिन्न वर्गों में उपयुक्त रूप से बाँट सकते हैं, जैसे– 1-3, 4-6, 7-9 और आगे इसी तरह। दूसरा कदम है अवलोकनों की संख्या गिनना मिलान चिन्हों के साथ आवृत्ति वितरण बनाने के लिए।

मिलान बार आपेक्षिक वर्गों के विरुद्ध खींचे जाते हैं।

सारणी क्र. 2.4: 100 छात्रों के अंक (20 पूर्णांक से)
(संदर्भ सारणी क्र. 2.3) वर्ग की अन्तर्वेशी विधि

वर्ग अन्तराल	मिलान चिन्ह	आवृत्ति (f)
1-3	𝍸 |||	8
4-6	𝍸 𝍸 𝍸	15
7-9	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	24
10-12	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
13-15	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
16-18	𝍸 ||||	9
19-21	𝍸 ||	7
	कुल	100

एक वर्गीकृत आवृत्ति वितरण में, इकाईयों (उपयुक्त उदाहरण में छात्र) की पहचान जिसके बारे में एक खास सूचना एकत्रित की गई है (उपयुक्त उदाहरण में अंक) प्रासंगिक नहीं है परन्तु समंक का संघनन आवश्यक है। समंक विभिन्न वर्गों में वर्गीकृत की जाती है (वर्ग अन्तराल) चरों के मूल्य के सम्पूर्ण विस्तार को उपयुक्त समूहों या वर्गों की संख्या में। उपर्युक्त उदाहरण में हमने चर के मूल्यों के सम्पूर्ण विस्तार (1 से 21) को 7 समूहों में बाँटा है प्रत्येक 3 के आकार में समूह की लम्बाई या वर्ग अन्तराल 3 है जो कहलाती है वर्ग का 'विस्तार' (width) या परिमाण (Magnitude)। वर्ग की उल्लखित दो मूल्य 'वर्ग–सीमाएं कहलाती हैं– निम्न सीमा और उच्च सीमा।

टिप्पणी

इस प्रकार के वर्ग– 4-6, 7-9, 10-12 और इसी तरह आगे – कहलाती हैं **''अन्तर्वेशी वर्ग''**। निम्न और उच्च सीमाएं आविष्ट की जाती हैं आवृत्ति गिनते वक्त और उन्हें वर्गीकृत करते वक्त। उादरहण के लिए, वर्ग अन्तराल 16-18 सभी मानों 16, 17, 18 को आविष्ट करती है। यहाँ मान 16 (निम्न सीमा) और मान 18 (उच्च सीमा) आवेष्टित होती है मिलान चिन्ह लगाते वक्त आवृत्ति की गिनती के लिए। दूसरा मान 19 दूसरे वर्ग 19-21 में आवेष्टित होती है। सामान्यतया, भिन्नात्मक मान 18 और 19 के बीच (i.e., 18-20, 18-65, 18-78 आदि) पर कुछ भी विचार नहीं किया जाता है इस प्रकार के वर्गीकरण में। सिर्फ वैसे चर जो पूर्णांक मान लेते हैं इस प्रकार के वर्गीकरण में लिए जाते हैं जैसे कारों की संख्या, परिवारों की संख्या, दुर्घटनाओं की संख्या आदि।

अन्तर्वेशित विधि सामान्य प्रयोग में नहीं है। इसलिए अन्तर्वेशित विधि, बहिर्वेशित विधि में परिवर्तित कर दी जाती है सभी उद्देश्यों के लिए। एक का अन्तर होता है पूर्ववर्त्ती वर्ग की उच्च सीमा और उत्तरवर्त्ती वर्ग की निम्न सीमा के बीच। यह अन्तर एक संशोधन कारक से समायोजित की जाती है, निम्न प्रकार प्रगणित,

$$\text{संशोधन कारक} = \frac{\text{उत्तरवर्ती वर्ग की निम्न सीमा} - \text{पूर्ववर्ती वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

संशोधन कारक सामान्यतया 0.5 होता है, जो निम्न जैसा समायोजित होता है।

वर्ग की अन्तर्वेशित विधि अंक	वर्ग परिवर्तित की गई बहिर्वेशित विधि में
1-3	0.5-3.5
4-6	3.5-6.5
7-9	6.5-9.5
10-12	9.5-12.5
13-15	12.5-15.5
16-18	15.5-18.5
19-21	18.5-21.5

टिप्पणी– संसोधन कारक 0.5 सभी निम्न सीमाओं में घटाई जाती है और उच्च सीमा में जोड़ दी जाती है।

वर्ग अन्तराल का परिमाण 2 है, समायोजन से पहले, परन्तु समायोजन के बाद यह 3 हैं। यद्यपि, मध्य–मान दोनों स्थितियों में समान रहती हैं।

(iii) सतत आवृत्ति वितरण (Continuous Frequency Distribution)– जब अवलोकनों की संख्या और चर के मूल्यों की संख्या दोनों बड़े हैं आकार में, और चर के मान दोनों पूर्णांक और भिन्नात्मक हैं, वर्गीकृत आवृत्ति वितरण उपयुक्त

नहीं हैं चर के मूल्यों के सम्पूर्ण विस्तार को संघनित किया जाना है इन्हें उपयुक्त समूहों या वर्गों में विभाजित कर। प्रत्येक वर्ग की दो सीमाएं हैं– निम्न सीमा और उच्च सीमा। चूँकि चरों के मूल्य पूर्णांक और भिन्नात्मक हैं, वर्गों की 'बहिर्वेशित विधि' तैयार की जाती है। वर्ग की उच्च सीमा अलग कर दी जाती है अवलोकनों की संख्या विशिष्ट वर्ग के विरुद्ध गिनते वक्त। 1 का अन्तर नहीं होता है पूर्ववर्ती वर्ग की उच्च सीमा और उत्तरवर्त्ती वर्ग की निम्न सीमा के बीच। चूँकि दोनों सीमाएं बराबर हैं।

हम लोग फैक्टरी A के 100 मजदूरों की साप्ताहिक मजदूरी का विचार करें।

सारणी क्र. 2.5: मजदूरों की साप्ताहिक मजदूरी (रु. में)– फैक्टरी A की

96	62	41	90	52	37	78	48	85	30
52	36	53	26	112	61	133	55	108	43
44	54	80	51	43	104	75	98	60	34
45	97	38	69	56	122	31	46	125	52
28	109	42	89	68	26	79	105	59	38
35	125	57	70	120	34	137	47	130	50
95	48	101	27	136	132	48	140	87	40
32	134	63	43	58	138	148	34	114	65
39	117	142	48	148	29	149	49	148	116
64	143	33	147	150	44	150	86	150	32

उपयुक्त सारणी में, निम्नतम साप्ताहिक मजदूरी है 26 रु. और उच्चतम साप्ताहिक मजदूरी है 150 रु.। हम लोग एक वर्ग अन्तराल परिमाण 10 के साथ लें। इस तरह हमें करीब 14 वर्गों की संख्या है 20-30 से शुरू होकर 150-160 तक। हम लोग एक सतत चर का कार्य कर रहे हैं। यद्यपि मूल्य पूर्णांक हैं, उस विस्तार में जिसमें वे आते हैं 26 से 150 तक विस्तारित है। कोई निश्चित मान नहीं है जैसे 25, 30, 35, 45 आदि। हम सिर्फ सतत मान पाते हैं निश्चित मूल्यों के बीच। इसलिए हमें मानना चाहिए कि वे भिन्नात्मक मानों जैसे हैं जो दो निश्चित मूल्यों के बीच पड़ते हैं। चर के मानों की संख्या आकार में बड़े हैं। इसे समूह की वांछितता है निम्न जैसा–

टिप्पणी

सारणी क्र. 2.6: 100 मजदूरों का साप्ताहिक वेतन (फैक्टरी A)
(सतत आवृत्ति) (संदर्भ सारणी क्र. 2.5) वर्ग की बहिर्वेशित विधि

वर्ग अन्तराल	मिलान चिन्ह	मजदूरों की संख्या (f)	वर्ग अन्तराल	मिलान चिन्ह	मजदूरों की संख्या (f)
20-30	~~IIII~~	5	90-100	~~IIII~~	5
30-40	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14	100-110	~~IIII~~	5
40-50	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16	110-120	IIII	4
50-60	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	120-130	IIII	4
60-70	~~IIII~~ III	8	130-140	~~IIII~~ II	7
70-80	IIII	4	140-150	~~IIII~~ III	8
80-90	~~IIII~~	5	150-160	III	3
				कुल	100

चर के मूल्यों की माप, उनका परिमाण और मात्रा जो उप–विभाजन (जैसे भिन्न) में समर्थ है सतत श्रेणी का निर्माण करते हैं। वर्ग अन्तराल बगैर उनके बीच अन्तराल के निर्मित हैं। वे बहिर्वेशित प्रकार की हैं जिसमें उच्च सीमाएं अलग कर दी गई हैं अवलोकनों को गिनते वक्त मिलान चिन्ह लगाने के लिए। इसका अर्थ है सिर्फ निम्न सीमाएं ली गई हैं गिनने की विधि में। उदाहरण के लिए, उपयुक्त वितरण में, तीन मजदूर हैं जो 150 रु. साप्ताहिक वेतन पाते हैं। वे 150-160 वर्ग में वर्गीकृत हैं, ना कि 140-150 वर्ग में। क्योंकि 150, वर्ग 140-150 की उच्च सीमा है, अलग कर दी जाती है और 150 वर्ग 150-160 की निम्न सीमा की वजह से, समाविष्ट की जाती है।

चर कोई बीच का मूल्य ले सकता है वर्ग, अन्तराल की दो सीमाओं के बीच जो शुरू से अन्त तक मूल्यों के पूरे विस्तार तक होती है वगैर किसी टूट के।

2.13 सतत श्रेणी का निर्माण (Continuous Construction of Series)

सतत आवृत्ति वितरण का निर्माण सबसे लोकप्रिय और व्यवहार में है। इन दिनों कोई कठोर नियम नहीं हैं सतत श्रेणी के निर्माण के लिए। एक सांख्यिकीविद को अपने विवेक का इस्तेमाल करना है समंक को सतत आवृत्ति वितरण में वर्गीकृत करने के लिए। अनुभव, बुद्धि, कौशल और योग्यता वांछित है समंक के उचित वर्गीकरण के लिए। यद्यपि, निम्नलिखित नियम और शर्त दिमाग में रक्खा जाना चाहिए सतत आवृत्ति वितरण निर्माण करते वक्त–

(A) महत्वपूर्ण पद (Terms)– निम्नलिखित तकनीकी पदों का अध्ययन किया जाना चाहिए सतत आवृत्ति वितरण का निर्माण करते वक्त।

(i) वर्ग अन्तराल (Class interval)– यह समंक के प्रत्येक समूह का आकार है जो निम्न सीमा से शुरू होता है और उच्च सीमा से खत्म होता है। इसलिए यह वर्ग है जो दो सीमाओं से निर्मित है। वर्ग अन्तराल की अन्तर्वेशी विधि के उदाहरण हैं 10-19, 20-29, 30-39 आदि। वर्ग अन्तराल की बहिर्वेशी विधि के उदाहरण हैं 10-20, 20-30, 30-40 आदि।

(ii) वर्ग अन्तराल की आदर्श संख्या– कोई कठोर नियम नहीं है वर्ग अन्तरालों की संख्या के निर्धारण संबंधी किसी दिये गये अवलोकन में। यद्यपि, प्रो. एच.ए. स्र्टजेज ने एक सूत्र दिया है जिससे हम वर्ग अन्तरालों की आदर्श संख्या प्रगणित कर सकते हैं जो किसी श्रृंखला में बनाया जाता है।

उनका सूत्र है,

$$n = 1 + 3.222 \log N$$

n = वर्ग अन्तरालों की संख्या

N = अवलोकनों की संख्या

क्रमानुसार उपर्युक्त स्टुर्जेज नियम के आधार पर, हम लोग वर्ग अन्तराल का परिमाण निम्न जैसा निर्धारित करते हैं।

$$i = \frac{L-S}{1+3.222 \log N} = \frac{\text{विस्तार}}{\text{वर्गों की संख्या}}$$

i = वर्ग अन्तराल का परिणाम

L = सबसे बड़ा मान

S = सबसे छोटा मान

जब हम स्टूर्जेज सूत्र का प्रयोग करते हैं, वर्गों की संख्या सामान्यतया 4 और 20 के विस्तार में निर्धारित होती है। यह काफी तर्कपूर्ण विस्तार है जिसके अन्तर्गत वर्ग अन्तरालों की संख्या पाते हैं। यद्यपि, वर्गों की संख्या पूर्ण संख्या (पूर्णांक) होनी चाहिए अधिमान्यता से 5 या 5 के अपवर्त्य जैसे 10, 15, 20 इत्यादि। ऐसे पूर्णांक दिमाग के लिए प्रत्यक्ष दृष्टिगोचर हो जाते हैं और समंक के विश्लेषण के लिए संख्यात्मक प्रगणन में काफी सुविधाजनक होते हैं। उसी प्रकार, वर्ग अन्तराल का परिमाण को भी अधिमान्यता से 5' या 5 के न्यूनतम उभयनिष्ठ अन्तराल जैसे– 0-5 या 15-25 या 20-40 आदि में लेना चाहिए।

वर्ग अन्तराल का प्रकार– समंक वर्ग अन्तरालों में वर्गीकृत की जाती हैं जो दो प्रकार की होती हैं– अन्तर्वेशी वर्ग और बर्हिवेशी वर्ग–

(a) अन्तर्वेशी वर्ग अन्तराल– इस विधि के अधीन, प्रत्येक वर्ग दो आत्यंतिक मूल्यों से द्योतित होता है जो वर्ग सीमाएं कहलाते हैं। छोटी सीमा 'निम्न सीमा' और बड़ी सीमा 'उच्च सीमा' कहलाती है। दोनों सीमाएं समाविष्ट होती हैं इन वर्ग अन्तरालों के लिए अवलोकनों को गिनते वक्त।

उदाहरण के लिए, वर्ग अन्तराल 40-49 में 40 से 49 तक सभी मूल्य आविष्ट हैं, दोनों अन्तर्वेशित। दूसरा मूल्य 50 दूसरे वर्ग अन्तराल 50-59 में समाविष्ट है आदि। यद्यपि 49 और 50 के बीच भिन्नात्मक मान इस प्रकार के वर्गीकरण में

प्रगणित नहीं हो सकती है। वर्ग अन्तराल की विधि (अन्तर्वेशी) उन चरों के लिए प्रयुक्त होती है जिनके मूल्य पूर्णांक (पूर्ण संख्यायें) होती हैं। सामान्यतया, यह विधि समूहकृत श्रेणियों में अपनाई जाती है जिसमें भिन्नात्मक मान नहीं हो।

यद्यपि, वर्ग अन्तराल की अन्तर्वेशी विधि, कुछ सुधारों के साथ सतत श्रेणी में भी प्रयुक्त हो सकती है। वर्ग सीमाएं समायोजित की जाती है और बहिर्वेशी वर्ग–अन्तराल में परिवर्तित की जाती है निम्न जैसा।

वर्ग अन्तराल की अन्तर्वेशी विधि	**वर्ग अन्तराल की बहिर्वेशी विधि में परिवर्तित**
10-19	9.5-19.5
20-29	19.5-29.5
	29.5-39.5
	39.5-49.5
	49.5-59.5

नोटः संशोधन कारक 0.5 सभी निम्न सीमाओं से घटा दी जाती है और उच्च सीमाओं में जोड़ दी जाती है।

$$\text{संशोधन कारक} = \frac{\text{उत्तरवर्ती वर्ग की निम्न सीमा} - \text{पूर्ववर्ती वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

$$= \frac{20-19}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

उपयुक्त उदाहरण में, नई वर्ग सीमाएं प्रगणित की जाती हैं। सामान्यतः, ये सीमाएं ''वर्ग परिसीमाएं'' कही जाती हैं।

(b) बहिर्वेशी वर्ग अन्तराल– इस विधि के अधीन प्रत्येक वर्ग दो आत्यंतिक मूल्यों से द्योतित होती है जो वर्ग सीमाएं कहलाती हैं। छोटी सीमा 'निम्न सीमा' कहलाती है और बड़ी सीमाएं 'उच्च सीमा'। इस प्रकार के वर्ग अन्तराल के लिए अवलोकनों को गिनते वक्त निम्न सीमा समाविष्ट हो जाती है और उच्च सीमा निषिद्ध। उदाहरण के लिए, वर्ग अन्तराल 40-50 सभी मूल्यों 40 से 49 को समाविष्ट करता है, मूल्य 50 को बहिष्कृत करते हुए जो अगले वर्ग अन्तराल 50–60 में समाविष्ट होती है।

इस विधि में, पूर्ववर्त्ती वर्ग की उच्च सीमा उत्तरवर्त्ती वर्ग की निम्न सीमा हो जायेगी। वर्ग अन्तराल सतत रूप से निर्मित होती है बिना अन्तर या विच्छेदन के। यह प्रकल्पित किया जाता है कि चर के मूल्य दोनों पूर्णांक और भिन्नात्मक होते हैं। यह विधि समंक की निरंतरता को निश्चित करता है और यह विस्तृत रूप से व्यवहार में लाया जाता है।

निम्नलिखित उदाहरण वर्ग की अन्तराल की बहिर्वेशी विधि की व्याख्या करता है।

साप्ताहिक वेतन (रु.) वर्ग अन्तराल	कामगारों की संख्या (f)	साप्ताहिक वेतन (रु.) वर्ग अन्तराल	कामगारों की संख्या (f)
40-50	8	80-90	12
50-60	13	90-100	9
60-70	15	100-110	2
70-80	10	110-120	1
		कुल	**70**

एक कठिनाई उत्पन्न हो सकती है वेतन को गिनते और वर्गीकृत करते वक्त जैसे 50 रु., 60 रु., 70 रु. जो दो वर्गों में मिलते हैं उच्च सीमा और निम्न सीमा के रूप में इस प्रकार के संदेह को दूर करने के लिए अतिव्याप्त सीमाओं (Overlapping Limits) से संबंधित, वितरण को बेहतर रूप से प्रदर्शित निम्न जैसा किया जा सकता है।

साप्ताहिक वेतन (रु.)	कामगारों की संख्या (f)
40 रु. परन्तु 50 रु. से कम	8
50 रु. परन्तु 60 रु. से कम	13
60 रु. परन्तु 70 रु. से कम	15
70 रु. परन्तु 80 रु. से कम	10
80 रु. परन्तु 90 रु. से कम	12
90 रु. परन्तु 100 रु. से कम	9
100 रु. परन्तु 110 रु. से कम	2
110 रु. परन्तु 120 रु. से कम	1
कुल	**70**

उपयुक्त प्रस्तुति कोई संदेह उत्पन्न नहीं करती है। यह किसी भी संदिग्धता से परे है मदों के आकार के आबंटन के बारे में विभिन्न वर्गों में।

(iv) खाली वर्ग अन्तराल (Empty Class Interval)– यह वह वर्ग–अन्तराल है जिसमें कोई आवृत्ति नहीं है। इसका अर्थ है इस वर्ग अन्तराल में कोई अवलोकन नहीं है।

(v) वर्ग सीमाएँ (Class Limits)– प्रत्येक वर्ग अन्तराल की दो वर्ग सीमाएँ होती हैं– निम्न सीमा और उच्च सीमा। निम्नतम मूल्य निम्न सीमा है और उच्चतम मूल्य उच्च सीमा। वे दो सिरे हैं जिससे वर्ग अन्तराल बनते हैं।

(vi) वर्ग की परिसीमाएँ (Class Boundaries)– एक वर्गीकृत श्रेणी में हम लोग वर्ग अन्तराल की अन्तर्वेशी विधि से बनाते हैं। अन्तराल होती है पूर्ववर्त्ती वर्ग की उच्च सीमाओं और उत्तरवर्त्ती वर्ग की निम्न सीमाओं के बीच। ये अन्तराल शुद्ध की जाती है संशोधन कारक (0.5) द्वारा, जो निम्न सीमा से घटाई जाती है और

उच्च सीमा में जोड़ी जाती है। इस तरह अन्तर्वेशी विधि परिवर्त्तित हो जाती है बर्हिवेशी विधि में। नई संशोधित वर्ग सीमाएँ वर्ग परिसीमाएं कहलाती हैं।

टिप्पणी

$$\text{संशोधन कारक} = \frac{\text{उत्तरवर्ती वर्ग की निम्न सीमा} - \text{पूर्ववर्ती वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

$$= \frac{20-19}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$= 0.5 \text{ या अन्तर का } \frac{1}{2}$$

ऊपरी वर्ग परिसीमा = उच्च वर्ग सीमा $+\frac{1}{2}d$

निम्न वर्ग परिसीमा = निम्न वर्ग सीमा $-\frac{1}{2}d$

d = उत्तरवर्त्ती वर्ग की निम्न वर्ग सीमा और पूर्ववर्त्ती वर्ग की उच्च वर्ग सीमा का अन्तर। $\frac{1}{d}$ = संशोधन कारक। वर्ग सीमाओं के संशोधन की तकनीक और उन्हें वर्ग परिसीमाओं में परिवर्तित करना विस्तृत रूप से हमारी सहायता सांख्यिकीय मापों को प्रगणित करने में करेगा।

(vii) वर्ग का परिमाण और विस्तार– 'परिमाण' है वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा और उच्च सीमा के बीच का अन्तर। जबकि 'विस्तार' है वर्ग अन्तराल के निम्न वर्ग परिसीमा और उच्च वर्ग परिसीमा के बीच का अन्तर।

हम लोग वर्ग अन्तराल के अन्तर्वेशी विधि का उदाहरण लें और इसका बहिर्वेशी विधि में रूपांतरण करें निम्न जैसा–

वर्ग की अन्तर्वेशी विधि	**वर्ग परिसीमाओं के साथ रूपांतरण**	**वर्ग का परिमाण**	**वर्ग की लम्बाई या आकार या विस्तार**
10-19	9.5-19.5	9	10
20-29	19.5-29.5	9	10
30-39	29.5-39.5	9	10
40-49	39.5-49.5	9	10

बहिर्वेशी विधि की स्थिति में, हमें परिमाण हो सकता है वर्ग अन्तराल की दो सीमाओं के बीच अन्तर। उदाहरण के लिए।

वर्ग की बहिर्वेशित विधि	वर्ग का परिमाण
10-20	10
20-30	10
30-40	10
40-50	10

नोटः हम इस विधि में पद 'परिसीमाएं' और 'विस्तार' से दो चार नहीं होते हैं।

(viii) खुले सिरे वाली श्रेणियाँ (Open End Series)– इस श्रेणी के अधीन, प्रथम वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा और अन्तिम वर्ग अन्तराल की उच्च सीमा निर्दिष्ट नहीं है। पहला वर्ग अन्तराल शुरू होता है शब्दों, 'से कम (ऊपरी सीमा) मूल्य' और अन्तिम वर्ग अन्तराल समाप्त होता है शब्दों ''से अधिक (निम्न सीमा) मूल्य''। उदाहरण के लिए

वर्ग अन्तराल	आवृत्तियाँ
20 से कम	15
20-30	20
30-40	13
40-50	8
50-60	9
60 से अधिक	10

नोटः ''20 से कम'' और ''60 से अधिक'' शब्द भी प्रयुक्त हो सकते हैं।

(ix) बन्द सिरे वाली श्रेणियाँ (Closed end series)– इस श्रेणी के अधीन, सभी वर्ग सीमाएं सभी वर्ग अन्तरालों के उल्लिखित हैं। कोई भी खुला सिरा ना तो श्रेणी के शुरू में है या कि अन्त में।

(x) भंग-सिरे की श्रेणियाँ (Broken-end Series)– इस श्रेणी के अन्तर्गत, दोनों प्रकार की श्रेणियाँ विच्छिन्न और सतत पायी जाती हैं। यह विच्छिन्न और सतत आवृत्ति वितरण का संयोजन है। उदाहरण के लिए।

मूल्य (x)	आवृत्तियाँ (f)
10	8
20	3
20-30	15
30-40	11
40	7
50	4
50-60	2

नोटः इस तरह की श्रेणी प्रयुक्त होती है जब चरों के मान में बहुत उच्चावचन होती है।

भंग-सिरे की श्रेणियाँ शायद ही निर्मित की जाती हैं चूँकि वितरण सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए उपयुक्त नहीं है।

(xi) मध्य-मान (Mid-value) (मध्य-बिंदु या वर्ग चिन्ह)– यह वर्ग अन्तराल का मध्य-बिन्दु है जो वर्ग अन्तराल के दो आत्यंतिक सीमाओं के ठीक बीच में होता है।

टिप्पणी

$$\text{मध्य-मान} = \frac{\text{निम्न सीमा} - \text{उच्च सीमा}}{2}$$

उदाहरण के लिए,

वर्ग अन्तराल	वर्ग परिसीमाएं	वर्ग अन्तराल का परिमाण	वर्ग अन्तराल का विस्तार	वर्ग अन्तराल का मध्यमान
10-19	9.5-19.5	9	10	14.5
20-29	19.5-29.5	9	10	24.5
30-39	29.5-39.5	9	10	34.5
40-49	39.5-49.5	9	10	44.5

वर्ग अन्तराल	वर्ग अन्तराल का परिमाण	वर्ग अन्तराल का मध्यमान
10-20	10	15
20-30	10	25
30-40	10	35
40-50	10	45

नोटः दो प्रकार के वर्ग अन्तरालों के बीच अन्तर

मध्य-मान भिन्न होती है वर्ग अन्तरालों के प्रकार में अन्तर से। वे दो आत्यंतिक सीमाओं या परिसीमाओं के बीच अर्द्ध भाग में पड़ती है जैसी भी स्थिति हो।

(ii) वर्ग आवृत्ति (Class Frequency)– यह अवलोकनों की संख्या है विशिष्ट वर्ग के संगत। यह किसी विशेष घटना या मूल्य के घटित होने की दर है एक खास वर्ग अन्तराल से संबंधित।

(iii) व्युत्पतित आवृत्तियाँ (Derived Frequencies)– वर्ग आवृत्ति से हम लोग कई दूसरी आवृत्तियाँ निकाल सकते हैं विभिन्न उद्देश्यों के लिए सांख्यिकीय विश्लेषण के क्रम में। निम्नलिखित व्युयत्पत्तित आवृत्तियाँ हैं–

$$\text{आवृत्ति घनत्त्व (Frequency Density)} = \frac{\text{वर्ग आवृत्ति}}{\text{वर्ग का विस्तार}}$$

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति	आवृत्ति घनत्त्व
0-9	5	5 ÷ 10 = 0.5
10-19	7	7 ÷ 10 = 0.7
20-29	14	14 ÷ 10 = 1.4
30-39	18	18 ÷ 10 = 1.8
40-49	6	6 ÷ 10 = 0.6
	कुल = 50	

आवृत्ति घनत्व वर्ग के विस्तार का आवृत्ति प्रति इकाई है। इस प्रकार के आवृत्ति घनत्व का प्रयोग आवृत्तियों के संघनन को वर्गों में तुलना करने के लिए होता है। यह आवश्यक है कि सभी वर्ग समान विस्तार का होना चाहिए। आयत चित्र (Histogram) तैयार करते वक्त, अगर वर्ग असमान विस्तार के हैं, आवृत्ति घनत्व अधिक उपयोगी हैं।

(b) प्रतिशत आवृत्ति (Percentage Frequency)– यह वर्ग आवृत्ति का अनुपात है जो कुल आवृत्ति के प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त है। यह निम्न जैसा निकाला जाता है–

$$\text{प्रतिशत आवृत्ति} = \text{आपेक्षिक आवृत्ति} \times 100$$

$$= \frac{\text{वर्ग आवृत्ति}}{\text{कुल आवृत्ति}} \times 100$$

उपयुक्त उदाहरण के (xiii)(a) में दिए आवृत्ति पर विचार करते हुए, प्रतिशत आवृत्ति है,

$(5 \div 50) \times 100 = 10\%$

$(7 \div 50) \times 100 = 14\%$

$(14 \div 50) \times 100 = 28\%$

$(18 \div 50) \times 100 = 36\%$

$(6 \div 50) \times 100 = 12\%$

कुल $= 100\%$

(c) संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequency)– यह दिए गए वितरण में वर्ग आवृत्ति का परिवर्द्धित रूप है। यह निकाली जाती है, आवृत्तियों को क्रमवार जोड़कर जब आवृत्तियाँ मूल्यों या वर्गों के चढ़ते हुए क्रम में आलेखित की जाती है। दो प्रकार की संचयी आवृत्तियाँ हैं– 'से कम' और 'से अधिक'।

'से कम' संचयी आवृत्तियाँ प्राप्त की जाती हैं वर्ग आवृत्तियों को जोड़कर जो व्यवस्थित हैं चढ़ते हुए क्रम के मूल्यों या वर्गों में। सभी मूल्यों या वर्गों की आवृत्तियाँ क्रमवार जोड़ी जाती हैं चर के मीन की आवृत्ति या वर्ग जिसके विरुद्ध संचयी योगफल लिखी गई हैं को समाविष्ट करते हुए। इसलिए यह सभी आवृत्तियों का योगफल है प्रत्येक मान या वर्ग के लिए जो लिखी जाती है मूल्य या वर्ग के विरुद्ध 'से कम' मान या वर्ग को उच्च सीमा के विरुद्ध।

'से अधिक' संचयी आवृत्तियाँ प्राप्त की जाती हैं वर्ग आवृत्तियों को जोड़कर, अन्तिम (सबसे नीचे) आवृत्ति से विपरीत दिशा में, जो बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित हैं। इसका अर्थ है हमें आवृत्तियों के योगफल से शुरू करना चाहिए और आवृत्तियों को प्रत्येक चरण में घटाते जाना चाहिए। इसलिए यह प्रत्येक मूल्य या वर्ग के लिए सभी आवृत्तियों का योग है जो मूल्य या वर्ग 'से अधिक' मूल्य या वर्ग के निम्न सीमा के विरुद्ध लिखी जाती है।

टिप्पणी

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति (f)	'से कम' मूल्य	संचयी आवृत्तियाँ c.f.	'से अधिक' मूल्य	संचयी आवृत्तियाँ
5-15	8	15 से कम	8	5 से अधिक	140
15-25	19	25 से कम	27	15 से अधिक	132
25-35	22	35 से कम	49	25 से अधिक	113
35-45	27	45 से कम	76	35 से अधिक	91
45-55	32	55 से कम	108	45 से अधिक	64
55-65	24	65 से कम	132	55 से अधिक	32
65-75	7	75 से कम	139	65 से अधिक	8
75-85	1	85 से कम	140	75 से अधिक	1
कुल = 140					

इस तरह एक संचयी आवृत्ति प्रत्येक का क्रमिक योगफल है प्रत्येक चरण पर वहाँ से चर के मूल्य या उस वर्ग अन्तराल की आवृत्ति को समाविष्ट करके। यह प्रत्येक मूल्य या वर्ग के लिए कुल अवलोकनों की संख्या उस मूल्य में या वर्ग के नीचे या ऊपर को प्रदर्शित करती है।

द्विचर आवृत्ति वितरण– जब समंक एक साथ दो आधारों या कसौटियों के संदर्भ में वर्गीकृत की जाती है हम ऐसे वितरण को द्विचर आवृत्ति वितरण कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक समूह का वजन और लम्बाई, 10 छात्रों का लेखाशास्त्र और सांख्यिकी विज्ञान में अंक, जोड़ों के समूह के लिए पतियों और पत्नियों के उम्र आदि द्विचर आवृत्ति वितरण हैं। इस तरह के वितरण 'द्विचर आवृत्ति तालिका के रूप में संक्षिप्त किए जा सकते हैं। यह सामान्यतया 'सह संबंध तालिका' के रूप में जाने जाते हैं।

एक द्विचर आवृत्ति वितरण में, प्रत्येक चर का मूल्य विभिन्न वर्गों में वर्गीकृत किए जाते हैं उन्हीं विचारों को ध्यान में रखते हुए जो एक चर वितरण के लिए प्रयुक्त होती हैं। चर के मूल्यों के एक समुच्च्य के लिए वर्ग अन्तराल स्तंभों में होगी और चर के मूल्यों के दूसरे समुच्च्य के लिए पंक्तियों में। उदाहरण के लिए,

अंक

लेखाशास्त्र	24	22	21	25	23	26	21	22	23
सांख्यिकी	12	18	17	14	11	15	13	16	12
लेखाशास्त्र	24	25	22	26	24	21	22	21	23
सांख्यिकी	13	16	18	12	14	17	18	11	12

सांख्यिकी (y) / d(x) लेखाशास्त्र	11	12	13	14	15	16	17	18	कुल
21	|		|				||		4
22						|		|||	4
23	|	||							3
24		|	|	|					3
25				|		|			2
26		|			|				2
कुल	2	4	2	2	1	2	2	3	

खाने स्तंभों और पंक्तियों के प्रतिच्छेदन पर बनाई जाती हैं जो संयुक्त मूल्य या संयुक्त–वर्ग प्रदर्शित करते हैं। संयुक्त मूल्यों की आवृत्ति है मदों की संख्या जिसे प्रथम चर का मूल्य है स्तंभ में और दूसरे चर का मूल्य है पंक्ति में (i.e., 2 और 4)।

(B) (Guidelines) (दिशा निर्देशों)– निम्नलिखित सामान्य पथ प्रदर्शक हैं जिन पर विचार किया जा सकता है सुनिश्चित करने के लिए एक आदर्श आवृत्ति वितरण–

(i) वर्गों की संख्या न्यूनतम पाँच होनी चाहिए और अधिकतम पन्द्रह।

(ii) वर्ग अन्तराल का विस्तार (परिमाण) बेहतर है कि न्यूनतम उभयनिष्ठ कारकों में 5, 10, 15, 20, 50 या 100 के हों। उदाहरण के लिए, 5-10 या 10-20 या 0-50, 100-200 इत्यादि।

(iii) वर्ग अन्तराल की बहिर्वेशी विधि अपनाना बेहतर है अन्तर्वेशी विधि के बदले वर्गीकरण में निरंतरता सुनिश्चित करने के लिए। अन्तर्वेशी विधि को बहिर्वेशी विधि में परिवर्त्तित किया जा सकता है संशोधन कारक को समायोजित करके।

(iv) चुनी हुई वर्ग सीमाएं इस प्रकार से होनी चाहिए कि किसी वर्ग अन्तराल के प्रेक्षण समरूप से वितरित हैं।

(v) खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल जहाँ तक सम्भव हो टाले जाते हैं, क्योंकि इस प्रकार के समूह के लिए मध्य-मान का प्रगणन आसानी से निर्धारित नहीं हो सकता।

(vi) वर्ग अन्तराल को समरूप या बराबर परिमाण पूरी श्रेणी के दरमियान होना चाहिए।

(vii) खुले–सिरे वाले वर्ग अन्तरालों की स्थिति में, परिमाण समझी जाती है पूर्ववर्त्ती या उत्तरवर्ती वर्ग अन्तराल के परिमाण की सांख्यिकीय विश्लेषण के उद्देश्य से।

टिप्पणी

उपयुक्त पथ प्रदर्शक या आधारभूत सिद्धान्त हमारी मदद करेगा, आवृत्ति वितरण निर्माण करने में।

इस तरह, संकलित वृहदाकार और विशाल अपरिष्कृत समंक सम्पादित और संगठित की जाती है समंक के वर्गीकरण की विधि में। समंक को प्रस्तुत किया जाता है तुरन्त समझने योग्य और संघनित रूप में, जो समंक के महत्त्वपूर्ण अभिलक्षणों को प्रकाशित करता है; यह सिर्फ वर्गीकरण की विधि से संभव है। **वर्गीकरण एक विधि है जिसमें अपरिष्कृत समंक संगठित की जाती है सुस्पष्ट रूप से परिभाषित विभिन्न अभिलक्षणों के अनुसार और एक क्रमबद्ध तरीके से वर्गीकृत, आगे के सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए।**

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. डाक से भेजी गई प्रश्नावली _________ स्रोत है।
   (क) प्राथमिक (ख) द्वितीयक
   (ग) मिश्रित (घ) इनमें से कोई नहीं
2. _________ समंक पहले ही संकलित होती है।
   (क) प्राथमिक (ख) द्वितीयक
   (ग) मिश्रित (घ) इनमें से कोई नहीं
3. _________ तकनीक अलिप्त करती है समष्टि के प्रत्येक अवयव का प्रगणन।
   (क) प्रत्यक्ष (ख) अप्रत्यक्ष
   (ग) जनगणना (घ) सादृच्छिक
4. प्रतिदर्श हिस्सा है _________ का।
   (क) प्राथमिक स्रोत का (ख) द्वितीयक स्रोत
   (ग) प्रश्नावली (घ) जनसंख्या
5. वर्गीकरण समंक को _________ क्रमबद्ध करने की विधि है।
   (क) अव्यवस्थित (ख) व्यवस्थित
   (ग) मिश्रित (घ) इनमें से कोई नहीं
6. सरल वर्गीकरण अलिप्त करती है सिर्फ _________ गुणधर्म।
   (क) असमान (ख) व्यवस्थिति
   (ग) समान (घ) मिश्रित
7. सारणीयन का अर्थ है समंक को स्तंभों और __________ में व्यवस्थापन।
   (क) पंक्तियों (ख) उदग्रो
   (क) मिश्रित (ख) रेखाओं

8. स्तंभों का शीर्षक कहलाती है एक __________।
   (क) सारणीयन (ख) सांख्यिकीय श्रेणी
   (ग) प्रतिचयन (घ) सारणी संख्या
9. पंक्तियों का शीर्षक बायीं तरफ कहलाता है एक __________।
   (क) अनुशीर्षक (ख) प्रतिचयन
   (ग) सारणीयन (घ) सारणी संख्या
10. समंक का तर्कपूर्ण व्यवस्थापन एक क्रम में कहलाता है एक __________।
   (क) सारणी (ख) अनुसूची
   (ग) तालिका (घ) गुच्छ प्रतिचयन
11. ऐतिहासिक श्रेणियाँ कहलाती हैं __________ श्रेणी।
   (क) समयबद्ध (ख) अनसूचक
   (ग) काल (घ) बारंबारता
12. भौगोलिक श्रेणियाँ कहलाती हैं __________ श्रेणी।
   (क) काल (ख) सारणी
   (ग) वर्गीकरण (घ) स्थानिक श्रेणी
13. वर्ग अन्तराल को __________ सीमाएं हैं।
   (क) दो (ख) एक
   (ग) तीन (घ) चार
14. दो तरह के वर्ग अन्तराल हैं __________ और __________।
   (क) विच्छिन्न, सतत (ख) क्रम बद्ध, आवृत्ति
   (ग) उच्च, निम्न (घ) इनमें से कोई नहीं
15. परिमाण का अर्थ है वर्ग अन्तराल की __________ सीमा और __________ सीमा के बीच अन्तर।
   (क) विच्छिन्न, सतत (ख) उच्च, निम्न
   (ग) कमबद्ध, आवृत्ति (घ) इनमें से कोई नहीं

2.14 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (क) 9. (क)
2. (ख) 10. (ग)
3. (ग) 11. (ग)

टिप्पणी

4. (घ)
5. (ख)
6. (ग)
7. (क)
8. (घ)
12. (घ)
13. (क)
14. (क)
15. (ख)

2.15 सारांश (Summary)

अपरिष्कृत आँकड़े, आँकड़ों को संकलन करने की विधि से उत्पन्न होते हैं। यह सभी सांख्यिकीय अन्वेषणों या अन्वेषण का प्रारंभिक चरण है।

दो मुख्य स्रोत हैं समंक को संकलत करने का – प्राथमिक और द्वितीयक स्रोत। पहली बार संकलित किए जाने वाले मौलिक आँकड़े प्राथमिक समंक कहलाते हैं। प्राथमिक समंक के स्रोत हैं– प्रत्यक्ष व्यक्रियत प्रेक्षण, अप्रत्यक्ष मौलिक साक्षत्कार, स्थानीय, एजेन्ट द्वारा सूचना, डाक प्रश्नावली विधि, संगणकों द्वारा अनुसूची। ऐसे समंक जो किसी दूसरे द्वारा संकलित की गई है और अन्वेषक द्वारा प्रयुक्त की जाती हैं द्वितीयक समंक कहलाती है। द्वितीयक समंक के स्रोत हैं– प्रकाशित, समंक जो सभी सरकारी प्रकाशन, राष्ट्रीय एवं अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाएं, व्यापारिक संघों और चैम्बर ऑफ कामर्स द्वारा प्रकाशित की जाती हैं। अप्रकाशित समंक जो निजी फर्म या व्यवसायिक प्रतिष्ठानों द्वारा भविष्य में उपयोग करने के लिए संकलित करते हैं।

समंक संकलित करने की दो विधियाँ हैं– जनगणना विधि और प्रतिदर्श विधि। इन तकनीकों का प्रयोग समंक संकलित करने के लिए सिर्फ प्राथमिक समंक संकलन में होती है। जनगणना विधि जनसंख्या के प्रत्येक व्यक्ति (मद) की संगणना को आवृत्त करता है जबकि प्रतिदर्श तकनीक जनसंख्या के एक हिस्सा या भाग का चुनाव प्रतिदर्श आमाप के रूप में प्रतिदर्श आधार पर चुने जाते हैं जो अध्ययनाधीन हैं।

सांख्यिकी संख्यात्मक समंक पर कार्य करता है। जनसंख्या विश्लेषण परिशुद्ध संख्यात्मक मान देता है जो प्राचल (Parameters) कहलाता है। प्रतिदर्श विश्लेषण सन्निकट संख्यात्मक मान देता है, जो प्रतिदर्शज (Statistics) कहलाता है। प्रतिचयन की दो विधियाँ हैं– यादृच्छिक और गैर-यादृच्छिक। प्रतिचयन विधि का चुनाव समष्टि की प्रकृति, प्रतिदर्श की इकाई प्रतिदर्श के आकार और अन्वेषण के उद्देश्य पर निर्भर करती है।

प्राथमिक समंक को संकलित करने के लिए एक प्रश्नावली को सतर्कतापूर्वक तैयार किया जाता है जिनमें पद-प्रदर्शक नियमों का दक्षता से अवलोकन किया जाता है।

एक वृहदाकार संकलित समंक को क्रम से सजाना आवश्यक होता है जिसको वर्गीकरण (Classification) कहा जाता है ताकि जटिल समंक सामान्य बन सके।

संकलित और वर्गीकृत समंक सारणी के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। सारणीयन (Tabulation) का अर्थ है समंक का सारणी के रूप में क्रमिक व्यवस्थापन, स्तंभों और पंक्तियों में।

सारणीयन का मुख्य उद्देश्य समंक को सारणी रूप में संक्षिप्त करना है जो आसानी से समझा और व्याख्या किया जा सके।

फिर श्रेणिबद्धता का संबंध समंक के एक खास क्रम में तर्कपूर्ण सूचीकरण या व्यवस्थापन से है। (समय या क्षेत्र या स्थिति के अनुसार)।

आवृति वितरण (Frequency Distribution) चर या (गुणधर्मों) का सारांश प्रस्तुतीकरण है जो उनके परिमाण के अनुसार या तो व्यक्तिगत रूप से या समूहों या वर्गों में व्यवस्थित किया जाता है।

सांख्यिकीय श्रेणी के आधार पर हम तीन प्रकार का आवृत्ति वितरण निर्मित कर सकते हैं–

(i) स्थिति श्रेणी– (a) विच्छिन्न श्रेणी, (b) वर्गीकृत श्रेणी, (c) सतत श्रेणी।

(ii) काल श्रेणी (iii) स्थानिक श्रेणी।

वर्ग अन्तराल– यह समंक के प्रत्येक समूह का आकार है जो निम्न सीमा से शुरू होता है और उच्च सीमा से खत्म होता है। इसलिए यह वर्ग है जो दो सीमाओं से निर्मित है।

2.16 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **प्रतिचयन**: Sampling
- **वर्गीकरण**: Classificaiton
- **सारणीयन**: Tabulation
- **क्रमबद्धता, श्रेणिबद्धता**: Sariation
- **यादृच्छिक प्रतिचयन**: Random Sampling
- **गैर-यादृच्छिक प्रतिचयन**: Non-Random Sampling
- **क्रमबद्ध प्रतिचयन**: Systematic Sampling
- **स्तरीकृत प्रतिचयन**: Stratified Sampling
- **गुच्छ प्रतिचयन**: Cluster Sampling
- **विच्छिन्न श्रेणी**: Discrete Series
- **सतत श्रेणी**: Continuous Series
- **आवृत्ति वितरण**: Frequency Distribution
- **विच्छिन्न आवृत्ति वितरण**: Discrete Frequency Distribution
- **वर्गीकृत आवृत्ति वितरण**: Grouped Frequency Distribution

टिप्पणी

- **सतत आवृत्ति वितरण:** Continuous Frequency Distribution
- **मिलान चिन्ह:** Tally Marks
- **खाली वर्ग अन्तराल:** Empty Class Interval
- **वर्ग सीमाएं:** Class Limits
- **वर्ग परिसीमाएं:** Class Boundaries
- **संचयी आवृत्ति:** Cumulative Frequency

2.17 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. समंक के किन्हीं चार प्राथमिक स्रोतों का नाम दें।
2. 'वर्गीकरण' को परिभाषित करें।
3. आप जनगणना से क्या समझते हैं?
4. प्रतिचयन विधि क्या है?
5. 'वर्ग अन्तराल' का अर्थ दें।
6. वर्गीकरण के क्या आधार हैं?
7. 'सांख्यिकीय श्रेणी' का अर्थ बताएं।
8. 'प्रश्नावली' क्या है?
9. पद 'अनुसूची' का वर्णन करें।
10. 'स्तरीकृत प्रतिचयन' क्या है?
11. 'गुच्छ प्रतिचयन' का अर्थ क्या है?
12. 'सारणीयन' से आप क्या समझते हैं?
13. पद का वर्णन करें 'अनुशीर्षक (Captions) और अवसूचक' (Stubs)
14. 'क्रमबद्धता' (Seriation) क्या है?
15. 'आवृत्ति या बारंबारता' (Frequency) का अर्थ दें।
16. एक वर्ग अन्तराल का परिमाण क्या है?
17. 'खुले सिरे वाली श्रेणियाँ' का अर्थ बतावें।
18. वर्ग-अन्तराल का मध्य-मान कैसे पाया जा सकता है?
19. 'संचयी आवृत्ति' (Cumulative Frequency) क्या है?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. प्राथमिक स्रोत क्या हैं? 'प्रत्यक्ष व्यक्तिगत प्रेक्षण' विधि का संक्षेप में वर्णन करें।
2. कैसे सूचनाएँ स्थानीय एजेंट के द्वारा संकलित की जाती हैं? समंक संकलित करने की अनुसूची विधि बताएं।
3. क्या अन्तर है समंक संकलित करने का 'जनगणना' विधि और प्रतिचयन विधि के बीच।
4. 'प्रतिदर्श प्रतिचयन' की विधियाँ क्या हैं? एक टिप्पणी लिखें 'गैर-प्रतिदर्श प्रतिचयन' पर।
5. एक अच्छे 'प्रश्नावली' की क्या वांछितताएं हैं?
6. वर्गीकरण का महत्व बताएं। वर्गीकरण के विभिन्न आधारों का संक्षेप में वर्णन करें।
7. तालिका के विभिन्न भाग क्या हैं? समंक के सारणीयन का महत्व बतलाएं।
8. क्रमबद्धता (Seriation) क्या है? विभिन्न प्रकार की श्रेणियों का संक्षेप में वर्णन करें।
9. एक आवृत्ति वितरण क्या है? 'विच्छिन्न और सतत' श्रेणी के बीच अन्तर बताएं।
10. 1995 में, (Visitors) की कुल संख्या 250 है। उनमें पुरुष पर्यटक विदेश के 65 हैं और भारत के 86 हैं। कुल 35 विदेशी महिला पर्यटक हैं। 1996 में, पर्यटकों की कुल संख्या 20% से बढ़ गई और भारतीय पर्यटकों की 10% से। उनमें 80 पुरुष विदेशी पर्यटक हैं और 60 महिला भारतीय पर्यटक। उपर्युक्त सूचना को तालिकाबद्ध करें।
11. 1995 में, होटल में आने वाले कुल ग्राहकों में 75 सामिष हैं और 126 निरामिष। कुल में 55 पुरुष सामिष ग्राहक हैं और 30 महिला निरामिष ग्राहक। 1996 में, कुल ग्राहकों की संख्या में 25% की वृद्धि हुई, सामिष ग्राहकों में 20% की वृद्धि हुई। कुल 170 पुरुष ग्राहक हैं और उनमें 65 सामिष हैं। इस सूचना को तालिका रूप में प्रस्तुत करें।
12. एक गाँव में 48 परिवार के साक्षात्कार में, प्रति परिवार बच्चे का आलेखन हुआ और निम्नलिखित समंक प्राप्त हुआ। आवृत्ति वितरण तैयार करें।

1,	0,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	2,	3,	4,	0
2,	5,	8,	4,	5,	12,	6,	3,	2,	7,	6,	5
3,	3,	7,	8,	9,	7,	9,	4,	5,	4,	3,	11
9,	6,	8,	3,	4,	9,	5,	3,	2,	8,	5,	2

टिप्पणी

2.18 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. सांख्यिकी के सिद्धान्त – डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस – किताब का महल
2. सांख्यिकी के सिद्धान्त – एस.पी. सिंह – S. Chand & Co.
3. Fundamentals of Statistics – S.C. Gupta & V.K. Kapoor – S. Chand & Co.
4. Applied Statistics – S.C. Gupta & V.K. Kapoor – S. Chand & Co.
5. Fundamentals of Statistics – G.M. Gupta & Das Gupta – S. Chand & Co.
6. Mathematical Statistics – H.C. Saxena – S. Chand & Co.

इकाई–2

टिप्पणी

अध्याय 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (Measures of Central Tendency)

संरचना (Structure)

3.0 परिचय (Introduction)

एक 'औसत' एक अंक है जो अवलोकनों की बड़ी संख्या को संक्षिप्त या एकल संख्यात्मक अंक में प्रदर्शित करती है। यह एक प्रारूपिक आकार है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति को वर्णित करती है। यह एक प्रतिनिधि मूल्य है जिसके चारों ओर चर के सभी मूल्य एकत्रित या संघनित रहते हैं।

'केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप' या 'केन्द्रीय स्थान की माप' या 'प्रथम क्रम का औसत बड़ी संख्याओं के केन्द्रीय प्रवृत्ति के चारों ओर पर्याप्त संघनन को वर्णित करता है। यह एकल मूल्य है जो सभी मदों को प्रदर्शित करता है। यह एकल सरल अभिव्यक्ति है जिसमें एक जटिल समूह या बहुत संख्याओं का परिणाम संघनित होता है।

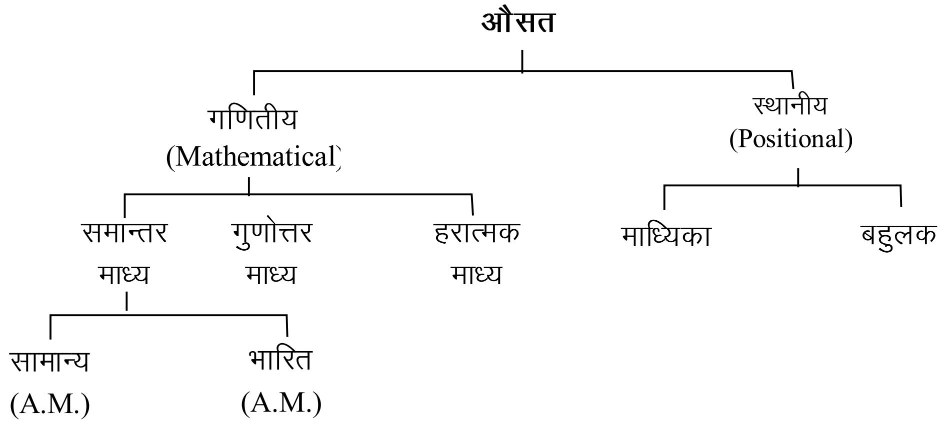
इस तरह एक औसत एक श्रेणी की सभी अनियमितताओं को दूर करता है, व्यक्तिगत मदों के सभी भिन्नताओं को दूर करता है और जटिल समंक को थोड़े सार्थक अंकों में अभिव्यक्त करता है।

टिप्पणी

सामान्य तौर पर, पाँच प्रकार के सांख्यिकीय औसत हैं जो व्यवहार में प्रयुक्त होते हैं। वे हैं–

(i) समान्तर माध्य (Arithmetic Mean), (ii) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean), (iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean), (iv) माध्यिका (Median), (v) बहुलक (Mode.)

निम्नलिखित चार्ट औसतों का विस्तृत वर्गीकरण दर्शाता है–



3.1 उद्देश्य (Objectives)

सांख्यिकीय विश्लेषण का एक महत्वपूर्ण उद्देश्य विभिन्न संख्यात्मक मापों को निर्धारित करना है जो आवृत्ति वितरण के अन्तर्निहित विशेषता का वर्णन करना है। केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप के तौर पर औसत ऐसे माप हैं जो संख्यात्मक समंक के विशाल भारी–भरकम समुच्चय को संघनित कर एक अकेला संख्यात्मक माप देते हैं जो सम्पूर्ण वितरण के द्योतक होते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के अन्तर्गत– औसत, माध्य, मध्यमान, गुणोत्तर माध्य और बहुलक आते हैं।

केन्द्रीय प्रावृत्ति ऐसे प्रतीकात्मक मान होते हैं जिनके चारों ओर वितरण के दूसरे मान इकट्ठे रहते हैं। वे ऐसे मान हैं जो वितरण के दो आत्यंतिक अवलोकनों के बीच पड़ते हैं और वितरण के मध्य भाग में मूल्यों के संघनन के बारे में विचार देते हैं। औसत बहुत उपयोगी होते है–

(i) वितरण को संक्षिप्त रूप में वर्णन करने के लिए।

(ii) विभिन्न वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए।

(iii) विभिन्न दूसरे सांख्यिकीय मापों की गणना करने के लिए, जैसे– विचलन, विषमता, ककुदता इत्यादि।

माध्यों (औसतों) के कभी-कभी स्थान निर्धारण का माप भी कहते हैं। वे हमें प्रश्नानुसार वितरण के स्थान या जगह को निर्धारित करने में समर्थ बनाता है।

3.2 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

टिप्पणी

समान्तर माध्य सबसे ज्यादा प्रयुक्त माप है जो सम्पूर्ण समंक का प्रतिनिधित्व करती है। सामान्यतया एक आम आदमी के लिए यह औसत या माध्य कही जाती है। यह परिमाण है जो एक चर के मदों के मूल्य के योगफल को उनकी संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है। यह x से निर्देशित किया जाता है। समान्तर माध्य हो सकती है या तो– (i) सरल समान्तर माध्य या (ii) भारित समान्तर माध्य।

सरल समान्तर माध्य भागफल है मूल्यों के योगफल को उनकी संख्या के भाग देने से प्राप्त। भारित समान्तर माध्य औसत है जिसमें मद उनके भारों से गुणा की जाती है जो उन्हें आबंटित है उनके महत्व के अनुसार। इसका अर्थ है, सरल समान्तर माध्य में, सभी मद बराबर समझी जाती है, सभी मदों पर सिर्फ एक बार विचार किया जाता है। भारित समान्तर माध्य में प्रत्येक मद भिन्न तरह से व्यवहृत होता है उन्हें भिन्न भार देकर।

एक ग्रीक संकेत 'Σ' सिगमा प्रयुक्त होती है योगफल संकेतन के लिए 'x' चर का मूल्य है और 'n' मदों या अवलोकनों की संख्या है। 'f' आवृत्ति के लिए आता है–

(i) सरल समान्तर माध्य (Simple Arithmetic Mean)– जैसा ऊपर वर्णित किया गया है, सरल समान्तर माध्य भागफल है जो मूल्यों के योगफल को मदों की संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

बीजगणितीय रूप में हमें सूत्र निम्न जैसा है–

(a) व्यक्तिगत अवलोकनों के लिए

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ------- + x_n}{n} = \frac{\Sigma x}{n}$$

(b) विच्छिन्न और सतत श्रेणियों के लिए

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + ------- + f_n x_n}{n} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$$

(**नोट**: सतत श्रेणी में x वर्ग अन्तराल का मध्य–मान है।)

Σx के मूल्य को सुनिश्चित करने के लिए, चर 'x' के सभी मूल्यों को एक साथ जोड़ा जाता है। 'x' के मूल्य को सुनिश्चित करने के लिए, सभी मदों की संख्या को जोड़ा जाता है। $\bar{x}$ को सुनिश्चित करने के लिए, Σx को 'n' से भाग दिया जाता है।

यदि मदों की संख्या बड़ी है और चर का मूल्य आकार में बड़ी है, एक छोटी विधि $\bar{x}$ को प्रगणित करने की अपनाई जाती है। यह विधि समान्तर माध्य के निम्नलिखित गुण पर आधारित है। **"चर के मूल्यों के विचलन का बीजगणितीय योग उनके माध्य से हमेशा शून्य के बराबर है।**

टिप्पणी

हम मान लें एक अन्तर का अंक 'A' (सामान्यतया पूर्णांक या पूर्ण संख्या), एक काल्पनिक माध्य जैसा। चल के मूल्यों के विचलन लें काल्पनिक माध्य से 'd' से द्योतित। इन विचलनों का योग Σd प्राप्त करें। इन संकेतों के मूल्य का स्थानापन्न लघु सूत्र में निम्न जैसा करें,

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n} \text{----------} \text{व्यक्तिगत अवलोकनों के लिए}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} \text{---------} \text{विच्छिन्न और सतत श्रेणियों के लिए}$$

नोटः 'fd' आवृत्ति और विचलन का गुणन है।

'पद विचलन' (Step deviation) विधि सिर्फ लघु विधि में अतिरिक्त समायोजन है। इस विधि के अधीन, विचलनों को एकल उभयनिष्ठ कारक से भाग दिया जाता है अंकों को न्यूनतम आकार तक परिणत करने के लिए। यह एक तरह से, जानबूझकर की गई त्रुटि है और यह समायोजित की जाती है भागफल को गुणा करके। 'd' का घटा या समायोजित मूल्य अब 'd' कही जाती है इसलिए सूत्र निम्न जैसा होता है,

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d'}{n} \times c \text{---------} \text{व्यक्तिगत अवलोकन के लिए}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c \text{---------} \text{विच्छिन्न और सतत श्रेणियों के लिए।}$$

(**नोटः** उभयनिष्ठ कारक या वर्ग अन्तराल का विस्तार 'c' का प्रयोग होता है भाग देने और गुणा करने के लिए।)

मान लें, हमें एक कक्षा के 7 छात्रों के अंक हैं 131, 150, 96, 114, 125, 142, 103।

लघु विधि

अंक (x)	प्रत्यक्ष विधि	अंक (x)	d (x-A)
131		96	–24
150	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	103	–17
96		114	–6
114	$= \frac{861}{7}$	125	+5
125		131	+11
142	= 123	142	+22
103		150	+30
$\Sigma = 861$			+ 68
$n = 7$			– 47
			$\Sigma d = 21$

लघु विधि

$A =$ काल्पनिक माध्य $= 120$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= 120 + \frac{21}{7}$$

$$= 120 + 3 = 123$$

उदाहरण 3.1: 50 छात्रों की कक्षा में, 10 फेल कर गए हैं और उनका औसत अंक 2.5 है। पूरी कक्षा द्वारा कुल अंक 281 प्राप्त किए गए। उन लोगों का औसत अंक प्राप्त करें जो उत्तीर्ण हुए हैं।

हलः

(a) 50 छात्रों का कुल अंक	(b) 10 छात्रों का कुल अंक जो फेल कर गए	(c) 40 छात्रों का कुल अंक जो पास किए
$\Sigma x_{50} = 281$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\Sigma x_{50} - \Sigma x_{10} = \Sigma x_{40}$
(दिया गया है)	$2.5 = \frac{\Sigma x}{10}$	$281 - 25 = 256$
	$\Sigma x_{10} = 25$	

इसलिए, उत्तीर्ण छात्रों का औसत अंक है

$$\bar{x}_{100} = \frac{\Sigma x_{40}}{n} = \frac{256}{40} = 6.4$$

उदाहरण 3.2: 100 लोगों की औसत उम्र 30 वर्ष है। अगर पुरुषों के समूह की औसत उम्र 32 वर्ष है और महिलाओं के समूह की 27 वर्ष, पुरुषों और महिलाओं की संख्या निकालें।

हलः हम पुरुषों की संख्या 'M' मानें और महिलाओं की 'W'। हमें निम्नलिखित दो समीकरण मिल सकते हैं–

(a) $M + W = 100$----------यह दिया गया है।

(b) (i) पुरुषों की कुल आयु

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$32 = \frac{\Sigma x}{M}$$

$$\Sigma x = 32M$$

(ii) महिलाओं की कुल उम्र

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$27 = \frac{\Sigma x}{W}$$

$$\Sigma x = 27W$$

टिप्पणी

(iii) पुरुषों और महिलाओं की कुल आयु

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ इसलिए

$30 = \frac{\Sigma x}{100}$ $32M + 27W = 3{,}000$

$\Sigma x = 3{,}000$

युगपत समीकरणों का प्रयोग कर–

(a) $M + W = 100$ (a) को 32 से गुणा करने पर W के मूल्य को (a) में प्रतिस्थापित कर

(b) $32M + 27W = 3{,}000$ $M + W = 100$

$[(a) \times 32]$-------$32M + 32W = 3200$ $M + 40 = 100$

$\underline{-32M \pm 27W = 3000}$ $M = 100 - 40$

$5W = 200$

$W = 40$ $M = 60$

इसलिए, पुरुषों की संख्या 60 है और महिलाओं की संख्या 40 है।

उदाहरण 3.3: 50 छात्रों की औसत ऊँचाई 5′8″ है। 10 छात्रों की ऊँचाई नीचे दी गई है–

5′-6″, 5′-2″, 5′-4″, 5′-0″, 4′-10″, 4′-8″, 6′-2″, 5′-8″, 5′-9″, 5′-3″

बाकी बचे छात्रों की औसत ऊँचाई निकालें।

हलः सभी ऊँचाईयाँ ईंचों में परिवर्तित की जाती हैं चूँकि ईंच मेट्रिक पद्धति में नहीं है–

(a) 50 छात्रों की कुल ऊँचाई है।

$5'\text{-}8'' = 68'' = \frac{\Sigma x}{50}$

$\Sigma x_{50} = 3{,}400''$

(b) 10 छात्रों की ऊँचाई दी गई है।

x		**ईंच में परिवर्तन**	x		**ईंच में परिवर्तन**
5'-6"	....	66"	4'-8"	....	56"
5'-2"	....	62"	6'-2"	....	74"
5'-4"	....	64"	5'-8"	....	68"
5'-0"	....	50"	5'-9"	....	69"
4'-10"	....	58"	5'-3"	....	63"
					$\Sigma x_{10} = 640''$

टिप्पणी

(c) बाकी बचे 40 छात्रों की कुल ऊँचाई ज्ञात करने के लिए हमें निम्न जैसा प्रगणित करना है–

$$\Sigma x_{50} = 3{,}400''$$
$$\Sigma x_{10} = 640''$$
$$\Sigma x_{40} = 2{,}760''$$

69" = 5'-9" औसत ऊँचाई है 40 छात्रों की।

उदाहरण 3.4: 100 छात्र एक परीक्षा में शामिल हुए। जो अनुत्तीर्ण हुए उनका परिणाम नीचे दिया गया है।

अंकः	5	10	15	20	25	30
छात्रों की संख्याः	4	6	8	7	3	2

अगर सभी छात्रों का औसत अंक 68.6 है, औसत अंक निकालें उन छात्रों का जो उत्तीर्ण हुए हैं।

हलः

अंक	**छात्रों की संख्या**	
(x)	(f)	fx
5	4	20
10	6	60
15	8	120
20	7	140

अंक	छात्रों की संख्या	
(x)	(f)	fx
25	3	75
30	2	60
	$n = 30$	$\Sigma fx = 475$

(i) 100 छात्रों की कुल संख्या

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$68.6 = \frac{\Sigma fx}{100}$$

$$\Sigma fx_{100} = 6{,}860$$

(ii) 300 छात्रों की कुल संख्या (अनुत्तीर्ण)

$$\Sigma fx_{30} = 475$$

इसलिए, 100 छात्रों का कुल अंक................6,860

30 अनुत्तीर्ण छात्रों का कुल अंक.................475

70 छात्रों (उत्तीर्ण) का कुल अंक.................6,385 = Σfx_{70}

टिप्पणी

$\therefore$ औसत (उत्तीर्ण छात्रों का) $= \dfrac{6,385}{70} = 91.21\%$

उदाहरण 3.5: निम्नलिखित समंक से छूटे हुए मूल्य को परिकलित करें जब माध्य 115.86 है।

वेतन (रु. में):	110	112	113	117	(?)	125	128	130
कामगारों की संख्या:	25	17	13	15	14	8	6	2

हल: हम छूटे मूल्य को 'A' मान लें।

वेतन रु. में (x)	कामगारों की संख्या (f)	$f(x)$
110	25	2,750
112	17	1,904
113	13	1,469
117	15	1,755
(A)	14	$(14A)$
125	8	1,000
128	6	768
130	2	260
	$n = 100$	$\Sigma fx = 9,906 + 14A$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$115.86 = \frac{9,906 + 14A}{100}$$

$$9,906 + 14A = 11,586$$

$$14A = 11,586 - 9,906$$

$$14A = 1,680$$

$$A = \frac{1,680}{14} = 120$$

इसलिए छूटा हुआ मूल्य 120 है।

उदाहरण 3.6: निम्नलिखित वितरण से छूटी हुई आवृत्ति निकालें अगर इसका माध्य 15.25 है।

x:	10	12	14	16	18	20
f:	3	7	(?)	20	8	5

टिप्पणी

हलः मान लें छूटी आवृत्ति 'A' है।

x	f	fx
10	3	30
12	7	84
14	(A)	(14A)
16	20	320
18	8	144
20	5	100
	n = 43 + A	Σ fx = 678 + 14A

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$15.25 = \frac{678 + 14A}{43 + A}$$

$$(43 + A)15.25 = 678 + 14A$$

$$655.75 + 15.25A = 678 + 14$$

$$1.25A = 678 - 655.75$$

$$1.25A = 22.25$$

$$A = \frac{22.25}{1.25} = 17.8$$

इसलिए, छूटी आवृत्ति $= 17.8 \approx 18$

उदाहरण 3.7: शहर में, 30 सदस्यों का सर्वेक्षण किया गया कि कितने घरेलू उपकरण उन्होंने खरीदें हैं, प्रत्युत्तर निम्न थे–

1, 2, 5, 1, 5, 2, 1, 4, 2, 3, 4, 2, 4, 3, 2
6, 3, 2, 4, 3, 6, 2, 2, 3, 3, 7, 2, 3, 0, 2

विच्छिन्न श्रेणी तैयार करें और माध्य ज्ञात करें।

हलः

मूल्य x	**मिलान बार**	**आवृत्तियाँ** (f)	fx
0	|	1	0
1	|||	3	3
2	𝍸 𝍸	10	20
3	𝍸 ||	7	21
4	||||	4	16
5	||	2	10
6	||	2	12
7	|	1	7
		$n = 30$	$\Sigma fx = 89$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{89}{30}$$

$$\bar{x} = 2.9667$$

टिप्पणी

उदाहरण 3.8: अगर 25 कामगारों को भुगतान की गई मजदूरी 79.60 रु. है, छूटी हुई आवृत्तियाँ ज्ञात करें।

मजदूरी (रु.):	50	60	70	80	90	100	110
कामगारों की संख्या:	1	3	–	–	6	2	1

हल: मान लें छूटी हुई आवृत्तियाँ A और B हैं। कुल आवृत्तियाँ 25 हैं। इसलिए $1 + 3 + A + B + 6 + 2 + 1 = 25, A + B = 25 - 13 = 12$

$\therefore A + B = 12 \qquad B = 12 - A$

मजदूरी (रु.)	**कामगारों की संख्या**	
x	(f)	fx
50	1	50
60	3	180
70	(A)	$(70A)$
80	$(12\text{-}A)$	$(960\text{-}80A)$
90	6	540
100	2	200
110	1	110
	$n = 25$	$\Sigma fx = 2{,}040 - 10A$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$79.60 = \frac{2040 + 10A}{25}$$

$$1990 = 2040 - 10A$$

$$10A = 2040 - 1990$$

$$10A = 50$$

$$A = 5$$

'A' का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर............$A + B = 12$

$$A + B = 12$$

$$5 + B = 12$$

$$B = 12 - 5$$

$$B = 7$$

इसलिए छूटी हुई आवृत्तियाँ हैं $A = 5, B = 7$

उदाहरण 3.9: निम्नलिखित वितरण से औसत अंक परिकलित करें।

अंक:	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
छात्रों की संख्या:	2	4	5	3	2	4	5

टिप्पणी

हलः

अंक C.I.	छात्रों की संख्या (f)	मध्य–मान (x)	(x-A)/5 d'	fd'
0-5	2	2.5	–3	–6
5-10	4	7.5	–2	–8
10-15	5	12.5	–1	–5
15-20	3	17.5	0	0
20-25	2	22.5	+1	+2
25-30	4	27.5	+2	+8
30-35	5	32.5	+3	+15
				+25
				–19
				$\Sigma fd' = 6$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 17.5 + \frac{6}{25} \times 5$$

$$= 17.5 + \frac{30}{25} = 17.5 + 1.2 = 18.7$$

$\therefore$ औसत मजदूरी है 18.70 रु.

नोटः 1. पद विचलन रीति प्रयुक्त हुई है।

2. परिकल्पित माध्य है 17.5।

3. उभयनिष्ठ कारक है 5।

उदाहरण 3.10: आपको निम्नलिखित अपूर्ण सूचना दी गई है और इसका माध्य है 25। छूटी आवृत्तियाँ ज्ञात करें।

वर्ग अन्तरालः	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	कुल
आवृत्तियों की संख्याः	5	–	15	–	5	= 45

हलः मान लें छूटी आवृत्तियाँ 'A' और 'B' हैं। कुल आवृत्ति 45 है।

इसलिए, $5 + A + 15 + B + 5 = 45$ $\quad$ $A + B = 45 - 25 = 20$

$\therefore A + B = 20$ $\quad$ $B = 20 - A$

टिप्पणी

C.I.	f	MV_x	f_x	$\bar{x} = \frac{1325 - 20A}{45}$
0-10	S	5	25	1125 = 1,325-20A
10-20	(A)	15	(15A)	20A = 1,325-1,125
20-30	15	25	375	20A = 200
30-40	(20-A)	35	(700-35A)	A = 10
40-50	5	45	225	
	$n = 45$		Σfx = 1,325-20A	

A का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर ....$A + B = 20$

$$10 + B = 20$$

$$B = 20 - 10$$

$$B = 10$$

$\therefore$ छूटी आवृत्तियाँ हैं $A = 10$ और $B = 10$

उदाहरण 3.11: निम्नलिखित सूचना को आवृत्ति वितरण में व्यवस्थित करें और समान्तर माध्य प्राप्त करें वेतन का विस्तार परिकल्पित करें 0 से 500 रु.।

एक वेतन पाने वाले के समूह के लिए, वेतन पाने वालों का 20%, 40%, 70%, 80% पाते हैं वेतन क्रमशः रु. 50, 120, 300 और 350 से कम और 5% पाते हैं 400 रु. और ऊपर।

हलः हम लोग तालिका तैयार करें 'से कम' आवृत्ति दर्शाते हुए, आवृत्तियाँ और बची हुई आवृत्ति

वेतन रु.	**कामगारों की संख्या**	**वर्ग अन्तराल में परिवर्तन**	f	**मध्यमान** x	fx
50 'से कम'	20%	0-50	20	25	500
120 से कम	40%	50-120	20	85	1,700
300 से कम	70%	120-300	30	210	6,300
350 से कम	80%	300-350	10	325	3,250
400 से कम	*95%	350-400	15	375	5,625
500 से कम	100%	400-500	5	450	2,250
			$n = 100$		$\Sigma fx = 19,625$

टिप्पणी

1. दी गई सूचना निम्न है–
   (a) विस्तार है 0-500
   (b) 350 से कम है 80% और 400 से ज्यादा है 5%
2. * प्राप्त की गई सूचना–
   (a) 400 से कम हैं 95% और = 196.25
   (b) 500 से कम हैं 100%
3. सारणी से प्राप्त परिणाम माध्य वेतन $=\frac{\Sigma fx}{n}=\frac{19.625}{100}=196.25$ रु.

उदाहरण 3.12: निम्नलिखित समंक के लिए माध्य ज्ञात करें।

वर्ग अन्तरालः	50-59	40-49	30-39	20-29	10-19	0-9
आवृत्तिः	1	3	8	10	15	3

हलः यह आवश्यक नहीं है समंक को बहिर्वेशी वर्ग अन्तराल श्रेणी में परिवर्तित करना। हमारे लिए यह भी आवश्यक नहीं कि उन्हें हम चढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें। मान लें हमें परिकल्पित माध्य है 34.5।

वर्ग अन्तराल	*f*	*MV* *x*	*x-A*/10 = *d*	*fd'*
50-59	1	54.5	+2	+2
40-49	3	44.5	+1	+3
30-39	8	34.5	0	0
20-29	10	24.5	-1	–10
10-19	15	14.5	-2	–30
0-09	3	4.5	-3	–9
	$n = 40$			–49
				+5
				$fd' = -44$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 34.5 + \frac{-44}{40} \times 10$$

$$= 34.5 - 11$$

$$= 23.5$$

उदाहरण 3.13: निम्नलिखित समंक से छूटी आवृत्तियाँ ज्ञात करें अगर इसका माध्य है 67.45।

ऊँचाई (ईंच में):	60-62	63-65	66-68	69-71	71-74	कुल
छात्रों की संख्याः	5	18	–	–	8	= 100

टिप्पणी

हल: हम मान लें कल्पित आवृत्तियाँ हैं A और B।

वर्ग अन्तराल	मध्यमान f	x	fx
60-62	5	61	305
63-65	18	64	1152
66-68	A	67	$(67A)$
69-71	B	70	$(70B)$
72-74	8	73	584
	$n = 100$		$\Sigma fx = 2041 + 67A+70B$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$67.45 = \frac{2{,}041 + 67A + 70B}{100}$$

$$6{,}745 = 2{,}041 + 67A + 70B$$

$$67A + 70B = 6{,}745 - 2{,}041$$

$$67A + 70B = 4{,}704$$

हमें दो समीकरण हैं युगपत समीकरणों का प्रयोग कर–

(a) $A + B = 69$---------(70 से गुणा करें) $70A + 70B = 4{,}830$

(b) $67A + 70B = 4{,}704$ $\qquad = 67A \pm 70B = 4{,}704$

$$3A = 126$$

$$A = 42$$

A के मूल्य को (a) में प्रतिस्थापित करने पर

$A + B = 69$---------$42 + B = 69$----------$B = 69 - 42 = 27$

(ii) भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)– सरल समान्तर माध्य प्रगणित करने में, यह परिकल्पित किया जाता है कि सभी मद बराबर महत्व के हैं। ऐसी स्थिति हमेशा नहीं भी हो सकती है। जब मद महत्व में विविध होते हैं उन्हें कुछ भार नियत किया जाना चाहिए उनके महत्व के समानुपात में। प्रत्येक मद का मूल्य तब इसके भार से गुणित की जाती है। गुणनफल जोड़ी जाती है और भारों की संख्या से विभाजित की जाती है, मदों की संख्या से नहीं। भागफल भारित समान्तर माध्य या औसत है। सूत्र से,

$$\bar{x}_w = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} \text{--------} WX = X \times W$$

$W =$ भार (Weight)

'भार' संख्या या प्रतिशत हैं जो मद के आपेक्षिक महत्व को निरूपित करती हैं। ऐसा आपेक्षिक महत्व वास्तविक या प्राक्कलित हो सकती है, या वास्तविक या सन्निकट की हुई। ये भार सभी मद को नियत की जाती है निम्नलिखित परिस्थितियों में–

(i) जब श्रेणी के परिणाम का तुलनात्मक अध्ययन किया जाता है।

(ii) जब प्रगणन अनुपातों या प्रतिशतों को समाविष्ट करती है, i.e., मृत्यु दर और जन्म दर।

(iii) जब हम सूचकांकों को प्रगणित करते हैं जिसमें आवश्यक सामानों की कीमतें अलिप्त रहती हैं जिनमें प्रत्येक का अलग महत्व होता है।

इस तरह एक विचर का भार संख्यात्मक गुणक है जो इसके आपेक्षिक महत्व को दर्शाने के लिए निर्धारित की जाती है।

उदाहरण 3.14: एक उद्योग द्वारा कोयले के खरीद की सरल और भारित औसत मूल्य परिकलित करें आधे–वर्ष के लिए और दोनों के बीच के अन्तर का लेखा।

महीनाः	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
कीमत प्रति टन (रु.):	42.50	51.25	50.00	52.00	44.25	54.00
खरीदा गया (टन में):	25	30	40	50	10	45

हलः (A) सरल समान्तर औसत कीमत खरीदे गए कोयले का प्रगणित किया जाएगा (बगैर भारों के) निम्न जैसा–

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{42.50 + 51.25 + 50.00 + 52.00 + 44.25 + 54}{6}$$

$$= \frac{294}{6} = 49 \text{ रु. प्रति टन}$$

(B) खरीदे गए कोयले का भारित समान्तर औसत प्रगणित की जाएगी खरीदे गए टन को भार मानकर निम्न जैसा,

कीमत प्रति टन (रु.) (x)	खरीदा गया (टन में) (w)	wx
42.50	25	1,062.50
51.25	30	1,537.50
50.00	40	2,000.00
52.00	50	2,600.00
44.25	10	442.50
54.00	45	2,430.00
	$\Sigma W = 200$	ΣWX =10,072.50

$$\bar{x} = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$= \frac{10,072.50}{200}$$

$$= 50.3625 \text{ रु.}$$

सरल समान्तर माध्य और भारित समान्तर माध्य के बीच अन्तर है 50.3625 – 49 = 1.3625

टिप्पणी

उदाहरण 3.15: एक संवेदक तीन प्रकार के मजदूरों पुरुषों, महिलाओं और बच्चों को काम पर रखता है। संवेदक पुरुष मजदूर को 30 रु., महिला मजदूर को 20 रु. और बच्चा मजदूर को 10 रु. मजदूरी देता है। संवेदक द्वारा औसत मजदूरी क्या भुगतान की गई?

हलः उदाहरण में मजदूर पुरुषों की संख्या, मजदूर महिलाओं की संख्या और मजदूर बच्चों की संख्या नहीं दी गई है। इसलिए हम लोग यादृच्छिक भार या संख्या ले सकते हैं क्रमशः 20, 15 और 5–

(A) सरल समान्तर माध्य है–

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{30+20+10}{3} = 20 \text{ रु. प्रतिदिन}$$

(B) भारित समान्तर माध्य है।

मजदूरी प्रति दिन (रु.) X	W	मजदूरों की संख्या WX
30	20	600
20	15	300
10	5	50
	$\Sigma W = 40$	$\Sigma WX = 950$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{950}{40} = 23.75 \text{ रु. प्रतिदिन}$$

उदाहरण 3.16: निम्नलिखित तालिका दो परीक्षार्थियों का अंक देती है।

विषय	भार	अंक X के	अंक Y के
A	1	70	80
B	2	65	64
C	3	58	56
D	4	63	60

प्रत्येक परीक्षार्थी का औसत भारित माध्य ज्ञात करें। किस संख्या से दूसरे परीक्षार्थी को विषय '*B*' में अपने अंक बढ़ाने चाहिए, बाकी सभी अंक पहले के समान हों, ताकि दोनों परीक्षार्थियों को समान स्थान मिले?

हलः

विषय	भार (W)	अंक		WX	WY
		X के	Y के		
A	1	70	80	70	80
B	2	65	64	130	128
C	3	58	56	174	168
D	4	63	60	252	240
	$\Sigma W = 10$			$\Sigma WX = 636$	$\Sigma WY = 616$

X का औसत अंक है $\bar{x}_w = \dfrac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \dfrac{626}{10} = 62.6$

Y का औसत अंक $\bar{y}_w = \dfrac{\Sigma WY}{\Sigma W} = \dfrac{616}{10} = 61.6$

जैसे, Y ने 10 अंक कम पाया है (i.e., 626-616) कुल अंकों में, वह इस अंक को विषय B में बढ़ा सकता है जहाँ भार 2 है। इसलिए 10/2 अंक होंगे जो उसे विषय B में लाने हैं (i.e., 5 अंक) ताकि वह बराबर हो जाए x के कुल अंक के।

इस तरह Y के अंक अब हैं,

Y के अंक $= (80 \times 1) + (64 + 5^*)\, 2 + (56 \times 3) + (60 \times 4)$

$= 80 + 138 + 168 + 240 = 626$

समान्तर माध्य के बीजगणितीय गुण (Algebraic Properties of Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य के कई गुण हैं जिनमें कुछ निम्न हैं–

(1) मदों के विचलनों के योग समान्तर माध्य से हमेशा शून्य है, i.e., $\Sigma(x - \bar{x})$ या $\Sigma d = 0$

(2) मदों के विचलनों के वर्गों का योग समान्तर माध्य से निम्नतम या सबसे कम है

i.e., $\Sigma(x - x)^2$ or, $\Sigma d^2 =$ निम्नतम

(3) अगर समान्तर माध्य और दो या दो से अधिक संबंधित समूहों के मदों की संख्या ज्ञात हैं, तब उनका संयुक्त माध्य प्रगणित किया जा सकता है

संयुक्त माध्य-------- $\bar{x} = \dfrac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2 + - - - + N_n\bar{X}_n}{N_1 + N_2 + - - - N_n}$

टिप्पणी

(a) समान्तर माध्य के गुण (Merits of Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य समान्य तौर पर सभी लोगों द्वारा प्रयुक्त की जाती है और इसके निम्नलिखित लाभ हैं–

(1) यह समझने में सरल और प्रगणन में आसान है।

(2) यह शुद्ध-शुद्ध प्रगणित की जाती है और अंक सुनिश्चित होते हैं और उपयुक्त होते हैं आगे की गणितीय विवेचना के लिए।

(3) यह आवश्यक नहीं कि मूल्यों को क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित किया जाए।

(4) यह केन्द्र का घनत्व है जो मूल्यों को दोनों तरफ संतुलित करता है।

(b) समान्तर माध्य के दोष (Demerits of Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य निम्नलिखित सीमाओं से ग्रसित है–

(1) आत्यंतिक मद औसत को गैर-समानुपाती ढंग से प्रभावित करती है।

(2) यह चर के दिए मूल्यों में से एक मद नहीं भी हो सकती है। यह भिन्नात्मक अंक भी दे सकती है (लोग या जानवर या मशीन) जो उपयुक्त नहीं है।

(3) यह गलत प्रभाव भी दे सकती है, अगर उचित भार प्रदान नहीं किए गए हैं।

(4) खुले वर्ग अन्तराल की स्थिति में, परिकल्पनाओं से मध्य-बिंदुएं प्राप्त की जाती हैं, जो गलत हो सकती हैं।

सीमितताओं के बावजूद समान्तर माध्य को काफी स्थिर औसत मानी जाती हैं और यह आर्थिक और व्यवसायिक सांख्यिकी में समंक के विश्लेषण में उपयोगी है। उत्पादन, खपत, बिक्री और कीमतों के समंक का औसत निकालने में एक कालावधि में।

3.3 माध्यिका (Median)

'माध्यिका' श्रेणी में उस पद का मूल्य है जो कुल क्रमबद्ध मदों को दो बराबर भागों में बाँटती है, एक भाग जिसमें सभी मूल्य इससे कम होते हैं और दूसरा भाग जिसके सभी मूल्य इससे अधिक होते हैं। इसका अर्थ है, जब चर के मूल्य क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित किए जाते हैं (चढ़ते हुए क्रम या गिरते हुए क्रम में उनके परिमाण के अनुसार), तब मध्य मद का मान माध्यिका है।

माध्यिका एक स्थैतिक माध्य है। इसके नीचे के मदों की संख्या इसके ऊपर के मदों की संख्या के बराबर है। यह मध्य स्थान घेरता है। इसलिए यह क्रमबद्ध वितरण में ठीक मध्य का मान है। यह वास्तविक मान हो सकता है (श्रेणी में

टिप्पणी

से एक मद) या यह आन्तरगणित (Interpolated) हो सकता है दो मूल्यों के बीच। यह संकेत 'Me' द्वारा निरूपित होता है।

अगर छात्रों की एक कक्षा में, संख्या में 23 (विषम), कहे जाते हैं अपनी ऊँचाई के हिसाब से खड़े होने के लिए तो 12वाँ छात्र किसी भी तरफ से एक होगा जिसकी ऊँचाई कक्षा की माध्यिका ऊँचाई होगी। माध्यिका मूल्य चुनने की यह विधि संकेत रूप में निम्न प्रकार से अभिव्यक्त की जा सकती है।

Me आकार है $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ th मद का, जहाँ '*Me*' माध्यिका (मध्य पद) को प्रदर्शित करता है, और 'n' मदों की संख्या।

(a) व्यक्तिगत अवलोकन (Individual Observation)

अगर एक कक्षा के विद्यार्थी, संख्या में 24 (सम), कहे जाते हैं खड़े होने के लिए उनकी ऊँचाई के अनुसार, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ th मद का आकार 12th और 13th छात्र के बीच में पड़ेगा, i.e., 12.5th मद। तब, हमें 12वें और 13वें छात्र की औसत ऊँचाई लेनी है कक्षा की माध्य ऊँचाई के लिए

स्थिति I: निम्नलिखित समंक का माध्यिका मूल्य ज्ञात करें–

43, 62, 15, 80, 56, 72, 34, 8, 25

हलः समंक को क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित करें क्रम संख्या के साथ।

क्रम संख्याः	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9
***X*:**	8	15	25	34	**43**	56	62	72	80

माध्यिका $\left(\frac{n+1}{2}\right)$th मद का आकार है।

$\therefore \frac{9+1}{2}$ th मद = 5वाँ मद

$Me = 43$

स्थिति II: निम्नलिखित का माध्यिका मूल्य ज्ञात करें–

36, 5, 19, 26, 6, 28, 56, 18, 63, 4

हलः क्रमबद्ध रूप में समंक को व्यवस्थित करें क्रम संख्या के साथ।

क्रम संख्याः	1	2	3	4	5	↓	6	7	8	9	10
X:	4	5	6	18	19	↑	26	28	36	36	63

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$th मद का आकार है।

$\therefore \frac{10+1}{2}$th मद $= 5.5$ वाँ मद

टिप्पणी

मद पाँचवें और छठे मद के बीच पड़ता है।

इसलिए दो मूल्य हैं, i.e., 19 और 26।

तब माध्यिका मान इन दोनों मूल्यों का औसत होगा।

i.e., $$\frac{19+26}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$Me = 22.5$$

(b) विछिन्न श्रेणी (Dispersion Series)

विच्छिन्न श्रेणी में, मूल्य पहले से क्रमबद्ध होते हैं और आवृत्तियाँ प्रत्येक मूल्य के विरुद्ध आलेखित होती हैं। यद्यपि, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ मद के आकार को निर्धारित करने के लिए, एक अलग स्तंभ तैयार की जाती है संचयी आवृत्ति के लिए। माध्यिका आकार पहले संचयी आवृत्ति के संदर्भ में निर्धारित की जाती है जो पहले आकार को आच्छादित करती है। तब, उस संचयी आवृत्ति के विरुद्ध मूल्य अवस्थित होगी माध्यिका मूल्य की। उदाहरण के लिए,

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण है–

अंक (x)	छात्रों की संख्या (f)	$c.f.$
10	10	10
20	16	26
30	18	44
→ 40	13	57 ←
50	6	63
60	3	66
70	8	74
80	4	78
90	6	84
100	6	90
	$n = 90$	

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$ th मद का आकार है।

$\therefore \frac{90+1}{2} = 45.5$ वाँ मद

यह 57 c.f. में पड़ता है।

57 *c.f.* के विरुद्ध मूल्य 40 है

$\therefore$ माध्यिका अंक 40 है।

नोटः माध्यिका मूल्य चिन्हित की जाती है आपेक्षिक *c.f.* के निर्धारण से जिसमें $\frac{n+1}{2}$ th मद पड़ता है।

उदाहरण 3.17: 15 छात्रों की कक्षा में, 5 छात्र एक टेस्ट में अनुत्तीर्ण हुए। 10 छात्रों के अंक जो पास किए थे 9, 6, 7, 8, 9, 6, 5, 4, 7 और 8। 15 छात्रों का माध्यिका अंक क्या था?

हलः मान लें अंक क्रम से व्यवस्थित है और क्रमशः आवृत्तियाँ आलेखित हैं।

x	f	$c.f.$
0	5 अनुत्तीर्ण	
1		
2		
3		5
4	1	6
5	1	7
6	2	9
7	2	11
8	2	13
9	2	15
	$n = 15$	

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$ th मद का आकार है।

$\frac{15+1}{2}$ th मद $= 8$वाँ मद

यह 9 $c.f.$ में पड़ता है।

9 $c.f.$ के विरुद्ध मूल्य 6 है

↥ माध्यिका अंक 6 है।

उपर्युक्त उदाहरण हल किया जा सकता है यह मानकर कि समंक व्यक्तिगत अवलोकन रूप में है।

टिप्पणी

5* अनुत्तीर्ण +10 उत्तीर्ण

S. No.— 1 2 3 4 5↥	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x: → 5 छात्र अनुत्तीर्ण	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$ th मद है। इसलिए यह $\frac{15+1}{2}$ वाँ मद, i.e., 8वाँ मद है। 8वें मद का अंक 6 है।

(c) सतत श्रेणी (Continuous Series)

सतत श्रेणी के अधीन माध्यिका मूल्य निकालने की एक अलग विधि अपनाई जाती है। वर्ग अंतराल पहले से क्रमबद्ध रूप में होते हैं और आवृत्तियाँ प्रत्येक वर्ग अंतराल के विरुद्ध आलेखित की जाती हैं। आकार निर्धारित करने के लिए हमें $\frac{n}{2}$ वाँ मद लेना चाहिए और माध्यिका वर्ग निर्धारित की जाती है संचयी आवृत्ति के संदर्भ में जो पहले आकार ग्रहण करती है। जब माध्यिका वर्ग निर्धारित की जाती है, माध्यिका मूल्य आन्तरगणित की जाती है निम्नलिखित सूत्र की सहायता से :

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c \qquad \text{or} \qquad Me = l + \frac{c}{f}\left(\frac{n}{2} - m\right)$$

l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

m = माध्यिका वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

n = आवृत्तियों की कुल संख्या

c = माध्यिका वर्ग का परिमाण

f = माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

टिप्पणी

निम्नलिखित उदाहरण हैं–

स्थिति I: निम्नलिखित समंक का माध्यिका मूल्य ज्ञात करें।

वर्ग अन्तरालः	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
***f*:**	6	18	9	10	4	3

हलः

वर्ग अन्तराल	f	$c.f.$
10-15	6	6
15-20	18	24(m)
20-25	9(f)	33 ←
25-30	10	43
30-35	4	57
35-40	3	50
	$n = 50$	

माध्यिका $\frac{n}{2}$ वें मद का आकार है।

$\therefore \frac{50}{2}\text{th} = 25$वाँ मद

यह 33 संचयी आवृत्ति ($c.f.$) में पड़ता है।

33 $c.f.$ के विरुद्ध माध्यिका वर्ग (20-25) है।

$l = 20 \quad n = 50 \quad f = 9$

$m = 24 \quad c = 5$

$$Me = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{\frac{50}{2} - 24}{9} \times c = 20 + \frac{25 - 24}{9} \times 5 = 20 + \frac{1}{9} \times 5$$

$$= 20 + \frac{5}{9} = 20 + 0.5555 = 20.5555$$

स्थिति II: निम्नलिखित समंक का माध्यिका मूल्य ज्ञात करें।

***C.I.*:**	4-7	8-11	12-15	16-19	20-23	24-27
***f* :**	12	23	40	65	17	3

हलः चूँकि यहाँ अन्तर्वेशी वर्ग-अन्तराल वितरण है, हम लोग इसे बहिर्वेशी वर्ग अन्तराल श्रेणी में परिवर्तित करेंगे।

टिप्पणी

C.I.	f.	c.f.
3.5-7.5	12	12
7.5-11.5	23	35
11.5-15.5	40	75(m)
15.5-19.5	65	140 ←
19.5-23.5	17	157
23.5-27.5	3	160
	$n = 160$	

माध्यिका $\frac{n}{2}$th मद का आकार है।

$\therefore \frac{160}{2} = 80$वाँ मद

यह 140 $c.f.$ में पड़ता है।

140 $c.f.$ के विरुद्ध माध्यिका वर्ग (15.5-19.5) है।

$l = 15.5 \quad n = 160 \quad f = 65$

$m = 75 \quad c = 4$

$$Me = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 15.5 + \frac{\frac{160}{2} - m}{65} \times 4 = 15.5 + \frac{80 - 75}{65} \times 5$$

$$= 15.5 + \frac{5}{65} \times 4 = 15.5 + \frac{20}{65} = 15.5 + 0.307069$$

$$= 15.80769$$

उदाहरण 3.18: निम्नलिखित समंक की माध्यिक परिकलित करें।

से कमः	10	20	30	40	50	60	70	80
आवृत्तिः	4	16	40	76	96	112	120	125

हलः हम समंक को परिवर्तित करें 'से कम' आवृत्ति वितरण से सामान्य वितरण में

C.I.	f.	c.f.
10 से कम	4	4
10-20	12	16
20-30	24	40 (m)
(l) 30-40	36 (f)	76 ←
40-50	20	96
50-60	16	112
60-70	8	120
70-80	5	125
	$n = 125$	

माध्यिका $\frac{n}{2}$वाँ मद का आकार है।

$\therefore \frac{125}{2}$वाँ $= 62.5$वाँ मद

यह 76 $c.f.$ में पड़ता है।

76 $c.f.$ के विरुद्ध माध्यिका वर्ग है। (30-40).

$$Me = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 30 + \frac{\frac{125}{2} - 40}{36} \times 10$$

$$= 30 + \frac{62.5 - 40}{36} \times 10$$

$$= 30 + \frac{22.5}{36} \times 10 = 30 + \frac{225}{36} = 30 + 6.25 = 36.25$$

टिप्पणी

उदाहरण 3.19: निम्न समंक की माध्यिका परिकलित करें।

से ज्यादाः	10	20	30	40	50	60	70	80
आवृत्तियाँः	115	103	88	68	43	23	13	3

हलः हम समंक को 'से ज्यादा' आवृत्ति वितरण से सामान्य वितरण में परिवर्तित करें।

C.I.	*f.*	*c.f.*
10-20	12	12
20-30	15	27
30-40	20	47 (m)
40-50	25 (f)	72 ←
50-60	20	92
60-70	10	102
70-80	10	112
80 और ज्यादा	3	115
	$n = 115$	

माध्यिका $\frac{n}{2}$ वाँ मद का आकार है।

$\therefore \frac{115}{2}$ वाँ = 57.5वाँ मद

यह 72 *c.f.* में पड़ता है।

72 *c.f.* के विरुद्ध माध्यिका वर्ग है। (40-50).

सामान्य आवृत्तियाँ

नोट : 115 - 103 = 12

103 - 88 = 15

88 - 68 = 20------आदि

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{\frac{115}{2} - 47}{25} \times 10 = 40 + \frac{57.5 - 47}{25} \times 10 = 40 + \frac{10.5}{25} \times 10$$

$$= 40 + \frac{105}{25} = 40 + 4.2 = 44.2$$

उदाहरण 3.20: निम्नलिखित समंक से छूटी हुई आवृत्ति ज्ञात करें अगर माध्यिका 50 है।

वर्ग अन्तरालः	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्तियाँः	2	8	6	....	15	10

हलः हम मान लें छूटी आवृत्ति 'A' है।

टिप्पणी

C.I.	f.	c.f.
10-20	2	2
20-30	8	10
30-40	6	16
40-50	(A)	16+A
50-60	15(f)	31+A ←
60-70	10	41+A
	$n = 41 + A$	

माध्यिका 50 दी गई है।

∴ माध्यिका वर्ग है 50-60

$$Me = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$50 = 50 + \frac{\frac{41+A}{2} - (16+A)}{15} \times 10$$

$$0 = \frac{\frac{41+A}{2} - 16 - A}{15} \times 10$$

$$0 = \frac{205 + 5A - 160 - 10A}{15}$$

$$0^* = 205 + 5A - 160 - 10A$$

$$5A = 205 - 160$$

$$5A = 45$$

$$A = 9$$

∴ छूटी हुई आवृत्ति 9 है।

नोटः $15 \times 0 = 0$

उदाहरण 3.21: 1,000 मजदूरी पाने वाले के समूह में, 4% की मासिक मजदूरी 60 रु. से कम है और 15% की 62.50 रु. से कम। 15% में 95 रु. या अधिक पाया, और 5% 100 रु. या अधिक पाया। माध्यिका मजदूरी ज्ञात करें।

हलः हम तालिका तैयार करें विभिन्न प्रकार का % आवृत्ति दर्शाते हुए और तब इसे वास्तविक आवृत्ति में परिवर्तित करें।

मासिक मजदूरी (रु.)	आवृत्तिया f	C.I.	F%	(1000)f	c.f.
60 से कम	4%	0-60	4%	40	40
62.50 से कम	15%	60-62.5	11%	110	150 m
62.50-95	(अंतर)	62.5-95	70%	700	850 ←
95 से अधिक	15%	95-100	10%	100	950
100 और अधिक	5%	100 और अधिक	5%	50	1,000
			कुल 100%	$n = 1,000$	

माध्यिका $\frac{n}{2}$ वें मद का आकार है। ∴ $\frac{1,000}{2}$ वाँ = 500 वाँ मद

टिप्पणी

यह 850 *c.f.* में पड़ता है।

850 c.f. के विरुद्ध माध्यिका वर्ग है (62.5-95) और $c = 32.50$

$$Me = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 62.5 + \frac{\frac{1{,}000}{2} - 150}{700} \times 32.5 = 62.5 + \frac{500 - 150}{700} \times 32.5$$

$$= 62.5 + \frac{350}{700} \times 32.5 = 62.5 + (0.5)32.5$$

$$= 62.5 + 16.25 = 78.75$$

उदाहरण 3.22: एक अपूर्ण वितरण नीचे दी गई है।

ऊँचाई (ईंचों में):	5.1-6.0	6.1-7.0	7.1-8.0	8.1-9.0	9.1-10	10.1-11	11.1-12
पौधों की संख्याः	3	8	27	—	17	11	9

यह ज्ञात है कि एक पौधे की माध्यिका ऊँचाई 8.53 ईंच है। छूटी हुई आवृत्ति परिकलित करें।

हलः हम मान लें कि छूटी हुई आवृत्ति '*A*' है। हमें वर्ग अन्तराल को अन्तर्वेशी विधि में निम्न जैसा समायोजित करना है।

ऊँचाई ईंचों में *C.I.*	*f.*	*c.f.*
5.05-6.05	3	3
6.05-7.05	8	11
7.05-8.05	27	38 (*m*)
(*l*) 8.05-9.05	(*A*) (*f*)	38 + *A* ←
9.05-10.05	17	55 + *A*
10.05-11.05	11	66 + *A*
11.05-12.05	9	75 + *A*
	$n = 75 + A$	

माध्यिका मान दिया गया है i.e. 8.53

∴ माध्यिका वर्ग (8.05-9.05) है।

$$M = 1 + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$8.53 = 8.05 + \frac{\frac{75 + A}{2} - 38}{A}$$

$$0.48 = \frac{\frac{75 + A}{2} - 38}{A}$$

$$0.48A = \frac{75 + A}{2} - 38 - - - (\times 2)$$

$$0.96A = 75 + A - 76$$

$$0.96A = A - 1$$

$$-0.04A = -1$$

$$A = 25$$

∴ छूटी हुई आवृत्ति 25 है।

टिप्पणी

माध्यिका की विशेषताएं (Properties of Median)

माध्यिका के निम्नलिखित अभिलक्षण हैं–

(i) मदों के विचलनों का योग मध्यिका से (ऋणात्मक चिन्हों को नज़रअंदाज़ करने पर) सबसे कम होगी या छोटी होगी अपेक्षया किसी भी दूसरे मूल्य से प्राप्त करने पर।

(ii) यह सिर्फ स्थैतिक औसत है जो गणितीय सूत्र की सहायता से परिकलित की जाती है आन्तरगणन पर आधारित।

माध्यिका के गुण (Merits of Median)

माध्यिका लाभदायक है जब हमें वांछित होता है मद की स्थिति को मापना। निम्नलिखित लाभ हैं माध्यिका के–

(i) यह समझने और परिकलित करने में आसान है।

(ii) यह चर के आत्यंतिक मूल्यों को खत्म कर देता है जिससे यह प्रभावित नहीं है।

(iii) यह आगे के बीजगणितीय प्रयोग में समर्थ है दूसरी मापों का विश्लेषण करने के लिए।

(iv) यह क्रमबद्ध समंक के सिर्फ निरीक्षण से भी निर्धारित किया जा सकता है।

(v) यह लेखाचित्र से भी निर्धारित किया जा सकता है तोरण (Ogives) की सहायता से ('से कम' और 'से अधिक' आवृत्ति वक्र)।

(vi) यह सबसे उपयुक्त औसत है जहाँ प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप संभव नहीं है।

(vii) यह वितरण के मध्य मद के मूल्य को इंगित करता है।

माध्यिका के दोष (सीमाएं) (Demerits (Limitations) of the Median)

माध्यिका निम्न सीमाओं से ग्रसित है–

(i) यह मदों का हमेशा प्रतिनिधि नहीं भी हो सकता है चूँकि यह आत्यंतिक मूल्यों की उपेक्षा कर देता है।

(ii) यह परिशुद्धता से निर्धारित नहीं किया जा सकता है जब इसका आकार दो मूल्यों के बीच पड़ता है।

(iii) यह किसी सरल गणितीय विधि द्वारा निर्धारित होने में समर्थ नहीं है।

(iv) यह उन स्थितियों में लाभदायक नहीं है जहाँ आत्यंतिक मूल्यों को बड़े भार दिए जाते हैं, क्योंकि यह सभी आवृत्तियों को एक समान निरूपित करता है।

टिप्पणी

(v) इसमें वांछित होता है समंक को क्रमबद्ध करना इसके निर्धारण से पहले, जो काफी कार्य से संबद्ध है।

(vi) यह अनियत है (अस्वभाविक) अगर मदों की संख्या काफी छोटी है।

सीमितताओं के बावजूद, माध्यिका उपयोगी है और यह शुद्ध माप है वैसी स्थितियों में जिसमें वितरण के खुले सिरे वाले वितरण होते हैं। यह बारंबार प्रयुक्त होता है जहाँ चर के मूल्य काफी उच्चावचन वाले होते हैं मदों की संख्या की तुलना में जहाँ ऐसे मूल्य माध्य को विकृत कर देते हैं।

3.4 चतुर्थक (Quartiles)

चतुर्थक भी स्थैतिक औसत है माध्यिका जैसा। जैसे माध्यिका मूल्य पूरे वितरण को दो भागों में बाँटता है, चतुर्थक (Q_1, Q_2 और Q_3) पूरे वितरण को चार बराबर भागों में बाँटता है–

1. **पहला चतुर्थक (निम्न चतुर्थक)**– मूल्य है जिसके नीचे मदों का एक चौथाई होता है और उसके ऊपर मदों के तीन चौथाई होते हैं।
2. **दूसरा चतुर्थक (माध्यिका)**– पूरे वितरण को दो भागों में बाँटता है।
3. **तीसरा चतुर्थक (ऊपरी चतुर्थक)**– मूल्य है जिसके नीचे मदों के तीन चौथाई होते हैं और उसके ऊपर मदों का एक चौथाई होता है।

चतुर्थक मूल्य उन्हीं सिद्धान्तों से निर्धारित होती हैं जैसा माध्यिका मूल्य के लिए है। निम्नलिखित विधि है आकार को निर्धारित करने में–

माप	व्यक्तिगत और विच्छिन्न श्रेणी	सतत श्रेणी
Q_1	$\frac{n+1}{4}$ वाँ मद	$\frac{n}{4}$ वाँ
Q_2	$\frac{2(n+1)}{4}$ वाँ या $\frac{n+1}{2}$ वाँ मद	$\frac{2n}{4}$ वाँ या $\frac{n}{2}$ वाँ मद
Q_3	$\frac{3(n+1)}{4}$ वाँ मद	$\frac{3n}{4}$ वाँ मद

उदाहरण 3.23: निम्नलिखित मूल्यों से चतुर्थक ज्ञात करें।

19, 27, 24, 39, 57, 44, 56, 50, 59, 67,

62, 42, 47, 60, 26, 34, 57, 51, 59, 45

हल: हम समंक को क्रमबद्ध रूप में व्यवस्थित करें।

टिप्पणी

क्रम संख्या		x	क्रम संख्या		x
1	-------	19	11	-------	50
2	-------	24	12	-------	51
3	-------	26	13	-------	56
4	-------	27	14	-------	57
5	-------	34	15	-------	57
$(Q_1)\rightarrow 6$	-------	39	$(Q_3)\rightarrow 16$	-------	59
7	-------	42	17	-------	59
8	-------	44	18	-------	60
9	-------	45	19	-------	62
$(M_e)\rightarrow 10$	-------	47	20	-------	67

इस श्रेणी में $n = 20$

Q_1 $\frac{n+1}{4}$वाँ मद का आकार है

$\therefore \frac{20+1}{4}$वाँ $= 5.25$वाँ मद

5.25वाँ मद 5वें और 6 के बीच.............i.e., 34 और 39

$Q_1 = 5$वाँ मद $+ 0.25$ दो मूल्यों के बीच का अन्तर

$= 34 + 0.25\,(39\text{-}34) = 34 + 0.25\,(5)$

$34 + 1.25 = 35.25$

Q_2 या माध्यिका $\frac{n+1}{2}$वाँ मद का आकार

$\therefore \frac{20+1}{2}$वाँ $= 10.5$वाँ मद

10.5वाँ मद 10 और 11 के बीच पड़ता है..............i.e., 47 और 50

$M_e = 10$वाँ मद $+ 0.5$ का दो मूल्यों के बीच अन्तर

$= 47 + 0.5\,(50 - 47) = 47 + 0.5\,(3) = 47 + 1.5 = 48.5$

Q_3 आकार है $\frac{3(n+1)}{4}$वाँ मद

$\frac{3(20+1)}{4}$वाँ $= 15.75$वाँ मद

15.75वाँ मद 15 और 16 के बीच पड़ता है...........i.e., 57 और 59

$Q_3 = 15$वाँ मद $+ 0.75$ का दो मूल्यों के बीच अन्तर

$= 57 + 0.75\,(59\text{-}57) = 57 + 0.75(2) = 57 + 1.50 = 58.50$

टिप्पणी

उदाहरण 3.24: निम्नलिखित अंकों से ज्ञात करें Q_1, माध्यिका और Q_3 अंक,

23, 48, 34, 68, 15, 36, 24, 54, 65, 75

92, 10, 70, 61, 20, 47, 83, 19, 77

हलः समंक को क्रमबद्ध रूप में व्यवस्थित करें।

क्रम संख्या	-------	x
1	-------	10
2	-------	15
3	-------	19
4	-------	20
$Q_1 \rightarrow 5$	-------	$23 \leftarrow Q_1$
6	-------	24
7	-------	34
8	-------	36
9	-------	47
$M_e \rightarrow 10$	-------	$48 \leftarrow M_e$
11	-------	54
12	-------	61
13	-------	65
14	-------	68
$Q_3 \rightarrow 15$	-------	$70 \leftarrow Q_3$
16	-------	75
17	-------	77
18	-------	83
19	-------	92

$n = 19$

Q_1 आकार है $\frac{n+1}{4}$वाँ मद का

$\therefore \frac{19+1}{4}$वाँ $= 5$वाँ मद

5वाँ मद 23 है $Q_1 = 23$

M_e आकार है $\frac{n+1}{2}$वाँ मद

$\frac{19+1}{2}$वाँ $= 10$वाँ मद

10वाँ मद 48 है $M_e = 48$

Q_3 आकार है $\frac{3(n+1)}{4}$ वाँ मद का

$\frac{3(19+1)}{4}$वाँ $= 15$वाँ मद

15वाँ मद है 70 $Q_3 = 70$

उदाहरण 3.25: निम्नलिखित समंक से माध्यिका और चतुर्थक ज्ञात करें।

जूते का आकारः	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
आवृत्तियाँः	20	36	44	50	80	30	30	16	14

हलः हम तालिका तैयार करें संचयी आवृत्ति दर्शाते हुए विभाजन मूल्यों का स्थान निर्धारण करने के लिए।

टिप्पणी

x	f	$c.f.$
4.0	20	20
4.5	36	56
$Q_1 \rightarrow$ 5.0	44	100 $\leftarrow Q_1$
5.5	50	150
$M_e \rightarrow$ 6.0	80	230 $\leftarrow M_e$
$Q_3 \rightarrow$ 6.5	30	260
7.0	30	290
7.5	16	306
8.0	14	320
	$n = 320$	

Q_1 आकार है $\frac{n+1}{4}$वाँ मद का

$\therefore \frac{320+1}{4}$वाँ $= 80.25$वाँ

80.25वाँ मद पड़ता है 100 $c.f.$ में

100 $c.f.$ के विरुद्ध मूल्य है 5.0
$Q_1 = 5.0$

Me आकार है $\frac{n+1}{2}$वाँ मद का

$\therefore \frac{320+1}{2}$वाँ $= 160.50$वाँ मद

160.50वाँ मद 230 $c.f.$ में पड़ता है।

$c.f.$ 230 के विरुद्ध मूल्य है 6.

Q_2 या $M_e = 6.0$

Q_3 आकार है $\frac{3(n+1)}{4}$वाँ मद का

$\therefore \frac{3(320+1)}{4}$वाँ $= 240.75$वाँ

240.75वाँ मद 260 $c.f.$ में पड़ता है 260 $c.f.$ के विरुद्ध मूल्य है 6.5 $Q_3 = 6.5$

उदाहरण 3.26: निम्नलिखित समंक से चतुर्थक प्रगणित करें।

वर्ग अन्तरालः	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
***f*%**	5	8	7	12	28	20	10	10

हलः

C.I.	*f.*	*c.f.*
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	7	20 $(m)_1$
(l_1) 30-40	12(f_1)	32 $(m)_2$
(l_2) 40-50	28(f_2)	60 $(m)_3$
(l_3) 50-60	20(f_3)	80
60-70	10	90
70-80	10	100
	$n = 100$	

टिप्पणी

Q_1 आकार है $\frac{n}{4}$वाँ मद का। $\therefore \frac{100}{4}$वाँ $= 25$वाँ मद

25वाँ मद 32 *c.f.* में पड़ता है

32 c.f. के विरुद्ध वर्ग अन्तराल है (30-40)

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c = 30 + \frac{\frac{100}{4} - 20}{12} \times 10$$

$$= 30 + \frac{25 - 20}{12} \times 10 = 30 + \frac{5}{12} \times 10$$

$$= 30 + \frac{50}{12} = 30 + 4.1667 = 34.1667$$

Q_2 या M_e आकार है $\frac{n}{2}$वाँ मद का। $\therefore \frac{100}{2}$वाँ $= 50$वाँ मद

50वाँ मद 60 c.f. में पड़ता है।

60 *c.f.* के विरुद्ध वर्ग अन्तराल (40-50) है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c = 40 + \frac{\frac{100}{2} - 32}{28} \times 10$$

$$= 40 + \frac{50 - 32}{28} \times 10 = 40 + \frac{18}{28} \times 10$$

$$= 40 + \frac{180}{28} = 40 + 6.4286 = 46.4286$$

Q_3 या M_e आकार है $\frac{3n}{4}$वाँ मद का। $\therefore \frac{3(100)}{4}$वाँ $= 75$वाँ मद

75वाँ मद 80 *c.f.* में पड़ता है

80 *c.f.* के विरुद्ध वर्ग अन्तराल है (50-60)

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c = 50 + \frac{\frac{3(100)}{4} - 60}{20} \times 10$$

$$= 50 + \frac{75 - 60}{20} \times 10 = 50 + \frac{15}{20} \times 10$$

$$= 50 + \frac{150}{20} = 50 + 7.5 = 57.5$$

दूसरे विभाजन मूल्यों के लिए (For other division of values)

समान विधि, जिससे माध्यिका निर्धारित की जाती है, को बढ़ाई जा सकती है श्रेणी को बाँटने के लिए कितने भी भागों में। विभाजन मूल्य लाभदायक हैं श्रेणी के यथार्थ संविरचना को जानने में शैक्षिक और मनोविज्ञानिक अध्ययनों में। निम्न विभिन्न विभाजन मूल्य हैं जो दिए समंक को विभिन्न भागों में बाँटती हैं।

माप	मूल्य	भाग	संकेत	टिप्पणी
चतुर्थक	तीन	चार	Q_1, Q_2, Q_3	$Q_2 = M_e$
माध्यिका	एक	दो	M_e	
पंचमक	चार	पाँच	Qt_1, Qt_2, Qt_3, Qt_4	
दशमक	नौ	दस	$D_1 \ldots\ldots D_9$	$D_5 = M_e$
शतमक	निन्यानबे	सौ	$D_1 \ldots\ldots D_{99}$	$D_{50} = M_e$

3.5 बहुलक (Mode)

यह मूल्य है जो अधिकतम आवृत्ति के साथ घटित होता है। यह सबसे प्रारूपिक या समान मूल्य है जो उच्चतम आवृत्ति प्राप्त करती है। यह फैशन को प्रदर्शित करता है और अधिकतर यह व्यवसाय में प्रयुक्त होता है। इस तरह, यह चर के उस मूल्य के संगत है जो सबसे ज्यादा बार आता है। आवृत्ति वितरण का बहुलक वर्ग सबसे अधिक आवृत्ति का वर्ग है। यह संकेत 'Z' से द्योतित होता है।

बहुलक चर का वह मूल्य है जो श्रेणी में सबसे अधिक बार पुनरावृत्त होती है। एक श्रेणी में मद का आकार प्रायिक है, आकस्मिक नहीं। यह अधिकतम घनत्व के स्थान पर पड़ता है। अगर हम कहते हैं कि एक कक्षा के छात्रों का बहुलक अंक 40 है, हमारा अर्थ है कि छात्रों की सबसे बड़ी संख्या ने 40 अंक प्राप्त किया है। इसका अर्थ है 40 के चारों तरफ छात्रों की संख्या प्रवृत्त है सबसे अधिक संघनित। जब हम 'सबसे प्रायिक वेतन' 'सबसे सर्वसामान्य ऊँचाई या 'सबसे समान अंक' की बात करते हैं, हमें ध्यान में होता है 'बहुलक मान'। जब एक डाक्टर वक्तव्य देता है कि सर्दी-बुखार से ठीक होने की सामान्य अवधि एक सप्ताह है, उसका अर्थ है कि यह बहुलक अवधि है।

अगर प्रत्येक अवलोकन समान बार घटित होती है, हम कह सकते हैं कि कोई 'बहुलक नहीं हैं'। अगर दो अवलोकन बराबर बार घटित होते हैं हम कह सकते हैं यह 'द्वि-बहुलक' (Bi-modal) की स्थिति है। अगर तीन या अधिक अवलोकन बराबर बार घटित होती है, हम कह सकते हैं कि यह 'बहु-बहुलक' (Multi-modal) स्थिति है। अगर एकल अवलोकन है जो अधिकतम बार घटित होता है, हम कह सकते हैं यह 'एकल-बहुलक' (Uni-modal) की स्थिति है।

टिप्पणी

A. बहुलक का निर्धारण (Determination of Mode)

जब वितरण 'एकल-बहुलक' है, बहुलक का निर्धारण बहुत आसान है। कभी-कभी यह संभाव्य है कि वितरण में कई अनियमितताएं हों और यह कठिन हो जाय बहुलक का निर्धारण करना। इन स्थितियों में आवृत्तियाँ 'समूहन' (grouping) विधि द्वारा समायोजित की जाती है, i.e., समूहों का विस्तार करना जिसमें आवृत्तियाँ पड़ती हैं जब तक मद का बहुलक आकार या बहुलक वर्ग अपने को प्रकट ना कर दे–

(i) व्यक्तिगत अवलोकन (Individual Mode)– बहुलक मूल्य निर्धारित की जाती है सिर्फ निरीक्षण द्वारा। साधारणतः क्रमबद्धता मदद करती है मूल्यों को जल्दी से गिनने में।

उदाहरण के लिए,

स्थिति I: निम्नलिखित चर के मूल्य हैं–

54,	66,	42,	64,	44,	86,	104,	94,	100,	80
72,	64,	64,	44,	64,	72,	54,	48,	52,	50

बहुलक '64' है चूँकि यह सबसे अधिक बार (चार बार) श्रेणी में आया है। इसलिए बहुलक स्पष्ट रूप से परिभाषित है और यह 'एकल-बहुलक' स्थिति है।

स्थिति II: निम्नलिखित चर के मूल्य हैं–

122,	234,	638,	410,	512,	270,	900,	175
365,	195,	283,	234,	175,	115,	310,	208
175,	410,	638,	195,	512,	234,	600,	415

यहाँ दो बहुलक हैं, i.e., 175 और 234 दोनों तीन बार घटती हैं। इसलिए, बहुलक स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है। यह 'द्वि-बहुलक' स्थिति है।

जब मदों की संख्या बढ़ती है, हम लोग समंक को विच्छिन्न रूप में परिवर्तित कर सकते हैं। तब, मूल्य जिसका अधिकतम आवृत्ति होगा बहुलक मानी जाएगी।

(ii) विच्छिन्न श्रेणियाँ (Dispersion series)– बहुलक मूल्य निर्धारित की जा सकती है आवृत्ति स्तंभ के सिर्फ निरीक्षण द्वारा। यह वह मूल्य है जो अधिकतम आवृत्ति के साथ घटित होती है। अगर श्रेणी में नियमितता और समांगता है, बहुलक आसानी से निरीक्षण द्वारा निर्धारित की जा सकती है।

अगर नियमितता और समांगता नहीं है आवृत्ति वितरण में, बहुलक का निर्धारण एक कठिन कार्य होगा। तब, समूहन विधि का सहारा लिया जा सकता है बहुलक मूल्य या वर्ग को चिन्हित करने के लिए।

टिप्पणी

समूहन (Grouping)– इस विधि के अधीन, आवृत्तियाँ समायोजित की जाती हैं समूह का विस्तार करके जिनमें वे पड़ती है जब तक मद का एक बहुलक आकार या समूह अपने आप को प्रकट ना कर दे।

आवृत्ति स्तंभ को पहले स्तंभ की तरह व्यवहार करें और उच्चतम आवृत्ति (या समान संख्या की आवृत्तियाँ) को चिन्हित करें। दूसरे स्तंभ में, पहले स्तंभ के, पहले और दूसरे आवृत्तियों को जोड़े, तीसरे और चौथे आवृत्तियों को जोड़ें और इसी तरह आगे, और आवृत्तियों को आलेखित करें। तीसरे स्तंभ में, फिर पहले स्तंभ के, दूसरी और तीसरी आवृत्ति जोड़ें, चौथी और पाँचवीं आवृत्ति और आगे, और आवृत्तियों को आलेखित करें। चौथे स्तंभ में पुनः पहले स्तंभ के, पहले, दूसरे और तीसरे आवृत्ति को जोड़ें, चौथा, पाँचवा और छठा आवृत्ति को जोड़ें और इसी तरह आगे, तथा आवृत्तियों को आलेखित करें। यह विधि तब तक जारी रक्खी जाती है जब तक छठा स्तंभ न प्राप्त हो जाए। अन्ततः, हम एक विश्लेषण तालिका स्थापित करते हैं आवृत्तियों को जानने के लिए जो प्रत्येक स्तंभ के उच्चतम योग को प्रभावित करती है। यह विश्लेषण तालिका हमें बहुलक मूल्य को चिन्हित करने में मदद करती है जो आवृत्तियों के उच्चतम संघनन से प्रभावित होती है।

स्थिति I: निम्नलिखित वितरण हैं,

A. श्रेणी			**B. श्रेणी**			**C. श्रेणी**		
x	f		x	f		x	f	
1	. . . 2	अधिकतम	10	. . . 50	अधिकतम	8	. . . 2	अधिकतम
2	. . . 8	आवृत्ति	15	. . . 95	आवृत्ति	16	. . . 4	आवृत्ति का
3	. . . 11	18 हैं→	20	. . . 180	180 है	24	. . . 20	संघटन
2→4	. . . 18 ←		25	. . . 63		32	. . . 19	19 के चारों
5	. . . 9	$z = 4$	30	. . . 24	$\therefore\ z = 20$	40	. . . 10	तरफ है
6	. . . 7		35	. . . 5		48	. . . 5	$\therefore z = 32$

स्थिति II: निम्नलिखित वितरण हैं

A श्रेणी

x	f
2	6
4	8
6	16_1
Z→ 8	16_2 ←
10	12
12	6

संघनन आवृत्ति 16_2 के चारों ओर अधिक है ना कि 16_1 के। प्रत्येक के बगल की आवृत्तियों पर विचार करने पर, योगफल निम्न जैसा प्राप्त की जाती है,

8 + (16) + 16 = 40--------16 + 16 + 12 = 44

16_2 के चारों ओर हम अधिक संघनन पाते हैं इसलिए बहुलक 8 है (6 नहीं)

टिप्पणी

B श्रेणी

x	f
4	18
8	22
12	19
16	4
20	7
24	20
28	22
32	17
36	8

इस श्रेणी में, दो अधिकतम आवृत्तियाँ हैं संघनन भी समान स्तर का

(i.e., 18 + 22 + 19 = 59 और 20 + 22 + 17 = 59) स्पष्ट बहुलक नहीं है जो वितरण से प्रकट हो। इसीलिए समूहन विधि को अपनाना आवश्यक हो जाता है।

समूहन सारणी (Grouping Table)

x	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
4	18					
		40				
8	22			59		
		41				
12	19		23		45	
		23				
16	4		11			30
		11				
20	7		27	31		
		27				
24	20		42		49	
		42				
28	22		39			59
		39				
32	17		25	47		
		25				
36	8					

विश्लेषण सारणी (Analysis Table)

स्तंभ संख्या	चर के मूल्य								
	4	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**
f_1		1					1		
f_2	1	1							
f_3						1	1		
f_4	1	1	1						
f_5					1	1	1		
f_6						1	1	1	
कुल	2	3	1		1	3	4	1	

उपर्युक्त तालिका से, यह स्पष्ट है कि बहुलक 28 है चूँकि यह समूहन विधि में अधिकतम आवृत्ति में चार बार भाग लेती है। यहाँ, हम कह सकते हैं कि बहुलक स्पष्ट रूप से परिभाषित होती है आवृत्तियों का समूहन करने के बाद।

(iii) सतत श्रेणी (Continuous Series)– सतत श्रेणी के अधीन, बहुलक वर्ग निर्धारित की जाती है अधिकतम आवृत्ति या समूहन या निरीक्षण की सहायता से। इस विधि का हीं विच्छिन्न श्रेणी की स्थिति में अनुगमन किया जाता है। बहुलक वर्ग को निर्धारित करने के बाद, हमें बहुलक का मूल्य बहुलक वर्ग के अन्दर आन्तरगणित की जाती है निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर–

1. सामान्य सूत्र प्रयुक्त होती है, जब वितरण सामान्य है (i.e., अधिकतम आवृत्ति के विरुद्ध बहुलक)

(a) $$Z = 1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

या $$Z = 1 + \frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0) - (f_2 - f_1)} \times c$$

l = बहुलक वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा

f_0 = बहुलक वर्ग अन्तराल के पूर्ववर्त्ती वर्ग अन्तराल की आवृत्ति

f_1 = बहुलक वर्ग अन्तराल की आवृत्ति

f_2 = बहुलक वर्ग अन्तराल के उत्तरवर्त्ती वर्ग अन्तराल की आवृत्ति

c = बहुलक वर्ग अन्तराल का परिमाण

कभी-कभी आवृत्तियों के संघनन की वजह से, हम पा सकते हैं f_1, f_0 और f_2 से कम हो। तब उपुर्यक्त सामान्य सूत्र हमें ऋणात्मक परिणाम देती है। इसलिए हम उपर्युक्त सूत्र को सभी उद्देश्यों के लिए निम्न रख सकते हैं,

टिप्पणी

(b) $Z = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times c$ $\qquad \Delta_1 = f_1$ और f_0 के बीच अन्तर

$\Delta_2 = f_1$ और f_2 के बीच अन्तर

स्थिति I: $f_0 = 260$

$f_1 = 240$ (**नोट:** ऋणात्मक चिन्ह नकार दी जाती है)

$f_2 = 252$

$$Z = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times c = l + \frac{20}{20 + 12} \times c$$

[सूत्र प्रयुक्त हो सकती है तब भी जब $2f_1 = f_0 + f_2$]

यह सूत्र अधिमान्यता से सुरक्षित प्रयुकत होती है ऋणात्मक उत्तरों को छोड़ने के लिए। यह वही परिणाम देती है जैसा उपर्युक्त द्वारा दिया जाता है।

2. अगर अगल-बगल की आवृत्तियों f_1 और f_0 तथा बहुलक आवृत्ति के बीच का अन्तर आपेक्षिक रूप से बहुत बड़ी नहीं है निम्न सूत्र का प्रयोग अधिमान्यता से किया जाता है–

स्थिति II: $f_0 = 740$ $\qquad$ $(750 - 740 = 10)$ और $(750 - 745 = 5)$

$f_1 = 750$ $\qquad$ आपेक्षिक रूप से छोटा अन्तर

$f_2 = 745$

$$Z = 1 + \frac{f_2}{f_2 + \mathrm{f}_1} \times c = 1 + \frac{745}{745 + 740} \times c$$

3. जब $f_0 = f_2$, हमें सामान्य तौर पर बहुलक वर्ग अन्तराल के मध्य बिन्दु को बहुलक लेना चाहिए (i.e., निम्न और उच्च सीमाओं का औसत)

स्थिति III: $f_0 = 155$

$f_1 = 198$ $\qquad$ $z = \frac{\text{ऊपरी सीमा + निम्न सीमा}}{2}$

$f_2 = 155$

इस तरह, उपुर्यक्त सूत्र हमारी सहायता बहुलक निर्धारित करने में करता है विभिन्न परिस्थितियों में। यद्यपि स्थिति I(b) सूत्र ज्यादातर स्थितियों में अधिमान्यता से प्रयुक्त होती है।

उदाहरण 3.27: निम्न समंक से समान्तर माध्य और बहुलक परिकलित करें।

केन्द्रीय मान:	1	2	3	4	5	6	7
आवृत्ति:	7	11	31	17	16	5	2

हलः

x	f	f_x
1	7	7
2	11	22
3	31 ←	63
4	17	68
5	16	80
6	5	30
7	2	14
	$n = 89$	$\Sigma fx = 314$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{314}{89} = 3.5281$$

अधिकतम आवृत्ति 31 है।

इसलिए बहुलक है 3($Z = 3$)

उदाहरण 3.28: कुल 2000 कामगारों के एक प्रतिष्ठान में 20 प्रतिशत कामगार 2.00 रु. प्रति घंटा से कम कमाते हैं, 440 कामगार 2.00 रु. से 2.24 रु. प्रति घंटा कमाते हैं, 24% कामगार 2.25 रु. से 2.49 रु. प्रति घंटा कमाते हैं, 370 कामगार 2.50 रु. से 2.74 रु. प्रति घंटा कमाते हैं, 12% 2.75 रु. से 2.99 रु. प्रति घंटा कमाते हैं और बाकी 3 रु. या अधिक प्रति घंटा। एक आवृत्ति तालिका बनावें और बहुलक मजदूरी परिकलित करें।

हलः हम तालिका तैयार करें वर्ग अंतरालों और आवृत्तियों को समायोजित कर।

मजदूरी प्रति घंटा (रु.)	**कामगारों की संख्या**	***C.I.***	***F***
2.00 से कम	20%	1.995 से कम	400
2.00 - 2.24	440	1.995 - 2.245	440 f_0
2.25 - 2.49	24%	2.245 - 2.495	480 f_1
2.50 - 2.74	370	2.495 - 2.745	370 f_2
2.75 - 2.99	12%	2.745 - 2.995	240
	$n = 2{,}000$		$n = 2{,}000$

अधिकतम आवृत्ति 480 के विरुद्ध बहुलक वर्ग है 2.245 – 2.495

$$Z = 1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times c = 2.245 + \frac{(480-440)}{(480-440)+(480-370)} \times 0.25$$

$$= 2.245 + \frac{40}{40+110} \times 0.25 = 2.245 + \frac{10}{150} = 2.245 + 0.067$$

$$= 2.3117$$

टिप्पणी

उदाहरण 3.29: निम्नलिखित समंक से एक शहर के 50 स्कूलों के सभी छात्रों का माध्य और बहुलक अंक प्रगणित करें।

प्राप्त अंकः	35 और ऊपर	30-35	25-30	20-25	15-20	15 से कम
स्कूलों की संख्याः	7	10	15	9	5	4
एक स्कूल में छात्रों की औसत संख्याः	200	250	300	200	150	100

हलः हम क्रमवार समंक को व्यवस्थित करें और आवृत्तियाँ प्राप्त करें।

अंक *C.I.*	**स्कूलों की संख्या**	**औसत छात्र**	**छात्रों की संख्या (*f*)**	***C.I.***	***x***	***fx***
15 से कम	4	100	400	10-15	12.5	5,000
15-20	5	150	750	15-20	17.5	13,125
20-25	9	200	1800 f_0	20-25	22.5	40,500
25-30	15	300	4500 f_1	25-30	27.5	1,23,750
30-35	10	250	2500 f_2	30-35	32.5	81,250
35 और ऊपर	7	200	1400	35-40	37.5	52,500
					$\Sigma fx = 3,16,125$	

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{3,16,125}{11,350} = 27.8524 = 27.85 \text{ अंक}$$

$$Z = 1 + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= 25 + \frac{(4500 - 1800)}{(4500 - 1800) + (4500 - 2500)} \times 5$$

$$= 25 + \frac{2700}{2770 + 2000} \times 5 = 25 + \frac{13,500}{4700}$$

$$= 25 + 2.8734 = 27.87 \text{ अंक}$$

उदाहरण 3.30: निम्नलिखित समंक से बहुलक परिकलित करें।

मूल्यः	0-4	5-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
आवृत्तिः	328	350	720	664	598	524	378	244

हलः वितरण में वर्ग अन्तराल बराबर नहीं हैं। तीन आवृत्तियाँ f_0, f_1 और f_2 के लिए वर्ग अन्तराल बराबर होनी चाहिए (* दो वर्गों को जोड़ दिया जाता है)

टिप्पणी

C.I.	*f*
0-9*	678 f_0
10-19	720 f_1
20-29	664 f_2
30-39	598
40-49	524
50-59	378
60-69	244

वर्गों की वास्तविक परिसीमाएं
0-9.5, 9.5-19.5, 19.5-29.5 आदि हैं।

$$Z = 9.5 + \frac{(720-678)}{(720-678)+(720-664)} \times 10$$

$$= 9.5 + \frac{42}{42+56} \times 10$$

$$= 9.5 + \frac{420}{98}$$

$$= 9.5 + 4.2857 = 13.7857$$

उदाहरण 3.31: निम्न से बहुलक और माध्यिका ज्ञात करें।

अनुपस्थित दिनों की संख्या	**छात्रों की संख्या**	**अनुपस्थित दिनों की संख्या**	**छात्रों की संख्या**
5 से कम	29	30 से कम	644
10 से कम	224	35 से कम	650
15 से कम	465	40 से कम	653
20 से कम	582	45 से कम	655
25 से कम	634		

हलः संचयी आवृत्ति परिवर्तित की जाती है आवृत्तियों में वर्ग अन्तराल प्राप्त करके।

C.I.	**छात्रों की संख्या (*f*)**	***c.f.***
0-5	29	29
5-10	195	224(*m*)
10-15	241(*f*)	465
15-20	117	582
20-25	52	634
25-30	10	644
30-35	6	650
35-40	3	653
40-45	2	655
	$n = 655$	

$$\begin{bmatrix} f_0 = 195 \\ f_1 = 241 \\ f_2 = 117 \end{bmatrix}$$

(a) माध्यिका मूल्य :

माध्यिका $\frac{n}{2}$ वाँ मद का आकार है।

यह 465 *c.f.* में पड़ता है।

465 *c.f.* के विरुद्ध माध्यिका वर्ग (10–15) है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c = 10 + \frac{327.50 - 224}{241} \times 5$$

टिप्पणी

$$= 10 + \frac{103.50}{241} \times 5 = 10 + \frac{517.50}{241}$$

$$= 10 + 2.14731 = 12.14731$$

(b) बहुलक मूल्य– बहुलक स्पष्ट रूप से परिभाषित है। अधिकतम आवृत्ति 241 है और बहुलक वर्ग (10–15) है।

$$Z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c = 10 + \frac{(241 - 195)}{(241 - 195) + (241 - 117)} \times 5$$

$$= 10 + \frac{46}{(46 + 124)} \times 5 = 10 + \frac{230}{170} = 10 + 1.35294$$

$$= 11.3529$$

B. गलत परिभाषित बहुलक (Ill-defined Mode)

अगर दो मदों के बराबर अधिकतम आवृत्तियाँ होती हैं, हम इसे 'द्वि–बहुलक वितरण' कहते हैं। जब दो से अधिक मदों के, बराबर अधिकतम आवृत्तियाँ हैं, हम इसे बहु-बहुलक वितरण कहते हैं। इन सभी वितरणों में बहुलक गलत–परिभाषित हैं निम्नलिखित वितरण का बहुलक स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं है।

मद का आकार	आवृत्तियाँ			समूहन		
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
40-49	7					
		16				
50-59	9			26		
			19			
60-69	10				45	
		16				
70-79	6					29
			19			
80-89	13			29		
		23				
90-99	10				36	
			23			
100-109	13					33
		23				
110-119	10					

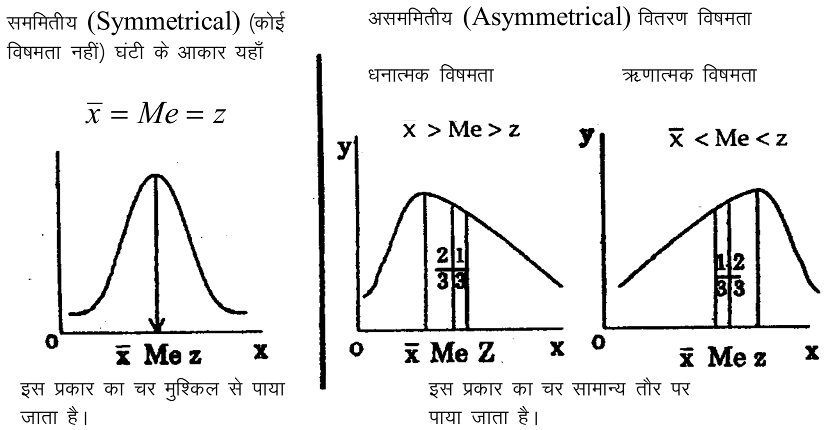
विश्लेषण सारणी (Analysis Table)

स्तंभ संख्या	60-69	70-79	80-89	90-99	100-109	110-119
1			1		1	
2			1	1	1	1
3				1	1	
4		1	1	1		
5			1	1	1	
6			4	1	1	1
		1	4	5	5	2

उपर्युक्त समूहन और विश्लेषण से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि वितरण का बहुलक गलत परिभाषित है। इसलिए, बहुलक निर्धारित की जाती है माध्य और माध्यिका की सहायता से। वस्तुतः, कोई संबंध नहीं है तीनों माध्यों $\bar{x}, M_e$ और Z के बीच। यद्यपि, एक आदर्श और धनात्मक विषम वितरण, एक विशेष स्तर का प्रयोग सिद्ध संबंध माध्यों के बीच स्थापित किया जा सकता है।

3.6 माध्यों के बीच प्रयोगसिद्ध संबंध (Empirical Relationship Among the Averages)

जब बहुलक गलत–परिभाषित होती है, बहुलक का मूल्य ज्ञात करना कठिन होता है। एक आदर्श और धनात्मक विषम वितरण में, एक प्रकार का प्रयोगसिद्ध संबंध माध्यों के बीच स्थापित की जा सकती है। हम लोग तीन भिन्न प्रकार के वितरणों का अध्ययन लेखाचित्र से निम्न प्रकार से करें।



उपयुक्त लेखाचित्र अध्ययन प्रकट करता है कि एक आदर्श या नियंत्रित और धनात्मक विषम वितरण में, माध्यिका बहुलक और माध्य के बीच पड़ता है। बहुलक (बायीं ओर) माध्यिका से दो-तिहाई दूरी हटता है, और माध्य (दाहिनी ओर) एक-

टिप्पणी

तिहाई दूरी हटता है माध्यिका से। यह प्रवृत्ति एक 'प्रयोग सिद्ध सूत्र' (Empirical formula) को जन्म देता है, निम्न जैसा–

$Z = 3M_e - 2\bar{x}$ (धनात्मक विषम पर आधारित)

उपयुक्त आनुभविक संबंध वर्णित की जा सकती है निम्नलिखित उदाहरण की सहायता से।

x:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f:	2	15	23	16	14	10	9	7	4 = 100

हल: हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\bar{x} > m_e > Z$

x	f	fx	$c.f.$
1	2	2	2
2	15	30	17
Z 3	23	69	40
4	16	64	56
5	14	70	70
6	10	60	80
7	9	63	89
8	7	56	96
9	4	36	100
	$n = 100$	$\Sigma fx = 450$	

(1) $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{450}{100} = 4.5$

(2) माध्यिका $\frac{n+1}{2}$ वें मद का आकार है

$\therefore \frac{100+1}{2}$वाँ $= 50.5$वाँ मद

यह 56 $c.f.$ में पड़ता है

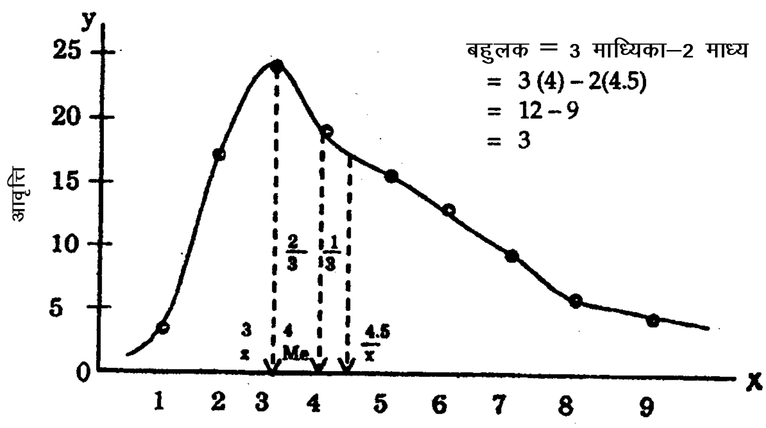
56 $c.f.$ के विरुद्ध माध्यिका $= 4$

(3) अधिकतम आवृत्ति 23 है।

23 आवृत्ति के विरुद्ध, बहुलक 3 है।

$\therefore \bar{x} = 4.5, \ M_e = 4, \ Z = 3$

हम उपयुक्त समंक को लेखाचित्र रूप में निम्न जैसा प्रदर्शित कर सकते हैं।



इस तरह, एक आदर्श (नियंत्रित) धनात्मक विषम वितरण में, $\bar{x}$ एक सिरे पर पड़ता है और Z दूसरे। $\bar{x}$ और Z के बीच, M_e पड़ता है, $\bar{x}, M_e$ के दाहिने तरफ

टिप्पणी

$\frac{1}{3}$ दूरी पर पड़ता है और Z दो तिहाई दूरी पर M_e के बायीं ओर पड़ता है। इस संबंध के आधार पर माध्यों के बीच, हमें ''आनुभविक संबंध सूत्र'' प्राप्त हो सकता है...........बहुलक = 3 माध्यिका–2 माध्य। यह आनुभविक संबंध प्रो. कार्ल पियरसन द्वारा प्रतिपादित किया गया। वह लाभदायक है तीन में किसी एक औसत को प्राप्त करने में जब दो दिया गया है। इस सूत्र से, हमें दूसरे समीकरण निम्न जैसे प्राप्त हो सकते हैं :

बुनियादी सूत्र..............$Z = 3M_e - 2\bar{x}$

हम निम्नलिखित समीकरण को सिद्ध कर सकते हैं आधारभूत सूत्र को सरल करके।

(1) $\bar{x} = \frac{1}{2}(3M_e - Z)$

$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$2\bar{x} = 3M_e - Z$$
$$\bar{x} = \frac{1}{2}(3M_e - Z)$$

(2) $M_e = \frac{2}{3}(\bar{x} - Z) + Z$

$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$3M_e = 2\bar{x} + Z$$
$$M_e = \frac{1}{3}(2\bar{x} + Z)$$
$$M_e = \frac{2}{3}\bar{x} + \frac{1}{3}Z$$
$$M_e = \frac{2}{3}\bar{x} - \frac{2}{3}Z + Z$$
$$M_e = \frac{2}{3}(\bar{x} - Z) + Z$$

(3) $\bar{x} = Z = 3(\bar{x} - M_e)$

$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$Z = 3M_e - 3\bar{x} + \bar{x}$$
$$-Z = -3M_e + 3\bar{x} - \bar{x}$$
$$\bar{x} - Z = 3(\bar{x} - M_e)$$

(4) $(\bar{x} - M_e) = \frac{1}{3}(\bar{x} - Z)$

$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$3M_e - 2\bar{x} = Z$$
$$3M_e - 3\bar{x} + \bar{x} = Z$$
$$\bar{x} - Z = 3\bar{x} - 3M_e$$
$$\bar{x} - Z = 3(\bar{x} - M_e)$$
$$3(\bar{x} - M_e) = \bar{x} - Z$$

(5) $\bar{x} - M_e = \frac{1}{2}(M_e - Z)$

$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$2\bar{x} = 3M_e - Z$$
$$\bar{x} = \frac{3}{2}M_e - \frac{1}{2}Z$$
$$\bar{x} = \frac{1}{2}M_e + M_e - \frac{1}{2}Z$$

टिप्पणी

$$\bar{x} = \frac{1}{2}M_e - \frac{1}{2}Z + M_e$$

$$\bar{x} - M_e = \frac{1}{2}M_e - \frac{1}{2}Z$$

$$\bar{x} - M_e = \frac{1}{2}(M_e - Z)$$

उदाहरण 3.32: दिए गए निम्न दो औसतों से, तीसरा औसत ज्ञात करें–

(a) $z = 50$ और $M_e = 45$, $\bar{x} = ?$

(b) $\bar{x} = 20.2$ और $M_e = 22.1$, $z = ?$

(c) $M_e = 42$ और $z = 40$, $\bar{x} = ?$

(d) $z = 500$ और $\bar{x} = 450$, $M_e = ?$

(e) $x = 20$ और $M_e = 22$, $z = ?$

हलः

(a)
$$z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$50 = 3(45) - 2\bar{x}$$
$$50 = 135 - 2\bar{x}$$
$$2\bar{x} = 135 - 50$$
$$= 85$$
$$\therefore \bar{x} = 42.5$$

(b)
$$z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$z = 3(22.1) - 2(20.2)$$
$$z = 66.3 - 40.4$$
$$z = 25.9$$

(c)
$$z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$40 = 3(42) - 2\bar{x}$$
$$40 = 126 - 2\bar{x}$$
$$2\bar{x} = 126 - 40$$
$$2\bar{x} = 86$$
$$\therefore \bar{x} = 43$$

(d)
$$Z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$500 = 3M_e - 2(450)$$
$$3M_e = 500 + 900$$
$$3M_e = 1400$$
$$M_e = \frac{1400}{3} = 466.67$$

(e)
$$z = 3M_e - 2\bar{x}$$
$$z = 3(22) - 2(20)$$
$$z = 66 - 40$$
$$z = 26$$

उदाहरण 3.33: निम्न 8 परिवारों की मासिक आय से, $\bar{x}$, M_e और z ज्ञात करें।

परिवारः	A	B	C	D	E	F	G	H
आय (रु.):	70	10	500	75	08	250	08	42

टिप्पणी

हलः हम मूल्य को क्रमवार व्यवस्थित करें।

1	08
2	08
3	10
4	42
5	70
6	75
7	250
8	500
	$\Sigma fx = 963$

माध्यिकी $\frac{n+1}{2}$ वें मद का आकार है।

$\therefore$ $\frac{8+1}{2}$ वाँ = 4.5वाँ

यह 42 और 70 के बीच पड़ता है

$$M_e = \frac{42+70}{2} = \frac{112}{2} = 56$$

z का मान अधिकतम आवृत्ति है।

$\therefore$ मूल्य 8 सिर्फ दो बार घटती है $\therefore$ $z = 8$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{963}{8} = 120.375$$

$$\bar{x} = 120.375 > M_e = 56 > z = 8$$

बहुलक के गुण– बहुलक की अवधारणा आसानी से समझी जा सकती है और बहुत स्थितियों में दैनिक रोजमर्रा में प्रयुक्त होती है। निम्न लाभ हैं बहुलक के–

1. यह आसानी से समझी जाती है और इसका सामान्य तथा सूक्ष्म प्रयोग है।
2. यह चर के आत्यंतिक मूल्यों को हटा देती है और आकस्मिक मदों से प्रभावित नहीं होती है।
3. यह सिर्फ अधिकतम आवृत्ति से संबंधित है और दूसरे मदों से नहीं।
4. यह ज्यादातर स्थितियों में सिर्फ निरीक्षण से ही निर्धारित की जा सकती है।

बहुलक के दोष– बहुलक निम्नलिखित सीमाओं से ग्रसित होता है–

1. यह कई बार गलत परिभाषित और अनियत होता है।
2. यह ज्यादातर अनिश्चित होती है और, इसलिए, निर्धारित करना कठिन है।
3. यह किसी सरल अंकगणितीय विधि से निर्धारित होने में असमर्थ है।
4. यह सभी अपवाद की स्थितियों को नकार देती है और, इसलिए, उन स्थितियों में लाभदायक नहीं है जहाँ भारों को आत्यंतिक मूल्यों को देना होता है।
5. यह आगे के अंकगणितीय विवेचना के लिए उपयुक्त नहीं है।
6. बहुलक को मदों की संख्या से गुणा करने पर मदों का कुल मूल्य नहीं देती है, और यह समूह का पूरा प्रतिनिधि अंक नहीं है।

टिप्पणी

सीमितताओं के बावजूद, व्यवसाय में बहुलक का प्रयोग दिन-व-दिन बढ़ रहा है। यह व्यवसायिक पूर्वानुमानों के लिए विश्वसनीय पथ-प्रदर्शक जैसा व्यवहार करती है। यह बहुत महत्व का है उत्पादन या निर्गम का अध्ययन करने में जो तुलना के लिए मानक जैसा व्यवहार करता है।

3.7 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य श्रेणी के 'n' परिमाण के गुणनफल का nth वर्ग मूल है। यह प्राप्त किया जाता है। मदों के मूल्यों के एक साथ गुणा करके और गुणनफल का वर्ग मूल मदों की संख्या के संगत निकालकर। इस तरह, दो मदों के गुणनफल का वर्गमूल और तीन मदों के गुणनफल का घनमूल गुणोत्तर माध्य है।

व्यवसाय और प्रबंधन के क्षेत्र में, एक का सावधि में औसत प्रतिशत दर के परिवर्तन से सम्बन्धित विभिन्न प्रकार की समस्या उत्पन्न होती रहती है। इन स्थितियों में, समान्तर माध्य, उचित माध्य नहीं है काम में लाने के लिए। इसलिए, हम लोग इन स्थितियों में उपयुक्तता से गुणोत्तर माध्य प्रयुक्त कर सकते हैं। संकेत के अनुसार,

$$\text{G.M.} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \ldots\ldots x_n}$$

जहाँ G.M. गुणोत्तर माध्य के लिए प्रयुक्त होता है : 'n' मदों की संख्या के लिए और $x_1, x_2, x_3, \ldots . x_n$ चरों के मूल्य के लिए। श्रेणी के मूल्यों का वास्तविक गुणनफल (i.e., $2 \times 4 \times 8 = 64$) अपरिवर्तित रहेगा जब गुणोत्तर माध्य का मूल्य प्रतिस्थापित किया जाता है (i.e., $4 \times 4 \times 4 = 64$) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य के लिए, उसी तरह 4 और 9 का गुणोत्तर माध्य 6 है, i.e., $\sqrt[2]{4 \times 9} = \sqrt[2]{6 \times 6}$ ।

जब श्रेणी में मदों की संख्या तीन से ज्यादा होती है, गुणोत्तर माध्य के प्रगणन की विधि का अनुगमन करना कठिन हो जाता है। इस कठिनाई का निवारण करने के लिए, प्रत्येक आकार का लघुगुणक (logarithm) प्राप्त किया जाता है गणितीय (लघुगुणक) तालिका से। सभी मूल्यों का लघुगुणक जोड़ा जाता है और मदों की संख्या से विभाजित की जाती है। इस प्रकार से प्राप्त भागफल का प्रति लघुगुणक (anti-logarithm) वांछित गुणोत्तर माध्य है। सूत्र है,

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{\text{Log}\,x_1 + \text{Log}\,x_2 + ----+ \text{Log}\,x_n}{\text{n}}\right]$$

$$= \text{Antilog}\,\frac{\Sigma \log x}{n}$$

उदाहरण: 2, 4, 8 का G.M.

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\log 2 + \log 4 + \log 8}{3} \text{ का}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{0.3010 + 0.6021 + 0.9031}{3}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{1.8062}{3} = \text{Antilog } 0.6012$$

$$= 3.999 \approx 4$$

उदाहरण 3.34: सुगर मिल का उत्पादन (क्विंटल में) 10 प्रतिष्ठानों का माण्डया जिले में नीचे दी गई है, गुणोत्तर माध्य प्राप्त करें।

टिप्पणी

फार्म संख्याः	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
डत्पादन (क्विंटल में):	7.5	13	18.5	20.5	5.2	23	24	25	26	28

हलः

x		$\log x$
7.5	....	0.8751
13.0	....	1.1139
18.5	....	1.2672
5.2	....	0.7160
23.0	....	1.3617
24.0	....	1.3802
25.0	....	1.3979
26.0	....	1.4150
28.0	....	1.4472
		$\Sigma \log x = 12.2860$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{\text{n}}$$

$$= \text{Antilog } \frac{12.2860}{10}$$

$$= \text{Antilog } 1.2286$$

$$= 16.92$$

उदाहरण 3.35: निम्नलिखित समंक का गुणोत्तर माध्य परिकलित करें।

3884, 382, 63, 8, 0.4, 0.03, 0.009, 0.0005

हलः

x		$\log x$	
3884	....	3.5893	
382	....	2.5821	
63	....	1.7993	$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{n}$
8	....	0.9031	
0.4	....	$\bar{1}.6021$	$= \text{Antilog } \frac{1.6062}{8}$
0.03	....	$\bar{2}.4771$	
0.009	....	$\bar{3}.9542$	$= \text{Antilog } 0.200775$
0.0005	....	$\bar{4}.6990$	$= 1.588$
		$\Sigma \log x = 1.6062$	

टिप्पणी

उदाहरण 3.36: निम्न के लिए गुणोत्तर माध्य परिकलित करें।

35, 250, 18.7, 234.6, 1.06, 98.72, 0.987

हल:

x		log x
35	....	1.5441
250	....	2.3979
18.7	....	1.2718
234.6	....	2.3703
1.06	....	0.0253
98.72	....	1.9944
0.987	....	$\bar{1}.9943$

$\Sigma \log x = 9.5981$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{9.5981}{7}$$

$$= \text{Antilog}\ 1.3712$$

$$= 23.51$$

उदाहरण 3.37: निम्नलिखित से गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें।

क्रम संख्या	:	1	2	3	4
मूल्य	:	100	20	8	0.6

हल:

x		log x
1000	....	3.000
20	....	1.3010
8	....	0.9031
0.6	....	$\bar{1}.7782$

$\Sigma \log x = 4.9823$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{4.9823}{4}$$

$$= \text{Antilog}\ 1.2456$$

$$= 17.60$$

उदाहरण 3.38: निम्न का G.M. परिकलित करें।

375, 0.05, 0.5672 और 0.0854

हलः

x		log x
375	....	2.5740
0.05	....	$\bar{2}.6990$
0.5672	....	$\bar{1}.7538$
0.0854	....	$\bar{2}.9315$
		Σ logx = 2.9583

$$G.M. = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{-4}{4} + \frac{3.9583}{4}$$

$$= \text{Antilog}\ \bar{1}.9896$$

$$= 0.9763$$

टिप्पणी

(**नोट**– $\bar{1}$ परिवर्तित की जाती है– 4 और + 3 में)

उदाहरण 3.39: निम्न का गुणोत्तर माध्य प्रगणित करें :

475, 0.8974, 12.5 और 0.0081

हलः

x		log x
475	....	2.6767
0.8974	....	1.9530
12.5	....	1.0969
0.0081	....	3.9085
		Σ log x = 1.6351

$$G.M. = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{1.6351}{4}$$

$$= \text{Antilog}\ 0.40877$$

$$= 2.564$$

उदाहरण 3.40: निम्न का G.M. परिकलित करें।

2574, 75, 0.8, 0.075

हलः

x		log x
2574	....	3.4106
75	....	1.8751
0.8	....	$\bar{1}.9031$
0.075	....	$\bar{2}.8751$
		Σ log x = 4.0639

$$G.M. = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{4.0639}{4}$$

$$= \text{Antilog}\ 1.01597$$

$$= 10.37$$

टिप्पणी

उदाहरण 3.41: निम्न का गुणोत्तर माध्य परिकलित करें।

224, 13.65, 0.0456 और 0.5431

हलः

x		log x
224	....	2.3502
13.65	....	1.1351
0.0456	....	$\bar{2}.6590$
0.5431	....	$\bar{1}.7349$
		$\Sigma \log x = 1.6351$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog } \frac{1.8792}{2}$$

$$= \text{Antilog } 0.4698$$

$$= 2.949$$

उदाहरण 3.42: 1961 में पिछले वर्ष की तुलना में प्रति व्यक्ति व्यय 32% बढ़ गया; दूसरे वर्ष 40% बढ़ गया उसके बाद 50%। पिछले तीन वर्षों में प्रति व्यक्ति व्यय की वृद्धि की औसत दर परिकलित करें। स्पष्ट रूप से कारण का उल्लेख करें माध्य के चुनाव का।

हलः चूँकि गुणोत्तर माध्य अधिक उपयुक्त है समानुपातों और प्रतिशतों के लिए, हम उसका चुनाव करेंगे अनुपात प्रगणित करने के लिए।

वर्ष		परिवर्तन की दर	x_0	log x
1960	...	आधार वर्ष	100	—
1961	...	32%	132	2.1206
1962	...	40%	140	2.1461
1963	...	50%	150	2.1761
				$\Sigma \log x = 6.4428$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog } \frac{6.4428}{3}$$

$$= \text{Antilog } 2.1476$$

$$= 140.5$$

प्रति व्यक्ति औसत % वृद्धि है (140.5 – 100) = 40.5%

उदाहरण 3.43: औसत ज्ञात करें, जनसंख्या में वृद्धि दर जो प्रथम दशक में 20% से बढ़ी है, अगले में 30% से और तीसरे में 45%।

टिप्पणी

हलः

दशक	वृद्धि दर	रूपांतरण	
		x	log x
आधार	वर्ष	100	—
प्रथम	20%	120	2.0792
द्वितीय	30%	130	2.1139
तृतीय	45%	145	2.1614
		Σ log x = 6.3545	

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{6.3545}{3}$$
$$= \text{Antilog}\ 2.11816$$
$$= 131.3$$

∴ औसत % वृद्धि जनसंख्या में है (131.30 – 100) = 31.30%

उदाहरण 3.44: एक वस्तु की कीमत 8% से बढ़ती है 1978 से 79 में, 12.5% 1979 से 80 में और 77% 1980 से 1981 में। क्या औसत वृद्धि है?

वर्ष	वृद्धि दर	रूपांतरण	
		x	log x
1977-78	आधार वर्ष	100	—
1978-79	8%	108	2.0334
1979-80	12.5%	112.5	2.0511
1980-81	77%	177	2.2480
		Σ log x = 6.3325	

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{6.3325}{3}$$
$$= \text{Antilog}\ 2.1108$$
$$= 129.0$$

∴ वस्तु की कीमत में औसत वृद्धि है (129.00 – 100) = 29%

उदाहरण 3.45: फैक्ट्री का तीन वर्षों में वार्षिक वृद्धि दर है 5.0, 7.5 और 2.5। औसत वृद्धि ज्ञात करें।

हलः वृद्धि दर हैं 5%, 7.5% और 2.5%

वर्ष	वृद्धि दर	रूपांतरण	
		x	log x
1.	आधार वर्ष	100	—
2.	5%	105	2.0212
3.	7.5%	107.5	2.0315
4.	2.5%	102.5	2.0107
		Σ log x = 6.0634	

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{n}$$
$$= \text{Antilog}\ \frac{6.0634}{3}$$
$$= \text{Antilog}\ 2.02113$$
$$= 105.0$$

औसत वृद्धि दर है (105.00 – 100) = 5%

टिप्पणी

उदाहरण 3.46: निम्न काल श्रेणी पर विचार करें वार्षिक बिक्री का स्टार और कम्पनी लिमिटेड, चार वर्षों के लिए और बिक्री में प्रति वर्ष औसत परिवर्तन की दर ज्ञात करें,

बिक्री,

10,000 रु., 8,000 रु., 12,000 रु. और 15,000 रु.

हलः

वर्ष	बिक्री (रु.)	वृद्धि /ह्रास	रूपांतरण	log x
पहला	10,000	आधार वर्ष	-	-
दूसरा	8,000	-20%	80	1.9031
तीसरा	12,000	+50%	150	2.1761
चौथा	15,000	+25%	125	2.0969
				$\Sigma \log x = 6.1761$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{n}$$

$$= \text{Antilog } \frac{6.1761}{3}$$

$$= \text{Antilog } 2.0587 = 114.50$$

बिक्री की औसत वृद्धि है (114.50 – 100) = 14.50%

उदाहरण 3.47: निम्नलिखित के लिए गुणोत्तर माध्य प्रगणित करें।

0.067, 0.008, 0.0801, 0.005, 0.125

हलः

x		log x	
0.067	....	2.8261	$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{\Sigma \log x}{n}$
0.008	....	3.9031	
0.0801	....	2.9036	$= \text{Antilog } \frac{8.4287}{5}$
0.005	....	3.6990	
0.125		1.0969	$= \text{Antilog } \frac{10}{5} + \frac{2.4287}{5}$
		$\Sigma \log x = 8.4287$	$= \text{Antilog } 2 + 0.4857$ $= \text{Antilog } 2.4857$ $= 0.0306$

गुणोत्तर माध्य की अंकगणितीय विशेषताए (Mathematical Mean of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य की निम्न विशेषताए हैं–

(i) अगर प्रत्येक मूल्य की जगह G.M. रखा गया है, दिये मूल्यों के गुणनफल में कोई अंतर नहीं होगा और G.M. मूल्य के गुणनफल में।

(ii) मूल्यों के log के विचलनों का योग G.M. के log से शून्य के बराबर होता है।

x	log x	log G.M. = (.91417) (d)
3	0.4771	- 0.437075
7	0.8451	- 0.069075
12	1.0792	+0.165025
18	1.2553	+0.341125
	Σ log x = 3.6567	Σ d = 0

$$\text{G.M.} = \text{Antilog } \frac{3.6567}{4} = \text{Antilog } 0.91417 = 8.208$$

गुणोत्तर माध्य के गुण (Merits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य विशेष स्थितियों में प्रयुक्त होती है और इसके निम्न लाभ हैं–

(i) यह निश्चित मान है, जबकि चर के मूल्य शून्य से अधिक हों।

(ii) यह समूह में सब समंक पर आधारित है।

(iii) यह बड़े मदों को कम भारण देता है और छोटे को अधिक।

(iv) यह विशेष रूप से लाभदायक है जब हम समानुपातों पर कार्य करते हैं।

(v) यह अंकगणितीय और बीजगणितीय जोड़-तोड़ के लिए सहज अनुगामी है।

गुणोत्तर माध्य के दोष (सीमाएं) (Demerits of Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य निम्नलिखित सीमाओं से ग्रसित है–

(1) यह प्रयुक्त नहीं हो सकती है जब कोई एक मद '0' को गुणा किया जाता है, सभी मदों का गुणनफल '0' होगा।

(2) यह ऐसे बिन्दु पर पड़ सकता है जहाँ बहुत कम (या कोई नहीं) वास्तविक माप पड़े।

(3) इसमें काफी परिकलन करना पड़ता है और प्रगणित करने में कठिन है।

(4) यह समान्तर माध्य की अपेक्षा कम आसानी से समझा जाता है।

टिप्पणी

सीमाओं के बावजूद, गुणोत्तर माध्य विभिन्न सामाजिक और आर्थिक संवृत्तियों का अध्ययन करने में उपयुक्त है जहाँ छोटे मदों को बड़ा भार दिया जाना इच्छित है। गुणोत्तर माध्य विशेष रूप से आपेक्षिक अंतरों पर कार्य करने में लाभदायक है निरपेक्ष अंतरों के विरुद्ध सूचकांक (Index Number) प्रगणित करते वक्त।

3.8 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य या औसत एक चर के सभी मदों की संख्या का योगफल चर के मूल्यों के व्युत्क्रमानुपातों के योग से विभाजन (division) है। यह विशिष्ट औसत है जो ऐसे प्रश्नों को हल करता है जो 'समय दर' में अभिव्यक्त होता है जो बदलता है समय किमी. के अनुसार। प्रति घंटा, घंटा प्रति किमी. इकाई प्रति दिन, कीमत प्रति इकाई आदि। हरात्मक माध्य उपयुक्त है सिर्फ जब,

''समय कारक चर है और किया गया कार्य नियत रहता है'' इस तरह, हरात्मक माध्य वही परिणाम देती है जैसा भारित समान्तर माध्य जब किया गया कार्य समान रहता है वर्ना नहीं। सूत्र रूप में,

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+------\frac{1}{x_n}}$$

$$= \text{व्युत्क्रमानुपाती } \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+------\frac{1}{x_n}}{n} \text{ का}$$

$$= \frac{n}{\Sigma Rx} \text{ या व्युत्क्रमानुपाती } \frac{\Sigma Rx}{n} \text{ का}$$

उदाहरण 3.48: निम्नलिखित के लिए हरात्मक माध्य परिकलित करें।

35, 250, 18.7, 234.6, 1.06, 98.72, 0.987

हलः

x		Rx
35	-------	0.02857
250	-------	0.00400
18.7	-------	0.05340
234.6	-------	0.00426
1.06	-------	0.94340
98.72	-------	0.01013
0.987	-------	1.01317
		ΣRx = 2.05701

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{7}{2.05701} = 3.402998$$

उदाहरण 3.49: निम्नलिखित के लिए हरात्मक माध्य परिकलित करें।

375, 0.05, 0.5672, 0.0854

हलः

x		Rx
375	-------	0.002667
0.05	-------	20.000000
0.05672	-------	17.630465
0.0854	-------	11.709602
		Σ Rx = 48.342734

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{4}{48.342734} = 0.082742$$

उदाहरण 3.50: निम्नलिखित के लिए हरात्मक माध्य प्रगणित करें।

475, 0.8974, 12.5 और 0.008।

हलः

x		Rx
475	-------	0.0021052
0.8974	-------	1.1143302
12.5	-------	0.0800000
0.0081	-------	123.4567900

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{4}{124.6532254} = 0.032089$$

Σ Rx = 124.6532254

उदाहरण 3.51: निम्नलिखित के लिए हरात्मक माध्य परिकलित करें।

2574, 75, 0.8, 0.075

हलः

x		Rx
2574	-------	0.0003885
75	-------	0.0133333
0.8	-------	1.2500000
0.075	-------	13.3333333
		Σ Rx = 14.5970551

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{4}{14.5970551} = 0.2740278$$

उदाहरण 3.52: एक आदमी कार से 3 दिनों तक यात्रा किया। उसने प्रत्येक दिन 480 किमी. की दूरी तय की। पहले दिन उसने 10 घंटे की यात्रा की 48 किमी. घंटा की दर से, दूसरे दिन 12 घंटे 40 किमी./घंटा और अंतिम दिन उसने 15 घंटे तक यात्रा की 32 किमी./घंटा की दर से। उसकी औसत चाल क्या थी?

टिप्पणी

हलः इस प्रश्न में, तय की गई दूरी समान है। हम लोग दोनों विधियों से इस प्रश्न को हल कर सकते हैं, i.e., भारित समान्तर माध्य और हरात्मक माध्यं

(i) भारित समान्तर माध्य

चाल किमी./घंटा X	यात्रा का समय W	
48	10	480
40	12	480
32	15	480
	Σ W = 37	Σ WX = 1440

$$\bar{x}w = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{1440}{37}$$

= 38.92 किमी./घंटा

(ii) हरात्मक माध्य

x		Rx
48	-------	0.02083
40	-------	0.02500
32	-------	0.03125
		Σ Rx = 0.07708

$$H.M. = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{3}{0.07708}$$

= 38.92 किमी./घंटा

उदाहरण 3.53: एक हवाई जहाज एक वर्ग के चारों तरफ उड़ती है जिसकी भुजा 100 किमी. लम्बी है, पहली भुजा को 100 किमी. प्रति घंटा की दर से, दूसरी भुजा 200 किमी. प्रति घंटा की दर से, तीसरी भुजा 300 किमी. प्रति घंटा और चौथी भुजा 400 किमी. प्रति घंटे की दर से तय करती है। वायुयान की औसत चाल क्या है?

हलः इस प्रश्न में, तय की गई दूरी समान है। हम प्रश्न को दोनों विधियों से हल कर सकते हैं, i.e., भारित स.मा. और गुणोत्तर माध्य,

(i) भारित समान्तर माध्य

चाल किमी./घंटा X	जितने मिनट यात्रा की गई W	WX
100	60	6,000
200	30	6,000
300	20	6,000
400	15	6,000
	Σ W = 125	Σ WX = 24000

$$\bar{x}w = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{24000}{125}$$

= 192 किमी./घंटा

टिप्पणी

(ii) हरात्मक माध्य

X		Rx
100	-------	0.01000
200	-------	0.00500
300	-------	0.00333
400	-------	0.00250
		Σ Rx = 0.02083

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{4}{0.02083}$$

= 192 किमी./घंटा

उदाहरण 3.54: एक निवेशक प्रत्येक महीने एक कम्पनी का 1200 रु. मूल्य का शेयर खरीदता है। पहले चार महीनों में उसने शेयर खरीदा 10 रु., 12 रु., 15 रु. और 20 रु. कीमत पर। औसत चुकाई गई कीमत परिकलित करें।

हलः इस प्रश्न में, निवेशित पूँजी बराबर है। हम प्रश्न को दोनों विधियों से हल कर सकते हैं i.e., भारित समान्तर माध्य और हरात्मक माध्य–

(i) भारित समान्तर माध्य

कीमत प्रति शेयर X	खरीदे गए शेयरों की संख्या W	WX
10	120	1200
12	100	1200
15	80	1200
20	60	1200
	Σ W = 360	Σ WX = 4800

$$\bar{x}w = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{4800}{360}$$

= 13.33 रु./शेयर

(ii) हरात्मक माध्य

X	Rx
10	0.100000
12	0.083333
15	0.066666
20	0.050000
	Σ Rx = 0.299999

$$\bar{x}w = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{4}{0.299999}$$

= 13.33 रु0/शेयर

उदाहरण 3.55: एक फैक्टरी में, एक इकाई कार्य A द्वारा 4 मिनट में पूर्ण की जाती है, B द्वारा 5 मिनट में, C द्वारा 6 मिनट में और D द्वारा 10 मिनट में। उनका औसत लिया गया समय प्रति इकाई क्या है?

हल:

टिप्पणी

मिनट प्रति इकाई x		Rx
4	-------	0.25000
5	-------	0.20000
6	-------	0.16666
10	-------	0.10000
		$\Sigma Rx = 0.71666$

$$\bar{x}w = \frac{n}{\Sigma Rx}$$

$$= \frac{4}{0.71666}$$

$= 5.58145$ मिनट/इकाई

उदाहरण 3.56: टंकक A एक पत्र को 5 मिनट में टंकित कर सकता है, B दस मिनट में, और C 15 मिनटों में। क्या है टंकित पत्र की औसत संख्या प्रति घंटा प्रति इकाई।

पत्र प्रति मिनट x		Rx
5	-------	0.20000
10	-------	0.10000
15	-------	0.06666
		$\Sigma Rx= 0.36666$

$$\bar{x}w = \frac{n}{\Sigma Rx}$$

$$= \frac{3}{0.36666}$$

$= 8.18197$ मिनट प्रति इकाई

औसत पत्रों की संख्या प्रति घंटा है $= \dfrac{60 \times 1}{8.18197}$

$= 7.3332$ पत्र प्रति घंटा

हरात्मक माध्य की विशेषताएं (Properties of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य की निम्नलिखित विशेषताएं हैं–

(i) हरात्मक माध्य नियत है और सबसे छोटे मूल्यों को सबसे अधिक भार प्रदान करती है जबकि सबसे बड़े मूल्यों को सबसे छोटा भार।

(ii) हरात्मक माध्य दिए मदों के व्युत्क्रम के समान्तर माध्य का व्युत्क्रम है।

हरात्मक माध्य के गुण (Merits of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य विशेष स्थितियों में प्रयुक्त होती है जहाँ एक कारक नियत होता है और दूसरा चर। निम्नलिखित लाभ हैं–

(1) यह दृढ़ता से परिभाषित है और सभी अवलोकनों पर आधारित।

(2) यह आगे के गणितीय कार्य साधन के लिए उपयुक्त है।

(3) यह सबसे अच्छा परिणाम देता है जहाँ समय और दर अध्ययनाधीन हैं।

हरात्मक माध्य के दोष (सीमाएं) (Demerits of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य की निम्नलिखित सीमाएं हैं–

(1) यह प्रगणित करने में आसान नहीं है।

(2) यह प्रयुक्त नहीं हो सकती है जब मदों में कोई एक '0' या ऋणात्मक है; क्योंकि जब मद '0' विभाजक जैसा प्रयुक्त होता है, मद शून्य होगा।

(3) यह वितरण को प्रदर्शित नहीं करता है जब तक कि भारण असमानुपाती नहीं दी गई हैं।

सीमाओं के बावजूद, हरात्मक माध्य उपयुक्त है दर और समय का औसत निकालने में। यद्यपि यह सामान्य तौर पर प्रयुक्त नहीं होता है, यह बहुत महत्त्व का है बहुत विशिष्ट स्थितियों में।

माध्यों के बीच सम्बन्ध (Relation between Means)

जब सभी चर के मूल्य समान हैं, समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य समान होते हैं। उदाहरण के लिए,

x	log x	Rx
3	0.4771	0.3333
3	0.4771	0.3333
3	0.4771	0.3333
	Σ log x = 1.4313	Σ Rx = 0.9999

$$\bar{x} = \frac{\Sigma d}{n} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\frac{\Sigma \log x}{m}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{1.4313}{3}$$

$$= \text{Antilog } 0.4771 = 3$$

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma Rx} = \frac{3}{0.9999} = 3$$

जब चरों के सभी मूल्य बराबर नहीं हैं, तब हम लोग निम्नलिखित सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं।

$$\text{A.M} > \text{G.M.} > \text{H.M.}$$

उदाहरण के लिए, अगर 'a' और 'b' दो धनात्मक मूल्य हैं जो आकार में बराबर नहीं हैं, औसत निम्न प्रगणित किए जा सकते हैं,

A.M.	G.M.	H.M.
$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$	$\sqrt[2]{a \times b}$	$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ या $\frac{2ab}{a+b}$

टिप्पणी

स्थिति 1: दो अवलोकनों का A.M. 25 है और उनका G.M. 15 है, उनका H.M. ज्ञात करें।

$\text{A.M.} = \dfrac{a+b}{2}$	$\text{G.M.} = \sqrt[2]{a+b}$	$\text{H.M.} = \dfrac{2ab}{a+b}$
$25 = \dfrac{a+b}{2}$	$15 = \sqrt{a \times b}$	$= \dfrac{2(225)}{50}$
$a + b = 50$	$ab = 15^2 = 225$	$= \dfrac{450}{50} = 9$

स्थिति 2: अगर G.M. 60 है, H.M. 28.24 है दो अवलोकनों का, उनका A.M. क्या है?

$\text{G.M.} = \sqrt[2]{a \times b}$	$\text{H.M.} = \dfrac{2ab}{a+b}$	$\text{A.M.} = \dfrac{a+b}{2}$
$60 = \sqrt[2]{a \times b}$	$28.24 = \dfrac{2(3600)}{a+b}$	$= \dfrac{254.9575}{2}$
$ab = 60^2 = 3600$	$a + b = \dfrac{7200}{28.24}$	127.47875
	$a + b = 254.9575$	

स्थिति 3: अगर दो अवलोकनों का A.M. 25 है और उनका H.M. 9 है, उनका G.M. ज्ञात करें।

$\text{A.M.} = \dfrac{a+b}{2}$	$\text{H.M.} = \dfrac{2ab}{a+b}$	$\text{G.M.} = \sqrt[2]{a \times b}$
$25 = \dfrac{a+b}{2}$	$9 = \dfrac{2ab}{50}$	$= \sqrt[2]{225}$
$a + b = 50$	$2ab = 450$	$= 15$
	$ab = 225$	

स्थिति 4: दो अवलोकनों का A.M. 12.5 है और उनका G.M. 12 है, H.M. ज्ञात करें।

$\text{A.M.} = \dfrac{a+b}{2}$	$\text{G.M.} = \sqrt[2]{a \times b}$	$\text{H.M.} = \dfrac{2ab}{a+b}$
$12.5 = \dfrac{a+b}{2}$	$12 = \sqrt[2]{ab}$	$= \dfrac{2(144)}{25}$
$a + b = 25$	$ab = 12^2 = 144$	$= \dfrac{288}{25} = 11.52$

इस तरह, किसी वितरण में जब चर के मूल्य आकार में भिन्न होते हैं, A.M., G.M. से बड़ी होती है और G.M., H.M. से।

हमें निम्न सूत्र भी हो सकता है जिसमें तीन माध्यों के बीच सम्बन्ध प्रदर्शित की जा सकती है,

$$G.M. = \sqrt{\bar{x} \times H.M.} \text{ or,}$$

$$(G.M.)^2 = \bar{x} \times H.M.$$

स्थिति 1: दो अवलोकनों का A.M. 25 है उनका G.M. 15 है, उनका H.M. ज्ञात करें।

$$(G.M.)^2 = A.M. \text{ x } H.M.$$

$$H.M. = \frac{(G.M.)^2}{A.M.} = \frac{15^2}{25} = \frac{225}{25} = 9$$

स्थिति 2. अगर दो अवलोकनों का G.M. और H.M. क्रमशः 60 और 28.24 है, A.M. ज्ञात करें।

$$(G.M.)^2 = A.M. \times H.M.$$

$$60^2 = 28.24 \text{ A.M.}$$

$$A.M. = \frac{60^2}{28.24} = \frac{3600}{28.24} = 127.47875$$

स्थिति 3: अगर दो अवलोकनों का A.M. और H.M. क्रमशः 25 और 9 हैं, G.M. ज्ञात करें।

$$(G.M.) = \sqrt{A.M. \times G.M.} = \sqrt{25 \times 9}$$

$$= \sqrt{225} = 15$$

स्थिति 4. अगर दो अवलोकनों के A.M. और G.M. क्रमशः 12.5 और 12 हैं, H.M. ज्ञात करें।

$$(G.M.)^2 = A.M. \times H.M.$$

$$12^2 = 12.5 \text{ H.M.}$$

$$H.M. = \frac{12^2}{12.5} = \frac{144}{12.5} = 11.52$$

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप __________ स्तर का औसत कहलाती है।

   (क) एकल (ख) द्वितीय

   (ग) प्रथम (घ) चतुर्थ

2. समान्तर माध्य है __________ क्रम का औसत।

   (क) द्वितीयक क्रम का (ख) प्रथम क्रम का

   (ग) तृतीय क्रम का (घ) चतुर्थ क्रम का

3. माध्यिका और बहुलक है __________ औसत।

   (क) स्थानीय (ख) अनुभविक

   (ग) स्थैतिक (घ) भौगोलिक

4. माध्यिका क्रमबद्ध मूल्यों को __________ बराबर भागों में बांटती है।

   (क) एक (ख) दो

   (ग) ∞ (घ) शून्य

5. मदों के विचलनों का योग समान्तर माध्य से हमेशा__________ होता है।

   (क) एक (ख) तीन

   (ग) चार (घ) दो

6. निम्न चतुर्थक है __________ चतुर्थक।

   (क) पहला (ख) दूसरा

   (ग) तीसरा (घ) चतुर्थ

7. माध्यिका __________ चतुर्थक है।

   (क) पहला (ख) निम्न

   (ग) दूसरा (घ) उच्च

8. तीसरा चतुर्थक __________ चतुर्थक है।

   (क) ऊपरी (ख) निचला

   (ग) निम्न (घ) उच्च

9. बहुलक घटित होता है __________ आवृत्ति के साथ।

   (क) अधिकतर (ख) न्यूनतम

   (ग) बराबर (घ) इनमें से कोई नहीं

टिप्पणी

10. गुणोत्तर माध्य है __________ गुणनफल का मूल श्रेणी के 'n' परिमाण का।
    (क) शून्य प्रकिक्रया के   (ख) "n" परिमाण के
    (ग) $\sqrt{n}$ परिमाण के   (घ) n^2 परिमाण के
11. बहुलक = __________ −2 माध्यिका।
    (क) 3 समान्तर माध्य   (ख) 3 गुणोत्त्र माध्य
    (ग) 3 हरात्मक माध्य   (घ) इनमें से कोई नहीं
12. हरात्मक माध्य है मदों की संख्या जिसका विभाजन __________ चर के मूल्य के योगफल के।
    (क) समानुपाती   (ख) व्युत्क्रमानुपाती
    (ग) समानुपाती और व्यत्क्रमानुपाती   (घ) इनमें से कोई नहीं
13. दो अवलोकनों का A.M. 25 है, और उनका G.M. 15 है। H.M. का मूल्य है __________।
    (क) 18   (ख) 27
    (ग) 9   (घ) 1
14. दो अवलोकनों का G.M. और H.M. क्रमशः 60 और 28.24 है। A.M. है __________।
    (क) शून्य   (ख) 127.47
    (ग) एक   (घ) ∞

3.9 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (क)
2. (ख)
3. (ग)
4. (घ)
5. (घ)
6. (क)
7. (ग)
8. (क)
9. (क)
10. (ख)
11. (क)
12. (ख)
13. (ग)
14. (ख)

टिप्पणी

3.10 सारांश (Summary)

सांख्यिकी विश्लेषण संक्षिप्त सारांश अंकों को विकसित करने की कोशिश करता है जो संख्यात्मक समंक के बड़े समूह का वर्णन करता है। सबसे ज्यादा प्रयुक्त सारांश अंकों के समुच्चय स्थान निर्धारण का माप कहा जाता है, जिन्हें अधिकतर माध्य कहा जाता है, केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप या केन्द्रीय स्थान निर्धारण। एक औसत गणन का उद्देश्य अवलोकनों के समुच्चयों के लिए एक अकेला मान प्राप्त करने का है जो सभी मदों का प्रतिनिधि मूल्य है जो दिमाग आसानी से और जल्दी से समझ सके।

निम्नलिखित अपेक्षाएं एक आदर्श माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप से संतुष्ट होना चाहिए। (प्रो. यूले के अनुसार) (Yule)

इसे दृढ़ता से परिभाषित होना चाहिए, इसे समझने और परिकलन करने में आसान होना चाहिएं, इसे सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिये, इसे आगे गणितीय अभिक्रिया के उपयुक्त होना चाहिए, प्रतिदर्श के उच्चावचन (उतार-चढ़ाव) से कम से कम प्रभावित होना चाहिए, इसे आत्यंतिक अवलोकनों से कम से कम प्रभावित होना चाहिए।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप निम्नलिखित है जो सामान्यतः व्यवहार में प्रयुक्त होते है–

(i) समान्तर माध्यत (Arithmean mean)

(ii) माध्यिका (Median)

(iii) भूमिष्ठक (Made)

(iv) गुणोत्तर माध्य (Geometric mean) और

(v) हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

समानान्तर माध्य– दिए गए अवलोकनों के समुच्चय का माध्य उनके योगफल का अवलोकनों की संख्या से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i}{n}$; आवृत्ति वितरण की स्थिति में $\overline{X} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n}$

पद विचलन रीति द्वारा माध्य का गणन–यदि x_i और f_i का मान बड़ा होता है तो माध्य की गणना पद विचलन रीति द्वारा किया जाता है।

माना $d = x_i - A$ (जहाँ A एक यादृच्छिक मूल्य है।

तब $x = A + \frac{\Sigma fd}{n}$

वर्गीकृत या आवृत्ति वितरण की स्थिति में और भी आसानी से इसका परिकलन किया जा सकता है, मानकर

$d = \frac{x_i - A}{h}$ जहाँ $A -$ यादृच्छिक मूल्य

$\overline{X} = A + h\frac{\Sigma fd}{n}$ $h -$ वर्गान्तर का परिमाण

सामानान्तर माध्य की कई गणितीय विशेषताएं भी हैं।

समानान्तर माध्य को प्रो. यूले द्वारा बताई गई आदर्श गुणों की रूपरेखा के आधार पर इसे स्थिर या अचल माध्य भी कहते हैं।

वितरण के सभी मदों का आपेक्षिक महत्त्व एक सा नहीं होता है और ऐसी परिस्थितियों में मद के महत्त्व के समानुपाती भार प्रदान किया जाता है।

माना कि $w_1, w_2 ----w_n$ भार हैं जो चर के मूल्य $x_1 + x_2 + ---- x_n$ से क्रमशः संलग्न हैं। तब भारित समान्तर माध्य, समान तौर पर $\overline{X}w$ से द्योतित निम्न प्रकार से दिया जाता है।

$$\overline{X}w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + --- + w_nx_n}{w_1 + w_2 + --- + w_n} = \frac{\Sigma w_i x_i}{\Sigma w_i}$$

माध्यिका (Median) Md

वितरण की माध्यिका को परिभाषित किया जा सकता है चर के उस मूल्य से जो समान संख्या के अवलोकनों से अधिक हो और बराबर संख्या के अवलोकन इससे अधिक हो। i.e., यह ऐसा मूल्य है कि अवलोकनों की जितनी संख्या इससे ऊपर है उतनी ही अवलोकनों की संख्या इससे नीची है। इसीलिए माध्यिका सिर्फ स्थिति का माध्य (Positional average) है।

माध्यिका $= l + \frac{h}{f}\left(\frac{N}{2} - c\right)$ जहाँ l - माध्यिकी वर्ग की निचली सीमा है

f - माध्यिका वर्ग की आवृत्ति

h - माध्यिका वर्ग का परिमाण

N=Σ f - कूल आवृत्ति है

C - संचयी आवृत्ति है, माध्यिका वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग का

गुण, दोषों के आधार पर यह गणितीय अनुप्रयोग के उपयुक्त नहीं है।

श्रेणियों को कई विभाजक मूल्यों में बाँटा जा सकता है, यथा माध्यिका (दो बराबर विभाजक मूल्यों में), चतुर्थक (चार विभाजक मूल्यों में), दशमक (दस विभाजक मूल्यों में, शतमक (सौ विभाजक मूल्यों में) आदि।

भूमिष्ठक या बहुलक (Mode) Mo

बहुलक वह मूल्य है जो अवलोकनों के समुच्चय में सबसे ज्यादा बार आता है और जिसके चारों तरफ समुच्चय के दूसरे मूल्य संघनित रूप से इकट्ठे रहते हैं। आवृत्ति वितरण की स्थिति में, बहुलक चर का मूल्य है अधिकतम आवृत्ति के संगत।

सतत् आवृत्ति की स्थिति में, अधिकतम आवृत्ति के संगत वर्ग, बहुलक वर्ग कहलाता है और बहुलक का मूल्य अन्र्तगणन सूत्र से प्राप्त किया जाता है।

टिप्पणी

$$\text{बहुलक (Mode)} = l + \frac{h(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) - (f_2 - f_1)} = l + \frac{h(f_1 - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

जहाँ $l-$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा है,

$f_1 -$ बहुलक वर्ग की आवृत्ति है।

f_0 – बहुलक वर्ग के पूर्ववर्त्ती वर्ग की आवृत्ति है, f_2 बहुलक वर्ग के उत्तरवर्त्ती वर्ग की आवृत्ति है। और h बहुलक वर्ग का परिमाण है।

माध्य (M), माध्यिका (Md) और बहुलक के बीच आनुभविक सम्बन्ध है। यह प्रो. कार्ल पियर्सन द्वारा दिया गया है–

1. सममितीय वितरण की स्थिति में माध्य, माध्यिका और बहुलक संपाती होते हैं।

कार्ल पियर्सन का आनुभविक सम्बन्ध के अनुसार –

$$\frac{\mathrm{M} = \mathrm{M_d} = \mathrm{M_o}}{\mathrm{M_o} = \mathrm{M} - 3(\mathrm{M} - \mathrm{M_d})}$$

$$\Rightarrow \mathrm{M} - \mathrm{M_o} = 3(\mathrm{M} - \mathrm{M_d})$$

$$\Rightarrow \mathrm{M_o} = 3\mathrm{M_d} - 2\mathrm{M}$$

2. धनात्मक विषम वितरण के लिए

$$M > M_d > M_o$$

3. ऋणात्मक विषम वितरण के लिए

$$M_o > M_d > M$$

जब आवृत्ति वितरण नियमित नहीं होती है, तब बहुलक का मान समूहन विधि द्वारा निर्धारित की जाती है।

गुणोत्तर माध्य (Geometric mean), गुणोत्तर माध्य, सामान्यतः संक्षिप्त रूप (G.M.) – n प्रेक्षणों का समुच्चय उनके गुणनफल का X^th वर्गमूल है। इसलिए अगर $x_1, x_2, ---x_n$ दिए गए n प्रेक्षण हैं तब उनका G.M. दिया जाता है

$$\text{G.M.} = \sqrt[n]{x_1 - x_2 ---- * x_n} = (x_1 - x_2 ---- x_n)^{1/n}$$

$$\log \text{G.M.} = \frac{1}{n}\log(x_1 - x_2 --- x_n) = \frac{1}{n}\Sigma \log x_i$$

$$\therefore \text{G.M.} = Anti\log[\tfrac{1}{n}\Sigma \log x]$$

टिप्पणी

आवृत्ति वितरण की स्थिति में

$$\text{G.M.} = Anti \log[\Sigma f \log x]$$

वर्गीकृत या सतत आवृत्ति वितरण की स्थिति में, X के मूल्य संगत वर्गों के मध्यमान हैं।

भारित गुणोत्तर माध्य (Weighted Geometric Mean)

अगर चर के विभिन्न मूल्य $x_1, x_2 ---x_n$ बराबर महत्त्व के नहीं हैं और उन्हें भिन्न भार क्रमशः $w_1, w_2 ---w_n$ दिया जाता है। तब उनका भारित गुणोत्तर माध्य G.M.(W) दिया जाता है।

$$\text{G.M. (W)} = \left(\frac{w_1 w_2 \quad w_n}{x_1 x_2 --x_n}\right)^{1/n}$$

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

अगर $x_1, x_2 ---x_n$ प्रेक्षणों का दिया गया समुच्चय है, तब उनका रात्मक माध्य, संक्षिप्त में H.M. या H दिया जाता है।

$$\text{H} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = --- \frac{1}{x_n}\right]} = \frac{n}{\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x}} = \frac{1}{\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)}$$

आवृत्ति वितरण की स्थिति में

$$\text{H} = \frac{\Sigma f}{\Sigma\left(\frac{f}{x}\right)}$$

एक अकेला माध्य सभी व्यवहारिक समस्याओं के लिए उपयुक्त नहीं है। उदाहरण के लिए समान्तर माध्य की अनुशंसा आत्यंतिक प्रेक्षणों पर कार्य करते वक्त खुले सिरे वाले वर्गों के लिए उपयुक्त हैं। गुणात्मक (i.e., औसत वृद्धि, ईमानदारी, सुंदरता इत्यादि निकालने के लिए) समंक की स्थिति में माध्य के रूप में सिर्फ माध्यिका ही प्रयुक्त हो सकती है। जहाँ कारक चर है और किया गया दूरी नियत है और विशेष प्रकार के औसत दर या अनुपात की प्रगणना में हरात्मक माध्य का ही प्रयोग होता है।

चूँकि माध्य अकेला संख्यात्मक अंक है इसलिए किसी दिए गए वितरण की विशेषता प्रदर्शित करने के लिए इसके मूल्य की व्यख्या करने में उचित सतर्कता रखनी चाहिए नही ंतो यह बहुत भ्रामक निष्कर्ष की ओर निर्देशित कर देगी।

टिप्पणी

3.11 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **समान्तर माध्य:** Arithmetic mean
- **माध्यिका:** Median
- **चतुर्थक:** Quartiles
- **बहुलक:** Mode
- **गुणोत्तर माध्य:** Geometric Mean
- **हरात्मक माध्य:** Harmonic Mean
- **प्रयोगसिद्ध सम्बन्ध:** Empirical Relationship

3.12 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. एक अच्छे माध्य की कोई चार अपेक्षाएं बताएं।
2. 'समान्तर माध्य' को परिभाषित करें।
3. 'माध्यिका' का अर्थ बताएं।
4. आप एक 'बहुलक' से क्या समझते हैं?
5. समान्तर माध्य के क्या गुण हैं?
6. माध्यिका के दो उपयोग बताएं।
7. बहुलक के महत्त्व का उल्लेख करें।
8. अगर माध्य = 55 और माध्यिका = 48 बहुलक का मान ज्ञात करें। (z = 34)
9. माध्यों के क्या उपयोग हैं?
10. A.M., G.M. और A.M. के बीच सम्बन्ध का उल्लेख करें।
11. बहुलक को ज्ञात करने का आनुभविक (Empirical) सूत्र क्या है?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. निम्नलिखित तालिका एक शहर के 12 परिवारों की मासिक आय देती है:

क्रम संख्या:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
मासिक आय:	280	180	96	98	104	75	80	94	100	75	600	200

समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक परिकलित करें उपर्युक्त आय का। ($\bar{x}$ = 165.2, Me = 99, z = 75)

टिप्पणी

2. एक कक्षा टेस्ट में 15 छात्रों के अंक निम्न हैं :

6, 9, 10,12 18, 19, 23, 24, 28, 37, 48, 49, 53 और 60

ज्ञात करें $\bar{x}$, M_e, z, Q_1 और Q_3

($\bar{x}$ = 27.93, M_e = 23, z = 23, Q_1 = 12 और Q_3 = 48)

3. एक नियंत्रित विषम वितरण में $\bar{x}$ = 24.6 और z = 26.1।

माध्यिका ज्ञात करें (Me = 25.1)

4. निम्नलिखित वितरण का बहुलक प्रगणित करें।

आकारः	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
आवृत्तिः	24	32	28	16	37	10	8

(Z = 13.3)

5. प्राप्त टेलीफोन कॉलों की संख्या 245 क्रमवार एक मिनट अन्तराल पर एक एक्सचेंज का नीचे दर्शायी गई है।

कॉलों की संख्याः	0	1	2	3	4	5	6	7	
आवृत्तिः	14	21	25	43	51	40	39	12	= 245

परिकलित करें $\bar{x}$, M_e और z ($\bar{x}$ = 3.76, M_e = 4 और z = 4)

6. छूटे अंकों को ज्ञात करें।

माध्य = ? (3 माध्यिका–बहुलक) (1/2)

माध्य–बहुलक = ? (माध्य–बहुलक) (3)

माध्यिका = बहुलक + ? (माध्य–बहुलक) (2/3)

बहुलक = माध्य –? (माध्य–माध्यिका) (3)

7. चल के निम्न मूल्यों से, M_e, Q_1 और Q_3 ज्ञात करें।

3, 7, 12, 15, 25, 37, 48, 52, 69, 70, 73, 80, 82, 88, 92

(M_e = 52, Q_1 = 15, Q_3 = 80)

8. निम्न समंक से बहुलक, माध्यिका, दो चतुर्थक और माध्य परिकलित करें।

उम्रः	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
लोगों की संख्याः	100	140	200	360	300	240	140	120

(M_e = 40, z = 38.64, Q_1 =34, Q_3 = 47.8 और $\bar{x}$ = 40.31)

9. छूटी आवृत्ति ज्ञात करें निम्नलिखित वितरण से दुकानों की बिक्री 2400 रु. है।

बिक्री ('100' रु. में):	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
दुकानों की संख्याः	5	24	–	18	7

(छूटी आवृत्ति 20 है)

टिप्पणी

10. नीचे 140 उम्मीदवारों के प्राप्त अंक 'x' या अधिक का वितरण दिया गया है। माध्य अंक परिकलित करें।

X:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
C.f.:	140	133	118	100	75	45	25	9	2	0

(**संकेत**: यह संचयी आवृत्ति है, $\bar{x} = 51.21$)

11. निम्नलिखित अंक का गुणोत्तर माध्य परिकलित करें।

27.74, 475, 75, 5, 0.8, 0.08, 0.005, 0.009 (G.M. = 1.394)

12. एक आदमी लखनऊ से दिल्ली एक औसत चाल 30 मील प्रति घंटा से जाता है और उसी रास्ते लौटता है औसत चाल 60 मील प्रति घंटा। पूरी यात्रा का औसत चाल ज्ञात करें। (H.M. = 40 मीटर प्रति घंटा)

13. मान लें चर के मूल्य हैं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और दिये गये भार हैं क्रमशः 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1। समान्तर माध्य और भारित माध्य ज्ञात करें। ($\bar{x} = 4$, $\bar{x}_w = 3$)

14. वितरण का माध्य 4.9 है। निम्न की छूटी आवृत्ति ज्ञात करें।

X:	0	1	2	3	4	5	6	7
C.f. :	2	36	250	972	2269	?	2471	823

($\bar{x} = 3177$)

15. सभी कामगारों को दी गई मासिक वेतन का माध्य 92 रु. है एक प्रतिष्ठान में। कुशल और अकुशल कामगारों के मासिक वेतन का माध्य क्रमशः 100 रु. और 80 रु. है। उस प्रतिष्ठान में नियुक्त कुशल और अकुशल कामगारों का प्रतिशत निकालें। (कुशल = 60% कुशल = 40%)

16. 100 मदों का माध्य 30 पाया जाता है। अगर परिकलन के वक्त, दो मद गलती से 32 और 12 किये जाते हैं 23 और 11 के बदले, सही माध्य ज्ञात करें। ($\bar{x} = 29.90\%$)

17. एक वस्तु की कीमत 1995 से 1996 में 5% बढ़ती है, 1996 से 1997 में 9% और 1997 से 1998 में 13%। कीमत में औसत वृद्धि ज्ञात करें।

(G.M. = 25.6%)

18. निम्न मूल्यों का हरात्मक माध्य प्रगणित करें।

4257, 700, 77.3, 9.25, 0.787, 0.04238, 0.004728, 0.004527 (H.M. = 0.03272)।

3.13 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	– डी.एन. एलहांस वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	– एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	– S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	– S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamental of Statistics	– G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	– H.C. Saxena	S. Chand & Co.

टिप्पणी

इकाई—3

अध्याय 4 अपकिरण एवं विषमता (Dispersion and Skewness)

संरचना (Structure)

4.0 परिचय (Introduction)

अपकिरण के माप (विचरणता) 'द्वितीय स्तर के औसत' (Averages of Second Order) हैं। वे मूल्यों के विचलनों के औसत पर आधारित है जो केन्द्रीय प्रवृत्तियों x, M_e या Z से प्राप्त की जाती हैं। विचरणता चरों के मूल्यों की बुनियादी विशेषता है। इस प्रकार की विचरणता या अपकिरण 'एकरूपता में कमी' की चर्चा करता है।

द्वितीय स्तर का औसत, वह औसत है जो श्रेणी के सभी अंतरों से उन मदों का औसत है। इन अंतरों या विचलनों का औसत निकालने में, उनकी अनियमितायें हटा दी जाती हैं और अवनमन (Depression) का प्रतिनिधि अंक परिणामस्वरूप मिलता है।

टिप्पणी

निम्नलिखित केन्द्रीय प्रवृत्तियों और अपकिरण के बीच अंतर है।

केन्द्रीय प्रवृत्तियाँ	अपकिरण
1. प्रथम स्तर का औसत	1. द्वितीय स्तर का औसत
2. श्रेणी के बनावट पर प्रकाश नहीं डालती है।	2. वितरण के श्रेणी के बनावट पर प्रकाश डालती है।
3. अवलोकनों का विस्तृत अभिलक्षण नहीं प्रकट करती हैं	3. अवलोकनों का विस्तृत अभिलक्षण प्रकट करती है।
4. मदों के साथ सम्बन्ध स्थापित नहीं करती है।	4. व्यक्तिगत मदों के साथ सम्बन्ध स्थापित करती है।
5. वितरण की सम्पूर्ण तस्वीर नहीं प्रकट करती है।	5. वितरण का सम्पूर्ण तस्वीर प्रकट करती है।
6. मदों के संघनन की सिर्फ अवधारणा देती है।	6. केन्द्रीय प्रवृत्ति से विचलन की अवधारणा देती है।

सभी वितरण समरूप नहीं है। वे अपने औसतों के संख्यात्मक आकार में असदृश होते हैं और उनके अपनी बनावट में।

हम निम्न श्रेणियों को ध्यानपूर्वक अवलोकित करें।

श्रेणी I	15	15	15	15	15	15	15	15	15
श्रेणी II	11	12	13	14	15	16	17	18	19
श्रेणी III	3	6	9	12	15	18	21	24	27

समान्तर माध्य और माध्यिका प्रत्येक श्रेणी में समान है, i.e., 15, परन्तु श्रेणी के मद काफी भिन्न हैं। इसलिए केन्द्रीय प्रवृत्ति मूल्यों के विखराव का वर्णन करने में असफल हो जाती है। बनावट की प्रकृति को मापने के लिए, हमें द्वितीय स्तर के औसतों की आवश्यकता होती है, प्रथम स्तर के समर्थन में द्वितीय स्तर के औसतों को प्रगणित करने के उद्देश्य हैं–

(i) पहले स्तर के औसतों की उपयुक्तता को सुनिश्चित करना,

(ii) कार्य के निष्पादन की संगति का निर्धारण करना

(iii) श्रेणी में समरूपता के स्तर को प्रकट करना

तीन श्रेणियों में, जैसा ऊपर दिया गया है, प्रत्येक अलग ढंग से निर्मित हैं, यद्यपि उनके माध्य और माध्यिका समान हैं। पहली श्रेणी एकरूप से वितरित है और कोई अपकिरण नहीं है। दूसरी श्रेणी में थोड़ी सीमा तक अपकिरण है केन्द्रीय प्रवृत्ति से और एकरूपता में बाधा पड़ती है। तीसरी श्रेणी में उच्च स्तर का अपकिरण है और मदों के बीच एकरूपता नहीं है। इस तरह, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अधिक है अपकिरण, तो वितरण में एकरूपता कम होगी।

पद 'अपकिरण (Dispersion)' या 'विचरण (Variation) या 'विचलन (deviation)' का अध्ययन किया जाता है दो मापों–निरपेक्ष (Absolute) और सापेक्ष (Relative) के संदर्भ में। सापेक्ष माप अनुपातों या प्रतिशत में अभिव्यक्त की जाती है और वे तुलनात्मक अध्ययन के उपयुक्त होते हैं। निम्नलिखित अपकिरण के विभिन्न प्रकार के माप हैं।

अपकिरण के माप

- स्थैतिक (Positional)
  - सीमाओं पर आधारित
    - विस्तार (Range)
    - चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)
- अंकगणितीय (Arithmetic)
  - अंतर पर आधारित (Positional)
    - माध्य विचलन (Mean Deviation)
    - प्रमाप विचलन (Standard Deviation)
- आलेखीय (Graphical)
  - आलेख पर आधारित
    - लारेंज वक्र

4.1 उद्देश्य (Objectives)

औसत या केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप प्रेक्षणों के संघनन का वितरण के केन्द्रीय भाग के चारों ओर के बारे में विचार देते हैं। उनकी सांख्यिकीय विश्लेषणों में अत्यधिक उपयोग के बावजूद अपनी सीमायें हैं। इसलिए केनद्रीय प्रावृत्ति की माप को निश्चित रूप से सहायता और अनुपूरित करना चाहिए कुछ दूसरे मापों से। एक ऐसा माप प्रकीर्णन या अपकिरण है।

अपकिरण का शाब्दिक अर्थ बिखराव है। हम अपकिरण का अध्ययन वितरण के समांगता (सुसंहति) या विषमांगता (बिखराव) की धारणा के लिए करते हैं।

अपकिरण के माप के उद्देश्य निम्नलिखित हैं–

1. एक माध्य की विश्वसनीयता ज्ञात करने में।
2. केन्द्रीय मूल्य से समंक के विचलन को नियंत्रित करने में।
3. दो या दो से अधिक समंक के समुच्चयों की तुलना उनके विचलन के संबंध में।
4. दूसरे सांख्यिकी मापों को प्राप्त करना समंक के आगे के विश्लेषण के लिए।

4.2 विस्तार (Range)

'विस्तार' आत्यंतिक मूल्यों के बीच अंतर प्रदर्शित करता है– सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य के बीच। दो आत्यंतिकों के बीच के मूल्यों पर कोई विचार नहीं किया जाता है।

'विस्तार' अवलोकनों के समुच्चय की विचरणता का अत्यंत सरल सूचक है। यह संकेत रूप में 'R' से द्योतित होता है।

टिप्पणी

(i) विस्तार = सबसे बड़ा मूल्य – सबसे छोटा मूल्य

R = L – S -----------निरपेक्ष माप

(ii) विस्तार का गुणांक $= \dfrac{\text{सबसे बडा मूल्य – सबसे छोटा मूल्य}}{\text{सबसे बडा मूल्य + सबसे छोटा मूल्य}}$

R का गुणांक $= \dfrac{L-S}{L+S}$ ------आपेक्षिक माप

उदाहरण 4.1: श्रेणी के विस्तार और विस्तार का गुणांक प्रगणित करें, और उल्लेख करें कौन अधिक बिखरा हुआ है और कौन अधिक समरूप।

श्रेणी	चरों के मूल्य						
I.	13,	14,	15,	16,	17 ------	$(\bar{x} = 15)$	''केन्द्रीय प्रवृत्ति समान है पर अभिसंरचना में भेद है।''
II.	9,	12,	15,	18,	21 ------	$(\bar{x} = 15)$	
III.	1,	8,	15,	22,	29 ------	$(\bar{x} = 15)$	

हलः

	(I)	(II)	(III)
विस्तार....	R = L – S	R = L – S	R = L – S
	= 17 – 13	= 21 – 9	= 29 – 1
	= 4	= 12	= 28

विस्तार का गुणांक

(I)
$$C \text{ of } R = \frac{L - S}{L+S} = \frac{17-13}{17+13} = \frac{4}{30} = 0.1333$$

(II)
$$C \text{ of } R = \frac{L - S}{L+S} = \frac{21-9}{21+9} = \frac{12}{30} = 0.4$$

(III)
$$C \text{ of } R = \frac{L - S}{L+S} = \frac{29-1}{29+1} = \frac{28}{30} = 0.9333$$

श्रेणी (I) कम बिखरा और अधिक समरूप है।

श्रेणी (II) कम समरूप और अधिक बिखरा है।

उदाहरण 4.2: श्रेणी के विस्तार और विस्तार के गुणांक को प्रगणित करें, और उल्लेख करें कौन अधिक बिखरा है और कौन अधिक समरूप।

टिप्पणी

श्रेणी	चरों के मूल्य	
A	10, 11, 12, 13, 14 ----- ($\bar{x}$ = 12)	''केन्द्रीय प्रवृत्ति भिन्न है परन्तु संरचना समान है।''
B	40, 41, 42, 43, 44 ----- ($\bar{x}$ = 42)	
C	100, 101, 102, 103, 104 ---- ($\bar{x}$ = 102)	

हलः

A	B	C
विस्तार....$R = L - S$	$R = L - S$	$R = L - S$
$= 14 - 10$	$= 44 - 40$	$= 104 - 100$
$= 4$	$= 4$	$= 4$

विस्तार का गुणांक

$C \text{ of } R = \dfrac{L-S}{L+S}$	$C \text{ of } R = \dfrac{L-S}{L+S}$	$C \text{ of } R = \dfrac{L-S}{L+S}$
$= \dfrac{14-10}{14+10}$	$= \dfrac{44-40}{44+40}$	$= \dfrac{104-100}{104+100}$
$= \dfrac{4}{24}$	$= \dfrac{4}{84}$	$= \dfrac{4}{204}$
$= 0.1667$	$= 0.0476$	$= 0.0196$

श्रेणी (C) कम बिखरी और अधिक समरूप है।

श्रेणी (A) कम समरूप और अधिक बिखरी है।

उदाहरण 4.3: निम्नलिखित वितरण से विस्तार और विस्तार का गुणांक ज्ञात करें।

x :	6	12	18	24	30	36	42
f :	20	130	80	60	210	1500	600

हलः विस्तार ज्ञात करने में, आवृत्ति का कोई लेखा नहीं किया जाता है।

$$\text{विस्तार} = L - S = 42 - 6 = 36$$

$$\text{विस्तार का गुणांक} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{42-6}{42+6} = \frac{36}{48} = 0.75$$

उदाहरण 4.4: निम्न वितरण से विस्तार और विस्तार का गुणांक प्रगणित करें।

C.I.:	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
f :	2	9	16	12	5

हल: विस्तार ज्ञात करने में आवृत्ति का कोई लेखा नहीं किया जाता है। सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा और सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा का सिर्फ लेखा किया जाता है।

$$\text{विस्तार} = L - S = 170 - 120 = 50$$

$$\text{विस्तार का गुणांक} = \frac{L-S}{L+S} = \frac{170-120}{170+120} = \frac{50}{290} = 0.1724$$

विस्तार के गुण (Merits of Range)

विस्तार के गुण निम्नलिखित हैं–

(a) यह अपकिरण की सरलतम माप है।

(b) यह दृढ़ता से परिभाषित है और अपकिरण की सबसे आसान माप है प्रगणित करने में।

(c) यह आसानी से समझ में आने योग्य है और इसमें बहुत कम परिकलन (Calculation) की आवश्यकता होती है।

(d) यह सांख्यिकीय विधियों के गुण नियंत्रण तकनीकों (Quality Control techniques) में उपयोगी है।

(e) यह शेयरों और स्टॉकों के कीमतों में परिवर्तनों का अध्ययन करने में उपयोगी है।

(f) यह मौसम की स्थितियों का अध्ययन करने में उपयोगी है जहाँ न्यूनतम और अधिकतम तापक्रम का अभिनिर्धारण किया जाता है।

विस्तार के दोष (Demerits of Range)

विस्तार के उपयोगों के बावजूद, विस्तार निम्नलिखित सीमाओं से ग्रसित है–

(a) दुर्भाग्य से यह अपकिरण की स्थिर माप नहीं है, क्योंकि यह सिर्फ आत्यंतिक मूल्यों से प्रभावित होती है।

(b) यह अपकिरण की उपयुक्त माप नहीं है जहाँ वितरण में वर्ग–अंतराल खुले सिरे वाले हैं।

(c) यह पूर्ण रूप से सिर्फ दो आत्यंतिक मूल्यों पर आधारित है ना कि दूसरे मूल्यों पर।

(d) यह गणितीय प्रतिपादन के लिए उपयुक्त नहीं है।

(e) यह प्रतिदर्श के आकार में उच्चावचन के प्रति बहुत संवेदनशील है। जैसे प्रतिदर्श का आकार बढ़ता है, यह बढ़ने को प्रवृत्त होता है परन्तु समानुपात में नहीं।

4.3 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

टिप्पणी

यह और कुछ नहीं बल्कि ''अर्द्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार (Semi-Interquartile Range)'' है। कुछ संशोधनों के साथ, यह विस्तार के अनुरूप है। वितरण में, हम Q_3 को सबसे बड़ा मूल्य मानते हैं और Q_1 सबसे छोटा। इसका अर्थ है कि, निम्न चतुर्थक के नीचे का मद और उच्च चतुर्थक के ऊपर का मद प्रगणन में समाविष्ट बिल्कुल नहीं होता है। इस तरह हम वितरण के मध्य के आधे भाग पर विचार करते हैं। इस तरह से प्राप्त विस्तार को दो से भाग दिया जाता है चूँकि हमलोग समंक के सिर्फ आधे भाग का विचार करते है। इस तरह चतुर्थक विचलन Q_1 और Q_3 के मूल्यों के बीच के अंतर को मापता है। यह संकेत रूप में च.वि. (Q.D.) से द्योतित होता है–

(a) चतुर्थक विचलन $= \text{Q.D.} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ – – – – निरपेक्ष माप

(b) C के गुणांक का $\text{Q.D.} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$ – – – – – आपेक्षिक माप

उदाहरण के लिए, अगर $Q_1 = 15$ और $Q_3 = 40$

$$\text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40-15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

$$\text{C का Q.D.} = \frac{40-15}{40+15} = \frac{25}{55} = .4545$$

चतुर्थक विचलन औसत परिमाण देता है जिससे दो चतुर्थक माध्यिका से असमान होते हैं एक असममित (Asymmetrical) वितरण में। यथार्थ कहें तो चतुर्थक विचलन सिर्फ स्थैतिक औसत हैं यह किसी औसत के चारों ओर कोई बिखराव प्रदर्शित नहीं करता है। यह विभाजन का माप है ना कि अपकिरण का। जितना छोटा मूल्य होगा Q.D. का, उतना हीं माध्यिका के चारों ओर वितरण के मध्य अर्द्ध का अपकिरण कम होगा। यद्यपि, यह दो चतुर्थकों की सीमा से बाहर पड़ने वाले अपकिरण के स्तर के बारे में कोई सूचना नहीं प्रदान करता है।

उदाहरण 4.5: 12 छात्रों के निम्न अंक से चतुर्थक विचलन और इसके गुणांक को प्रगणित करें।

क्रम संख्याः	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
अंकः	25	30	37	43	48	54	61	67	72	80	84	89

टिप्पणी

हलः चतुर्थक विचलन का प्रगणन

क्रम संख्या	अंक	
1	25	Q_1, $\frac{n+1}{4}$th मद का आकार हैं
2	30	$\therefore \frac{12+1}{4}$वाँ $= 3.25$वाँ मद
3	37	$Q_1 =$ तीसरा मद $+ 0.25\ (43 - 37)$
4	43	$= 37 + 0.25\ (43 - 37)$
5	48	$= 37 + 0.25 \times (6) = 37 + 1.5 = 38.5$
6	54	Q_3, $\frac{3n+1}{4}$th मद का आकार
7	61	$\therefore \frac{3(12+1)}{4} = 9.75$th मद
8	67	$Q_3 = 9$ मद $+ 0.75\ (80 - 72)$
9	72	$= 72 + 0.75\ (80 - 72) = 72 + 0.75\ (8)$
10	80	$= 72 + 6 = 78$
11	84	$\text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{78-385}{2} = \frac{39.5}{2} = 19.75$
12	89	

$$\text{Q.D. का गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{78 - 38.5}{78 + 38.5} = \frac{39.5}{116.5} = 0.339.$$

उदाहरण 4.6: निम्नलिखित समंक से चतुर्थक विचलन और इसका गुणांक परिकलित करें।

x:	58	59	60	61	62	63	64	65	66
f:	15	20	32	35	33	22	20	10	8

हलः चतुर्थक विचलन का प्रगणन।

x	f	c.f.	
58	15	15	
59	20	35	Q_1, $\frac{n+1}{4}$th मद का आकार हैं
(Q_1)60	32	67←	
61	35	102	$\therefore \frac{195+1}{4}$th $= 48.78$th
62	33	135	यह 67 c.f. में पड़ता है.......67 c.f. के विरुद्ध

टिप्पणी

$(Q_3)63$	22	157←	$Q_1 = 60$
64	20	177	Q_3, $\frac{(3n+1)}{4}$th मद का आकार है
65	10	187	$\therefore \frac{3(195+1)}{4}$th = 146.33th
66	8	195	यह 157 c.f. में पड़ता है, 157 c.f. के विरुद्ध
	n = 195		$Q_3 = 63$ $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{63-60}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

उदाहरण 4.7: निम्नलिखित से चतुर्थक विचलन और चतुर्थक विचलन का गुणांक प्रगणित करें।

साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
कामगारों की संख्या	6	10	18	30	15	12	10	6	2

हलः चतुर्थक विचलन का प्रगणन।

साप्ताहिक वेतन (रु.)	कामगारों की संख्या (f)	c.f.
4-8	6	6
8-12	10	16 (m)
(l) 12-16	18 (f)	34 ←Q_1
16-20	30	64
20-24	15	79 (m)
(l) 24-28	12 (f)	91 ←Q_3
28-32	10	101
32-36	6	107
36-40	2	109
	n = 109	

Q_1 आकार है $\frac{n}{4}$th मद का, $\therefore \frac{109}{4}$th = 27.25th मद यह 34 c.f. में पड़ता है। 34 c.f. के विरुद्ध Q_1 वर्ग है (12-16) Q_3 आकार है $\frac{3n}{4}$th मद का। $\therefore \frac{3(190)}{4}$th = 81.75th मद यह 91 c.f. में पड़ता है। 91 c.f. के विरुद्ध Q_3 वर्ग है (24-28)

टिप्पणी

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c = 12 + \frac{\frac{109}{4} - 16}{18} \times 4 = 12 + \frac{27.58 - 16}{18} \times 4$$

$$= 12 + \frac{11.25}{18} \times 4 = 12 + \frac{45}{18} = 12 + 2.5 = 14.5$$

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - 79}{f} \times c = 24 + \frac{\frac{3(109)}{4} - 79}{12} \times 4$$

$$= 24 + \frac{81.75 - 79}{12} \times 4 = 24 + \frac{2.75}{12} \times 4$$

$$= 24 + \frac{11}{12} = 24 + 0.9167 = 24.9167$$

$$\text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13.421 - 8.875}{2} = \frac{4.546}{2} = 2.273$$

$$\text{Q.D. का गुणांक} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{13.421 - 8.875}{13.421 + 8.875}$$

$$= \frac{4.546}{22.296} = 0.2039$$

चतुर्थक विचलन के गुण

निम्नलिखित चतुर्थक विचलन के गुण हैं–

(a) यह परिकलित करने में आसान और समझने में सरल है।

(b) यह चर के आत्यंतिक मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है चूँकि यह वितरण के केन्द्रीय आधे भाग से संबंधित है।

(c) यह खुले सिरे वाले वर्ग अंतरालों से थोड़ा भी प्रभावित नहीं होता है।

चतुर्थक विचलन के दोष

महत्त्व के बावजूद, चतुर्थक विचलन निम्न सीमाओं से ग्रसित है–

(a) यह निम्न चतुर्थक से नीचे और उच्च चतुर्थक से ऊपर के हिस्से का पूर्णरूपेन उपेक्षा कर देता है।

(b) यह आगे के गणितीय प्रतिपादन में समर्थ नहीं है।

(c) यह प्रतिचयन के उच्चावचनों (Fluctuations) से काफी प्रभावित होता है।

(d) यह सिर्फ स्थैतिक औसत है ना कि गणितीय औसत।

4.4 माध्य विचलन (Mean Deviation)

टिप्पणी

माध्य विचलन एक श्रेणी में मदों के बीच औसत अन्तर है अपने माध्य या माध्यिका या बहुलक से। यह मूल्यों के माध्य या माध्यिका या बहुलक के बिखराव के विस्तार से संबंधित है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति से सभी विचलनों के औसत से प्राप्त किया जाता है। ये विचलन प्रगणन में ली जाती हैं ऋणात्मक चिन्ह का ख्याल रखते हुए (i.e., सभी विचलन धनात्मक परिकल्पित किए जाते हैं)।

सिद्धान्ततः मदों के विचलन अधिमान्यता से माध्यिका से लिए जाते हैं माध्य या बहुलक के बदले। माध्यिका उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति मानी जाती है विचलनों को परिकलित करने का क्योंकि माध्यिका से विचलनों का योग कम होता है माध्य से विचलनों के योग से। बहुलक से विचलन परिकलित करना सामान्य व्यवहार में नहीं है क्योंकि कभी-कभी इसका मान स्पष्ट रूप से परिभाषित नहीं होता है।

विचलनों का योग करते वक्त, अंकगणितीय ऋणात्मक चिन्ह का लेखा नहीं किया जाता है। इसका अर्थ है कि सभी विचलन धनात्मक समझे जाते हैं ऋणात्मक चिन्हों की उपेक्षा करते हुए। यह विचलन है ना कि गणितीय अन्तर। मान लें शहर 'A' शहर 'B' से 250 किलोमीटर दूर है। 'A' का विचलन भौगोलिक रूप से B से 250 किमी. है और 'B' का विचलन 'A' से 250 किमी. है। इसमें कोई प्रासंगिकता नहीं है कहने में कि एक धनात्मक विचलन है और दूसरा ऋणात्मक। चूँकि लक्ष्य है केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचरण का अध्ययन, यह थोड़ा भी सार्थक नहीं है कि यह 'धनात्मक' है या 'ऋणात्मक'।

माध्य विचलन या औसत विचलन या विचरण का प्रथम आघूर्ण संकेत रूप में द्योतित होती है ग्रीक की छोटी वर्णमाला δ (डेल्टा) से।

A : व्यक्तिगत अवलोकन :

$$\delta = \frac{\Sigma d}{n} ----- \text{निरपेक्ष माप}$$

$$\delta \text{ का गुणांक } = \frac{\delta}{Me} \text{ या } \frac{\delta}{\bar{x}} \text{ या } = \frac{\delta}{z} ----- \text{आपेक्षिक माप}$$

B : विच्छिन्न और सतत श्रेणी

$$\delta = \frac{\Sigma fd}{n} ----- \text{निरपेक्ष माप}$$

$$\delta \text{ का गुणांक } = \frac{\delta}{Me} \text{ या } \frac{\delta}{\bar{x}} \text{ या } = \frac{\delta}{z} ----- \text{निरपेक्ष माप}$$

(**नोटः** $\sum d$ विचलनों का योग है और $\sum fd$ गुणक 'f' और d के गुणनफल का योग है)

जब औसत भिन्न में होते हैं, माध्य विचलन का परिकलन एक कठिन कार्य हो जाता है। इसलिए, चीजों को और सरल बनाने के लिए, एक लघु विधि या सूत्र प्रयुक्त की जाती है निम्न जैसी–

टिप्पणी

A : व्यक्तिगत अवलोकन :

$$\delta = \frac{\Sigma xA - \Sigma xB - (\Sigma A - \Sigma B)M_e *}{n}$$

B : विच्छिन्न और सतत श्रेणी

$$\delta = \frac{\Sigma fxA - \Sigma fxB - (\Sigma fA - \Sigma fB)M_e *}{n}$$

(**नोट**: Me* की जगह हम x या z ले सकते हैं जैसा विचलन से सम्बन्ध है)

लघु विधि के विभिन्न चरण

(i) पूरे वितरण में दो खण्ड बनाएं, जैसे A और B ताकि औसत से बड़े सभी मद (औसत को मिलाकर) खण्ड A में पड़ें और औसत से छोटे सभी मद खण्ड B में पड़ें।

(ii) सूत्र में प्रयुक्त पद–

$\sum xA$: औसत से बड़े मूल्यों का योगफल

$\sum xB$: औसत से छोटे मूल्यों का योगफल

$\sum A$: कुल मदों की संख्या औसत से बड़ी

$\sum B$: कुल मदों की संख्या औसत से छोटी

n : मदों की कुल संख्या

$\sum fxA$: औसत से बड़ी 'fx' का योगफल

$\sum fxB$: औसत से छोटी 'fx' का योगफल

$\sum fA$: औसत से बड़ी आवृत्तियों का योगफल

$\sum fB$: औसत से छोटी आवृत्तियों का योगफल

यद्यपि सूत्र लम्बा लगता है, यह सभी प्रकार से उपयोगी है और परिकलन को बहुत आसान बना देता है।

उदाहरण 4.8: निम्नलिखित चरों से माध्य विचलन ज्ञात करें और माध्य से माध्य विचलन का गुणांक ज्ञात करें।

x : 68 49 32 21 54 38 59 66 41

हल: समंक को चढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें ताकि लघु विधिका इस्तेमाल हो सके।

माध्य विचलन का प्रगणन

x	**(x- $\bar{x}$) d**		
21 32 38 41	26.56 15.56 9.56 6.56	$\delta = \frac{\Sigma d}{n}$ $= \frac{116.44}{9}$	**लघु विधि**

49 54 59 66 68	1.44 6.44 11.44 18.44 20.44	$= 12.9378$ $\delta = \frac{\Sigma d}{n}$ $= \frac{116.44}{9}$ $= 12.9378$ δ का गुणांक $= \delta = \frac{\delta}{\bar{x}}$ $= \frac{12.9378}{47.56}$ $= 0.272$	x 21 32 38 41 49→ 54 59 66 68	$\sum B = 4$ B $\sum x B = 132$ $\sum A = 5$ $\sum xA = 296$ A
428	116.44			
$\sum x$	$\sum d$			

$\bar{x} = 47.56$ यह 49 में सम्मिलित है, जिससे $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{428}{9} = 47.56$ हमें विभाजन होता है।

$$\delta = \frac{\Sigma xA - \Sigma xB - (\Sigma A - \Sigma B)\bar{x}}{n} = \frac{296 - 132 - (5-4)47.56}{9}$$

$$= \frac{164 - (1)47.56}{9} = \frac{164 - 47.56}{9} = \frac{116.44}{9} = 12.9378$$

उदाहरण 4.9: निम्नलिखित कामगारों का वेतन है। माध्यिका से माध्य विचलन और इसका गुणांक ज्ञात करें।

वेतन (रु.): 59 32 67 43 22 17 64 55 47 80 25

हल : समंक को चढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें माध्यिका को प्रगणित करने के लिए।

माध्य विचलन का प्रगणन

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{11+1}{2}$th = 6th ------ 6th मद 47 है। $M_e = 47$

क्रम संख्या	वेतन (रु.) x	(x-Me) d		लघु विधि	
				x	
1	17	30	$\delta = \frac{\Sigma d}{n}$	17	
2	22	25	$= \frac{186}{11}$	22	$\sum B = 5$
3	25	22	$= 16.91$	25	$\to B$
4	32	15	δ का गुणांक	32	$\sum x B = 139$
5	43	4	$= \delta = \frac{\delta}{\bar{x}}$	43	
$\to 6$	$\to 47$	0	$= \frac{16.91}{47}$	$\to 47$	
7	55	8	$= 0.36$	55	$\sum A = 6$
8	59	12		59	$\to A$
9	64	17		64	$\sum xA = 372$
10	67	20		67	
11	80	33		80	
		$\sum d = 186$			

$$\delta = \frac{\Sigma xA - \Sigma xB - (\Sigma A - \Sigma B)M_e}{n} = \frac{372 - 139 - (6-5)47}{n}$$

$$= \frac{233 - (1)47}{11} = \frac{233 - 47}{11} = \frac{186}{11} = 16.91$$

उदाहरण 4.10: निम्नलिखित रन है जो क्रिकेट टेस्टों के विभिन्न पारियों में बल्लेबाज बनाते हैं।

रनः	20	40	60	80	100	120	140	160	180
बल्लेबाजों की संख्याः	6	19	40	23	65	83	55	20	9

बहुलक से माध्य विचलन और इसका गुणांक प्रगणित करें।

हलः माध्य विचलन का प्रगणन।

x	f	(x-z) = d	fd
20	6	100	600
40	19	80	1,520
60	40	60	2,400
80	23	40	920

उच्चतम आवृत्ति है 83

$\therefore z = 120$

100	65	20	1,300
120	83	0	0
140	55	20	1,100
160	20	40	800
180	9	60	540
	n = 320		zfd = 9,180

$$\delta = \frac{\Sigma fd}{n} = \frac{9180}{320} = 28.69$$

δ का गुणांक

$$= \frac{\delta}{z} = \frac{28.69}{120} = 0.239$$

लघु–विधि

x	f	fx
20	6	120
40	19	760
60	40	2,400
80	23	1,840
100	65	6,500
120	83	9,960
140	55	7,700
160	20	3,200
180	9	1,620
		$\sum$fx = 34,100

$\sum f\,B = 153 \quad \sum fx\,B = 11620$

$\sum f\,A = 167 \quad \sum fx\,A = 22480$

$$\delta = \frac{\Sigma fx\,A - \Sigma fx\,B - (\Sigma fA - \Sigma fB)z}{n}$$

$$= \frac{22480 - 11620 - (167 - 153)120}{320}$$

$$= \frac{10860 - (14)120}{320} = \frac{10860 - 1680}{320}$$

$$= \frac{9180}{320} = 28.69$$

उदाहरण 4.11: नीचे दी गई सूचना से माध्य विचलन ज्ञात करें।

वेतन (रु.):	40	50	50-100	100-200	200-400
कर्मचारियों की संख्या:	22	18	10	8	2

हल: चूँकि वितरण में दोनों विच्छिन्न और सतत चर के मूल्य हैं, माध्य विचलन अधिमान्यता से माध्यिका से प्रगणित की जाती हैं।

माध्य विचलन का प्रगणन

वेतन (रु.)	x (मध्यमान)	f	cf	$(x-m_e) = d$	fd
40	40	22	22	10	220
50	50	18	40	0	0
50-100	75	10	50	25	150
100-200	150	8	58	100	800
200-400	300	2	60	250	500
		n = 60			$\sum$fd = 1,770

माध्यिका $\frac{n+1}{2}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{60+1}{2}$th मद $= 30.5$

यह 40 c.f. में पड़ता है।

40 c.f. के विरुद्ध विच्छिन्न मूल्य 50 है।

$\therefore M_e = 50$

$\delta = \frac{\Sigma fd}{n} = \frac{1770}{60} = 29.5$

δ का गुणांक

$= \frac{\delta}{M_e} = \frac{29.5}{50} = 0.59$

4.5 परिकल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method)

जब औसत भिन्न में हैं और चर के मूल्य या मध्य–बिन्दुएँ नियमित अंतराल पर बढ़ रही हैं और प्रगणन में बड़े गुणन समावेष्टित हैं, हम निम्न सूत्र का प्रयोग सुविधापूर्वक कर सकते हैं।

$$\delta = \frac{\delta fd'(c) + (*\bar{x} - A)(\Sigma fB - \Sigma fA)}{n}$$ – – – – – – – – कोई भी माध्य

A = परिकल्पित माध्य, ('c' है पद–विचलन की स्थित में)

उदाहरण 4.12: 100 छात्रों के निम्न अंकों से माध्यिका से माध्य विचलन और इसके गुणांक प्रगणित करें।

अंकः	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
छात्रों की संख्याः	6	12	17	28	10	10	8	5	2

हलः

माध्य विचलन का प्रगणन

C.I.	f	c.f.	x	(x-A)/5 = d'	fd'	
20-25	6	6	22.5	3	18	
25-30	12	18	27.5	2	24	
30-35	17	35(m)	32.5	1	17	$\sum f_B = 63$
(l) 35-40	28 (f)	63 ←	37.5	0	0	
40-45	12	75	42.5	1	12	
45-50	10	85	47.5	2	20	
50-55	8	93	52.5	3	24	$\sum f_A = 37$
55-60	5	98	57.5	4	20	
60-65	2	100	62.5	5	10	
	n - 100					

Me $1\frac{n}{2}$th मद का आकार है। $\therefore \frac{100}{2}$th = 50 वाँ मद यह 63 c.f. में पड़ता है। 63 c.f. के विरुद्ध माध्यिका वर्ग है (35-40)

टिप्पणी

$$\text{Me} = 1 + \frac{\frac{100}{2} - m}{f} \times c = 35 + \frac{50 - 35}{28} \times 5 = 35 + \frac{15}{28} \times 5$$

$$= 35 + \frac{75}{28} = 35 + 2.6786 = 37.6786$$

परिकल्पित माध्यिका = 37.5 (मध्य बिन्दुओं में से एक)

$$\delta = \frac{\Sigma fd'(c) + (M_e - A)(\Sigma fB - \Sigma fA)}{n} = \frac{145(5) + (37.6786 - 37.5)63.37}{100}$$

$$= \frac{725 + 0.1786(26)}{100} = \frac{725 + 4.6436}{100}$$

$$\frac{729.6436}{100} = 7.296$$

δ का गुणांक $= \frac{\delta}{M_e} = \frac{7.296}{37.6786} = 0.19365$

माध्य विचलन के गुण

निम्न माध्य विचलन के गुण हैं–

(i) यह दृढ़ता से परिभाषित है और प्रगणन और समझने में आसान है।

(ii) यह सभी मदों को प्रयोजन में लेता है और विचलन को भार उनके आकार के अनुसार देता है।

(iii) यह चरों के आत्यंतिक मूल्य से कम प्रभावित होता हैं

(iv) यह विचलन प्राप्त करके सभी अनियमितताओं को दूर करता है और सही माप प्रदान करता है।

माध्य विचलन के दोष

महत्त्व के बावजूद, माध्य विचलन की निम्न सीमाएं हैं–

(i) यह अपने आप को तुरत अंकगणितीय प्रतिपादन के लिए प्रस्तुत नहीं करता है।

(ii) यह ऋणात्मक विचलन की उपेक्षा करता है और उसे धनात्मक निरूपित करता है जो गणितीय रूप से न्यायसंगत नहीं है।

(iii) यह संतोषप्रद माप नहीं है जब विचलन बहुलक से लिए जाते हैं।

(iv) यह विरले ही सामाजिक विज्ञानों में प्रयुक्त होता है।

(v) यह उपयुक्त नहीं है जब वर्ग–अंतराल खुले सिरे वाले होते हैं।

4.6 प्रमाप विचलन (Standard Deviation) (σ)

टिप्पणी

''प्रमाप विचलन'' विचलनों के वर्गों के योगफल का वर्गमूल हैं उनकी संख्या से विभाजित करने के बाद। यह ''माध्य त्रुटि विचलन'', ''माध्य वर्ग त्रुटि विचलन'' या ''वर्गमूल माध्य वर्ग विचलन'' भी कहलाता है। यह विचरण का द्वितीय आघूर्ण हैं चूँकि विचलनों के वर्गों का योगफल माध्य से न्यूनतम होता है, विचलन सिर्फ माध्य से लिये जाते हैं (ना कि माध्यिका या बहुलक से)।

प्रमाप विचलन सभी विचलनों का माध्य से वर्गमूल-माध्य-वर्ग औसत है। यह प्रो. कार्ल पियरसन द्वारा 1983 में प्रतिपादित किया गया और यह 'σ' (सिगमा) से द्योतित किया जाता है।

A : व्यक्तिगत अवलोकन–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \text{ या } \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}} \text{ ----- निरपेक्ष माप}$$

$$\text{विचरण का गुणांक } = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \text{ ------ आपेक्षिक माप}$$

B : विच्छिन्न और सतत श्रेणी–

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} \text{ या } \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{n}} \text{ ----- निरपेक्ष माप}$$

$$\text{विचरण का गुणांक } = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \text{ ------ आपेक्षिक माप}$$

अनुगमित चरण

(i) $\bar{x}$ परिकलित करें

(ii) विचलन नोट करें [i.e., (x-$\bar{x}$) या d]

(iii) विचलनों का वर्ग करें [i.e., $(x-\bar{x})^2$ या d^2]

(iv) d^2 को f से गुणा करें (i.e., fd^2)

(v) $\sum fd^2/n$ का वर्गमूल प्राप्त करें (i.e., $\sqrt{\Sigma fd^2/n}$)

लघु-विधि

कभी–कभी माध्य एक भिन्नात्मक अंक होगी। तब हमें विचलन को परिकल्पित माध्य से लेना होगा और प्रत्यक्ष सूत्र में कुल समायोजन की आवश्यकता होगी। चूँकि विचलन वास्तविक माध्य से नहीं ली जाती है, हम $\sum d$ कोई मूल्य पाते हैं शून्य के बदले। छोटी विधि निम्न रूप से कार्य करता है।

A : व्यक्तिगत अवलोकन : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} \quad \sqrt{\left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}}$

टिप्पणी

B: विच्छिन्न और सतत श्रेणी : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \sqrt{\left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}}$

पद–विचलन विधि

विचलन को आगे उभयनिष्ठ कारक से विभक्त करते हैं परिकल्पित माध्य की स्थिति में। यह जानबूझकर की गई त्रुटि प्रतिपूरित की जाती है सम्पूर्ण सूत्र को उसी कारक से गुणा करके। सूत्र निम्न प्रकार से कार्य करती है।

A: व्यक्तिगत अवलोकन : C: उभयनिष्ठ कारक

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'}{n}\right)^2} \times c$$

B: विच्छिन्न और सतत श्रेणी :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c$$

उदाहरण 4.13: B.A. वर्ग के 10 छात्र ने निम्न अंक कन्नड़ में प्राप्त किये हैं 100 अंकों में। प्राप्त अंक का प्रमाप विचलन परिकलित करें,

क्रम सं.:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अंकः	5	10	20	25	40	42	45	48	70	80

हलः

x	$(x-\bar{x}) = d$	d^2	(x-A) = d	d^2
5	-33.5	1122.25	-35	1225
10	-28.5	812.25	-30	900
20	-18.5	342.25	-20	400
25	-13.5	182.25	-15	225
40	+1.5	2.25	0	0
42	+3.5	12.25	+2	4
45	+6.5	42.25	+5	25
48	+9.5	90.25	+8	64

70	+31.5	992.25	+30	900
80	+41.5	1722.25	+40	1600
$\sum x = 385$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 5320.50$	$\sum d = -15$	$\sum d^2 = 5343$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{385}{10} = 38.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{5343}{10} - \left(\frac{-15}{10}\right)^2} = \sqrt{534.3 - (-1.5)^2}$$

$$= \sqrt{534.3 - 2.26} = \sqrt{532.05} = 23.066 ---- \text{लघु विधि}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{5320.50}{10}} = \sqrt{532.05} = 23.066 ---- \text{प्रत्यक्ष विधि}$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{23.066}{38.5} \times 100 = 0.5991 \times 100 = 59.91\%$$

उदाहरण 4.14: निम्नलिखित दो बल्लेबाजों NEKO और DECO द्वारा दस पारियों में बनाए गए रन हैं। ज्ञात करें कौन बेहतर स्कोरर है और कौन अधिक स्थिर (Consistent)।

NEKO:	101	22	0	36	82	45	7	13	65	14
DECO:	97	12	40	96	13	8	85	8	56	16

हल:

NECO **x**	**x-** $\bar{x}$ **d**	$\mathbf{d^2}$	**DECO** **x**	**x-** $\bar{x}$ **d**	$\mathbf{d^2}$
0	-38.5	1482.25	8	-35.1	1232.01
7	-31.5	992.25	8	-35.1	1232.01
13	-25.5	650.25	12	-31.1	967.21
14	-24.5	600.25	13	-30.1	906.01
22	+16.5	272.25	16	-27.1	734.41
36	+2.5	6.25	40	-3.1	9.61
45	+6.5	42.25	56	+12.9	166.41
65	+26.5	702.25	85	+41.9	1755.61
82	+43.5	1892.25	96	+52.9	2798.41
101	+62.5	3906.25	97	+53.9	2905.21
$\sum x = 385$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 =$ 10546.50	$\sum x = 431$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 =$ 12706.90

टिप्पणी

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{385}{10} = 38.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{10546.50}{10}} = \sqrt{1054.65} = 32.475$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{32.475}{38.5} \times 100 = 84.35\%$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{431}{10} = 43.1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{12706.90}{10}} = \sqrt{1270.69}$$

$$= 35.647$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{35.647}{43.1} \times 100 = 82.71\%$$

DECO बेहतर रन बनाने वाला है और अधिक स्थिर खिलाड़ी है NEKO की अपेक्षा। (क्योंकि उसका औसत अधिक है और विचरण कम है)

उदाहरण 4.15: निम्नलिखित दो छात्रों 'A' और 'B' द्वारा 10 टेस्टों में प्राप्त अंक हैं प्रत्येक 100 अंकों में।

Test:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A:	44	80	76	48	52	72	72	51	60	54
B:	48	75	54	60	63	69	72	51	57	66

ज्ञात करें पढ़ाई में कौन बेहतर है और अगर संगत (Consistency) पारितोषिक पाने की कसौटी है, किसे पारितोषिक मिलना चाहिए।

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

A x	(x- $\bar{x}$) = d	d^2	B x	(x- $\bar{x}$) = d	d^2
44	–16.9	285.61	48	–13.5	182.25
48	–12.9	166.41	51	–10.5	110.25
51	–9.9	98.01	54	–7.5	56.25
52	–8.9	79.21	57	–4.5	20.25
54	–6.9	47.61	60	-1.5	2.25
60	–0.9	0.81	63	+1.5	2.25
72	+11.1	123.21	66	+4.5	20.25
72	+11.1	123.21	69	+7.5	56.25

टिप्पणी

76	+15.1	228.01	72	+10.5	110.25
80	+19.1	364.81	75	+13.5	182.25
$\sum x = 609$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 =$ 1516.90	$\sum x = 615$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 =$ 742.50

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$; C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$; C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
$= \frac{609}{10}$ $= \sqrt{\frac{1516.90}{10}}$ $= \frac{12.316}{60.9} \times 100$	$= \frac{615}{10}$ $= \sqrt{\frac{742.50}{10}}$ $= \frac{8.167}{61.5} \times 100$
$= 60.9$ $= \sqrt{151.69}$ $= 20.22\%$	$= 61.5$ $= \sqrt{74.25}$ $= 14.10\%$
$= 12.316$	$= 8.617$

B पढ़ाई में बेहतर और उसे ही पारितोषिक भी मिलना चाहिए चूँकि उसका औसत अधिक है और प्रसरण कम है।

उदाहरण 4.16: एक विशेष वस्तु की कीमत पाँच वर्षों में दो शहरों में नीचे दी गई है।

शहर A:	20	22	19	23	16
शहर B:	10	20	18	12	15

तालिका से ज्ञात करें किस शहर की कीमत ज्यादा स्थिर है।

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

A x	**($x-\bar{x}$)** d	d^2	**B** x	**($x-\bar{x}$)** d	d^2
16	–4	16	10	–5	25
19	–1	1	12	–3	9
20	0	0	15	0	0
22	+2	4	18	+3	9
23	+3	9	20	+5	25
$\sum x = 100$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 30$	$\sum x = 75$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 68$

टिप्पणी

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$; C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$; C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
$= \frac{100}{5}$ $= \sqrt{\frac{30}{5}}$ $= \frac{2.45}{20} \times 100$	$= \frac{75}{5}$ $= \sqrt{\frac{68}{5}}$ $= \frac{3.688}{15} \times 100$
$= 20$ $= \sqrt{6}$ $= 12.25\%$	$= 15$ $= \sqrt{13.6}$ $= 24.585\%$
$= 2.45$	$= 3.688$

विचरण का गुणांक कीमत में शहर A की कम है; शहर A की कीमत ज्यादा स्थिर है शहर B की अपेक्षा।

उदाहरण 4.17: निम्न दो बल्लेबाजों A और B के स्कोर किए गए रन हैं

A	:	70	90	80	50	40
B	:	70	90	60	50	30

ज्ञात करें कौन अधिक रन बटोरने वाला है अधिक संगत (Consistent) है।

हलः

(प्रमाप विचलन का प्रगणन)

A x	**($x-\bar{x}$)** d	**d^2**	**B** x	**($x-\bar{x}$)** d	**d^2**
70	+4	16	70	+10	100
90	+24	576	90	+30	900
80	+14	196	60	0	0
50	-16	256	50	-10	100
40	-26	676	30	-30	900
$\sum x = 330$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 1720$	$\sum x = 300$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 2000$

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$ C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$; $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$; C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$=\frac{330}{5}$ $=\sqrt{\frac{1720}{5}}$ $=\frac{18.547}{66}\times 100$ $=66$ $=\sqrt{344}$ $=28.10\%$ $=18.547$	$=\frac{300}{5}$ $=\sqrt{\frac{2000}{5}}$ $=\frac{20}{60}\times 100$ $=60$ $=\sqrt{400}$ $=33.33\%$ $=20$

बल्लेबाज A बेहतर रन बटोरने वाला है और अधिक संगत चूँकि उसका औसत अधिक है और प्रसरण कम।

उदाहरण 4.18: नीचे दिए गए x और y के शेयर मूल्यों से, उल्लेख करें कौन शेयर मूल्य अधिक स्थिर है।

X (रु.):	55	54	53	53	56	68	52	50	51	49
Y (रु.):	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

हलः मूल्य चढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित की जाती है।

प्रमाप विचलन का प्रगणन

'x' मूल्य x	**x-$\bar{x}$** d	**d^2**	**Y मूल्य** x	**(x-$\bar{x}$)** d	**d^2**
49	–5.1	26.01	101	–4	16
50	–4.1	16.81	103	–2	4
51	–3.1	9.61	104	–1	1
52	–2.1	4.41	104	–1	1
53	–1.1	1.21	105	0	0
53	–1.1	1.21	105	0	0
54	–0.1	0.01	1.06	+1	1
55	+0.9	0.81	1.07	+2	4
56	+1.9	3.61	1.07	+2	4
68	+13.9	193.21	1.06	+3	9
$\sum x = 541$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 256.90$	$\sum x = 1050$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 40$

$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$ $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$ C.V. $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$ $=\frac{541}{10}$ $=\sqrt{\frac{256.90}{10}}$ $=\frac{5.069}{54.1}\times 100$	$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$ $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$ C.V. $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$ $=\frac{1050}{10}$ $=\sqrt{\frac{40}{10}}$ $=\frac{2}{105}\times 100$

$= 54.1 \quad = \sqrt{25.69} \quad = 9.369\%$ $= 5.069$	$= 105 \quad = \sqrt{4} \quad = 1.905\%$ $= 2$

टिप्पणी

'Y' शेयर मूल्य अधिक स्थिर है 'X' की अपेक्षा चूँकि प्रसरण कम है।

उदाहरण 4.19: कर्मचारियों की संख्या, प्रति कर्मचारी वेतन और वेतन प्रति कर्मचारी प्रसरण दो फैक्टरियों के नीचे दिए गए हैं :

	फैक्टरी A	**फैक्टरी B**
कर्मचारियों की संख्या..........	50	100
औसत वेतन प्रति कर्मचारी प्रति महीना.........	120 रु.	85 रु.
वेतन का प्रसरण प्रति कर्मचारी प्रति महीना....	9 रु.	16 रु.

किस फैक्टरी में प्रति कर्मचारी वेतन के वितरण में अधिक प्रसरण है। कौन फैक्टरी अधिक वेतन देता है?

फैक्टरी A	**फैक्टरी B**
$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} \quad C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$	$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} \quad C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$
$= \sqrt{9} \quad = \frac{3}{120} \times 100$	$= \sqrt{16} \quad = \frac{4}{85} \times 100$
$= 3 \quad = 2.5\%$	$= 4 \quad = 4.71\%$
$\sum x = 120 \times 50 = 6000$ रु.	$\sum x = 100 \times 85 = 8500$ रु.
= कुल वेतन	= कुल वेतन

हलः

फैक्टरी B में अधिक प्रसरण है। फैक्टरी B अधिक वेतन भुगतान करता है।

उदाहरण 4.20: दो प्रतिष्ठानों A और B के कामगारों के मासिक वेतन के विश्लेषण समान उद्योग में निम्नलिखित परिणाम देते हैं।

	प्रतिष्ठान A	**प्रतिष्ठान B**
कामगारों की संख्या..........	500	600
औसत मासिक वेतन..........	186 रु.	175 रु.
वेतन के वितरण का प्रसरण..........	81 रु.	100 रु.

(i) किस प्रतिष्ठान A और B का बड़ा वेतन बिल है? और

(ii) किस प्रतिष्ठान A और B में, अधिक विचरणता है व्यक्तिगत वेतनों में?

हलः

प्रतिष्ठान A		प्रतिष्ठान B	
$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$	$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$	$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
$= \sqrt{81}$	$= \frac{9}{186} \times 100$	$= \sqrt{100}$	$= \frac{10}{175} \times 100$
$= 9$	$= 4.84\%$	$= 10$	$= 5.71\%$
$\sum x = 186 \times 500 = 93,000$ रु.		$\sum x = 175 \times 600 = 1,05,000$ रु.	
= कुल वेतन		= कुल वेतन	

प्रतिष्ठान B का वेतन बिल बड़ा है, और इसका व्यक्तिगत वेतन में भी अधिक प्रसरणता है।

उदाहरण 4.21: निम्नलिखित 2 छात्रों द्वारा वर्ग–टेस्ट के प्राप्त अंक हैं।

X :	25	29	35	39	49
Y :	28	23	32	40	49

ज्ञात करें कौन अधिक संगत विद्यार्थी है।

हलः

X छात्र			Y छात्र		
X	$(x-\bar{x})$	d^2	Y	$(x-\bar{x})$	d^2
x	d	d^2	x	d	d^2
25	-10.4	108.16	23	-11.4	129.96
29	-6.4	40.16	28	-6.4	40.96
35	-0.4	0.16	32	-2.4	5.76
39	+3.6	12.96	40	+5.6	31.36
49	+13.6	184.96	49	+14.6	213.16
$\sum x = 177$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 347.20$	$\sum x = 172$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 421.20$
$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$	$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$	$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
$= \frac{177}{5}$	$= \sqrt{\frac{347.20}{5}}$	$= \frac{8.333}{35.4} \times 100$	$= \frac{172}{5}$	$= \sqrt{\frac{421.20}{5}}$	$= \frac{9.178}{34.4} \times 100$
$= 35.4$	$= \sqrt{69.44}$	$= 2.54\%$	$= 34.4$	$= \sqrt{84.24}$	$= 26.681\%$
	$= 8.333$			$= 9.178$	

छात्र 'x' अधिक संगत है 'Y' की अपेक्षा चूँकि उसकी विचरणता कम है।

उदाहरण 4.22: बहुत कामगारों पर किए गए अध्ययन ने प्रकट किया औसत नाड़ी दर 81 धड़कन प्रति मिनट और प्रमाप विचलन 12.2 धड़कनें। ऊँचाई की माप में औसत 66.9 ईंच और प्रमाप विचलन 2.7 ईंच है। क्या औद्योगिक कामगार नाड़ी दर के मामले में अधिक परिवर्तनशील हैं?

टिप्पणी

हलः

नाड़ी दर	ईंचों में ऊँचाई
$\bar{x} = 81$	$\bar{x} = 66.9$
$\sigma = 12.2$	$\sigma = 2.7$
$\therefore C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$	$\therefore C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$
$= \frac{12.2}{81} \times 100 = 15.06\%$	$= \frac{2.7}{66.9} \times 100$
	$= 4.036\%$

हाँ, औद्योगिक कामगार नाड़ी दर के मामले में अधिक परिवर्तनशील हैं।

उदाहरण 4.23: दो टीम A और B द्वारा फुटबाल मैच में किए गऐ गोल निम्न हैं।

गोलः	0	1	2	3	4
टीम A:	27	9	8	4	5
टीम B:	17	9	6	5	3

ज्ञात करें कौन टीम अधिक संगत है।

हलः

गोलों की संख्या (x)	**f**	**fx**	**A d**	**fd**	**fd²**
0	27	0	–2	–54	108
1	9	9	–1	-9	9
2	8	16	0	0	0
3	4	12	+1	+4	4
4	5	20	+2	+10	20
	n = 53	$\sum fx = 57$		$\sum fd = 49$	$\sum fd^2 = 141$

नोटः परिकल्पित माध्य = 2

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{57}{53} = 1.0755$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{141}{53} - \left(\frac{-49}{53}\right)^2} = \sqrt{2.66 - (-0.925)^2}$$

$$= \sqrt{1.8052} = 1.3436$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{1.3436}{1.0755} \times 100 = 124.93\%$$

प्रमाप विचलन का प्रगणन

गोलों की संख्या (x)	f	fx	B d	fd	fd^2
0	17	0	–2	–34	68
1	9	9	–1	–9	9
2	6	12	0	0	0
3	5	15	+1	+5	5
4	3	12	+2	+6	12
	n = 40	$\sum fx = 48$		$\sum fd = -32$	$\sum fd^2 = 94$

नोटः परिकल्पित माध्य = 2

$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{48}{40} = 1.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{94}{40} - \left(\frac{-32}{40}\right)^2} = \sqrt{2.35 - (-0.8)^2}$$

$$= \sqrt{2.35 - 0.64} = \sqrt{1.71} = 1.308$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{1.308}{1.2} \times 100 = 109\%$$

टीम B अधिक संगत है चूँकि इसमें कम विचरणता है।

उदाहरण 4.24: निम्न तालिका एक हाई स्कूल के लड़कों और लड़कियों के उम्र का वितरण देती है। ज्ञात करें इनमें से कौन समूह उम्र में अधिक परिवर्तनशील है।

उम्र (वर्षों में):	13	14	15	16	17
छात्रों की संख्या:					
(लड़के):	12	15	15	5	3
(लड़कियाँ):	13	10	12	2	1

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

उम्र वर्षों में (x)				**लड़के**	
	f	**fx**	**fd**	**d**	**fd^2**
13	12	156	–2	–24	48
14	15	210	–1	–15	15
15	15	225	0	0	0
16	5	80	+1	+5	5
17	3	51	+2	+6	12
	n = 50	$\sum fx = 722$		$\sum fd = 28$	$\sum fd^2 = 80$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{722}{50} = 14.44$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{50} - \left(\frac{-28}{50}\right)^2} = \sqrt{1.6 - (-0.56)^2}$$

$$= \sqrt{1.6 - 0.3136} = \sqrt{1.28641} = 1.1342$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.1342}{14.44} \times 100 = 7.855\%$$

प्रमाप विचलन का प्रगणन

उम्र वर्षों में				लड़कियाँ	
(x)	f	fx	fd	d	fd^2
13	13	169	–2	–26	52
14	10	140	–1	–10	10
15	12	180	0	6	0
16	2	32	+1	+2	2
17	1	17	+2	+2	4
	n = 38	$\sum fx = 538$		$\sum fd = -32$	$\sum fd^2 = 68$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{538}{38} = 14.16$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{68}{38} - \left(\frac{-32}{38}\right)^2} = \sqrt{1.7895 - (-0.842)^2}$$

$$= \sqrt{1.7895 - 0.7091} = \sqrt{1.0804} = 1.039$$

टिप्पणी

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.039}{14.16} \times 100 = 7.341\%$$

लड़कों की उम्र अधिक परिवर्तनशील है चूँकि इसका विचरण ज्यादा है।

उदाहरण 4.25: निम्न समंक से प्रमाप विचलन परिकलित करें :

मध्य–बिन्दुः	1	2	3	4	5	6	7	8	9
आवृत्तिः	4	120	202	304	410	310	158	80	2

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

म.बि.	f	d	fd	fd^2
1	4	-4	-16	64
2	120	-3	-360	1080
3	202	-2	-404	808
4	304	-1	-304	304
5	410	0	0	0
6	310	+1	+310	310
7	158	+2	+316	632
8	80	+3	+240	720
9	2	+4	8	32
	n = 1590	$\sum d = 0$	$\sum fd = -210$	$\sum fd^2 = 3950$

नोटः परिकल्पित माध्य = 5

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{n} = 5 + \frac{-210}{1590} = 5 - 0.1321 = 4.868$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{3950}{1590} - \left(\frac{210}{1590}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2.484 - (-0.1321)^2} = \sqrt{2.484 - 0.1745}$$

$$= \sqrt{2.4664} = 1.571$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1.571}{4.868} \times 100 = 32.26\%$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.26: निम्न समंक से विचरण का गुणांक प्रगणित करें।

लाभ/हानि (000′ रु. में)	दुकानों की संख्या	लाभ/हानि (000′ रु. में)	दुकानों की संख्या
-4........-3	4	+1......+2	50
-3........-2	10	+2......+3	40
-2........-1	22	+3......+4	24
-1........-0	28	+4......+5	18
-0........+1	38	+5......+6	10

हलः

लाभ/हानि C.I.	f	M.V.	2(M.V.)	fx	fx^2
-4........-3	4	-3.5	-7	-28	196
-3........-2	10	-2.5	-5	-50	250
-2........-1	22	-1.5	-3	-66	198
-1........-0	28	-0.5	-1	-28	28
0........+1	38	+0.5	+1	+38	38
+1......+2	56	+1.5	+3	+168	504
+2......+3	40	+2.5	+5	+200	1000
+3......+4	24	+3.5	+7	+168	1176
+4........+5	18	+4.5	+9	+162	1458
+5........+6	10	+5.5	+11	+110	1210
	n = 250			$\sum fx = +674$	$\sum fx^2 = 6058$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{674}{250} \times \frac{1}{2} = 2.696 \times \frac{1}{2} = 1.348$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fx}{n}\right)^2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{6058}{250} - \left(\frac{-674}{250}\right)^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{24.232 - (-2.696)^2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{24.232 - 7.2684} \times \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{16.96} \times \frac{1}{2} = 4.1187 \times \frac{1}{2} = 2.059$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.059}{1.348} \times 100 = 152.745\%$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.27: एक फैक्टरी दो प्रकार का टायर उत्पादित करता है। एक प्रयोग में इन टायरों के जीवन काल में निम्न परिणाम प्राप्त हुए :

जीवन की लम्बाई घंटों में:	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
प्रकार A :	50	110	260	100	80
प्रकार B :	40	300	120	80	60

उल्लेख करें किस प्रकार का टायर अधिक स्थाई है।

हल:

प्रमाप विचलन का प्रगणन

जीवन की लम्बाई '00' घण्टों में C.I.	x	(x-20)/2d'	A प्रकार			B प्रकार		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
15-17	16	-2	50	-100	200	40	-80	160
17-19	18	-1	110	-110	110	300	-300	300
19-21	20	0	260	0	0	120	0	0
21-23	22	+1	100	+100	100	80	+80	80
23-25	24	+2	80	+160	320	60	+120	240
		$\sum d = 0$	600=n	50=fd'	730 = $\sum fd'^2$	600 n =	-180 fd' =	780 $\sum fd'$ =

नोट: परिकल्पित माध्य = 20

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 20 + \frac{50}{600} \times 2 = 20 + 0.1667 = 20.1667$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 20 + \frac{-180}{600} \times 2 = 20 - 0.6 = 19.4$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{730}{600} - \left(\frac{50}{600}\right)^2} \times 2$$

$$= \sqrt{1.2167 - (0 - .083)^2} \times 2 = \sqrt{1.2167 - 0.00694} \times 2$$

$$= \sqrt{1.20976} \times 2 = 1.099891 \times 2 = 2.1998$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.1998}{20.1667} \times 100 = 10.91\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{780}{600} - \left(\frac{-180}{600}\right)^2} \times 2$$

$$= \sqrt{1.3 - (0.3)^2} \times 2 = \sqrt{1.3 - 0.09} \times 2$$

$$= \sqrt{1.21} \times 2 = 1.1 \times 2 = 2.2$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.2}{19.4} \times 100 = 11.34\%$$

टिप्पणी

A प्रकार का टायर अधिक स्थाई है चूँकि उनका विचरण 'B' प्रकार के टायर से कम है।

उदाहरण 4.28: एक एजेण्ट बल्ब का प्रतिदर्श 2 कम्पनी से लेता है। उसको उन्हें टिकाऊपन के लिए परीक्षण करना था और निम्न परिणाम पाया।

टिकाऊपन '00' घंटों में	**कम्पनी A**	**कम्पनी B**
17-19	100	30
19-21	160	420
21-23	260	120
23-25	80	30

किस कम्पनी के बल्ब एकरूप हैं?

हलः

टिकाऊपन '00' घंटों में C.I.	x	(x-20)/2 d'	A कम्पनी			B कम्पनी		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
17-19	18	-1	100	-100	100	30	-30	30
19-21	20	0	160	0	0	420	0	0
21-23	22	+1	260	+260	260	120	+120	120
23-25	24	+2	80	+160	320	80	+60	120
			600=n	320 $\sum fd'$ =	680 $\sum fd'^2$ =	600 n =	-150 $\sum fd'$ =	270 $\sum fd'^2$ =

परिकल्पित माध्य = 20

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 20 + \frac{320}{600} \times 2 = 20 + 1.0667 = 21.0667$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 20 + \frac{150}{600} \times 2 = 20 + 0.5 = 20.5$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{680}{600} - \left(\frac{320}{600}\right)^2} \times 2$$

$$= \sqrt{1.1333 - (0.533)^2} \times 2 = \sqrt{1.1333 - 0.2844} \times 2$$

$$= \sqrt{0.84885} \times 2 = 0.92136 \times 2 = 1.8427$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}_A} \times 100 = \frac{184.27}{2106.67} \times 100 = 8.747\%$$

टिप्पणी

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{270}{600} - \left(\frac{-150}{600}\right)^2} \times 2$$

$$= \sqrt{0.45 - (-0.25)^2} \times 2 = \sqrt{0.45 - 0.625} \times 2$$

$$= \sqrt{0.3875} \times 2 = 0.622495 \times 2 = 1.245$$

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}_B} \times 100 = \frac{1.245}{20.5} \times 100 = 6.073\%$$

B कम्पनी का बल्ब ज्यादा समरूप और टिकाऊ है A कम्पनी की बल्ब की अपेक्षा चूँकि B बल्बों में विचरण कम है।

उदाहरण 4.29: ज्ञात करें दो वर्गों में कौन अधिक सुसंगत है निम्न तालिका से अंक स्कोर करने में।

अंक:	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
वर्ग A:	7	10	20	18	7
वर्ग B:	5	9	21	15	6

हल:

अंक वर्ग	x	(x-45)/10 d'	A वर्ग			B वर्ग		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd^1	fd'^{2}
20-30	25	-2	7	-14	28	5	-10	20
30-40	35	-1	10	-10	10	9	-9	9
40-50	45	0	20	0	0	21	0	0
50-60	55	+1	18	+18	18	15	+15	15
60-70	65	+2	7	+14	28	6	+12	24
			n = 62	∑fd' = 8	∑fd'^{2}=84	n = 56	∑fd' = 8	∑fd'^{2} = 68

नोट: परिकल्पित माध्य = 45

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 45 + \frac{8}{62} \times 10 = 45 + 1.29 = 46.29$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 45 + \frac{8}{56} \times 10 = 45 + 1.429 = 46.43$$

टिप्पणी

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{84}{62} - \left(\frac{8}{62}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{1.3548 - (0.129)^2} \times 10 = \sqrt{1.3548 - 0.01665} \times 10$$

$$= \sqrt{1.33815} \times 10 = 11.568$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{11.568}{46.29} \times 100 = 24.99\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{68}{56} - \left(\frac{8}{56}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{1.2143 - (-0.1429)^2} \times 10 = \sqrt{1.2143 - 0.0204} \times 10$$

$$= \sqrt{1.9939} \times 10 = 10.927$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10.927}{46.43} \times 100 = 23.53\%$$

वर्ग B के छात्र ज्यादा सुसंगत हैं चूँकि उनका विचरण कम है।

उदाहरण 4.30: दो ब्राण्ड के टायर का परीक्षण उनकी आयु के लिए किया जाता है और निम्न परिणाम प्राप्त हुए।

आयु (महीनों में):	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
टायरों की संख्या 'X':	1	22	64	10	3
टायरों की संख्या 'Y':	3	21	74	1	1

अगर कसौटी संगतता है किस ब्राण्ड के टायर को आप वरीयता देंगे?

हल:

आयु (महीनों में) C.I.	x	(x-32)/5 d'	X ब्राण्ड			Y ब्राण्ड		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
20-25	22.5	-2	1	-2	4	3	-6	12
25-30	27.5	-1	22	-22	22	21	-21	21
30-35	32.5	0	64	0	0	74	0	0
35-40	37.5	+1	+10	+10	10	1	+1	1
40-45	42.5	+2	3	+6	12	1	+2	4
		$\sum d' = 0$	n = 100	$\sum fd' = 8$	$\sum fd'^2 = 48$	n = 100	$\sum fd' = 24$	$\sum fd'^2 = 38$

नोट: परिकल्पित माध्य = 32

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 32.5 + \frac{-8}{100} \times 5 = 32.5 - 0.4 = 32.1$$

$$\bar{y} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 32.5 + \frac{-24}{100} \times 5 = 32.5 + 1.2 = 31.3$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{48}{100} - \left(\frac{-8}{100}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{0.48 - (-0.08)^2} \times 5 = \sqrt{0.48 - 0.0064} \times 5$$

$$= \sqrt{0.4736} \times 5 = 0.6882 \times 5 = 3.44$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{3.44}{32.1} \times 100 = 10.72\%$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{38}{100} - \left(\frac{-24}{100}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{0.38 - (-0.24)^2} \times 5 = \sqrt{0.38 - 0.0576} \times 5$$

$$= \sqrt{0.3224} \times 5 = 0.5678 \times 5 = 2.839$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.839}{31.3} \times 100 = 9.07\%$$

'Y' ब्राण्ड टायर अधिक संगत हैं 'X' ब्राण्ड टायर की अपेक्षा।

उदाहरण 4.31: एक क्रेय एजेन्ट ने लैम्पों का प्रतिदर्श दो पूर्तिकर्ताओं 'A' और 'B' से निम्न सूचनाओं के साथ प्राप्त किया।

आयु की लम्बाई (घंटों में):	500-700	700-900	900-1100	1100-1300
पूर्तिकर्ता A:	10	16	30	8
पूर्तिकर्ता B:	3	42	12	4

किस पूर्तिकर्ता का लैम्प अधिक समरूप है?

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

आयु की लम्बाई (घंटों में) C.I.	x	$\frac{x-800}{200}$ d'	पूर्तिकर्ता A			पूर्तिकर्ता B		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
500-700	600	-1	10	-10	10	3	-3	3
700-900	800	0	16	0	0	42	0	0
900-1100	1000	+1	30	+30	30	12	+12	12

टिप्पणी

1100-1300	1200	+2	8	+16	32	4	+8	16
		$\sum d' = +1$	n = 64	$\sum fd' = 72$	$\sum fd'^2 = 72$	n = 61	$\sum fd' = 17$	$\sum fd'^2 = 31$

नोट : परिकल्पित माध्य = 800

$$\overline{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 800 + \frac{36}{64} \times 200 = 80 + 112.5 = 912.5$$

$$\overline{y}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 800 + \frac{17}{61} \times 200 = 800 + 55.7377 = 855.73$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{72}{64} - \left(\frac{36}{64}\right)^2} \times 200$$

$$= \sqrt{1.125 - (0.5625)^2} \times 200 = \sqrt{1.125 - 0.31641} \times 200$$

$$= \sqrt{0.80859} \times 200 = 0.89922 \times 200 = 179.84$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{179.84}{912.5} \times 100 = 19.71\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{31}{61} - \left(\frac{17}{61}\right)^2} \times 200$$

$$= \sqrt{0.5082 - (-0.2787)^2} \times 200 = \sqrt{0.5082 - 0.07767} \times 200$$

$$= \sqrt{0.43053} \times 200 = 0.65615 \times 200 = 131.23$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{131.23}{855.74} \times 100 = 15.34\%$$

पूर्तिकर्ता B का लैम्प समरूप है चूँकि उसका विचरण पूर्तिकर्ता A से कम है।

उदाहरण 4.32: एक फैक्टरी दो तरह के लैम्प 'A' और 'B' बनाता है। उनकी आयु का विवरण निम्न है।

आयु की लम्बाई (घंटों में):	500-700	700-900	900-1100	1100-1300	1300-1500
लैम्प A की संख्या:	5	11	26	10	8
लैम्प B की संख्या:	4	30	12	8	6

दोनों लैम्पों की आयु की परिवर्तनशीलता की तुलना करें।

हलः

आयु की लम्बाई (घंटों में) C.I.	x	$\frac{x-(100)}{200}$ d'	A लैम्प			B लैम्प		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
500-700	600	-2	5	-10	20	4	-8	16
700-900	800	-1	11	-11	11	30	-30	30
900-1100	1000	0	26	0	0	12	0	0
1100-1300	1200	+1	10	+10	10	8	+8	8
1300-1500	1400	+2	8	+16	32	6	+12	24
		$\sum$d' = + 0	n = 60	$\sum$fd' =36	$\sum$fd'^{2} =5	n = 60	$\sum$fd' =-18	$\sum$fd'^{2}=78

$$\overline{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 1000 + \frac{5}{60} \times 200 = 1000 + 16.667 = 1016.667$$

$$\overline{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 1000 + \frac{-18}{60} \times 200 = 1000 + 60 = 940$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{73}{60} - \left(\frac{5}{60}\right)^2} \times 200$$

$$= \sqrt{1.21667 - (0.0833)^2} \times 200 = \sqrt{1.21667 - 0.00694} \times 200$$

$$= \sqrt{1.20973} \times 200 = 1.09988 \times 200 = 219.975$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{219.975}{1016.667} \times 100 = 21.637\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{78}{60} - \left(\frac{-18}{60}\right)^2} \times 200$$

$$= \sqrt{1.30 - (-0.30)^2} \times 200 = \sqrt{1.30 - 0.09} \times 200$$

$$= \sqrt{1.21} \times 200 = 1.1 \times 200 = 220.00$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 = \frac{220}{940} \times 100 = 23.40\%$$

A बल्ब की आयु की परिवर्तनशीलता कम है और यह अधिक टिकाऊ है।

उदाहरण 4.33: निम्न समंक दो फैक्टरियों 'A' और 'B' के कामगारों के वेतन से सम्बन्धित है। किस फैक्टरी के वेतन अधिक परिवर्तनशील हैं?

टिप्पणी

वेतन (रु.) :	5 से कम	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
कामगारों की संख्या 'A':	20	18	30	25	20	15
कामगारों की संख्या 'B':	15	20	35	30	18	17

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

वेतन (रु.) C.I.	x	(x-12.5)/5 d'	फैक्टरी A			फैक्टरी B		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
0-5	2.5	-2	20	-40	80	15	-30	60
5-10	7.5	-1	18	-18	18	20	-20	20
10-15	12.5	0	30	0	0	35	0	0
15-20	17.5	+1	25	+25	25	30	+30	30
20-25	22.5	+2	20	+40	80	18	+36	72
25-30	27.5	+3	15	+45	135	17	+51	153
		∑d' = +3	n =128	∑fd' =52	∑fd'^{2}=338	n =135	∑fd' =67	∑fd'^{2} =335

नोटः परिकल्पित माध्य = 12.5

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 12.5 + \frac{52}{128} \times 5 = 12.5 + 2.031 = 14.531$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 12.5 + \frac{67}{135} \times 5 = 12.5 + 2.482 = 14.982$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{338}{128} - \left(\frac{52}{128}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{2.6406 - (0.4063)^2} \times 5 = \sqrt{2.6406 \times 0.16504} \times 5$$

$$= \sqrt{2.47556} \times 5 = 1.5733912 \times 5 = 7.8669$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{7.8669}{14.531} \times 100 = 54.14\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{335}{135} - \left(\frac{67}{135}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{2.4815 - (0.4963)^2} \times 5 = \sqrt{2.4815 - 0.24631} \times 5$$

$$= \sqrt{1.23519} \times 5 = 1.4951 \times 5 = 7.475$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{7.475}{14.982} \times 100 = 49.89\%$$

टिप्पणी

फैक्टरी A के कामगारों का वेतन अधिक परिवर्तनशील है चूँकि उसका विचरणता अधिक है फैक्टरी B के कामगारों की अपेक्षा।

उदाहरण 4.34: नीचे दिए गए समंक से उल्लेख करें दोनों श्रेणियों में से कौन अधिक परिवर्तनशील है।

चरः	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्ति 'A':	10	18	32	40	22	18
आवृत्ति 'B':	18	22	40	32	18	10

हलः

चर C.I.	x	(x-35)/10 d'	A फैक्टरी			B फैक्टरी		
			f	fd'	fd'^2	f	fd'	fd'^2
10-20	15	-2	10	-20	40	18	-36	72
20-30	25	-1	18	-18	18	22	-22	22
30-40	35	0	32	0	0	40	0	0
40-50	45	+1	40	+40	40	32	+32	32
50-60	55	+2	22	+44	88	18	+36	72
60-70	65	+3	18	+54	162	10	+30	90
		$\sum d' = +3$	n = 140	$\sum fd'=100$	$\sum fd'^2=348$	n = 140	$\sum fd'=40$	$\sum fd'^2=288$

नोटः परिकल्पित माध्य = 3.5

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 35 + \frac{100}{140} \times 10 = 35 + 7.1429 = 42.1429$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 35 + \frac{40}{140} \times 100 = 35 + 2.8517 = 37.8577$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{348}{140} - \left(\frac{100}{140}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.4857 - (0.714285)^2} \times 10 = \sqrt{2.4857 - 0.5102} \times 10$$

$$= \sqrt{1.9755} \times 10 = 1.405525 \times 10 = 14.055$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{14.055}{42.1429} \times 100 = 33.351\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{288}{140} - \left(\frac{40}{140}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2.05714 - (0.28571)^2} \times 10 = \sqrt{2.05714 - 0.81633} \times 10$$

$$= \sqrt{1.97551} \times 10 = 1.405527 \times 10 = 14.055$$

टिप्पणी

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{14.055}{37.8571} \times 100 = 37.127\%$$

श्रेणी B अधिक परिवर्तनशील है।

उदाहरण 4.35: दो ब्राण्डों के टायरों का परीक्षण निम्न परिणामों के साथ किया जाता है।

आयु '000' मील में :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
टायरों की संख्या X :	1	22	64	10	3
टायरों की संख्या Y :	0	24	76	0	0

परिवर्तनशीलता की तुलना करें और उल्लेख करें आप किस ब्राण्ड का टायर अपने ट्रक के बेड़े में प्रयुक्त करेंगे?

हलः

प्रमाप विचलन का प्रगणन

आयु '000' मीलों में C.I.	x	(x-32.5)/5 d'	A फैक्टरी			B फैक्टरी		
			f	fd'	fd'^{2}	f	fd'	fd'^{2}
20-25	22.5	-2	1	-2	4	0	0	0
25-30	27.5	-1	22	-22	22	24	-24	+24
30-35	32.5	0	64	0	0	76	0	0
35-40	37.5	+1	10	+10	10	0	0	0
40-45	42.5	+2	3	+6	12	0	0	0
		$\sum d' = +0$	n=100	$\sum fd' = -8$	$\sum fd'^2=48$	n = 100	$\sum fd' = -24$	$\sum fd'^2 = +24$

नोटः परिकल्पित माध्य = 20

$$\bar{x}_A = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 32.5 + \frac{-8}{100} \times 5 = 32.5 - 0.4 = 32.1$$

$$\bar{x}_B = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c = 32.5 + \frac{-24}{100} \times 5 = 32.5 - 1.2 = 31.3$$

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{48}{100} - \left(\frac{-8}{100}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{0.48 - (-0.08)^2} \times 5 = \sqrt{0.48 - 0.0064} \times 5$$

$$= \sqrt{0.4736} \times 5 = 0.6882 \times 5 = 3.44$$

टिप्पणी

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}_A} \times 100 = \frac{3.44}{32.1} \times 100 = 10.72\%$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c = \sqrt{\frac{24}{100} - \left(\frac{-24}{100}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{0.24 - (-0.24)^2} \times 5 = \sqrt{0.24 - 0.0576} \times 5$$

$$= \sqrt{0.1824} \times 5 = 0.42.708 \times 5 = 2.14$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\overline{x}_B} \times 100 = \frac{2.14}{31.3} \times 100 = 6.837\%$$

हम 'Y' ब्राण्ड टायर का इस्तेमाल कर सकते हैं क्योंकि उनका विचरण 'X' ब्राण्ड के टायरों से कम है।

उदाहरण 4.36: निम्न सतत श्रेणी का माध्य और प्रमाप विचलन क्रमशः 31 और 15.9 हैं। वितरण, पद विचलन के बाद निम्न है :

dx:	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
f:	10	15	25	25	10	10	5

वास्तविक वर्गों का निर्धारण करें।

हलः वर्गों का निर्धारण करने के लिए, हमें दो मूल्यों की आवश्यकता है वर्ग अन्तराल और परिकल्पित माध्य निम्न जैसा–

d'	f	fd'	fd'^2
-3	10	-30	90
-2	15	-30	60
-1	25	-25	25
0	25	0	0
1	10	+10	10
2	10	+20	40
3	5	+15	45
	n = 100	$\sum fd' = -40$	$\sum fd'^2 = 270$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad 15.9 = \sqrt{\frac{270}{100} - \left(\frac{-40}{100}\right)^2} \times c$$

$$15.9 = \sqrt{2.7 - (0.4)^2} \times c \qquad 15.9 = \sqrt{2.7 - 0.16} \times c$$

$$15.9 = \sqrt{2.54} \times c \qquad \overline{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

टिप्पणी

$$15.9 = 1.5937 \times c \qquad 31 = A + \frac{-40}{100} \times 10$$

$$c = \frac{1.59}{15.9} \times 10 \qquad 31 = A - 4$$

$$A = 35$$

अध्ययनाधीन चर एक सतत श्रेणी हैं $d = 0$ का वर्ग 35 से सम्बन्ध है और इसका वर्ग है $(35 - \frac{c}{2})$ और $(35 + \frac{c}{2})$ i.e. 30-40 बाकी बचे वर्ग दोनों तरफ निम्न जैसा लें,

वर्गः	0-10	10-20	20-30	30-40 ← →	40-50	50-60	60-70

4.7 प्रमाप विचलन के अभिलक्षण (Characteristic of Standard Deviation)

प्रमाप विचलन ओर विचरण के गुणांक में वे सभी अभिलक्षण होते हैं, जो एक अच्छे अपकिरण की माप को धारण करना चाहिए। विचलनों को वर्ग करने की विधि ऋणात्मक चिन्हों को खत्म कर देती है, और इस तरह अंकों के गणितीय जोड़–तोड़ को आसान बना देती हैं।

प्रमाप विचलन के गुण (Merits of Standard Deviation)

निम्नलिखित प्रमाप विचलन के गुण हैं–

(i) यह सभी अवलोकनों पर आधारित है।

(ii) यह बीजगणित द्वारा सुगम ढंग से व्यवहृत हो सकती है।

(iii) यह सुपरिभाषित और अपकिरण की निश्चित माप है।

(iv) यह अत्यधिक महत्त्व की है, जब हमलोग दो श्रेणियों के बीच परिवर्तनशीलता की तुलना करते हैं।

प्रमाप विचलन के दोष (Demerits of Standard Deviation)

इसके गुणों के बावजूद प्रमाप विचलन की निम्न सीमाएं हैं–

(i) यह परिकलन और समझने में कठिन है।

(ii) यह आत्यंतिक मूल्यों को अधिक भार प्रदान करता है। चूँकि विचलनों का वर्ग निकाला जाता है।

(iii) यह आर्थिक अध्ययनों में उपयोगी नहीं है।

4.8 विषमता (Skewness)

टिप्पणी

विषमता का अर्थ है 'घुमांव' या 'ऐंठन' या 'सीधा नहीं होना'। विषमता अपकिरण का परिष्कृत माप है। यह माप घुमाव की मात्रा देता है जिससे हमें वितरण की आकृति की स्पष्ट तस्वीर मिलती है। यह आधार प्रदान करता है जिससे विभिन्न वितरणों का अंतर पहचाना जा सकता है। यह विचरण की दिशा से संबंधित है और हमें बताता है कि वितरण सममिति (Symmetry), घण्टाकार या समरूपता या एकरूपता से कितनी दूर है।

विषमता सममिति के विपरीत को द्योतित करता है और वितरण के वक्र के आकार से संबंधित है। इसका अर्थ है कि सभी असममितीय वितरण विषम हैं जो एक तरफ अधिक उभरा होता है दूसरी तरफ की तुलना में। विषमता की माप सिर्फ विषमता के विस्तार सीमा को ही सूचित नहीं करती है परन्तु दिशा भी। विषमता धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है।

यह धनात्मक विषम वितरण में, वक्र का सिरा आलेख (Graph) में झुकी रहती है बाईं से दाईं ओर। एक ऋणात्मक विषम वितरण में, वक्र का सिरा आलेख में दाईं ओर से बाईं ओर झुका रहता है।

4.9 विषमता का विश्लेषण (Analysis of Skewness)

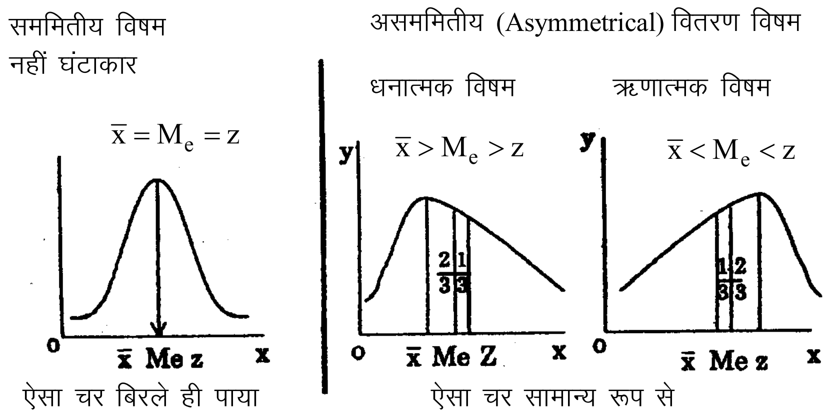
विषमता दो प्रकार से निर्धारित की जा सकती है–

(a) परीक्षण द्वारा और

(b) विषमता की विस्तार सीमा से

(a) विषमता का परीक्षण– किसी वितरण में विषमता के अस्तित्व की पुष्टि की जा सकती है अगर वितरण असममित है (i.e. घण्टाकार नहीं)। एक विषम वितरण में माध्य, माध्यिका और बहुलक संपाती नहीं होते हैं।

हम वितरण का अध्ययन करें,



ऐसा चर बिरले ही पाया जाता है।

ऐसा चर सामान्य रूप से पाया जाता है।

उपर्युक्त तीन प्रकार के वितरणों के विश्लेषण से, निम्न परीक्षण प्रयुक्त हो सकता है विषमता की उपस्थिति और अनुपस्थिति जानने के लिए–

(i) माध्यों के बीच सम्बन्ध– सभी माध्य संपाती नहीं होते हैं (i.e., $\bar{x} > M_e > z$ या $\bar{x} < Me < z$)। $\bar{x}$ और z विस्तीर्णता से खींचे जाते हैं, और M_e दोनों के बीच पड़ता है।

(ii) आलेखीय दृष्टिकोण– एक आलेख में, वक्र घंटाकार आकृति में नहीं होती है। अगर वक्र को केन्द्र पर उदग्र विभाजित किया जाता है, दो भाग का परिणाम दो अर्द्ध गोले नहीं हैं।

(iii) चतुर्थकों के बीच सम्बन्ध– एक असममितीय वितरण में (विषम) Q_1 और Q_3 माध्यिका से समान दूरी पर नहीं हैं। इसका अर्थ है।

(iv) $Q_3 - Me \neq Me - Q_1$

(v) विचलनों का योग– एक असममितीय वितरण में (विषम) माध्यिका (या बहुलक) से धनात्मक विचलनों का योग बराबर नहीं होता है माध्यिका (या बहुलक) से ऋणात्मक विचलनों का योग के।

(vi) बहुलक की आवृत्तियाँ– आवृत्तियाँ बहुलक के दोनों तरफ बराबर रूप से वितरित नहीं हैं।

(b) विषमता का विस्तार (माप)– विषमता का निर्धारण सांख्यिकीय मापों से हो सकता है जो निरपेक्ष या आपेक्षिक हो सकता है। विषमता की निरपेक्ष माप हमें असममित विस्तार और दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) के बारे में कहता है। विषमता की आपेक्षिक माप लाभदायक है जब हम दो श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं। विषमता सूत्र रूप में 'S_k' से द्योतित होता है।

(i) विषमता का निरपेक्ष माप–

$S_k = (\bar{x} - Me)$, $S_k = (Me - Z)$ या $S_k = (\bar{x} - Z)$

(**नोट**: धनात्मक या ऋणात्मक उत्तर बताता है कि विषमता धनात्मक है या ऋणात्मक।)

विषमता की निरपेक्ष माप अधिक व्यवहारिक उपयोग की नहीं है। वे नियमित दिन बदिन के कार्यकलाप में उपयोगी उपकरण नहीं मानी जाती हैं परिमाणात्मक समंक के अध्ययन में।

(ii) विषमता की आपेक्षिक माप– विषमता की निरपेक्ष माप संतोषजनक नहीं हैं। वे आपेक्षिक माप में परिवर्तित किए जाते हैं। विषमता की आपेक्षिक माप 'विषमता का गुणांक' कहलाते हैं। वे दो प्रकार के होते हैं निम्न जैसे–

(a) कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक और

(b) बाउले का विषमता का गुणांक

4.10 विषमता का कार्ल पियर्सन का गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Skewness)

कार्ल पियर्सन ने विषमता के आपेक्षिक माप के लिए सूत्र का उल्लेख किया है। इसलिए, सूत्र ''कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक'' जानी जाती है। यह वितरण के माध्य और बहुलक के बीच अंतर पर आधारित है जो प्रमाप विचलन से विभक्त होती है। यह सूत्र रूप से 'S_{kp}' से द्योतित होती है।

(i) $S_{kp} = \dfrac{\bar{x} - z}{\sigma}$ – – – – – जब z स्पष्ट रूप से परिभाषित है या

(ii) $S_{kp} = \dfrac{\bar{x} - (3M_e - 2\bar{x})}{\sigma} = \dfrac{\bar{x} - 3M_e + 2\bar{x}}{\sigma}$

$= \dfrac{3(\text{माध्य}-\text{माध्यिका})}{\sigma} \quad = \dfrac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma}$ – – – – – जब z गलत परिभाषित है।

नोटः

(a) जब z स्पष्ट रूप से परिभाषित है, सूत्र (i) की स्थिति में, उत्तर सामान्यतः +1 और –1 के बीच पड़ता है।

(b) जब z गलत–परिभाषित है, सूत्र (ii) की स्थिति में, उत्तर +3 और –3 के बीच पड़ता है।

उदाहरण 4.37: निम्नलिखित सूचना से जो सांख्यिकी के 40 छात्रों से संबंधित है, कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक ज्ञात करें। समंक को 10 स्तरों में विभक्त करें जिनका अंक विस्तार है 0–10, 10–20, 20–30 इत्यादि।

30	20	18	15	10	22	25	17	41	48
56	91	73	84	75	99	08	35	69	07
00	13	21	33	44	55	66	77	88	27
96	20	40	50	60	70	80	90	38	54

हलः हम अवलोकनों को वर्ग में वर्गीकृत करें निम्न जैसा–

विषमता के गुणांक का प्रगणन

अंक C.I.	मिलान चिन्ह	f	MV x	$\left(\frac{x-45}{10}\right)$ d'	fd'	fd'^{2}
0-10	|||	3	5	-4	-12	48
10-20	𝍸	5 f_0	15	-3	-15	45

टिप्पणी

20-30	卌 I	6 f_1	25	-2	-12	24
30-40	III	4 f_2	35	-1	-4	4
40-50	III	4	45	0	0	0
50-60	III	4	55	+1	+4	4
60-70	III	3	65	+2	+6	12
70-80	III	4	75	+3	+12	36
80-90	III	3	85	+4	+12	48
90-100	III	4	95	+5	+20	100
		n = 40			$\sum fd' = 11$	$\sum fd'^2 = 321$

नोटः परिकल्पित माध्य = 45

$$z = l + \frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0)(f_1 - f_2)} \times c \qquad \overline{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 20 + \frac{6-4}{(6-4)+(6-5)} \qquad = 45 + \frac{11}{40} \times 10$$

$$= 20 + \frac{1}{2+1} \times 10 \qquad = 45 + 2.75$$

$$= 20 + 3.3333 = 23.3333 \qquad = 47.75$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma}$$

$$= \sqrt{\frac{321}{40} - \left(\frac{11}{40}\right)^2} \times 10 \qquad = \frac{47.75 - 23.3333}{28.195}$$

$$= \sqrt{8.025 - (0.275)^2} \times 10 \qquad = \frac{24.4167}{28.195}$$

$$= \sqrt{8.025 - 0.075625} \times 10 \qquad = 0.866$$

$$= \sqrt{7.949375} \times 10$$

$$= 2.8195 \times 10 = 28.195$$

उदाहरण 4.38: निम्न समंक से विषमता का कार्ल पियर्सन गुणांक परिकलित करें।

अंक से ऊपरः	0	10	20	30	40	50	60	70	80
छात्रों की संख्याः	150	140	100	80	80	70	30	14	0

टिप्पणी

हलः हम संचई श्रेणी को वर्ग अन्तराल में बदल दें।

अंक C.I.	c.f.	f	MV x	$\left(\frac{x-35}{10}\right)$ d'	fd'	fd'^{2}
0-10	10	10	5	-3	-30	90
10-20	50	40	15	-2	-80	160
20-30	70	20	25	-1	-20	20
30-40	70	0	35	0	0	0
40-50	80	10	45	+1	+10	10
50-60	120	40	55	+2	+80	160
60-70	136	16	65	+3	+48	144
70-80	150	14	75	+4	+56	224
		n = 150			$\sum$fd' = 64	$\sum$fd'^{2} = 808

नोटः परिकल्पित माध्य = 35

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c$$

$$= 35 + \frac{64}{150} \times 10 \qquad = \sqrt{\frac{808}{150} - \left(\frac{64}{150}\right)^2} \times 10$$

$$= 35 + 4.2667$$

$$= \sqrt{5.38667 - (0.42667)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{5.38667 - 0.18201} \times 10$$

$$= 39.2667$$

$$= \sqrt{5.20466} \times 10 = 2.2813723 \times 10$$

$$= 22.814$$

माध्यिका $\frac{n}{2}$th मद का आकार $\therefore \frac{150}{2}$th $= 75$ वाँ मद यह 80 c.f. में पड़ता है।

80 c.f. के विरुद्ध माध्यिका वर्ग है (40–50)

$$Me = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c = 40 + \frac{75 - 70}{10} \times 10 = 40 + \frac{50}{10} = 40 + 5 = 45$$

टिप्पणी

बहुलक वर्ग का निर्धारण (समूहन)

C.I.	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0-10	10					
		50				
10-20	40			70		
			60			
20-30	20				60	
		20				
30-40	0					30
			10			
40-50	10			50		
		50				
50-60	40				66	
			56			
60.70	16					70
		30				
70-80	14					

विश्लेषण

C.I. f	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f_1		|				|		
f_2	|	|			|	|		
f_3		|	|					
f_4	|	|	|					
f_5					|	|	|	
f_6						|	|	|
कुल	2	4	2		2	4	2	1

नोटः बहुलक गलत–परिभाषित है। हमलोग बहुलक को निर्धारित करने के लिए आनुभविक सूत्र का प्रयोग करते हें, कार्ल पियरसन के विषमता के गुणांक का मूल्य प्राप्त करने के लिए।

यहाँ दो बहुलक वर्ग हैं i.e., (10-20) और (50-60) यह द्विबहुलक वितरण हैं। इसलिए हमलोग माध्यों के बीच आनुभविक सम्बन्ध पर आधारित सूत्र को प्रयुक्त करेंगे।

टिप्पणी

$$S_{kp} = \frac{3(\text{माध्य}-\text{माध्यिका})}{\sigma}$$

$$= \frac{3(39.2667-45)}{22.814} = \frac{3(-5.7333)}{22.814}$$

$$= \frac{17.1999}{22.814} = -0.75392$$

उदाहरण 4.39: निम्न सूचना से विषमता का कार्ल पियर्सन का गुणांक परिकलित करें जबकि इसका बहुलक 54 है।

अंकः	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
छात्रों की संख्याः	10	—	30	—	14 = 94

छूटी हुई आवृत्तियाँ ज्ञात करें।

हलः हम मान लें कि छूटी हुई आवृत्तियाँ क्रमशः A और B हैं।

10 + A + 30 + B + 14 = 94 आगे

A + B = 94 – 54 (B = 40 - A)

A + B = 40

विषमता के गुणांक का प्रगणन

अंक		$\left(\frac{x-50}{20}\right)$				
C.I.	f	f	x	d'	fd'	fd'^{2}
0-20	10	10	10	-2	-20	40
20-40	A	16*	30	-1	-16	16
40-60	30	30	50	0	0	0
60-80	(40-A)	24*	70	+1	+24	24
80-100	14	14	90	+2	+28	56
	n = 94	94			$\sum$fd' = 16	$\sum$fd'^{2} = 136

नोटः परिकल्पित माध्य = 50

* व्युत्पत्तित आवृत्तियाँ

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 50 + \frac{16}{94} \times 20 = 50 + \frac{320}{94} = 50 + 3.404 = 53.404$$

बहुलक 54 है और यह 40–60 वर्ग में पड़ता है। इसलिए,

टिप्पणी

$f_0 = A$, $f_1 = 30$ और $f_2 = (40\text{-}A)$

$$z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$54 = 40 + \frac{(30 - A)}{(30 - A) + [30 - (40 - A)]} \times 20$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times 20$$

$$14 = \frac{30 - A}{30 - A + 30 - 40 + A} \times 20$$

$$= \sqrt{\frac{136}{94} - \left(\frac{16}{94}\right)^2} \times 20$$

$$14 = \frac{30 - A}{30 + 30 - 40} \times 20$$

$$= \sqrt{1.4468 - (0.17)^2} \times 20$$

$$14 = \frac{30 - A}{20} \times 20$$

$$= \sqrt{1.4468 - 0.029} \times 20$$

$$14 = 30 - A = \sqrt{1.4178} \times 20$$

$$A = 16 = 1.1907 \times 20$$

$$A + B = 40 = 23.8143$$

$$16 + B = 40 \; B = 24$$

$$S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma}$$

$$= \frac{53.404 - 54}{23.8143} = \frac{-0.596}{23.8143} = -0.0250$$

उदाहरण 4.40: निम्न से कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक परिकलित करें।

उम्र:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
लोगों की संख्या:	10	12	24	32	28	11	3

हलः

टिप्पणी

उम्र	लोगों की संख्या	MV	$\left(\frac{x-35}{10}\right)$		
C.I.	f	x	d'	fd'	fd'^{2}
0-10	10	5	-3	-30	90
10-20	12	15	-2	-24	48
20-30	24 f_0	25	-1	-24	24
30-40	32 f_1	35	0	0	0
40-50	28 f_2	45	+1	+28	28
50-60	11	55	+2	+22	44
60-70	3	65	+3	+9	27
	n = 120			$\sum fd' = -19$	$\sum fd'^2 = 261$

नोटः परिकल्पित माध्य = 35

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 35 + \frac{-19}{120} \times 100 = 35 - 1.58333 = 33.4167$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad z = 1 + \frac{(f_1 + f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= \sqrt{2.175 - 0.02507} \times 10 \qquad = 30 + \frac{8}{8+4} \times 10$$

$$= \sqrt{2.14993} \times 10 \qquad = 30 + \frac{80}{12} = 30 + 6.6667$$

$$= 1.4663 \times 10 \qquad = 36.667$$

$$= 14.663$$

$$S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma} = \frac{33.4167 - 36.667}{14.663} = \frac{-3.2503}{14.663} = -0.22167$$

उदाहरण 4.41: निम्न से पियर्सन के विषमता का गुणांक प्रगणित करें।

उम्रः	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
लोगों की संख्याः	15	10	18	12	10	5	2

टिप्पणी

हलः

विषमता के गुणांक का प्रगणन

अंक C.I.	लोगों की संख्या (f)	MV x	$\left(\frac{x-25}{10}\right)$ d'	fd'	fd'^{2}
0-10	15	5	-2	-30	60
10-20	10 f_0	15	-1	-10	10
20-30	18 f_1	25	0	0	0
30-40	12 f_2	35	+1	+12	12
40-50	10	45	+2	+20	40
50-60	5	55	+3	+15	45
60-70	2	65	+4	+8	32
	n = 72			$\sum fd' = +15$	$\sum fd'^2 = 199$

नोटः परिकल्पित माध्य = 25

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 25 + \frac{15}{72} \times 10 = 25 + \frac{150}{72} = 25 + 2.0833 = 27.0833$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{199}{72} - \left(\frac{15}{72}\right)^2} \times 10$$

$$z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= \sqrt{2.7639 - (0.2083)^2} \times 10$$

$$= 20 + \frac{(18-10)}{(18-10)+(18-12)} \times 10$$

$$= \sqrt{2.7639 - 0.04339} \times 10$$

$$= 20 + \frac{8}{8+6} \times 10$$

$$= \sqrt{2.7205} \times 10$$

$$= 20 + \frac{80}{14} = 20 + 5.7143$$

$$= 1.6494 \times 10 = 16.494$$

$$= 25.7143$$

$$S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma} = \frac{27.0833 - 25.7143}{16.494} = \frac{1.369}{16.494} = 0.083$$

उदाहरण 4.42: निम्न समंक से पियरसन का विषमता का गुणांक प्राप्त करें :

वेतन (रु.):	270-280	280-290	290-300	300-310	310-320	320-330	330-340	340-350
लोगों की संख्या:	12	18	35	42	50	45	20	8

हल:

C.I.	MV x	$\left(\frac{x-305}{10}\right)$ d'	f	fd'	fd'^{2}
270-280	275	-3	12	-36	108
280-290	285	-2	18	-36	72
290-300	295	-1	35	-35	35
300-310	305	0	42	0	0
310-320	315	+1	50	+50	50
320-330	325	+2	45	+90	180
330-340	335	+3	20	+60	180
340-350	345	+4	8	+32	128
			n = 230	$\sum$fd' = 125	$\sum$fd'^{2} = 753

नोट: परिकल्पित माध्य = 305

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 305 + \frac{125}{230} \times 10 = 350 + \frac{1250}{230} = 305 + 5.4348 = 310.4348$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad z = 1 + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2} \times 10$$

$$= 310 + \frac{(50-42)}{(50-42)+(50-45)} \times 10$$

$$= \sqrt{3.273913 - (0.54348)^2} \times 10$$

टिप्पणी

$$= 310 + \frac{80}{8+5} = 310 + \frac{80}{13}$$

$$= \sqrt{3.273913 - 0.29537} \times 10 \qquad = 310 + 6.15385$$

$$= \sqrt{2.9785} \times 10 = 1.72585 \times 10 \qquad = 316.15385$$

$$= 17.2582$$

$$S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma} = \frac{310.4348 - 316.15385}{17.2585} = \frac{-5.7191}{17.2585}$$

$$= -0.3314$$

उदाहरण 4.43: 125 लोगों के निम्न उम्र वितरण से विचरण का गुणांक और कार्ल पियरसन का विषमता का गुणांक परिकलित करें

उम्र (वर्षों में) C.I. से कमः	10	20	30	40	50	60	70	80
लोगों की संख्याः	5	15	30	55	81	100	120	125

हलः

उम्र (वर्षों में) C.I.	लोगों की संख्या (f)	x	(x-45)/10 d'	fd'	fd'^{2}
0-10	5	5	-4	-20	80
10-20	10	15	-3	-30	90
20-30	15	25	-2	-30	60
30-40	25	35	-1	-25	25
40-50	26	45	0	0	0
50-60	19	55	+1	+19	19
60-70	20	65	+2	+40	80
70-80	5	75	+3	+15	45
	n = 125			$\sum fd' = -31$	$\sum fd'^2 = 399$

नोट : परिकल्पित माध्य = 45

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c \qquad C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= 45 + \frac{-31}{125} \times 10 \qquad = \frac{17.6932}{42.52} \times 100$$

$$= 45 - 2.48 = 42.52 \qquad = 41.61\%$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{399}{125} - \left(\frac{-31}{125}\right)^2} \times 10 \qquad = 40 + \frac{(26-25)}{(26-25)+(26-19)} \times 10$$

$$= \sqrt{3.192 - (-2.48)^2} \times 10 \qquad = 40 + \frac{1}{1+7} \times 10$$

$$= \sqrt{3.192 - 0.0615} \times 10 \qquad = 40 + \frac{1}{8} \times 10$$

$$= \sqrt{3.1305} \times 10 \qquad = 40 + 1.25$$

$$= 1.76932 \times 10 \qquad = 41.25$$

$$= 17.6932 \qquad S_{kp} = \frac{\overline{x} - z}{\sigma}$$

$$= \frac{42.52 - 41.25}{17.6932}$$

$$= \frac{1.27}{17.6932} \qquad = 0.0718$$

उदाहरण 4.44: निम्न समंक के लिए कार्ल पियर्सन के विषमता का गुणांक परिकलित करें

उम्र 'से कम' (वर्षों में) :	10	20	30	40	50	60	70	80
लोगों की संख्या :	5	15	30	60	80	90	96	100

हल: हम श्रेणी को संचई से वर्ग अंतराल में परिवर्तित करें :

उम्र (वर्षों में) C.I.	M.V. x	लोगों की संख्या (f)	(x-35)/10 d'	fd'	fd'^{2}
0-10	5	5	-3	-15	45
10-20	15	10	-2	-20	40
20-30	25	15	-1	-15	15
30-40	35	30	0	0	0
40-50	45	20	+1	+20	20
50-60	55	10	+2	+20	40
60-70	65	6	+3	+18	54
70-80	75	4	+4	+16	64
		n = 100		$\sum fd' = 24$	$\sum fd'^2 = 278$

नोट : परिकल्पित माध्य = 35

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 35 + \frac{24}{100} \times 10 = 35 + \frac{240}{100} = 35 + 2.4 = 37.4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c \qquad z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{278}{100} - \left(\frac{24}{100}\right)^2} \times 10$$

$$= 30 + \frac{30 - 15}{(30 - 15) + (30 - 20)} \times 10$$

$$= \sqrt{2.78 - (0.24)^2} \times 10$$

$$= 30 + \frac{15}{15 + 10} \times 10$$

$$= \sqrt{2.78 - 0.0576} \times 10 \qquad = 30 + \frac{150}{25}$$

$= 1.64999 \times 10$ $\qquad = 30 + 6 = 36$

$= 16.50$

$$S_{kp} = \frac{\overline{x} - x}{\sigma} = \frac{37.4 - 36}{16.50} = \frac{1.4}{16.50}$$

$= 0.08485$

उदाहरण 4.45: किसी वितरण में, निम्नलिखित परिणाम स्थापित हुए।

माध्य = 45, माध्यिका = 48 और

S_{kp} = - 0.4 प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

हल :

$$S_{kp} = \frac{3\,(\text{माध्य}-\text{माध्यिका})}{\sigma}$$

$$-0.4 = \frac{3(45 - 48)}{\sigma} = \frac{3(-3)}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{-9}{-0.4}$$

$$\sigma = 22.5$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.46: निम्न से विषमता का गुणांक प्रगणित करें :

माध्य वेतन (रु. में) = 59.50 माध्यिका वेतन (रु. में) = 55.70

वेतन का प्रसरण (Variance) (रु. में) = 110

हलः

$$S_{kp} = \frac{3(\overline{x} - Me)}{\sigma}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}} \qquad = \frac{3(59.50 - 55.70)}{10.488} = \frac{3(3.8)}{10.488}$$

$$= \sqrt{110} \qquad = \frac{11.4}{10.488} = 1.08696$$

$$= 10.488$$

उदाहरण 4.47: किसी वितरण में, निम्न परिणाम प्राप्त हुए :

C.V. = 40%, $\overline{x} = 25$, z = 20। विषमता का गुणांक ज्ञात करें।

हल :

$$C.V. = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \qquad S_{kp} = \frac{\overline{x} - z}{\sigma}$$

$$40\% = \frac{\sigma}{25} \times 100 \qquad = \frac{25 - 20}{10} = \frac{5}{10}$$

$$0.4 = \frac{\sigma}{25} \qquad = 0.5$$

$$\sigma = 10$$

उदाहरण 4.48: विषमता का गुणांक परिकलित करें अगर, Σ fx = 350, n = 10, माध्यिका = 38 और प्रसरण = 49

हल :

$$\sigma^2 = \sqrt{\text{प्रसरण}} \qquad S_{kp} = \frac{3(\overline{x} - Me)}{\sigma}$$

$$\sigma^1 = \sqrt{49} \qquad = \frac{3(35 - 38)}{7}$$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{n} \qquad = \frac{3(-3)}{7}$$

$$= \frac{350}{10} \qquad = \frac{-9}{7}$$

$$= 35 \qquad = -1.2857$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.49: एक औद्योगिक विवाद के निपटारे के पहले और बाद में निम्न तथ्य एकत्र किए जाते हैं

	पहले	बाद में
कामगारों की संख्या..................	515	509
माध्य वेतन (रु.)........................	49.50	52.75
माध्यिका वेतन (रु.)..................	52.80	50.00
वेतन का प्रसरण (रु.).............	121	144

स्थिति की तुलना विवाद के निपटारे के पहले और बाद की करें *(a)* कुल वेतन *(b)* बहुलक वेतन *(c)* अपकिरण *(d)* C.V. और *(e)* विषमता के सम्बन्ध में।

हलः

	विवाद से पहले		**विवाद के बाद**
(a)	कुल वेतन $\Sigma x = \bar{x} \times n$ $= 49.50 \times 515$ $= 25,492.52$ रु.	*(a)*	कुल वेतन $\Sigma x = \bar{x} \times n$ $= 52.75 \times 509$ $= 26,849.75$ रु.
(b)	बहुलक वेतन $z = 3Me - 2\bar{x}$ $= 3(52.80) - 2(49.50)$ $= 158.4 - 99$ $= 59.4$	*(b)*	बहुलक वेतन $z = 3Me - 2\bar{x}$ $= 3(50) - 2(52.75)$ $= 150 - 105.50$ $= 44.5$
(c)	अपकिरण (σ) $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$ $= \sqrt{121}$ $= 11$	*(c)*	अपकिरण (σ) $\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$ $= \sqrt{144}$ $= 12$
(d)	विचरण का गुणांक $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ $= \frac{11}{49.50} \times 100$ $= 22.22\%$	*(d)*	विचरण का गुणांक $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ $= \frac{12}{52.75} \times 100$ $= 22.75\%$

टिप्पणी

(e)	विषमता $S_{kp} = \frac{3(\overline{x} - Me)}{\sigma}$ $= 3(49.50 - 52.80)$ $= \frac{3(-3.3)}{11} = \frac{-9.9}{11}$ $= -0.9$	*(e)*	विषमता $S_{kp} = \frac{3(\overline{x} - Me)}{\sigma}$ $= 3(52.75 - 50.00)$ $= \frac{3(2.75)}{12} = \frac{8.25}{12}$ $= 0.6875$

उदाहरण 4.50: निम्न से कार्ल पिर्यसन के विषमता का गुणांक परिकलित करें

विषमता के गुणांक का प्रगणन

उम्र वर्षों में (ऊपर) :	55	50	45	40	35	30	25	20
लोगों की संख्या :	32	78	144	259	263	449	494	525

हल : हम संचयी वितरण को वर्ग–अंतराल में बदलें

उम्र (वर्षों में) C.I.	लोगों की संख्या f	x	(x-37.5)/5 d'	fd'	fd'^2
20-25	31	22.5	-3	-93	279
25-30	45	27.5	-2	-90	180
30-35	86	32.5	-1	-86	86
35-40	104	37.5	0	0	0
40-45	115	42.5	+1	+115	115
45-50	66	47.5	+2	+132	264
50-55	46	52.5	+3	+138	414
55-60	32	57.5	+4	+128	512
	n = 525			$\Sigma fd' = 244$	$\Sigma fd'^2 = 1850$

नोट : परिकल्पित माध्य = 37.5

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 37.5 + \frac{244}{525} \times 5 = 37.5 + 2.3238 = 39.8238$$

टिप्पणी

बहुलक वर्ग के निर्धारण के लिए समूहन विधि अपनाई जाती है

C.I.	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
20-25	31					
		76				
25-30	45			162		
			131			
30-35	86				235	
		190				
35-40	104					305
			219			
40-45	115			285		
		181				
45-50	66				227	
			112			
50-55	46					144
		78				
55-60	32					

विश्लेषण

x	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
f_1					1			
f_2			1	1				
f_3				1	1			
f_4				1	1	1		
f_5		1	1	1				
f_6			1	1	1			
कुल		1	3	5	4	1		

इसलिए बहुलक वर्ग है 35–40

नोट : f_1 - f_2 अंतर है (कोई ऋणात्मक परिणाम नहीं)

$$z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c$$

टिप्पणी

$$= 35 + \frac{(104-86)}{(104-86)+(104-115)} \times 5 = 35 + \frac{18}{18+11} \times 5$$

$$= 35 + \frac{90}{29} = 35 + 3.103 = 38.103$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{1850}{525} \times \left(\frac{224}{525}\right)^2} \times 5 \; = \sqrt{3.52381 - (0.46476)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{3.52381 - 0.216} \times 5 = \sqrt{3.30781} \times 5$$

$$= 1.81874 \times 5 = 9.09369$$

$$S_{kp} = \frac{\overline{x} - z}{\sigma}$$

$$= \frac{39.8238 - 38.103}{9.09369} = \frac{1.7208}{9.09369} = 0.18923$$

उदाहरण 4.51: निम्न वितरण के लिए कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक परिकलित करें :

मासिकवेतन :	600	800	1000	1200	1400	1600
400, परन्तु से कम विक्रेताओं की संख्या :	4	14	33	45	49	50

हलः हम संचई वितरण को वर्ग अंतराल में परिवर्तित करें।

विषमता के गुणांक का प्रगणन

मासिक वेतन C.I.	**लोगों की संख्या** f	x	$\frac{x-900}{200}$ d'	fd'	fd'^2
400-600	4	500	-2	-8	16
600-800	10 f_0	700	-1	-10	10
800-1000	19 f_1	900	0	0	0
1000-1200	12 f_2	1100	+1	+12	12
1200-1400	4	1300	+2	+8	16
1400-1600	1	1500	+3	+3	9
	n = 50			$\Sigma fd' = 5$	$\Sigma fd'^2 = 63$

नोट : परिकल्पित माध्य = 900

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

टिप्पणी

$$= 900 + \frac{5}{50} \times 200 = 900 + 20 = 920$$

$$z = l + \frac{(f_1 - f_0)}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times c \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2} \times c$$

$$= 800 + \frac{(19-10)}{(19-10) + (19-12)} \times 200 \qquad = \sqrt{\frac{63}{50} - \left(\frac{5}{50}\right)^2} \times 200$$

$$= 800 + \frac{9}{9+7} \times 200 \qquad = \sqrt{1.26 - (0.1)^2} \times 200$$

$$= 800 + \frac{1800}{16} \qquad = \sqrt{1.26 - 0.01} \times 200$$

$$= 800 + 112.5 = 912.5$$

$$= \sqrt{1.25} \times 200 = 1.118 \times 200 \qquad = 233.61$$

$$S_{kp} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma}$$

$$= \frac{920 - 912.5}{233.61} = \frac{7.5}{223.61} = 0.03354$$

4.11 बाउले का विषमता का गुणांक (Bowley's Coefficient of Skewness)

चूँकि पिर्यसन के विषमता के गुणांक में परिकलन एक टेढ़ा और कठिन कार्य है, प्रो. बाउले ने विषमता के गुणांक चतुर्थकों पर आधारित प्रतिपादित किया। यह माप भी कहलाती है ''विषमता का चतुर्थक गुणांक''। यह एक ज्ञात यथार्थ है कि,

$Q_3 - M_e \neq M_e - Q_1$ या $Q_3 + Q_1 = 2M_e \neq 0$------ यह वितरण में विषमता के अस्तित्व का द्योतक है। इसलिए बाउले का विषमता का गुणांक सूत्र रूपेन S_{kb} से द्योतित किया जाता है,

$$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

बाउले का सूत्र उपयोगी है जब (i) 'z' गलत ढंग से परिभाषित है (ii) खुले वर्ग अंतराल हैं और (iii) वर्ग अंतराल विषम हैं।

उदाहरण 4.52: दो विभागों A और B में निम्न मासिक बिक्री के समंक से कार्ल पियरसन का विषमता गुणांक और बाउले का विषमता का गुणांक ज्ञात करें।

महीना : जनवरी फरवरी मार्च अप्रैल मई जून जुलाई अगस्त सितम्बर अक्टूबर नवम्बर दिसम्बर (बिक्री '000' टनों में)

A:	3	5	10	16	17	18	12	10	7	5	3	2
B:	20	14	8	4	3	1	2	5	7	10	16	18

हलः विषमता के गुणांक का प्रगणन

क्रम संख्या	A–श्रृंखला x	$(x-\bar{x})$ d	d^2
1	2	-7	49
2	3	-6	36
3	3	-6	36
4	5	-4	16
5	5	-4	16
6	7	-2	4
7	10	+1	1
8	10	+1	1
9	12	+3	9
10	16	+7	49
11	17	+8	64
12	18	+8	81
	Σx=108	Σd=0	Σd^2=362

(a) $Q_1 \; \frac{n+1}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{12+1}{4}\text{th} = 3.25$वाँ मद

$Q_1 =$ तीसरा मद $+ 0.25\,(5-3)$

$= 3 + 0.25 \times 2 = 3.5$

(b) $M_e \; \frac{n+1}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{12+1}{2}\text{th} = 6.5$वाँ मद

$M_e = 6\text{th}$ मद $+ .5\text{th}$ मद

$= 7 + 0.5\,(10-7)$

$= 7 + 1.5 = 8.5$

(c) $Q_3 \left(\frac{3n+1}{4}\right)$th मद का आकार है

$\therefore \frac{3(12+1)}{4}\text{th} = 9.75\,\text{th}$ मद

$Q_3 = 9\text{th}$ मद $+ 0.75\,(16-12)$

$= 12 + 3 = 15$

$$\bar{x} = \frac{108}{12} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{362}{12}} = 30.1667 = 5.4924$$

$$S_{kp} = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma} = \frac{3(9-8.5)}{5.4924} = \frac{1.5}{5.4924} = 0.273$$

$$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} = \frac{15 + 3.5 - 2(8.5)}{15 - 3.5}$$

$$= \frac{18.5-17}{11.5} = \frac{1.5}{11.5} = 0.1304$$ (**नोट**: बहुलक गलत–परिभाषित है)

टिप्पणी

क्रम संख्या		B श्रेणी (x-$\bar{x}$)			
	x	d	d^2	*(a)*	Q_1 $\frac{n+1}{4}$th मद का आकार है $\therefore \frac{12+1}{4}$th $= 3.25$th मद Q_1 = तीसरा मद + 0.25 (4-3) $= 3 + 0.25 = 3.25$
1	1	-8	64		
2	2	-7	619		
3	3	-6	36		
4	4	-5	25		
5	5	-4	16	*(b)*	M_e $\frac{n+1}{2}$th मद का आकार है $\therefore \frac{12+1}{2}$th $= 6.5$ वाँ मद M_e = 6th मद + 0.5 (8-7) $= 7 + 0.5 \times 1 = 7 + 0.5 = 7.5$
6	7	-2	4		
7	8	-1	1		
8	10	+1	1		
9	14	+5	25		
10	16	+7	49	*(c)*	Q_3 $\left(\frac{3n+1}{4}\right)$th मद का आकार है $\therefore \frac{3(12+1)}{4}$th $= 9.75$ वाँ मद Q_3 = 9th मद + 0.75 (16-14) = 14+0.75(2)=14+1.5=15.5
11	18	+9	81		
12	20	+11	121		
	$\Sigma x = 108$	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 472$		

$$\bar{x} = \frac{108}{12} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{472}{12}} = \sqrt{39.3333} = 6.2716$$

$$S_{kp} = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma} = \frac{3(9-7.5)}{6.2716} = \frac{3(1.5)}{6.2716} = \frac{4.5}{6.2716} = 0.7175$$

$$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} = \frac{15.5 + 3.25 - 2(7.5)}{15.5 - 3.25} = \frac{18.75 - 15}{12.25}$$

$$= \frac{3.75}{12.25} = 0.306$$

(**नोट** : बहुलक गलत-परिभाषित है)

टिप्पणी

उदाहरण 4.53: निम्न से चतुर्थक विचलन और विषमता का गुणांक प्रगणित करें :

साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
कामगारों की संख्या	6	10	18	30	15	12	10	6	2

हल :

विषमता के गुणांक का प्रगणन

साप्ताहिक मजदूरी	कामगारों की संख्या		
C.I.	f	C.f.	(a) $Q_1 \frac{n}{4}$th मद का आकार है $\therefore \frac{109}{4}$th मद = 27.25 वाँ मद यह 34 c.f. में पड़ता है 34 c.f. के विरुद्ध (12-16) Q_1 वर्ग है $Q_1 = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$ $= 12 + \frac{27.25 - 16}{18} \times 4$ $= 12 + \frac{11.25}{18} \times 4 = 12 + \frac{45}{18}$ $= 12 + 2.5 = 14.5$
4-8	6	6	
8-12	10	16	
(l) 12-16	18f	34 (m)	
(l) 16-20	30f	64 (m) ←	
20-24	15	79 ←	
(l) 24-28	12f	91 (m) ←	
28-32	10	101	
32-36	6	108	
36-40	2	109	
	n = 109		

(b) M_e आकार है $\frac{n}{2}$th मद का

$\therefore \frac{109}{2}$th मद $= 54.5$ वाँ मद। यह 64 c.f. में पड़ता है।

64 c.f. के विरुद्ध (16-20) माध्यिका वर्ग है

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 16 + \frac{54.5 - 34}{30} \times 4 = 16 + \frac{20.5}{30} \times 4 = 16 + \frac{82}{30} = 16 + 2.733$$

$$= 18.733$$

टिप्पणी

(c) $Q_{3,}$ $\frac{3n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{3(109)}{4}$th मद $= 81.27$th मद। यह 91 c.f. में पड़ता है।

91 c.f. के विरुद्ध (24-28) Q_3 वर्ग है

$$Q_1 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 24 + \frac{81.75 - 79}{12} \times 4 = 24 + \frac{2.75}{12} \times 4 = 24 + \frac{11}{12}$$

$$= 24 + 0.9167 = 24.9167$$

(1) चतुर्थक विचलन	(2) विषमता का गुणांक
$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ $= \frac{24.9167 - 14.5}{2}$ $= \frac{10.4167}{2}$ $= 5.2084$	$Skb = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$ $= \frac{24.9167 + 14.52(18.733)}{24.9167 - 14.5}$ $= \frac{39.4167 - 37.466}{10.4167} = \frac{1.9507}{10.4167}$ $= 0.18727$

उदाहरण 4.54: नीचे दिए गए समंक से बाउले का विषमता का गुणांक परिकलित करें :

मध्य-बन्दु :	35	45	55	65	75	85	95
आवृत्ति :	1	3	11	21	43	32	9

हल : मध्य–बिन्दुओं को वर्ग अन्तरालों में परिवर्तित किया जाता है दो मध्य–बिन्दुओं के बीच के वर्तमान अंतराल में (10) में $1/2$ से जोड़कर और घटाकर।

$\left[35 - \frac{1}{2}(10)\right]$ से $\left[35 + \frac{1}{2}(10)\right]$ ....(30-40).......(40-50)........(50-60) आदि।

टिप्पणी

विषमता के गुणांक का प्रगणन

C.I.	f	C.f.
30-40	1	1
40-50	3	4
50-60	11	15 (m)
(l) 60-70	21 (f)	36 (m) ←
(l) 70-80	43 (f)	79 (m) ←
(l) 80-90	32 (f)	111 ←
90-100	9	120
	n = 120	

(a) $Q_1, \frac{n}{4}th$ मद का आकार है

$\therefore \frac{120}{4}th$ मद $= 30th$ मद

यह 36 c.f. में पड़ता है

36 c.f. के विरुद्ध (60-70) Q_1 वर्ग है

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 60 + \frac{\frac{120}{4} - 15}{21} \times 10 = 60 + \frac{30-15}{21} \times 10 = 60 + \frac{15}{21} \times 10$$

$$= 60 + \frac{150}{21} \times 60 + 7.1429 = 67.1429$$

(b) $M_e, \frac{n}{2}th$ मद का आकार है

$\therefore \frac{120}{2}th$ मद $= 60$ वाँ मद। यह 79 c.f. में पड़ता है।

79 c.f. के विरुद्ध (70-80) माध्यिका वर्ग है

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 70 + \frac{\frac{120}{2} - 36}{43} \times 10 = 70 + \frac{60-36}{43} \times 10 = 70 + \frac{24}{43} \times 10$$

$$= 70 + \frac{240}{43} = 70 + 5.5814 = 75.5814$$

(c) $Q_3, \frac{3n}{4}th$ मद का आकार है

$\therefore \frac{3(120)}{4}th$ मद $= 90$वाँ मद। यह III c.f. में पड़ता है।

III c.f. के विरुद्ध (80-90) Q_3 वर्ग है

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

टिप्पणी

$$= 80 + \frac{\frac{3(120)}{4} - 79}{32} \times 10 = 80 + \frac{90 - 79}{32} \times 10 = 80 + \frac{11}{32} \times 10$$

$$= 80 + \frac{110}{32} = 80 + 3.4375 = 83.4375$$

(d) विषमता का गुणांक

$$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{83.4375 + 67.1429 - 2(75.5814)}{83.4375 - 67.1429} = \frac{150.58 - 151.1628}{16.2946}$$

$$= \frac{-0.5828}{16.2946} = -0.03577$$

उदाहरण 4.55: निम्न वितरण से बाउले के विषमता का गुणांक परिकलित करें।

अंक (से कम) :	10	20	30	40	50	60
छात्रों की संख्या :	5	12	22	36	48	52

हल: हम संचई वितरण को वर्ग अंतराल में परिवर्तित करें :

विषमता के गुणांक का प्रगणन

अंक	छात्रों की संख्या		
C.I.	(f)	C.f.	*(a)* Q_1, $\frac{n}{4}$th मद का आकार है $\therefore \frac{52}{4}$th मद = 13th मद यह 22 c.f. में पड़ता है 22 c.f. के विरुद्ध (20-30) Q_1 वर्ग है
0-10	5	5	
10-20	7	12 (m)	
20-30	10 (f)	22 (m) ←	
(l) 30-40	14 (f)	36 (m) ←	
(l) 40-50	12 (f)	48 ←	
(l) 50-60	4	52	
	n = 52		

टिप्पणी

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{\frac{52}{4} - 12}{10} \times 10 = 20 + \frac{13 - 12}{10} \times 10 = 20 + 1 = 21$$

(b) M_e, $\frac{n}{2}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{52}{2}$th मद $= 26$ वाँ मद। यह 36 c.f. में पड़ता है।

36 c.f. के विरुद्ध (30-40) माध्यिका वर्ग है

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 30 + \frac{\frac{52}{2} - 22}{14} \times 10 = 30 + \frac{26 - 22}{14} \times 10 = 30 + \frac{4}{14} \times 10$$

$$= 30 + \frac{40}{14} = 30 + 2.8571 = 32.8571$$

(c) Q_3, $\frac{3n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{3(52)}{4}$th $=$ 39th मद। यह 48 c.f. में पड़ता है।

48 c.f. के विरुद्ध (40-50) Q_3 वर्ग है

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{\frac{3(52)}{4} - 36}{12} \times 10 = 40 + \frac{39 - 36}{12} \times 10 = 40 + \frac{3}{12} \times 10$$

$$= 40 + \frac{30}{12} = 40 + 2.5 = 42.5$$

(d) $$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{42.5 + 21 - 2(32.8571)}{42.5 - 21} = \frac{63.5 - 65.7142}{21.5}$$

$$= \frac{-2.2142}{21.5} = -0.10299$$

टिप्पणी

उदाहरण 4.56: निम्न समंक से विषमता की उपयुक्त माप ज्ञात करें :

उम्र (से नीचे):	10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40 और ऊपर
कर्मचारी :	15	28	39	95	50	24	16	8

हल : वर्ग अन्तराल खुले सिरे वाले हैं। इसलिए हमें बाउले के विषमता का गुणांक का प्रयोग करना चाहिए।

विषमता के गुणांक का प्रगणन

<table>
<tr><th>उम्र
C.I.</th><th>कर्मचारी
f</th><th>C.f.</th><th></th></tr>
<tr><td>10 से नीचे</td><td>15</td><td>15</td><td rowspan="10">(a) $Q_{1,}\ \frac{n}{4}$th मद का आकार है
$\frac{275}{4}$th मद $= 68.75$th मद
यह 82 c.f. में पड़ता है
82 c.f. के विरुद्ध (15-20) Q_1 वर्ग है</td></tr>
<tr><td>10-15</td><td>28</td><td>43 (m)</td></tr>
<tr><td>(l) 15-20</td><td>39 (f)</td><td>82 (m)</td></tr>
<tr><td>(l) 20-25</td><td>95 (f)</td><td>177 (m) ←</td></tr>
<tr><td>(l) 25-30</td><td>50 (f)</td><td>227 ←</td></tr>
<tr><td>30-35</td><td>24</td><td>251</td></tr>
<tr><td>35-40</td><td>16</td><td>267</td></tr>
<tr><td>40 से ऊपर</td><td>8</td><td>275</td></tr>
<tr><td></td><td>n = 275</td><td></td></tr>
</table>

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 15 + \frac{\frac{275}{4} - 43}{39} \times 5 = 15 + \frac{68.75 - 43}{39} \times 5 = 15 + \frac{25.75}{39} \times 5$$

$$= 15 + \frac{128.75}{39} \times 15 + 3.3013 = 18.3013$$

(b) $M_{e,}\ \frac{n}{2}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{275}{2}$th मद $= 137.50$th मद। यह 177 c.f. में पड़ता है।

177 c.f. के विरुद्ध (20-25) M_e वर्ग है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{\frac{275}{2} - m}{95} \times 5 = 20 + \frac{137.50 - 82}{95} \times 5 = 20 + \frac{55.5}{95} \times 5$$

$$= 20 + \frac{277.5}{95} = 20 + 2.9211 = 22.9211$$

(c) Q_3 आकार है $\frac{3n}{4}$th मद

$\therefore \frac{3(275)}{4}$th मद $= 206.25$th मद। यह 227 c.f. में पड़ता है।

227 c.f. के विरुद्ध (25-30) Q_3 वर्ग है

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 25 + \frac{\frac{3(275)}{4} - 177}{50} \times 5 = 25 + \frac{206.25 - 177}{50} \times 5$$

$$= 25 + \frac{29.25}{50} \times 5 = 25 + \frac{29.25}{10} 25 + 2.925 = 27.925$$

(d) $S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{27.925 + 18.3013 - 2(22.9211)}{27.925 - 18.3013} = \frac{46.2263 - 45.8422}{9.6237}$$

$$= \frac{0.3841}{9.6237} = 0.03991$$

उदाहरण 4.57: निम्न वितरण से विषमता के उपयुक्त माप को परिकलित करें।

मासिक आय रु. :	100 तक	101-150	151-200	201-300	301-500	501-750	751-1000	1000 और ऊपर
आवृत्तिः	9	51	120	240	136	33	9	2

हलः वर्ग अंतराल खुले सिरे वाले और असमान हैं। इसलिए बॉउले का विषमता का गुणांक उपयुक्त माप है। अन्तर्वेशी वर्ग अंतराल बहिर्वेशी वर्ग अंतराल में परिवर्तित की जाती हैं।

टिप्पणी

विषमता के गुणांक का प्रगणन

मासिक आय C.I.	आवृत्ति f	C.f.
100 तक	9	9
100.5-150.5	51	60 (m)
(l) 150.5-200.5	(f) 120	180 (m) ←
(l) 200.5-300.5	(f) 240	420 (m) ←
(l) 300.5-500.5	(f) 136	556 ←
500.5-700.5	33	589
750.5-1000.5	9	598
1000.5 और ऊपर	2	600
	n = 600	

(a) $Q_{1,}$ $\frac{n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{600}{4}$th मद $= 150$th मद। यह 180 c.f. में पड़ता है।

180 c.f. के विरुद्ध (150.5-200.5) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 150.5 + \frac{\frac{600}{4} - 60}{120} \times 50 = 150.5 + \frac{150 - 160}{120} \times 50$$

$$= 150.5 + \frac{90}{120} \times 50 = 150.5 + \frac{4500}{120} = 150.5 + 37.5 = 188$$

(b) M_e आकार है $\frac{n}{2}$th मद का।

$\therefore \frac{600}{2}$th मद $= 300$th मद। यह 420 c.f. में पड़ता है।

420 c.f. के विरुद्ध (200.5-300.5) माध्यिका वर्ग है

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

टिप्पणी

$$= 200.5 + \frac{\frac{600}{2} - 180}{240} \times 100 = 200.5 + \frac{300 - 180}{240} \times 100$$

$$= 200.5 + \frac{120}{240} \times 100 = 200.5 + \frac{12000}{240} = 200.5 + 50 = 250.5$$

(c) Q_3 आकार है $\frac{3n}{4}$th मद का।

$\therefore \frac{3(600)}{4}$th मद $= 450$वाँ मद। यह 556 c.f. में पड़ता है।

556 c.f. के विरुद्ध (300.5–500.5) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 300.5 + \frac{\frac{3(600)}{4} - 420}{136} \times 200 = 300.5 + \frac{450 - 420}{136} \times 200$$

$$= 300.5 + \frac{30}{136} = 200 = 300.5 + \frac{6000}{136}$$

$$= 300.5 + 44.11765 = 344.6177$$

(d) $$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{344.6177 + 188 - 2(250.5)}{344.6177 - 188} = \frac{532.6177 - 501}{156.6177}$$

$$= \frac{31.6177}{56.6177} = 0.20188$$

उदाहरण 4.58: निम्नलिखित वितरण से विषमता की उपयुक्त माप ज्ञात करें।

उम्र (वर्षों में):	20 से नीचे	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50 और ऊपर
कर्मचारियों की संख्या:	113	129	146	160	212	194	145	121

हल : वर्ग अंतराल खुले सिरे वाले हैं। इसलिए बाउले का विषमता का गुणांक उपयुक्त माप है।

टिप्पणी

विषमता के गुणांक का प्रगणन

उम्र (वर्षों में) C.I.	कर्मचारी (f)	C.f.
20 से नीचे	113	113
20-25	129	242 (m)
(l) 25-30	146 (f)	348 ←
30-35	160	548 (m)
(l) 35-40	212 (f)	760 (m) ←
(l) 40-45	194 (f)	954
45-50	145	1099
50 और ऊपर	121	1220
	n = 1220	

(a) $Q_{1,}$ $\frac{n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{1220}{4}$th मद $= 305$th मद। यह 388 c.f. में पड़ता है।

388 c.f. के विरुद्ध (25-30) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 25 + \frac{\frac{1220}{4} - 242}{146} \times 5 = 25 + \frac{305 - 242}{146} \times 5$$

$$= 25 + \frac{63}{146} \times 5 = 25 + \frac{315}{146} = 25 + 2.1575 = 27.1575$$

(b) M_e $\frac{n}{2}$th मद का आकार है।

$\therefore \frac{1220}{2}$th मद $= 610$th मद। यह 760 c.f. में पड़ता है।

760 c.f. के विरुद्ध (35-40) माध्यिका वर्ग है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

टिप्पणी

$$= 35 + \frac{\frac{1220}{2} - 548}{212} \times 5 = 35 + \frac{610 - 548}{210} \times 5$$

$$= 35 + \frac{62}{212} \times 5 = 35 + \frac{310}{212} = 35 + 1.4623 = 36.4623$$

(c) Q_3 $\frac{3n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore$ $\frac{3(1220)}{4}$th मद $= 915$th मद। यह 954 c.f. में पड़ता है।

954 c.f. के विरुद्ध (40-50) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{\frac{3(1220)}{4} - 760}{194} \times 5 = 40 + \frac{915 - 760}{194} \times 5$$

$$= 40 + \frac{155}{194} = 5 = 40 + \frac{775}{194} = 40 + 3.9948 = 43.9948$$

(d) $$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{43.9948 + 27.1575 - 2(36.4623)}{43.9948 - 27.1575} = \frac{71.1523 - 72.9246}{16.8373}$$

$$= \frac{1.7723}{16.8373} = 0.10526$$

उदाहरण 4.59: निम्न का विषमता का चतुर्थक गुणांक परिकलित करें।

मध्य–बिन्दु :	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
आवृत्ति :	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

हलः मध्य बिन्दु वर्ग अंतराल में परिवर्तित की जाती है दो मध्य–बिन्दुओं के बीच वर्तमान अंतराल में 1/2 जोड़कर और घटाकर।

$\left[10 - \frac{1}{2}(10)\right]$ से $\left[10 + \frac{1}{2}(10)\right]$.......5-15.......15-25.......25-35 आदि।

टिप्पणी

विषमता के गुणांक का प्रगणन

C.I.	f	C.f.
5-15	2	2
15-25	9	11
25-35	11	22 (m)
(l) 35-45	14 (f)	36 ←
45-55	20	56 (m)
(l) 55-65	24 (f)	80 (m) ←
(l) 65-75	20 (f)	100
75-85	16	116 ←
85-95	5	121
95-100	2	123
	n = 123	

(a) $Q_{1,}$ $\frac{n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{123}{4}$th मद $= 30.75$th मद। यह 36 c.f. में पड़ता है।

36 c.f. के विरुद्ध (35-45) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 35 + \frac{\frac{123}{4} - 22}{14} \times 10 = 35 + \frac{30.75 - 22}{14} \times 10 = 35 + \frac{8}{14} \times 10$$

$$= 35 + \frac{80}{14} = 35 + 5.7143 = 40.7143$$

(b) M_e आकार है $\frac{n}{2}$th मद का।

$\therefore \frac{123}{2}$th मद $= 61.50$th मद। यह 80 c.f. में पड़ता है।

80 c.f. के विरुद्ध (55-65) माध्यिका वर्ग है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

टिप्पणी

$$= 55 + \frac{\frac{123}{2} - 56}{24} \times 10 = 55 + \frac{61.5 - 56}{24} \times 10 = 55 + \frac{5.5}{24} \times 10$$

$$= 55 + \frac{55}{24} \times 55 + 2.2917 = 57.2917$$

(c) $Q_{3,}$ $\frac{3n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{3(123)}{4}$th मद $= 92.25$th मद। यह 100 c.f. में पड़ता है।

100 c.f. के विरुद्ध (65-75) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 65 + \frac{\frac{3(123)}{4} - 80}{20} \times 10 = 65 + \frac{92.25 - 80}{20} \times 10$$

$$= 65 + \frac{12.25}{20} = 10 = 65 + \frac{122.5}{20} = 65 + 6.125 = 71.125$$

(d) $$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{71.125 + 40.7143 - 2(57.2197)}{71.125 - 40.7143} = \frac{111.8393 - 114.5834}{30.4107}$$

$$= \frac{2.7441}{30.4107} = -0.0902$$

उदाहरण 4.60: चतुर्थकों का प्रयोग कर, निम्न वितरण के लिए विषमता की माप ज्ञात करें।

वार्षिक बिक्री ('000') रु.	प्रतिष्ठानों की संख्या	वार्षिक बिक्री ('000') रु.	प्रतिष्ठानों की संख्या
20 से कम	30	70 से कम	644
30 से कम	225	80 से कम	650
40 से कम	465	90 से कम	665
50 से कम	580	100 से कम	680
60 से कम	634	–	–

टिप्पणी

हलः चूँकि पूरी श्रृंखला में 10 का वर्ग–अन्तराल है, पहला वर्ग–अन्तराल 10–20 लिया जाना चाहिए। हम 'से कम' आवृत्तियों को आवृत्तियों में परिवर्तित करें।

विषमता के गुणांक का प्रगणन

वार्षिक बिक्री ('000' रु.) C.I.	प्रतिष्ठानों की संख्या f	C.f.
10-20	30	30
(*l*) 20-30	195 (f)	225 (m) ←
(*l*) 30-40	240 (f)	465 (m) ←
(*l*) 40-50	115 (f)	580 ←
50-60	54	634
60-70	10	644
70-80	6	650
80-90	15	665
90-100	15	680
	n = 680	

(a) Q_1, $\frac{n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{680}{4}$th मद $= 170$th मद। यह 225 c.f. में पड़ता है।

225 c.f. के विरुद्ध (20-30) Q_1 वर्ग है।

$$Q_1 = l + \frac{\frac{n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 20 + \frac{\frac{680}{4} - 30}{195} \times 10 = 20 + \frac{170 - 30}{195} \times 10 = 20 + \frac{140}{195} \times 10$$

$$= 20 + \frac{1400}{195} = 20 + 7.179487 = 27.179487$$

(b) माध्यिका $\frac{n}{2}$th मद का आकार है।

$\therefore \frac{680}{2}$th मद = 340th मद। यह 465 c.f. में पड़ता है।

465 c.f. के विरुद्ध (30-40) माध्यिका वर्ग है।

$$M_e = l + \frac{\frac{n}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 30 + \frac{\frac{680}{2} - 225}{240} \times 10 = 30 + \frac{340 - 225}{240} \times 10$$

$$= 30 + \frac{115}{240} \times 10 = 30 + 4.79167 = 34.79167$$

(c) $Q_{3,}$ $\frac{3n}{4}$th मद का आकार है

$\therefore \frac{3(680)}{4}$th मद = 510th मद। यह 580 c.f. में पड़ता है।

580 c.f. के विरुद्ध (40-50) Q_3 वर्ग है।

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3n}{4} - m}{f} \times c$$

$$= 40 + \frac{\frac{3(680)}{4} - 465}{115} \times 10 = 40 + \frac{510 - 465}{115} \times 10$$

$$= 40 + \frac{45}{115} = 10 = 40 + \frac{450}{115} = 40 + 3.913 = 43.913$$

(d) $$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{43.913 + 27.179487 - 2(34.79167)}{43.913 - 27.179487}$$

$$= \frac{71.092487 - 69.58334}{16.733513} = \frac{1.509147}{16.733513} = 0.090187$$

उदाहरण 4.61: एक आवृत्ति वितरण में, विषमता का गुणांक, चतुर्थक पर आधारित 0.6 है। अगर निम्न और ऊपरी चतुर्थक का योगफल 100 है और माध्यिका 38 है, निम्न चतुर्थक और ऊपरी चतुर्थक का मान ज्ञात करें।

टिप्पणी

हलः

विषमता के गुणांक का प्रगणन

$S_{kb} = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$	$Q_3 + Q_1 = 100$
$0.6 = \dfrac{100 - 2(38)}{Q_3 - Q_1}$	$\dfrac{Q_3 - Q_1 = 40}{2Q_3 = 140}$
$Q_3 - Q_1 = \dfrac{100 - 76}{0.6} = \dfrac{24}{0.6} = 40$	$Q_3 = 70$
ऊपरी चतुर्थक $= 70$	Q_3 के मूल्य को प्रतिस्थापित कर
	$Q_3 + Q_1 = 100$
निम्न चतुर्थक $= 30$	$70 + Q_1 = 100$
	$Q_1 = 100 - 70$
	$Q = 30$

उदाहरण 4.62: एक वितरण में दो चतुर्थकों के बीच का अंतर 8, और उनका योगफल 22 है और माध्यिका 10.5 है। विषमता का गुणांक ज्ञात करें।

हल :

विषमता के गुणांक का प्रगणन

$Q_3 + Q_1 = 22$	$S_{kb} = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$
$\dfrac{Q_3 - Q_1 = 8}{2Q_3 = 30}$	$= \dfrac{15 + 7 - 2(10.5)}{15 - 7}$
$Q_3 = 15$	$= \dfrac{22 - 21}{8} = \dfrac{1}{8}$
	$= 0.125$

Q_3 मूल्य को प्रतिस्थापित करें

$$Q_3 + Q_1 = 22$$

$$70 + Q_1 = 22$$

$$Q_1 = 22 - 15$$

$$Q_1 = 7$$

उदाहरण 4.63: एक वितरण के लिए बाउले का विषमता का गुणांक –0.36 है, Q_1 8.6 है और माध्यिका 12.3 है। उच्च चतुर्थक का मूल्य ज्ञात करें।

टिप्पणी

हलः

$$S_{kb} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$-0.36 = \frac{Q_3 + 8.6 - 2(12.3)}{Q_3 - 8.6}$$

$$-0.36(Q_3 - 8.6) = Q_3 + 8.6 - 24.6$$

$$-0.36\ Q_3 + 3.096 = Q_3 + 8.6 - 24.6$$

$$-1.36\ Q_3 = 8.6 - 24.6 - 3.096$$

$$-1.36\ Q_3 = 8.6 - 27.696$$

$$-1.36\ Q_3 = -19.096$$

$$Q_3 = 14.04$$

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. विस्तार अन्तर है __________ मूल्य और __________ मूल्य के बीच।

   (क) सबसे छोटे, सबसे बड़े (ख) सबसे बड़े, सबसे छोटे

   (ग) आधे बड़े, आधे छोटे (घ) इनमें से कोई नहीं

2. कम बिसरा वितरण है __________ समरूप।

   (क) अधिक (ख) कम

   (ग) सम (घ) इनमें से कोई नहीं

3. अधिक बिखरा वितरण है __________ समरूप।

   (क) अधिक (ख) सम

   (ग) कम (घ) इनमें से कोई नहीं

4. चतुर्थक विचलन है अंतर का आधा उच्च चतुर्थक और __________ चतुर्थक के बीच।

   (क) निम्न (ख) उच्च

   (ग) बीच (घ) अन्तिम

टिप्पणी

5. प्रमाप विचलन है विचलन के वर्गों के योगफल का __________।

(क) घनमूल (ख) समानुपाती

(ग) व्युत्क्रमानुपाती (घ) वर्गमूल

6. विषमता द्योतित करती है__________ का विपरीत।

(क) विषमता (ख) समता

(ग) सममिति (घ) इनमें से कोई नहीं

7. एक विषम वितरण में $\overline{X}, Me$ और Z __________ नहीं होते है।

(क) समानुपाती (ख) व्युत्क्रमानुपाती

(ग) संपाती (घ) इसमें से कोई नहीं

8. ककुदता माप है__________ आवृत्ति वितरण का।

(क) बहुलक (ख) औसत

(ग) मध्यता (घ) मध्य के

9. शीर्ष वक्र लम्बे सिरे के साथ कहलाता है__________।

(क) गोलाकार (ख) आयताकार

(ग) वर्ग (घ) शिखराकार

10. सपाट वक्र छोटे सिरे के साथ कहलाता है __________।

(क) शून्य (ख) ईकाई

(ग) समानुपाती (घ) सपाट

11. सामान्य वक्र कहलाता है __________।

(क) प्रसामान्य वक्र (ख) यादृच्छिक

(ग) असामान्य (घ) इनमें से कोई नहीं

12. एक सममितीय वितरण में सभी विषम आघूर्ण बराबर हैं–

(क) एक (ख) दो

(ग) ∞ (घ) शून्य के

13. एक प्रसामान्य वक्र में β_2 क मूल्य बराबर है__________।

(क) 3 के (ख) 2 के

(ग) 1 के (घ) 4 के

4.12 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (ख)
2. (क)
3. (ग)
4. (क)
5. (घ)
6. (घ)
7. (ग)
8. (क)
9. (घ)
10. (घ)
11. (क)
12. (घ)
13. (क)

4.13 सारांश (Summary)

अपकिरण के माप (विचरणता) 'द्वितीय स्तर के औसत' (Averages of second order) हैं। द्वितीय स्तर का औसत, वह औसत है जो श्रेणी के सभी अंतरों से उन मदों का औसत है। इन अंतरों या विचलनों का औसत निकालने में, उनकी अनियमितताएं हटा दी जाती हैं और अवनमन (Depression) का प्रतिनिधि अंक परिणामस्वरूप मिलता है।

पद अपकिरण (Dispersion) या विचरण (Variation) या विचलन (Deviation) का अध्ययन किया जाता है दो मापों– निरपेक्ष (Absolute) और सापेक्ष (Relative) के संदर्भ में। सापेक्ष माप अनुपातों या प्रतिशत में अभिव्यक्त की जाती है और वे तुलनात्मक अध्ययन के उपयुक्त होते हैं।

एक आदर्श अपकिरण के माप के अभिलक्षण–

(i) इसे दृढ़त से परिभाषित होना चाहिए।

(ii) इसे परिकलित करने और समझने में आसान होना चाहिए।

(iii) इसे सभी प्रेक्षणों पर आधारित होना चाहिए।

(iv) इसे आगे के गणितीय निरूपण के लिए सहज अनुगामी होना चाहिए।

(v) इसे प्रतिदर्शों के उच्चावचन से कम से कम प्रभावित होना चाहिए।

(vi) इसे चरम प्रेक्षणों से अधिक प्रभावित नहीं होना चाहिये।

अपकिरण के माप

अपकिरण के विभिन्न माप हैं–

(i) विस्तार (Range): विस्तार अपकिरण के सभी मापों में सबसे सरल है। यह परिभाषित किया जाता है वितरण के दो चरम प्रेक्षणों के बीच के अन्तर

के रूप में। इसलिए विस्तार $= X_{\max} - X_{\min}$ सबसे बड़ा प्रेषण और $X_{\min} = S$, चर मूल्यों का सबसे छोटा प्रेक्षण

टिप्पणी

वर्गीककृत, आवृत्ति वितरण की स्थिति में (विच्छिन्न मूल्यों के लिए) या सतत आवृत्ति वितरण, विस्तार को परिभाषित किया जाता है सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा और सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा के बीच के अंतर से।

एक आदर्श अपकिरण के माप के अभिलक्षणों के अनुसार विस्तार में कई कमियाँ हैं, इसके बावजूद अपरिकण के माप के तौर पर इसका अनुप्रयोग कई क्षेत्रों में है जहाँ समंक में छोटे विचरण हैं जैसे– स्टॉक बाजार के उतार-चढ़ाव, मुद्रा दर और विनिमय दर के विचरण में। मौसम विभाग द्वारा मौसम पूर्वानुमान में खासकर तापक्रम परिवर्तन जानने में।

2. चतुर्थक विचलन या अर्द्ध अन्तः चतुर्थक श्रेणी विस्तार (Quartile Deviation or Semi Interquartile Range)

यह विचलन की माप है, जो ऊपरी चतुर्थक Q_3 और निचली चतुर्थक Q_1 पर आधारित है।

अर्द्ध-अन्तः चतुर्थक विस्तार = $Q_3 - Q_1$

चतुर्थक विचलन प्राप्त किया जाता है अन्तः चतुर्थक विस्तार की 2 से भाग देकर और इसलिए अर्द्ध अन्तः चतुर्थक विस्तार भी कहलाती है, इसलिए

$$\text{चतुर्थक विचलन (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

कठोरता से कहें तो चतुर्थक विचलन सिर्फ स्थैतिक माध्य है और माध्य के चारों ओर छितराव नहीं दर्शाती है। इसलिए कुछ सांख्यिकीविद श्रेयस्कर समझते हैं कहना कि यह विभाजन का माप है अपकिरण की माप की अपेक्षा।

3. माध्य विचलन या औसत विचलन (Mean Deviation or Average Deviation)

अभी तक दो अपकिरणों के मापों की जो चर्चा हुई है viz. विस्तार और चतुर्थक विचलन सभी प्रेक्षणों पर आधारित नहीं है और वे औसत से प्रेक्षणों के बिखराव को प्रदर्शित नहीं करते हैं और इस तरह श्रेणी की बनावट को पूरी तरह नजरअंदाज कर देते हैं माध्य विचलन या औसत विचलन इन दोनों कमियों को दूर कर देता है। अपकिरण की यह माप प्राप्त किया जाता है केन्द्रीय प्रवृत्ति की एक माप से दिए मूल्यों के विचलनों का औसत (समान्तर माध्य) निकालकर।

माध्य विचलन का प्रगणन (Computation of Mean Deviation)

अगर $X_1, X_2 --- X_n$ दिए गए प्रेक्षण हैं तब माध्य विचलन (M.D.) एक माध्य से (कहें), दिया जाता है।

$$\text{M.D. (औसत A से)} = \frac{1}{n}\Sigma|x - A| = \frac{1}{n}\Sigma d$$

टिप्पणी

जहाँ $|d| = |x - A|$ इसे पढ़े मापांक $(x - A)$, मापांक (Modulus) मूल्य या निरपेक्ष मूल्य विचलन का (ऋणात्मक चिन्ह की उपेक्षा करने के बाद) $d = X - A$ और Σ इन निरपेक्ष विचलनों का योग है और A कोई औसत माध्यम (M), मध्यका (M_d) और बहुलक (M_o) है।

4. प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

'प्रमाप विचलन' विचलनों के वर्गों के योगफल का वर्गमूल हैं उनकी संख्या से विभाजित करने के बाद। यह 'माध्य त्रुटि विचलन', 'माध्य वर्ग त्रुटि विचलन' या 'वर्गमूल माध्य वर्ग विचलन' भी कहलाता है। यह विचरण का द्वितीय आघूर्ण है चूँकि विचलनों के वर्गों का योगफल माध्य से न्यूनतम होता है, विचलन सिर्फ माध्य से लिए जाते हैं (ना कि माध्यिका या बहुलक से)।

प्रमाप विचलन सभी विचलनों का माध्य से वर्गमूल–माध्य–वर्ग औसत है। यह प्रो0 कार्ल पियरसन द्वारा 1983 में प्रतिपादित किया गया और यह 'σ' (सिगमा) से द्योतित किया जाता है।

A. व्यक्तिगत अवलोकन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \text{ या } \sqrt{\frac{\Sigma(x - 5c)^2}{n}} \quad \text{. . . . . निरपेक्ष माप}$$

विचरण का गुणांक $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ . . . . .आपेक्षिक माप

B. विच्छिन्न और सतत श्रेणी

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{n}} \text{ या } \sqrt{\frac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{. . . . . निरपेक्ष माप}$$

विचरण का गुणांक $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$ . . . . .आपेक्षिक माप

I. विषमता (Skewness)

विषमता का अर्थ है 'घुमाव' या 'ऐंठन' या 'सीधी नहीं होना'। विषमता अपकिरण का परिष्कृत माप है। यह माप घुमाव की मात्रा देता है जिससे हमें वितरण की आकृति की स्पष्ट तस्वीर मिलती है। यह आधार प्रदान करता है जिससे विभिन्न वितरणों का अंतर पहचाना जा सकता है। यह विचरण की दिशा से संबंधित है और हमें बताता है कि वितरण सममिति (symmetry), (घण्टाकार) या समरूपता या एकरूपता से कितनी दूर है।

विषमता सममिति के विपरीत को द्योतित करता है और वितरण के वक्र के आकार से संबंधित है। इसका अर्थ है कि सभी असममितीय वितरण विषम है जो एक तरफ अधिक उभरा होता है दूसरी तरफ की तुलना में। विषमता की माप सिर्फ विषमता के विस्तार सीमा को ही सूचित नहीं करती है अपितु दिशा भी। विषमता धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती है।

टिप्पणी

II. विषमता का कार्ल पियर्सन का गुणांक (Karl Pearsons coefficient of Skewness)

कार्ल पियरसन ने विषमता के आपेक्षिक माप के लिए सूत्र का उपयोग किया है। इसलिए सूत्र ''कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक'' जानी जाती है। यह वितरण के माध्य और बहुलक के बीच अंतर पर आधारित है जो प्रमाप विचलन से विभक्त होती है। यह सूत्र रूप से 'S_{KP}' से द्योतित होती है।

(i) $S_{KP} = \dfrac{\bar{x} - Z}{\sigma}$ - - - - - - - जब Z स्पष्ट रूप से परिभाषित

(ii) $S_{KP} = \dfrac{\bar{x} - (3Me - 2\bar{x})}{\sigma} = \dfrac{\bar{X} - 3M_e + 2\bar{x}}{\sigma}$ - - - - -जब Z गलत परिभाषित

नोटः (a) जब Z स्पष्ट रूप से परिभाषित है, सूत्र (i) की स्थिति में, उत्तर सामान्यतः +1 और –1 के बीच पड़ता है।

(b) जब Z गलत परिभाषित है सूत्र (ii) की स्थिति में, उत्तर +3 और –3 के बीच पड़ता है।

4.14 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **अपकिरणः** Dispersion
- **विषमताः** Skewness
- **विस्तारः** Range
- **चतुर्थक विचलनः** Quartile Deviation
- **माध्य विचलनः** Mean Deviation
- **प्रमाण विचलनः** Standard Deviation
- **विचरण के गुणांकः** Coefficient of Variation
- **अवनमनः** Depression
- **स्थैतिकः** Positional

4.15 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. वितरण को मापने का उद्देश्य क्या है?
2. विस्तार की कोई दो सीमाएं बताएं।
3. माध्य विचलन के किन्हीं दो दोषों का उल्लेख करें।

टिप्पणी

4. प्रमाप विचलन को परिभाषित करें।
5. चतुर्थक विचलन के कोई दो गुण बताएं।
6. आप 'विस्तार' से क्या समझते हैं।
7. विषमता क्या है?
8. विषमता के किन्हीं दो परीक्षणों का उल्लेख करें।
9. एक श्रेणी में कब विषमता उपस्थित है?
10. आप 'ककुदता' से क्या समझते हैं?
11. आघूर्ण को परिभाषित करें।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. एक वितरण में निम्न सूचना दी गई है :

   अधिक मूल्य = 60

   विस्तार का गुणांक = 0.6

   विस्तार और न्यूनतम मूल्य ज्ञात करें।
2. दो श्रेणियों का विचरण का गुणांक 66% और 80% है, और उनका प्रमाप विचलन क्रमशः 20 और 16 हैं। उनका समान्तर माध्य ज्ञात करें।
3. निम्नलिखित वितरण से माध्य से माध्य विचलन प्रगणित करें।

C.I.	140-150	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
f	4	6	10	18	9	3

4. निम्न समंक से चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक परिकलित करें :

अंक (से ज्यादा)	0	10	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	150	142	130	100	72	30	12	4

5. निम्न समंक से कार्ल पियर्सन का विषमता का गुणांक प्रगणित करें :

   25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, 20
6. निम्न वितरण से बाउले का विषमता का गुणांक ज्ञात करें :

मध्य मान :	15	20	25	30	35	40
आवृत्ति :	30	26	25	24	20	21

7. एक नियंत्रित विषम वितरण में, माध्य है 5 रु. और माध्यिका है 14 रु. अगर विचरण का गुणांक 30% है, पियर्सन के विषमता का गुणांक ज्ञात करें

टिप्पणी

8. शेप्पर्ड के संशोधन पर एक टिप्पणी लिखें। कब यह ककुदता के लिए प्रयुक्त होता है, उल्लेख करें।

9. माध्य से आघूर्ण ज्ञात करें और ककुदता निम्न वितरण से :

C.I. :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f :	10	20	40	20	10

10. आवृत्ति वितरण का ककुदता ज्ञात करें, अगर इसका चार आघूर्ण बिन्दु 4 से हैं क्रमशः 1.5, 17, –30 और 108।

4.16 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamental of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

टिप्पणी

अध्याय 5 काल श्रेणी विश्लेषण (Time Series Analysis)

संरचना (Structure)

5.0 परिचय (Introduction)

काल श्रेणी सांख्यिकी समंक का कालानुक्रम से व्यस्थापन है, i.e., इसके घटित होने के समयानुसार। यह एक संवृत्ति के तीव्र गति के परिवर्तन को समयावधि में प्रतिबिंबित करता है। ज्यादातर आर्थिक, व्यवसायिक और वाणिज्य से संबंधित श्रेणियाँ, e.g., मूल्यों से संबंधित श्रेणियाँ, विभिन्न उपभोक्ता वस्तुओं का उत्पादन और खपत, कृषि और औद्योगिक उत्पादन, राष्ट्रीय आय और विदेशी विनिमय (सुरक्षित); व्यापारिक घरानों की लागत, बिक्री और लाभ; बैंक जमा और क्लियरिंग, स्टॉक एक्सचेंज बाजारों में शेयर के मूल्य और लाभांश इत्यादि सभी काल श्रेणियाँ हैं जो लम्बी कालावधि में फैली हैं। क्रमानुसार, काल श्रेणियों का महत्वपूर्ण और सार्थक स्थान है व्यवसाय और आर्थिक क्षेत्र में, काल श्रेणी समंक के विश्लेषण के लिए प्राथमिक रूप से ज्यादातर सांख्यिकीय तकनीक अर्थशास्त्रियों द्वारा विकसित किया गया है। यद्यपि, ये तकनीक किसी भी विषय में प्रयुक्त हो सकती है। प्राकृतिक और सामाजिक विज्ञानों से संबंधित, किसी संवृत्ति के व्यवहार के अध्ययन करने में जो कालक्रम से कालावधि में एकत्रित की गई हैं

टिप्पणी

या–लान–चाऊ के अनुसार–

"एक काल श्रेणी परिभाषित की जा सकती है किसी आर्थिक चर के विभिन्न काल खण्डों में आँकड़ों के संग्रहण के तौर पर या चरों का समष्टिक"

गणितीय रूप से, एक काल श्रेणी फलनक संबंध से परिभाषित की जाती है

$$y = f(t) \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, y समय (t) पर विचाराधीन संवृत्ति (या चर) का मूल्य है

(i) एक देश की जनसंख्या (y) या एक जगह की विभिन्न वर्षों में (t);

(ii) जन्मों और मृत्यों की संख्या (y) वर्ष के विभिन्न महीनों (t) में;

(iii) एक डिपार्टमेंटल स्टोर की बिक्री (y) वर्ष के विभिन्न महीनों (t) में;

(iv) एक जगह का तापक्रम (y) सप्ताह के विभिन्न दिवसों (t) में और इसी तरह के आँकड़ें काल श्रेणियाँ बनाते हैं। इसलिए एक संवृत्ति के मूल्य या चर के समय क्रमशः t_1, t_2 .... t_n के लिए क्रमशः y_1, y_2 ...... y_n हैं, तब श्रेणी,

$$t \ : \ t_1, t_2\, t_3 \ldots\ldots\ldots t_n$$

$$y \ : \ y_1, y_2\, y_3 \ldots\ldots\ldots y_n$$

काल श्रेणी का निर्माण करते हैं। इस, एक काल श्रेणी अपरिवर्त्ती द्विचर वितरण देती है, दोनों चरों में एक समय (t) है और दूसरा संवृत्ति का मूल्य (y) विभिन्न कालावधि में। t का मान दिया जा सकता है वार्षिक, मासिक, साप्ताहिक, दैनिक या घंटावार भी, सामान्यतः परन्तु हमेशा नहीं, समय के बराबर अन्तराल पर। एक काल श्रेणी का आलेख, कालिक–चित्र (Histogram) कहा जाता है, और प्राप्त किया जाता है एक आलेख पत्र पर समंक को आलेखित कर जिसमें स्वतंत्र चर t को x-अक्ष के साथ और आश्रित चर y को y-अक्ष के साथ लिया जाता है।

5.1 उद्देश्य (Objectives)

इस ईकाई को पढ़ने के बाद आप समझ सकते हैं कि उपनति (Secular Trend), मौसमी परिवर्तन (Seasonal Variation), चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variation और दैव या अनियमित परिवर्तन (Random or Irregular Variation) आदि को मापने का उद्देश्य क्या है?

उपनीती (Tred) को मापने का उद्देश्य

1. एक श्रेणी के आंशिक वृद्धि या ह्रास का अध्ययन। उपनीती एक लम्बी अवधि के दरम्यान सामान्य वृद्धि को दिखलाता है कम अवधि की उच्चावचन को नजरअंदाज करते हुए।
2. लम्बी अवधि के पूर्वानुमान या भविष्य की लम्बी अवधि के लिए एक वक्र खींचने के लिए। अगर लम्बी अवधि तक वृद्धि स्थिर है और परिस्थितियाँ एक समान

है, तब भविष्य के पूर्वानुमान के लिए 10 वर्षों तक का वक्र भी खींचा जा सकता है।

3. दिए गए काल श्रेणी के उपनति मान्य को अलग करते हुए हमलोग अल्पकालीन और अनियमित परिवर्तन का भी अध्ययन कर सकते हैं।
4. काल श्रेणी से दिए काल श्रेणी के मूल्य को उपनति मूल्य से भाग देकर या घटाकर विलोपन संभव है।
5. उपनति विश्लेषण हमें विभिन्न काल खण्ड़ों में दो या अधिक काल श्रेणियों के बारे में निर्णय करने में भी सहायता करता है।

मौसमी परिवर्तन (Seasonal Variation) को मापने का उद्देश्य

1. पूर्व के मौसमी व्यवहार का विश्लेषण
2. कम–अवधि योजना के लिए मौसमी आर्तव एक सहायक की तरह है पूर्वानुमान के लिए।
3. एक काल श्रेणी के तथ्यों के आचरण को सही प्रकार से अध्ययन करने के लिए, काल श्रेणी के आँकड़ों को मौसमी परिवर्तन के हिसाब से समायोजित कर लेना चाहिए।

यह दिए गए काल श्रेणी मूल्यों में मौसमी परिवर्तन से भाग देने पर उपनति या दूसरे अवयवों से अलग किया जाता है। यह तकनीक समंक का गैर–ऋतुकरण (De-Seasonalisation) कहलाता है।

चक्रीय परिवर्तन

1. व्यवसायिक कार्यकलापों के संधि काल (Turning Point) का पूर्वानुमान करने में।
2. व्यवसायिक कार्यकलापों के स्तर के निर्धारण के लिए पॉलिसी बनाने में।
3. चक्रीय परिवर्तन का ज्ञान एक व्यवसाई को व्यापार के उत्कर्ष (तेजी) या मंदी की अवधि की संकल्पना देता है ताकि वह अपने उत्पाद के लिए ऐसा कदम उठावे ताकि उसके उत्पाद का बाजार में स्थाई संतुलन हो।

5.2 एक काल श्रेणी के अवयव (संघटक) (Components of One Time Range)

अगर एक संवृत्ति के मूल्य विभिन्न अवधियों में अवलोकित किए जाते हैं, इस तरह से प्राप्त मूल्य काफी विचरणता या परिवर्तन दर्शाएंगे। ये उतार–चढ़ाव इस यथार्थ की वजह से है कि संवृत्ति का मूल्य किसी एक कारक से ही प्रभावित नहीं होती है बल्कि बहुविध कारकों के संचई प्रभाव से जो इसे ऊपर नीचे खींचते हैं। यद्यपि, अगर विभिन्न बल संतुलन में होते, तब काल श्रेणी नियत रहेगी। उदाहरण के लिए, एक उत्पाद की बिक्री (y) प्रभावित होती हैं– (i) विज्ञापन खर्चों पर, (ii) उत्पाद के मूल्य, (iii) लोगों की आय, (iv) बाजार में दूसरे प्रतिस्पर्द्धी उत्पाद (v) लोगों के आस्वादनों, फैशन, रिवाजों इत्यादि और कई बातों पर। उसी

तरह, एक खास उत्पाद का मूल्य निर्भर करता है उसकी माँग पर, बाजार में विभिन्न प्रतिस्पर्धी उत्पादों पर, कच्चा माल, परिवहन खर्च, लागत और इसी तरह अन्य। विभिन्न शक्तियाँ जो एक संवृत्ति के मूल्य को काल श्रेणी में प्रभावित करती है मोटे तौर पर निम्नलिखित चार प्रकारों में वर्गीकृत की जा सकती हैं, सामान्य तौर पर काल श्रेणियों के अवयव कहे जाते हैं, कुछ या सभी को (दिए काल श्रेणियों में) उपस्थित परिवर्तनशील डिग्रियों में–

(a) दीर्घकालीन प्रवृत्ति का उपनति (Secutar Trend or Long-term Movement (T)

(b) सावधिक परिवर्तन या अल्पकालीन उच्चावचन (Periodic Movements or Short-term Fluctuations :)

(i) आवर्त या मौसमी परिवर्तन (S) Seasonal Variations

(ii) चक्रीय परिवर्तन (C) Cyclical Variations

(c) अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuations)

एक संवृत्ति का मूल्य (y) किसी समय पर अवलोकित (t) उपर्युक्त संघटकों के अन्तःक्रिया का सम्पूर्ण प्रभाव है। हमलोग इन संघटकों का वर्णन निम्नलिखित खण्ड़ों में करेंगे।

5.2.1 दीर्घकालीन उपनति (Secular Trend)

काल श्रेणी समंक की सामान्य प्रवृत्ति का एक लम्बी अवधि के दरम्यान वृद्धि या ऱ्हास या गतिरोध का होना दीर्घकालीन प्रवृत्ति या सरल उपनति कहलाती है। यह संवृत्ति सामान्यतः अवलोकित की जाती है ज्यादातर आर्थिक और व्यवसायिक सम्बन्धित श्रेणियों में, i.e., उर्ध्वगामी प्रवृत्ति सामान्यतः अवलोकित होती है काल श्रेणियों में जो जनसंख्या उत्पादन और उत्पादों की बिक्री, कीमतों, आय, चलन में मुद्रा इत्यादि से सम्बन्धित जबकि एक निम्नगामी प्रवृत्ति नोटिस की जाती है काल श्रेणियों में मृत्यु, संक्रामक रोगों इत्यादि से संबंधित आँकड़ों में चिकित्सा टेक्नोलॉजी में प्रगति के कारण चिकित्सा सुविधाओं में बेहतरी, बेहतर साफ–सफाई, भोजन इत्यादि के कारण सिम्पसन और काफका के अनुसार, उपनति जो प्रवृत्ति का दीर्घकालीन उपनति भी कहलाती है एक श्रेणी की प्राथमिक प्रवृत्ति है बढ़ना या नीचे गिरना एक कालावधि पर। उपनति की धारणा कम–विस्तार दोलन को समाविष्ट नहीं करती है, परन्तु लम्बी अवधि पर एक स्थिर परिवर्तन को।

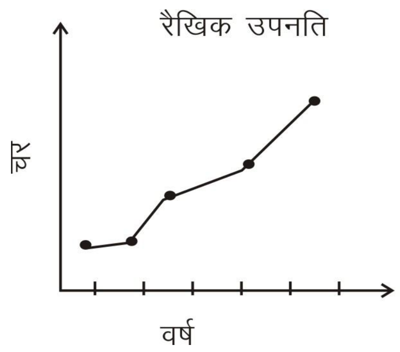
टिप्पणियाँ: 1. यह स्पष्टतः समझ लिया जाना चाहिए कि उपनति सामान्य समतल, दीर्घकालीन औसत प्रवृत्ति है। यह आवश्यक नहीं है कि बढ़ना या घटना एक ही दिशा में होगी, लिए गए सम्पूर्ण अवधि में। यह सम्भव है कि बढ़ने, घटने या स्थायित्व की प्रवृत्ति अवलोकित की जाती है विभिन्न काल खण्ड़ों में। जबकि, सम्पूर्ण प्रवृत्ति उर्ध्वगामी, निम्नगामी या स्थाई हो सकता है। इस प्रकार की प्रवृत्तियाँ ऐसी शक्तियों का परिणाम है जो मिला जुलाकर दीर्घ समय के लिए नियत हैं जो बहुत धीरे–धीरे और लगातार परिवर्तित, आस्वादनों, आदतों और लोगों के रिवाज एक समाज में, और इसी तरह से विकासवादी तरीके से कार्य करती हैं और अचानक परिवर्तन प्रतिबिंबित नहीं करते। उदाहरण के लिए, जनसंख्या वृद्धि का प्रभाव लम्बी समयावधि पर विभिन्न क्षेत्रों के विस्तार पर

जैसे–कृषि, उद्योग, शिक्षा, टेक्सटाइल इत्यादि, सतत परन्तु धीमा तरीका है। उसी तरह से, आर्थिक काल श्रेणियों की संख्या में वृद्धि या ऱ्हास शक्तियों के अन्तःक्रिया जैसे उत्पादन तकनीक में, प्रकति, वृहद् पैमाने पर उत्पादन, उन्नत मार्केटिंग प्रबंधन और व्यापार प्रबंधन, नए प्राकृतिक संसाधनों का अन्वेषण और खोज और विद्यमान संसाधनों की समाप्ति और इसी तरह जिनमें सभी क्रमिक प्रक्रिया है।

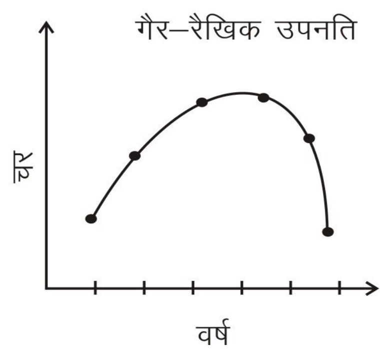
2. पद 'लम्बी समयावधि' एक आपेक्षिक पद है और यथार्थता से परिभाषित नहीं की जा सकती। यह बहुत कुछ समंक की प्रकृति पर निर्भर करता है। किसी संवृत्ति में, एक छोटी अवधि कुछ घण्टों की भी पर्याप्त लम्बी है, जबकि दूसरे में 3–4 वर्ष भी पर्याप्त नहीं हो सकती। उदाहरण के लिए, एक खास उत्पाद (कृषि या औद्योगिक उत्पादन) का उत्पादन की अभिधारणा के लिए, 20–30 महीने पीछे की वृद्धि उपनति प्रतिबिंबित नहीं करेगी जिसके लिए हमें 7–8 वर्षों का समंक चाहिए। इस संवृत्ति में, छोटी अवधि (2–3 वर्षों) के मान चक्रीय परिवर्तन (बाद में वर्णित) से अनुचित रूप से प्रभावित होता है और यथार्थ अभिनति को प्रकट नहीं करेगा। अभिनति का सही चित्र प्राप्त करने के क्रम में, काल श्रेणियों के मूल्यों को कम से कम दो या तीन संपूर्ण चक्र की अवधि तक जाँचा जाना चाहिए।

दूसरी तरफ, अगर हम बैक्टीरिया की जनसंख्या (सजीव अवयव संस्थान Living Organisms) की संख्या का कल्चर करना हो इस परिपेक्ष्य में कि 1 घण्टे में प्रत्येक 20 सेकेंड पर बहुत बैक्टीरिया नाश हों, तब 180 पाठ्यांक के समुच्चय अगर सामान्य क्रम दर्शाते हैं तो कहे जातें हैं दीर्घकालीन परिवर्तन।

3. रैखिक और गैर–रैखिक (वक्र–रेखीय) उपनति (Linear and Non-Linear (Curve-Linear) Trend– अगर काल श्रेणी मूल्यों को आलेख पत्र पर खींचा जाय और ये मूल्य कमोबेश सीधी रेखा के चारों ओर संघनित हों, तो काल श्रेणी द्वारा प्रदर्शित उपनति रैखिक कही जाती है नहीं तो गैर–रैखिक (वक्र–रेखीय)। देखें चित्र (5.1) और (5.2) एक सीधी रेखा उपनति में, काल श्रेणी मूल्य बढ़ती या घटती है कमोबेश एक नियत निश्चित मात्रा से, i.e., वृद्धि दर (या ऱ्हास) नियत है। यद्यपि, व्यवहार में, रैखिक उपनति सामान्य रूप से प्रयुक्त होती है, यह आर्थिक या व्यापारिक आँकड़ों में मुश्किल से अवलोकित होती है। एक आर्थिक और व्यवसायिक संवृत्ति में, वृद्धि या ऱ्हास दर आद्योपांत नियत प्रकृति का नहीं होता है बल्कि विभिन्न काल खंड़ों में काफी परिवर्तनशील है। सामान्यतया, शुरू में, वृद्धि धीमी होती है, तब तीव्र जो आगे भी कुछ समय के लिए त्वरित होती है, जिसके बाद यह अचल या स्थाई हो जाती है कुछ अवधि के लिए और अन्ततः अवरुद्ध हो जाती है।



चित्र क्र. 5.1



चित्र क्र. 5.2

टिप्पणी

4. यह आवश्यक नहीं है कि सभी श्रेणियाँ बढ़ता हुआ या घटता हुआ उपनति प्रदर्शित करें। कुछ संवृत्ति ऐसी काल श्रेणी को उत्पन्न कर सकते हैं जिसके मूल्य एक नियत पाठ्यांक के चारों ओर उतार–चढ़ाव करें जो समय के साथ परिवर्तन नहीं करता है, i.e., श्रेणियाँ तापक्रम या एक खास स्थान का बैरोमीट्रिक का पाठ्यांक (दबाव) से संबंधित।

5. उपनति के उपयोग– (i) लम्बी अवधि के समंक का अध्ययन हमें धारणा बनाने में समर्थता देता है विचाराधीन संवृत्ति के व्यवहार के पैटर्न के संबंध में। यह व्यवसायिक पूर्वानुमान और भविष्य के कार्यक्रमों को तय करने में मदद करता है। उदाहरण के लिए अगर एक काल श्रेणी समंक एक विशेष घटना की अभिनति एक विशेष दिशा में दर्शाती है। तब इस परिकल्पना पर कि यही पैटर्न निकट भविष्य में जारी रहेगी, एक परिकल्पना जो काफी तर्कयुक्त है कि जबतक संवृत्ति को प्रभावित करने वाली शक्तियों में कुछ बुनियादी और प्रबल बदलाव नहीं हो हम पूर्वानुमान कर सकते हैं संवृत्ति के मूल्य का भविष्य के लिए भी। अभिवर्तन वक्र या अभिनति समीकरण या उनसे प्राप्त प्राक्कलन की पशिशुद्धता दिए गए समंक की उपयुक्तता अभिनति के प्रकार की विश्वसनीयता पर निर्भर करेगी। (विस्तार के लिए, देखें अभिनति की माप–न्यूनतम वर्ग रीति) अभिनति मूल्य एक व्यवसाई के लिए काफी महत्व की है निकट भविष्य में संवृत्ति के मूल्यों का कामचलाऊ प्राक्कलन प्राप्त करने में। उदाहरण के लिए, एक उत्पादन के सन्निकट बिक्री या माँग की धारणा एक व्यवसाई के लिए काफी उपयोगी है भविष्य के कार्यक्रमों की योजना तैयार करने में और भंडारण, उत्पादन इत्यादि के बारे में पॉलिसी बनाने में।

(ii) दिए गए काल श्रेणियों से अभिनति मूल्यों को अलग करने पर, (दिए गए काल श्रेणी मूल्यों को अभिनति मूल्यों से भाग देने पर या दिए काल श्रेणी मूल्यों से अभिनति मूल्यों को घटाने पर, देखें (मॉडल (5.1) और (5.2) जिसकी विवेचना बाद में की गई है), हम लोग कम अवधि और अनियमित परिवर्तनों का अध्ययन कर सकते हैं।

(iii) अभिनति विश्लेषण दो या दो से अधिक श्रेणियों को विभिन्न कालवधियों में तुलना करने में समर्थ बनाना है और उनके बारे में महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालने में।

5.2.2 अल्पकालीन परिवर्तन (Short-Term Variations)

दीर्घकालीन परिवर्तनों के साथ बहुत सारी काल श्रेणियों में सन्निहित होते हैं, बहुत प्रकार की शक्तियाँ जो अपने आप को कालक्रमानुसार या लगभग कालक्रमानुसार कालवधि में दुहराती हैं और इस तरह एक खास दिशा में श्रेणी के मूल्यों के सरल प्रवाह को रोक देती है। इस तरह की शक्तियाँ अल्पकालीन परिवर्तन उत्पन्न करती हैं जो निम्नलिखित दो संवर्गों में वर्गीकृत की जा सकती है–

(a) मौसमी या आर्तव परिवर्तन (Seasonal Variation) – (S) और (b) चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variations (c))

मौसमी परिवर्तन (S) काल श्रेणियों में ये परिवर्तन आवर्तित शक्ति की वजह से हैं जो नियमित और सार्वधिक तरीके से कार्य करती हैं एक वर्ष से कम के अन्तराल में, i.e., 12 महीनों की अवधि में और बराबर या करीब करीब एक ही पैर्टन होता है वर्षों–वर्षों तक। इसलिए मौसमी परिवर्तन होगा एक काल श्रेणी में अगर समंक त्रैमासिक (प्रत्येक तीसरे वर्ष रिकार्ड किए गए हैं, मासिक, साप्ताहिक, दैनिक, घंटावार और इसी तरह आगे। यद्यपि इनमें से प्रत्येक के उपर्युक्त स्थिति में, मौसमी परिवर्तन का विस्तार भिन्न हैं, उनमें से सभी की समान अवधि है viz. 1 वर्ष। इसलिए एक काल श्रेणी समंक में जिसमें केवल वार्षिक आँकड़ें दिए गए हैं कोई मौसमी परिवर्तन नहीं होता है। ज्यादातर आर्थिक काल श्रेणियाँ मौसमी चक्र से प्रभावित होती हैं, e.g., कीमतें, उत्पादन और उपभोक्ता सामग्रियों की खपत; एक डिपार्टमेंटल स्टोर में बिक्री और लाभ; बैंक जमा और बैंक क्लियरिंग इत्यादि सभी मौसमी परिवर्तनों से प्रभावित होते हैं। मौसमी परिवर्तन निम्नलिखित दो कारणों से आरोपित होती हैं :

(i) प्राकृतिक शक्तियों के परिणामस्वरूप– जैसा नाम ईशारा करता है, विभिन्न मौसम या जलवायु प्रत्यावर्तन और आवोहवा परिवर्तन मौसमी परिवर्तन में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। उदाहरण के लिए, छाता की बिक्री बरसात के मौसम में बहुत तेजी पकड़ लेती है ग्रीष्म ऋतु में परदे की माँग बढ़ जाती है, बर्फ और आइसक्रीम की बिक्री ग्रीष्मऋतु में काफी बढ़ जाती है; ऊलेन कपड़ों की बिक्री सर्दियों के मौसम में बढ़ जाती है– सभी प्राकृतिक शक्तियों से प्रभावित होकर *viz.* आवोहवा या मौसम। उसी तरह से, कुछ वस्तुओं का उत्पादन जैसे– चीनी, चावल, दाल, अंडे इत्यादि ऋतुओं पर निर्भर करती हैं। उसी तरह से, कृषि उत्पादों की कीमतें फसल करते वक्त हमेशा घट जाती है और तब धीरे–धीरे बढ़ती है।

(ii) मानव निर्मित मान्यताओं के परिणामस्वरूप– काल श्रेणियों में ये परिवर्तन 12 महीनों के अंदर एक समान के लोगों की आदतों, फैशन, रिवाजों और मान्यताओं की वजह से है। उदाहरण के लिए, आभूषणों और श्रृंगार प्रसाधनों की बिक्री शादियों में बढ़ जाती है, डिपार्टमेंटल स्टोर की बिक्री और लाभ काफी बढ़ जाती है शादी–ब्याह के मौसम में, और त्योहार जैसे दिवाली; दशहरा (दुर्गा पूजा), क्रिसमस इत्यादि। इस तरह का परिवर्तन नियमित आकर्षी (Spasmodic) तरीके से कार्य करती है और साल दर साल पुनरावृत्त होती है।

मौसमी परिवर्तन की माप का मुख्य उद्देश्य है उन्हें अभिनति से अलग कर देना और उनके प्रभाव का अध्ययन करना। मौसमी पैटर्न का अध्ययन व्यवसायिकों के लिए बहुत लाभकारी है, उत्पादकों, बिक्री प्रबंधकों इत्यादि, भविष्य के कार्यकलापों की योजना बनाने में और खरीद, उत्पादन, भंडार नियंत्रण (Inventory Control), कर्मचारियों की आवश्यकता, विक्रय और विज्ञापन प्रोग्रामों से सम्बन्धित की नीति निर्धारण करने में।

मौसमी परिवर्तन के ज्ञान के अभाव में, मौसमी उछाल को गलती से बेहतर व्यापारिक स्थिति का सूचक मान लिया जा सकता है जबकि मौसमी गिरावट को गलत ढंग से व्याख्याईत किया जा सकता है व्यापारिक स्थिति में गिरावट के तौर पर। इसलिए, एक काल–श्रेणी में संवृत्ति के व्यवहार को ठीक ढंग से समझने के लिए, काल श्रेणी आँकड़े को निश्चित रूप से मौसमी परिवर्तन के लिए सामंजित

टिप्पणी

किया जाना चाहिए। यह किया जा सकता है उन्हें अभिनति से अलग करके और दूसरे संघटकों से दिए गए काल श्रेणी के मूल्य (y) को मौसमी परिवर्तन से भाग देकर। (देखें मॉडल (5.1))। यह तकनीक समंक का गैर–ऋतुकरण (De-Seasonalisation) कहलाता है और बाद में विस्तार से चर्चा की गई है (c.f. (4.6.5))।

चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variations) (C): एक काल श्रेणी में दोलायमान परिवर्तन जिसमें दोलन की अवधि एक वर्ष से अधिक है जो चक्रीय परिवर्तन कहलाता है। ये परिवर्तन एक काल श्रेणी में उतार–चढ़ाव में आवर्तन के कारण हैं एक वर्ष की अवधि के बाद। चक्रीय उच्चावचन, यद्यपि कमोबेश नियमित, आवश्यक रूप से समरूपता से सावधिक नहीं है, i.e., वे एक रूप पैटर्न को यथार्थता से पालन कर भी सकते हैं और नहीं भी समान समय के अन्तराल के बाद। एक पूर्ण अवधि जो सामान्यतः 7 से 9 वर्षों तक जाती है 'चक्र' कही जाती है। ये दोलायमान परिवर्तन किसी व्यापारिक कार्यकलाप के **'व्यापारिक–चक्र' जो चार–क्रमिक (Four-Phased) चक्रीय है जिसमें शामिल है उन्नति (तेजी), मंदी, अवमंदन और पुनरूत्थान (वसूली) समय–समय पर।** किसी व्यापारिक कार्यकलाप में एक दूसरे को स्थाई नियमितता से ये तेजी और मंदी पालन करते हैं और पूर्ण चक्र एक तेजी के एक शीर्ष से दूसरे शीर्ष तक सामान्यतः 7 से 9 वर्ष तक जाती है। आर्थिक और व्यापारिक श्रेणी का अधिकतर, e.g., उत्पादन, मूल्यों, वेतन, लागत, इत्यादि से संबंधित श्रेणी प्रभावित होती है चक्रीय उच्चावचनों से।

चक्रीय परिवर्तन का अध्ययन बिजनेस एक्ज्यूकिटिवों के लिए बहुत महत्व की है नीतियों का निर्धारण अभिलक्षित करने में, व्यापारिक क्रियकलाप के स्तर को स्थायित्व प्रदान करने में। चक्रीय संघटकों का ज्ञान एक व्यापारी को समर्थ बनाती है तेजी और मंदी की अवधि के बारे में एक धारणा बनाने में और क्रमानुसार वह समय रहते कदम उठा सके अपने उत्पाद के लिए स्थाई बाजार जारी रखने के लिए।

5.2.3 दैव या अनियमित परिवर्तन (Random or Irregular Variations)

चक्रीय और मौसमी परिवर्तन से मिश्रित, हर काल श्रेणी में अन्तर्निहित है दूसरा अवयव जो दैव या अनियमित परिवर्तन कहलाता है। ये अवयव है पूर्णतः यादृच्छिक और ऐसे अदृश्य और अपूर्वानुमानित शक्तियाँ जो बिल्कुल अनियत और अनियमित रूप में कार्य करती हैं। ये परिवर्तन कोई निश्चित क्रम नहीं दर्शाती और उनका कोई नियमित अवधि या समय नहीं है घटित होने का, इसलिए वे अनियमित परिवर्तन कहलाती है। ये शक्तिशाली परिवर्तन अधिकतर कई गैर आवर्ती कारकों जैसे बाढ़, सूखा, युद्ध, भूकंप, हड़ताल और तालाबंदी, महामारी, आन्दोलन इत्यादि जो बहुत अनियत और अपूर्वानुमानित ढंग से व्यवहार करती हैं। सामान्यतः वे अल्प–अवधि परिवर्तन हैं लेकिन कभी–कभी उनका प्रभाव इतना प्रबल होता है कि वे नए चक्रीय या दूसरे परिवर्तन को उत्पन्न कर देती है। अनियमित परिवर्तन सांयोगिक उच्चावचन भी कहा जाता है और एक काल श्रेणी समंक में

सभी प्रकार का परिवर्तन अन्तर्विष्ट कर लेती है जो अभिनति, मौसमी और चक्रीय परिवर्तनों द्वारा अभिलेखित नहीं की जाती है।

उनके बिलकुल यादृच्छिक चरित्र के कारण, यह संभव नहीं है इस तरह के परिवर्तन को अलग करना और उनका अध्ययन एकनिष्ठा से करना ना ही उनका परिशुद्धता से पूर्वानुमान या प्राक्कलन किया जा सकता है। इन परिवर्तनों के लिए जो सबसे अच्छा किया जा सकता है उनका काम चलाऊ प्राक्कलन (विगत अनुभव से) और क्रमानुसार ऐसी असामान्यताओं के लिए व्यवस्था करना व्यापार में सामान्य समयों के दरम्यान।

5.3 काल श्रेणी का विश्लेषण (Time Series Analysis)

काल श्रेणी विश्लेषण में अन्तर्निहित है :

(i) विभिन्न शक्तियों या प्रभावों की पहचान या निर्धारण जिसकी अन्तःक्रिया काल श्रेणियों में परिवर्तन उत्पन्न करती है।

(ii) उनको स्वतंत्र रूप से अलगकर, अध्ययन कर, विश्लेषण कर और मापकर, i.e., दूसरी चीजों को नियत रखकर।

काल श्रेणी विश्लेषण अत्यधिक महत्वपूर्ण है न केवल व्यापारियों या अर्थशास्त्रियों के लिए परन्तु ऐसे भी लोगों के लिए भी जो विभिन्न शाखाओं प्राकृतिक, सामाजिक और भौतिक विज्ञानों में कार्य करते हैं। इनके कुछ उपयोग नीचे गिनाए गए हैं :

(i) यह विचाराधीन संवृत्ति के विगत व्यवहार का अध्ययन करने में समर्थ बनाती है, i.e., समंक में परिवर्तन के प्रकार और प्रकृति को निर्धारित करने में।

(ii) अलगाव और विभिन्न संघटकों का अध्ययन काफी महत्व की है एक व्यवसायिक के लिए भविष्य के कार्यकलापों की योजना बनाने में और प्रबंधन और नीतिगत निर्णयों के नियमन में।

(iii) यह वास्तविक चालू प्रदर्शन की तुलना करने में सहायता करता है या उपलब्धि के साथ संभाव्यों (विगत प्रदर्शन के आधार पर) और ऐसे परिवर्तनों के कारणों का विश्लेषण करने में, अगर कोई है।

(iv) यह हमें समर्थ बनाता है एक संवृति के व्यवहार को भविष्य में पूर्वानुमान या प्राक्कलन या पूर्वकथन करने में जो व्यवसायिक योजना बनाने में बहुत महत्वपूर्ण है।

(v) यह हमारी सहायता करता है विभिन्न संवृतियों के मूल्यों में परिवर्तन की तुलना करने में विभिन्न समयों या जगहों पर इत्यादि।

टिप्पणी

5.4 काल श्रेणियों के लिए गणितीय मॉडल (Mathematical Model for Time series)

निम्नलिखित मॉडल है एक काल श्रेणी का इसके संघटकों में विश्लेषण के लिए सामान्यतः प्रयुक्त होने वाली :

(i) योगात्मक मॉडल या योगात्मक परिकल्पना से विश्लेषणः

(Additive Model or Composition by Additive Hypothesis)

योगात्मक मॉडल के अनुसार, काल श्रेणी अभिव्यक्त की जा सकती है जैसे :

$$Y = T + S + C + I \quad \ldots(5.1)$$

या अधिक परिशुद्धता से, $Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t$ …(5.1a)

जहाँ $Y(Y_t)$ काल श्रेणी मूल्य है समय t पर, और T_t, S_t और C_t और I_t प्रदर्शित करती हैं अभिनति, मौसमी, चक्रीय और दैव परिवर्तनों को समय t पर। इस मॉडल में $S = S_t$, $C = C_t$ और $I = I_t$ निरपेक्ष परिमाण हैं जो धनात्मक और ऋणात्मक मान ले सकता है ताकि :

$\Sigma S = \Sigma S_t = 0,$ (किसी वर्ष के लिए)

$\Sigma C = \Sigma C_t = 0,$ (किसी चक्र के लिए)

और $\Sigma I = \Sigma I_t = 0,$ लम्बी समयावधि में।

योगात्मक मॉडल की अभिकल्पना है कि काल श्रेणी के सभी चार संघटक एक दूसरे से स्वतंत्रतापूर्वक कार्य करते हैं ताकि इनमें से किसी संघटक का कोई प्रभाव बाकी तीनों पर नहीं है। इसका अर्थ है कि अभिनति, जबकि, तीव्र या धीमा, हो सकता है, का कोई प्रभाव मौसमी और चक्रीय संघटकों पर नहीं है; ना ही मौसमी उच्चावचन का कोई प्रभाव चक्रीय परिवर्तन पर है और व्युत्क्रम। यद्यपि, यह अभिकल्पना अधिकतर आर्थिक और व्यवसायिक काल श्रेणी के लिए सत्य नहीं है जहाँ काल श्रेणी का चार संघटक एक दूसरे से स्वतंत्र नहीं है। उदाहरण के लिए, मौसमी या चक्रीय परिवर्तन वास्तविकता में मिटाया जा सकता है बहुत तीव्रता से चढ़ने वाले या शीघ्रता से नीचे गिरने वाले अभिनति से। उसी तरह से, मजबूत और शक्तिशाली मौसमी दोलन चक्रीय उच्चावचनों को तीव्रतर कर सकता है या यहाँ तक कि औंधे–मुंह गिराने का परिवर्तन कर सकता है।

(ii) गुणनात्मक मॉडल या गुणनात्मक परिकल्पना से विश्लेषणः (Multiplicative Model or Composition by Multiplicative Hypothesis)

पूर्व बिन्दुओं को दृष्टिकोण में रखकर अधिकतर आर्थिक और व्यवसायिक काल श्रेणियाँ निम्नलिखित क्लासिकी गुणनात्मक मॉडल से चित्रित की जा सकती है :

$$Y = T \times S \times C \times I \quad \ldots(5.2)$$

या अधिक परिशुद्धता से, $Y_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$ …(5.2a)

इस मॉडल की परिकल्पना है कि काल श्रेणियों के चार संघटक विभिन्न कारणों की वजह से हैं परन्तु वे आवश्यक रूप से स्वतंत्र नहीं है और वे एक दूसरे को प्रभावित कर सकते हैं। इस मॉडल में, S, C और I को निरपेक्ष मात्रा के जैसा नहीं देखा जाता है, परन्तु आपेक्षिक परिवर्तन जैसा। अभिनति संघटक T को छोड़कर, दूसरे संघटक S, C और I अभिव्यक्त होती हैं दर या घातांक I के ऊपर या नीचे ऐसा कि S का सभी गुणोत्तर माध्य $= S_t$ एक वर्ष में मूल्य $C = C_t$ एक चक्र में मूल्य या $I = I_t$ लम्बी अवधि में मूल्य ईकाई हैं :

समीकरण (5.2) में दोनों तरफ logarithm लेने पर, हम पाते हैं

$$\log Y = \log T + \log C + \log I \qquad \ldots (5.3)$$

जो और कुछ नहीं है परन्तु योगात्मक मॉडल है जो दिए काल श्रेणी मूल्यों के logarithm को प्रयुक्त कर प्राप्त किया गया है।

टिप्पणियाँ: 1. ज्यादातर काल श्रेणियाँ आर्थिक और व्यवसायिक संवृत्ति से संबंधित अनुवर्ती हैं गुणनात्मक मॉडल (5.2) के व्यवहार में, योगात्मक मॉडल (5.1) शायद ही प्रयुक्त होती है।

2. मिश्रित मॉडल (Mixed Models) : ऊपर वर्णित योगात्मक और गुणात्मक मॉडल के साथ, एक काल श्रेणी के संघटकों को कई दूसरे तरीकों से भी संयुक्त की जा सकती है। विभिन्न मॉडल, विभिन्न परिकल्पनाओं के अंदर परिभाषित, विभिन्न परिणाम देगी। कुछ मिश्रित मॉडल जो योगात्मक और गुणनात्मक मॉडलों के विभिन्न संयोगों के परिणामस्वरूप उत्पन्न होती है नीचे दी गई है :

$$Y = TCS + I \qquad \ldots(5.4)$$

$$Y = TC + SI \qquad \ldots(5.5)$$

$$Y = T + S\,CI \qquad \ldots(5.6)$$

$$Y = T + S + CI \qquad \ldots(5.7)$$

3. मॉडल (5.1) या (5.2) प्रयुक्त हो सकती है एक या अधिक संघटक की माप प्रान्त करने के लिए विलोपन द्वारा viz. घटाव या भाग द्वारा। उदाहरण के लिए, अगर संघटक अभिनति (T) ज्ञात है, तब गुणनात्मक मॉडल का प्रयोगकर, यह दिए काल श्रेणी से अलग की जा सकती है, देने के लिए :

$$S \times C \times I = \frac{Y}{T} = \frac{\text{वास्तविक मूल्य}}{\text{अभिनति मूल्य}} \qquad \ldots(5.8)$$

इसलिए, वार्षिक समंक के लिए, जिसके लिए मौसमी परिवर्तन S वहाँ नहीं है, हमें

$$Y = T \times C \times I \Rightarrow C \times I = \frac{Y}{T} \qquad (5.8a)$$

हमलोग निम्नलिखित खंड़ों में विभिन्न तकनीकों की विवेचना करेंगे, एक काल श्रेणी के विभिन्न संघटकों की माप के लिए।

टिप्पणी

5.5 अभिनति की माप (Measurement of Trend)

निम्नलिखित चार विधियाँ हैं जो सामान्यतः प्रयुक्त होती हैं एक काल श्रेणी में अभिनति संघटक की माप का अध्ययन करने में।

(i) आलेखीय (या मुक्त–हस्त वक्र उपयुक्तता) विधि Graphic (or Free hand Curve Filling) Method

(ii) अर्द्ध–माध्य रीति (Method of Semi-Averages)

(iii) वक्र उपयुक्तता की विधि न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा (Method of Curve filling by Principle of least squares)

(iv) चल माध्य रीति (Method of Moving Average)

5.5.1 आलेखीय या मुक्त हस्त वक्र उपयुक्तता विधि (Graphic (or Free hand Curve Filling) Method)

यह सबसे सरल और सबसे लचीली विधि है दीर्घकालीन अभिनति को प्राक्कलित करने का और इसमें सबसे पहले कालिक–चित्र प्राप्त किया जाता है आलेख पत्र पर काल श्रेणी मूल्यों को आलेखित करके और फिर एक मुक्त–हस्त सरल वक्र इन बिन्दुओं पर खींचकर जो परिशुद्धता से समंक की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को प्रतिबिंबित करती है। वक्र का समरेखण दूसरे संघटकों को विलुप्त कर देती है viz., मौसमी, चक्रीय और दैव परिवर्तनों को। उपयुक्त अभिनति रेखा या वक्र प्राप्त करने के क्रम में; निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए :

(i) इसे समतल होना चाहिए

(ii) बिन्दुओं की संख्या अभिनति वक्र/रेखा के ऊपर कमोबेश बराबर होनी चाहिए इसके नीचे के बिन्दुओं के।

(iii) अभिनति रेखा से ऊपर दी बिन्दुओं के उर्ध्व विचलनों का योग अभिनति रेखा से नीचे की बिन्दुओं के उर्ध्व विचलन के योग के लगभग बराबर होनी चाहिए ताकि कुल धनात्मक विचलन कमोबेश संतुलित है कुल ऋणात्मक विचलन के विरुद्ध।

(iv) दिए बिन्दुओं के उर्ध्व विचलन के वर्गों का योगफल अभिनति वक्र/रेखा से न्यूनतम संभव है।

बिन्दु (iii) और (iv) औसत (समान्तर माध्य) के सिद्धान्त के अनुसार है क्योंकि दिए प्रेक्षणों के विचलनों का बीजगणितीय योग उनके समान्तर माध्य से शून्य है और विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होता है जब माध्य से ली जाती है।

(v) अगर समंक में चक्र उपस्थित है तब अभिनति रेखा को ऐसा खींचना चाहिए कि :

(a) इसे बराबर चक्रों की संख्या हो इसके ऊपर और नीचे।

(b) यह चक्रों को विभाजित करती है ताकि चक्रों का क्षेत्र अभिनति रेखा के ऊपर और नीचे लगभग बराबर हो।

(vi) छोटी अल्प–अवधि उच्चावचनों या सहसा और अचानक परिवर्तन को नजरअंदाज किया जा सकता है।

गुण : (i) यह बहुत सरल और समय बचाने वाली विधि है और इसके लिए किसी गणितीय परिकलनों की आवश्यकता नहीं है।

(ii) यह बहुत लचीली विधि है इस अर्थ में कि यह सभी प्रकार की अभिनति को वर्णन करने के लिए प्रयुक्त होती है– रेखीय और साथ ही गैर–रैखिक भी।

अवगुण : (i) इस विधि का सबसे मजबूत आपत्ति है कि यह अत्यधिक वस्तुनिष्ठ है प्रकृति में। अभिनति वक्र इस तरह से प्राप्त बहुत अधिक व्यक्तिगत पूर्वाग्रह और निर्णय पर निर्भर करती है अन्वेषक के समंक को व्यवहृत करने पर और क्रमानुसार विभिन्न व्यक्ति समान समंक के समुच्चय के लिए अलग अभिनति वक्र प्राप्त करेंगे। इसलिए एक उचित और न्यायसंगत प्रयोग एक अन्वेषक के तौर पर बहुत निपुणता और विशेषज्ञता की माँग करता है और यह बहुत ज्यादा इस विधि की लोकप्रियता और उपयोगिता को बाधित करता है। यह विधि, यद्यपि सरल और लचीली है, व्यवहार में मुश्किल से प्रयुक्त होती है अन्वेषन में अन्तर्निहित अभिनति के कारण।

(ii) यह अभिनति की माप में सहायता नहीं करता है।

(iii) मुक्त–हस्त अभिनति वक्र के कारण, इसे प्रयुक्त करना खतरनाक होगा भविष्यवाणी या पूर्वानुमान लगाने के लिए।

5.5.2 अर्द्ध–माध्य रीति (Method of Semi-Averages)

आलेखीय रीति की तुलना में, इस विधि का अधिक विषयनिष्ठ पहुँच है। इस विधि में, सम्पूर्ण काल श्रेणी समंक दो बराबर भागों में विभक्त है समय के सापेक्ष। उदाहरण के लिए, अगर हमें काल श्रेणी मूल्य 10 वर्षों के लिए 1985 से 1994 दी गई है तब दो बराबर भाग होंगे समंक 1985 से 1989 और 1990 से 1994 के संगत। यद्यपि, असम वर्षों की स्थिति में, दो बराबर भाग प्राप्त किए जाते हैं मध्य के मान को हटाकर। इसलिए, उदाहरण के लिए, 9 वर्षों के समंक 1990 से 1998 तक, दो भाग के समंक होंगे वर्ष 1990 से 1993 तक और 1995 से 1998 तक, मध्य वर्ष का मूल्य viz. 1994 हटा दिया जाएगा। श्रेणी को दो भागों में बाँटने के बाद, हम आगे प्रत्येक आधे के समान्तर माध्य की गणना अलग–अलग करते हैं। ये माध्य अर्द्ध–माध्य कहलाते हैं। तब ये अर्द्ध–माध्य बिन्दुओं जैसे आलेखित किये जाते हैं प्रत्येक भाग के क्रमशः समय अवधियों के मध्य बिन्दु के विरुद्ध। इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा सीधी रेखा अभिनति देती है जो उपयुक्त है दिए गए समंक का।

टिप्पणी

दृष्टान्त के तौर पर, काल श्रेणी समंक 1985 से 1994 के लिए, हमें

	भाग I	भाग II
अवधि	1985 से 1989 तक	1990 से 1994
अर्द्ध–माध्य	$\bar{x}_1 = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}$	$\dfrac{\bar{x}_2 = y_6 + y_7 + - - + y_{10}}{5}$
समय अवधि का मध्य	1987	1992

$\bar{x}_1$ 1987 के विरुद्ध आलेखित किया जाता है और $\bar{x}_2$ 1992 के विरुद्ध। अभिनति रेखा इन बिन्दुओं को संयुक्त कर प्राप्त किया जाता है, *viz.* बिन्दु में (1987, $\bar{x}_1$) और (1992, $\bar{x}_2$) एक सीधी रेखा द्वारा। उपर्युक्त स्थिति में, दो भाग असम वर्षों की संख्या को धारित करता है viz., 5 और इसलिए मध्य समय अवधि आसानी से प्रगणित होती है। यद्यपि, अगर दो आधे भाग सम संख्या के वर्षों का है जैसे दूसरी स्थिति जो ऊपर दी गई है viz., वर्ष 1990 से 1993 और 1995 से 1998, औसत समय अवधि का मध्य निकालना कुछ कठिन है। इस स्थिति में $\bar{x}_1$ (1990 से 1993 वर्षों के लिए माध्य का मूल्य) आलेखित किया जाएगा 1990 से 1993 की अवधि के दो मध्य वर्षों के माध्य के विरुद्ध है viz., 1991 और 1992 वर्षों का माध्य। इसी तरह से, $\bar{x}_2$ आलेखित किया जाएगा 1996 और 1997 वर्षों के माध्य के विरुद्ध।

गुण : (i) एक स्पष्ट लाभ इस विधि की है इसकी विषयनिष्ठता इस अर्थ में कि यह व्यक्तिगत निर्णय पर निर्भर नहीं करती है और प्रत्येक जो इस विधि का प्रयोग करता है एक ही अभिनति रेखा पाता है इसलिए एक ही अभिनति मूल्य।

(ii) यह समझने और प्रयोग करने में आसान है चल माध्य की तुलना में या अभिनति को मापने का न्यूनतम वर्ग रीति से।

(iii) रेखा को दोनों तरफ बढ़ाया जाता है भविष्य या विगत प्राक्कलनों को प्राप्त करने में।

सीमाएं : (i) यह विधि रैखिक अभिनति की उपस्थिति धारण करती है (काल श्रेणी मूल्यों में) जो नहीं भी हो सकता है।

(ii) समान्तर माध्य का प्रयोग (अर्द्ध–माध्य प्राप्त करने में) पर भी प्रश्न चिन्ह लगाया जा सकता है इसकी सीमाओं की वजह से।

क्रमानुसार, इस विधि से प्राप्त अभिनति मूल्य और भविष्य के लिए पूर्वानुमानित मूल्य परिशुद्ध और विश्वसनीय नहीं है।

उदाहरण 5.1: निम्नलिखित समंक के अभिनति निर्धारिण के लिए अर्द्ध–माध्य रीति का प्रयोग करें और 2000 के लिए मूल्य को प्राक्कलित करें :

वर्ष :	1993	1994	1995	1996	1997	1998
बिक्री (हजार ईकाईयों में) :	20	24	22	30	28	32

अगर बिक्री के लिए वास्तविक आँकड़ा वर्ष 2000 के लिए 35,000 ईकाईयाँ हैं, आप कैसे आपके द्वारा प्राप्त आँकड़ों और आप को दिए वास्तविक आँकड़ों के बीच के अंतर का लेखा करेंगे?

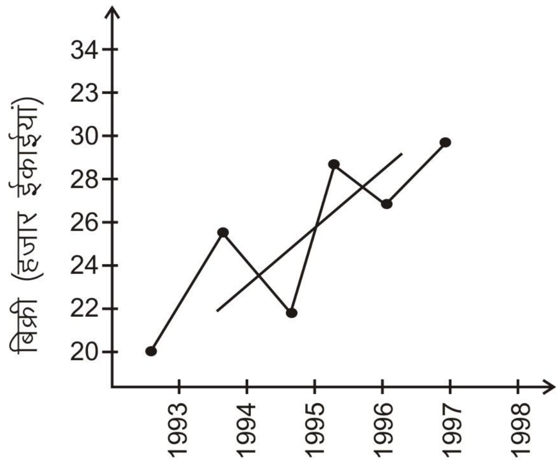
हलः यहाँ $x = 6$ (सम); इसलिए दो भाग होंगे 1993 से 1995 और 1996 से 1998

सारणी क्र. 5.1ः अभिनति के लिए परिकलन अर्द्ध–माध्य रीति द्वारा

वर्ष	बिक्री (हजार इकाईयों)	त्रिवर्षीय अर्द्ध–योगपत्र	अर्द्ध–माध्य
1993	20		
1994	24	66	$\frac{66}{3} = 22$
1995	22		
1996	30		
1997	28	90	$\frac{90}{3} = 30$
1998	32		

यहाँ अर्द्ध–माध्य 22 प्रथम भाग, i.e., 1994 के मध्य वर्ष के विरुद्ध आलेखित की जाती है और अर्द्ध–माध्य 90 दूसरे भाग, i.e., 1997 के मध्य–वर्ष के विरुद्ध आलेखित की जाती है। अभिनति रेखा चित्र (5.3) में दर्शाई गई है।

टिप्पणी : अभिनत मूल्य विभिन्न वर्षों के लिए अभिनति रेखा आलेख से पढ़ी जा सकती है। वैकल्पिक, बिक्री के मूल्य में औसत बढ़ोतरी (हजार इकाईयाँ) तीन वर्षों के लिए 1994 से 1997 तक है $30 - 22 = 8$ (000 इकाईयाँ)। इसलिए बिक्री में वार्षिक वृद्धि है $(8/3) = 2.667$ ('000 इकाईयाँ)



चित्र क्र. 5.3

अब 1994 के बिक्री का अभिनति मूल्य प्रथम भाग का औसत है, viz. 22 ('000 इकाईयाँ) और 1997 के लिए 30 ('000 इकाईयाँ) है। इसलिए इस यथार्थ

को प्रयोगकर कि बिक्री में वार्षिक वृद्धि 2.667 ('000 इकाईयाँ) हैं, बिक्री के अभिनति मूल्य विभिन्न वर्षों का प्राप्त की जा सकती है जैसा सारणी क्र. (5.1A) में दर्शाई गई है।

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.1A

वर्ष	अभिमति मूल्य ('000 इकाईयों)	वर्ष	अभिमति मूल्य ('000 इकाईयों)
1993	22 - 2.667 = 19.333	1997	30
1994	22	1998	30 + 2.667 = 32.667
1995	22 + 2.667 = 24.667	1999	32.667 +2.667 = 35.354
1996	24.667 + 2.667 = 27.334	2000	35.354 + 2.667 = 38.001

इसलिए 2000 में बिक्री का प्राक्कलित (अभिनति) मूल्य 38,001 इकाईयाँ हैं। यह अभिनति मूल्य दिए गए 35,000 ईकाईयों के मूल्य से भिन्न हैं क्योंकि यह इस परिकल्पना के बिना पर प्राप्त की गई है कि दिए काल श्रेणी मूल्यों के बीच रैखिक सम्बन्ध है जो इस स्थिति में (वास्तविक समंक के ग्राफ से जैसा स्पष्ट है) यथार्थ नहीं है। इसके अतिरिक्त, अभिनति मूल्य की गणना में, मौसमी, चक्रीय और अनियमित परिवर्तन के प्रभाव को पूर्णरूप से नजरअंदाज कर दिया गया है जबकि प्रेक्षित मूल्य इन संघटकों से प्रभावित हैं।

उदाहरण 5.2: निम्नलिखित वार्षिक समंक की श्रेणी से, अभिनति रेखा अर्द्ध–माध्य विधि से ज्ञात करें। 1999 के लिए मूल्य भी प्राक्कलित करें।

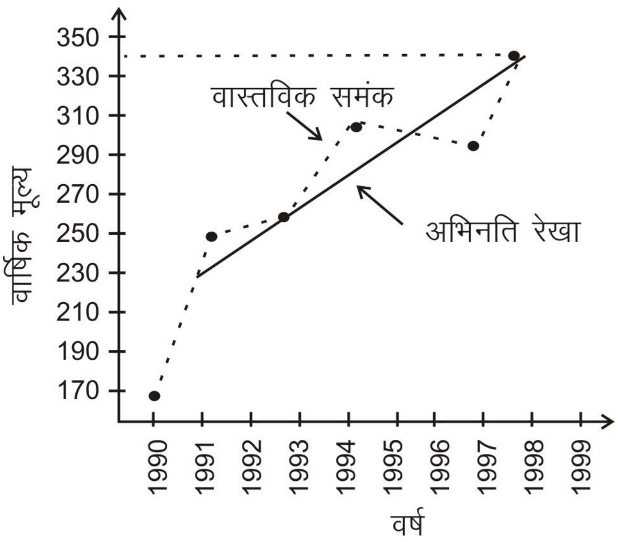
वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
वास्तविक मूल्य :	170	231	181	267	278	302	299	298	340

हल: यहाँ वर्षों की संख्या 9 है, i.e., विषम। दो मध्य भाग होंगे 1990 से 1993 और 1995 से 1998, मध्य वर्ष के लिए मूल्य viz., 1994 नजरअंदाज कर दी जाती हैं।

सारणी क्र. 5.2

वर्ष	वास्तविक मूल्य	चार वर्षीय अर्द्ध–योगफल	अर्द्ध–माध्य
1990	170		
1991	231		
1992	261	929	$\frac{921}{4} = 232.25 = 232$
1993	267		
1994	278		
1995	302		
1996	299		
1997	298	1239	$\frac{1239}{4} = 309.75 \approx 310$
1998	340		

मूल्य 232, 1991 और 1992 के वर्ष के मध्य के विरुद्ध आलेखित की जाती है।



चित्र क्र. 5.4

आलेख से हम देखते हैं कि प्राक्कलित (अभिनति) मूल्य 1999 के लिए 348 है।

Alier – 1999 के लिए अभिनति मूल्य उपर्युक्त तालिका में परिकलन से हम देखते हैं कि वास्तविक मूल्य में वृद्धि 1991–92 के मध्य से 1996–97 के मध्य का, i.e., 5 वर्षों के लिए $310 - 232 = 78$ है। इसलिए वार्षिक वृद्धि 7 8/5 है। हम यह भी पाते हैं कि औसत अभिनति मूल्य 1996–97 के मध्य के लिए 310 है। इसलिए 1999 के लिए अभिनति मूल्य दिया गया है

$$310 + \frac{5}{2} \times \frac{78}{5} = 310 + 39 = 349$$

यह मूल्य 348 के आलेखीय मूल्य से भिन्न है जो अभिनति रेखा से प्राप्त की जाती है इस वजह से जो उदाहरण (5.1) में दी गई है और इसलिए भी क्योंकि हमने परिकलनों को दशमलवों को पूर्णांक बनाकर प्राप्त की है।

5.5.3 न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा वक्र उपयुक्तता विधि (Method of Curve Fitting by the Principle of Least Squares)

न्यूनतम वर्ग रीति हमें विश्लेषणात्मक या गणितीय उपकरण उपलब्ध करवाता है दिए गए काल श्रेणी के अभिनति में विषयनिष्ठ उपयुक्तता प्राप्त करने में। ज्यादातर आर्थिक और व्यवसायिक काल श्रेणी से संबंधित समंक वृद्धि या ऱ्हास के निश्चित नियमों का पालन करती है और क्रमानुसार ऐसी परिस्थिति में अभिनति उपयुक्तता ज्यादा विश्वसनीय होगी पूर्वानुमान और भविष्यकथन के लिए। यह तकनीक प्रयुक्त हो सकती है रैखिक या गैर–रैखिक दोनों अभिनितियों के लिए।

टिप्पणी

रैखिक अभिनति की उपयुक्तता (Fitting of Linear Trend)

मान लें कि सरल रेखा अभिनति दिए काल श्रेणी मूल्यों (y) और समय (t) के बीच निम्न समीकरण से ही जाती है :

$$y = a + bt \qquad \text{...(5.9)}$$

तब किसी दिए गए समय 't' के लिए, y का y_e प्राक्कलित मूल्य जो इस समीकरण द्वारा दिया जाता है :

$$y_e = a + bt \qquad \text{...(5.10)}$$

जैसा अध्याय–9 में विस्तार से चर्चा की गई है– रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण में न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा (5.9) में a और b के मूल्यों का प्राक्कलन किया जाता है ताकि प्राक्कलन के त्रुटियों के वर्गों का योगफल :

$$E = \Sigma(y - y_e)^2 = \Sigma(y - a - bt)^2, \qquad \text{...(5.11)}$$

न्यूनतम है, योग का चिन्ह दिए काल श्रेणी के मूल्यों के ऊपर लिया जाता है। यह प्रसामान्य समीकरण या न्यूनतम वर्ग समीकरण देता है a और b को प्राक्कलित करने के लिए जैसे :

$$\Sigma y = na + b\Sigma t \text{ और} \qquad \text{...(5.12)}$$

$$\Sigma ty = a\Sigma t + b\Sigma t^2 \qquad \text{...(5.13)}$$

जहाँ n काल श्रेणी जोड़ियों (t, y) की संख्या है। यह देखा जा सकता है समीकरण (5.12) प्राप्त किया जाता है समी. (5.9) में दोनों तरफ योगफल लेकर। समी. (5.13) प्राप्त किया जाता हैं समी. (5.9) को t से गुणा करके और दोनों तरफ श्रेणी के दिए मूल्य के ऊपर योग से।

(5.12) और (5.13) को a और b के लिए हल करके और इन मूल्यों को (5.9) में प्रतिस्थापित करने पर, हम अन्ततः सरल रेखा अभिनति प्राप्त करते हैं।

टिप्पणियाँ: 1. (5.12) और (5.13) समीकरणों को हल करने पर प्राप्त a और b के मूल्य न्यूनतम प्रदान करती हैं E का (5.11) में परिभाषित।

न्यूनतम वर्ग अभिनति रेखा प्राप्त की जाती है ताकि :

(i) $\Sigma(y - y_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma y = \Sigma y_e$

i.e. दिए मूल्यों का योग और अभिनति मूल्यों का योग बराबर हैं,

और (iii) $\Sigma(y - y_e)^2$ न्यूनतम है।

जहाँ y प्रेक्षित काल श्रेणी मूल्य है और y_e संगत अभिनति मूल्य है जो अभिनति रेखा (5.9) से दी जाती है।

2. सरल रेखा अभिनति का अर्थ हे मौसमी और चक्रीय उतार–चढ़ाव और अनियमित उच्चावचन से अलग, अभिनति मूल्य एक नियत मात्रा 'b' प्रति ईकाई समय की दर से बढ़ती या घटती है। इसलिए, अगर हमें एक काल श्रेणी के लिए वार्षिक आँकड़े दिए गए हैं, तब रेखा (5.9) में गुणांक 'b', जो और कुछ नहीं बल्कि अभिनति रेखा का ढलान (slope) है [*e.f.* एक रेखा का समीकरण $y = mx + c$;

के रूप में], वृद्धि की वार्षिक दर देती है। इसलिए, रैखिक अभिनति मूल्य एक श्रेणी बनाती है समान्तर श्रेणी में, समान अन्तर '*b*', जो अभिनति रेखा का ढलान है।

टिप्पणी

अभिनति रेखा को न्यूनतम वर्ग रीति से प्राप्त करने के बाद विभिन्न वर्षों के लिए अभिनति मूल्य प्राप्त की जा सकती है अभिनति समीकरण में समय t के मूल्यों को प्रतिस्थापित करके। यद्यपि, व्यवहारिक दृष्टिकोण से, एक अधिक सुविधाजनक विधि अभिनति मूल्यों को विभिन्न वर्षों के लिए प्रापत करने का है प्रथम वर्ष के लिए अभिनति रेखा के समीकरण से अभिनति मूल्य की गणना करना और तब 'b' के मूल्य को इसमें क्रमवार जोड़ना (क्योंकि अभिनति मूल्य A.P. में श्रेणी बनाती है समान अन्तर '*b*' के साथ)

द्वितीय स्तर (पाराबोलिक) अभिनति की उपयुक्तता (Fitting a Second Degree (Parabolic) Trend : द्वितीय स्तर पाराबोलिक अभिनति निम्न समीकरण से दी जाती है :

$$y = a + bt + ct^2 \qquad \ldots (5.14)$$

तब t के किसी दिए मूल्य के लिए, अभिनति मूल्य दी जाती है :

$$y = a + bt + ct^2$$

इसलिए, अगर y_e अभिनति मूल्य है संगत प्रेक्षित मूल्य y का, तब न्यूनतम वर्ग रीति के अनुसार हमें a, b और c के मूल्य (5.14) में प्राप्त करना है ताकि,

$$E = \Sigma(y - ye)^2 = \Sigma(y - a - bt - ct^2)^2$$

a, b और c के परिवर्तनों के लिए न्यूनतम है। इसलिए, प्रसामान्य या न्यूनतम वर्ग समीकरण a, b और c को प्राक्कलित करने के लिए दी जाती हैं :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= 0 = -2\Sigma(y - a - bt - ct^2) \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 0 = -2\Sigma(y - a - bt - ct^2) \\ \frac{\partial E}{\partial c} &= 0 = -2\Sigma(y - a - bt - ct^2) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Sigma y &= na + b\Sigma t + c\Sigma t^2 \\ \Sigma ty &= a\Sigma t + b\Sigma t^2 + c\Sigma t^3 \\ \Sigma t^2 y &= a\Sigma t^2 + b\Sigma t^3 + c\Sigma t^4 \end{aligned}$$

$$\ldots(5.15)$$

योग चिन्ह काल श्रेणी के मूल्यों के ऊपर ली जाती है।

(5.15) में प्रथम समीरण प्रापत की जाती है (5.14) के दोनों तरफ का योग करके। दूसरा समीकरण (5.14) को t से गुणा करके प्राप्त किया जाता है [दूसरे नियतांक b का गुणांक 5.14 में] तब दोनों तरफ योग करके। तीसरा समीकरण प्राप्त होता है (5.14) के दोनों तरफ t^2 से गुणा करके [c का गुणांक, 5.14 का तीसरा नियतांक] और तब श्रेणियों के मूल्यों के ऊपर योग करना।

दिए गए काल श्रेणी के लिए, मूल्य $\Sigma y, \Sigma ty, \Sigma t^2 y, \Sigma t, \Sigma t^2, \Sigma t^3$ और Σt^4 का परिकलन किया जा सकता है और समीरण (5.15) का हल a, b और c के लिए किया जा सकता है। a, b और c के इन मूल्यों के साथ, पाराबोलिक वक्र (5.14) उपयुक्त अभिनति वक्र है।

टिप्पणीः मूल्य बिन्दु का परिवर्तन : सामान्यतः, t के मूल्य विभिन्न वर्षों के लिए कहें, 1990, 1991. . . . 1999 और इसलिए $\Sigma t, \Sigma t^2, \Sigma t^3, \Sigma t^4$ इत्यादि की गणना, और इसलिए समीकरणों (5.12) और (5.13) का हल रैखिक अभिनति के लिए या समीकरण (5.15) का पाराबोलिक समीकरण के लिए बहुत जटिल और समय खपत करने वाली है। यद्यपि, यह टिप्पणी की जा सकती है कि काल श्रेणी में समय चर t का कोई परिमाण मूल्य नहीं है परन्तु इसका सिर्फ स्थैतिक या स्थानीय महत्व है। इसलिए, हम मूल बिन्दु में समय चर को परिवर्तित कर सकते हैं अपनी सुविधानुसार और इसका क्रमानुसार 0, 1, 2. . . . . इत्यादि मूल्य निर्धारित कर सकते हैं। शून्य (0) को निर्धारित समय अवधि **मूलबिन्दु की अवधि** कही जाती है। यह प्रसामान्य समीकरणों का कुछ हल सुगम बना सकती है। यद्यपि, बीजगणितीय गणना बहुत हद तक सरलीकृत की जा सकती है समय–चर t के मूल्य बिन्दु के समय को एक नए–चर x में परिवर्तित कर इस तरह से कि हम हमेशा पाते हैं $\Sigma x = \Sigma x^2 = 0$ । तकनीक नीचे वर्णित की गई है और सिर्फ प्रयुक्त हो सकती है अगर t समदूरी पर दिए गए हैं, कहें, अन्तराल-h पर,

अगर n, काल श्रेणी मूल्यों की संख्या विषम हैं, तब रूपांतरण है :

$$x = \frac{t - \text{मध्य मूल्य}}{\text{अन्तराल } (x)} \qquad \ldots(5.16)$$

इसलिए, अगर हमें वार्षिक आँकड़े दिए जाते हैं, कहें, 1990, 1991, 1992 .... 1996, i.e., n =7

$$x = \frac{t - \text{मध्य वर्षा}}{1} = t - 1993 \qquad \ldots(\text{x})$$

तल,

$t = 1990, 1991, 1992. . . . 1996$ (x) में रखने पर, हम पाते हैं क्रमशः $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ताकि $\Sigma x = \Sigma x^2 = 0$

अगर x सम है तब, रूपांतरण है,

$$x = \frac{t - (\text{दो मध्य मूल्यों का समान्तर माध्य})}{\frac{1}{2}\,(\text{अंतराल})} \qquad \ldots(5.17)$$

इसलिए, अगर हमें वार्षिक मूल्य दिए गए हैं कहें 1995, 1996, 1997 . . . .

2002 के लिए तब $x = \dfrac{t - \frac{1}{2}(1998 + 1999)}{\frac{1}{2}} = 2(t - 1998.5 = zt - 3997 \ldots (^{**})$

$(^{**})$ में $t = 1995, 1996. \ldots . 2000$ रखने पर, हम पाते हैं क्रमशः

$z = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ ताकि $\Sigma x = \Sigma x^3 = 0$

रूपांतरण (*) या (**) हमेशा देंगे $\Sigma x = 0 = \Sigma x^3$, और यह बीजगणितीय परिकलनों को बहुत हद तक घटा देती है प्रसामान्य समीकरणों के हल के लिए/उदाहरण के लिए, रैखिक अभिनति के लिए,

$$y = a + bx \qquad \ldots(5.18)$$

जहाँ x या तो (5.16) से या (5.17) से परिभाषित होती है n के सम या विषम होने के अनुसार, a और b के प्राक्कलनों के प्रसामान्य समीकरण हो जाते हैं:

$\Sigma y = na + b\Sigma x$ और $\Sigma xy - a\Sigma x + b\Sigma x^2$

परन्तु $\Sigma x = 0$ । इसलिए ये समीकरण देते हैं :

$$\Sigma y = na \text{ और } \Sigma xy = b\Sigma x^2 \Rightarrow a = \frac{\Sigma y}{n} \text{ और } b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \qquad \ldots(5.19)$$

a और b के इन मूल्यों के साथ (5.18) अमिनति रेखा का समीकरण देता है:

उसी तरह से, पाराबोलिक अभिनति के लिए:

$$y = a + bx + cx^2, \qquad \ldots(5.20)$$

a, b और c के प्राक्कलनों के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं

$\Sigma y = na + \Sigma bx + c\Sigma x^2$ $\qquad\qquad$ $\Sigma y = na + n\Sigma x^2 \ldots$(i)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$ जो घटकर हो जाता है $\Sigma y = na + n\Sigma x^2 \ldots$(ii)

$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$ $\qquad\qquad$ $\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + c\Sigma x^4 \ldots$(iii)

समीकरण (ii) b का मूल्य देती है $b = \dfrac{\Sigma xy}{z^2}$ और $\Sigma x = \Sigma x^3 = 0$ समीकरण (i) और (ii) भी एक साथ हल की जा सकती है a और c के लिए। a, b और c के इन मूल्यों के लिए वक्र (5.20) पाराबोलिक अभिनति वक्र की उपयुक्तता हो जाती है।

टिप्पणी

घातांक अभिनति की उपयुक्तता (Fitting of Exponential Trend)

घातांक वक्र दिया जाता है समीकरण द्वारा

$$y = ab^t \qquad \ldots(5.21)$$

दोनों तरफ का logrithm लेने पर, हम पाते हें

$$\log y = \log a + t \log b \Rightarrow Y = A + Bt \qquad \ldots(5.22)$$

जहाँ $Y = \log y; A = \log a$ और $B = \log b$ ...(5.23)

(5.22) एक सीधी रेखा अभिनति है Y और t के बीच। इसलिए, A और B के प्राक्कलनों के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं [c.f. समीकरण (5.12 और (5.13)]

$$\Sigma Y = nA + B\Sigma t \qquad \text{और} \qquad \Sigma tY = A\Sigma t + B\Sigma t^2$$

ये समीकरण A और B के लिए हल किए जा सकते हैं और (5.23) का प्रयोग कर अंततः हम पाते हैं :

$$a = Anti\log(A) \quad \text{और} \quad b = Anti\log(B)$$

a और b के इन मूल्यों के साथ, वक्र (5.21) सबसे अच्छा घातांक अभिनति वक्र हो जाता है।

टिप्पणीः जैसा पहले ही वर्णित है रैखिक और पाराबोलिक अभिनति की उपयुक्ता में, हम t में मूल बिन्दु को परिवर्तित कर नए चर x में ताकि $\Sigma x = 0$ और तब अभिनति वक्र $y = ab^x$ पर विचार करने पर, परिकलन बहुत सीमा तक घट जाता है।

अभिनति उपयुक्तता के गुण और सीमाएं न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा (Merits and Demeritations of Tread Fitting by Principles of Least Squares)

गुण : न्यूनतम वर्ग रीति सबसे लोकप्रिय और विस्तृत रूप से प्रयुक्त होने वाली विधि है तीन प्रेक्षणों के समुच्चय के गणितीय अवकलनों की उपयोगिता का।

(i) इसके विश्लेषणात्मक या गणितीय चरित्र की वजह से, यह विधि अन्वेषक की ओर से वस्तुनिष्ठ निर्णय या व्यक्तिगत अभिनति को पूर्णरूपेन खत्म कर देती है।

(ii) चल माध्यम विधि के विपरीत (विवरण (5.5) में) यह विधि हमें समर्थ बनाती है श्रेणी में दिए गए सभी समय अवधियों के लिए अभिनति मूल्य की गणना करने में।

(iii) अभिनति समीकरणों प्रयुक्त हो सकती है चर के मूल्यों का किसी अवधि t में प्राक्कलित या पूर्वानुमानित करने में भविष्य में या दिए गए श्रेणी के यहाँ तक की अन्तर अवधि में और भविष्य में कथित मूल्य भी काफी विश्वसनीय होते हैं।

(iv) न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा वक्र उपयुक्तता सिर्फ एक तकनीक है जो हमें समर्थ बनाती है प्रतिवर्ष वृद्धि दर प्राप्त करने में, वार्षिक समंक के लिए,

अगर रैखिक अभिनति उपयुक्त है। अगर हम रैखिक अभिनति उपयुक्त करते हैं $y = a + bx$ जहाँ x प्राप्त किया जाता है t से मूल बिन्दु के परिवर्तन से ऐसा कि $\Sigma x = 0$ तब वार्षिक समंक के लिए, वार्षिक वृद्धि दर b या $2b$ है वर्षों की संख्या क्रमशः सम या विषम के अनुसार।

अवगुणः (i) सबसे गंभीर सीमा इस विधि की है अभिनति वक्र की उपयोगिता के प्रकार का निर्धारण viz. क्या हमें रैखिक पाराबोलिक अभिनति उपयुक्त की जानी चाहिए या कोई दूसरा जटिल अभिनति वक्र। [यह विस्तार से (5.55) में वर्णित की गई है]। उपयुक्ता के लिए अभिनति के प्रकार की अभिकल्पना कोई अभिनति भी उत्पन्न कर सकती है।

(ii) एक अकेले नए प्रेक्षण का जोड़ भी आवश्यक कर देता है सभी परिकलनों को नए सिरे से किया जाना जो चल माध्य की स्थिति में ऐसा नहीं है।

(iii) इस विधि में अधिक परिकलन वांछित हैं और काफी टेढ़ा या समय खपत करने वाला है दूसरी विधियों की तुलना में। यह शायद कठिन है गैर–गणितीय (सामान्य जन) व्यक्ति के लिए समझने और प्रयोग करने में।

(iv) भविष्य कथन या पूर्वानुमान इस विधि पर आधारित सिर्फ दीर्घ अवधि परिवर्तन पर आधारित होती है, i.e., अभिनति और चक्रीय मौसमी और अनियमित उच्चावचनों को पूर्णरूपेण नजरअंदाज कर देती है।

(v) यह वृद्धि वक्रों की उपयोगिता के लिए प्रयुक्त नहीं हो सकती (संशोधित घातांक वक्र, गोमपर्ज और लॉजिस्टिक वक्र) जिसे ज्यादातर आर्थिक और व्यवसायिक काल श्रेणी पालन करते हैं।

न्यूनतम वर्ग रीति से वक्र उपयुक्तता की तकनीक को दर्शाने के लिए। अब हम कुछ संख्यात्मक उदाहरणों की चर्चा करेंगे।

उदाहरण 5.3 : निम्नलिखित समंक को रैखिक अभिनति उपयुक्त करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा। सत्यापित करें कि $\Sigma(y - ye) = 0,$ जहाँ ye, y का संगत अभिनति मूल्य है :

वर्ष :	1990	1992	1994	1996	1998
उत्पादन ('000 इकाईयों में) :	18	21	23	27	16

उत्पादन भी प्राक्कलित करें वर्ष 1999 के लिए।

हलः यहाँ n = 5, i.e., विषम। इसलिए, हम लोग बिन्दु को समय अवधि के मध्य में परिवर्तित करते हैं viz. वर्ष 1994।

माना कि $\quad x = t - 1994 \qquad \ldots(i)$

माना कि अभिनति रेखा y का (उत्पादन) x पर x हैं;

$$y = a + bx \text{ (मूल बिन्दु 1994)} \qquad \ldots(ii)$$

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.3: सीधी रेखा अभिनति की गणना

वर्ष (t)	उत्पादन ('000 इकाईयों में)	$x = t$-1994	x^2	xy	अभिनति मूल्य ('000 इकाईयों में) $(ye) = 21 + 0.1x$	$y - ye$ ('000 इकाईयों में)
1990	18	–4	16	–72	$21 - 0.4 = 20.6$	–2.6
1992	21	–2	4	–42	$21 - 0.2 = 20.8$	0.2
1994	23	0	0	0	$= 21.0$	2.0
1996	27	2	4	54	$21 + 0.2 = 21.2$	5.8
1998	16	4	16	64	$21 + 0.4 = 21.4$	–5.4
	$\Sigma y = 105$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 40$	$\Sigma xy = 4$		$\Sigma(y - ye) = 0$

प्रसामान्य समीकरण a और b की प्राक्कलित करने के लिए (ii) में हैं :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad \text{और} \qquad \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$$\Rightarrow 105 = 5a + b \times 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4 = a \times 0 + b \times 40$$

$$\Rightarrow a = \frac{105}{5} = 21 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0.1$$

(ii) में प्रतिस्थापित करने पर, सीधी रेखा अभिनति समीकरण दी जाती है :

$$y = 21 + 0.1x, \text{ (मूल बिन्दु 1994)} \qquad \ldots\text{(iii)}$$

x इकाईयाँ = 1 वर्ष और y = उत्पादन ('000 इकाईयों में)

$x = -4, -2, 0, 2$ रखकर (vii) में, हम अभिनति मूल्य (ye) प्राप्त करते हैं वर्ष 1990, 1992, - - - - 1998, जैसे अन्तिम से एक पहले स्तंभ सारणी क्र. 5.3 में दी गई है।

अन्तर (y-ye) सारणी के अन्तिम स्तंभ में परिकलित की जाती है। हमें,

$$\Sigma(y - ye) = -2.6 + 0.2 + 2.0 + 5.8 - 5.4 = 8 - 8 = 0, \text{ जैसा वांछित है।}$$

1999 के लिए प्राक्कलित उत्पादन : t = 1999 में (i) लेकर, हम पाते हैं x = 1999–1994 = 5 / x = 5 को (iii) में प्रतिस्थापित करने पर, 1999 के लिए प्राक्कलित उत्पादन दिया जाता है :

$$(ye)1999 = 21 + 0.1 \times 5 = 21 + 0.5 = 21.5 \text{ हजार इकाईयाँ}$$

उदाहरण 5.4: नीचे उत्पादन के आँकड़े (हजार टन में) दिए गए हैं एक चीनी कारखाने का :

वर्ष	:	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
उत्पादन	:	77	88	94	82	91	98	90

(i) न्यूनतम वर्ग रीति से सीधी रेखा करें और अभिनति मूल्यों को दर्शाएं।

(ii) उत्पादन में मासिक वृद्धि क्या है?

(iii) अभिनति प्राक्कलित करें।

हलः **सारणी क्र. 5.4**

वर्ष	उत्पादन ('000 टनों में)	$x = t$- 1992	xy	x^2	अभिनति मूल्य ('000 टनों में) $ye = 89 + 2x$
1989	77	–3	–231	9	83
1990	88	–2	–176	4	85
1991	94	–1	–94	1	87
1992	85	0	0	0	89
1993	91	1	91	1	91
1994	98	2	196	4	93
1995	90	3	70	9	95
	$\Sigma y = 623$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma xy = 56$	$\Sigma x^2 = 58$	$\Sigma ye = 623$

(i) माना y का सीधी रेखा अभिनति x पर दिया जाता है :

$$y = a + bx, \qquad \ldots(*)$$

जहाँ मूल बिन्दु जुलाई 1992 में और x इकाई = 1 वर्ष/प्रसामान्य समीकरण a और b को प्राक्कलित करने के लिए (*) में हैं :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \quad \text{और} \quad \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$$a = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{623}{7} = 89 \quad \text{और} \quad b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{56}{28} = 2 \; [\therefore \Sigma x = 0]$$

इसलिए, सीधी रेखा अभिनति दिया जाता है समीकरण :

$$y = 89 + 2x \text{ (मूल बिन्दु : 1992)} \qquad \ldots(**)$$

x इकाईयाँ = 1वर्ष और y = चीनी का वार्षिक उत्पादन ('000 टनों में) (**) में $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ में रखकर, हम अभिनति मूल्य ** पाते हैं वर्ष क्रमशः 1989 से 1995 तक और सारणी क्र. 5.4 के अन्तिम स्तंभ में दर्शाई गई है। यह सत्यापित किया जाता है कि $\Sigma y = \Sigma ye$, जैसा न्यूनतम वर्ग रीति से वांछित है।

(ii) (*) से यह स्पष्ट है कि अभिनति मूल्य एक नियत मात्रा 'b' ईकाईयों से प्रत्येक वर्ष बढ़ती है। इसलिए, उत्पादन में वार्षिक वृद्धि है 'b' ईकाईयों,

टिप्पणी

i.e., $2 \times 1000 = 2000$ टन

इसलिए, उत्पादन में मासिक वृद्धि $= \dfrac{2000}{12} = 166.67$ टन

(iii) गुणन मॉडल की परिकल्पना कर, अभिनति मूल्यों को विलुप्त कर दिया जाता है दिए मूल्यों (y) को अभिनति मूल्यों (ye) से भाग देकर। यद्यपि, अगर हम योग मॉडल की परिकल्पना करें, अभिनति विलुप्त मूल्य दिए जाते हैं (y - ye) से (देखें सारणी 5.4A) परिणामी मूल्य छोटी अवधि (चक्रीय/परिवर्तन धारित करते हैं और अनियमित परिवर्तन। चूँकि समंक वार्षिक हैं, मौसमी परिवर्तन अनुपस्थिति हैं।

सारणी क्र. 5.4A: अभिनति का विलुप्तीकरण

वर्ष	अभिनति विलुप्त मूल्य आधारित	
	योग मॉडल पर	गुणन मॉडल पर
1989	77 – 83 = - 6	77 ÷ 83 = 0.93
1990	88 – 85 = 3	88 ÷ 85 = 1.04
1991	94 – 87 = 7	94 ÷ 87 = 1.08
1992	85 – 89 = 4	85 ÷ 89 = 0.96
1993	91 – 91 = 0	91 ÷ 91 = 1.00
1994	98 – 93 = 5	98 ÷ 93 = 1.05
1995	90 – 95 = - 5	90 ÷ 95 = 0.95

उदाहरण 5.5: एक कम्पनी की बिक्री मिलियन रूपयों में वर्ष 1994–2001 के लिए नीचे की गई है

वर्ष	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
बिक्री	550	560	555	585	540	525	545	585

(i) रैखीय अभिनति समीकरण ज्ञात करें।

(ii) बिक्री का प्राक्कलन वर्ष 1993 के लिए करें।

(iii) सीधी रेखा अभिनति की ढलान ज्ञात करें।

(iv) क्या आँकड़े बढ़ती अभिनति दर्शाते हैं या गिरती अभिनति?

हल: इस स्थिति में, चूँकि x, जोड़ों की संख्या सम है viz. 8, हम मूल बिन्दु को समय में परिवर्तित करते हैं जो दो मध्य समयों का समान्तर माध्य है, viz. 1997 और 1998 और हम लेते हैं :

$$x = \frac{t - \frac{1997+1998}{2}}{\frac{1}{2}} 2(t-1997.5) = 2t - 3995 \qquad \ldots(i)$$

इसलिए अन्तराल लेने पर :

$t = 1997$, हम पाते हैं $x = 3994 - 3995 = -1$

$t = 1996$, हम पाते हैं $x = 3992 - 3995 = -3$

और इसी तरह/माना कि रैखिक अभिनति समीकरण y और x के बीच दी जाती है :

$$y = a + bx, x = 2(t - 1997.5) \qquad \ldots(ii)$$

जहाँ x इकाईयाँ $= \frac{1}{2}$ वर्ष ओर $y =$ वार्षिक बिक्री मिलियन रु. में

सारणी क्र. 5.5

वर्ष (t)	बिक्री (y)	$x = z$ 2(t-1997.5)	xy	x^2	अभिनति मूल्य (मिलियन में)
1994	550	–7	3850	49	555.63 –7×21=554.16
1995	560	–5	2800	25	555.63 –5×21=554.58
1996	555	–3	1665	9	555.63 –3×21=555.00
1997	585	–1	585	1	555.63 –1×21=555.42
1998	540	1	540	1	555.63 +1×21=555.84
1999	525	3	1575	9	555.63 +3×21=556.26
2000	545	5	2725	25	555.63 +5×21=556.68
2001	585	7	4095	49	555.63 +7×21=557.10
कुल	$\Sigma y = 4445$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma xy = 35$	$\Sigma x^2 = 166$	

(i) में a और b को प्राक्कलित करने के लिए y सामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

$$\Rightarrow \; 4485 = 8a + o \qquad \Rightarrow \; 35 = a \times 0 + 168b$$

$$\Rightarrow \; a = \frac{4485}{8} = 555.63 \qquad \Rightarrow \; b = \frac{35}{168} = 0.21$$

टिप्पणी

(ii) में प्रतिस्थापित करने पर, सीधी रेखा अभिनति दी जाती है समीकरण से :

$x = -7, -5, -3, -1, 3, 5,$ और 7 रखकर (iii) में, हम अभिनति मूल्य पाते हैं बिक्री का क्रमशः वर्ष 1994 से 2001 के लिए। अभिनति मूल्य सारणी क्र. 5.5 के अंतिम स्तंभ में दर्शाई गई हैं–

(ii) 1993 के लिए प्राक्कलित बिक्री हैं :

$(ye)1993 = 555.63 + 0.21 \times (-9) = 555.63 - 1.89 = 553.74$ मिलियम रु. में

(iii) सीधी रेखा अभिनति (iii) का ढलान दिया जाता है $b = 0.21$।

[c.f. एक सीधी रेखा का समीकरण का ढलान प्रतिच्छेद रूप है : $y = mx + c$] जहाँ m रेखा का ढलान है और c प्रतिच्छेद है जो इसके द्वारा रेखा पर बनाई गई है।

(iv) अभिनति रेखा का ढलान वृद्धि दर को प्रदर्शित करती है (बिक्री) प्रति ईकाई समय, i.e., वार्षिक। चूँकि ढलान b = 8.21 धानात्मक है, दिया गया समंक, बढ़ता हुआ अभिनति दर्शाती है।

टिप्पणियाँ: 1. अगर अभिनति रेखाओं का ढलान ऋणात्मक आता है, तब दी गई काल श्रेणी गिरती (घटती) हुई अभिनति दर्शाएगी।

2. b = 0.21 का अर्थ है वार्षिक वृद्धि रु. 0.21 मिलियन है, i.e., 2,10,000 कंपनी की बिक्री में।

उदाहरण 5.6: न्यूनतम वर्ग रीति से त्रैमासिक अभिनति मूल्य परिकलित करें निम्नलिखित त्रैमासिक समंक के पिछले पाँच वर्षों का जो नीचे दी गई है :

वर्ष	पहली तिमाही	दूसरी तिमाही	तीसरी तिमाही	चतुर्थ तिमाही
1994	60	80	72	68
1995	68	104	100	8
1996	80	116	108	96
1997	108	152	136	124
1998	160	184	172	164

हल: यहाँ हम लोग रैखिक अभिनति समीकरण औसत त्रैमासिक मूल्यों (Y) और समय चर x(वर्ष) के बीच आसंजित करेंगे।

सारणी क्र. 5.6: रैखिक अभिनति के लिए परिकलन

वर्ष (t)	त्रैमासिक मूल्यों का कुल	औसत त्रैमासिक मूल्यों का (Y)	$U = x$-1996	x^2	xy	अभिनति मूल्य (Ye = 112 + 244)
1994	280	70	–2	4	–140	112+24(-2)=64
1995	360	90	–1	1	–90	112+24(-1)=88
1996	400	100	0	0	0	112+24(0)=112
1997	520	130	1	1	130	112+24(1)=136
1998	680	170	2	4	340	112+24(2)=160
कुल		$\Sigma y = 560$	$\Sigma u = 0$	$\Sigma u^2 = 10$	$\Sigma xy = 240$	

रैखिक अभिनति समीकरण की उपयुक्तता के लिए प्रसामान्य समीकरण :

$$Y = a + bu, (u = x - 1996)$$

$$\begin{array}{l}\Sigma y = na + b\Sigma u \\ \Sigma uy = a\Sigma u + b\Sigma u^2\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{560}{5} = 112 \\ b = \dfrac{\Sigma uy}{\Sigma u^2} = \dfrac{240}{10} = 24 \end{array} \qquad \ldots(i)$$

$\therefore$ रैखिक अभिनति समीकरण है : $Y = 112 + 24u, (u = x - 1996) \ldots(ii)$

(ii) में $u = -2, -1, 0, 1$ और रखकर, हम अभिनति मूल्य पाते हैं (औसत त्रैमासिक मूल्यों के लिए) वर्ष क्रमशः 1994 से 1998 तक के लिए, सारणी क्र. 5.6 के अन्तिम स्तंभ में जैसा दिया गया है पृष्ठ . . . . पर

(i) और (ii) से, अभिनति मूल्य में वार्षिक वृद्धि $= b = 24$

$$\therefore \quad \text{त्रैमासिक अभिनति} \quad = \frac{24}{4} = 6$$

अब हम त्रैमासिक अभिनति मूल्य प्राप्त कर सकते हैं विभिन्न वर्षों के लिए जैसा नीचे वर्णित है।

सारणी क्र. 5.6 से, मध्य तिमाही के लिए अभिनति मूल्य (i.e., दूसरे तिमाही का आधा और तीसरे तिमाही का आधा) 1994 का 64 है। चूँकि त्रैमासिक वृद्धि 6 है, 1994 का दूसरे और तीसरे तिमाही के लिए अभिनति मूल्य हैं क्रमशः $64 - \frac{1}{2} \times 6 = 61$ और $64 + \frac{1}{2} \times 6 = 67$ । क्रमानुसार, 1994 के प्रथम तिमाही के लिए अभिनति मूल्य है $61 - 6 = 55$ और 1994 के चतुर्थ तिमाही के लिए है $67 + 6 = 73$। उसी तरह, हम अभिनति मूल्य विभिन्न तिमाहियों के लिए बचे हुए वर्षों का है पूर्ववर्ती मूल्यों में 6 जोड़कर, जैसा सारणी क्र. 5.6(A) में दिया गया है।

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.6A

वर्ष	पहली तिमाही	दूसरी तिमाही	तीसरी तिमाही	चतुर्थ तिमाही
1994	55	61	67	73
1995	79	85	91	97
1996	103	109	115	121
1997	127	133	139	145
1998	151	157	163	169

उदाहरण 5.7: एक कंपनी के बिक्री का रैखिक अभिनति 1995 में 7,50,000 रुपये हैं और यह 16,500 रु. प्रति वर्ष बढ़ता है।

(i) अभिनति समीकरण को लिखें।

(ii) अगर कंपनी जानती है कि 1998 में इसकी तिबक्री 10% कम होगी इसके पूर्वानुमानित अभिनति बिक्री से, 1998 का अनुमानित बिक्री ज्ञात करें।

हलः (i) कंपनी की बिक्री 1995 में 6,50,000 रु. है और वे एक रैखिक अभिनति प्रदर्शित करते हें 16,500 प्रति वर्ष की नियत वृद्धि से। इसलिए, कंपनी के बिक्री का वार्षिक अभिनति समीकरण है :

$$Yt = 6{,}50{,}000 + 16{,}500t \qquad \ldots(*)$$

[Yt : रुपये में वार्षिक बिक्री t ईकाईयाँ = 1 वर्ष; मूल बिन्दु; 1995]

(ii) अभिनति समीकरण (*) का प्रयोग कर, 1998 में कंपनी की अनुमानित बिक्री, i.e., जब $t = 3$, दी जाती है :

$(Yt) = (6{,}50{,}000 + 16{,}500 \times 3)$ रु. $= (6{,}50{,}000 + 49{,}500)$ रु. $= 6{,}99{,}500$ रु.

$\therefore$ 1998 में वास्तविक बिक्री $\left[6{,}99{,}500 - \frac{10}{100} \times 6{,}99{,}500\right] =$ रु. $(6{,}99{,}500 - 69{,}950) =$ रु. $6{,}29{,}550$ रु.

उदाहरण 5.8 : नीचे दिए गए समंक के लिए समीकरण के रूप

$Y = a + bx + cx^2$ को उपयुक्त करें :

X	:	1	2	3	4	5
Y	:	25	26	33	39	46

हलः यहाँ x, जोड़ों की संख्या विषम हैं। इसलिए, हम लेते हैं

$$t = x - (\text{मध्य मान}) = x - 3 \qquad \ldots(*)$$

ताकि t के मान x के संगत = 1, 2, 3, 4 और 5 है क्रमशः – 2, – 1, 0, 1, 2 मान लें कि द्वितीय डिग्री अभिनति समीकरण y और t के बीच है :

$$Y = a + bt + ct^2 \text{ जहाँ } t = x - 3 \qquad \ldots(**)$$

सारणी क्र. 5.7

x	y	$t = x–3$	t^2	t^3	t^4	t^y	$t^2 y$
1	25	–2	4	–8	16	–50	100
2	28	–1	1	–1	1	–28	28
3	33	0	0	0	0	0	0
4	39	1	1	–1	1	39	39
5	46	2	4	–8	16	92	184
कुल	$\Sigma y = 171$	$\Sigma t = 0$	$\Sigma t^2 = 10$	$\Sigma t^3 = 0$	$\Sigma t^4 = 34$	$\Sigma ty = 53$	$\Sigma t^2 y = 351$

(**) में a, b और c को प्राक्कलित करने के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं :

$$\begin{aligned} \Sigma y &= na + b\Sigma t + c\Sigma t^2 \\ \Sigma ty &= a\Sigma t + b\Sigma t^2 + c\Sigma t^3 \\ \Sigma t^2 y &= a\Sigma t^2 + b\Sigma t^3 + c\Sigma t^4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 171 &= 5a + 10c & \ldots\text{(i)} \\ 53 &= 10b & \ldots\text{(ii)} \\ 351 &= 10a + 34c & \ldots\text{(iii)} \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{53}{10} = 5.3$$

(i) को 2 से गुणा करने पर और तब (iii) से घटाने पर, हम पाते हैं

$$351 - 2 \times 171 = (10a + 34c - (10a + 20c)$$

$$\Rightarrow \ 14c = 351 - 342 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{9}{14} = 0.64$$

(i) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं;

$$a = \frac{171 - 10c}{5} = \frac{171 - 6.4}{5} - \frac{164.6}{5} = 32.92$$

a, b और c का मूल्य (**) में प्रतिस्थापित करने पर, हम अभिनति समीकरण पाते हैं :

$$Y = 32.92 + 5.3t + 0.64t^2; \text{ जहाँ } t = x - 3 \qquad \ldots\text{(iv)}$$

इसलिए, द्वितीय डिग्री अभिनति समीकरण y का x पर हो जाता है :

$$\begin{aligned} Y &= 32.92 + 5.3(x-3) + 0.64(x-3)^2 \\ &= 32.92 + 5.3x - 15.9 + 0.64(x^2 - 6x + 9) \\ &= (32.92 - 15.90 + 5.76) + (5.30 - 3.84)x + 0.64x^2 \\ &= 22.78 + 1.46x + 0.64x^{2z} \end{aligned}$$

टिप्पणी: अभिनति मूल्य y का x के लिए = 1, 2, 3, 4, और 5 की गणना (iv) का प्रयोग कर किया जा सकता है, जैसा सारणी क्र. 5.8 में दिया गया है।

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.8

x	y	$t = x$-3	t^2	5.3t	0.64t^2	अभिनति मूल्य Ye = 32.92+5.3t+0.64t^2
1	25	–2	4	–10.6	2.56	32.92–10.6+2.56 = 24.88
2	28	–1	1	–5.3	0.64	32.92–5.3 +0.64 = 28.26
3	33	0	0	0	0	32.92–0 +0 = 32.92
4	39	1	1	5.3	0.64	32.92+5.3 +0.64 = 38.86
5	46	2	4	10.6	2.56	32.92+10.6+256 = 46.08

अगा हम वास्तविक मूल्य (Y) और संगत अभिनति मूल्यों (Ye) की तुलना करें, हम अवलोकित करते हैं कि पाराबोलिक अभिनति (iv) दिए गए समंक का सबसे उपयुक्त आख्यान है।

उदाहरण 5.9: निम्नलिखित समंक के लिए द्वितीय स्तर पाराबोला उपयुक्त करें :

X :	1	2	3	4	5
Y :	1090	1220	1390	1625	1915

हल:

x	y	$u = x$-3	$v = \frac{Y-1450}{5}$	u^2	u^3	u^4	uv	u^2v
1	1090	–2	–72	4	–8	16	144	–288
2	1220	–1	–46	1	–1	1	46	–46
3	1390	0	–12	0	0	0	0	0
4	1625	1	35	1	1	1	35	35
5	1915	2	93	4	8	16	186	372
कुल		$\Sigma u = 0$	$\Sigma v =$-2	Σu^2=10	Σu^3=0	Σt^4=34	Σuv=411	Σu^2v=73

मान लें कि सबसे उपयुक्त v का u पर पाराबोल है :

$$v = a + bu + cu^2 \qquad \ldots\text{(i)}$$

जहाँ $u = x - 3$ और $V = \dfrac{Y-1450}{5}$ …(ii)

टिप्पणी

तब a, b और c को प्राक्कलित करने के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma v = na + b\Sigma u + c\Sigma u^2 \qquad -2 = 5a + 10c \qquad ...(iii)$$
$$\Sigma uv = a\Sigma u + b\Sigma u^2 + c\Sigma u^3 \quad \Rightarrow \quad 411 = 10b \qquad ..(iv)$$
$$\Sigma u^2 v = a\Sigma u^2 + b\Sigma u^3 + c\Sigma u^4 \qquad 73 = 10a + 34c \qquad ..(v)$$

$$\text{(iv)} \Rightarrow \quad b = \frac{411}{10} = 41.1 \qquad \ldots\text{(vi)}$$

(v) 2 × (iii) देता है : $73 + 4 = 34c - 20c = 14c \Rightarrow c = \frac{77}{14} = 5.5$ …(vii)

C का मूल्य (iii) मे ंप्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$5a = -2 - 10(5.5) = -57 \Rightarrow a = \frac{-57}{5} = -11.4 \qquad \ldots\text{(viii)}$$

(vi) से (vii) और (viii) से a, b और c का मूल्य (i) में प्रतिस्थापित कर, द्वितीय स्तर का y पर x का उपयुक्त पाराबोल हो जाता है :

$$\begin{aligned} Y - \frac{1450}{5} &= -11.4 + 41.1(x-3) + 5.5(x-3)^2 \\ &= -11.4 + 41.1x - 123.3 + 5.5(x^2 - 4x + 9) \\ &= 5.5x^2 + 8.1x - 85.2 \\ \Rightarrow \quad Y - 1450 &= 27.5x^2 + 40.5x - 426 \\ Y &= 27.5x^2 + 40.5x + 1024 \end{aligned}$$

उदाहरण 5.10: एक अभिनति अवकलन $y = a.b^x$ निम्नलिखित समंक के लिए आसंजित करें।

x	:	1	2	3	4	5
y	:	1.6	4.5	13.8	40.2	125.0

हलः हमें एक घातांक 9% (Exponential Curve) उपयुक्त करना है :

$$y = A.B^x \qquad \ldots\text{(i)}$$

दोनों तरफ Logarithm होने पर, हम पाते हैं

$$\log y = \log A + x \log B$$

$$\Rightarrow \qquad Y = a + bx \qquad \ldots\text{(ii)}$$

जहाँ $\quad Y = \log y; a = \log A$ और $b = \log B$ …(iii)

समीकरण (ii) एक सीधी रेखा चर y और x के बीच है और इसलिए a और b के प्राक्कलन के लिए प्रसामान्य समीकरण हैं :

$$\Sigma Y = na + b\Sigma x \quad \text{और} \quad \Sigma xY = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad \ldots\text{(iv)}$$

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.9: घातांक अभिनति की गणना

x	y	$Y = \log y$	xY	x^2	अभिनति मूल्य (Ye)
1	1.6	0.2041	0.2041	1	1.5573 ≈ 1.6
2	4.5	0.6532	1.3064	4	4.6361 ≈ 4.6
3	13.8	1.1399	3.4197	9	13.8017 ≈ 13.8
4	40.2	1.3042	6.4168	16	41.0877 ≈ 41.1
5	125.0	2.0969	10.4845	25	122.3180 ≈122.3
कुल		$\Sigma Y =$ 5.6983	ΣxY =21.8315	Σx^2=55	

समीकरण (iv) में प्रतिस्थापित कर, a और b के प्राक्कलन के लिए प्रासामान्य समीकरण हो जाते हैं :

$$5.6983 = 5a + 5b \quad \ldots\text{(v)} \quad \text{और} \quad 21.8315 = 15 + 55b \quad \ldots\text{(vi)}$$

(iv) – 3 × (v) देता है :

$$21.8315 - 3 \times 5.6983 = 55b - 45b \Rightarrow 10b = 4.7366 \Rightarrow b = \frac{4.7366}{10} = 0.4737$$

(v) में b का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$a = \frac{1}{5}(5.6983 - 15 \times 0.4737) = \frac{1}{5}(5.6983 - 7.1055)$$

$$= -\frac{1}{5} \times 1.4072 = -0.2814$$

इसलिए (iii) का इस्तेमाल कर, हम पाते हैं

$$B = anti\log(b) = Anti\log(0.4737) = 2.977$$

$$A = Anti\log(a) = Anti\log(-0.2814) = Anti\log(\bar{1}.7186) = 0.5231$$

(i) में A और B का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर, हम वांछित अभिनति मूल्य पाते हैं जो दिया जाता है :

$$y = 0.5231 + (2.977)^x \qquad \ldots\text{(vii)}$$

(vii) में x = 1, 2, 3, 4 और 5 रखने पर, हम अभिनति मूल्य पाते हैं जो तालिका 5.10 के अन्तिम कॉलम में दर्शाया गया है। उदाहरण के लिए,

$(Ye)_1 = 0.5231 \times 2.977 = 1.5573$: $(Ye)_2 = 0.5231 \times (2.977)^2$

$(Ye)_3 = 4.6361 \times 2.977 = 13.8017$ और इसी तरह आगे।

टिप्पणीः वास्तव में, हम देखते हैं कि (vii) द्वारा दिया गया अभिनति मूल्य गुणोत्तर शृंखला (G.P.) की श्रेणी का निर्माण करता है सामान्य दर (Common Ratio) $r = 2.977$ के साथ। इसलिए, अगर हम $x = 1$ के लिए अभिनति मूल्य की गणना करें, तब $x = 2, 3, 4$ इत्यादित के लिए अभिनति मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं इस मूल्य को सामान्य दर $r = 2.977$ से क्रमवार गुणा करके।

उदाहरण 5.11: आपको भारत की जनसंख्या का आँकड़ा दिया गया है निम्नः

जनगणना वर्ष (x) :	1911	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जन. (करोड़ में)(y):	25.0	25.1	27.9	31.9	36.1	43.9	54.7

उपर्युक्त समंक के लिए घातांक अभिनति $y = ab^*$ उपयुक्त करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा और अभिनति मूल्य ज्ञात करें। 1981 में जनसंख्या प्राक्कलित करें।

हल : यहाँ $x = 7$ विषम है। आगे, चूँकि जनसंख्या आँकड़े बराबर अन्तराल 10 वर्षों पर दिए गए हैं, हम परिभाषित करते हैं :

$$u = \frac{x - \text{मध्य मान}}{\text{अंतराल}} = \frac{x - 1941}{10} \qquad \text{...(i)}$$

और अभिनति वक्र का विचार करें : $y = a.b^u$ ...(ii)

दोनों तरफ Logarithm लेने पर :

$$\log y = \log a + u \log b \Rightarrow Y = A + Bu \qquad \text{...(iii)}$$

जहाँ $Y = \log y, A = \log a, B = \log b$

(iii) में A और B का प्राक्कलन करने के लिए प्रसामान्य समीकरण दिए जाते हैं (चूँकि $\Sigma u = 0$)

$$\Sigma Y = nA \text{ और } \Sigma uY = B\Sigma u^2 \Rightarrow A = \frac{\Sigma Y}{n} \text{ और } B = \frac{\Sigma uY}{\Sigma u^2} \qquad \text{...(iv)}$$

सारणी क्र. 5.10

वर्ष x	**जनसंख्या (करोड़ में) (y)**	$u = \frac{x-1941}{10}$	$Y = \log y$	u^2	uY	**अभिनति मूल्य (करोड़ में) $Ye = 33.6 \times (1.142)^u$**
1911	25.0	–3	1.3979	9	4.1937	25.76÷1.142 = 2.56
1921	25.1	–2	1.3997	4	2.7994	29.42÷1.142=25.76
1931	27.9	–1	1.4456	1	1.4456	33.60÷1.142=29.42
1941	31.9	0	1.5038	0	0	33.60
1951	36.1	1	1.5575	1	1.5575	33.6 1.142 =38.37
1961	43.9	2	1.6425	4	3.2850	38.37÷1.142=43.82
1971	54.7	3	1.7380	9	5.2140	43.82÷1.142=50.04
कुल	$\Sigma y =$ 244.6	0	$\Sigma y=$ 10.6850	Σu^2 =28	$\Sigma uy=$ 1.6178	$\Sigma Ye = 243.57$

टिप्पणी

(iv) का प्रयोग कर, हम पाते हैं

$$A = \frac{10.6850}{7} = 1.5264 \Rightarrow a = Anti\log(A) = Anti\log(1.5264) = 33.60$$

$$B = \frac{1.6178}{26} = 0.0578 \Rightarrow b = Anti\log(B) = Anti\log(0.0578) = 1.142$$

(ii) में a और b के मूल्यों का प्रतिस्थापन करने में, हम घातांक अभिनति समीकरण पाते हैं :

$$y = 33.60 \times (1.142)^u, \text{ जहाँ } \quad u = \frac{(x-1941)}{10} \qquad \ldots(v)$$

1911 से 1971 वर्षों के लिए अभिनति मूल्य (v) से प्राप्त किए जाते हैं।

क्रमशः $u = -3, -2, ----2, 3$ रखने पर उदाहरण के लिए,

$$(Ye)_x = 1941 = (Ye)u = 0 = 33.60$$

चूँकि अभिनति मूल्य (v) से दिए जाते हैं G.P. में हैं सामान्य अनुपात के साथ $r = b = 1.142$, 1951, 1961 और 1971 के लिए अभिनति मूल्य प्राप्त किए जाते हैं 33.60 को 1.142 से क्रमशः गुणा करके और उसी तरह 1931, 1921 और 1911 के लिए अभिनति मूल्य प्राप्त किए जाते हैं 33.60 को 1.142 से क्रमशः भाग देने पर। अभिनति मूल्य सारणी क्र. 5.10 के अन्तिम कॉलम में दी गई है।

1081 में जनसंख्या का प्राक्कलन : $x = 1981$ के लिए, हम पाते हैं

$$u = \frac{x-1941}{10} = \frac{1981-1941}{10} = 4$$

इसलिए (v) में $u = 4$ रखकर, हम 1981 का प्राक्कलित जनसंख्या पाते हैं जैसे :

$$(Ye)_{1981} = 33.6 \times (1.142)^4 = (33.6) \times (1.142)^3 \times 1.142$$

$$= (Ye)_{1971} \times 1.142 = 50.04 \times 1.142 = 57.15 \text{ (करोड़)}$$

या

$$(Ye)_{1981} = 33.6 \times (1.30416)^2 = 33.6 \times 1.700844 = 57.15 \text{ (करोड़)}$$

टिप्पणी: हमें पाना चाहिए $\Sigma y = \Sigma ye$ । जबकि, सारणी क्र. 5.10 में, $\Sigma y \neq \Sigma ye$ अन्तर की वजह है (ii) में नियतांक का आवर्तन, दो दशमलव अंकों तक।

उदाहरण 5.12: वार्षिक अभिनति समीकरण मक्खन के खपत ('000 कि.ग्रा. में) क्रमशः तीन जिलों I, II और III के लिए नीचे दी गई हैं। प्रत्येक जिला के लिए खपत के परिवर्तन के पैदर्न पर समीक्षा दें।

(i) $Yt = 200 - 0.012\ t$; (ii) $Yt = 225\ (1.015)$; (iii) $Yt = 250\ (0.978)$

टिप्पणी

हलः (i) जिला I में, वार्षिक अभिनति मॉडल है

$$Yt = 200 - 0.012\, t \qquad \ldots(24)$$

जो रैखिक है अभिकृति का $Yt = a+bt$ ...(24a)

1(a) में नियतांक 'b' नियत वार्षिक वृद्धि प्रतिबंधित करता है (वृद्धि अगर $b > 0$ और ऱ्हास अगर $b < 0$) मक्खन की खपत में

इसलिए, जिला I में, प्रारंभिक खपत (t = 0) मकखन का है a = 200,000 कि. ग्रा.। और यह घटती है 0.012 × 1000 कि.ग्रा. – 12 कि.ग्राम प्रति उत्तरवर्ती वर्ष में।

(ii) और (iii), जिला II और III में अभिनति मॉडल वृद्धि मॉडल के रूप में हैं :

$$Yt = Po(1+r)^t, \qquad \ldots(*)$$

जहाँ Po, Yt का प्रारंभिक मूल्य है (t = 0 पर) और r प्रति वर्ष वृद्धि दर है। (चक्रवृद्धि ब्याज सूत्र)

जिला II: अभिनति मॉडल है :

$$Yt = 225(1.015)^t = 225(1+0.015)^t \qquad \ldots(25)$$

इसलिए, जिला II में, मक्खन की प्रारंभिक खपत 250,000 कि.ग्रा. है और यह घटकन चक्रवृद्धि दर $r = 0.022 = 2.2\%$ प्रति वर्ष

जिला III: अभिनति मॉडल है :

$$Yt = 250(0.978)^t = 250(1-0.022)^t \qquad \ldots(26)$$

इसलिए, जिला III में, मक्खन की प्रारंभिक खपत 250,000 कि.ग्रा. है और यह घटती है चक्रवृद्धि ब्याज दर पर $r = 0.022 = 2.2\%$ प्रति वर्ष।

5.5.4 अभिनति समीकरण का संपरिवर्तन (Conversion of Trend Equation)

कोई अभिनति समीकरण

$$Ye = f(t) \qquad \ldots(*)$$

तीन अवयवों पर निर्भर करती है, viz.

(i) समय संदर्भ की मूल बिन्दु (The Origin of Time Reference),

(ii) समय की ईकाईयाँ, viz., वार्षिक, मासिक, साप्ताहिक, इत्यादि।

(iii) दिए मूल्यों की इकाईयाँ, i.e., काल श्रेणी मूल्य जो वार्षिक आँकड़े, मासिक आँकड़े, या मासिक आँकड़ों से सम्बन्धित हैं।

अभिमति समीकरण (*) पुर्नगणित की जा सकती हैं इन अवयवों को पुर्नपरिभाषित करने के बाद जो हमारी सुविधा के उपयुक्त हो। हम लोग नीचे दो बिन्दुओं की विवेचना करेंगे :

(i) मूल बिन्दु का विस्थापन (Shifting of Origin) और

(ii) वार्षिक अभिमति समीकरा को मासिक अभिनति समीकरण में रूपांतरण जब;

(a) y-मूल्य वार्षिक कुल योग में हैं और

(b) y-मूल्य मासिक औसतों में दिए गए हैं।

मूल बिन्दु का विस्थापन (Shifting of Origin) : जयादातर, अभिनति मूल्यों के बीच तुलनाओं को सुगत बनाने के लिए, यह अभिलषनीय हो जाता है एक काल श्रेणी में मूल बिन्दु को विस्थापित (संदर्भ का समय अवधि) करना कुछ सुविधाजनक बिन्दु तक। हम लोग तकनीक का वर्णन एक उदाहरण से करेंगे।

माना कि सीधी रेखा अभिनति समीकरण दी जाती है :

$$Ye = a + bx \qquad \ldots(5.27)$$

जहाँ मूल–बिन्दु : 1990 (पहली जुलाई) : x इकाईयाँ : एक वर्ष y इकाईयाँ वार्षिक कुल योग अभिनति समीकरण 5.27 में नियतांक 'a' अभिनति मूल्य है मूल बिन्दु के वर्ष का, viz. 1990, i.e.,

$$(ye)_{1990} = a$$

अब, अगर हम काल श्रेणी को परिवर्तित करना चाहते हैं कि इसका मूल बिन्दु, कहें 1995, i.e., हम नए अभिनति मूल बिन्दु को यहाँ से 5 वर्ष विस्थापित कर, तब नया अभिनति समीकरण प्राप्त किया जाता है x के मूल्य को $x + 5$ में परिवर्तित कर (5.27) में। तब नया अभिनति समीकरण हो जाता है :

$$Ye = a + b(x + 5), \qquad \ldots(5.28)$$

मूल बिन्दु : 1990 (पहली जुलाई) i.e., $x = 0$ जब $t = 1995$.

इसी तरह, अगर हम मूल बिन्दु को 1987 तक विस्थापित करते हैं, i.e., 3 वर्ष पीछे, नया अभिनति समीकरण हो जाता है :

$$Ye = a + b(x - 3) \qquad \ldots(5.29)$$

मूल बिन्दु : 1987 (पहली जुलाई) i.e., $x = 0$ जब $t = 1987$.

इस तरह, मूल बिन्दु का विस्थापन समीकरण (5.27) में सिर्फ नियतांक 'a' के मूल्य को प्रभावित करती है, जबकि समीकरण का ढलान 'b' वही रह जाती है।

वार्षिक अभिनति समीकरण का मासिक अभिनति समीकरण में संपरिवर्तन (Conversion of Annual Trend Equation to Monthly Trend Equation)

हम लोग फिर से वार्षिक अभिनति समीकरण (5.27) पर विचार करते हैं। समीकरण में ढलान 'b' वार्षिक वृद्धि y-के मूल्यों चूँकि औसत मासिक आँकड़ा प्राप्त किया जाता है कुल वार्षिक आँकड़ा को 12 से विभाजित करके, अभिनति समीकरण 5.25 औसत मासिक मूल्यों में संपरिवर्तित हो जाती है :

$$Ye = \frac{a}{12} + \frac{b}{12}x \qquad \ldots(5.30)$$

जहाँ, मूल बिन्दु : 1990 (पहली जुलाई) x इकाईयाँ : 1 वर्ष y इकाईयाँ : मासिक आँकड़े

उदाहरण के लिए, हम कह सकते हैं कि चीनी का औसत मासिक उत्पादन, कहें, चार वर्षों के लिए 1990, 1991, 1992 और 1993 के लिए क्रमशः y_1, y_2, y_3, y_4 हैं। इसलिए, x इकाईयाँ वर्ष हैं, यद्यपि हमें औसत मासिक मूल्य दिए गए हैं।

समीकरण (5.28) में x का गुणांक, viz., $b/12$ मासिक आधार पर y मूल्यों की वृद्धि प्रदर्शित करता है परन्तु एक वर्ष में एक महीने से दूसरे (परवर्ती) वर्ष के संगत महीने का। एक मासिक अभिनति समीकरण प्राप्त करने के क्रम मे जिसमें x मूल्य भी एक महीने की इकाईयों में हैं, और जेसे x की गुणांक अभिनति मूल्यों में महीने से महीने की वृद्धि प्रदर्शित करता है, समीकरण (5.30) में गुणांक $b/12$ आगे 12 से विभाजित होना चाहिए। इसलिए, मासिक अभिनति समीकरण हो जाता है :

$$y = \frac{a}{12} + \frac{b}{144}x \qquad \ldots(5.31)$$

जहाँ, मूल बिन्दु : 1990 (पहली जुलाई) : x इकाईयाँ : एक महीना : y इकाईयाँ : औसत मासिक मूल्य

इसलिए, अगर हम (5.31) में मूल बिन्दु को विस्थापित करना चाहते हैं प्रथम जुलाई से नवम्बर के मध्य, i.e., अभी से चार और आधे महीने, तब समीकरण (5.29) घटकर हो जाता है :

$$Ye = \frac{a}{12} + \frac{b}{144}(x + 4.5) \qquad \ldots(5.32)$$

जहाँ, मूल बिन्दु : 15 नवम्बर, 1990; x इकाईयाँ : एक महीना : y इकाईयाँ : औसत मासिक मूल्य

इसी तरह से, अगर मूल बिन्दु मासिक अभिनति समीकरण (5.31) में विस्थापित होकर मध्य मार्च तक जाती है, i.e., 3½ महीने पीछे, यह घटकर हो जाता है :

$$Ye = \frac{a}{12} + \frac{b}{144}(x - 3.5) \qquad \ldots(5.33)$$

टिप्पणी: वार्षिक अभिनति समीकरण (5.27) भी त्रैमासिक अभिनति समीकरण में घट जाती है, जो दी जाएगी :

$$Ye = \frac{a}{4} + \frac{b}{4 \times 12}.x \quad \Rightarrow Ye = \frac{a}{4} + \frac{b}{48}x \qquad \ldots(5.34)$$

जहाँ, मूल बिन्दु : 1990 (पहली जुलाई) : x इकाईयाँ : एक चौथाई : y इकाईयाँ : त्रैमासिक मूल्य।

टिप्पणी

उदाहरण 5.13 : एक वस्तु के लिए वार्षिक बिक्री ('000 रुपयों) का समीकरण प्रथम जुलाई, 2001, मूल बिन्दु के रूप में है $Y = 81.6 + 28.8\,x$

(i) अभिनति समीकरण निर्धारित करें मासिक अभिनति मूल्य देने के लिए मूल बिन्दु के रूप में 15 जनवरी, 2002 के साथ, और

(ii) अभिनति मूल्यों को परिकलित करें मार्च 2002 से अगस्त 2002 के लिए

हलः (i) दिया गया वार्षिक अभिनति समीकरण मासिक मूल्यों में परिवर्तित होकर हो जाता है :

$$Ye = \frac{81.6}{12} + \frac{28.8}{144}x \quad \Rightarrow Ye = 6.8 + 0.2x \qquad \textbf{...(*)}$$

[मूल बिन्दु : (पहली जुलाई) 2001 : x इकाई = 1 महीना; y इकाई = औसत मासिक बिक्री ('000 रु. में)**]**

हम मूल बिन्दु को जनवरी 2002 तक विस्थापित करना चाहते हैं, viz. जनवरी का मध्यें, i.e., 15 जनवरी, 2002। दूसरे शब्दों में, हमें मूल–बिन्दु, को 6½ महीना और वांछित समीकरण प्राप्त की जाती है x को $x + 6.5$ (*) में।

इसलिए, नया अभिनति समीकरण दिया जाता है :

$$Ye = 6.8 + 0.2(x + 6.5)$$
$$= 6.8 + 0.2x + 1.3$$
$$= 8.1 + 0.2x$$

मूल बिन्दु : 15 जनवरी, 2002; x इकाई = 1 महीना; y इकाई = औसत मासिक बिक्री ('000 रु. में)

सारणी क्र. 5.11: अभिनति मूल्यों की गणना

महीना	x	अभिनति मूल्य (Ye=8.1 + 0.2x)	Ye
मार्च	2	$8.1 + 0.2 \times 2 = 8.5$	8500
अप्रैल	3	$8.1 + 0.2 \times 3 = 8.7$	8700
मई	4	$8.1 + 0.2 \times 4 = 8.9$	8900
जून	5	$8.1 + 0.2 \times 5 = 9.1$	9100
जुलाई	6	$8.1 + 0.2 \times 6 = 9.3$	9300
अगस्त	7	$8.1 + 0.2 \times 7 = 9.5$	9500

उदाहरण 5.14: एक वस्तु के वार्षिक बिक्री के लिए अभिनति समीकरण पहली जुलाई 1991 के मूल बिन्दु के साथ है

$Ye = 96 + 28.8x + 4x^2$ (जहाँ x-इकाई = 1 वर्ष)

(i) मासिक अभिनति समीकरण को निर्धारित करें जनवरी 1992 को मूल बिन्दु जैसा

(ii) अभिमति मूल्यों की गणना करें अगस्त 1991 और मार्च 1992 के लिए

हलः (i) दिया गया वार्षिक अभिनति समीकरण मासिक मूल्यों में परिवर्तित होकर हो जाता है :

$$Ye = \frac{96}{12} + \frac{28.8}{12 \times 12}x + \frac{4}{12 \times 12 \times 12}x^2$$

$$\Rightarrow \quad Ye = 8 + 0.2x + 0.0023x^2 \qquad \ldots(*)$$

[मूल बिन्दु : पहली जुलाई 1991; x इकाई = 1 महीना; y इकाई = औसत मासिक बिक्री]

हम मूल बिन्दु को 1992 तक विस्थापित करना चाहते हैं viz. जनवरी का मध्य, i.e., 15 जनवरी 1992। दूसरे शब्दों में, हम मूल बिन्दु को 6½ महीना आगे विस्थापित करना चाहते हैं और वांछित समीकरण प्राप्त किया जाता है x को x + 6.5 में (*) परिवर्तित करके। इसलिए, वांछित अभिनति समीकरण हो जाता है :

$$\begin{aligned} Ye &= 8 + 0.2(x+6.5) + 0.0023(x+6.5)^2 \\ &= 8 + 0.2x + 1.3 + 0.0023(x^3 + 13x + 42.25) \\ &= 9.3 + 0.2x + 0.0023x^2 + 0.0299x + 0.0972 \\ &= 9.3972 + 0.2299x + 0.0023x^2 \qquad \ldots(**) \end{aligned}$$

[मूल बिन्दु + 15 जनवरी, 1992; x इकाई = 1 महीना; y इकाई = औसत मासिक बिक्री]

(ii) अगस्त 1991 के लिए अभिनति मूल्य, i.e., 15 अगस्त, 1991 प्राप्त किया जाता है

x = 1.5 लेकर (*) में

$$(Y)_{\text{अगस्त } 1991} = 8 + 0.2 \times 1.5 + 0.0023 \times (1.5)^2 = 8 + 0.3 + 0.005 = 8.305$$

1992 के लिए अभिनति मूल्य, i.e., (15 मार्च, 1992) $x = 2$ लेकर (*) में

$$\begin{aligned} (\mathrm{Y})_{\text{मार्च } 1992} &= 9.3972 + 0.2299 \times 2 + 0.0023 \times 2^2 \\ &= 9.3972 + 0.4598 + 0.0092 = 9.8662 \end{aligned}$$

या हम मार्च 1992 के लिए भी अभिनति मूल्य प्राप्त कर सकते हैं (15 मार्च, 1992)

x = 8.5 लेकर (*) में

उदाहरण 5.15: निम्नलिखित एक मासिक अभिनति समीकरण है :

$$Ye = 20 + 2x$$

टिप्पणी

[मूल बिन्दु : जनवरी, 1992; x इकाई = 1 महीना; y इकाई = मासिक बिक्री ('000 रु. में)]

इसे वार्षिक अभिनति समीकरण में संपरिवर्तित करें।

हल: मासिक अभिनति समीकरण (*) को वार्षिक अभिनति समीकरण में परिवर्तित करने के लिए, हमें सबसे पहले मूल बिन्दु को मध्य जनवरी 1992 से वर्ष 1992 के मध्य, i.e., पहली जुलाई, 1992 में विस्थापित करना चाहिए। दूसरे शब्दों में, हमें x के मूल्य को 5.5 से बढ़ा देना चाहिए।

इस तरह, दिया समीकरण (*) देता है :

$$Ye = 20 + 2\ (x + 5.5)$$

$$31 + 2x = a + bx, \text{ (कहें), [मूल बिन्दु : पहली जुलाई, 1992]}$$

जहाँ Ye मासिक बिक्री है और x ईकाई = 1 महीना

वार्षिक अभिनति समीकरण प्रापत करने के लिए, हम 'a' को 12 से गुणा करेंगे और 'b' को 144 से (ii) में, इस तरह देते हुए :

$$Ye = 12 \times 31 + 144 \times 2x \qquad \Rightarrow Ye = 372 + 288x$$

जहाँ मूल बिन्दु : पहली जुलाई, 1992; x इकाई = 1 वर्ष; y इकाई = वार्षिक बिक्री ('000 रु. में)

5.5.5 चल माध्य की रीति (Method of Moving Average)

चल माध्य बहुत सरल और लचीली विधि है अभिनति को मापने की। इसमें चल मध्यों की श्रेणी प्राप्त की जाती है, (समान्तर माध्य), अनुक्रमित अतिव्यापन काल श्रेणियों के समूहों या खण्ड़ों का। औसतन विधि दिए गए समंक में उतार–चढ़ाव और उच्चवचनों को सरलित करती हैं। चल माध्य अभिव्यक्त होती है एक नियतांक द्वारा जो चल माध्य अवधि या विस्तार कहलाती है। इसलिए, अवधि 'm' की चल माध्य 'm' अतिव्याप्ति मूल्यों एक समय के अनुक्रमिक औसतों की श्रेणी है, पहले दूसरे और तीसरे मूल्यों से शुरू होकर आगे के मूल्य इस तरह, $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5,$ काल श्रेणी मूल्यों की विभिन्न कालावधियों के लिए, चल माध्य (M.A.) मूल्य 'm' अवधि कही जाती है :

$15t$ M.A. $\dfrac{Y_1 + y_2 + \ldots.. + y_m}{m}$, 2^{nd} M.A. $= \dfrac{y_1 + y_3 + \ldots. + y_{m+1}}{m}$ और इसी तरह आगे।

हम दो स्थितियों की विवेचना करेंगे।

स्थिति (i) जब अवधि विषम है: अगर चल माध्य की अवधि 'm' विषम है, तब चल माध्यों की अनुक्रमिक संगत समय अन्तरालों के मध्यमानों के विरुद्ध रक्खी जाती है। उदाहरण के लिए, अगर $m = 5$, पहला चल माध्य मूल्य मध्य अवधि के विरुद्ध रखी जाती है, i.e., 3श, दूसरा M.A. मूल्य समय अवधि 4 के विरुद्ध रखी जाती है और इसी तरह आगे।

स्थिति (ii) जब अवधि सम है: अगर M.A. की अवधि 'm' सम है, तब दो मध्य अवधियाँ हैं और M.A. मूल्य दो समय अन्तरालों जिसे यह तय करता है के बीच रखा जाता हैं स्पष्टतः, इस स्थिति में M.A. मूल्य दिए काल श्रेणी की अवधि के साथ सन्निपाती होगी और एक प्रयास की जाती है उन्हें वास्तविक समंक के साथ समकालीनता निश्चित करने के लिए चाल माध्यों का दो–अवधि औसत लेकर और उन्हें संगत समय अवधियों के बीच उन्हें रखकर। यह तकनीक अभिमुख बिन्दु (Centring) कहलाती है और संगत चल माध्य मूल्य केंद्रीयकृत चल माध्य कहलाती है। विशेष रूप में, अगर अवधि M=4, पहला चल माध्य मूल्य 2nd और 3rd समय अन्तराल के मध्य के विरुद्ध रखी जाती है; दूसरा चल माध्य मूल्य 3rd और 4th थे समय अवधियों के बीच रखा जाता है और इसी तरह आगे। ये मूल्य दिए जाते हैं :

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \hat{y}_2 \frac{1}{4}(y_2 + y_3 + y_4 + y_5), \hat{y}_3 = \frac{1}{4}(y_3 + y_4 + y_5 + y_6) \quad \ldots(5.33)$$

और इसी तरह आगे। केन्द्रीयकृत चल माध्य प्राप्त किए जाते हैं 2 अवधि M.A. लेकर $\bar{y}_{1,} \bar{y}_{2,} \bar{y}_{3,}$ का और इसी तरह आगे।

इस तरह,

$$\text{प्रथम केंद्रीयकृत M.A.} = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \frac{1}{4}(y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5)\right] \quad \ldots(5.34)$$

$$\text{उसी तरह से, दूसरा M.A.} = \frac{1}{8}\left[(y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6)\right] \quad \ldots(5.34a)$$

और इसी तरह आगे। ये केंद्रीयकृत चल माध्य समय अवधियों 3, 4, 5 .... के विरुद्ध रखी जाती हैं और इसी तरह आगे। समीकरण (5.34) भारित औसत समझे जाते हैं y_1, y_2, y_3, y_4 और y_5 के, संगत भार 1, 2, 2, 2, 1 के साथ, i.e.,

$$\overline{Y} = w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3 + w_4y_4 + w_5y_5 - \frac{\Sigma wy}{\Sigma w}, \quad \text{जहाँ} \quad w_1 = w_5 = 1$$

और $w_2 = w_3 = w_4 = 2$

इसी तरह की व्याख्या (5.34a) को दी जाती है।

(5.34) और (5.34a) से हम देखते हैं कि अवधि 4 का केंद्रीयकृत चल माध्य समतुल्य है अवधि 5 के भारित चल माध्य का, संगत भार होते हैं 1, 2, 2, 2, 1 [इस परिणाम के सत्यापन के लिए, उदाहरण 5.2 देखें, पृष्ठ...242]

चल माध्य मूल्य समय के विरुद्ध आलेखित अभिनति वक्र देता है। M.A. विधि में प्राथमिक समस्या है अवधि 'm' का निर्धारण और यह टिप्पणी 3 नीचे में वर्णित है।

टिप्पणियाँ: 1. चल माध्य और रैखिक अभिनति (Moving Average and Linear Trend) : अगर काल श्रेणी समंक कोई परिवर्तन नहीं धारण करती है अभिनति के अतिरिक्त जिसमें जब एक आलेख पर आलेखित की जाती है एक सीधी रेखा वक्र देती है, तब चल माध्य श्रेणी को प्रस्तुत करेगी। निम्नलिखित उदाहरण बिन्दु को स्पष्ट कर देगी।

वर्ष (t)	मूल्य (y)	त्रि-वर्षीय M.A.	पाँच-वर्षीय M.A.	7-वर्षीय M.A.
1	10	—	—	—
2	14	14	—	—
3	18	18	18	—
4	22	22	22	22
5	26	26	26	26
6	30	30	30	30
7	34	34	34	34
8	38	38	38	38
9	42	42	42	—
10	46	46	—	—
11	50	—	—	—

इस तरह अभिनति मूल्य, मूल्य 3, 5, 7 स्तर के चल माध्य और आगे वास्तविक श्रेणी के साथ सन्निपाती हैं।

नोट कीजिए कि इस स्थिति में, दिए गए मूल्य एक रैखिक अभिनति दर्शाती हैं

$$y = 6 + 4t.$$

2. चल माध्य और वक्र रेखीय अभिनति (Moving Average and Curve linear Trend) : अगर समंक कोई दोलनकारी या अनियमित परिवर्तन नहीं धारण करती है और जिसे सिर्फ साधारण अभिनति और काल श्रेणी का कालिक–चित्र (ग्राफ) है जो वक्र देती है जो आधार से अवतल (उत्तल) है, तब अभिनति मूल्य चल माध्य द्वारा प्रगणित दूसरा वक्र दिखाई दिए वक्र के समानान्तर परन्तु इससे ऊपर (नीचे)। दूसरे शब्दों में, अगर समंक में कोई परिवर्तन नहीं है सिवाय अभिनति के जो वक्र रेखीय है, तब चल माध्य मूल्य, जब आलेखित होती है, वही वक्र रेखीय पैटर्न दर्शाएगी परन्तु दिए कालिक–चित्र से कुछ दूर। आगे, जितनी अधिक अवधि होगी चल माध्य की, अभिनति वक्र उतनी दूर होगी वास्तविक कालिक–चित्र से। दूसरे शब्दों में, अभिनति मूल्यों और वास्तविक मूल्यों के बीच अन्तर बड़ी होती जाती है जैसे चल माध्य की अविध बढ़ती है।

3. चल माध्य की अवधि (Duration of Moving Average) : चल माध्य सम्पूर्णता से दोलायमान परिवर्तन को हटा देती है अगर :

(i) चल माध्य की अवधि दोलायमान परिवर्तन की अवधि के बराबर या अपवर्त्य है जबकि वे अवधि या आयाम में नियमित हैं, और

(ii) अभिनति रैखिक है या लगभग ऐसा है।

इसलिए, चल माध्य विधि से अभिनति मूल्यों को प्रगणित करने के लिए, चल माध्य की अवधि या विस्तार समान होनी चाहिए श्रेणी में चक्रीय परिवर्तनों की अवधि के। यद्यपि, चल माध्य की अवधि चक्रीय परिवर्तन की अवधि से कम या अधिक है तब यह (M.A.) इनके प्रभाव को सिर्फ कम कर देगी।

अधिकतर, हम काल श्रेणी समंक से दो चार होते हैं जो नियमित चक्रीय परिवर्तन को नहीं दर्शाती है विभिन्न चक्रों को प्रकाशित करेगी परिवर्तित अवधि के साथ जो निर्धारित की जा सकती है कालिक–चित्र को आलेखित कर दिए काल श्रेणी समंक का और समय की दूरियों को विभिन्न शीर्षों के बीच अवलोकित करके। इस स्थिति में, चल माध्य की अवधि ली जाती है विभिन्न चक्रों को औसत अवधि से जो समंक में उपस्थित है।

4. चल माध्य और बहुपद अभिनति (Moving Average and Polynomial Trend) : अधिकतर आर्थिक और व्यापारिक काल श्रेणियों के अभिनति विरले ही रेखीय होती है और क्रमानुसार, अगर अभिनति वक्र रेखीय है, चल माध्य मूल्य अभिनति का विरूपित तस्वीर पेश करेगी। इस स्थिति में सही अभिनति मूल्य प्राप्त की जाती है दिए मूल्यों का भारित चल माध्य लेकर। उदाहरण के एिल, एक चल माध्य के लिए भार (5, 2), i.e., एक परवलय अभिनति के लिए 5 के विस्तार का चल माध्य दिए जाते हैं :

$$\left(\frac{-3}{35}, \frac{12}{35}, \frac{17}{35}, \frac{12}{35}, \frac{-3}{35}\right) \text{ द्वारा} \qquad \ldots(*)$$

टिप्पणी

इसलिए, श्रेणी $y_1, y_2\ y_3 \ldots\ldots\ldots$ के लिए प्रथम चल माध्य दिए जाते हैं :

$\frac{1}{35}(-3y_1 + 12y_2 + 17y_3 + 12y_4 - 3y_5)$ से यह अवलोकित किया जा सकता है कि :

(i) M.A. के लिए भार मध्य मूल्यों के सममित है, और

(ii) भारों का योगफल इकाई है।

5. अभिनति उच्चावचनों पर चल माध्य का प्रभाव (Effect of Moving Average or Irregular Fluctuations) : चल माध्य वास्तविक समंक में उपस्थित उतार–चढ़ाव को सरलित करती है और, इसलिए, अनियमित उच्चावचनों की तीव्रता को कुछ सीमा तक घटाती है। यह उन्हें पूर्णरूप से खत्म नहीं कर सकती है। यद्यपि, जितनी अधिक अवधि है चल माध्य की (एक खास सीमा तक); घटने की मात्रा उनकी तीव्रता में उतनी ही अधिक है। इसलिए, अनियमित परिवर्तनों की घटने के दृष्टिकोण से, लम्बी अवधि चल माध्य की अनुशंसा की जाती है। यद्यपि, हमने टिप्पणी 2 में संकेतित किया है, कि चल माध्य की जिसकी बड़ी अवधि, वास्तविक मूल्य से उतनी ही अधिक दूरी पर अभिनति मूल्य। दूसरे शब्दों में, चल माध्यों की लम्बी अवधि में संभावना है कि वह अभिनति मूल्यों का विरूपित तस्वीर दे। क्रमानुसार, समझौता के तौर पर, चल माध्य की अवधि ना तो बहुत बड़ी होनी चाहिए ना ही बहुत छोटी। चल माध्य की अनुकूलतम अवधि वह है जो काल श्रेणी में चक्र की अवधि से सन्निपाती है या अपवर्त्य है क्योंकि यह चक्रीय परिवर्तन को पूर्णरूप से खत्म कर देगी, अनियमित परिवर्तन को घटा देगी और, इसलिए, अभिनति का सबसे बेहतर संभव मूल्य देगी।''

अब हमलोग संख्यात्मक प्रश्नों की विवेचना करेंगे चाल माध्य विधि से अभिनति मूल्यों को प्राप्त करने की तकनीक का वर्णन करने के लिए।

उदाहरण 5.16: परिकलित करें (i) त्रिवर्षीय (ii) पंचवर्षीय, चल माध्य निम्नलिखित समंक के लिए और परिणामों पर समीक्षा दें।

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
y :	242	250	252	249	253	255	251	257	260	265	262

टिप्पणी

हलः सारणी क्र. 5.12 में त्रिवर्षीय और पंचवर्षीय चल माध्य विधियाँ दी जाती हैं :

सारणी क्रः 5.12ः तीन और पंचवर्षीय M.A. मूल्य का प्रगणन

वर्ष (1)	*y* (2)	तीन वर्षीय चल योगफल (3)	तीन वर्ष चल (माध्य) (अभिनति मूल्य) (4)=(3) ÷ 3	पंचवर्षीय चल योगफल (5)	पंचवर्षीय M.A. अभिनति मूल्य (6)=(5) ÷ 5
1990	242	-	-		
1991	250	744	248.0	1246	249.2
1992	252	751	250.3	1259	251.8
1993	249	754	251.3	1260	252.0
1994	253	757	252.3	1265	253.0
1995	255	759	253.0	1276	255.2
1996	251	763	254.3	1288	257.6
1997	257	768	256.6	1295	259.0
1998	260	782	260.7		
1999	265	787	262.3		
2000	262	-	-		

समीक्षाः जैसे M.A. की अवधि बढ़ती है, अभिनति मूल्य वास्तविक मूल्यों से दूर भागती है।

उदाहरण 5.17ः चल माध्य विधि से अभिनति मूल्यों को परिकलित करें, चार वर्षीय चक्र की परिकल्पना करते हुए, निम्नलिखित समंक से भारत में चीनी उत्पादन से संबंधित :

वर्ष	चीनी उत्पादन (लाख टन)	वर्ष	चीनी उत्पादन (लाख टन)
1971	37.4	1977	48.4
1972	31.1	1978	64.6
1973	38.7	1979	58.4
1974	39.5	1980	38.6
1975	47.9	1981	51.4
1976	42.6	1982	84.4

हलः चूँकि हमें दिया गया है कि समंक चार वर्षीय चक्र का पालन करती है, हम लोग अभिनति, मूल्यों को प्रगणित करेंगे अवधि 4 का चल माध्य प्रयोग कर, जैसा सारणी क्र. 5.13 में दर्शाया गया है।

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.13: चार वर्षीय चल माध्यों का प्रगणन

वर्ष (1)	चीनी उत्पादन (लाख टनों में) (2)	चार वर्षीय चल योगफल (3)	चार वर्ष चल (माध्य) (4) = (3) ÷ 4	2 अवधि चल योगफल स्तंभ (5)	केन्द्रीय चल माध्य अभिनति मूल्य (6) = (5) ÷ 2
1971	37.4				
1972	31.1				
		←146.7	36.675		
				←75.925	37.99
1973	38.7				
		←157.2	39.300		
				←81.475	40.74
1974	39.5				
		←168.7	42.175		
				←66.455	43.39
1975	47.9				
		←178.4	44.600		
				←95.475	47.74
1976	42.6				
		←203.5	50.875		
				←104.375	53.19
1977	48.4				
		←214.0	53.500		
				←106.000	55.00
1978	64.4				
		←210.0	52.500		
				←105.750	52.88
1979	58.4				
		←213.0	53.250		
				←111.450	55.73
1980	38.6				
		←232.8	58.200		
1981	51.4				
1982	84.4				

उदाहरण 5.18: चल माध्य की अवधि निर्धारित करें निम्नलिखित समंक के लिए और उस अवधि के लिए चल माध्य परिकलित करें :

टिप्पणी

वर्ष	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
मूल्य	:	130	127	124	135	140	132	129	127	145	158	153	146	145	164	170

हल: चूँकि दिए समंक का शीर्ष वर्ष 1, 5, 10 और 15 वर्षों पर होता है, समंक एक नियमित चक्रीय, परिवर्तन दर्शाती है अवधि 5 के साथ। इसलिए, चल माध्य की अवधि अभिनति मूल्यों को निर्धारित करने के लिए भी 5 है viz. चक्रीय परिवर्तन की अवधि।

सारणी क्र. 5.14: पंचवर्षीय चल माध्य का प्रगणन

वर्ष (1)	मूल्य (2)	पंचवर्षीय चल योगफल (3)	पंचवर्षीय M.A. (अभिनति मूल्य) (4)=(3) ÷ 5
1	130	-	-
2	127	-	-
3	124	656	131.2
4	135	658	131.6
5	140	660	132.0
6	132	663	132.6
7	129	673	134.6
8	127	691	138.2
9	145	712	142.4
10	158	729	145.8
11	153	747	149.4
12	146	766	153.2
13	145	778	155.6
14	164	-	-
15	170	-	-

उदाहरण 5.19: चल माध्य क्या है? काल श्रेणी के विश्लेषण में इसका क्या प्रयोग है?

दी गई संख्याएं 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2 अवधि 3 के भारित चल माध्य लिखें भार हैं 1, 4, 1 अवधि 3 के।

टिप्पणी

सारणी क्र. 5.15: भारत M.A. का प्रगणन

वर्ष (1)	**भारित चाल योगफल अवधि 3 का (2)**	**भारित M.A. अवधि 3 का (3) = (2) ÷ 6**
2		
6	$1\times2+4\times6+1\times1 = 27$	$27\div6 = 4.5$
1	$1\times6+4\times6+1\times1 = 27$	$15\div6 = 2.5$
5	$1\times2+4\times6+1\times1 = 27$	$24\div6 = 4.0$
3	$1\times5+4\times6+1\times1 = 27$	$24\div6 = 4.0$
7	$1\times3+4\times6+1\times1 = 27$	$33\div6 = 5.5$
2		

हल: भारित चल माध्य प्राप्त की जाती है भारित चल योगफलों को भारों के योग से भाग देकर viz; $1 + 4 + 1 = 6$.

इसलिए,

$$\text{भारित} \quad \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{\Sigma WX}{6} \qquad \ldots(*)$$

भारित चल माध्य मूल्य सारणी क्र. 5.15 के अन्तिम कॉल में प्राप्त की जाती है।

उदाहरण 5.20: निम्नलिखित अवलोकनों की श्रेणी के लिए, सत्यापित करें कि चार वर्षीय केन्द्रित चल माध्य पंचवर्षीय चल माध्य के बराबर है भार क्रमशः 1, 2, 2, 2, 1 के साथे।

वर्ष	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
वार्षिक बिक्री ('000 रु.)	2	6	1	5	3	7	2	6	4	8	3

टिप्पणी

हलः

सारणी क्र. 5.15A: चार वर्षीय चल माध्यों का प्रगणन

वर्ष (1)	वार्षिक बिक्री ('000 रु.) (2)	चार वर्षीय चल योगफल (3)	चार वर्ष चल M.A. (4)=(3) ÷ 4	2–बिन्दु चाल योगफल कॉलम 4 का (5)	चार वर्षीय चल योगफल केन्द्रीयकृत (6)=(5) ÷ 2
1989	2				
1990	6				
		←14	3.50		
				←7.25	3.63
1991	1				
		←15	3.75		
				←7.75	3.88
1992	5				
		←16	4.00		
				←8.25	4.13
1993	3				
		←17	4.25		
				←8.75	4.38
1994	7				
		←18	4.50		
				←9.25	4.63
1995	2				
		←19	4.75		
				←9.75	4.88
1996	6				
		←20	5.00		
				←10.25	5.13
1997	7				
		←21	5.25		
1998	8				
1999	3				

पहले उदाहरण के समान, भारित औसत प्राप्त की जाती है भारित योगफल को भारों के योग से भाग देकर, i.e., सूत्र का प्रयोग करे,

भारित M.A. $= \dfrac{\Sigma wy}{\Sigma w}$, जहाँ $\Sigma w = 1+2+2+2+1 = 8$

सारणी क्र. 5.15B: पंचवर्षीय भारित M.A. मूल्यों का प्रगणन

वर्ष (1)	बिक्री '000 रु. (y) (2)	पंचवर्षीय भारित चाल योगफल (3)	पंचवर्षीय भारित चाल माध्य (3) = (2) ÷ 6
1989	2		
1990	6		
1991	1	1×2+2(6+1+5)+1×3 = 29	3.63
1992	5	1×6+2 (1+5+3) 1×+7 = 31	3.88
1993	3	1×1+2 (5+3+7) 1×+2 = 33	4.13
1994	7	1×5+2 (3+7+2) 1×+6 = 35	4.38
1995	2	1×3+2 (7+2+6) 1×+4 = 37	4.63
1996	6	1×7+2 (2+6+4) 1×+8 = 39	4.88
1997	4	1×2+2 (6+4+8) 1×+3 = 41	5.13
1998	8		
1999	3		

सारणी क्र. 5.15A और B से हम देखते हैं कि चार वर्षीय केन्द्रीयकृत चल माध्य बराबर है पंचवर्षीय भारित चल माध्यों के भार क्रमशः 1, 2, 2, 2, 1 के साथ।

टिप्पणी: यह परिणाम यर्थाथ है, सामान्यतः किसी भी काल श्रेणी के लिए। यहाँ हमने तुरन्त सत्यापित किया है दिए काल श्रेणी के लिए।

चल माध्य विधि के गुण और अवगुण

गुण 1. इस विधि में कोई गणितीय जटिलता की वांछितता नहीं है और बहुत सरल है समझने में और प्रयुक्त करने में न्यूनतम वर्ग रीति सिद्धान्त की तुलना में।

2. 'मुक्त हस्त वक्र' विधि के विपरीत, यह विधि किसी वस्तुनिष्ठ के तल को अन्तर्वेशित नहीं करती है चूँकि चल माध्य की अवधि का चुनाव समंक के दोलायमान परिवर्तन से निर्धारित होती है ना कि अन्वेषक के व्यक्तिगत निर्णय द्वारा।

3. न्यूनतम वर्ग रीति में अभिनति किंटिंग की विधि के विपरीत, चल माध्य विधि काफी लचीली है इस दृष्टिकोण से कि दिए समंक में कुछ और अवलोकनों को जोड़ा जा सकता है बगैर पहले से प्राप्त अभिनति मूल्यों को प्रभावित किए। कुछ नए प्रेक्षणों के जोड़ का परिणाम होगा अन्त में कुछ और अभिनति मूल्य।

4. दोलायमान परिवर्तन पूर्ण रूप से खत्म किया जा सकता है M.A. की अवधि को दिए श्रेणी में चक्रीय परिवर्तन की अवधि के बराबर या अपवर्त्य चुनकर। (देखें टिप्पणी 3, पृष्ठ 271)। एक अवधि का उपयुक्त चुनाव कुछ हद तक अनियमित उच्चावचनों को भी खत्म कर देती है।

5. अभिनति की माप को साथ–साथ, चल माध्य विधि मौसमी, चक्रीय और अनियमित उच्चावचनों की माप के लिए भी की जाती है। [देखें टिप्पणी 5, पृष्ठ 272]

सीमाएंः 1. चल माध्य विधि की एक स्पष्ट सीमा है कि हम सभी दिए अवलोकनों के लिए अभिनति मूल्य नहीं प्राप्त कर सकते हैं। हमें अभिनति मूल्यों को छोड़ देना चाहिए कुछ अवलोकनों के लिए दोनों आत्यंतिकों पर (i.e., शुरू में और अन्त में) जो चल माध्य की अवधि पर निर्भर है। उदाहरण के लिए, 5, 7 और 9 अवधि के चल माध्य के लिए हम अभिनति मूल्य खो देते हैं पहले और अन्तिम क्रमशः 2, 3 और 4 मूल्यों के लिए।

2. चूँकि अभिनति मूल्य चल माध्य रीति से प्राप्त किसी फलनक (Functional) संबंधों से अभिव्यक्त नहीं की जा सकती है, यह विधि प्रयुक्त नहीं हो सकती है पूर्वकथन या भविष्यकथन आगामी मूल्यों के लिए जो अभिनति विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य है।

3. चल माध्य की अवधि का चुनाव बहुत महत्वपूर्ण है और निर्धारित करने में आसान नहीं है विशेषकर जब काल श्रेणी चक्र नहीं दर्शाएगी जो अवधि और आयाम में नियमित है। इस स्थिति में चल माध्य चक्रीय परिवर्तनों को पूर्ण रूपेन खत्म नहीं करेगी और क्रमानुसार चल माध्य मूल्य सामान्य अभिनति की वास्तविक तस्वीर नहीं प्रदर्शित करेगी [देखें टिप्पणी 3, 4, 5, 6 M.A. की अवधि निर्धारित करने के लिए।]

4. गैर–रैखिक अभिनति की स्थिति में, जो सामान्यत स्थिति है अधिकतर आर्थिक और व्यापारिक काल श्रेणियों में, चल माध्य विधि द्वारा दी गई अभिनति मूल्य पक्षपात पूर्ण है और वास्तविक अतिव्याप्त समंकों के या तो नीचे पड़ती है या ऊपर। वॉ के अनुसार :

   ''अगर अभिनति रेखा नीचे की ओर अवतल है (एक बाउल के किनारे जैसा), चल माध्य का मूल्य हमेशा बहुत ऊँचा होगा, अगर अभिनति ऊपर की ओर अवतल है (एक डर्बी पाट के किनारे जैसा), चल माध्य हमेशा काफी नीची होगी।''

   जैसा पहले ही निर्दिष्ट है [देखें टिप्पणी 4, पृष्ठ 271], बहुविध अभिनति की स्थिति में, उचित अभिनति मूल्य प्राप्त किए जाते हैं भारित चल माध्य का प्रयोगकर उचित भारों के साथ।

   सीमाओं का ध्यान रखते हुए, चल माध्य विधि निम्नलिखित परिस्थितियों में अनुशंसित की जाती है :

   (i) अगर अभिनति रेखीय है या लगभग वैसा

   (ii) दोलायमान परिवर्तन जो दिए काल श्रेणी को वर्णित करती है नियमित है दोनों अवधि और आयाम में।

   (iii) अगर पूर्वकथन वांछित नहीं है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. काल श्रेणी समंक की पूरी प्रकृती है या समयावधि।
   (क) अभिनति, ह्रास (ख) अभिनति, वृद्धि
   (ग) अभिपति, दीर्घ (घ) वृद्धि, ह्रास
2. क्रम अवधि विचरण वर्गीकृत है। (a) __________ (b) __________
   (क) आर्तव, अभिनति (ख) वृद्धि, अभिनति
   (ग) ह्रास, आर्त्तव (घ) आर्तव, चक्रीय
3. अगर समंक में अभिनति अनुपस्थित है, तब आर्तव घातांक प्रगणिक होते है, __________ द्वारा।
   (क) सरल औसतन की विधि (ख) रैखिक
   (ग) आर्तव (घ) अनियमित अवयन
4. काल श्रेणी समंक प्रदर्शित करते हैं __________ अभिनति अगर वृद्धि दर नियत है।
   (क) चक्रीय (ख) रैखिक
   (ग) वृद्धि (घ) ह्रास
5. चक्रीय विचरण __________ कारण से होते हैं।
   (क) दोलन के (ख) सरल औसतन के
   (ग) व्यवसायिक चक्र (घ) इनमें से कोई नहीं
6. आर्त्तव विचरणता कम अवधि विचरणता है अवधि __________ के साथ।
   (क) एक वर्श से कम
   (ख) एक वर्श से अधिक
   (ग) दोलन उतार चढ़ाव
   (घ) अवधि (घ) सरल औसत के साथ
7. सबसे महत्वपूर्ण का एक जो आर्त्तव विचरणता उत्पन्न करते है __________ हैं।
   (क) आर्तव
   (ख) मौसम
   (ग) चक्रीय
   (घ) मौसम और सामाजिक रिवाज

5.6 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (ज)
2. (घ)
3. (क)
4. (ख)
5. (ग)
6. (क)
7. (घ)

5.7 सारांश (Summary)

ज्यादातर आर्थिक, व्यवसायिक और वाणिज्य से संबंधित श्रेणियों, e.g., मूल्यों से संबंधित रेणियाँ, विभिन्न उपभोक्ता वस्तुओं का उत्पादन और खपत, कृषि और औद्योगिक उत्पादन, राष्ट्रीय आय और सुरक्षित विनिमय, व्यापारिक घरानों की लागत, बिक्री और लाभ, बैंक जमा और क्लीयरिंग, स्टॉक एक्सचेंज बाजारों में शेयर के मूल्य और लाभांश इत्यादि सभी कला श्रेणियाँ हैं जो लम्बी कालावधि में फैली है।

काल श्रेणी सांख्यिकीय समंक का कालानुक्रम से व्यवस्थापन है i.e., इसके घटित होने के समयानुसार। अगर एक संवृत्ति के मूल्य विभिन्न अवधियों में अवलोकित किए जाते हैं, इस तरह से प्राप्त मूल्य काफी विचरणता या परिवर्तन दर्शाएंगे। ये उतार–चढ़ाव इसे यथार्थ की वजह से है कि संवृत्ति का मूल्य किसी एक कारक से ही प्रभावित नहीं होती है बल्कि बहुविध कारकों के संचई प्रभाव से जो इसे ऊपर नीचे खींचते हैं। विभिन्न शक्तियाँ जो एक संवृत्ति के मूल्य को काल श्रेणी में प्रभावित करती है मोटे तौर पर निम्नलिखित चार प्रकारों में वर्गीकृत की जा सकती है, सामान्य तौर पर काल श्रेणियों के अवयव कहे जाते हैं।

(a) दीर्घकालीन प्रवृत्ति का उपनति (Secular Trend or Long-Term Movement (T)

(b) सावधिक परिवर्तन या अल्पकालीन उच्चावचन (Periodic Movement or Short-Term Fluctuations)

 (i) आवर्त्त या मौसमी परिवर्तन (S) Seasonal Variation

 (ii) चक्रीय परिवर्तन (C) Cyclical Variation

(c) अनियमित या दैव उच्चावचन (Irregular or Random Fluctuation)

दीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति—उपनति जो प्रवृत्ति का दीर्घकालीन उपनति भी कहलाती है। एक श्रेणी की प्राथमिक प्रवृत्ति है बढ़ना या घटना एक कालावधि पर। पद 'लम्बी समयावधि' एक आपेक्षिक पद है और यर्थाथता से परिभाषित नहीं की जा सकती। यह बहुत कुछ समंक की प्रकृति पर निर्भर करती है। अभिनति का सही चित्र प्राप्त करने के लिए काल श्रेणियों के मूल्यों को कम से कम दो या तीन संपूर्ण चक्र की अवधि तक जाँचा जाना चाहिए।

अगर काल श्रेणी के मूल्यों को आलेख पत्र पर खींचा जाय और ये मूल्य कमोबेश सीधी रेखा के चारों ओर संघनित हों तो काल श्रेणी द्वारा प्रदर्शित उपनति रैखिक कही जाती है नहीं तो गैर–रैखिक (वक्र रैखिय)। यह व्यवसायिक पूर्वानुमान और भविष्य के कार्यक्रमों को तय करने में मदद करता है।

दीर्घकालीन परिवर्तनों के साथ बहुत सारी काल श्रेणियों में विभिन्न प्रकार की शक्तियाँ सन्निहित होती हैं जो अपने आप को काल क्रमानुसार दुहराती हैं और इस तरह एक खास दिशा में श्रेणी के मूल्यों के सरल प्रवाह को रोक देती हैं। इस तरह की शक्तियाँ अल्पकालीन परिवर्तन उत्पन्न करती हैं जो निम्नलिखित दो संवर्गों में वर्गीकृत की जा सकती हैं—

(a) मौसमी या आर्तव परिवर्तन (Seasonal Variation) – (S)

(b) चक्रीय परिवर्तन (Cyclical Variation) – (C)

5.8 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **दीर्घकालीन उपनतिः** Secular Tread
- **अल्प कालीनः** Short-Term Variations
- **दैव या अनियमित परिवर्तनः** Random or irregular variations
- **अभिनति समीकरण का संपरिवर्तन चल माध्य की रीतिः** Method of Moving Average
- **मौसमी परिवर्तनः** Seasonal Variation
- **चक्रीय परिवर्तनः** Cyclical Variation

5.9 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

प्रश्नमाला—5.1

1. एक काल श्रेणी क्या है? इसके मुख्य संघटक क्या हैं? प्रत्येक के लिए दृष्टान्त दें।
2. (a) काल श्रेणी विश्लेषण से क्या समझा जाता है? इसके महत्व की विवेचना व्यापार के लिए करें।

(b) काल श्रेणी विश्लेषण के महत्व का व्यवसाय और अर्थशास्त्र में संक्षेप में विवेचना करें। एक काल श्रेणी के संघटक क्या हैं? प्रत्येक संघटक का एक उदाहरण दें।

3. (a) एक काल श्रेणी का संक्षेप में योगात्मक और गुणात्मक मॉडल का संक्षेप में वर्णन करें।

(b) कैसे गुणात्मक और योगात्मक मॉडल काल श्रेणी का एक दूसरे से निम्न हैं?

(c) सामान्य रूप से प्रयुक्त एक काल श्रेणी विश्लेषण के मॉडल क्या हैं? प्रत्येक मॉडल का धारित परिकल्पनाओं की विवेचना करें।

(d) काल श्रेणी के योगात्मक और गुणात्मक मॉडल कैसे एक दूसरे से भिन्न हैं? क्यों गुणात्मक मॉडल काल श्रेणी विश्लेषण में सबसे ज्यादा प्रयुक्त धारणा हैं?

4. (a) अभिनति को परिभाषित करें। एक दिए काल श्रेणी में दीर्घकालीन अभिनति को मापने की विभिन्न विधियों को गिनाएं।

(b) एक अपरिष्कृत समंक से अभिनति को अलग करने की विभिन्न विधियों को लिखें। उनका वर्णन विभिन्न सांख्यिकीय उदाहरण देकर करें।

(c) एक काल श्रेणी के विभिन्न संघटकों का वर्णन करें। न्यूनतम वर्ग रीति के चुनने के कारणों का वर्णन करें, उपलब्ध मापों में से, अभिनति मूल्यों को प्राप्त करने के लिए।

5. (a) 'दीर्घकालीन अभिनति' क्या है? एक काल श्रेणी में अभिनति मूल्यों को अलग करने की किसी एक विधि की विवेचना करें।

(b) काल श्रेणी के विश्लेषण में आप जिस सांख्यिकीय विधि को अपनाएंगे उसकी चर्चा करते हुए वर्णन करें अतः दीर्घ अभिनति को कैसे हटाएंगे?

(c) काल श्रेणी विश्लेषण के उद्देश्य क्या हैं? क्यों हमें जरूरत होती है अभिनति परिवर्तनों को आवधिक उच्चावचनों से अलग करने की वर्णन करें।

6. (a) दीर्घ अभिनति, मौसमी परिवर्तनों और चक्रीय उच्चावचनों के बीच अंतर स्पष्ट करें। आप किसी दिए समंक में दीर्घ अभिनति की माप कैसे करेंगे?

(b) दीर्घ अभिनति, और चक्रीय, मौसमी और अनियमित उच्चावचन क्या है? अभिनति को अलग करने की विधियों का वर्णन करें।

7. अभिनति के अध्ययन के 'मुक्त–हस्त' वक्र विधि के गुणों और अवगुणों की विवेचना करें। आप ध्यान में किन बिन्दुओं को रोंगे। इस तरह के वक्र को खींचते वक्त?

आलेख पत्र की सहायता से, अभिनति वक्र प्राप्त करें :

वर्ष	: 1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
मूल्य	: 64	82	97	71	78	112	115
वर्ष	: 1989	1990	1991	1992	1993	1994	
मूल्य	: 31	88	100	146	150	120	

टिप्पणी

8. अर्द्ध–औसत विधि से अभिनति उपयुक्तता का वर्णन करें। इसके आपेक्षिक गुणों और अवगुणों का वर्णन करें।

अभिनति मूल्यों की गणना निम्नलिखित दिए समंक से अर्द्ध–औसत विधि द्वारा करें :

वर्ष	: 1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
भेड़ों की संख्या (लाख में)	: 546	55	51	47	42	58	55	32

9. (a) एक वस्तु की बिक्री निम्नलिखित क्रम में जनवरी 1999 से दिसम्बर 1999 तक बढ़ती

280	300	280	280	270	240
230	230	220	200	210	200

अर्द्ध–औसत विधि से अभिनति ज्ञात करें।

(b) एक अभिनति रेखा किट करें निम्नलिखित समंक से अर्द्ध–औसत विधि का प्रयोग कर

वर्ष	:	1993	1994	1995	1996	1997	1998
लाभ ('000 रु. में)	:	100	120	140	150	130	200

10. न्यूनतम वर्ष रीति का वर्णन करें। कैसे यह अभिनति फिटिंग में प्रयुक्त होता है? न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा अभिनति फीटिंग का आपेक्षिक गुण और अवगुण क्या हैं?

11. एक काल श्रेणी के संघटक क्या हैं? आप अभिनति को कैसे अलग करेंगे न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा? आप अपने उत्तर को एक उदाहरण द्वारा दर्शाएं।

12. नीचे उत्पादन के आँकड़े (हजार कि. ग्रा. में) एक चीनी फैक्ट्री दिया गया है:

वर्ष	: 1984	1985	1986	1987	1988
उत्पादन	: 77	88	94	85	56

(i) एक सीधी रेखा अभिनति फिट करें मूल बिन्दु का वर्ष 1986 लेते हुए

(ii) वर्ष 1990 के लिए अभिनति मूल्य ज्ञात करें।

13. निम्नलिखित समंक के लिए सीधे रेखा अभिनति फिट करें न्यूनतम वर्ग रीति का प्रयोग कर और वर्ष 2001 के लिए उत्पादन परिकलित करें :

वर्ष	: 1996	1997	1998	1999	2000
उत्पादन ('000 टन)	: 83	92	74	90	166

14. निम्नलिखित समंक में एक सीधी रेखा अभिनति फिट करें न्यूनतम की रीति द्वारा :

वर्ष	:	1991	1993	1995	1997	1999
उत्पादन	:	18	21	23	27	16

मूल बिन्दु के वर्ष को रेखांकित करें। वर्ष 1998 और 2000 के लिए उत्पादन प्राक्कलित करें।

टिप्पणी

15. निम्नलिखित समंक के लिए :

(i) एक सीधी रेखा अभिनति फिट करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा

(ii) अभिनति मूल्यों को परिकलित करें :

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
उत्पादन :	12	10	14	11	13	15	16

16.(a) नीचे दिए गए काल श्रेणी को समंक को सीधी रेखा अभिनति फिट करें न्यूनतम वर्ग रीति से और वर्ष 2000 के लिए बिक्री का भविष्य कथन करें।

वर्ष (t) :	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
बिक्री Y (लाख रुपयों में) :	25	30	38	50	62	80	95

(b) निम्नलिखित सारणी एक मद का निर्यात देती हे सात वर्षों के दरम्यान

वर्ष (t) :	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
निर्यात (टन में) :	50	70	60	80	90	100	110

अभिनति मूल्य परिकलित करें एक सीधे रेखा फिट करके न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा और वर्ष 1996 के दरम्यान समान्य निर्यात प्राक्कलित करें।

17.(a) न्यूनतम वर्ग रीति का प्रयोग कर, एक सीधी रेखा फिट करें निम्नलिखित समंक का और अभिनति मूल्य ज्ञात करें और छोटी अवधि उच्चावचन :

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
मूल्य :	232	226	220	180	190	168	162	152	144

(b) निम्नलिखित समंक के लिए सीधी रेखा अभिनति फिट करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा :

वर्ष	टी.वी. सेट का उत्पादन ('000 रु. में)	वर्ष	टी.वी. सेट का उत्पादन ('000 रु. में)
1986	17	1992	35
1987	20	1993	55
1988	19	1994	50
1989	26	1995	74
1990	24	1996	69
1991	40		

वर्ष 2001 के लिए उत्पादन प्राक्कलित करें।

टिप्पणी

18. आपको इलेक्ट्रॉनिक सामानों का निर्यात 1990 तक दिया गया है। एक अभिनति रेखा निर्यात समंक के लिए फिट करें और वर्ष 2005 के लिए प्रत्याशित निर्यात प्राक्कलित करें:

वर्ष	: 1990	1992	1994	1996	1998	1999
निर्यात (करोड़ रु. में):	11	16	13	18	22	20

19.(a) निम्नलिखित सारणी मक्खन उपभोग एक जिला में विभिन्न वर्षों में दर्शाता है। अभिनति मूल्यों को प्राप्त करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा :

वर्ष	: 1989	1990	1991	1992	1993	1994
उपभोग ('000 कि.ग्रा.)	: 60	80	90	120	145	170

(b) मक्खन के उपभोग में मासिक वृद्धि को भी प्राप्त करें।

20. एक सीधी रेखा अभिनति समीकरण फिट करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा और 1999 के लिए मूल्य प्राक्कलित करें :

वर्ष	: 1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
मूल्य	: 380	400	650	720	690	600	870	930

21. निम्नलिखित वार्षिक अभिनति एक कम्पनी के कुल बिक्री के लिए निम्नलिखित वार्षिक अभिनति समीकरण को मासिक अभिनति समीकरण में संपरिवर्तित करें

$$Y = 162 + 15.8x$$

(मूल बिन्दु : 1975 ; मापक्रम : x का 1 इकाई = 1 वर्ष)

दो समीकरणों द्वारा जून 1978 के लिए बिक्री का पूर्वाकथन करें। अपने परिणामों की तुलना करें।

22. भारत अल्युमिनियम कंपनी के वार्षिक बिक्री की अभिनति निम्नलिखित समीकरण से वर्णित होती है :

$Ye = 12 + 0.7x$; [मूल बिन्दु पहली जुलाई 1990; x इकाई = 1 महीना];

$Ye = 0.9712 + 0.0048x$; [मूल बिन्दु पहली जुलाई 1990]

23. आपकों निम्नलिखित अभिनति समीकरण दिया गया है न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा एक कम्पनी का जो बने बनाए वस्त्र बेचती है।

$$Y = 480 + 36x$$

मूल बिन्दु : 1988 : x = एक वर्ष की इकाई

y = प्रति वर्ष बिकने वाले इकाईयों की संख्या

(i) उपर्युक्त अभिनति समीकरण को मासिक अभिनति समीकरण में संपरिवर्तित करें; और

(ii) अक्टूबर 1994 महीना के बिक्री का प्राक्कलन करें।

टिप्पणी

24. नीचे वार्षिक उत्पादन (हजार टनों में) दी गई है एक खाद कारखाने का।

वर्ष	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
उत्पादन	70	75	90	91	95	98	100

(i) एक सीधी रेखा अभिनति समीरकण फिट करें न्युनतम वर्ग रीति द्वारा और अभिनति मूल्यों को तालिकाबद्ध करें।

(ii) वार्षिक अभिनति समीकरण को मासिक अभिनति समीकरण में संपरिवर्तित करें।

25. वार्षिक बिक्री ('000 रु. में) के लिए अभिनति समीकरण एक वस्तु के लिए वर्ष 1999 को मूल बिन्दु के साथ है $y = 81.6 + 28.8x$। अभिनति समीकरण निर्धारित करें मासिक अभिनति मूल्य देने के लिए जनवरी 2000 के साथ मूल बिन्दु जैसा और मार्च 2000 के लिए अभिनति मूल्य परिकलित करें।

26. (a) द्विघात वर्ग और घातांक वक्र के फिटिंग की विधि का वर्णन करें। आप फिटेड वक्र को पूर्वकथन के लिए कैसे प्रयोग करेंगे?

(b) अभिमति और घातांक अभिनति के बीच अन्तर स्पष्ट करें।

27. एक परवलय वक्र (Parabolic Curve) के द्वितीय स्तर का नीचे दिए गए समंक में फिट करें और 1999 के लिए मूल्य को प्राक्कलित करें और इस पर समीक्षा दें।

वर्ष	1993	1994	1995	1996	1997
बिक्र ('000 रु. में)	10	12	13	10	8

28. गैर–रैखिक अभिनति समीकरण ज्ञात करें निम्नलिखित तीन प्रसामान्य समीकरण से प्राप्त की जाती है मूल बिन्दु 1994 से और 1997 के लिए मूल्य प्राक्कलित करें।

$10 = 5a + 10b + 30c,\ 26 = 10a + 30b + 100c,$

$8b = 30a + 100b + 354c$

29. निम्नलिखित समंक के लिए अभिनति मूल्यों को परिकलित करें द्वितीय स्तर समीकरण का प्रयोग करें।

वर्ष (t)	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
उत्पादन (हजार टनों में)	100	107	128	140	181	192	200

30. नीचे जनगणना का जनसंख्या 1901–1997 का दिया गया है।

वर्ष	1901	1911	1921	1931	1941	1951	1961	1971
जनसंख्या (मिलियन)	236.3	252.0	251.2	278.9	318.5	361.0	439.1	547.9

(i) काल श्रेणी को एक आलेख पत्र पर खीचें।

(ii) गणना करें और सीधी रेखा अभिनति आलेकित करें।

(iii) गणना करें और द्वितीय स्तर बहुविध अभिनति आलेखित करें उसी ग्राफ पर।

31. परवलय अभिनति फिट करें $y = a + bx + cx^2$ निम्नलिखित समंक के लिए जहाँ Y उत्पादन को ध्यानीत करें (हजार इकाईयों में) :

वर्ष (x) :	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Y :	2	6	7	8	10	11	11	10	9

अभिनति मूल्यों को भी प्रगणित करें। 1990 के मूल्य को प्राक्कलित करें।

32. एक कम्पनी की बिक्री लाख रुपयों में 1995 से 1999 के लिए नीचे दी गई हैं:

वर्ष (x) :	1995	1996	1997	1998	1999
बिक्री (y) :	65	92	132	190	275

वर्ष 2000 के लिए बिक्री प्राक्कलित करें एक समीकरण का प्रयोग करें अभिकृति $y = a.b^x$

33. भारत के लिए निम्नलिखित जनसंख्या आँकड़े दिए गए हैं, 1991 के लिए जनसंख्या प्राक्कलित करें, समीकरण का प्रयोग कर अभिकृति $y = AB^x$

जनगणना वर्ष (x)	: 1921	1931	1941	1951	1961	1971	1981
जनसंख्या (y) (करोड़ में)	: 25.1	27.9	31.9	36.1	43.9	54.8	68.5

प्रश्नमाला–5.2

1. (a) चल माध्य की विधि का वर्णन करें। यह कैसे प्रयुक्त की जाती है एक काल श्रेणी के विश्लेषण में अभिनति को मापने में?

   (b) वर्णन करें कैसे अभिनति प्राप्त की जाती है चल माध्य की विधि से एक काल श्रेणी के विश्लेषण में। इस विधि के गुण और अवगुण क्या है?

   (c) उन परिस्थितियों को बतावें जिनमें एक चल माध्य को अभिनति विश्लेषण के लिए अनुशंसित किया जा सकता है। आप कैसे चल माध्य की अवधि का निर्धारण करेंगे?

2. (a) काल श्रेणी क्या है? इसके मुख्य संघटकों को बताएं। चल माध्य क्या है? काल श्रेणी विश्लेषण में इसके उपयोग क्या हैं?

   (b) वर्णन करें कैसे अभिनति विलुप्त किया जा सकता है चल माध्य रीति से। एक उचित दृष्टान्त का व्यवहार करें।

3. (a) कैसे चल माध्य (M.A.) मूल्य प्रभावित होते हैं अगर M.A. की अवधि बढ़ा दी जाती है? M.A. की अवधि की वृद्धि का अनियमित उच्चावचनों पर क्या प्रभाव है?

(b) अभिनति फिटिंग के चल माध्य रीति की सीमाएं और लाभ क्या हैं?

(c) एक काल श्रेणी के विश्लेषण में क्यों चल माध्यों को परिकलित किया जाता है? कैसे चल माध्य की अवधि निर्धारित की जाती है?

(d) एक काल श्रेणी के महत्व और विभिन्न संघटकों का वर्णन करें।

चल माध्य रीति के आपेक्षित गुणों और अवगुणों की चर्चा करें और अभिनति मूल्यों को प्राप्त करने की न्यूनतम वर्ग रीति।

4. एक काल श्रेणी में अभिनति निर्धारित करने की विभिन्न विधियों का संक्षिप्त विवरण दें।

तीन–वर्षीय चल माध्य का प्रयोग कर, अभिनति निर्धारित करें और छोटी अवधि उच्चावचन। वास्तविक और अभिनति मूल्यों को उसी आलेख पत्र पर आलेखित करें।

वर्ष	उत्पादन ('000 टनों में)	वर्ष	उत्पादन ('000 टनों में)
1988	21	1993	22
1989	22	1994	25
1990	23	1995	26
1991	25	1996	27
1992	24	1997	28

5.10 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2. सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3. Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4. Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5. Fundamentals of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6. Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

इकाई–4

टिप्पणी

अध्याय 6 सहसंबंध (Correlation)

संरचना (Structure)

6.0 परिचय (Introduction)

अभी तक हमने चर्चा को एकल–चर वितरण तक ही सीमित रखा है i.e. वितरण जो सिर्फ एक चर से संबंध हैं और यह भी देखा कि कैसे केंद्रीय प्रवृति के विभिन्न माप, किरण, विषमता और ककुदता का प्रयोग तुलनीयता और विश्लेषण के उद्देश्यों के लिए प्रयुक्त हो सकती है। हमें यद्यपि ऐसी श्रेणियाँ भी मिल सकती हैं, जिनमें श्रेणी के प्रत्येक मद दो या दो से अधिक चरों के मूल्य से ले सकते हैं। अगर हम 'n' अभिव्यक्तियों की ऊँचाई और वजनों की मापें, हम एक श्रेणी प्राप्त करते हैं जिसमें श्रेणी की प्रत्येक इकाई (व्यक्ति दो मूल्य धारण करती है– एक ऊँचाई से संबंधित और दूसरा वजन से संबंधित। ऐसे वितरण जिसमें श्रेणी के

प्रत्येक इकाई दो मूल्य धारण करती है। द्विचर वितरण कहलाती है। आगे अगर हम दो या दो से अधिक चर की माप प्रत्येक इकाई के लिए एक वितरण में करते हैं, यह बहुचर वितरण कहलाती हैं। एक श्रेणी में, एक ही कई जिसके लिए विभिन्न मापों को लिया जाता है किसी भी प्रकृति की हो सकती है जैसे विभिन्न व्यक्ति, समय, जगह इत्यादि। उदाहरण के लिए हमें :

(i) एक परीक्षा में दो विषयों में व्यक्तियों के अंकों की श्रेणी

(ii) एक विशेष वर्ष में विभिन्न कंपनियों के बिक्री राजस्व और विज्ञापन खर्चों की श्रेणी

(iii) अपरिष्कृत सूत्रों के निर्यात करोड़ों रूपयों में और उत्पादित वस्तुओं के आयात की श्रेणी 1989 से 1984 के वर्षों में, कहें

(iv) पति और पत्नी की उम्र चुने गए विवाहित जोड़ों के प्रतिदर्श की श्रेणी में और आगे

इसलिए एक द्विचर वितरण में हमें प्रेक्षणों के समुच्चय के जोड़े दिए गए हैं, प्रत्येक जोड़े के एकमान प्रत्येक दो चरों के मान होते हैं।

एक द्विचर वितरण में, हमें रुचि हो सकती है यह जानने में की क्या अध्यनाधीन दो चरों के बीच कोई संबंध है। सह-संबंध संख्यकीय साधन है जो दो चरों के बीच के संबंधों का अध्ययन करती है, सह-संबंध विश्लेषण विभिन्न विधियों और तकनीकों को समाविष्ट करती है, जिसका प्रयोग दो चरों के बीच के संबंधों के अध्ययन और संबंधो की सीमा को मापने के लिए किया जाता है।

वे सह-संबंध के बारे में क्या कहते हैं– कुछ परिभाषाएं और प्रयोग

''जब संबंध संख्यात्मक प्रकृति की हैं, उपयुक्त संख्यिकीय साधन अन्वेषण और संबंध की माप और अभिव्यक्ति जिस संक्षिप्त सूत्र से की जाती है, सहसंबंध कहलाते हैं।

–क्राक्सटन और काउडेन

स्ह-संबंध दो या अधिक चरों के बीच सह विचरण का विश्लेषण है।

ए.एम. हट्टल

''सह-संबंध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार की समझ में अंशदान करते हैं, समीक्षात्मक महत्वपूर्ण दरों के निर्धारण में योगदान करती हैं, जिस पर दूसरे निर्भर करते हैं, अर्थ शास्त्रियों पर संबंधों को प्रकट करती हैं, जिससे रुकावट फैलती है और उन्हें आभास देती है ऐसे रास्तों का जिन से स्थाई बल प्रभावकारी हो सकते हैं।''

–डब्ल्यू.ए. नेइसवैंगर

टिप्पणी

6.1 उद्देश्य (Objectives)

अभी तक हमने चर्चा को एकल चर वितरण तक ही सीमित रखा है i.e. एक वितरण जो सिर्फ एक चर से संबंध हैं और यह भी देखा कि कैसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप, अपकिरण, विषमता और ककुदता का प्रयोग तुलनीयता और विश्लेषण के उद्देश्यों के लिए प्रयुक्त हो सकती है। हमें, यद्यपि ऐसी श्रेणियाँ भी मिल सकती हैं जिनमें श्रेणी के प्रत्येक मद दो या दो से अधिक चरों के मूल्य ले सकती हैं। यह द्विचर वितरण कहलाती हैं।

एक द्विचर वितरण में, हमें रुचि हो सकती है, यह जानने में कि क्या अध्ययनाधीन दो चरों के बीच कोई सम्बम्ध है। सहसंबंध सांख्यिकीय साधन है जो दो चरों के बीच के संबंधों का अध्ययन करती है। सहसंबंध विश्लेषण विभिन्न विधियों और तकनीकों को समाविष्ट करती है जिसका प्रयोग दो चरों के बीच के संबंधों के अध्ययन और संबंधों की सीमा को मापने के लिए किया जाता है।

6.2 सहसंबंध (Correlation)

परिभाषा—दो चर सहसम्बन्धित कहे जाते हैं अगर एक चर में परिवर्तन का परिणाम दूसरे चर के संगत परिवर्तन में होती है।

1. सहसंबंध के प्रकार (Types of Correlation)

(a) धनात्मक और ऋणात्मक सह-संबंध

अगर दो चरों के मूल्य एक ही दिशा में विचरण करते हैं, i.e., अगर एक चल के मूल्य में वृद्धि का परिणाम, औसत में, दूसरे चरण में संगत वृद्धि है या अगर एक चर के मूल्य के ह्रास का परिणाम, औसत में, दूसरे चर के मूल्यों में संगत ह्रास है, सह-संबंध धनात्मक कहलाता या प्रत्यक्ष कहलाता है।

धनात्मक सह-संबंध की श्रेणी के कुछ उदाहरण हैं :

(i) ऊंचाइयाँ और वजन

(ii) पारिवारिक आय और खर्च विलासिता संबंधी मामलों में

(iii) वर्षा की मात्रा और फसल का उत्पादन (एक सीमा तक)

(iv) एक वस्तु की कीमत और पूर्ति और आगे

दूसरी तरफ, सह-संबंध ऋणात्मक है या विलोम अगर उल्टी दिशा में विचरण करते हैं, i.e., अगर एक चर के मूल्य में वृद्धि (न्हास), औसत में, दूसरे चर के मूल्य में संगत न्हास (वृद्धि) होती है।

ऋणात्मक सह-संबंध के कुछ उदाहरण श्रेणी हैं संबंधित :

(i) एक वस्तु की कीमत और माँग

(ii) एक समग्र गैस का आयतन और दबाव

(iii) ऊनी वस्त्रों की बिक्री और दिवस का तापक्रम, और आगे।

टिप्पणी

(b) रैखिक और गैर-रैखिक सह-संबंध

दो चरों के बीच सह-संबंध रैखिक कही जाती है अगर एक चर में इकाई परिवर्तन के संगत दूसरे चरण में मूल्यों के समूचे विस्तार में नियत परिवर्तन होता है। उदाहरण के लिए, हम लोग निम्नलिखित समंक पर विचार करें :

x	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13

इसलिए x के मूल्य में इकाई परिवर्तन के लिए, नियत परिवर्तन होता है viz. 2y के संगत मूल्य में। गणितीय रूप से, उपर्युक्त समंक को अभिव्यक्त किया जा सकता है निम्न संबंध से,

$$y = 2x + 3$$

सामान्य में, दो चर x और y आपस में रैखिक संबंधित हैं, अगर इस ग्रुप का संबंध अस्तित्व में हैं

$$y = a + bx \qquad \ldots(*)$$

उनके बीच। परंतु हम जानते हैं कि (*) एक सीधी रेखा का समीकरण है तिर्यक (slope) 'b' के साथ और जो y-अक्ष पर 'a' अंतःखंड (intercept) बनाता है। [c.f. $y = mx + c$ सीधी रेखा के समीकरण का रूप] इसलिए, अगर दो चरों के मूल्य को xy - प्लेन पर बिंदु जैसा रेखांकित किया जाए, हम लोग एक सीधी रेखा पाएंगे। यह आसानी से उपर्युक्त उदाहरण के लिए जांचा जा सकता है। इस प्रकार की घटना पदार्थ विज्ञान में बराबर घटित होती हैं, परंतु अर्थशास्त्र और सामाजिक विज्ञानों में, हम बहुत मुश्किल से ऐसा समंक प्राप्त करते हैं जो सीधी रेखा आलेख देता है। दो चरों के बीच का संबंध गैर–रेखिक व वक्र रेखीय कहलाती है जब एक चर के संगत इकाई परिवर्तन के लिए, दूसरा चर नियत दर से परिवर्तित नहीं होकर उतार-चढ़ाव के दर से परिवर्तित होती है। इन स्थितियों में, अगर समंक xy- प्लेन (धरातल) पर खींची जाती है, हम सीधी रेखा वक्र नहीं पाते हैं। गणितीय रूप से कहने पर सह-संबंध गैर-रेखीय कहीं जाती है यदि खींचे गए वक्र का तिर्यक (slope) नियत बनाती है। यह घटना (संवृत्ति) सामान्य है अर्थशास्त्र और सामाजिक विज्ञानों के संबंधित आंकड़ों में।

चूँकि गैर-रेखिक संबंध के विश्लेषण और माप की तकनीकें काफी जटिल और कठिन हैं रैखिक संबंधों के अध्ययन और माप की विधि से तुलना में, हम सामान्यतया यह परिकल्पित कर लेते हैं के अध्ययनाधीन दो चरों का संबंध रैखिक है। इस अध्याय में, हम लोग अपने आप को सीमित रखेंगे सिर्फ रैखिक संबंध की माप तक। गैर-रैखिक संबंधों की माप यद्यपि, इस पुस्तक की सीमा से बाहर है।

टिप्पणी

टिप्पणी : सह-संबंध का अध्ययन पदार्थ विज्ञानों में आसान होता है चूँकि प्रयोग के परिणाम के आधार पर, यह आसान होता है गणितीय संबंध स्थापित करना अध्ययनाधीन दो या अधिक चरों के बीच संबंध स्थापित करने में। परन्तु सामाजिक और आर्थिक विज्ञानों में, यह बहुत कठिन है गणितीय संबंध स्थापित करने में अध्ययनाधीन चरों के बीच चूँकि इन संवृत्तियों में, अध्ययनाधीन चरों के मूल्य युगपत (Simultaneously) में बहुविध कारकों से प्रभावित होती है और यह काफी कठिन है, कभी-कभी असंभव, प्रत्येक कारक का अलग-अलग प्रभाव अध्ययन करने में। इसलिए, सामाजिक और आर्थिक संवृत्ति से सम्बन्धित आँकड़ों में, सहसंबंध का अध्ययन परिशुद्ध और सूक्ष्म नहीं हो सकती है।

2. सहसंबंध और कार्य-कारण भाव (Correlation and Causation)

सहसंबंध विश्लेषण हमें समर्थ बनाती है कि अध्ययनाधीन दो चरों के बीच संबंध का स्तर या दिशा का धारणा बनाने में। यद्यपि, (यह असफल हो जाती है) दो चरों के बीच कार्य-कारण संबंधों को दर्शाने में है। एक द्विचर वितरण में, अगर चरों के बीच कार्य-कारण का संबंध है, तो वे एक दूसरे से रूपांतरित होने के लिए बंधे होते हैं और इसलिए, उनके बीच उच्च स्तर का सहसंबंध होना निश्चित है। दूसरे शब्दों में, कार्य-कारण भाव का अर्थ हमेशा सहसंबंध होता है। यद्यपि, इसका विपरीत सही नहीं है i.e. दो चरों के बीच सहसंबंध का बहुत उच्च स्तर का अर्थ भी उनके बीच कार्य-कारण संबंध या हो आवश्यक नहीं है। चरों के बीच उच्च स्तर का सहसंबंध निम्नलिखित कारणों की वजह से हो सकता है :

1. परस्पर-निर्भरता : अध्ययनाधीन संवृत्ति एक-दूसरे को अंतः प्रभावित करता है। ऐसी स्थितियाँ सामान्यतः अवलोकित की जाती हैं आर्थिक और व्यापारिक परिस्थितियों से सम्बन्धित आँकड़ों में। उदाहरण के लिए, यह अर्थशास्त्र का जाना माना सिद्धान्त है कि वस्तुओं का मूल्य माँग और पूर्ति से प्रभावित होती है। उदाहरण के लिए, अगर एक वस्तु का मूल्य बढ़ता है, इसका माँग सामान्यतः घटता है (दूसरे कारक नियत रहने पर)। यहाँ बढ़ी कीमत कार्य है और माँग में कमी कारण है। यद्यपि, एक वस्तु के माँग में ऱ्हास लोगों के उत्प्रवास (Emigration) में या फैशन की वजह से या दूसरी वजह जैसे लोगों के स्वाद या आदतों में परिवर्तन का परिणाम वस्तु के मूल्य में ऱ्हास होता है। यहाँ, कार्य है कमी हुई माँग और कारण है मूल्य में कमी। क्रमानुसार, दो चरों में अच्छे स्तर का सहसंबंध है एक दूसरे पर परस्पर प्रभाव डालने की वजह से परन्तु फिर भी यह काफी कठिन हो जाता है विविक्त करना यथार्थ कार्य को कारण से।

2. दोनों चर उन्हीं बाह्य कारणों से प्रभावित होती है : दो चरों के बीच उच्च स्तर का सहसंबंध हो सकता है किसी तीसरे पर के अंतःक्रिया या प्रभाव से या कई चरों के इन दो चरों पर प्रभाव की वजह से। उदाहरण के लिए, बहुत उच्च स्तर का सहसंबंध अवलोकित किया जा सकता है दो फसलों के उपज प्रति हेक्टेयर के बीच कहें चावल और आलू कई कारकों के प्रभाव की वजह से

जैसे– अनुकूल मौसम, प्रयुक्त खाद, सिंचाई सुविधा इत्यादि उनमें से प्रत्येक पर। लेकिन उनमें से दोनों में से कोई दूसरे का कार्य Cause) नहीं है।

3. **विशुद्ध संयोग से** : यह हो सकता है कि एक द्विचर वितरण से चुने गये यादृच्छिक छोटे प्रतिदर्श काफी उच्च स्तर की सहसंबंध दर्शाए यद्यपि, यथार्थतः चर समष्टि में सहसम्बन्धित नहीं हों। इस तरह का सहसंबंध संयोग से उतार–चढ़ाव को आरोपित किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त जानबूझकर या अनजाना अभिनति अन्वेषक के तौर पर, प्रतिदर्श के चुनाव में परिणत हो सकती है प्रतिदर्श में उच्च स्तर के सहसंबंध में। इस संबंध में, यह अर्थ गर्भित होगा दो संवृत्तियों की चर्चा जहाँ उच्च स्तर का सहसंबंध अवलोकित किया जाता है, हाँलाकि यह संभव नहीं है उन्हें समझना कि वो कार्य (Causally) वजह से सम्बन्धित हैं। उदाहरण के लिए, हम लोग जूते के आकार और एक समूह के लोगों की बुद्धि में उच्च स्तर का सहसंबंध अवलोकित कर सकते हैं। ऐसा सहसंबंध भ्रामक (Spurious, बनावटी) या संवेदन–हीन (Non-Sense) सहसंबंध कहे जाते हैं [विस्तार के लिए देखें है 6.4.2(ii)].

6.3 सहसंबंध के अध्ययन की विधियाँ (Methods of Studying Correlation)

हमलोग अपनी चर्चा को दो चरों के बीच सिर्फ रैखिक संबंधों को सुनिश्चित करने की विधियों तक सीमित रखेंगे (श्रेणी)। दो चरों के बीच सामान्यतः प्रयुक्त होने वाली विधियाँ सह-संबंध के अध्ययन के लिए हैं :

(i) विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र रीति

(ii) कार्ल पियर्सन का सहसंबंध का गुणांक (सह-विचरण विधि Covariance Method)

(iii) द्विचर आवृत्ति सरणी (द्विचर सहसंबंध विधि) [Bivariate Frequency Table (Bivariate Correlation Method)]

(iv) श्रेणी अन्तर रीति (Rank Method)

(v) संगामी विचलन रीति (Concurrent Deviation Method)

6.4 विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्र रीति (Scatter Diagram Method)

विक्षेप चित्र एक द्विचर वितरण के चित्रमय प्रदर्शन की सबसे आसान तरीकों में एक है और हमें दो चरों के बीच सहसंबंध सुनिश्चित करने का सबसे आसान साधन उपलब्ध कराती है। मान ले हमें मूल्यों के n जोड़े दिए गए हैं X और Y चरों के लिए यथा $(x_1, y_1), (x_2, y_2).........(x_n, y_n)$ उदाहरण के लिए, अगर चर

X और Y क्रमशः ऊँचाई और वजन को द्योतित करते हैं, तब जोड़े $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots\ldots (x_n, y_n)$ प्रदर्शित करेंगे n व्यक्तियों के ऊँचाई और वजन (जोड़े में)। ये n बिन्दुऐं x-अक्ष और y-अक्ष पर xy धरातल पर बिन्दु (.dot) के रूप में खींचे जा सकते हैं। (यह परंपरागत है कि निर्भर चर को Y-अक्ष पर और स्वतंत्र चर का X-अक्ष पर खींचना)। इस तरह से प्राप्त बिन्दुओं का चित्र विक्षेप–चित्र (Scatter Diagram) कहलाता है। विक्षेप–चित्र से हम बहुत अच्छा, यद्यपि मोटी, धारणा बना सकते हैं दो चरों के बीच के संबंध के बारे में। निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए दो चरों के बीच के सहसंबंध को विक्षेप चित्र से व्याख्या करने में :

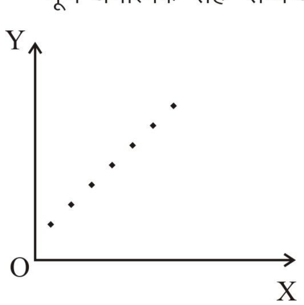
(i) अगर बिन्दु बहुत सघन है, i.e., एक दूसरे से बहुत नजदीक हैं, दो चरों के बीच बहुत ज्यादा सहसंबंध अपेक्षित होगा। दूसरी तरफ, अगर बिन्दु काफी बिखरे–बिखरे हैं, तो सहसंबंध का अभाव माना जायेगा।

(ii) अगर विक्षेप चित्र के बिन्दु कोई उपनति (Trend), या तो ऊपर की ओर या नीचे की ओर) प्रकट करते हैं, तब चर आपस में सहसंबंधित कहालते हैं और अगर कोई उपनति प्रकट नहीं होती है, चर में सहसंबंध का अभाव कहा जाता है।

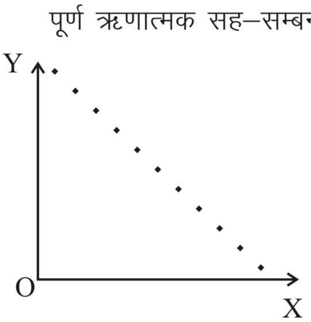
(iii) अगर ऊपर की ओर उपनति है बायीं ओर के निचले कोने से दायीं ओर के ऊपर वाले कोने की ओर जाती है, सहसंबंध धनात्मक है चूँकि यह प्रकट करती है कि दो चरों के मूल्य समान दिशा में घूमते हैं। अगर दूसरी तरफ, बिन्दु नीचे की ओर उपनति दर्शाती है बायीं ओर ऊपर वाले कोने से दाहिनी ओर के नीचे कोने की ओर जाती है, सहसंबंध ऋणात्मक है चूँकि इस स्थिति में दो चरों के मूल्य विपरीत दिशा में कार्य करते हैं।

(iv) विशेष रूप से, अगर सभी बिन्दु एक सीधी रेखा पर पड़ते हैं बायीं ओर के निचले कोने से बायीं ओर के ऊपर वाले कोने तक, सहसंबंध पूर्ण और धनात्मक है, और अगर सभी बिन्दु बायीं ओर के ऊपर वाले कोने से दायीं ओर के नीचे वाले कोने तक एक सरल रेखा पर पड़े, सहसंबंध पूर्ण और ऋणात्मक है।

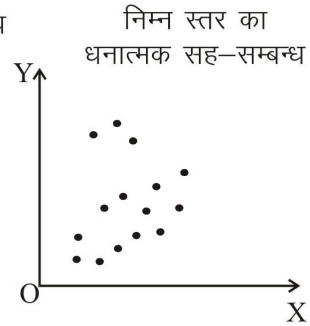
बिखरे समंक का निम्नलिखित चित्र विभिन्न प्रकार के सहसंबंध दर्शाते हैं।



चित्र क्र. 6.1



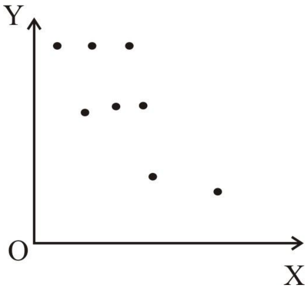
चित्र क्र. 6.2



चित्र क्र. 6.3

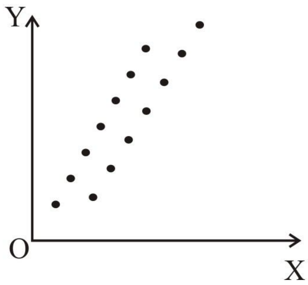
टिप्पणी

निम्न स्तर ऋणात्मक सह–सम्बन्ध



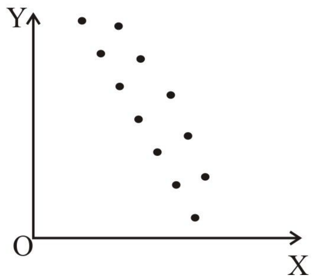
चित्र क्र. 6.4

उच्च स्तर का धनाात्मक सह–सम्बन्ध



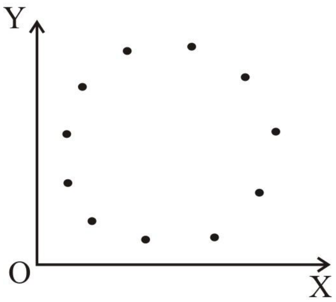
चित्र क्र. 6.5

उच्च स्तर का ऋणात्मक सह–सम्बन्ध



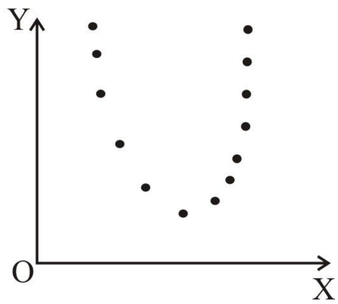
चित्र क्र. 6.6

कोई सह–सम्बन्ध नहीं



चित्र क्र. 6.7

कोई सह–सम्बन्ध नहीं



चित्र क्र. 6.8

टिप्पणियाँ 1. विक्षेप चित्र की विधि आसानी से समझ में आने वाली है और हमें समर्थता प्रदान करती है दो चरों के बीच के संबंध की प्रकृति के आलेख को सिर्फ देखकर अनुमान लगाया जा सकता हैं इसके अतिरिक्त, यह विधि आत्यंतिक अवलोकनों से प्रभावित नहीं होती है जबकि सहसंबंध को सुनिश्चित करने वाले सभी गणितीय सूत्र आत्यंतिक अवलोकनों से प्रभावित होते हैं। यद्यपि, यह विधि उपयुक्त नहीं है यदि अवलोकनों की संख्या काफी अधिक है।

2. विक्षेप चित्र रीति सिर्फ संबंध की प्रकृति बतलाती है क्या यह धनात्मक है या ऋणात्मक क्या यह उच्च है या कम है। यह हमें दो चरों के बीच संबंधों की मात्रा का सही माप की सीमा नहीं देती है।

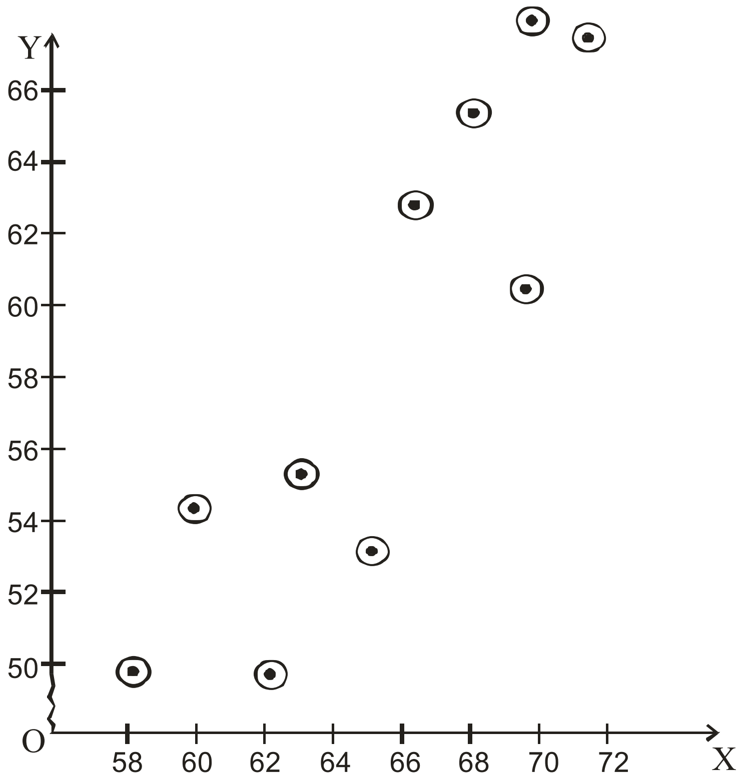
3. विक्षेप चित्र हमें लगभग प्राक्कलन रेखा या उपयुक्तता की रेखा मुक्त हस्त विधि से प्राप्त करने में समर्थ बनाती है। यह विधि सामान्यतः धागे को खींचे गए बिन्दुओं पर फैलाकर सबसे संभावित रेखा का निर्धारण करने में सक्षम होती है। यद्यपि, एक परिशुद्ध विधि उपयुक्तता की रेखा प्राप्त करने के लिए दूसरे अध्याय (प्रतीपगमन विश्लेषण, Regression Analysis) में निर्वचित है।

उदाहरण 6.1: निम्नलिखित बी.कॉम. के 10 छात्रों की ऊँचाई और वजन हैं।

ऊँचाई (इकाईयों में)x	:	62	72	68	58	65	70	66	63	60	72
वजन (कि.ग्रा. में) y	:	50	65	63	50	59	60	61	55	54	65

एक विक्षेप चित्र खीचें और बताए कि क्या सहसंबंध धनात्मक है। या ऋणात्मक?

टिप्पणी



चित्र क्र. 6.9

4. क्या दो चरों के बीच उच्च स्तर का सहसंबंध दो चरों के बीच कार्यकारण भाव को दर्शाती है?

5. (a) भ्रामक सहसंबंध (Squrious Correlation) और संवेदन हीन (Non-Sense) या संभाव्य सहसंबंध (Chance Co-rrelation) क्या हैं? एक उदाहरण की सहायता से वर्णन करें।

(b) निम्नलिखित वक्तव्य की समीक्षा करें: ''उच्च स्तर का धनात्मक सहसंबंध 'जूते के आकार' और व्यक्तियों के समूह की 'बुद्धि' का अर्थ है बड़े आकार के जूते के लोगों की बुद्धि अधिक प्रखर है उन लोगों से जिनके जूते छोटे आकार के हैं।''

6. निम्नलिखित प्रकार में किस सीमा तक आप निकाले गये निष्कर्ष से सहमत हैं? क्यों?

दो श्रेणी—चलन में मुद्रा का परिमाण और सामान्य मूल्य सूचकों कों काफी ऊँचे स्तर का धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है। इससे, यह निष्कर्ष निकाला गया कि एक कार्य है और दूसरा कारण प्रत्यक्ष कार्यकारण संबंधों में।

टिप्पणी

7. (a) स्पष्ट रूप से अंतर करें इसके बीच :

(i) धनात्मक और ऋणात्मक सहसंबंध (ii) रैखिक और गैर-रैखिक सहसंबंध

(b) यदि दो या अधिक परिमाण साथ-साथ परिवर्तित होते हैं ताकि एक में परिवर्तन से दूसरे में संगत परिवर्तन होता है, तब वे आपस में सहसंबंधित कहे जाते हैं। विवेचना करें।''

8. सहसंबंध का अध्ययन करने में सहायता करती है, इसके प्रकृति और सीमा दोनों के संबंध में।

9. (a) सहसंबंध क्या है? धनात्मक और ऋणात्मक सहसंबंध के युगपत अंतर्वृद्धि (Implication) का वर्णन करें। विक्षेपचित्र की सहायता से, पूर्ण धनात्मक और पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध की उपस्थिति दर्शाए।

(b) एक विक्षेप चित्र पर पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध का वर्णन करें।

10. (a) विक्षेप चित्र पर टिप्पणी लिखें। बीच निम्नलिखित सहसंबंध को दर्शाने के लिए विक्षेप चित्र की आकृति खींचें :

(i) रैखिक (ii) रैखिक और पूर्ण (iii) गैर-रैखिक (iv) x और y के बीच सह संबंध का अभाव

(b) विक्षेप चित्र खींचते वक्त अगर सभी बिन्दु प्रतीत होते हैं एक सीधी रेखा नीचे की ओर बायें से दाहिनी ओर जाते हुए, तब यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि

(i) पूर्ण धनात्मक सहसंबंध; (ii) सरल धनात्मक सहसंबंध

(iii) पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध (iv) कोई सहसंबंध नहीं

11. निम्नलिखित दिये गये जोड़े मूल्यों के लिए :

लगाई गई पूँजी (करोड़ रु. में)	:	2	3	5	6	8	9
लाभ (लाख रुपयों में)	:	6	5	7	8	12	11

(a) एक विक्षेप चित्र बनाए।

(b) क्या आप सोचते हैं कि लाभ और लगाई गई पूँजी के बीच कोई सहसंबंध है? क्या यह धनात्मक है या ऋणात्मक? क्या यह उच्च है या कम है?

(c) आलेखीय निरीक्षण के द्वारा, एक प्राक्कलन रेखा खींचे।

12. एक उच्च स्तरीय सहसंबंध रहते हुए भी इसका अर्थ यह नहीं है कि दो सहसंबंधित चरों के बीच कार्यकारण वा संबंध हैं' विवेचना करें।

टिप्पणी

13. निम्नलिखित समंक से एक विक्षेप चित्र खींचे :

ऊँचाई (इकाईयों में)	:	62	72	70	60	67	70	64	65	60	70
वजन (पौण्ड में)	:	50	65	63	52	56	60	59	58	54	65

यह भी बताएं कि क्या सहसंबंध धनात्मक है या ऋणात्मक।

14. नीचे दिए गए समंक से एक विक्षेप चित्र खींचे और इसकी व्याख्या करें।

x	:	10	20	30	40	50	60	70	80
y	:	32	20	24	36	40	28	38	44

6.5 कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (सह विचरण विधि) (Karl Pearson's Coefficient of Correlation (Co-variance Method))

दो चरों के बीच रैखिक संबंधों की तीव्रता या परिमाण को मापने की गणितीय विधि की श्रेणी कार्ल पियर्सन द्वारा (1967-1936) सुझाई गई बिट्रेन के एक महान जैव–विज्ञानी और सांख्यिकीविद् और अब तक सबसे अधिक व्यवहार में प्रयुक्त होने वाली विधि है।

कार्ल पियर्सन की माप, जिसे दो चरों (श्रेणियों) x और y के बीच पियर्सन का सहसंबंध गुणांक कहा जाता है, सामान्यतः $r(x, y)$ या Y_{xy} या सामान्य से द्योतित होती है उनके बीच के रैखिक संबंध की संख्यात्मक माप है और परिभाषित होती है x और y के बीच के सह-विचरण के अनुपात, जो लिखा जाता है Cov (X, Y) से, और x और y के प्रमाप विचलन के गुणनफल से। संकेत सूत्रों से,

$$r = \frac{Cov.(x, y)}{\sigma x.\sigma y} \qquad \ldots(6.1)$$

अगर $(x_1, y_1)(x_2, y_3) - - - (x_n, x_n)$ x और y चरों के n जोड़े अवलोकन हैं एक द्विचर वितरण में, तब

$$\text{Cov.}(x, y) = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}); \sigma x = \sqrt{\frac{1}{n}(x - x)^2}; \sigma y = \sqrt{\frac{1}{n}(x - x)^2} \ \ldots(6.2)$$

संकलन (Σ) n जोड़ों के अवलोकनों पर लिया गया है। (6.1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^2 \frac{1}{n}\Sigma(y - \bar{y})^2}} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2 \Sigma(y - \bar{y})^2}} \quad \ldots(6.3)$$

टिप्पणी

सूत्र (6.3) निम्न तरह भी लिखा जा सकता है

$$r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 . \Sigma dy^2}} \quad \ldots(6.3a)$$

जहाँ dx और dy x और y के मूल्यों को क्रमशः उनके समान्तर माध्यों $\bar{x}$ और $\bar{y}$ से विचलन द्योतित करती है

$$\text{i.e., } dx = x - \bar{x}, dy = y - \bar{y} \quad \ldots(6.3b)$$

(6.2) के सरलीकरण से हम पाते हैं

$$\text{Cov. } (x, y) = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \frac{1}{n}\Sigma xy - \bar{x}\ \bar{y} \quad \ldots(6.4)$$

$$\Rightarrow \text{ Cov. } (x, y) = \frac{1}{n}\Sigma xy - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)\left(\frac{\Sigma y}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left[n\overline{\Sigma}xy - (\Sigma x)(\Sigma y)\right] \quad \ldots(6.4a)$$

$$\sigma x^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x - -\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\Sigma x^2 - x^2 \ [\text{c.f. अध्याय } 6\ ]$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma x^2 - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left[n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\right] \quad \ldots(6.4b)$$

उसी तरह से, हमें $\sigma y^2 = \frac{1}{n^2}\left[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2\right]$ …(6.4c)

(6.4a), (6.4b) और (6.4c) से (6.1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं :

$$\gamma = \frac{\frac{1}{n^2}[n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)]}{\sqrt{\frac{1}{n^2}\{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2\}}\sqrt{[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]}} \quad \ldots(6.5)$$

टिप्पणियाँ: सूत्र (6.3) और (6.3a) का प्रयोग करना काफी सुविधाजनक है यदि $\bar{x}$ और $\bar{y}$ पूर्णांक (i.e., पूर्ण संख्या) आती हैं। और $\bar{x}$ और $\bar{y}$ है (है) भिन्न तब (6.3) और (6.3a) का प्रयोग काफी जटिल है चूँकि $\Sigma(x-\bar{x})^2 \cdot \Sigma(y-\bar{y})^2$ और $\Sigma(x-\bar{x}) \cdot (y-\bar{y})$ का गणन काफी समय खर्च करने वाला और टेढ़ा हो जाता है। ऐसी स्थिति में सूत्र (6.5) का प्रयोग हो सकता है बशर्तें x या/और y का मूल्य छोटा हो। परन्तु अगर x और y बड़े मूल्य धारण करते हैं, $\Sigma x^2, \Sigma y^2$ और Σxy का गुणन काफी समय लेने वाला हो जाता है।

इसलिए अगर (i) $\bar{x}$ और $\bar{y}$ भिन्न है और (ii) x और y बड़े मूल्य धारण करते हैं, तब सूत्र (6.3) और (6.5) सामान्यतः संख्यात्मक सवालों में प्रयुक्त नहीं होते हैं। इन स्थितियों में, पद विचलन रीति जहाँ हम चरों X और Y के विचलन किसी यादृच्छिक बिन्दु से लेते हैं, प्रयुक्त होती है। हम इस विधि की विवेचना सहसंबंध गुणांक के गुणों (c.f. 6.4.1 पृ........) के बाद करेंगे।

2. कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक आघूर्ण गुणक सहसंबंध गुणांक कहलाती है।

टिप्पणी

उदाहरण 6.2 नीचे दिये गये आँकड़े से विज्ञापनों में खर्च और बिक्री के बीच कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक परिकलित करें।

विज्ञापन खर्चे ('000 रु. में)	:	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
बिक्री (लाख रुपयों में)	:	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

हल : मान लें विज्ञापन के खर्चे ('000 रु. में) और बिक्री (लाख रु. में) क्रमशः चर x और y से द्योतित की जाती है।

x	y	$dx = x-\bar{x}$ $= x - 65$	$dy = y-\bar{y}$ $= y - 66$	dx^2	dy^2	$dxdy$
39	47	-26	-19	676	361	494
65	53	0	-13	0	169	0
62	56	-3	-8	9	64	24
90	86	25	20	625	400	500
82	62	17	-4	280	16	-68
75	68	10	2	100	4	20
25	60	-40	-6	1600	36	240
98	91	33	25	1089	625	825
36	51	-29	-15	841	225	435
78	84	13	18	169	324	234
Σx=650	Σy=660	Σdx=0	Σdy=0	Σdx^2=5398	Σdy^2=2224	$\Sigma dxdy$=2704

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{650}{10} = 65; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{660}{10} = 66;$$

$dx = x - \bar{x} = x - 65$ और $dy = y - \bar{y} = y - 66$

$$\gamma = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 . \Sigma dy^2}} = \frac{2704}{\sqrt{5398 \times 2224}} = \sqrt{\frac{2704}{12005152}} = \frac{2704}{3464.8451}$$

$$= 0.7804$$

$$\text{Aliter : } \Rightarrow \log r = \log 2704 - \frac{1}{2}[\log 5398] + \log 2224$$

$$= 3.4320 - \frac{1}{2}(3.7325 + 3.3472) = 3.4320 - 3.53985$$

$$= -0.10785 = \bar{1}.89215$$

$$\Rightarrow r = Anti\log(\bar{1}.89215) = 0.7802$$

इसलिए काफी उच्च स्तर की धनात्मक सहसंबंध विज्ञापन पर खर्च और बिक्री के बीच हैं। हम लोग, इसलिए निष्कर्ष निकाल सकते है कि विज्ञापन खर्च में वृद्धि से बिक्री में वृद्धि होती है।

उदाहरण 6.3 निम्नलिखित सारणी से कार्ल पियर्सन विधि से सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

X :	6	2	10	4	8
Y :	9	11	2	8	7

X और Y श्रेणी का समान्तर माध्य क्रमशः 6 और 8 है।

हलः सर्वप्रथम हम Y का लुप्त मान ज्ञात करेंगे। माना कि Y-श्रेणी में लुप्त मान 'a' है। तब माध्य $\bar{y}$ दिया जाता है :

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{a + 11 + a + 8 + 7}{5} = \frac{35 + a}{5} = 8 \text{ (दिया गया है)}$$

$$\Rightarrow 35 + a = 5 \times 8 = 41 \Rightarrow a = 40 - 35 = 5$$

x	y	$x - \bar{x}$ $= x - 6$	$(y - \bar{y})$ $= y - 8$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})$ $(y - \bar{y})$
6	9	0	1	0	1	0
2	11	-4	3	16	9	-12
10	5	4	-3	16	9	-12
4	8	-2	0	4	0	-0
8	7	2	-1	4	1	-2
Σx=30	Σy=40	0	0	$\Sigma (x - \bar{x})^2 = 40$	$\Sigma (y - \bar{y})^2$=20	$\Sigma (x - \bar{x}) (y - \bar{y})$ = -26

हमें, $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{5} = \frac{30}{5} = 6, \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{5} = \frac{40}{5} = 8$

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक दिया जाता है :

$$\gamma = \frac{Cov(x, y)}{\sigma x . \sigma y} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{-26}{\sqrt{40 \times 20}} = \frac{-26}{\sqrt{800}} = \frac{-26}{28.2843} = -0.9192 \approx -0.92$$

उदाहरण 6.4 निम्नलिखित समंक से X और Y श्रेणी के बीच सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें :

	श्रेणी X	श्रेणी Y
अवलोकनों के जोड़ों की संख्या	15	15
समान्तर माध्य	25	18
प्रमाप विचलन	3.01	3.03
माध्य से विचलनों के वर्गों का योगफल	136	138

टिप्पणी

x और y श्रेणियों के विचलन गुणकों का योगफल उनके समान्तर माध्य से = 122

हलः सामान्य संकेतनों में, हमें दिया गया है :

$$n = 15 \quad \bar{x} = 25 \quad \bar{y} = 18, \sigma x = 3.01, \qquad \sigma y = 3.03$$

$$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 136, \quad \Sigma(y-\bar{y})^2 = 138 \text{ और } \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 122$$

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध x और y श्रेणी के बीच दिया जाता है

$$\gamma = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n.\sigma x.\sigma y} = \frac{122}{15 \times 3.01 \times 3.03}$$

$$\Rightarrow \log r = 2.0864 - [1.1761 + 0.4786 - 0.4814]$$

$$= 2.0864 - 2.1361 = -0.0497 = \bar{1}.00900502$$

$$\Rightarrow r = Anti\log(\bar{1}.9502) = 0.8917$$

टिप्पणीः यहाँ हम देखते हैं कि दिए समंक में से कुछ अपेक्षाधिक है viz.

$$\bar{x}, \bar{y}, \Sigma(x-\bar{x})^2, \Sigma(y-\bar{y})^2$$

Aliter : हम लोग सहसंबंध गुणांक की गुणना इस सूत्र का प्रयोग कर भी कर सकते है

$$\gamma = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2(y-\bar{y})^2}} = \frac{122}{\sqrt{136 \times 138}}$$

$$\log r = 2.0864 - \frac{1}{2}[2.1335 + 2.1399] = 2.0864 - 2.1367$$

$$= -0.0503 = \bar{1}.9497$$

$$\Rightarrow r = Anti\log(\bar{1}.9497 = 0.8904$$

अगर हम इस सूत्र का प्रयोग करते हें, तो समंक $n, \bar{x}\ \bar{y}, \sigma x$ और σy से सम्बन्धित फिजूल है।

उदाहरण 6.5: दो चरों X और Y के बीच सहसंबंध का गुणांक 0.48 है। सह विचरण 36 है। X का विचरण 16 Y का प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

हलः हमें दिया गया है ;

$$\gamma xy = 0.48, Cov(x,y) = 36, \sigma x^2 = 16 \quad \Rightarrow \sigma x = 4$$

हमें, $$\gamma xy = \frac{Cov.(x,y)}{\sigma x.\sigma y} \Rightarrow \sigma y = \frac{Cov.(x,y)}{\sigma x.\sigma y}$$

$$\therefore \qquad \sigma y = \frac{36}{4 \times 0.48} = \frac{9}{0.48} = 18.75$$

टिप्पणी

उदाहरण 6.6: निम्नलिखित सूचना दी गई है :

$\gamma xy = 0.8, \Sigma xy = 60, \sigma y = 2.5$ और $\Sigma x^2 = 90,$ जहाँ x और y उनके क्रमानुसार माध्य से विचलन हैं, मदों की संख्या (n) निकालें।

हल: हमें, $\sigma x^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\Sigma x^2 = \frac{90}{n} (\because x - \bar{x} = x)$

$$\gamma = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n \cdot \sigma x \cdot \sigma y} = \frac{\Sigma xy}{n\sigma x \cdot \sigma y} \begin{bmatrix} \therefore X - \bar{Y} = x; \\ Y - \bar{Y} = y; \sigma X = \sigma x \\ \sigma Y = \sigma y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 0.8 = \frac{60}{n \cdot \sqrt{\frac{90}{n}} \cdot (2.5)} = \frac{60 \times 2}{\sqrt{n}\sqrt{90 \times 5}} = \frac{24}{\sqrt{n}\sqrt{90}}$$

दोनों तरफ वर्ग करके और परिवर्तन (Transposing) करके, हम पाते हैं :

$$n = \frac{24 \times 24}{90 \times 0.8 \times 0.8} = 10$$

उदाहरण 6.7: एक कम्प्यूटर ने दो चरों X और Y के 25 जोड़ों के अवलोकनों का सहसंबंध गुणांक परिकलित करने के क्रम में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किए:

$$n = 25, \quad \Sigma x = 125, \quad \Sigma x^2 = 650, \Sigma Y = 100, \quad \Sigma Y^2 = 460, \quad \Sigma XY = 508$$

हालाँकि जाँच करते वक्र यह पाया गया कि अवलोकनों के दो जोड़े सही रूप से कॉपी नहीं किये गये। वे (6, 14) और (8, 6) लिये गये जबकि सही मूल्य (8, 12) और (6, 8) थे। सिद्ध करें कि सहसंबंध गुणांक सही मूल्य का 2/3 होना चाहिये।

हल: संशोधित $\Sigma X = 125 - 6 - 8 + 8 + 6 = 125$

संशोधित $\Sigma Y = 100 - 14 - 6 + 12 + 8 = 100$

संशोधित $\Sigma X^2 = 650 - 6^2 - 8^2 + 8^2 + 6^2 = 650$

संशोधित $\Sigma Y^2 = 460 - 14^2 - 6^2 + 12^2 + 8^2 = 436$

संशोधित $\Sigma XY = 508 - 6 \times 14 - 8 \times 6 + 8 \times 12 + 6 \times 8 = 520$

γ का संशोधित मूल्य दिया जाता है :

$$\gamma = \frac{n\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[n\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2] \times [n\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} = \frac{25 \times 520 - 125 \times 100}{25x}$$

$$= \frac{25 \times 520 - 125 \times 100}{\sqrt{[25 \times 650 - (125)^2] \times [25 \times 436 - (100)^2]}}$$

$$= \frac{13000 - 12500}{\sqrt{(16255 - 15625) \times (10900 - 10000)}} = \frac{500}{\sqrt{625 \times 900}}$$

टिप्पणी

$$= \frac{500}{25 \times 30} = 2/3 \text{ Proved}$$

6.5.1 सहसंबंध गुणांक के गुण (Merits of Coefficient Correlation)

गुण 1. सहसंबंध गुणांक की सीमायें

पियर्सन का सहसंबंध गुणांक संख्यात्मक रूप से 1 से ज्यादा नहीं हो सकता है। दूसरे शब्दों में यह –1 और +1 के बीच रहता है। संकेताक्षरों में,

$$-1 \le r \le +1 \qquad \ldots(6.6)$$

टिप्पणियाँ 1. यह प्रमेय हमें अपने परिकलनों पर रोक लगाते हैं।

अगर किसी प्रश्न में, r का प्राप्त मान $\pm$ सीमा से बाहर है, इसका अर्थ है कि हमारे परिकलन में कुछ गलती है।

2. $r = +1$ का अर्थ है चरों के बीच पूर्ण धनात्मक सहसंबंध है और $r = -1$ का अर्थ है चरों के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध है।

गुण I सहसंबंध गुणांक मूल–बिन्दु और मापक्रम के परिवर्तन से स्वतंत्र है : गणितीय रूप से, अगर x और y दिये गये चर हैं और वे नये चरों u और v में परिवर्तित हो जाते हैं मूल–बिंदु और मापक्रम के परिवर्तन से viz.

$$u = \frac{x - A}{h} \text{ और } v = \frac{y - B}{k}; h > 0, k > 0 \qquad \ldots(6.7)$$

जहाँ A, B h और k नियतांक हैं, *h.0, k.0;* तब x और y के बीच सहसंबंध उतना ही है जितना u और v के बीच *i.e.*

$$r(x, y) = r(u, v) \Rightarrow r_{xy} = r_{uv} \qquad \ldots(6.8)$$

टिप्पणी : यह सहसंबंध गुणांक का बहुत महत्वपूर्ण गुण है और r का संख्यात्मक गणना में बहुत सहायक है। हमने पहले ही बताया। [c.f. टिप्पणी 6.3] कि सूत्र (6.3) और (6.5) बहुत जटिल हो जाता है प्रयोग करने में संख्यात्मक प्रश्नों में यदि $\bar{x}$ और/या $\bar{y}$ भिन्न में है या अगर x और y विशाल होते हैं। ऐसी स्थिति में हमलोग सुविधापूर्वक मूल–बिन्दु और मापक्रम (अगर सम्भव हो) में परिवर्तन कर नया चर u और v प्राप्त करते हैं और u और v के बीच सह–सबंध की गणना सूत्र

$$r_{uv} = \frac{\Sigma(U - \bar{u})(V - \bar{v})}{\sqrt{\Sigma(U - \bar{u})^2 \cdot \Sigma(V - \bar{v})^2}} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}} \qquad \ldots(6.9)$$

टिप्पणी

अब गुण II का प्रयोग कर, हम अंत में पाते हैं :

$$r_{xy} = r_{vu}$$

गुण III: दो स्वतंत्र चर असह-संबंधित हैं जबकि इसका विपरीत यथार्थ नहीं है।

अगर x और y स्वतंत्र हैं तब $r_{xy} = 0$

$\Rightarrow$ स्वतंत्र चर असह-संबंधित हैं।

विपरीतः हालाँकि प्रमेय का विपरीत यथार्थ नहीं है i.e., असह-संबंधित चर जरूरी नहीं कि स्वतंत्र हों। उदाहरण के लिए निम्नलिखित द्विचर वितरण का विचार करें।

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	Σx=0
y	16	9	4	1	1	4	9	16	Σy=60
xy	-64	-27	-8	-1	1	8	27	64	Σxy=0

$$\therefore r_{xy} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}} = \frac{8\times 0 - 0\times 60}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

चूंकि शून्य को किसी परिमित (Finite) संख्या से भाग देने पर शून्य आता है। इसलिए, उपर्युक्त उदाहरण में चर x और y असह-संबंधित हैं। परंतु जब हम आँकड़े की सतर्कता से परीक्षण करते हैं, हम पाते हैं कि x और y स्वतंत्र नहीं है परंतु जुड़े हैं संबंध से $y - x^2$ उपर्युक्त उदाहरण दृष्टांत है कि असह–संबंधित चरों को आवश्यक नहीं कि स्वतंत्र हो।

टिप्पणियाँ 1: किसी को असह–संबंधित और स्वतंत्रता शब्दों से संभ्रमित नहीं होना चाहिए। $r_{xy} = 0$ i.e., x और y चरों के बीच असह–संसबंध का सरल अर्थ है उनके बीच रैखिक सहसंबंध का उनके बीच अभाव। वे, यद्यपि, किसी दूसरे रूप में (रैखिक से अलग) i.e. द्विघात वर्ग (Qudratic) (जैसा हम ऊपर के उदाहरण में देख चुके हैं), लघु गुणकीय या त्रिकोणमितीय रूप में।

2. सहसंबंध के कुछ और गुण आगे के अध्याय प्रतीपगमन विश्लेषण में दिए गए हैं।

गुण IV : $r(aX+b, cY+d) = \frac{a\times c}{|a\times c|}, r(x,y)$

जहाँ $|a \times c|$ मापांक मूल्य है।

टिप्पणीः चूँकि सहसंबंध गुणांक मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र है, हम पाते हैं :

$$r(aX+b, CY+d) = r(aX, CY) = \frac{a\times c}{|a\times c|}\cdot r(X,Y)$$

टिप्पणी

गुण V: अगर चर x और y रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ से संबंधित हैं, तब x और y के बीच सहसंबंध गुणांक (+1) है अगर a और b के चिन्ह भिन्न हैं और (-1) है जब a और b के चिन्ह एक समान हैं।

संकेताक्षरों में, अगर $ax+by+c=0,$ तब

$$r = r(x,y) = \begin{Bmatrix} +1, \text{जब } a \text{ और } b \text{ विपरीत चिन्हों के हैं} \\ -1, a \text{ और } b \text{ एक ही चिन्ह के हैं} \end{Bmatrix}$$

उदाहरण 6.8: x और y के विचलनों के गुणनफल का योगफल है = 3044 प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या 10 है। x के विचलनों का कुल = - 170 Y के विचलनों का कुल =-20| X के विचलनों के वर्गों का योगफल = 6288. Y के विचलनों के वर्गों का योगफल = 2264।

सहसंबंध का गुणांक निकाले जब x और y के यादृच्छिक माध्य क्रमशः 82 और 68 हैं।

हल : माना कि $u = x$-82 और $V = Y$-68 तब हमें दिया गया है :

$$x = 10, \Sigma uv = 3044, \Sigma u = -170, \Sigma v = -20, \Sigma u^2 = 8288, \Sigma v^2 = 2264$$

चूँकि सहसंबंध गुणांक (r) मूल बिंदु के परिवर्तन से स्वतंत्र हैं, हमें

$$r(x,y) = r(u,v) = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \Sigma v}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}}$$

$$= \frac{10 \times 3044 - (-170)(-20)}{\sqrt{[10 \times 8288 - (-170)^2][10 \times 2264 - (-20)^2]}}$$

$$= \frac{30446 - 3400}{\sqrt{82.880 - 22900}\sqrt{22640 - 400}}$$

$$= \frac{27040}{\sqrt{53980}\sqrt{22240}} = \frac{27040}{232.34 \times 149.13} = \frac{27040}{34648.86}$$

$$= +0.78$$

उदाहरण 6.9: निम्नलिखित समंक से सहसंबंध गुणांक $r(x,y)$ परिकलित करें :

$$n = 10, \Sigma x = 140, \Sigma y - 150, \Sigma(x-10)^2 = 180, \Sigma(y-15)^2 = 215,$$

$$\Sigma(x-10)(y-15) = 60$$

हलः मान लें, हम लेते हैं $u = x - 10$ और $v = y - 15,$ तब हमें

$$\Sigma u = \Sigma(x-10) = \Sigma x - 10xn = 140 - 100 = 40$$

$$\Sigma v = \Sigma(y-10) = \Sigma y - 15xn = 150 - 150 = 0$$

$$\Sigma u^2 = \Sigma(x-10)^2 = 180; \Sigma v^2 = \Sigma(y-15)^2 = 215$$

$$\Sigma uv = \Sigma(x-10)(y-15) = 60$$

$$\therefore \gamma_{xy} = \gamma_{uv} = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \Sigma v}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}}$$

$$= \frac{10\times 60 - 40\times 0}{\sqrt{[10\times 180 - (40)^2][10\times 215 - 0]}} = \frac{600}{\sqrt{200\times 2150}} = \frac{6}{\sqrt{43}} = \frac{6}{6557} = 0.91$$

उदाहरण 6.10 पतियों और पत्नियों के उम्रों के लिए सह-संबंध का गुणांक परिकलित करें :

पति की उम्र (वर्ष)	:	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
पत्नी की उम्र(वर्ष)	:	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

हलः

x	y	u=x-31	v=y-25	u^2	v^2	uv
23	18	-8	-7	64	49	56
27	22	-4	-3	16	9	12
28	23	-3	-2	9	4	6
29	24	-2	-1	4	1	2
30	25	-1	0	1	0	0
31	26	0	1	0	1	0
33	28	2	3	4	9	6
35	29	4	4	16	16	16
36	30	5	5	25	25	25
37	32	8	7	64	49	56
Σx=311	Σy=257	Σ u=1	Σ v=7	Σ u²=203	Σ v²=163	Σuv=179

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक X और Y के बीच दिया जाता है,

$$\gamma_{uv} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(v = \Sigma v)}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}} = \frac{10\times 179 - 1\times 7}{[10\times 203 - (1)^2][10\times 163 - (7)^2]}$$

$$= \frac{1790-7}{(2030-1)(1630-49)} = \frac{1783}{\sqrt{2029\times 1581}} = \frac{1783}{45.04\times 34.76}$$

$$= \frac{1783}{1790.79} = 0.9956$$

चूँकि कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (r) मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र होता है, हम पाते हैं

$$\gamma_{xy} = \gamma_{uv} = 0.9956$$

टिप्पणी

नोटः यह नोट किया जा सकता है कि x और y के मूल्य, सिर्फ तीन जोड़ों को छोड़कर, जुड़ा हुआ है रैखिक संबंध $y = x - 5$ से आगे जैसे x का मूल्य घटता (बढ़ता) है, y का मूल्य भी घटता (बढ़ता) है। इसलिए, हम लोग बहुत उच्च श्रेणी का धनात्मक सहसंबंध (करीब–करीब पूर्ण) अपेक्षा कर सकते हैं, r का मूल्य +1 के करीब पहुँच जाता है।

उदाहरण 6.11: कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें निम्नलिखित 10 प्रतिष्ठाओं के बिक्री और खर्चों के बीच :

प्रतिष्ठान	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बिक्री ('000 इकाईयाँ)	:	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50
खर्चे ('000 रुपये)	:	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13

हलः मान लें एक प्रतिष्ठान का बिक्री ('000 इकाईयों में) से द्योतित होता है और खर्चे ('000 रुपये में) y से। यह नोट किया जा सकता है कि हम x श्रेणी में 5 कामन गुणक ले सकते हैं। इसलिए, यह सुविधाजन होगा, कि x के मापक्रम को भी परिवर्तित करें। 65 और 13 कार्य के लिए x और y के लिए माप लेकर, हम लें, तो

$$u = (x - 65)/5; v = y - 13$$

प्रतिष्ठान	x	y	$u = \dfrac{x-65}{5}$	$v=y-13$	u^2	v^2	uv^2
1	50	11	-3	-2	0	4	6
2	50	13	-3	0	9	0	0
3	55	14	-2	1	4	1	-2
4	60	16	-1	3	1	9	-3
5	65	16	0	3	0	9	0
6	65	15	0	2	0	4	0
7	65	15	0	2	0	4	0
8	60	14	-1	1	1	1	-1
9	60	13	-1	0	1	0	0
10	50	13	-3	0	9	0	0
	Σx=580	Σy=140	Σ u=14	Σ v=10	Σ u^2=34	Σ v^2=32	Σuv=0

कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक u और v के बीच दिया जाता है

$$\gamma_{uv} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2][n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]} = \frac{10 \times 0 - (-14) \times 10}{[10 \times 34 - (-14)^2][10 \times 32 = -(10)^2]}$$

टिप्पणी

$$= \frac{140}{(340-196)\times(320-100)} = \frac{140}{\sqrt{144\times 220}} = \frac{140}{\sqrt{31680}}$$

$$= \frac{140}{177.99} = 0.7866$$

चूँकि सहसंबंध गुणांक मूल बिंदु और मापक्रम के परिवर्तन से स्वतंत्र है, इसलिए अंत में हमें

$$\gamma \times y = \gamma_{uv} = 0.7866$$

Aliter : हमें $x = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{580}{10} = 56; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{140}{10} = 14$

चूँकि $\bar{x}$ और $\bar{y}$ पूर्णांक हैं, सुविधात्मक होगा r की गणना माध्य से ही विचलन सीधे लेकर i.e.

$$dx = x - \bar{x} = x - 56; \quad dy = y - \bar{y} = y - 14$$

उदाहरण 6.12 कार्ल पियर्सन सहसंबंध गुणांक निकाले लोगों की उम्र और उनके खेलने की आदत के बीच निम्नलिखित सूचना से। यह भी बतायें कि आपका परिकलित r क्या द्योतित करता है।

उम्र समूह	लोगों की संख्या	खिलाड़ियों की संख्या
15 और 20 से कम	200	150
20 और 25 से कम	270	162
25 और 30 से कम	340	170
30 और 35 से कम	360	180
35 और 40 से कम	400	180
40 और 45 से कम	300	120

हल : हम कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक लोगों की उम्र और खेलने की आदत के बीच निकालने चाहते हैं। इसको निकालने के लिए, एक कॉमन आधार पर खिलाड़ियों की संख्या प्रत्येक उम्र समूह में अभिव्यक्त करते हैं i.e. हम खिलाड़ियों की संख्या एक नियम संख्या के लोगों में से निकालते हैं (एक कॉमन आधार) जो 100 या 1000 या कोई भी सुविधाजन अंक लिया जया सकता है। यहाँ हम खिलाड़ियों की संख्या को कुल लोगों की उस उम्र समूह में संख्या के प्रतिशत में अभिव्यक्त करते हैं।

टिप्पणी

उम्र समूह वर्ष (1)	लोगों की संख्या (2)	खिलाड़ियों की संख्या (3)	खिलाड़ियों का प्रतिशत (4) = (3) ×100
15-20	200	150	150/200×100=75
25-25	270	162	162/270×100=60
25-30	340	170	170/340×100=50
30-35	360	180	180/360×100=50
35-40	400	180	180/400×100=45
40-45	300	120	120/300×100=40

अब हम कार्ल–पियर्सन का सहसंबंध गुणांक लोगों की उम्र (x) और उस उम्र समूह में खिलाड़ियों के प्रतिशत (y) की गणना करते हैं।

उम्र समूह	माध्यमान (x)	(y)	$u=\dfrac{x-275}{5}$	$v=\dfrac{y-50}{5}$	u^2	v^2	uv
15-20	17.5	75	-2	5	4	25	-10
25-25	22.5	60	-1	2	1	4	-2
25-30	27.5	50	0	0	0	0	0
30-35	32.5	50	1	0	1	0	0
35-40	37.5	45	2	-1	4	1	-2
40-45	42.5	40	3	-2	9	4	-6
			Σu=3	Σv=4	Σu^2=19	Σv^2 =34	Σuv=-20

चूँकि सहसंबंध गुणांक मूल–बिंदु और मापक्रम के परिवर्तन से स्वतंत्र है हमें

$$n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)$$

$$\gamma_{xy}=\gamma_{uv}=\frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{[n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2]}\sqrt{[n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2]}}$$

$$=\frac{6\times(-20)-3\times 4}{\sqrt{[6\times 19-(3)^2][6\times 34-(4)^2]}}=\frac{-120-12}{\sqrt{(114-9)\times(204-16)}}$$

$$\frac{-132}{\sqrt{105\times 118}}=\frac{-132}{\sqrt{10740}}=\frac{-132}{140.4991}=-0.9395$$

इसलिए, हम लोग निष्कर्ष निकालते हैं कि बहुत ऊँचे स्तर का ऋणात्मक सहसंबंध है। (करीब–करीब पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध) उम्र (x) और खेलने की आदत (y) के बीच। इसका मतलब है कि उम्र में बढ़ने के साथ, लोगों के खेलने की रुचि में कमी होती जाती है और विक्षेप चित्र (x, y) मूल्य ऐसे बिंदु देती हैं जो

संघनित है लगभग सरल रेखा पर जो बाँयें शीर्ष से शुरू होकर दाहिने निम्न तक जाती है।

टिप्पणी

उदाहरण 6.13: (i) सहसंबंध गुणांक की गणना x और y के संगत मूल्यों के लिए निम्नलिखित सारणी के आधार पर करें :

x	2	4	5	6	8	11
y	18	12	10	8	7	5

(ii) सारणी के प्रत्येक x के मूल्य को 2 से गुणा करें और 6 जोड़ें। प्रत्येक y के मूल्य को 3 से गुणन करें और 15 घटाए। अब दो नए प्राप्त मूल्यों के समुच्चय का सहसंबंध गुणांक प्राप्त करें। वर्णन करें कि क्यों पाते हैं या नहीं पाते है ंवही परिणाम जो (i) का है।

हल : (i) सहसंबंध गुणांक की गणना

x	y	$x-\bar{x}$ $= x-6$	$y-\bar{y}$ $= y-10$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(y-\bar{y})$
2	18	-4	8	16	64	-32
4	12	-2	2	4	4	-4
5	10	-1	0	1	0	0
6	8	0	-2	0	4	0
8	7	2	-3	4	9	-6
11	5	5	-5	25	25	-25
Σx=36	Σy=60	$\Sigma\ (x-\bar{x}) = 0$	$\Sigma\ (y-\bar{y}) = 0$	$\Sigma\ (x-\bar{x})^2 = 50$	$\Sigma\ (y-\bar{y})^2 = 106$	$\Sigma\ (x-\bar{x})(y-\bar{y}) = -67$

हमें, $\bar{X} = \frac{1}{6}\Sigma X = \frac{36}{6} = 6$ और $\bar{Y} = \frac{1}{6}\Sigma Y = \frac{60}{6} = 10$

इसलिए x और y के बीच सहसंबंध गुणांक दिया जाता है

$$\gamma_{xy} = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{[\Sigma(X-\bar{X})^2(Y-\bar{Y})^2]^{1/2}} = \frac{-67}{\sqrt{50106}} = \frac{-67}{\sqrt{5300}}$$

$$= \frac{-67}{32.81} = -0.92$$

इसलिए, चर x और y काफी ऋणात्मक सहसंबंधित हैं।

(ii) हम लोग नए चर u और v को निम्न प्रकार से परिभाषित करें :

$$U = 2X + 6 \text{ और } V = 3Y - 15$$

अब वांछित है कि नए मूल्यों के समुच्चय को बीच सहसंबंध गुणांक निकालें जैसा कि निम्नलिखित तालिका में दिया गया है :

सहसंबंध गुणांक की गणना U और V के लिए

टिप्पणी

x	y	$U = 2X +$	$V = 3Y - 1$	U^2	V^2	UV
2	18	10	39	100	1521	390
4	12	14	21	196	441	294
5	10	16	15	256	225	240
6	8	18	9	324	81	162
8	7	22	6	484	36	132
11	5	28	0	764	0	0
कुल		Σu=108	Σv=90	Σu^2=2144	Σv^2=2304	Σuv =1218

$$\therefore \gamma_{uv} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{[n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2]}\sqrt{[n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2]}} = \frac{6\times1218 - 108\times 90}{\sqrt{6\times2144 - (108)^2}\sqrt{6\times 2304 - (90)^2}}$$

$$= \frac{7308 - 9720}{\sqrt{(12864 - 11664)(13824 - 8100)}} = \frac{-2412}{\sqrt{1200\times 5724}} = \frac{-2412}{\sqrt{6868860}}$$

$$= \frac{-2412}{2620.8395} = -0.92$$

उदाहरण 6.14: अगर दो यादृच्छिक चरों X और Y के बीच संबंध हैं $2x + 3y = 4,$ तब उनके बीच सहसंबंध गुणांक है

(i) -2/3 (ii) 1 (iii) -1, (iv) इनमें से कोई नहीं

हल : चूँकि x और y रैखिक संबंध से जुड़े हैं

$$2x + 3y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \qquad \ldots(*)$$

x और y के बीच पूर्ण सहसंबंध हैं, *i.e.* $r = \pm 1$ आगे चूँकि (*) से, जैसे–जैसे x बढ़ता है, y घटता है। इसलिए x और y के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध है।

$$\therefore r = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{(iii) सही उत्तर है।}$$

Aliter : अगर x और y जुड़े हैं रैखिक संबंध $ax + by + c = 0$ से, तब

$$r = \gamma(x, y) = \begin{cases} +1, \text{ अगर } a \text{ और } b \text{ के विपरीत चिन्ह है} \\ -1 \text{ अगर } a \text{ और } b \text{ के समान चिन्ह हैं} \end{cases}$$

हमें दिया गया है $\Sigma x + 3y = 4,$ चूँकि $a = 2$ और $b = 3$ का समान चिन्ह है,

$$r = \gamma(x, y) = -1$$

टिप्पणी

उदाहरण 6.15: एक द्विचर समंक के लिए $[(x, y)] = [(20,5),\ (21,4),\ (22,3)]$, x और y के बीच सहसंबंध गुणांक हैं :

(i) 0; (ii) 1, (iii) -1 (iv) 0.5

हल : दिए गए समंक के लिए, हम अवलोकन करते हैं कि

$20 + 5 = 25,\ 21 + + 4 = 25$ और $22 + 3 = 25$

इसलिए, x और y रैखिक संबंध से जुड़े हैं : $(x + y) = 25$ ...(*)

x और y के बीच पूर्ण सहसंबंध है $\Rightarrow r = \pm 1$ ...(**)

(*) से हम पाते हैं $y = 25 - x$

$\therefore$ जैसे–जैसे x बढ़ता है, y घटता है (समान परिमाण से)

$\Rightarrow$ x और y ऋणात्मक रूप से सहसंबंधित हैं ...(***)

(**) और (***) से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$\gamma = r(X, Y) = -1$$

Aliter : हम $r(X,Y)$ के मूल्य की गणना सूत्र का प्रयोग कर निकाल सकते हैं। यह एक प्रश्न के रूप में पढ़ने वाले के लिए छोड़ा गया है।

उदाहरण 6.16 दो चरों X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक 0.4 पाया जाता है। $2x$ और $-y$ के बीच क्या सहसंबंध है?

(*b*) ''अगर दो चरों के बीच सहसंबंध गुणांक धनात्मक है, तब $-x$ और $-y$ के बीच भी सहसंसबंध का गुणांक धनात्मक है।'' समीक्षा करें।

हल : हमें दिया गया है कि $r(x, y) = 0.4$ ...(i)

हम जानते हैं कि $r(ax, cy) = \dfrac{a \times c}{|a| \times |c|} \cdot r(x, y)$ ...(*)

(*) और (i) का प्रयोग कर, हम पाते हैं :

$$r(2x, -y) = r(2x, -1y) = \frac{2-1}{|2|x|-1|} r\ (r,y)$$

$$= \frac{-2 \times 0.4}{2 \times 1} = -0.4$$

(b) हमें दिया गया है : $r(x, y) > 0$ ...(ii)

(*) का प्रयोग कर, हम पाते हैं

$$r(-x, -y) = r(-1.x, -1.y) = \frac{(-1)\times(01)}{|-1|\times|-1|} r(x, y) = r(X, Y)$$

इसलिए, अगर $r(X,Y)$ धनात्मक है, सब $r(-x, -y)$ भी धनात्मक है।

6.5.2 कार्ल–पियर्सन के सहसंबंध की परिकल्पनाएँ (Karl Pearson's of Correlation Coeffcient Hypothesis)

टिप्पणी

पियर्सन का सहसंबंध गुणांक r निम्नलिखित परिकल्पनाओं पर आधारित हैं :

(i) अध्ययनाधीन चर X और Y रैखिक रूप से सम्बन्धित है : दूसरे शब्दों में, समंक का विक्षेप चित्र सरल रेखा वक्र प्रदान करेगी।

(ii) प्रत्येक चर (श्रेणी) बहुत प्रकार के स्वतंत्र योगदान करने वाले ऐसे कारणों की प्रकृति से प्रमाणित होती है कि वह प्रसामान्य वितरण प्रदान करती है : उदाहरण के लिए, उम्र, ऊँचाई, पूर्ति, कीमत इत्यादि से संबंधित चर इस परिकल्पना पर खड़े उतरते हैं। कार्ल पियर्सन के शब्दों में :

> ''जटिल अवयवों (जो मापा जा सकता है) के आकार का निर्धारण कई प्रकार के स्वतंत्र योगदान करने वाले कारणों से होती है, उदाहरण स्वरूप, जलवायु पोषण, शारीरिक प्रशिक्षण और असंख्य दूसरे कारण जिन्हें व्यक्तिगत रूप से अवलोकित नहीं किया जा सकता या उनका प्रभाव मापा जा सकता है।''

कार्ल पियर्सन आगे अवलोकित करते हैं ''योगदान करने वाले कारणों के विचरणों की तीव्रता उनके निरपेक्ष कारणों की तुलना में कम होती है और यह विचरण वितरण का प्रसामान्य नियम की अनुगामी होती है।''

(iii) इस तरह से प्रत्येक चर श्रेणी पर कार्य करने वाला बल एक दूसरे से स्वतंत्र नहीं हैं परंतु कार्य कारण के रूप में संबंधित हैं– दूसरे शब्दों में, दो चर श्रेणियों के मदो ंपर कार्य करने वाले विभिन्न बलों के बीच कार्य कारण का संबंध होता है। ये बल दोनों श्रेणियों के लिए निश्चित रूप से उभयनिष्ट (Common) होना चाहिए। अगर कार्यवाहक बल एक दूसरे से बिलकुल स्वतंत्र है और किसी भी तरह संबंधित नहीं हैं, तब अध्ययनाधीन चरों के बीच कोई सहसंबंध नहीं हो सकता है।

उदाहरण के लिए सहसंबंध निम्न के बीच :

(a) ऊँचाईयों की श्रेणी और व्यक्तियों की आय एक कालावधि में

(b) विवाह दर की श्रेणी और एक कालावधि में एक देश का कृषि उत्पादन की दर

(c) जूते के आकार से संबंधित श्रेणी और व्यक्तियों के समूह की बुद्धि शून्य होनी चाहिए, चूँकि इनमें से प्रत्येक उपर्युक्त स्थिति में दो चरों की श्रेणियों पर प्रभाव डालने वाले बल एक दूसरे से बिल्कुल स्वतंत्र हैं।

यद्यपि, अगर उपर्युक्त स्थितियों में दिये गये समंक के समुच्चयों का मान शून्य नहीं है तब इस तरह का सहसंबंध सांयोगिक सहसंबंध या बनावटी या भ्रामक सहसंबंध कहलाता है।

[6.1.3 भी देखें]

6.5.3 r की व्याख्या (Interpretation of r)

निम्नलिखित सामान्य बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिये सहसंबंध गुणांक r के प्रेक्षित मूल्य की व्याख्या करते वक्त :

(i) $r = +1$ का अर्थ है चरों के बीच पूर्ण सहसंबंध है। दूसरे शब्दों में, विक्षेप चित्र सीधी रेखा होगी जो नीचे बायें से शुरू होकर दायें ऊपर तक जाएगी जैसा चित्र 6.1, 6.3 में दर्शाई गई है।

(ii) $r = -1$ का अर्थ है चरों के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध। इस स्थिति में भी विक्षेप चित्र फिर सीधी रेखा होगी जेसा चित्र 6.1 6.3 में दर्शायी गई है।

(iii) अगर $r = 0$, चर अ सहसंबंधित है। दूसरे शब्दों में, चरों के बीच कोई रैखिक (सीधी रेखा) संबंध नहीं है। यद्यपि, $r = 0$ का अर्थ यह नहीं है कि चर स्वतंत्र है [c.f. गुण III, पृ.सं. ....]

(iv) दूसरे मूल्य जो r के लिए $+1$ से -1 के बीच होते हैं उनकी व्याख्या की कोई निश्चित नियमावली नहीं है। अधिकतम जो हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि r का मान जितना करीब है $+1$ के उतना अधिक चरों के बीच सहसंबंध है और r का मूल्य जितना शून्य के करीब है, उतना कम सहसंबंध चरों के बीच है। r का मूल्य की व्याख्या करने में हमें बहुत सतर्कता रखनी चाहिए क्योंकि ज्यादातर इसकी गलत व्याख्या कर दी जाती है।

(v) सहसंबंध गुणांक का भरोसा या मूल्य की सार्थकता कई कारकों पर निर्भर करता है। एक तरीका है r के सार्थकता परीक्षण से r का संभाव्य मूल्य ज्ञात करना [c.f. 6.5], जो r के मूल्य के अलावा प्रतिदर्श के आकार का भी ध्यान रखती है। एक गहन परीक्षण प्रतिदर्श सिद्धान्त में स्टूडेंट के t परीक्षण से दिया गया है। (अध्याय –7)

(vi) दूसरा अधिक उपयोगी माप r के मूल्य की व्याख्या के लिए निर्धारण का गुणांक है [c.f. 6.4]। यह अवलोकित किया गया है कि दो चरों के बीच की निकटता r के समानुपाती नहीं है।

6.6 संभाव्य विभ्रम (Probable Error)

सहसंबंध गुणांक के मान की गणना करने के बाद, दूसरा कदम है यह निकालना कि किस सीमा तक यह विश्वसनीय है। सहसंबंध का संभाव्य विभ्रम, साधारणः P.E.(r) द्वारा द्योतित एक पुराना माप है सहसंबंध गुणांक के प्रेक्षित मान के विश्वसनीयता परीक्षण का जहाँ तक यह यादृच्छिक प्रतिदर्श की स्थितियों पर निर्भर करता है।

अगर प्रतिदर्श के जोड़े का प्रेक्षित सहसंबंध गुणांक r है तब इसकी प्रमाप त्रुटि, साधारणतया 6.6(r) से द्योतित दी जाती है :

$$S.E. = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(6.10)$$

टिप्पणी

सहसंबंध गुणांक का संभाव्य विभ्रम दी जाती है :

$$P.E.(r) = 0.6745 \times S.E.(r) = 0.6745 \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(6.11)$$

कारक 0.6745 को लेने का कारण है कि प्रसामान्य वितरण में 50% प्रेक्षण $\mu \pm 0.6745$ की सीमा में पड़ते हैं, जहाँ μ माध्य है और Σ S.D. (प्रा.वि.) हैं।

सेक्रिस्ट के अनुसार : ''सहसंबंध गुणांक का संभाव्य विभ्रम वह परिमाण है जिसे माध्य सहसंबंध गुणांक से जब जोड़ा या घटाया जाता है, वह परिमाण देती है जिसकी सीमा में यहाँ तक कि एक श्रेणी से प्राप्त सहसंबंध गुणांक जो प्रतिदर्श आधार पर चुनी गई है भी पड़ेगी।''

संभाव्य विभ्रम के उपयोग (Uses of Probable Error)

1. सहसंबंध गुणांक के संभाव्य विभ्रम का प्रयोग समष्टि सहसंबंध गुणांक की सीमाएं जानने में की जा सकती है जिस सीमा में उसका पड़ना प्रत्यासित है। समष्टि (जनसंख्या) सहसंबंध गुणांक की सीमाएं हैं

$$r \pm P.E.(r) \qquad \ldots(6.12)$$

इसका अर्थ है कि अगर हम दूसरा प्रतिदर्श उसी आकार n का उसी समष्टि (जनसंख्या) से ले जिससे प्रथम प्रतिदर्श किया गया था, तब सहसंबंध गुणांक का प्रेक्षित मान कहें r_1 दूसरे प्रतिदर्श को भी उन्हीं सीमायें में रहने की जो (6.12) में दी गई हैं, प्रत्याशा की जा सकती है।

2. P.E. (r) का प्रयोग प्रतिदर्श सहसंबंध गुणांक के प्रेक्षित मान का परीक्षण करने में कि क्या यह समष्टि के सहसंबंध से सार्थक है। निम्न विधि मार्गदर्शक सिद्धान्तों का प्रयोग हो सकता है :

(i) अगर $r <$ P.E. (r) i.e., अगर r का प्रेषित मान इसके P.E. से कम है, तब सहसंबंध बिल्कुल सार्थक नहीं है।

(ii) अगर r > 6 P.e. (r) i.e., अगर r का प्रेक्षित मान इसके P.E. के 6 गुणा से ज्यादा है, तब r निश्चित रूप से सार्थक है।

(iii) दूसरी स्थितियों में, निश्चित रूप से कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है।

महत्त्वपूर्ण टिप्पणियाँ: 1. कभी–कभी, P.R. भ्रामक निष्कर्ष की ओर निर्देशित कर सकती है खासकर जब n, प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या छोटी है। P.E. का असरदार ढंग से प्रयोग करने के लिए, n को काफी बड़ा होना चाहिए। यद्यपि, प्रेक्षित प्रतिदर्श सहसंबंध गुणांक के सार्थकता परीक्षण के लिए स्टूडेंट के t परीक्षण ने काफी उमदा परीक्षण दिया है।

2. P.E. सिर्फ निम्न परिस्थितियों में प्रयोग हो सकता है :

(i) समंक निश्चित रूप से प्रसामान्य समष्टि से ली गई है।

(ii) यादृच्छिक प्रतिदर्शक की स्थिति हो प्रतिदर्श प्रेक्षणों के चुनाव में।

टिप्पणी

उदाहरण 6.17: निम्नलिखित अंकों की श्रेणियों से जो 10 छात्रों द्वारा एक कला टेस्ट परीक्षा में गणित और सांख्यिकी में प्राप्त किए गए से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध का गुणांक ज्ञात करें।

गणित में अंक	:	45	70	65	30	90	40	50	75	85	60
सांख्यिकी में अंक	:	35	90	70	40	95	40	60	80	80	50

इसके संभाव्य विभ्रम को भी परिकलित करें। कार्यवाहक माध्य के लिए 60 और 65 मानें।

(b) फिर विवेचना करें कि r का मान सार्थक है या नहीं। सीमाओं की भी गणना करें जिनके अंदर समष्टि सहसंबंध गुणांक के रहने की प्रत्याशा है।

हल : (a) मान लें गणित का अंक चर X से द्योतित होता है और सांख्यिकी का अंक चर Y से। यह नोट किया जा सकता है हम कारक 5 को दोनों X और Y श्रेणी में उभयनिष्ट ले सकते हैं। इसलिए, माप क्रम में परिवर्तन करना भी सुविधाजनक होगा। X और Y श्रेणियों के लिए क्रमशः 60 और 65 को कार्यवाही माध्य लेने पर।

$$u = \frac{X-60}{5} \quad \text{और} \quad v = \frac{Y-65}{5}$$

हमें,
$$r = \frac{n\Sigma uv - \Sigma u \Sigma v}{[n\Sigma u^2 - \Sigma u)^2] \times [n\Sigma v^2 - \Sigma v)^2]}$$

$$= \frac{10 \times 141 - 2 \times (-2)}{(10 \times 140 - 4)(10 \times 76 - 4)}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{1396 \times 1756}}$$

$$\Rightarrow \log r = \log 1414 - \frac{1}{2}[\log 1396 + \log 1756]$$

$$= 3.1504 - \frac{1}{2}[3.1449 + 3.2445]$$

$$= 3.1504 - \frac{1}{2} \times 6.3894$$

$$= 3.1504 - 3.1947$$

$$= -0443 = \bar{1}.9557$$

$$\Rightarrow r = Anti\log(\bar{1}.9557)$$

$$= 0031 = 0.9$$

$$\therefore r_{xy} = r_{uv} = .9$$

सहसंबंध गुणांक का संभाव्य विभ्रम दिया जाता है :

$$P \cdot E(r) = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} = \frac{0.6745 \times 0.19}{\sqrt{10}} = \frac{0.128155}{3.1623}$$

$$= 0.0405$$

(b) r की सार्थकता हमें

$$r - 0.9 \quad \text{और} \quad 6 \text{ P.E. } (r) = 6 \times 0.0405 = 0.2430$$

चूँकि r बहुत ज्यादा है 6P.E.(r) से, r का मान अत्यधिक सार्थक है।

टिप्पणी : चूँकि r का मान सार्थक है, इसका अर्थ है कि सामान्यतः एक छात्र के अंक जितने अधिक गणित में होते हैं उतना ही ज्यादा अंक सांख्यिकी में होते हैं और छात्र के अंक जितने कम गणित में होते हैं उतना ही कम सांख्यिकी में। यद्यपि, इसका अर्थ यह नहीं है कि सभी छात्र जो गणित में अच्छे हैं सांख्यिकी में भी अच्छे हैं और सभी छात्र जो गणित में कमजोर हैं वे सांख्यिकी में भी कमजोर है। यह दिमाग में अच्छी तरह बिठा लेना चाहिए कि ''सहसंबंध का गुणांक दो श्रेणियों के बीच के संबंध को अभिव्यक्त करता है और श्रेणी की व्यक्तिगत मदों के बीच नहीं।''

समष्टि सहसंबंध गुणांक की सीमायें हैं :

$$r \pm P.E.(r) = 0.9031 \pm 0.0405 \quad i.e.\ 0.8626 \text{ और } 0.9436$$

इसका मतलब है कि अगर हम दूसरे 10 प्रतिदर्श c.f. उसी समष्टि से, तब उनका सहसंबंध गुणांक के 0.8626 और 0.9436 के बीच रहने की प्रत्याशा की जा सकती है।

उदाहरण 6.18: निम्नलिखित मानों के लिए सहसंबंध के समर्थकता का परीक्षण करें प्रेक्षणों पर आधारित (i) 10 और (ii) 100, $r = + 0.4$ और $+ 0.9$ करें।

हल : हम जानते हैं कि r का प्रेक्षित मान निश्चित रूप से सार्थक है,

अगर, $$r > 6\ P.E.(r) \Rightarrow \frac{r}{P.E.(r)} > 6$$

इस स्थिति में, हमें

प्रेक्षणों की संख्या	r	$P.E.(r)$	$\frac{r}{P.E.(r)}$	r की सार्थकता
10	0.4	$0.6745\ \frac{1-(0.4)^2}{\sqrt{10}} = 0.08$	$\frac{0.4}{0.18} = 2.22 < 6$	सार्थक नहीं
100	0.4	$0.6745 \frac{1-(0.4)^2}{\sqrt{100}} = 0.06$	$\frac{0.4}{0.06} = 6.67 < 6$	सार्थक
10	0.9	$0.6745 \frac{1-(0.9)^2}{\sqrt{10}} = 0.04$	$\frac{0.9}{0.04} = 22.5 < 6$	काफी सार्थक
100	0.9	$0.6745 \frac{1-(0.9)^2}{\sqrt{100}} = 0.128$	$\frac{0.9}{0.13} = 7 < 6$	सार्थक
कुल		Σu=108	Σv=90	Σu^2=2144

टिप्पणी

6.7 द्विचर आवृत्ति तालिका में सहसंबंध (Correlation in Bivariate Frequency Table)

अगर एक द्विचर वितरण में आँकड़े बहुत अधिक हैं, उन्हें संक्षिप्त किया जा सकता है द्विधा-सारणी (two-way table) द्वारा। यहाँ प्रत्येक चर के लिए, मूल्यों को विभिन्न वर्गों (Classes) में वर्गीकृत (Grouped) किया जाता है (दोनों चरों के लिए एक समान जरूरी नहीं), दृष्टिकोण में समान धारणा रखते हुए जैसा एक चर वितरण की स्थिति में होता है। उदाहरण के लिए, अगर X-चर श्रेणी के लिए *m* वर्ग है Y-चर श्रेणी के लिए *n* वर्ग है तब द्विधा–सारणी में *mxn* कोष्ठिकायें होंगी। विभिन्न मूल्यों के जोड़े (x, y) गुजरते हुए और मिलान चिन्हों का प्रयोग कर हम प्रत्येक कोष्ठक के लिए आवृत्ति पा सकते हैं और इस तरह तथाकथित द्विचर आवृत्ति तालिका प्राप्त कर सकते हैं जैसा नीचे दर्शाया गया है।

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">x-श्रेणी →
y-श्रेणी</td><td>वर्ग</td><td rowspan="2">Y के आवृत्तियों का योगफल</td></tr>
<tr><td>मध्य–बिंदु
x_1 x_2 ------ x ---------- xm</td></tr>
<tr><td>वर्ग</td><td>मध्य–बिन्दु
y_1 y_2 ----- y ----- ym</td><td>$f(x, y)$</td><td>fy</td></tr>
<tr><td colspan="2">x के आकृतियों का योगफल</td><td>fx</td><td>कुल
$\Sigma f_x = \Sigma f_y = N$</td></tr>
</table>

यहाँ $f(x, y)$ जोड़े (x, y) की आवृत्ति है।

X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना के लिए सूत्र द्विचर आवृत्ति सारणी के लिए है

$$\gamma = \frac{N\Sigma xyf(x,y) - (\Sigma xf_x)(\Sigma yf_y)}{\sqrt{[N\Sigma x^2 fx - (\Sigma xfx)^2] \times N\Sigma y^2 fy - (\Sigma yfy)^2}} \quad \ldots(6.13)$$

टिप्पणी

जहाँ N कुल आवृत्ति है। अगर कोई भ्रम नहीं है हम सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\gamma = \gamma_{XY} = \frac{N\Sigma fxy - (\Sigma fx)(\Sigma fy)}{\sqrt{[N\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2] \times [N\Sigma fy^2 - (\Sigma fy)^2]}} \quad \ldots(6.14)$$

जहाँ आवृत्ति f गुणनफल xy के लिए प्रयुक्त होती है और कुछ नहीं है परन्तु $f(x,y)$ और आवृत्ति f क्रमशः योग Σfx और Σfy के लिए प्रयुक्त x और y की आवृत्तियाँ हैं viz. सारणी में fx और fy वर्णित है अगले पृष्ठ पर। अगर हम X और Y के मूल बिन्दु और मापक्रम में परिवर्तन कर नये चर u और v में रूपांतरित कर देती है

$$U = \frac{X - A}{h} \text{ और } V = \frac{Y - B}{k}; h > 0, K.0$$

जहाँ h और k क्रमशः x और y वर्गों की विस्तीर्णता है और A और B नियतांक हैं, तब r के गुण II से, हमें :

$$\gamma_{XY} = \gamma_{uv} = \frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)(\Sigma fv)}{\sqrt{[N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2] \times [N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2]}} \quad \ldots(6.15)$$

हम लोग विधि का वर्णन उदाहरणों से करेंगे।

उदाहरण 6.19: परिवार की आय और इसका प्रतिशत खर्च भोजन पर 100 परिवारों की स्थिति में निम्नलिखित द्विचर आवृत्ति वितरण दिया। सहसंबंध के गुणांक को परिकलित करें और इसके मूल्य की व्याख्या करें।

भोजन पर खर्च (% में)	परिवार की आय (रु.)				
	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
10-15	-	-	-	3	7
15-20	-	4	9	4	3
20-25	7	6	12	5	-
25-30	3	10	19	8	-

हलः मान लें हम आय (रुपयों में) को द्योतित करते हैं चर X से और भोजन पर खर्च (%) Y चर से।

चरण 1. विभिन्न वर्गों के मध्य–बिन्दुओं को X और Y श्रेणियों के लिए निकालें

2. X और Y श्रेणियों के मूल बिन्दु और मापक्रम को परिवर्तन कर नये चर u और v में रूपांतरित कर देते हैं जैसा नीचे परिभाषित है :

टिप्पणी

$$U = \frac{X - A}{h} = \frac{X - 450}{100} \text{ और } V = \frac{Y - B}{k} = \frac{Y - 17.5}{5}$$

जहाँ x द्योतित करती है X-श्रेणी के मध्य–बिंदुओं को और y द्योतित करती है Y-श्रेणी के मध्य–बिन्दुओं को और h और k क्रमशः X और Y श्रेणियों के वर्गों के परिमाण हैं।

3. X के प्रत्येक वर्ग के लिए, Y के सभी वर्गों की कुल कोष्ठिका आवृत्तियाँ प्राप्त करें और उसी तरह Y के प्रत्येक वर्ग के लिए X के सभी वर्गों की कुल कोष्ठिका आवृत्तियाँ प्राप्त करें।

4. x की आवृत्तियों का चर u के संगत मानों से गुणा करें और योगफल Σfu निकालें।

5. y की आवृत्तियों को चर v के संगत मानों से गुणा करें और योगफल Σfv निकालें।

6. प्रत्येक कोष्ठिका की आवृत्ति को u और v के संगत मानों से गुणा करें और $f \times u \times v$ का गुणनफल एक वर्ग के अंदर दाहिने हाथ के कोने में प्रत्येक कोष्ठिका के लिए लिखें। उदाहरण के लिए u = - 1 और v = 2 के लिए, कोष्ठिका आवृत्ति f, 10 है। इसलिए, f, u और v का गुणनफल है $(-1) \times 2 \times 10 = -20$ जो लिखा जाता है एक वर्ग के अंतर्गत दाहिने हाथ के कोष्ठिका के शीर्घ पर। उसी तरह, u = 2 और v = 1 के लिए, गणनफल $fuv = 0 \times 2 \times 1 = 0$, और इसी तरह आगे बाकी कोष्ठक आवृत्तियों के लिए।

7. चरण σ में प्राप्त शीर्ष कोने के वर्गों के सभी अंकों को एक साथ जोड़े अन्तिम कॉलम fuv पाने के लिए प्रत्येक X और Y श्रेणी के लिए। अन्ततः अन्तिम को सम का योगदान निकालें Σfuv पाने के लिए।

8. fu और fv के मूल्यों को क्रमशः u और v के मूल्यों से गुणा करें fu^2 और fv^2 के कॉलम प्राप्त करने के लिए। इन मूल्यों को जोड़े Σfu^2 और Σfv^2 प्राप्त करने के लिए

उपर्युक्त परिकलनों को आगे के पृष्ठ पर तालिका में दर्शाया गया है।

टिप्पणी

सहसंबंध गुणांक के लिए परिकलन

	X →		200—300	300—400	400—500	500—600	600—700				
		Mid pt. x	250	350	450	550	650				
Y↓	Mid pt. y	U → V↓	−2	−1	0	1	2	f	fv	fv^2	fuv
10—15	12·5	−1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-3}$ 3	$\boxed{-14}$ 7	10	−10	10	−17
15—20	17·5	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 4	$\boxed{0}$ 9	$\boxed{0}$ 4	$\boxed{0}$ 3	20	0	0	0
20—25	22·5	1	$\boxed{-14}$ 7	$\boxed{-6}$ 6	$\boxed{0}$ 12	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{0}$	30	30	30	−15
25—30	27·5	2	$\boxed{-12}$ 3	$\boxed{-20}$ 10	$\boxed{0}$ 19	$\boxed{16}$ 8	$\boxed{0}$	40	80	160	−16
		f	10	20	40	20	10	N = 100	$\Sigma fv = 100$	$\Sigma fv^2 = 200$	$\Sigma fuv = -48$
		fu	−20	−20	0	20	20	$\Sigma fu = 0$			
		fu^2	40	20	0	20	40	$\Sigma fu^2 = 120$			
		fuv	−26	−26	0	18	−14	$\Sigma fuv = -48$			

$$\gamma_{uv} = \frac{\Sigma fuv - (\Sigma vu)(\Sigma fv)}{\Sigma N \Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2 \times (N \Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2}$$

$$= \frac{100 \times (-48) - 0 \times 100}{\sqrt{(100 \times 120 - 0) \times [(100 \times 200 - 100)^2]}} = \frac{-4800}{\sqrt{1200 \times (20000 - 10000)}}$$

$$= \frac{-4800}{\sqrt{12000 \times 10000}} = \frac{-48}{\sqrt{120 \times 100}} = \frac{-48}{\sqrt{12000}}$$

$$= -Anti\log\left[\log\left(\frac{48}{\sqrt{12000}}\right)\right]$$

$$= -Anti\log\left[\log 48 - \frac{1}{2}\log 12000\right] = -Anti\log\left[1.6812 - \frac{1}{2} \times 40792\right]$$

$$= -Anti\log[-0.3584] = -anti\log[\bar{1}.6416] = -0.4381$$

इसलिए, $\gamma_{xy} = \gamma_{uv} = 04381$ [r के गुणा II से]

उदाहरण 6.20: निम्न दिए गए समंक से कार्ल पियर्सन का गुणांक परिकलित करें।

टिप्पणी

अंक	उम्र वर्षों में				
	18	19	20	21	22
20-25	3	2	-	-	-
15-20	-	5	4	-	-
10-15	-	-	2	10	-
5-10	-	-	-	3	20
0-5	-	-	-	3	1

हलः अगर हम उम्र वर्षों में द्योतित करें चर X से और, अंकों के वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु चर Y से और लें

$$U = X - 20; \text{ और } \qquad V = \frac{Y - 12.5}{5}$$

तब द्विचर सहसंबंध सारणी जो आगे के पृष्ठ पर दी गई है

$$\gamma_{uv} = \frac{\Sigma fuv - (\Sigma vu)(\Sigma fv)}{\Sigma N \Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2 \times (N \Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2}$$

$$= \frac{40 \times (-38) - 9 \times 6}{\sqrt{[40 \times 47 - (9)^2] \times [40 \times 50 - (6)^2]}} = \frac{-1520 - 54}{\sqrt{(1880 - 81)(2000 - 36)}} = \frac{-1574}{\sqrt{1799 \times 1964}}$$

$$= -Anti\log\left[\log\left(\frac{1574}{1799 \times 1964}\right)\right] = -Anti\log\left[\log 1574 - \frac{1}{2}(\log 1799 + \log 1964)\right]$$

$$= -Anti\log[3.1970 - \frac{1}{2}(3.2551 + 3.2931)]$$

$$= -Anti\log[\bar{1}.9229] = 0.8373$$

परन्तु चूँकि सहसंबंध गुणांक मूलबिंदु और मापक्रम के परिवर्तन से स्वतंत्र है [c.f. गुण II, r का], हम पाते है

$$\gamma_{xy} = \gamma_{uv} = -0.8373$$

टिप्पणी

सहसंबंध गणांक के लिए परिकलन

Marks Y↓ / Age in years →	X	18	19	20	21	22				
	v \ u	−2	−1	0	1	2	Total f	fv	fv^2	fuv
22·5	2	$\boxed{-12}$ 3	$\boxed{-4}$ 2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	5	10	20	−16
17·5	1	$\boxed{0}$	$\boxed{-5}$ 5	$\boxed{0}$ 4	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	9	9	9	−5
12·5	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 7	$\boxed{0}$ 19	$\boxed{0}$	17	0	0	0
7·5	−1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-3}$ 3	$\boxed{-4}$ 2	5	−5	5	−7
2·5	−2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-6}$ 3	$\boxed{-4}$ 1	4	−8	16	−10
	Total f	3	7	11	16	3	$N = 40$	$\Sigma fv = 6$	$\Sigma fv^2 = 50$	$\Sigma fuv = -38$
	fu	−6	−7	0	16	6	$\Sigma fu = 9$			
	fu^2	12	7	0	16	12	$\Sigma fu^2 = 47$			
	fuv	−12	−9	0	−9	−8	$\Sigma fuv = -38$			

6.8 कोटि सहसंबंध रीति या श्रेणी अंतर सहसंबंध विधि (Rank Correlation Method)

टिप्पणी

कभी–कभी हम ऐसी सांख्यिकी की श्रेणियों से दो चार होते हैं जिनमें विचाराधीन चर संख्यात्मक माप में सक्षम नहीं होता है परन्तु उन्हें श्रृंखलाबद्ध व्यवस्थित किया जा सकता है। यह घटित होता है जब हम गुणात्मक विशेषताओं (गुण धर्म, attribute) पर कार्य करते हैं जैसे– ईमानदारी, सुंरदरता, चरित्र, नैतिकता इत्यादि जिनकी माप परिमाणात्मक तो नहीं हो सकती है परन्तु उन्हें श्रृंखलाबद्ध व्यवस्थित किया जा सकता है। इन परिस्थितियों में, कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक का प्रयोग नहीं हो सकता। चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन, एक ब्रिटिश मनोवैज्ञानिक, ने 1904 में एक सूत्र विकसित किया, अध्ययनाधीन दो गुणधर्मों के लिए n व्यक्तियों के बीच कोटि सहसंबंध गुणांक प्राप्त करने का।

मान लें हम चाहते हैं निकालना कि अगर दो अभिलक्षण A, कहें, बुद्धि और B, कहें, सुंदरता संबंधित है या नहीं। दोनों अभिलक्षण संख्यात्मक माप में असक्षम हैं परन्तु हम n व्यक्तियों के समूह को उनकी योग्यता (कोटि) कार्यदक्षता के सापेक्ष दो गुणधर्मों के लिए व्यवस्थित कर सकते हैं। मान लें यादृच्छिक चर X और Y व्यक्तियों की कोटि को द्योतित करता है क्रमशः A और B अभिलक्षणों के लिए। अगर हम परिकल्पना कर लें कि कोई क्रम समान नहीं है i.e. अगर कोइ दो व्यक्ति एक ही अभिलक्षण में समान कोटि नहीं प्राप्त करते हैं, तब स्पष्टतः, X और Y 1 से लेकर n तक संख्यात्मक मान लेंगे।

पियर्सन का सहसंबंध गुणांक श्रेणी–अंतर X और Y के बीच कोटि सहसंबंध गुणांक कहलाती है अभिलक्षण A और B के बीच उन व्यक्तियों के समूह के लिए।

स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक, सामान्यतः ρ (रो) से द्योतित की जाती है सूत्र से :

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} \qquad \ldots(6.16)$$

जहाँ d कोटियों के जोड़ों के बीच अंतर है समान व्यक्तियों का दो अभिलक्षणों में और n जोड़ों की संख्या है।

6.7.1 ρ की सीमायें : स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक –1 और ़1 के बीच पड़ती है i.e.

$$-1 \le \rho \le 1 \qquad \ldots(6.17)$$

टिप्पणी: चूँकि एक वास्तविक संख्या का वर्ग हमेशा गैर–ऋणात्मक होता है i.e. $>, 0, \Sigma d^2$ गैर–ऋणात्मक संख्याओं का योगफल होने की वजह से हमेशा और ऋणात्मक होती है। आगे चूँकि n भी धनात्मक है हम (6.16) से पाते हैं,

$\rho = 1 - $[कोई गैर–ऋणात्मक संख्या]

$\Rightarrow \quad \rho \leq 1 \quad \ldots$(i)

टिप्पणी

सादृश्य का चिन्ह तब ही होगा सिर्फ जब $\Sigma d^2 = 0$. अब, $\Sigma d^2 = 0$ सिर्फ और सिर्फ जब प्रत्येक $d = 0$ i.e. एक व्यक्ति की कोटि दोनों अभिलक्षणों के लिए समान है। निम्न सारणी ऐसी एक संभावना देती Government servant

x	1 2 3 …n
y	1 2 3 …n

दूसरी तरफ, ρ न्यूनतम होगी अगर Σd^2 अधिकतम है i.e. अगर विचलन d अधिकतम है इसके लिए अगर दो अभिलक्षणों के लिए व्यक्तियों की कोटि उल्टी (विपरीत) क्रम में है जैसा निम्न तालिका में दिया गया है :

व्यक्ति	1 2 3 …n n
x	1 2 3 …n-1 n
y	n n-1 n-2 …2 1

6.8.1 कोटि सहसंबंध की गणना (Calculation of Rank Correlation)

हम लोग नीचे स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक की गणना की चर्चा निम्नलिखित परिस्थितियों में करेंगे :

स्थिति (1) **जब वास्तविक कोटि दिये गये हैं**

इस स्थिति में निम्नलिखित चरण संबद्ध हैं :

(i) d की गणना करें, कोटियों का अंतर

(ii) d^2 की गणना करें

(iii) योग Σd^2 प्राप्त करें

(iv) सूत्र (6.15) का प्रयोग कर ρ का मान प्राप्त कर लें

उदाहरण 6.21: उसी 15 छात्रों की कोटियाँ दो विषयों A और B के लिए नीचे दी गई है; कोष्ठि के अंदर दो संख्यायें उसी छात्र की कोटि क्रमशः A और B के लिए द्योतित की गई है। (1, 10), (2, 7), (3, 2), (4, 6), (5, 4), (6, 8), (7, 3), (8, 1), (9, 11), (10, 15), (11, 9), (12, 5), (13, 14), (14, 12), (15, 13)।

स्पियरमैन के सूत्र का प्रयोग करें कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए।

टिप्पणी

हल: स्पियरमैन का सहसंबंध गुणांक

A में कोटि (x)	B में कोटि (y)	$a = x-y$	a^2
1	10	-9	81
2	7	-5	25
3	2	1	1
4	6	-2	4
5	4	1	1
6	8	-2	4
7	3	4	16
8	1	7	49
9	11	-2	4
10	15	-5	25
11	9	2	4
12	5	7	49
13	14	-1	1
14	12	2	4
15	13	2	4
		$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 272$

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 272}{15(225-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 272}{15 \times 224}$$

$$= 1 - \frac{17}{35} = \frac{18}{35}$$

$$= 0.51$$

उदाहरण 6.22: एक सुंदरता प्रतियोगिता में प्रत्याशियों की कोटि तीन जजों द्वारा निम्न क्रम में की गई :

पहला जज :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
दूसरा जज :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
तीसरा जज :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

कोटि सहसंबंध गुणांक का प्रयोग कर निर्धारण करें कि किन जजों के जोड़े को सुदरता की पहचान में उभयनिष्टता है।

हल : मान लें R_1, R_2 और R_3 क्रमश प्रथम, द्वितीय और तीसरे जज द्वारा प्रदत्त कोटियाँ हैं और ρ_{ij} सहसंबंध गुणांक हैं कोटियों के बीच ith और jth जज द्वारा दिया गया :

टिप्पणी

सहसंबंध गुणांक का परिकलन

R_1	R_2	R_3	$d_{12}=R_1-R_2$	$d_{13}=R_1-R_3$	$d_{23}=R_2-R_3$	d_{12}^2	d_{13}^2	d_{23}^2
1	3	6	-2	-5	-3	4	25	9
6	5	4	1	2	1	1	4	1
5	8	9	-3	-4	-1	9	16	1
10	4	8	6	2	-4	36	4	16
3	7	1	-4	2	6	16	4	36
2	10	2	-8	0	8	64	0	64
4	2	3	2	1	-1	4	1	1
9	1	10	8	-1	-9	64	1	81
7	6	5	1	2	1	1	4	1
8	9	7	-1	1	2	1	1	4
			$\Sigma d_{12}=0$	$\Sigma d_{13}=0$	$\Sigma d_{23}=0$	$\Sigma d^2_{12}=200$	$\Sigma d^2_{13}=60$	$\Sigma d^2_{23}=214$

हमें $n = 10$

स्पियरमैन का सहसंबंध गुणांक दिये जाते हैं

$$\rho_{12} = 1-\frac{6\Sigma d_{12}^2}{n(n^2-1)} = 1-\frac{6\times 200}{10\times 99} = -\frac{7}{33} = -0.2121$$

$$\rho_{13} = 1-\frac{6\Sigma d_{13}^2}{n(n^2-1)} = 1-\frac{6\times 60}{10\times 99} = -\frac{7}{11} = -0.6363$$

$$\rho_{23} = 1-\frac{6\Sigma d_{23}^2}{n(n^2-1)} = 1-\frac{6\times 214}{10\times 99} = -\frac{49}{165} = -0.2970$$

चूँकि ρ_{13} अधिकतम है, इसलिए प्रथम और तृतीय जज के अनुभव सुंदरता के मामले मे ंसबसे करीब से मिलते–जुलते हैं।

टिप्पणी : चूँकि ρ_{12} और ρ_{13} ऋणात्मक हैं, जजों के जोड़े (1, 2) और (2, 3) के विपरीत (भिन्न) अनुभव हैं सुंदरता के लिए।

स्थिति (II)—जब कोटियाँ नहीं दी गई हैं

स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध सूत्र (6.16) का प्रयोग तब भी हो सकता है जब हम ऐसे चरों पर कार्य कर रहे होते हैं जिनकी माप संख्यात्मक होती है i.e. जब वास्तविक समंक ना कि दो चरों से संबंधित कोटियों दी गई हैं। इस स्थिति में हमें समंक को कोटियों में परिवर्तित करना होगा। सबसे बड़ा (छोटे) प्रेक्षण की कोटि 1 दिया जाता है। उसके बाद बड़ा (छोटा) प्रेक्षण की कोटि 2 दी जाती है और इसी तरह आगे भी। यह निरर्थक है कि किस तरीके से (अवरोह या आरोह)

टिप्पणी

क्रम में कोटियाँ दी जाती हैं। यद्यपि एक ही तरीका सभी विचाराधीन चरों के लिए अपनायी जानी चाहिए।

उदाहरण 6.23: निम्नलिखित समंक से विज्ञापन खर्चो और विक्रय के बीच स्पियरमैन की कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

विज्ञापन खर्च ('000 रु.)	:	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
बिक्री (लाख रु.)	:	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

हल: मान लें x विज्ञापन खर्च ('000 रु.) को द्योतित करता है और y बिक्री (लाख रु.) में द्योतित करता है।

X	Y	X का कोटि (x)	Y का कोटि (y)	$d = x - y$	d^2
39	47	8	10	-2	4
65	53	6	8	-2	4
62	58	7	7	0	0
90	86	2	2	0	0
82	62	3	5	-2	4
75	68	5	4	1	1
25	60	10	6	4	16
98	91	1	1	0	0
36	51	9	9	0	0
78	84	4	3	1	1
				$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 30$

यहाँ $n = 10$

$$\therefore \qquad \rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times 30}{10\times 99} = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11} = 0.82$$

उदाहरण 6.24: सांख्यिकी में 7 छात्रों द्वारा टेस्ट परीक्षा दी गई। शिक्षक ने अपने छात्रों को कोटि प्रदान की उनके शैक्षणिक उपलब्धि पर। उच्च से निम्न उपलब्धि का क्रम, परिवार की आय के साथ प्रत्येक छात्र के लिए, नीचे दी गई है।

राय (8700 रु.), भटनागर (4200 रु.), तुली (5700 रु.), देसाई (8200 रु.), गुप्ता (20,000 रु.), चौधरी (16,000 रु.), और सिंह (17,500 रु.), राय (8700 रु.)

स्पियर मैन का कोटि सहसंबंध शैक्षणिक उपलब्धि और पारिवारिक आय के बीच परिकलित करें।

हल: हम निम्नलिखित चरों को परिभाषित करें :

X : शैक्षणिक उपलब्धि ; Y : पारिवारिक आय (रु.)

टिप्पणी

छात्र	कोटि X (x)	आय (रु.) Y	कोटि Y (y)	$d = x - y$	d^2
राय	1	8,700	4	-3	9
भटनागर	2	4,200	7	-5	25
तुलसी	3	5,700	6	-3	9
देसाई	4	8,200	5	-1	1
गुप्ता	5	20,000	1	4	16
चौधरी	6	18,000	2	4	16
सिंह	7	17,000	3	4	16
				$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 92$

स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक शैक्षणिक उपलब्धि (X) और पारिवारिक आंय (Y) के बीच दी जाती है :

$$\rho_{xy} = 11 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 92}{7 \times 48} = 1 - \frac{23}{14}$$

$$= -\frac{9}{14} = -0.6429$$

6.8.2 पुनरावृत्त कोटियाँ (Repeated Ranks)

गुण धर्मो की स्थिति में अगर श्रेणी का क्रम समान है; यदि दो या अधिक व्यक्ति किसी वर्गीकरण में एक गुणधर्म के सापेक्ष एक साथ रखे गये हैं या चर समंक की स्थिति में एक से अधिक मद समान मूल्य के साथ एक या दोनों श्रेणियों में हैं, तब स्पियरमैन का सूत्र (6.15) कोटि सहसंबंध गुणांक को परिकलित करने में असफल हो जाती है चूँकि इस स्थिति में, चर, X [व्यक्तियों की कोटि अभिलक्षण A में (प्रथम श्रेणी) और Y [व्यक्तियों की कोटि अभिलक्षण B (दूसरी श्रेणी) में 1 से n तक का मान नहीं लेती है और क्रमानुसार $\bar{x} \neq \bar{y}$, जब (6.15) को सत्यापित करते वक्त हमने माना था कि $\bar{x} = \bar{y}$

इस स्थिति में उभयनिष्ठ कोटियाँ प्रदान की जाती हैं पुनरावृत्त मदों के लिए। ये उभयनिष्ठ कोटियाँ कोटियों का समान्तर माध्य है जो इन मदों को होता अगर ये एक दूसरे से भिन्न होतीं और आगे का मद वह कोटि पायेगा जो उभयनिष्ठ कोटि की गणना में प्रयुक्त कोटि के बाद वाली कोटि होगी। उदाहरण के लिए, एक मद कोटि 4 पर पुनरावृत्त की गई। तब उभयनिष्ठ कोटि प्रत्येक मद को प्रदान की जाने वाली है (4 + 5)/2 i.e. 4.5 जो 4 और 5 का औसत है, कोटियाँ जो इन प्रेक्षणों को मिलतीं अगर ये भिन्न होते। इसके बाद के मद को कोटि 6 मिलेगी। अगर एक मद कोटि 7 पर तीन बार पुनरावृत्त हुई है, तब प्रत्येक मान को मिलने वाला उभयनिष्ठ कोटि होगी (7 + 8 + 9)/3 i.e. 8 जो समान्तर माध्य है 7, 8 और 9 का viz. वो कोटियाँ जो इन प्रेक्षणों को मिलतीं

अगर वे एक दूसरे से भिन्न होते। अगला कोटि जो प्रदान किया जायेगा वह 10 होगा।

अगर कोटि का बिल्कुल छोटा समानुपात का क्रम समान है, यह तकनीक प्रयुक्त हो सकती है सूत्र (6.16) के साथ। परन्तु अगर कोटि का बहुत बड़ा समानुपात का क्रम समान है, तब यह उचित होगा कि सूत्र (6.16) के साथ समायोजन (adjustment) या एक सुधार कारक।

"सूत्र (6.15) में $m(m^2\text{-}1)/2$ कारक जोड़े, जहाँ m मदों की वह संख्या है जो पुनरावृत्त हुई है। यह सुधार अवयव (कारक) प्रत्येक पुनरावृत्त मूल्य के लिए दोनों श्रेणियों में जोड़ा जाना चाहिए।

उदाहरण 6.25: एक मनोवैज्ञानिक ने दो शिक्षण विधियाँ A और B की तुलना करनी चाही। उसने 22 छात्रों के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चुनाव किया। उसने उन्हें 11 जोड़ों में समूह में बाँटा ताकि एक जोड़े के छात्रों का करीब–करीब बराबर अंक हो एक बुद्धि परीक्षा में। प्रत्येक जोड़े में एक छात्र को विधि A से पढ़ाया गया और दूसरे को विधि B से और कोर्स समाप्ति के बाद उनकी परीक्षा किया। उनके द्वारा प्राप्त अंक को नीचे तालिकाबद्ध किया गया है :

जोड़ा	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	:	24	29	19	14	30	19	27	30	20	28	11
B	:	37	35	45	26	23	27	19	20	16	11	21

कोटि सहसंबंध ज्ञात करें।

कोटि सहसंबंध गुणांक का परिकलन

X	Y	X कोटि (x)	Y कोटि (y)	$d = x - y$	d^2
24	37	6	1	5	25
29	35	3	2	1	1
19	45	8.5	9.5	-1	1
14	26	10	4	6	36
30	23	1.5	5	-3.5	12.25
19	27	8.5	3	5.5	30.25
27	19	5	8	-3	9
30	20	1.5	7	-5.5	30.25
20	16	7	9.5	-2.5	6.25
28	11	4	11	-7	49
11	21	11	6	5	25
				$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 225$

हलः माना कि चर X छात्रों के अंक जिन्हें A विधि द्वारा पढ़ाया गया है द्योतित करते हैं और Y छात्रों के अंक जिन्हें B विधि द्वारा पढ़ाया गया है द्योतित करते हैं।

टिप्पणी

X-श्रेणी में हम देखते हैं कि मूल्य 30 दो बार आती है। इनमें से प्रत्येक को उभयनिष्ठ कोटि। 1.5 प्रदान की जाती है जो 1 और 2 का समान्तर माध्य है, वे कोटियाँ जो इनकी होतीं अगर ये भिन्न होतीं। इसके बाद का मूल्य 29 को अगली कोटि viz. 3.1 फिर मूल्य 19 दो बार आती है। इन्हें उभयनिष्ठ कोटि 6.5 प्रदान की जाती है, 8 और 9 का समान्तर माध्य और आगे का मूलय viz. 14 को कोट 10 मिलता है। उसी तरह, Y-श्रेणी के मूल्य 16 दो बार आती है और प्रत्येक को उभयनिष्ट कोटि 9.5 प्रदान की जाती है, 9 और 10 का समान्तर माध्य। आगे का मूल viz. 11 कोटि 11 प्राप्त करता है।

इसलिए, X-श्रेणी में हम देखते हैं कि मद 19 और 30 पुनरावृत्त होते हैं, प्रत्येक दो बार आती है और Y-श्रेणी में मद 16 पुनरावृत्त होती है। इसलिए इनमें से प्रत्येक स्थिति में $m = 2$। इसलिए संशोधन अवयव $\frac{m(m^2-1)}{12}$ को प्रत्येक पुनरावृत्त्त मद के लिए प्रयोग करने पर, हम पाते हैं

$$\rho = 1 - = \frac{6\left[\Sigma d^2 + \frac{2(4-1)}{12} + \frac{2(4-1)}{12}\right]}{11(121-1)} \qquad [\therefore n = 11]$$

$$= 1 - \frac{6 \times 226.5}{11 \times 120} = 1 - 0.0225 = -0.0255$$

उदाहरण 6.26: निम्नलिखित समंक से कोटि सहसंबंध गुणांक का परिकलन श्रेणी के समान क्रम के लिए समायोजन करने के बाद करें।

x	:	48	33	40	9	16	16	65	24	16	57
y	:	13	13	24	6	15	4	20	9	6	19

[आई0सी0डब्लू0 (इन्टरमीडिएट), जून 2002]

हल : $R_x = x -$ **मूल्य की कोटि :** $R_y = y -$ **मूल्य की कोटि कोटियों की व्याख्या :** x श्रेणी में, हम देखते हैं 16 तीन बार पुनरावृत्त होती है। इन मूल्यों के प्रत्येक को उभयनिष्ठ कोटि 8 प्रदान की जाती है, 7, 8 और 9 का समान्तर माध्य, इन प्रेक्षणों की कोटि अगर ये भिन्न होतीं। अगला मूल्य 9 अगला कोटि पाता है viz. 10.

X	Y	Rx	R_y	$d = Rx - Ry$	d^2
48	13	3	5.5	-2.5	6.25
33	13	5	5.5	-0.5	0.25
40	24	4	1	3	9
9	6	10	8.5	1.5	2.25
16	15	8	4	4	16
16	4	8	10	-2	4

टिप्पणी

65	20	1	2	-1	1
24	9	6	7	-1	1
16	6	8	8.5	-0.5	0.25
57	19	2	3	-1	1
				$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 41$

उसी तरह से, y-श्रेणी में प्रेक्षण 13 दो बार आता है। प्रत्येक को उभयनिष्ट कोटि 6.5 प्रदान की जाती है, 5 और 6 का समान्तर माध्य, और अगला मूल्य 9 अगला कोटि 7 पाता है।

फिर मूल्य 6 दो बार पुनरावृत्त हुई है और प्रत्येक को उभयनिष्ट कोटि (8 + 9)/2, i.e., 8.5 और अगला मूल्य 4 कोटि 10 पाता है।

संशोधन के अवयव (C.F.): स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक पुनरावृत्त कोटियों के लिए देता है :

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma\left[\Sigma d^2 + \Sigma\frac{m(m^2-1)}{12}\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6}{10(100-1)}[41+3]$$

$$= 1 - \frac{6\times 44}{10\times 99}$$

$$= 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15} = 07333$$

पुनरावृत्त मूल्य	जितनी बार यह आता है (m)	C.F. $m(m^2-1)/12$
x-श्रेणी : 16	3	3(9-1/12=3)
y-श्रेणी : 13	2	2(4-1/12=0.5)
6	2	2(4-1/12=0.5)
कुल		3

उदाहरण 6.27: प्रेक्षणों के कुछ जोड़ों के लिए स्पियरमैन का काटि सहसंबंध गुणांक का मान 2/3 पाया गया। अन्तरों के वर्गों का योग संगत कोटियों के बीच 65 था। जोड़ों की संख्या बताएं।

हल: हमें दिया गया है $\rho = \frac{2}{3}$ और $\Sigma d^2 = 55$. अगर प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या n है, हमें

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 1 - \frac{6\times}{n(n^2-1)}55$$

$$\Rightarrow \frac{330}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad n(n^2-1) = 3\times 330 = 990$$

$$\Rightarrow \; n^3 - n - 990 = 0 \qquad \ldots(*)$$

आकस्मिक विधि (Hit and Trial Method) द्वारा (*) में $n = 10$ रखने पर

L.H.S. = 10^3 - 10 – 990 = 0 = 1000 - 10 - 990 = 0 = R.H.S.

टिप्पणी

इसलिए, शेष प्रमेय द्वारा (Remainder Theorem) (n - 10) एक अवयव है $n^3 - n - 990$ का। $n^3 - n - 990$ को (n - 10) से भाग देने पर हम दूसरा अवयव पाते हैं $n^3 - n - 990$ का $n^2 + 10n + 99$

$$\therefore (*) \Rightarrow (n-1)(n^2 + 10n + 99) = 0$$

$$\Rightarrow \; n - 10 = 0 \quad \text{या} \quad n^2 + 10n + 99 = 0$$

$$\Rightarrow \; n = 10 \quad \text{या} \quad n = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 396}}{2} \text{(काल्पनिक मूल्य)}$$

इसलिए $n = 10$ हीं संभव मूल्य है। इसलिए, जोड़ों की संख्या 10 है।

उदाहरण 6.28: 10 छात्रों द्वारा दो विषयों में प्राप्त अंकों का कोटि सहसंबंध गुणांक 0.5 पाया गया। बाद में देखा गया कि दो विषयों के कोटियों में अंतर एक छात्र द्वारा गलती से 3 ले लिया गया 7 के बदले। क्या सही मूल्य होना चाहिए कोटि–संबंध गुणांक का?

हल : हमें दिया गया है $x = 10, \rho = 0.5$ (6.16) का प्रयोग कर, हम पाते हैं

$$0.5 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10 \times 99} \Rightarrow \frac{6\Sigma d^2}{990} = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$0.5 \frac{6\Sigma d^2}{10 \times 99} \quad \text{या} \quad d^2 = \frac{990}{6 \times 2} = 82.5$$

चूँकि एक अंतर 3 गलती से ले लिया गया 7 के बदले। Σd^2 का सही मूल्य दिया जाता है :

संशोधित $\Sigma d^2 = 82.3 - 3^2 + 7^2 = 82.5 - 9 + 49 = 122.5$

संशोधित $\rho = 1 - \dfrac{6 \times 122.5}{10 \times 99} = 1 - \dfrac{49}{66} = 1 - 0.7424 = 0.2576$

6.8.3 स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक पर टिप्पणियाँ (Remark of Spearsman on Rank Correlation Coefficient)

1. हमें हमेशा मिलता है $\Sigma d = 0,$ जो संख्यात्मक परिकलन पर नियंत्रण प्रदान करता है।

2. चूँकि स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक ρ और कुछ नहीं पर पियर्सन का सहसंबंध गुणांक है कोटियों के बीच, यह उसी तरह से अभिव्यक्त की जाती है जैसे कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक।

3. कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक की परिकल्पना है कि वास्तविक समष्टि जिससे प्रतिदर्श प्रेक्षणों को लिया गया है प्रसामान्य है। अगर इस परिकल्पना का उल्लंघन होता है तब हमें जिस माप की जरूरत होती है वह वितरण से स्वतंत्र है (या गैर–प्राथमिक, Non-Parametric). एक वितरण से स्वतंत्र माप वह है जो समष्टि के प्राचलों (parameters) के बारे में कोई परिकल्पना नहीं

करती है। स्पियरमैन या ρ ऐसी माप है (i.e. वितरण से स्वतंत्र), चूँकि कोई बड़ी परिकल्पना समष्टि के रूप की नहीं की जाती है जिससे प्रतिदर्श प्रेक्षण लिये जाते हैं।

4. स्पियरमैन का सूत्र समझने और क्रियान्वित करने में कार्ल पियर्सन के सूत्र की तुलना में आसान है। दोनों सूत्रों द्वारा प्राप्त मान viz. पियर्सन के r और स्पियरमैन के ρ में सामान्यतः अंतर है। अंतर इस तथ्य की वजह से उत्पन्न होती है कि जब कोटि का प्रयोग होता है प्रेक्षणों के पूर्ण समुच्चय के बदले, उसमें हमेशा सूचना की कुछ कमी होती है। जबतक कि बहुत श्रेणी के पदों का मूल्य समान नहीं हो कोटि सहसंबंध का गुणांक थोड़ा ही कम होना चाहिए पियर्सन के गुणांक से।

5. स्पियरमैन का सूत्र ही केवल सूत्र है प्रयुक्त होने वाला सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए अगर हमलोग गुणात्मक अभिलक्षणों पर कार्य कर रहे हैं जो संख्यात्मक रूप से मापी नहीं जा सकती है परन्तु श्रेणीबद्ध व्यवस्थित की जा सकती है। यह वहाँ भी प्रयुक्त हो सकती है जहाँ वास्तविक समंक दिया जाता है। आत्यंतिक प्रेक्षणों की स्थिति में, स्पियरमैन के सूत्र को पियर्सन के सूत्र पर वरीयता दी जाती है।

6. स्पियरमैन के सूत्र की सीमाएं भी हैं। यह द्विचर आवृत्ति वितरण (सहसंबंध तालिका) की स्थिति में व्यवहारिक नहीं है। $n > 30$ के लिए, इस सूत्र का प्रयोग नहीं होना चाहिए जब तक कि कोटियाँ नहीं दी गई हैं, चूँकि विपरीत स्थिति में परिकलन बहुत समय खर्च करने वाले हैं।

6.9 संगामी विचलन रीति (Method of Concurrent Deviation)

यह दो श्रेणियों के बीच सहसंबंध को निर्धारित करने की बहुत अनौपचारिक विधि है जब हम बहुत गंभीर नहीं होते हैं इसकी सूक्ष्मता के प्रति। यह विचलनों के चिन्हों पर आधारित है (i.e. परिवर्तन की दिशा) चर के मूल्यों के इसके अनुवर्ती (proceeding) मूल्य से और यह चरों के यथार्थ मूल्यों के परिमाण को संज्ञान में नहीं लेता है। इसलिए, हम लोग धन (+) चिन्ह, घटाव (-) चिन्ह का समानता (=) चिन्ह लगाते हैं विचलनों के लिए, अगर चर का मूल्य क्रमशः अधिक, कम या बराबर होता है अनुवर्त्ती मूल्य से। दो चरों के मूल्यों में विचलन संगामी कहे जाते हैं अगर उनका चिन्ह समान है i.e. या तो दोनों विचलन धनात्मक हैं या दोनों ऋणात्मक है या दोनों बराबर है। इस विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक r की गणना के लिए प्रयुक्त सूत्र दिया जाता है :

$$\gamma = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)} \qquad \ldots(6.18)$$

जहाँ C संगामी विचलनों के जोड़ों की संख्या है और n विचलनों के जोड़ों की संख्या है। सूत्र (6.17) में धन/घटाव चिन्ह वर्गमूल के बाहर और भीतर लिया जाने वाला प्राथमिक महत्व की है।

टिप्पणी

चूँकि $-1 \leq r \leq 1$वर्गमूल के अन्दर का परिमाण, viz. $\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)$

निश्चित रूप से धनात्मक होनी चाहिए, नहीं तो r काल्पनिक हो जाएगी जो संभव नहीं हैं

इसलिए अगर $(2c - n)$ धनात्मक है, हम (6.18) में वर्गमूल के अन्दर और बाहर धनात्मक चिन्ह लेते हैं और अगर $(2c - n)$ ऋणात्मक है, हम (6.18) वर्गमूल के अंदर और बाहर ऋणात्मक चिन्ह लेते हैं।

टिप्पणियाँ 1. यह स्पष्ट रूप से नोट किया जाना चाहिए कि यहाँ n प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या नहीं है वरन यह विचलनों के जोड़ों की संख्या है और इसलिए यह प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या से एक कम होती है।

2. सूत्र (6.18) से आगणित r (Computed r) संगामी विचलन का गुणांक भी कहलाती है।

3. संगामी विचलनों का गुणांक प्राथमिक रूप से निम्नलिखित सिद्धान्त पर आधारित है :

''अगर काल श्रेणियों का लघु समय उच्चावचन धनात्मक रूप से सह–संबंधित है या दूसरे शब्दों में, अगर उनके विचलन संगामी हैं, उनके वक्र समान दिशा में जायेंगे और उनके बीच धनात्मक सहसंबंध की सूचना देंगे।''

इसलिए (6.18) से आगणित r सामान्यतः सिर्फ लघु समय उच्चावचनों के बीच के संबंध की ही सूचना देता है।

उदाहरण 6.29: नीचे दिए गए समंक से संगामी विचलन के गुणांक को परिकलित करें :

वर्ष	:	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
पूर्ति	:	160	164	172	182	166	170	178	192	186
कीमत	:	292	280	260	234	266	254	230	190	200

टिप्पणी

हल :

वर्ष	पूर्ति	विचलन का चिन्ह अनुवर्ती मूल्य से (x)	कीमत	विचलन का चिन्ह अनुवर्ती मूल्य से (y)	विचलनों का गुणनफल
1993	160		292		
1994	164	+	280	–	–
1995	172	+	260	–	–
1996	182	+	234	–	–
1997	166	–	266	+	–
1998	170	+	254	–	–
1999	178	+	230	–	–
2000	192	+	190	–	–
2001	186	–	200	+	–

यहाँ हमें : n = विचलनों के जोड़ों की संख्या = 9-1 = 8

$C = 0$ चूँकि कोई विचलन का जोड़ा ऐसा नहीं है जिनका समान चिन्ह हो

i.e. चूँकि कोई गुणन विचलन xy धनात्मक नहीं है।

संगामी विचलनों का गुणांक दिया जाता है।

$$\gamma = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{0-8}{8}\right)} = \pm\sqrt{\pm(-1)}$$

चूँकि $2c - n = -8$ *i.e.* (ऋणात्मक), हम वर्गमूल के अंदर और बाहर ऋणात्मक चिन्ह लेते हैं।

$$\gamma = -1\sqrt{-(-1)} = -1$$

इसलिए, पूर्ति और कीमत के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध है।

उदाहरण 6.30: निम्नलिखित समंक के लिए संगामी विचलनों का गुणांक परिकलित करें :

पूर्ति	:	65	40	35	75	63	80	35	20	80	60	50
माँग	:	60	55	50	56	30	70	40	35	80	75	80

टिप्पणी

हलः

पूर्ति (x)	विचलन का चिन्ह अनुवर्ती मूल्य से (x)	पूर्ति (x)	विचलन का चिन्ह अनुवर्ती मूल्य से (y)	विचलनों का गुणनफल (xy)
65		60		+
40	–	55	–	+
35	–	50	–	+
75	+	56	+	+
63	–	30	–	+
80	+	70	+	+
35	–	40	–	+
20	–	35	–	+
80	+	80	+	+
60	–	75	–	+
50	–	80	+	–

यहाँ हमें, $n =$ विचलनों के जोड़ों की संख्या $= 11 - 1 = 0$

$c =$ विचलनों के जोड़ों की संख्या समान चिन्हों वाले की $= 9$

संगामी विचलनों के गुणांक दिया जाता है

$$\gamma = \pm\sqrt{\pm\frac{(2c-n)}{n}} = \pm\sqrt{\pm\frac{2\times 9 - 10}{10}} = \pm\sqrt{\pm 0.8}$$

चूँकि $2c - n = 8,$ धनात्मक हे, हम वर्गमूल के अंदर और बाहर धनात्मक चिन्ह लेते हैं

ताकि $\gamma = +\sqrt{0.8} = 0.89$

6.10 निर्धारण का गुणांक (Co-efficient of Determination)

दो चर श्रेणियों के बीच सहसंबंध का गुणांक उनके बीच रैखिक संबंध की माप है और सूचित करती है एक चर के विचरण का परिमाण जो जुड़ी हुए है या उत्तरदायी होती है दूसरे चर से। एक अधिक उपयोगी और तुरंत समझ आने वाली माप इस उद्देश्य के लिए निर्धारण का गुणांक है जो निर्भर चर मे ंप्रतिशत विचरण देती है जिसकी गणना स्वतंत्र चर द्वारा होती है। दूसरे शब्दों में, निर्धारण का गुणांक प्रसरण का वर्णित समानुपात पूर्ण प्रसरण के सापेक्ष देती है। निर्धारण का गुणांक सहसंबंध गुणांक के वर्ग से दी जाती है, i.e. $r^2 =$ इसलिए

टिप्पणी

$$\text{निर्धारण का गुणांक} = r^2 = \frac{\text{वर्णित प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}} \quad \ldots(6.19)$$

निर्धारण का गुणांक एक बहुत उपयोगी और बेहतर माप है r के मान की व्याख्या के लिए। टट्टल के अनुसार :

''सहसंबंध का गुणांक को समग्रता से अधिक मूल्यांकन किया गया है और सम्पूर्ण में बहुत ज्यादा प्रयुक्त होती है। इसका वर्ग, दो चरों के रैखिक सह प्रसरण की माप का बहुत उपयोगी माप है निर्धारण का गुणांक। अध्येता को हमेशा प्रत्येक सहसंबंध गुणांक को वर्ग करने की आदत रखनी चाहिए, किसी निष्कर्ष पर पहुँचने से पहले जो कहा या वर्णित किया जाये, रैखिक संबंध की सीमा के बारे में दो सह–संबंधित चरों के बीच।''

उदाहरण के लिए, अगर r का मान = 0.8, हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि विचरण को 80% आपेक्षिक श्रेणियों में (निर्भर चर) है की वजह है अधीनस्थ शृंखला (स्वतंत्र चर) मे ंविचरण। परन्तु निर्धारण का गुणांक इस स्थिति में $r^2 = 0.64$ जिसका अर्थ है कि आपेक्षिक श्रेणियों में केवल 64% विचरण को अधीनस्थ श्रेणी द्वारा वर्णित किया गया है और बाकी 36% विचरण दूसरे अवयवों की वजह से हैं।

उस समान तर्क से ही दो सहसंबंधों की तुलना करते वक्त, एक का 0.4 है और दूसरे का 0.8 यह भ्रामक होगा निष्कर्ष निकालना कि दूसरी स्थिति में सहसंबंध दुगुनी है पहली स्थिति में सहसंबंध के। निर्धारण का गुणांक स्पष्ट रूप से इस दृष्टिकोण को उजागर करता है, चूँकि r = 0.4 की स्थिति मे ंनिर्धारण का गुणांक 0.64 है, जिससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दूसरी स्थिति में सहसंबंध चार गुना अधिक है पहली स्थिति में सहसंबंध का।

टिप्पणियाँ 1. उपर्युक्त विवेचना का अर्थ है कि :

''दो चरों के बीच के संबंध की नजदीकी सहसंबंध गुणांक r से निर्धारित की गई समानुपाती नहीं है।''

2. निम्नलिखित तालिका निर्धारण के गुणांक (r^2) का मूल्य विभिन्न r के मूल्य के लिए यह देखा जा सकता है कि उपर्युक्त तालिका से जैसे जैसे r का मान

r :	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
r^2 :	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1.00

घटता है r^2 बबहुत तेतजी से घटता है सिर्फ दो विशेष परिस्थितियों में जब r = 0 और r = 1 होता है जब हम पाते हैं $r^2 = r$.

3. निर्धारण का गुणांक हमेशा गैर–ऋणात्मक होता है इसलिए यह नहीं बताती है कि संबंधों की दिशा (क्या यह धनात्मक है या ऋणात्मक) दो श्रेणियों के बीच।

टिप्पणी

4. गैर–निर्धारण का गुणांक (Co-efficient of Non-Determination) अवर्णित विचरण से पूर्ण विचरण का अनुपात गैर–निर्धारण का गुणांक कहलाता है। यह सामान्यतः K^2 से द्योतित होता है और सूत्र से दिया जाता है :

$$K^2 = \frac{\text{अवर्णित प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}} = 1 - \frac{\text{वर्णित प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}} \qquad \ldots(6.20)$$

5. अलगाव का गुणांक (Co-efficient of Alienation) : अलगाव का गुणांक दिया जाता है गैर–निर्धारण गुणांक के वर्ग मूल द्वारा : i.e. K द्वारा जैसा नीचे दिया गया है :

$$K = \pm\sqrt{1-r^2} \qquad \ldots(6.20a)$$

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. निम्नलिखित सहसंबंधों की प्रकृति बतायें (धनात्मक, ऋणात्मक या सहसंबंध नहीं)

   (क) ऊनी वस्त्रों की बिक्री और दिवस कार्यक्रम

   (ख) साड़ी का रंग और औरत की बुद्धि जो इसको पहनती है; और

   (ग) वर्षा की मात्रा और फसल का उत्पादन

2. विक्षेप चित्र खींचते वक्त अगर सभी बिंदु एक सीधी रेखा नीचे की ओर बायें से दाहिनी ओर जाते हुए प्रतीत होती है, तब यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि

   (क) पूर्ण धनात्मक सहसंबंध

   (ख) सरल धनात्मक सहसंबंध

   (ग) पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध

   (घ) कोई सहसंबंध नहीं

3. द्विचर समंक के लिए : $\{(x, y) = (10,4), (11,3), (12,2), (14,1)(8,6)\}$ x और y के बीच सहसंबंध का गुणांक है

   (क) –1   (ख) 0.5

   (ग) 1   (घ) 0

4. अगर कोटि सहसंबंध गुणांक 0.6 है और कोटियों के अंतर के वर्गों का योगफल 66 है, तब जोड़ों की संख्या है–

   (क) 8   (ख) 9

   (ग) 10   (घ) 11

टिप्पणी

5. दो चरों के बीच सहसंबंध का मान $r = 0.6$ और दूसरे दो चरों के बीच 0.3 है। क्या इसका अर्थ है पहला सहसंबंध दूसरे की अपेक्षा दुगुनी मजबूत है?

   (क) हाँ (ख) नहीं

   (ग) कुछ नहीं कहा जा सकता (घ) इनमें से कोई नहीं

6. दो चरों के बीच सहसंबंध का मान 0.9 है और दूसरे चरों के बीच 0.3 है। क्या इसका अर्थ है कि पहला सहसंबंध दूसरे के अपेक्षा तिगुनी मजबूत है?

   (क) नहीं (ख) हाँ

   (ग) कुछ निश्चित नहीं (घ) इनमें से कोई नहीं

7. अगर यादृच्छिक चरों के बीच सहसंबंध गुणांक धनात्मक है, निम्नलिखित वक्तव्य पर समीक्षा दें।

   (क) यथार्थ (ख) गलत

   (ग) कोई निश्चित नहीं (घ) इनमें से कोई नहीं

6.11 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (क) धनात्मक (ख) सहसंबंध नहीं (ग) धनात्मक
2. (ग)
3. (क)
4. (ग)
5. (ख)
6. (क)
7. (क)

6.12 सारांश (Summary)

दो चर सह–सम्बन्धित कहे जाते हैं अगर एक चर में परिवर्तन का परिणाम दूसरे चर के संगत परिवर्तन में होती है।

अगर दो चरों के मूल्य एक ही दिशा में विचरण करते हैं। i.e., अगर एक चर के मूल्य में वृद्धि या न्हास का परिणाम औसत में दूसरे चर के मूल्य में वृद्धि या ह्रास प्रतिपादित करती है जो सहसंबंध घनात्मक और इसका विलोम सहसंबंध ऋणात्मक कही जाती है।

दो चरों के बीच सहसंबंध रैखिक कही जाती है अगर एक चर में इकाई परिवर्तन के संगत दूसरे चर के मूल्यों के समूचे विस्तार में नियत परिवर्तन होता है। दो चरों के बीच का संबंध गैर–रैखीय या वक्र रेखीय कहलाती है जब एक

टिप्पणी

चर के संगत ईकाई परिवर्तन के लिए, दूसरा चर नियत दर से परिवर्तित नहीं होकर उतार–चढ़ाव के दर से परिवर्तित होती है।

अगर दो चरों के बीच कार्य–कारण का संबंध है, तो वे एक दूसरे से रूपांतरित होने के लिए बंधे होते हैं और इसलिए उनके बीच उच्च स्तर का सहसंबंध होना निश्चित है। दूसरे शब्दों में, कार्य–कारण भाव का अर्थ हमेशा सहसंबंध होता है। यद्यपि, इसका विपरीत सही नहीं है।

सहसंबंध के अध्ययन की विधियाँ

दो चरों के बीच सामान्यतः प्रयुक्त होने वाली विधियाँ सहसंबंध के अध्ययन के लिए हैं–

(i) विक्षेप चित्र या बिंदु चित्र रीति

(ii) कार्ल–पियर्सन का सहसंबंध गुणांक

(iii) द्विचर आवृत्ति सारणी

(iv) श्रेणी–अन्तर रीति

(v) संगामी विचलन

विक्षेप चित्र एक द्विचर वितरण के चित्रमय प्रदर्शिन की सबसे आसान तरीकों में एक है और हमें दो चरों के बीच सहसंबंध सुनिश्चित करने का सबसे आसान साधन उपलब्ध कराती है।

दो चरों के बीच रैखिक संबंधों की तीव्रता या परिमाण को मापने की गणितीय विधि कार्ल–पियर्सन द्वारा सुझायी गयी।

कार्ल पियर्सन की माप, जिसे दो चरों (श्रेणियों) X और Y के बीच पियर्सन का सहसंबंध गुणांक कहा जाता है, सामान्यतः $\gamma(x, y)$ या r_{xy} से द्योतित होती है, उनके बीच के रैखिक संबंध की संख्यात्मक माप है और परिभाषित होती है X और Y के बीच के सह–विचरण के अनुपात, जो लिखा जाता है *Cov.(X, Y)* से और X और Y के प्रमाप विचलन के गुणनफल से।

संकेत सूत्रों से,

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sigma x \sigma y}$$

अगर $(x_1 y_1)(x_2 y_2) - - - (x_n y_n)$ X और Y चरों के n जोड़े का अवलोकन हैं एक द्विचर वितरण में, तब

$$Cov(x, y) = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y}); \sigma x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^2}; \sigma y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y - \bar{y})^2}$$

पियर्सन का सहसंबंध गुणांक संख्यात्मक रूप से 1 से ज्यादा नहीं हो सकता। संकेताक्षरों में,

$$1 \le r \le -1$$

सहसंबंध गुणांक के मान की गणना करने के बाद, दूसरा कदम है यह निकालना कि किस सीमा तक यह विश्वसनीय है। सहसंबंध का संभाव्य विभ्रम साधारणतः $P.E(r)$ द्वारा द्योतित एक पुराना माप है।

अगर प्रतिदर्श के n जोड़े का प्रेक्षित सहसंबंध गुणांक r है तब इसकी प्रमाप त्रुटि, साधारणतः $S.E.(r)$ से द्योतित होती है,

$$S.E. = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

सहसंबंध गुणांक का संभाव्य–विभ्रम दी जाती है।

$$P.E.(r) = 0.6745 \times S.E.(r) = 0.6745 \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}}$$

द्विचर आवृत्ति तालिका में सहसंबंध

अगर एक द्विचर वितरण में आँकड़े बहुत अधिक हैं, उन्हें संक्षिप्त किया जा सकता है द्विधा सारणी द्वारा। यहाँ प्रत्येक चर के लिए, मूल्यों को विभिनन वर्गां में वर्गीकृत किया जाता है। उदाहरण के लिए, अगर X चर श्रेणी के लिए m वर्ग है और Y- चर श्रेणी के लिए n वर्ग हैं तब द्विधा सारणी में mxn कोष्ठिकायें होंगी।

$$r = \frac{N\Sigma xyf(x,y) - (\Sigma xf_x)\Sigma yf_y)}{\sqrt{[N\Sigma x^2 fx - (\Sigma_x f_x)^2] \times N\Sigma y^2 f_y - (\Sigma yf_y)^2}}$$

जहाँ n कुल आवृत्ति है। भ्रम की स्थिति ना होने पर हम निम्न सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं :

$$r = \gamma_{xy} = \frac{N\Sigma xy - \Sigma xf\Sigma f_y)}{\sqrt{[N\Sigma fx^2 - (\Sigma f_x)^2] \times [N\Sigma fy^2 - (\Sigma f_y)^2]}}$$

कोटि सहसंबंध रीति या श्रेणी अंतर सहसंबंध विधि

कभी–कभी हम ऐसी सांख्यिकी की श्रेणियों से दो चार होते हैं जिनमें विचाराधीन चर संख्यात्मक माप में सक्षम नहीं होता है परन्तु उन्हें शृंखलाबद्ध व्यवस्थित किया जा सकता है। यह घटित होता है जब हम गुणात्मक विशेषताओं (गुण, धर्म) पर कार्य करते हैं जैसे–सुन्दरता, ईमानदारी, चरित्र, नैतिकता आदि जिनकी माप परिमाणात्मक तो नहीं हो सकती है परन्तु उन्हें शृंखलाबद्ध व्यवस्थित किया जा सकता है।

मान लें हम निकालना चाहते है कि अगर दो अभिलक्षण A, कहें बुद्धि और B कहें सुन्दरता सम्बन्धित हैं या नहीं। दोनों अभिलक्षण संख्यात्मक माप में असक्षम हैं परन्तु हम n व्यक्तियों के समूह को उनकी योग्यता (कोटि) कार्यदक्षता के सापेक्ष दो गुण धर्मों के लिए व्यवस्थित कर सकते हैं।

पियर्सन का सहसंबंध गुणांक श्रेणी–अंतर X और Y के बीच कोटि सहसंबंध गुणांक कहलाती है अभिलक्षण A और B के बीच उन व्यक्तियों के समूह के लिए।

स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक, सामान्यतः ρ (रो) से द्योतित की जाती है; सूत्र से :

टिप्पणी

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

जहाँ d कोटियों के जोड़ों के बीच अंतर है समान व्यक्तियों का दो अभिलक्षणों में और n जोड़ों की संख्या है

ρ की सीमायें : स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक–1 और +1 के बीच पड़ती है *i.e.*

$$-1 \le \rho \le 1$$

पुनरावृत्त कोटियाँ

गुण धर्मों की स्थिति में अगर श्रेणी का क्रम समान है (अगर कोटि का बिल्कुल छोटा समानुपात का क्रम समान है, तो उपर्युक्त सूत्र प्रयुक्त हो सकती है), परन्तु अगर कोटि का बहुत बड़ा समानुपात का क्रम समान है, तब यह उचित होगा कि उपर्युक्त सूत्र के साथ समायोजन या एक सुधार कारक $m(m^2-1)/2$ कारक जोड़ें, जहाँ m मदों की वह संख्या है जो पुनरावृत्त हुई है।

6.13 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **सहसंबंधः** Correlation
- **कार्य कराना भावः** Causation
- **विक्षेप चित्र या बिन्दु चित्रः** Scatter of Diagram
- **सहसंबंध गुणांकः** Co-efficient of Correlation
- **संभाव्य विभ्रमः** Probable error
- **कोटि सहसंबंध रीतिः** Rank Correlation Method
- **श्रेणी अंतर सहसंबंध विधि पुनरावृत्त श्रेणियाँः** Repeated Ranks
- **निर्धारण का गुणांकः** Co-efficient of Determination

6.14 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

प्रश्नमाला–6.1

1. सहसंबंध की संकल्पना की सार्थकता और अर्थ का वर्णन करें। इसे आप कैसे सांख्यिकीय दृष्टिकोण से परिकलित करेंगे।
2. (a) कार्ल पियर्सन के सहसंबंध के गुणांक को परिभाषित करें। यह किस अभिप्राय से माप करता है।

टिप्पणी

(b) कार्ल पियर्सन के सहसंबंध को गुणांक के विशेष अभिलक्षण क्या है? वे परिकल्पनायें कौन सी हैं जिस पर यह सूत्र आधारित है?

(c) कार्ल पियर्सन के सहसंबंध के गुणांक के परिकलित मूल्य को आप कैसे व्याख्या करेंगे? विशेष रूप से विवेचना करें $r = 0, r = - 1$ और $r = + 1$ के मानों का।

3. (a) दो चरों के बीच सहसंबंध के गुणांक से क्या समझते हैं वर्णन करें। सहसंबंध ज्ञात करने की विभिन्न विधियाँ क्या है? धनात्मक और ऋणात्मक सहसंबंध के बीच अंतर स्पष्ट करें।

(b) कार्ल पियर्सन के रैखिक सहसंबंध का गुणांक के लिए अभिव्यक्ति लिखें। क्यों यह रैखिक सहसंबंध का गुणांक कहलाता है? वर्णन करें।

4. निम्नलिखित वक्तव्यों की सांख्यिक वैधता की विवेचना करें :

(a) ''एक उच्च घनातमक सहसंबंध का गुणांक अखबार के बिक्री में वृद्धि और अपराध की संख्या में वृद्धि, इस निष्कर्ष की ओर ईशारा करती है कि अखबार पढ़ना जिम्मेवार हो सकता है अपराध की संख्या में वृद्धि के लिए।''

(b) ''एक उच्च घनात्मक r का मान सिगरेट पीने में वृद्धि और फेफड़े के कैंसर में वृद्धि के बीच स्थापित करती है कि सिगरेट पीना फेफड़े के कैंसर में वृद्धि के लिए जिम्मेवार है।''

(c) अगर सहसंबंध गुणांक पिछले दस वर्षों के दरम्यान निर्यात के वार्षिक मूल्य और उसी अवधि में जन्मे शिशु के वार्षिक संख्या के बीच $+ 0.9$ है, क्या निष्कर्ष अगर कोई है, आप निकालेंगे?

5. निम्नलिखित पर समीक्षा प्रस्तुत करें :

(a) घनात्मक सहसंबंध $r = 0.9$, जन्मे शिशु की संख्या और पिछले दशक में निर्यात के बीच पायी जाती है।

(b) एक विशेष वर्ष में रेलवे दुर्घटनाओं और उसी वर्ष जन्मे शिशु के बीच सहसंबंध गुणांक 0.8 पायी गई।

6. (a) एक विक्षेप चित्र की परिभाषा दें। एक विक्षेप चित्र खींचे जब

(i) $r = + 1$, (ii) $r = - 1$ और (iii) $r = 0$, जहाँ r सहसंबंध गुणांक है।

(b) एक विक्षेप चित्र क्या है? एक विक्षेप चित्र खींचने की विधि दें।

विक्षेप चित्र खींचे जब सहसंबंध गुणांक $r = + 1$ और $r = - 1$.

7. एक कम्पनी के उत्पादन प्रबंधक समय प्रवाह दिनों में (y) प्रबंधन करता है, निर्भर करता है किये गये कार्यों पर (x) निजाक निष्पादन होना है।

निम्नलिखित समंक आवश्यक सूचना देते हैं :

$x =$	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7
$y =$	8	13	14	11	20	10	22	26	22	25

टिप्पणी

एक विक्षेप चित्र खींचें। कार्ल पियर्सन के गुणन आघूर्ण सहसंबंध गुणांक के मान को परिकलित करें।

8. नीचे दिये गये समंक का प्रयोग कर, सहसंबंध का गुणांक r_{12} परिकलित करें

स्थिति	:	A	B	C	D	E	F	G	H
X_1	:	10	6	9	10	12	13	11	9
X_2	:	9	4	6	9	11	13	8	4

9. निम्नलिखित समंक से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें, 20 को मूल्य का कार्यवाही माध्य प्रयोग कर और 70 को माँग का कार्यवाही माध्य प्रयोग कर :

कीमत (मूल्य)	:	14	16	17	18	19	20	21	22	23
माँग	:	84	78	70	75	66	67	62	58	60

10. निम्नलिखित समंक से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक परिकलित करें।

संख्या	विषय	अंकों का प्रतिशत	
		पहली तिमाही	दूसरी तिमाही
1.	हिन्दी	75	62
2.	अंग्रेजी	81	68
3.	अर्थशास्त्र	70	65
4.	लेखा शास्त्र	76	60
5.	कामर्स	77	69
6.	गणित	81	72
7.	सांख्यिकी	84	76
8.	लागत लेखा	75	72

11. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक का परिकलन निम्नलिखित पतियों और पत्नियों की उम्र उनके विवाह के समय के लिए करें :

पति की उम्र (वर्षों में)	:	23	27	28	28	28	30	30	33	35	38
पत्नी की उम्र (वर्षों में)	:	16	20	22	27	21	29	27	29	28	29

12. निम्नलिखित समंक से क्रमशः X और Y का मूल बिंदु 44 और 26 लेते हुए पियर्सन के सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें :

x	:	43	44	46	40	40	42	45	42	38	40	42	57
y	:	29	31	19	18	19	27	27	29	41	30	26	10

टिप्पणी

13. निम्नलिखित तालिका कुल जनसंख्या का वितरण देती है और उनमें तो पूर्णतः या अंशतः अंधे हैं, निकाले कि क्या उम्र और अंधेपन के बीच कोई संबंध है।

उम्र (वर्षों में)	:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
लोगों की संख्या ('000)	:	100	60	40	36	24	11	6	3
अंधे	:	55	40	40	40	36	22	18	15

14. दशहरों में निम्नलिखित समंक से, जनसंख्या का घनत्व और मृत्युदर के बीच पियर्सन विधि से सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें।

शहर	वर्ग मील में क्षेत्रफ	जनसंख्या ('000 में)	मृत्यु की संख्या
A	150	30	300
B	180	90	1440
C	100	40	560
D	60	42	840
E	120	72	1224
F	80	24	312

15. निम्नलिखित समंक से सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

x	:	12	9	8	10	11	13	7
y	:	14	8	6	9	11	12	3

अब हम मान लें कि X का प्रत्येक मान का Z से गुणा कर दिया जाये और 6 इसमें जोड़ दिया जाये। उसी तरह Y के प्रत्येक मान को 3 से गुणा कर दिया जाए और इससे 3 घटा दिया जाये। नई श्रेणियां X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक क्या होगा?

16. दिया गया है : $\Sigma X = 125$, $\Sigma Y = 100$, $\Sigma X^2 = 650$, $\Sigma Y^2 = 436$; $\Sigma XY = 520$ और $n = 25$ कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक $r(X, Y)$ का मान प्राप्त करें।

17. आपको निम्नलिखित सूचना 10 प्रेक्षणों के आवृत्ति वितरण से संबंधित दी गई है :

$$\overline{X} = 5.5, \quad \overline{Y} = 4.0, \quad \Sigma X^2 = 385, \quad \Sigma Y^2 = 192; \quad \Sigma(X+Y)^2 = 947$$

r_{XY} ज्ञात करें।

18. एक कंप्यूटर ने चरों X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक परिकलित करने के क्रम में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये :

य़द्यपि, जाँच के क्रम में यह पाया गया कि इसने दो जोड़ों को कॉपी निम्न प्रकार से किया

टिप्पणी

X	Y
8	10
12	7

जबकि सही मूल्य थे,

X	Y
8	12
10	8

X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक के बीच सही मूल्य प्राप्त करें।

19. X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक के 20 मदों के लिए 0.3 है; X का माध्य 15 है Y का 20 है, प्रमाप विचलन क्रमशः 4 और 5 हैं। परिकलन के समय एक जोड़ा $(x = 27, y = 30)$ गलती से $(x = 17, y = 35)$ लिया गया। सही सहसंबंध का गुणांक ज्ञात करें।

20. दो चरों X और Y के बीच प्रेक्षणों के 13 जोड़ों का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के क्रम में, निम्नलिखित परिकलन किये गये :

    $\Sigma X = 30,\ \Sigma Y = 5,\ \Sigma X^2 = 670,\ \Sigma X^2 = 285,\ \Sigma XY = 334$

    क्रमानुसार जाँच के क्रम में पाया गया कि जोड़ा $(X = 11, Y = 4)$ गलत कॉपी किया गया, सही मूल्य $(X = 10, Y = 14)$ है। सहसंबंध गुणांक का सही मूल्य ज्ञात करें।

21. सहसंबंध गुणांक के संभाव्य विभ्रम से आप क्या समझते हैं? वर्णन करें कि यह कैसे प्रयुकत हो सकती है :

    (i) प्रतिदर्श सहसंबंध गुणांक के प्रेक्षित मूल्य की सार्थकता की व्याख्या करें।

    (ii) समष्टि सहसंबंध गुणांक की सीमाओं का निर्धारण करें।

22. सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें और निम्नलिखित समंक से इसके संभाव्य विभ्रम को निकालें :

x	:	7	6	5	4	3	2	1
y	:	18	16	14	12	10	6	8

23. (a) निम्नलिखित छात्रों के उम्र और खेलने की आदत के बीच कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक निकालें :

उम्र (वर्षों में)	:	15	16	17	18	19	20
छात्रों की संख्या	:	250	200	150	120	100	80
नियमित खिलाड़ी	:	200	150	90	48	30	12

संभाव्य विमुख को भी परिकलित करें और निर्दिष्ट करें कि क्या सहसंबंध का गुणांक सार्थक है।

24. कार्ल पियर्सन के सहसंबंध का गुणांक निम्नलिखित श्रेणी के लिए परिकलित करें।

टिप्पणी

कीमत (रु. में)	:	110-111	111-112	112-113	113-114	114-115	115-116
माँग (कि.ग्रा. में)	:	600	640	680	680	700	780
कीमत (रु. में)	:	116-117	117-118	118-119			
माँग (कि.ग्रा. में)	:	830	900	1000			

सहसंबंध का गुणांक के संभाव्य विभ्रम को भी परिकलित करें। अपने निष्कर्ष से क्या आप दावे के साथ कह सकते हैं कि माँग कीमती से सह–संबंधित हैं?

25. (a) एक छात्र r का मान 0.7 परिकलित करता है जब प्रतिदर्श में मदों की संख्या (n) 25 है। सीमायें ज्ञात करें जिनमें दूसरा प्रतिदर्श पड़ेगा उसी समष्टि से किया गया।

    (b) एक छात्र r का मूल्य 0.7 परिकलित करता है जब N का मान 5 है और निष्कर्ष निकालता है कि r काफी सार्थक है। क्या वह सही है?

26. 21 छात्रों के समूह के भौतिकी और गणित के बीच अंतिम अंकों कासहसंबंध गुणांक 0.80 प्रगणित किया गया। गुणांक के लिए 95% विश्वस्त सीमायें (Confidence Limits) ज्ञात करें।

उत्तरः वांछित सीमायें $= r \pm 1.96\,\text{P.E.}(r) = 0.8 \pm 1.96 \times 0.05299$
$= 0.6961$ और 09039

27. X और Y श्रेणी के विचलन अपने क्रमशः माध्यों से नीचे दी गई हैं :

x	:	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	:	3	-3	-4	0	4	1	2	-2	-1

उपर्युक्त समंक से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें।

28. निम्नलिखित समंक से X और Y श्रेणियों के बीच सह संबंध गुणांक परिकलित करें :

	X श्रेणी	Y श्रेणी
प्रेक्षणों की संख्या	15	15
समान्तर माध्य	25	18
प्रमा विचलन	5	5

$$\Sigma(X-25)(\Sigma-18)=125$$

29. एक सहसंबंध में परिणामों का अध्ययन करे गये थे

$\Sigma xy = 40 \;\; N = 100 \;\; \Sigma x^2 = 80 \;\; \Sigma y^2 = 20$ जहाँ

$x = X - \bar{X}$ और $y = Y - \bar{Y}$ सहसंबंध गुणांक हैं

(a) + 1.0 (b) -1.0 (c) शून्य (d) इनमें से कोई नहीं

टिप्पणी

30. दिया गया है $r = 0.8,\ \Sigma xy = 60,\ \Sigma y = 2.5$ और $\Sigma x^2 = 90$ मदों की संख्या निकालें। यहाँ x और y अपने क्रमशः माध्यों से विचलन हैं।

31. निम्नलिखित समंक से दो चरों X और Y के बीच सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें :

    (i) X-श्रेणी या Y-श्रेणी में मदों की संख्या = 12

    (ii) माध्य से विचलनों के वर्गों का योग : 360 x-श्रेणी के लिए और 250 y-श्रेणी के लिए

    (iii) दो श्रेणियों का अपने क्रमशः माध्यों से विचलनों के गुणनफल का योग = 225

32. (a) दो चरों X और Y के बीच सह'संबंध का गुणांक 0.8 है और उनका सह प्रसरण 10.2 है। X का प्रसरण 16 है। Y-श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

    (b) पाँच मदों के लम्बाई और चौड़ाई के बीच प्रसरण 6 हैं और उनका प्रमाप विचलन क्रमशः 2.45 और 2.61 हैं। लम्बाई और चौड़ाई के बीच सहसंबंध का गुणांक निकालें।

33. (a) दो चरों X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक 0.8 है और उनका प्रसरण 20 है। अगर X श्रेणी का प्रसरण 16 है, Y-श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

    (b) X और Y दो चरों के बीच सहसंबंध गुणांक 0.4 हैं और उनका सह प्रसरण 10 है। अगर X श्रेणी का प्रसरण 9 है, Y श्रेणी के माध्य के इर्द–गिर्द दूसरा आघूर्ण ज्ञात करें।

34. (a) द्विचर समंक के लिए : $\{(x,y) = (10,4)(n,3),(12,2)(14,0)(8,6)\}$ x और y के बीच सह संबंध का गुणांक है :

    (b) द्विचर समंक के लिए : $\{(x,y) = (15,3)(20,8),(25,13)(30,18)\}$ x और y के बीच सह–संसबंध का गुणांक है :

    (i) 1 (ii) -1 (iii) 0 (iv) 0.5

35. (a) दिया गया है कि x और y के बीच सहसंबंध 0.5 हैं, $2x-4$ और $3-2y$ के बीच सहसंबंध क्या है?

    (b) इस वक्तव्य में असंगति (Inconsistency) की ओर ध्यान आकृष्ट करें "$3x$ और -$2y$ के बीच सहसंबंध गुणांक नवही है जो x और y के बीच के सहसंबंध गुणांक थे।"

36. (a) मान लें कि r सहसंबंध x ओर y के बीच है। सहसंबंध गुणांक क्या है? इनके बीच :

    (i) $(3x+1)$ और $(2y-3)$ और (ii) x और $-y$?
    अपने उत्तर को वर्णन करें।

    (b) अगर $U = 2x+11$ और $V - 3y + 7$ U और V के बीच सहसंबंध गुणांक क्या होगा? अपने वक्तव्य को न्यायसंगत ठहरायें।

टिप्पणी

(c) क्या निम्नलिखित वक्तव्य वैध है? अपने उत्तर को उचित सिद्ध करें।

(i) x और y के बीच सहसंबंध गुणांक का घनात्मक मान का मतलब है कि अगर x बढ़ता है, y भी बढ़ने की ओर उन्मुख होता है।

(ii) सहसंबंध गुणांक मूल बिंदु के संदर्भ से स्वतंत्र है परंतु माप की इकाईयों पर निर्भर है।

(iii) x और y के बीच सहसंबंध गुणांक कल आया 1.25

37. निम्नलिखित पर समीक्षा प्रस्तुत करें; अपने निष्कर्ष के लिए तर्क देते हुए

(a) अगर दो चरों के बीच सहसंबंध गुणांक घनात्म है, तब

(i) $-X$ और $-Y$ के बीच सहसंबंध गुणांक घनात्मक है।

(ii) X और $-Y$ या $-X$ और Y के बीच सहसंबंध गुणांक घनात्मक है।

(b) दो चरों के बची सहसंबंध गुणांक 1.4 है।

(c) अगर चर स्वतंत्र है तब वे असहसंबंधित है।

(d) सहसंबंध गुणांक तब ही परिकलित किये जाते हैं। जब दो चार समान इकाईयों में मापित किये जाते हैं।

(e) अगर दो चरों के बीच सहसंबंध गुणांक शून्य हैं, तब चर स्वतंत्र है।

(f) r का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

(g) r दो चरों के बीच सभी प्रकार के संबंधों को मापती है।

(h) ''दो चरों के बीच संबंधों की नजदीकी r के समानुपाती है।''

(i) एक छात्र ने सिगरेट पीने और शराब पीने के सहसंबंध का अध्ययन करते वक्त r का मान 1.62 जितना ऊँचा पाया।

प्रश्नमाला–6.2

1. सहसंबंध सारणी पर एक संक्षिप्त नोट लिखें :

निम्नलिखित 24 छात्रों के प्राप्त अंक हैं एक क्लास टेस्ट के सांख्यिकी और गणित के

छात्रों का रोल नं0 :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
सांख्यिकी के अंक :	15	0	1	3	16	2	18	5	4	17	6	19
गणित के अंक :	13	1	2	7	8	9	12	9	17	16	6	18
छात्रों का रोल नं0 :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
सांख्यिकी में अंक :	14	9	8	13	10	13	11	11	12	18	9	7
गणित के अंक :	11	3	5	4	10	11	14	7	18	15	15	3

एक आवृत्ति सारणी बनायें प्रत्येक वर्ग अंतराल का परिमाण 4 अंक लेकर और प्रथम वर्ग अंतराल '8' के बराबर और 4 से कम। कार्ल पियर्सन का सहसंबंध का गुणांक परिकलित करें सांख्यिकी और गणित के अंकों के बीच सहसंबंध सारणी से और इस पर समीक्षा दें।

2. एक द्विचर सारणी क्या है? सूत्र लिखें जिसका प्रयोग आप सहसंबंध का गुणांक निकालने के लिए ऐसी सारणी से करते हैं, प्रयुक्त संकेताक्षरों का वर्णन करते हुए। सहसंबंध के गुणांक का ऋणात्मक मान क्या द्योतित करता है?

3. पतियों और पत्नियों की उम्र के बीच सहसंबंध को गुणांक परिकलित करें और इसके संभाव्य विभ्रम निम्नलिखित सारणी से :

पत्नियों की उम्र (वर्षों में)	पत्नियों की उम्र					
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	कुल
15-25	5	9	3	-	-	17
25-35	-	10	25	2	-	37
35-45	-	1	12	2	-	15
45-55	-	-	4	16	5	25
55-65	-	-	-	4	2	6
	5	20	44	24	7	100

4. दिये गये समंक संलग्न सारणी में, सहसंबंध गुणांक r, X और Y के बीच परिकलित करें।

Y / X	30-50	50-70	70-90
0-5	10	6	2
5-10	3	5	4
10-15	4	7	9

5. लाभांशों और शेयरों की कीमतों के बीच सहसंबंध का गुणांक की गणना निम्नलिखित से करें :

शेयर मूल्य (रु. में)	वार्षिक लाभांश (रु. में)					
	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
130-140	-	-	1	3	4	2
120-130	-	1	3	3	3	1
110-120	-	1	2	3	2	-
100-110	-	2	3	2	-	-
90-100	2	2	1	1	-	-

80-90	3	1	1	-	-	-
70-80	2	1	-	-	-	-

टिप्पणी

6. सहसंबंध का गुणन आघूर्ण गुणांक परिकलित करें संलग्न द्विचर वितरण के लिए।

Y \ X	5	10	15	20
11	2	4	5	4
17	5	3	6	2
23	3	1	2	3

7. निम्नलिखित तालिका 100 परिवारों के आय और खर्च का वितरण देती है। सहसंबंध का गुणांक और इसका संभाव्य विभ्रम ज्ञात करें। वर्णन करें कि सहसंबंध गुणांक सार्थक है या नहीं।

आय ('000 रु. में)	भोजन पर प्रतिशत खर्च (X)				
	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
350-450	-	-	-	-	5
450-550	-	-	1	10	9
550-650	-	4	12	25	3
650-750	4	16	2	2	-
750-850	2	5	-	-	-

8. 100 प्रतिष्ठानों का एक प्रतिदर्श लिया गया और ये वर्गीकृत किये गये उनके द्वारा किये गये क्रमशः बिक्री और कमाये गये लाभ के अनुसार। परिणाम नीचे दिये गये सारणी में दर्शायी गई है। बिक्री और लाभ के बीच सहसंबंध गुणांक का निर्धारण करें और इसके संभाव्य विभ्रम को भी।

लाभ ('000 रु. में)	बिक्रल (लाख रु. में)						कुल
	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	
350-450	5	3	-	-	-	-	8
450-550	3	8	5	4	-	-	20
550-650	1	-	7	11	2	2	23
650-750	-	4	5	15	6	-	30
750-850	-	-	2	7	4	6	19
कुल	9	15	19	37	12	8	100

टिप्पणी

प्रश्नमाला—6.3

1. (a) स्पियरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक क्या है? इसकी उपयोगिता की विवेचना करें।
   (b) कार्ल पियर्सन (गुणन आघूर्ण) सहसंबंध गुणांक और कोटि सहसंबंध गुणांक के बीच के अंतर का वर्णन करें।
2. (a) स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक का कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक पर क्या लाभ है? स्पिरयमैन के सहसंबंध गुणांक के परिकलन की विधि का वर्णन करें।
   (b) कोटि सहसंबंध गुणांक की परिभाषा दें। कब इसे कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक पर वरीयता दी जाती है।
   (c) आप कोटि सहसंबंध से क्या समझते है? यह कैसे निर्धारित की जाती है?
3. 10 प्रशिक्षुओं की कोटियाँ शुरू में (x) और अंत में (y) किसी कोर्स के लिए नीचे दी गई है :

प्रशिक्षु	:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	:	1	6	3	9	5	2	7	10	8	4
y	:	6	8	3	7	2	1	5	9	4	10

स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक को परिकलित करें।

4. उन्हीं 16 छात्रों का गणित और भौतिकी में कोटि निम्न हैं। कोष्ठक के अंदर की दो संख्यायें छात्रों का गणित और भौतिकी में कोटि को द्योतित करती है।

(1,1), (2,10), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 7), (7, 2), (8, 6), (9, 8), (10, 11), (11, 15), (12, 9), (13, 14), (14, 12), (15, 16), (16, 13).

कोटि सहसंबंध गुणांक को परिकलित करें इस समूह के लिए गणित और भौतिकी में दक्षता के लिए।

5. दो जजों ने एक सुंदरता के प्रतियोगिता में 12 प्रविष्टियाँ की कोटियाँ निम्न की :

X	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	:	12	9	6	10	3	5	4	7	8	2	11	1

किस स्तर की सहमति दोनों जजों के बीच है।

6. एक पेंटिंग प्रतियोगिता की 12 प्रविष्टियों की कोटियाँ दो जजों द्वारा निम्न की गई :

प्रविष्टि	:	A	S	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
जज I	:	5	2	3	4	1	6	8	7	10	9	12	11
जज II	:	4	5	2	1	6	7	10	9	11	12	3	8

कोटि सहसंबंध गुणांक को ज्ञात करें।

टिप्पणी

7. 10 प्रतिभागी एक सुंदरता प्रतियोगिता में तीन जजों द्वारा निम्न क्रम में कोटिबद्ध किये गये :

पहला जज	:	1	5	4	8	9	6	10	7	3	2
दूसरा जज	:	4	8	7	6	5	9	10	3	2	1
तीसरा जज	:	6	7	8	1	5	10	9	2	3	4

कोटि सहसंबंध गुणांक प्रयुक्त कर यह विवेचना करें कि किन जजों के जोड़े की सबसे नजदीकी सहमति है सुंदरता के प्रति।

दूसरे और तीसरे जज के जोड़े की सुंदरता के प्रति सबसे नजदीकी की सहमति है।

8. निम्नलिखित समंक के लिए, कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित करें।

x	:	80	91	99	71	61	81	70	59
y	:	123	135	154	110	105	134	121	106

9. निम्नलिखित अंक है छात्रों के समूह द्वारा प्राप्त दो पत्रों में। कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

अर्थशास्त्र	:	78	36	98	25	75	82	92	62	65	39
सांख्यिकी	:	84	51	91	69	68	62	86	58	35	49

10. निम्नलिखित समंक के अंकों स्पियरमैन का सहसंबंध गुणांक परिकलित करें 10 बच्चों के मनोवैज्ञानिक परीक्षण (x) और अंकगणितीय समर्थता (y).

बच्चा	:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	:	105	104	102	101	100	99	98	96	93	62
y	:	101	103	100	98	95	96	104	92	97	94

11. आप स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध सूत्र को कोटियों के लिए श्रेणी का क्रय समान होने पर कैसे संशोधित करेंगे।

12. निम्नलिखित समंक 10 छात्रों को प्राप्त अंकों से संबंधित है 10 छात्रों के वर्ग में सांख्यिकी और लागत लेखा में :

सांख्यिकी में अंक	:	30	38	28	27	28	23	30	33	28	35
लागत लेखा में अंक	:	29	27	22	29	20	29	18	21	27	22

कोटि सहसंबंध गुणांक प्राप्त करें।

टिप्पणी

13. निम्नलिखित समंक के लिए स्पियरमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

X	:	57	16	24	65	16	16	9	40	48	33
Y	:	19	6	9	20	4	15	6	24	13	13

14. अगर कोटि सहसंबंध गुणांक 0.6 है और कोटियों के अंतर के वर्गों का योगफल 66 है, तब जोड़ों की संख्या हैं

(i) 8 (ii) 9 (iii) 10 (iv) 11

15. सहसंबंध का गुणांक डिबेंचर मूल्य और शेयर मूल्यों के बीच 0.143 पाया गया। अगर कोटियों में अंतर के वर्गों का योग 48 दिया गया है, n का मूल्य ज्ञात करें।

16. सहसंबंध का गुणांक 10 छात्रों द्वारा सांख्यिकी और लेखा शास्त्र में प्राप्त अंकों के बीच 0.2 पाया गया। बाद में पाया गया कि एक छात्र ने दो विषयों के कोटि अंतर में 7 के बदले 9 ले लिया। कोटि सहसंबंध गुणांक का सही मूल्य ज्ञात करें।

17. सही उत्तर बतायें।

दो गुणधर्मों के अनुसार एक प्रतिदर्श में कोटियाँ नीचे दी गई हैं :

R_1	:	1	2	3	4	5
R_2	:	5	4	3	2	1

उनके बीच कोटि सहसंबंध है :

0, + 1, - 1, इनमें से कोई नहीं

प्रश्नमाला–6.4

1. (a) दो चर श्रेणियों के बीच संगामी विचलनों की विधि का वर्णन करें सहसंबंध की गणना के लिए।

   (b) दो चरों के बीच के संबंध निकालने की मजबूती और कमजोरी के बिंदु बतायें संगामी विचलन विधि द्वारा।

2. नीचे दिये गये समंक दो चावल की कीमत और वर्षा गिरने के बीच सहसंबंध का गुणांक प्राप्त करें संगामी विचलन द्वारा।

वर्ष	चावल की कीमत (प्रति क्विंटल में)	वार्षिक वर्षा (से.मी. में)	वर्ष	चावल की कीमत (प्रति क्विंटल में)	वार्षिक वर्षा (से.मी. में)
1959	175	315	1965	196	353
1960	160	340	1966	190	333
1961	158	350	1967	191	390
1962	200	350	1968	195	340

1963	198	330	1969	196	380
1964	195	335	1970	204	340

टिप्पणी

3. निम्नलिखित समंक से संगमी विचलन विधि द्वारा सहसंबंध गुणांक परिकलित करें :

वर्ष	:	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
पूर्ति	:	80	82	86	91	83	85	89	96	93
कीमत	:	146	140	130	117	133	127	115	95	100

4. सहसंबंध गुणांक परिकलित करें, समगमी विचलन विधि का प्रयोग कर एक मद की पूर्ति और माँग के बीच 10 वर्ष की अवधि के लिए जैसा नीचे दिया गया है :

वर्ष	:	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
पूर्ति	:	125	160	164	174	155	17	165	162	172	175
माँग	:	115	125	192	190	165	174	124	127	152	169

5. सहसंबंध गुणांक परिकलित करें संगामी विचलन विधि द्वारा :

पूर्ति	:	112	125	126	118	118	121	125	125	131	135
कीमत	:	106	102	102	104	98	96	97	97	95	90

6. सहसंबंध गुणांक परिकलित करें संगामी विचलन विधि द्वारा :

X	:	150	135	90	140	100
Y	:	60	50	100	80	90

7. निम्नलिखित समंक से संगामी विचलनों का गुणांक परिकलित करें :

X	:	100	120	135	135	115	110	110
Y	:	50	40	60	60	80	55	65

8. निम्नलिखित समंक से संगामी विचलनों का गुणांक परिकलित करें :

प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या = 96

संगमी विचलनों के जोड़ों की संख्या = 36

प्रश्नमाला—6.5

1. (a) अगर सहसंबंध गुणांक 0.7 है, तब निर्धारण का गुणांक क्या है? इसके मान की व्याख्या भी करें।

टिप्पणी

(b) निर्धारण का गुणांक क्या है? यह कैसे उपयोगी है प्रेक्षित सहसंबंध गुणांक की व्याख्या करने में? एक उदाहरण देकर वर्णन करें।

2. पदों का वर्णन करें :

   (i) गैर–निर्धारण का गुणांक

   (ii) अलगाव का गुणांक

   और उनका भौतिक व्याख्या करें।

3. (a) 0.5 के सहसंबंध गुणांक का अर्थ नहीं है कि 50% समंक का वर्णन किया गया है? समीक्षा दें।

   (b) क्या आप इस वक्तव्य से सहमत हैं : $r = 0.8$ का अर्थ है समंक का 80% वर्णित है।''

4. उपभोग खर्च (c) और खर्च वाली आय (y) के बीच सहसंबंध गुणांक + 0.6 पाया गया। C के विचरण का क्या प्रतिशत वर्णित होती है y में विचरण के द्वारा ?

5. (a) दो चरों के बीच सहसंबंध का मान $r = 0.6$ है और दूसरे दो चरों के बीच 0.3 है। क्या इसका अर्थ है कि पहला सहसंबंध दूसरे की अपेक्षा दुगुनी मजबूत है? कारण दें।

   (b) दो चरों के बीच सहसंबंध का मान 0.9 है और दूसरे दो चरों के बीच 0.3 है। क्या हम इसका अर्थ यह निकाल सकते हैं कि पहला सहसंबंध दूसरे की अपेक्षा तिगुनी मजबूत है? कारण हैं।

6. निम्नलिखित पर समीक्षा दें :

   ''दो चरों के बीच संबंधों की नजदीकी जैसा r से निर्धारित होती है, उनके बीच सहसंबंध गुणांक के समानुपाती है।''

7. अगर यादृच्छिक चरों x और y के बीच सहसंबंध गुणांक घनात्मक है, निम्नलिखित वक्तव्य पर समीक्षा दें :

   (i) $-x$ और $-y$ के बीच सह–संबधं गुणांक घनात्मक है।

   (ii) हम लोग $+x$ और $-y$ के बीच सहसंबंध के चिन्ह के बारे में कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते।

   (iii) $r = 0.64$ के परिणाम की व्याख्या करें, जहाँ r^2 निर्धारण का गुणांक है।

8. अगर X और Y के बची सहसंबंध 0.4 और U और V के बीच 0.8, क्या इसका अर्थ है कि U और V के बीच संबंध का विस्तार दुगुनी है X और Y के बीच से?

टिप्पणी

6.15 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamentals of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

अध्याय 7 रैखिक प्रतीपगमन (समाश्रयण) विश्लेषण (Linear Regression Analysis)

संरचना (Structure)

7.0 परिचय (Introduction)

'प्रतीपगमन' शब्द का साहित्यिक या शब्दकोषीय अर्थ है 'पीछे लौटना या औसत मूल्य की ओर लौटना'। इस पद का प्रथम बार प्रयोग एक ब्रिटिश जैव वैज्ञानिक सर फ्रांसिस गाल्टन ने 19वीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध में कुछ अध्ययनों के सम्बन्ध में जिसमें उन्होंने प्राक्कलन की सीमा पर किया, जिसके अनुसार लम्बे माता–पिताओं की संतान प्रत्यावर्तित या पीछे प्रतीपगमन कर जनसंख्या की औसत ऊँचाई की ओर लौट जाती है। उन्होंने करीब एक हजार पिताओं और पुत्रों के ऊँचाईयों के बीच सम्बन्धों का अध्ययन किया और प्राप्त निष्कर्षों को अपने शोध लेख में प्रकाशित किया ''पैतृक ऊँचाई में मध्यता की ओर प्रतीपगमन (Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature)"। उनके अध्ययन की रूचिकर विशेषताएं थीं :

(i) लम्बे पिताओं को लम्बे पुत्र होते हैं और छोटे पिताओं के छोटे पुत्र

(ii) पुत्रों की औसत ऊँचाई लम्बे पिताओं के समूह के पिताओं से कम होती है और पुत्रों की औसत ऊँचाई छोटे कद के पिताओं के समूह के पिताओं से अधिक होती है।

दूसरे शब्दों में, गाल्टन के अध्ययन ने प्रकट किया कि असामान्य रूप से लम्बे या छोटे कद के माताओं–पिताओं की संतान प्रवृत्त होती है। प्रत्यावर्तित या पीछे लौटकर जनसंख्या के औसत ऊँचाई की ओर, एक घटना जिसे गाल्टन ने वर्णित किया मध्यमता की ओर प्रतीपगमन (Regression to Mediocrity)।

उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि अगर किसी समूह के पिताओं की औसत ऊँचाई 'a' सेंटीमीटर ऊपर (नीचे) है सामान्य औसत ऊँचाई से तब उनके पुत्रों की औसत ऊँचाई $(a \times r)$ सेंटीमीटर ऊपर (नीचे) होगी सामान्य औसत ऊँचाई से जहाँ r सहसम्बन्ध गुणांक है दिए पिताओं के समूह की ऊँचाईयों और उनके पुत्रों की ऊँचाईयों के बीच। इस स्थिति में सहसम्बन्ध धनात्मक है और चूँकि $|r| \leq|$ । हमें $a \times r \leq a$ । यह उपर्युक्त (ii) के निष्कर्ष का समर्थन करता है।

परन्तु आजकल प्रतीपगमन शब्द जैसा सांख्यिकी में प्रयुक्त होती है का बहुत विस्तृत दृष्टिकोण है बगैर जैविकी के संदर्भ के। प्रतीपगमन विश्लेषण का सामान्य भाव में, अर्थ है प्राक्कलन या पूर्वानुमान एक चर के अज्ञात मूल्य का दूसरे चर के ज्ञात मूल्य से। यह एक बहुत महत्वपूर्ण सांख्यिकीय साधन है जो लगभग सभी विज्ञानों में विस्तृत रूप से प्रयुक्त होती है– प्राकृतिक, सामाजिक और भौतिकी। यह विशेष रूप से व्यवसायिक और अर्थशास्त्र के अध्ययन में दो या अधिक चरों के सम्बन्धों के अध्ययन में प्रयुक्त होती है जो कार्य रूप से सम्बन्धित हैं माँग और पूर्ति वक्रों के प्राक्कलन में, लागत कलनों, उत्पादन और खपत कलनों, इत्यादि।

पूर्वानुमान या प्राक्कलन एक बहुत बड़ी समस्या है मानवीय क्रियाकलाप के लगभग सभी क्षेत्रों में। प्राक्कलन या पूर्वानुमान भविष्य के उत्पादन, खपत, कीमतों, लागतों, बिक्री, लाभ, आय इत्यादि के लिए अत्यधिक महत्व की हैं एक व्यापारी या अर्थशास्त्री के लिए। जनसंख्या प्राक्कलन और जनसंख्या प्रक्षेपण अपरिहार्य है एक अर्थव्यवस्था के प्रभाव योजना के लिए। फर्मास्युटिकल प्रतिष्ठानों की अभिरूचि नई दवाओं के रोगियों पर प्रभाव का अध्ययन या प्राक्कलन में होती है। प्रतीपगमन विश्लेषण वैज्ञानिक तकनीकों में एक बहुत महत्व की है इस तरह के पूर्वानुमानों को करने के लिए। एम.एम. लेयर के शब्दों में ''प्रतीपगमन विश्लेषण एक गणितीय माप है दो या अधिक चरों के बीच औसत सम्बन्धों की समंक की वास्तविक इकाईयों के क्रम में।

हम लोग दैनानुदिनी जिंदगी में कई अन्तर–संबंधित घटनाओं से रूबरू होते हैं। उदाहरण के एक फसल की उपज वर्षा पर निर्भर करती है, एक उत्पाद की कीमत या मूल्य निर्भर है उत्पादन और विज्ञापन खर्च पर, एक विशेष उत्पाद की माँग इसके कीमत पर निर्भर करती है, एक व्यक्ति का खर्च उसकी आय पर निर्भर करती है और आगे। प्रतीपगमन विश्लेषण एक समय में दो चरों तक सीमित सरल प्रतीपगमन कहलाती है। परन्तु बहुत बार एक विशेष संवृत्ति बहुविध कारकों से प्रभावित हो सकती है। एक समय में दो से अधिक चरों के अध्ययन के लिए

टिप्पणी

प्रतीगमन विश्लेषण बहुविध प्रतीपगमन कहलाती है। परन्तु इस अध्याय में हमलोग अपने आपको सिर्फ सरल प्रतीपगमन तक परिसीमित रखेंगे।

प्रतीपगमन विश्लेषण में दो प्रकार के चर होते हैं। वह चर जिसका मूल्य प्रभावित होता है या अनुमान लगभग है निर्भर चर कहलाता है और वह चर जो मूल्यों को प्रभावित करता है और पूर्वानुमान के लिए प्रयुक्त होती है, स्वतंत्र चर कहलाती है। प्रतीपगमन विश्लेषण में स्वतंत्र चर समाश्रय (Explanator) भी कहलाती है जबकि निर्भर चर समाश्रयी (Regresce) या वर्णित चर (Explained Variable) भी कहलाती है।

7.1 उद्देश्य (Objectives)

प्रतीपगमन शब्द का साहित्यिक या शब्दकोषीय अर्थ है पीछे लौटना या औसत मूल्य की ओर लौटना। सर्वप्रथम गाल्टन के अध्ययन ने प्रकट किया कि असामान्य रूपसे लम्बे या छोटे कद के माताओं–पिताओं की संतान प्रवृत्त होती है। प्रत्यावर्तित या पीछे लौटकर जनसंख्या की औसत ऊँचाई की ओर जिसे गाल्टन ने वर्णित किया मध्यमता की ओर प्रतीपगमन (Recession to Mediocrity)

परन्तु आजकल प्रतीपगमन शब्द जैसा सांख्यिकी में प्रयुक्त होती है का बहुत विस्तृत दृष्टिकोण है। प्राक्कलन या पूर्वानुमान भविष्य के उत्पादन, खपत, कीमतों, लागतों, बिक्री, लाभ, आय इत्यादि के लिए एक व्यापारी या अर्थशास्त्री के लिए अत्यधिक महत्व की है। प्रतीपगमन विश्लेषण दो या अधिक चरों के बीच औसत सम्बन्धों की समंक की वास्तविक इकाईयों के क्रम में एक गणितीय माप है।

7.2 रैखिक और गैर–रैखिक प्रतीपगमन (Linear and Non-Linear Regression)

अगर दिया गया द्विचर समंक एक आलेख पत्र पर खींचा जाए, विक्षेप चित्र पर प्राप्त बिन्दुयें कमोबेश एक वक्र के चारों ओर संघनित होंगी, जो 'प्रतीपगमन का वक्र' कहलाती है। अधिकतर ऐसा वक्र स्पष्ट नहीं होता है और बहुत भ्रामक है और कभी–कभी जटिल भी। प्रतीगमन वक्र का गणितीय समीकरण, सामान्यतः प्रतीपगमन समीकरण कहलाती है हमें स्वतंत्र चर के लिए मूल्य के लिए निर्भर चर के मूल्य में औसत परिवर्तन का अध्ययन करने की समर्थता प्रदन करती है।

अगर प्रतीपगमन वक्र एक सीधी रेखा है, हम कहते हैं कि अध्ययनाधीन चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध है। इस प्रकार के वक्र का समीकरण सीधी रेखा का समीकरण है, i.e., x और y चरों में प्रथम स्तर समीकरण। रैखिक प्रतीपगमन की स्थिति में निर्भर चर के मूल्य नियत निरपेक्ष परिमाण में बढ़ते हैं स्वतंत्र चर के मूल्य में ईकाई परिवर्तन से। यद्यपि, यदि प्रतीपगमन का वक्र सीधी रेखा नहीं है, प्रतीपगमन वक्रीय या गैर–रैखिक प्रतीपगमन कहलाती है। प्रतीपगमन समीकरण x और y के बीच एक फलनक सम्बन्ध (Functional Relation) होगा x और y के पदों से आविष्ट एक से अधिक डिग्री का, i.e., x^2, y^2, xy इत्यादि प्रकार के पदों

से आविष्ट। यद्यपि, इस अध्याय में हम लोग अपनी चर्चा को सिर्फ दो चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध तक सीमित रखेंगे।

टिप्पणी

7.3 प्रतीपगमन की रेखाएं (Lines of Regression)

प्रतीपगमन की रेखा एक ऐसी रेखा है जो एक चर का सबसे अच्छा प्राक्कलन देती है दूसरे चर के दिए मूल्य के लिए। दो चरों x और y की स्थिति में, हमें दो प्रतीपगमन की रेखाएं प्राप्त होंगी; एक y का x पर और दूसरी x का y पर।

परिभाषा: प्रतीपगमन की रेखा y का x पर ऐसी रेखा है जो x के किसी विशिष्ट मूल्य के लिए y का सबसे उपयुक्त प्राक्कलित मूल्य लेती है।

उसी तरह, x का y पर प्रतीपगमन की रेखा ऐसी रेखा है जो y के किसी विशिष्ट मूल्य के लिए x का सबसे उपयुक्त प्राक्कलित मूल्य देती है।

पद 'उपयुक्त' की व्याख्या न्यूनतम वर्ग के सिद्धान्त के अनुसार है जिसमें अवशेषों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करने या प्राक्कलनों की त्रुटियों, i.e., चर के दिए गए प्रेक्षित मूल्य और विचलनों के बीच और उनके संगत प्राक्कलित मूल्यों जैसा उपयुक्तता की रेखा से दिया जाता है। हम विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम कर सकते हैं y-अक्ष के समानान्तर या x-अक्ष के समानान्तर, पहला (i.e., विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करना y-अक्ष के समानान्तर), y और x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण देती है और बाद का viz. x-अक्ष के समानान्तर विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करना x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण देती है।

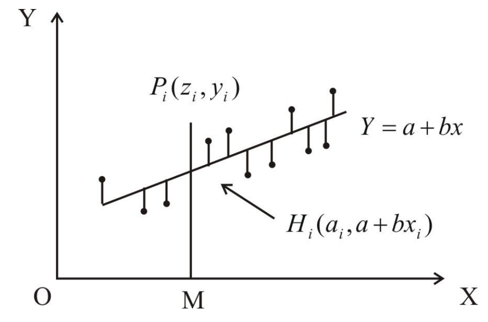
हमलोग नीचे y का x पर प्रतीपगमन की रेखा के समीकरण को निकालने की तकनीक का वर्णन करेंगे।

7.3.1 y का x पर प्रतीपगमन का समीरकण निकालना (To find the equation of Regression of Y on X)

माना कि $(x_1, y_1), (x_2, y_2) - - - - - (x_{n,} y_n)$ प्रेक्षणों के n जोड़े हैं अध्ययनाधीन दो चरों x और y पर। माना कि,

$$y = a + bx \qquad \ldots(7.1)$$

प्रतीपगमन की रेखा (उपयुक्तता) है y का x पर।



चित्र क्र. 7.1

टिप्पणी

किसी दिए गए बिन्दु $P_i(x_{i,}y_i)$ पर विक्षेप चित्र में, प्राक्कलन का विभ्रम या अवशेष जैसा उपयुक्तता की रेखा (7.1) से दी गई है P_iH_i है। अब, H_i का x-निर्देशांक वही है जो P_i का है, viz., x_i और चूँकि $H_i(x_i)$ रेखा (7.1) पर पड़ता है, H_i का y-निर्देशांक (Coordinate) i.e., H_iM दिया जाता है $(a+bx_i)$ से। इसलिए, P_i के लिए प्राक्कलन का विभ्रम (त्रुटि) दिया जाता है।

$$P_iH_i = P_iM - H_iM$$

$$= y_i - (a+bx_i) \qquad \ldots(7.2)$$

यह त्रुटि है (Y-अक्ष के समानान्तर) ith बिन्दु के लिए। हमें ऐसी त्रुटियाँ सभी बिन्दुओं के लिए होंगी विक्षेप चित्र पर। ऐसे बिन्दु जो रेखा के ऊपर पड़ती है, त्रुटि घनात्मक होगी और बिन्दु जो रेखा से नीचे पड़ती है, त्रुटि ऋणात्मक होगी।

न्यूनतम वर्गों के सिद्धान्त के अनुसार, हमें नियतांकों a और b का निर्धारण करना है (7.1) में ऐसा कि प्राक्कलनों की त्रुटियों के वर्गों का योग न्यूनतम है। दूसरे शब्दों में, हमें न्यूनतम करना है।

$$E = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} P_iH_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \qquad \ldots(7.3)$$

a और b में विचरणता के संदर्भ में।

हम 6 को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं

$$E = \Sigma(Y - Ye)^2 = \Sigma(y - a - bx)^2 \qquad \ldots(7.3a)$$

जहाँ y_e, Y का प्राक्कलित मूल्य है जैसा (7.1) से दिया गया है, x के दिए गए मान के लिए और योग चिन्ह (Σ) प्रेक्षणों के n जोड़े के लिए लिया गया है।

अवकलन गणित (Differential Calculus) के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ (Maxima and Minima) सिद्धान्त का प्रयोग कर, E को आत्यंतिक (उच्चतम या निम्नतम) होगा a और b के विचरणों के लिए अगर इसका आंशिक परिकलण (Partial Derivative) a और b के सापेक्ष अलग–अलग गायब हो जाते हैं,

इसलिए (7.3a) से, हम पाते हैं,

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \text{ और } \frac{E}{2b} = 0 \qquad \ldots(7.4)$$

$$\Rightarrow \ \Sigma Y = na + b\Sigma x \qquad \ldots(7.5)$$

$$\text{और } \ \Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad \ldots(7.6)$$

ये समीकरण a और b को प्राक्कलित करने के लिए प्रसामान्य समीकरण कहे जाते हैं। परिमाण $\Sigma x, \Sigma x^2, \Sigma y, \Sigma xy$ प्राप्त किए जा सकते हैं दिए गए n बिन्दुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_{21})\ldots\ldots\ldots(x_n, y_n)$ से और हमलोग समीकरणों (7.5) और (7.6) को एक साथ हल कर सकते हैं a और b के लिए पाने के लिए :

$$a = \frac{(\Sigma x^2)(\Sigma y) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad \ldots(7.7)$$

और $b = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$ ...(7.8)

a और b के इन मूल्यों को प्रतिस्थापित करने पर (7.7) और (7.8) से (7.1) में, हम प्रतीपगमन की रेखा का वांछित समीकरण y का x पर पाते हैं।

प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण y का x पर प्राप्त किया जा सकता है बहुत व्यवस्थित और सरलीकृत रूप में $\bar{x}, \bar{y}, \sigma_x \sigma_y$ के क्रम में और $r = r_{xy}$ जैसा नीचे वर्णित है

(7.5) के दोनों तरफ n से भाग देने पर, कुल जोड़ों की संख्या, हम पाते हैं

$$\frac{1}{n}\Sigma y = a + b.\frac{1}{n}\Sigma x \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = a + b\bar{x} \quad \ldots(7.9)$$

इसका अर्थ है कि r उपयुक्तता की रेखा, i.e., y का x पर प्रतीपगमन बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है। या दूसरे शब्दों में, बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ y का x पर प्रतीपगमन की रेखा है।

(7.8) से, हम पाते हैं : $b = \dfrac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2}$ ...(7.10)

हम पाते हैं कि समीकरण (7.1) ढलान–अन्तः खण्ड रूप (Slope-Intercept) में है viz., $y = mx + c$ । इसलिए b प्रतीपगमन की रेखा का ढलान y का x पर प्रदर्शित करता है। आगे, हमने (7.9) में सिद्ध किया है कि यह रेखा (i.e., y का x पर प्रतीपगमन की रेखा बिन्दु) बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है। इसलिए, ढलान–बिन्दु का प्रयोग कर एक बिन्दु का समीकरण का रूप, y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का वांछित समीकरण हो जाता है :

$$y - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad \ldots(7.11)$$

या $y - \bar{y} = \dfrac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma \text{x}^2}(x - \bar{x})$ ...(7.12)

परन्तु $\gamma - \gamma_{xy} = \dfrac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x \cdot \sigma \text{y}} \Rightarrow \text{Cov}\,(x, y) = r\sigma x \cdot \sigma \text{y}$

$$\therefore \quad y - \bar{y} = \frac{r \cdot \sigma \text{y}}{\sigma x}(x - \bar{x}) \quad \ldots(7.13)$$

टिप्पणियाँ: 1. (7.4) से हमें :

$$\Sigma(y - a - bx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma(y - ye) = 0 \quad \ldots(7.14)$$

जहाँ y_e, y का प्राक्कलित मूल्य है x के दिए मूल्य के लिए y का x पर प्रतीपगमन रेखा (7.1) से दी गई है।

2. y का x पर प्रतीपगमन की रेखा बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है।

3. रैखिक और गैर–रैखिक प्रतीपगमन [उपनति मान (trend)] की उपयुक्तता विस्तार से अध्याय–5 में वर्णित की गई है– काल श्रेणी विश्लेषण, उपनति मानों के निर्धारण के लिए।

7.3.2 x का y पर प्रतीपगमन की रेखा (The Line of Regression of X on Y)

x का y पर प्रतीपगमन की रेखा ऐसी रेखा है जो x का सबसे अच्छा प्राक्कलन करती है y के दिए गए मूल्य के लिए। यह न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा भी प्राप्त की जाती है x-अक्ष के समानान्तर त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करके (देखें चित्र 7.2) शुरू करके समीरकण के साथ के रूप :

$$x = A + By \qquad \ldots(7.15)$$

और x के प्राक्कलनों की त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करने पर, i.e., x के दिए गए मूल्यों के बीच के विचलनों और उनके प्राक्कलनों को जो प्रतीपगमन की रेखा द्वारा x का y पर दिया जाता है viz. (7.15), i.e., न्यूनतम करने पर

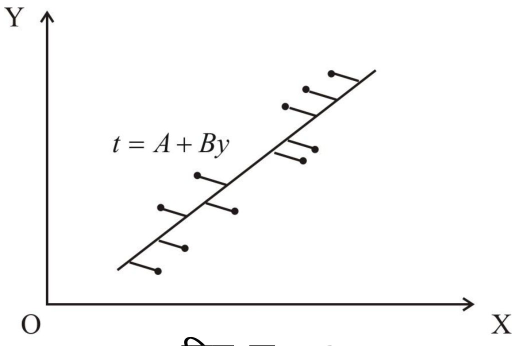
$$E = \Sigma(x - A - By)^2 \qquad \ldots(7.16)$$

हम लोग A और B को प्राक्कलित करने के लिए प्रसामान्य समीकरण पाएंगे जैसे :

$$\Sigma A = nA + B\Sigma y$$

और

$$\Sigma xy = A\Sigma y + B\Sigma y \qquad \ldots\ldots(7.17)$$



चित्र क्र. 7.2

(7.17) को A और B के लिए एक साथ हल करने पर, हम पायेंगे

$$A = \frac{(\Sigma y^2)(\Sigma x) - (\Sigma y)(\Sigma xy)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \qquad \ldots(7.18)$$

और

$$B = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \qquad \ldots(7.19)$$

A और B के इन मूल्यों को (7.15) में प्रतिस्थापित करने पर, हम वांछित समीकरण पाएंगे प्रतीपगमन की रेखा का x का y पर।

टिप्पणी: (7.18) और (7.19) में प्राप्त A और B के मूल्य में समान हैं जैसे समीकरणों (7.7) और (7.8) के जहाँ x परिवर्तित हो जाता है y के और y, x के।

ठीक उसी तरह आगे बढ़ने पर जैसा y का x पर प्रतीपगमन की रेखा की स्थिति में, हम लोग (7.17) से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करेंगे।

(i) $$\bar{x} = A + B\bar{y} \quad \ldots(7.20)$$

इसका मतलब है कि x का y पर प्रतीपगमन की रेखा बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है

(ii) $$B = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma \text{y}^2} = \frac{r\sigma \text{x}}{\sigma \text{y}} \quad \ldots(7.21)$$

(iii) प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण x का y पर है

$$x - \bar{x} = B(y - \bar{y}) \quad \ldots(7.22)$$

$$\Rightarrow \quad x - \bar{x} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma \text{y}^2}(y - \bar{y}) \quad \ldots(7.23)$$

$$\Rightarrow \quad x - \bar{x} = \frac{r\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y}) \quad \ldots(7.24)$$

इन परिणामों के विचलन अध्येताओं के लिए प्रश्न के रूप में छोड़ा जाता है।

टिप्पणियाँ: **1.** प्रतीपगमन समीकरण (7.13) का अर्थ है कि प्रतीपगमन की रेखा y का x पर बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है। उसी तरह (7.24) का अर्थ है कि प्रतीपगमन की रेखा x का y पर बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती है। इसलिए दोनों प्रतीपगमन की रेखाए बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती हैं। दूसरे शब्दों में, माध्य मूल्य $(\bar{x}, \bar{y})$ दो प्रतीपगमन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु के रूप में प्राप्त की जा सकती हैं।

2. क्यों दो प्रतीपगमन की रेखाएं: हमेशा दो प्रतीपगमन की रेखाएं होती हैं, एक y का x पर और दूसरा x का y पर। y पर x का प्रतीपगमन की रेखा (7.12) या (7.13) का प्रयोग y के मूल्य को दिए गए x के मूल्य के लिए प्राक्कलित या पूर्वानुमान के लिए होती है प्राप्त प्राक्कलन सबसे अच्छी होगी इस दृष्टि से कि इसे न्यूनतम संभाव्य त्रुटि होगी जैसा न्यूनतम वर्ग रीति से परिभाषित है। हम लोग x का प्राक्कलन भी प्राप्त कर सकते हैं दिए गए y के मूल्य के लिए समीकरण (7.13) से परन्तु इस तरह से प्राप्त प्राक्कलन सबसे अच्छी नहीं होगी चूँकि (7.13) प्राप्त की जाती है y में प्राक्कलित त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करके परन्तु x में नहीं। इसलिए x के प्राक्कलन या पुर्वानुमान के लिए, हम x पर y का प्रतीपगमन का समीकरण (7.24) का प्रयोग करते हैं जो निकाली जाती है x में प्राक्कलनों की त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करके। यहाँ x निर्भर चर है और y एक स्वतंत्र चर है। दो प्रतीपगमन समीकरण उल्टे जाने या अदल–बदल नहीं किए जाते हैं सरल तर्क के कारण कि इन समीकरणों के निकालने की परिकल्पनाओं का आधार भिन्न है। y का x पर प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त की जाती है y-अक्ष के समानान्तर त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करके जबकि x का y पर प्रतीगमन समीकरण प्राप्त की जाती है x-अक्ष के समानान्तर त्रुटियों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम कर।

टिप्पणी

पूर्ण सहसम्बन्ध की खास स्थिति में, धनात्मक या ऋणात्मक, i.e., $r = \pm 1$, y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है :

$$y - \bar{y} = \pm \frac{\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - \bar{y}}{\sigma y} = \pm\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma x}\right) \qquad \ldots(*)$$

उसी तरह से, x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है

$$x - \bar{x} = \pm \frac{\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y}) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - \bar{y}}{\sigma y} = \pm\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma x}\right) \qquad \ldots(**)$$

जो (*) के समान है।

इसलिए पूर्ण सहसम्बन्ध की स्थिति में, $(r = \pm 1)$, दोनों प्रतीपगमन की रेखाएं संपाती होती हैं। इसलिए साधारण में, हमें हमेशा दो प्रतीपगमन की रेखाएं होती हैं सिर्फ खास स्थिति पूर्ण सहसम्बन्ध $(r = \pm 1)$ को छोड़कर जब दोनों रेखाएं संपाती होती हैं और हम सिर्फ एक रेखा पाते हैं।

7.3.3 प्रतीपगमन रेखाओं के बीच कोण (The Angle between Lines of Regression)

अगर θ न्यूनकोण (Acute Angle) है दो प्रतीपगमन की रेखाओं के बीच तब

$$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\sigma x \sigma y}{\sigma x^2 + \sigma y^2}\left(\frac{1 - r^2}{|r|}\right)\right\} \qquad \ldots(7.25)$$

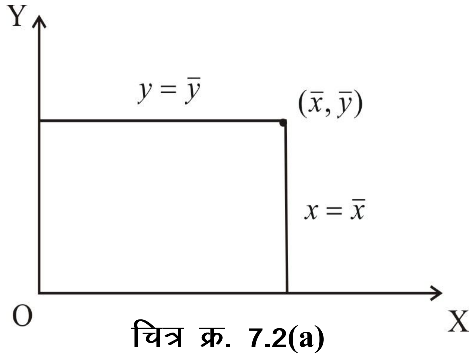
विशेष रूप से, अगर $(r = \pm 1)$ तब $\theta = \tan^{-1}(o) \Rightarrow \theta = 0$ या π i.e. या तो दो रेखाएं संपाती हैं $(\theta = 0)$ या वे समानान्तर हैं $(\theta = \pi)$ । परन्तु चूँकि दोनों प्रतीपगमन की रेखाएं बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ पर प्रतिच्छेदन करती हैं, वे समानान्तर नहीं हो सकते हैं। इसलिए पूर्ण सहसम्बन्ध की स्थिति में, धनात्मक या ऋणात्मक, प्रतीपगमन की दोनों रेखाएं संपाती हैं।

अगर $r = 0$, तब (7.25) से, $\theta = \tan-1(\infty) = \pi/2$ i.e., अगर चर असहसंबंधित हैं, प्रतीपगमन की दोनों रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत हो जाती हैं।

टिप्पणियाँ: 1. जब $r = 0$ i.e., जब x और y असहसंबंधित हैं, तब प्रतीपगमन की रेखाएं y का x पर, और x का y पर क्रमशः दिए जाते हैं [(7.13) से और (7.24) से]

$y - \bar{y} = 0 \Rightarrow y = \bar{y}$ और

$x - \bar{x} = 0 \Rightarrow x = \bar{x}$



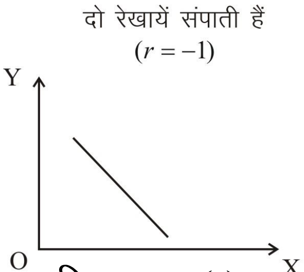
चित्र क्र. 7.2(a)

$y = \bar{y}$ x-अक्ष के समानान्तर रेखा प्रदर्शित करती है मूल बिन्दु से $\bar{y}$ ईकाई की दूरी पर और $x = \bar{x}$, y-अक्ष के समानान्तर रेखा प्रदर्शित करती है मूल बिन्दु से $\bar{x}$ इकाई दूरी पर।

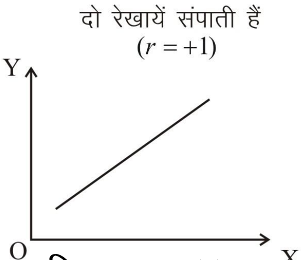
टिप्पणी

इसलिए, अगर $r = 0$, दो प्रतीपगमन की रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत है और क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष के समानान्तर है, जैसा चित्र 7.2(a) में दर्शाया गया है

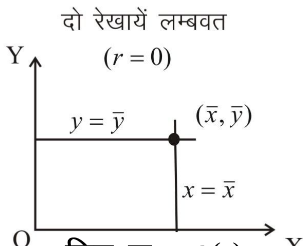
हमने ऊपर देखा है कि अगर $r = 0$ (असहसंबंधित चर) प्रतीपगमन की दो रेखाएं एक दूसरे के लम्बवत हैं और अगर $r = \pm 1, \theta = 0$ i.e. दोनों रेखाएं संपाती है। या हमें उस निष्कर्ष की ओर उन्मुख करता है कि चरों के बीच उच्च स्तर का सहसम्बन्ध के लिए, रेखाओं के बीच का कोण छोटा होता है, i.e., प्रतीपगमन की दो रेखाएं एक दूसरे के नजदीक है। दूसरी तरफ, रेखाओं के बीच कोण बढ़ता है, i.e., प्रतीपगमन की रेखाएं दूर भागती हैं जैसे–जैसे सहसम्बन्ध गुणांक का मूल्य करता है। दूसरे शब्दों में, अगर प्रतीपगमन की रेखाएं बड़ा कोण बनाती हैं, वे चरों के बीच निम्न स्तर का सहसम्बन्ध बताती है और अन्ततः $\theta = y_2$ के लिए, i.e., रेखाएं लम्बवत् हो जाती है अगर चरों के बीच कोई सहसम्बन्ध नहीं होता है। इसलिए एक आलेख पत्र पर प्रतीपगमन की रेखाएं खींचने पर, हमें लगभग धारणा हो सकती है सहसम्बन्ध के स्तर की दो अध्ययनाधीन चरों के बीच। कुछ दृष्टांत नीचे दिए गए हैं चित्र 7.3(a) से चित्र 7.3(a) तक में।



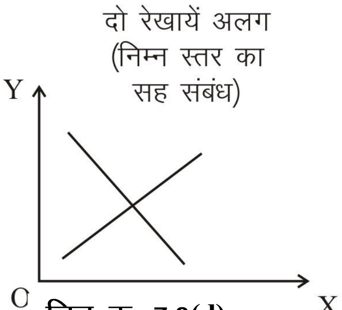
चित्र क्र. 7.3(a)



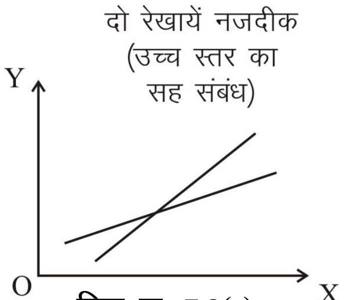
चित्र क्र. 7.3(b)



चित्र क्र. 7.3(c)



चित्र क्र. 7.3(d)



चित्र क्र. 7.3(e)

7.4 प्रतीपगमन का गुणांक (Coefficients of Regression)

हम लोग विचार करों y का x पर प्रतीपगमन की रेखा, viz.

$$y = a + bx$$

गुणांक 'b' जो ढाल है y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक कहलाता है। यह निर्भर चर y के मान में वृद्धि दर्शाती है स्वतंत्र चर x के मूल्य में ईकाई परिवर्तन के लिए। दूसरे शब्दों में, यह y के परिवर्तन की दर x के सापेक्ष दर्शाती है। संकेताक्षरों की सुविधा के लिए, ढाल b i.e., y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक लिखी जाती है b_{yx} द्वारा।

टिप्पणी

उसी तरह से x से y पर प्रतीपगमन समीकरण में, viz.

$$x = A + By,$$

गुणांक दर्शाती है B निर्भर चर x के मूल्य में परिवर्तन स्वतंत्र चर y के मूल्य में ईकाई परिवर्तन से और x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक कहलाती है। संकेताक्षरों की सुविधा के लिए, यह लिखा जाता है b_{xy} ।

संकेताक्षरों (Notations)

$b_{yx} = y$ का x पर प्रतीपगमन का गुणांक

$b_{xy} = x$ का y पर प्रतीपगमन का गुणांक

(7.10) से, y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है

$$b_{xy} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2} = \frac{r\sigma_y}{\sigma x} \quad [\because \text{Cov.}(x, y) = r\sigma x \cdot \sigma y] \qquad \ldots(7.26)$$

उसी तरह (7.21) से, x का y पर प्रतीगमन का गुणांक दिया जाता है,

$$b_{xy} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2} = \frac{r\sigma_y}{\sigma x} \quad [\because \text{Cov.}(x, y) = r\sigma x \cdot \sigma y] \qquad \ldots(7.27)$$

क्रमानुसार, y का x पर प्रतीगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) \qquad \ldots(7.28)$$

और x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) \qquad \ldots(7.29)$$

टिप्पणियाँ: 1. y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण के गणितीय गणनाओं के लिए, और x का y पर, निम्नलिखित सूत्र प्रतीपगमन गुणांकों b_{yx} और b_{xy} के लिए बहुत सुविधाजनक हैं प्रयोग करने में।

$$b_{xy} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma(x - \bar{x})^2} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad \ldots(7.30)$$

$$\therefore\ b_{yx} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma y^2} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma(y - \bar{y})^2} = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2} \qquad \ldots(7.31)$$

सूत्र (7.30) और (7.31) बहुत उपयोगी हैं प्रतीपगमन गुणांकों के मूल्यों की गणना के लिए दिए गए समुच्चय के n बिन्दुओं $(x, y)(x_2, y_2).....(x_n, y_n)$ से।

दूसरा सुविधाजनक सूत्र प्रतीपगमन गुणांकों को ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त हो सकती है गणितीय प्रश्नों के लिए हैं :

$$b_{xy} = \frac{r\sigma y}{\sigma x} \quad \text{और} \quad b_{yx} = \frac{r\sigma x}{\sigma y} \qquad \ldots(7.32)$$

2. दो चरों x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक x और y के बीच सममितीय फलनक है, i.e., $r_{xy} = r_{yx}$ । यद्यपि, प्रतीपगमन गुणांक x और y के सममितीय फलनक नहीं है, i.e., $b_{yx} \neq b_{xy}$

3. हमें,

$$b_{xy} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2} \qquad \ldots(*), \quad b_{yx} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma y^2} \qquad \ldots(**)$$

$$b_{xy} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x \cdot \sigma y} \qquad \ldots(***)$$

(*) और (**) से, हम अवलोकित करते हैं कि प्रत्येक प्रतीपगमन गुणांक b_{yx} और b_{xy} का चिन्ह निर्भर करता है सह प्रसरण पद पर, चूँकि $\sigma_x > 0$ और $\sigma_y > 0$. अगर cov. (x, y) घनात्मक है, दोनों प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक हैं और अगर cov. (x, y) ऋणात्मक है, दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक हैं।

4. आगे, चूँकि $\sigma_x > 0$ और $\sigma_y > 0$ए r, b_{yx} और σ_{xy} के प्रत्येक का चिन्ह सह प्रसरण पद पर निर्भर करती है। अगर cov. (x, y) घनात्मक है, सभी तीनों घनात्मक हैं और अगर cov. (x, y) ऋणात्मक है, सभी तीनों ऋणात्मक हैं। इस परिणाम को थोड़ी भिन्नता से निम्न प्रकार से वर्णित की जा सकती है,

सहसम्बन्ध गुणांक का चिन्ह एक ही है जैसा प्रतीपगमन गुणांक का। अगर प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक है, r घनात्मक है और अगर प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है, r ऋणात्मक है।

7.4.1 प्रतीपगमन गुणांकों पर प्रमेय (Theorem on Regression coefficient)

प्रमेय 7.1 : सहसम्बन्ध गुणांक गुणोत्तर माध्य है प्रतीपगमन गुणांकों के बीच i.e.,

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} \qquad \ldots(7.33)$$

प्रमण (Proof): हमें, $b_{xy} = \dfrac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma x^2} = r.\dfrac{\sigma y}{\sigma x}$ ...(7.34)

और $$b_{yx} = \frac{\text{Cov.}(x, y)}{\sigma y^2} = r.\frac{\sigma x}{\sigma y} \qquad \ldots(7.35)$$

(7.34) और (7.35) को गुणा करने पर, हम पाते हैं

$$r^2 = b_{xy} \cdot b_{yx} \Rightarrow r = \pm\sqrt{b_{xy} \cdot b_{xy}} \qquad \ldots(7.36)$$

जो परिणाम को स्थापित करती है।

टिप्पणी

टिप्पणी: वर्गमूल के पहले लिया जाने वाला चिन्ह वही है जो प्रतीपगमन गुणांकों का। अगर प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक हैं, हम (7.36) में घनात्मक चिन्ह लेते हैं और अगर प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है, हम (7.36) में ऋणात्मक चिन्ह लेहे हैं।

प्रमेय 7.2: अगर प्रतीपगमन गुणांकों में से एक इकाई (एक) से बड़ी है, तो दूसरे को निश्चित रूप से कम होना चाहिए।

प्रमेय 7.3: प्रतीपगमन गुणांकों के मापांक मूल्य का समानान्तर माध्यम तक सम्बन्ध गुणांक के मापांक मूल्य से अधिक होता है,

$$\text{i.e.,} \quad \frac{1}{2}[|b_{xy}|+|b_{yx}|]>|r| \qquad \ldots(7.37)$$

प्रमेय 7.4 : प्रतीपगमन गुणांक मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र है परन्तु मापक्रम से नहीं।

संकेताक्षरों में, अगर हम x और y को नए चर u और v में रूपांतरित करें मूल बिन्दु और मापक्रम में परिवर्तन द्वारा,

$$\text{viz., } U=\frac{X-a}{h}, V=\frac{Y-b}{k}, \text{ जहाँ } a, b, h\ (>0) \text{ नियतांक है} \qquad \ldots(7.38)$$

$$\text{तब } b_{xy}=\frac{K}{h}b_{UV} \text{ और } b_{yx}=\frac{h}{K}\cdot b_{UV} \qquad \ldots(7.39)$$

विशेष रूप से अगर हम लें $h = k = 1$, i.e., x और y चर को रूपांतरित करें u और v में सम्बन्ध द्वारा :

$$U=x-a \quad \text{और} \quad V=y-b \qquad \ldots(7.40)$$

i.e., सिर्फ मूल बिन्दु के परिवर्तन द्वारा, तब (7.39) से, हम पाते हैं

$$b_{xy}=b_{uv}=\frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2} \qquad \ldots(7.40a)$$

$$\text{और} \quad b_{xy}=b_{uv}=\frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2} \qquad \ldots(7.40b)$$

ये सूत्र बहुत उपयोगी हैं प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण प्राप्त करने में और माध्य मूल्य $\bar{x}$ और $\bar{y}$ भिन्न में आते हैं या अगर x और y के मूल्य बड़े हैं।

उदाहरण 7.1: निम्नलिखित समंक से, दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त करें :

बिक्री :	91	97	108	121	62	124	51	73	111	57
खरीद :	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

टिप्पणी

हलः मान लें हम लोग बिक्री को चर X से और खरीद को चर Y से द्योतित करते हैं :

x	y	$dx = x - \bar{x}$	$dy = y - \bar{y}$	dx^2	dy^2	$dx\,dy$
91	71	1	1	1	1	1
97	75	7	5	49	25	35
108	69	18	–1	324	1	–18
121	97	31	27	961	729	837
62	70	–23	0	529	0	0
124	91	34	21	1156	441	714
51	39	–39	–31	1521	961	1209
73	61	–17	–9	289	81	153
111	80	21	+10	441	100	210
57	47	33	–23	1089	529	759
Σx=900	Σy=700	Σdx=0	Σdy=0	Σdx^2=6360	Σdy^2=2868	$\Sigma dxdy$=3900

हमें,

$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{900}{10} = 90; \quad \text{और} \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{700}{10} = 70$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2} = \frac{3900}{6360} = 0.6132$$

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dy^2} = \frac{3900}{2868} = 1.361$$

y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है

$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$	$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$
$\Rightarrow \quad y - 70 = 0.6132(x - 90)$ $= 0.6132x - 55.188$	$\Rightarrow \quad x - 90 = 1.361(y - 70)$ $= 1.361y - 95.27$
$\Rightarrow \quad y = 0.6132x - 55.188 + 70.000$	$\Rightarrow \quad x = 1.361y - 95.27 + 90.00$
$\Rightarrow \quad y = 0.6132x + 14.812$	$\Rightarrow \quad x = 1.361y - 5.27$

टिप्पणीः हमें,

$$r^2 = b_{xy} \cdot bxu = 0.6132 \times 1.361 = 0.8346 \Rightarrow r = \pm\sqrt{8346} = \pm 0.9135$$

परन्तु चूँकि, दोनों प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक है, r को निश्चित रूप से घनात्मक होना चाहिए। इसलिए $r = 0.9135$.

उदाहरण 7.2: नीचे दिए गए समंक से ज्ञात करें :

(a) दो प्रतीपगमन गुणांक

(b) दो प्रतीपगमन समीकरण

टिप्पणी

(c) अर्थशास्त्र और सांख्यिकी में अंकों के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक

(d) सबसे संभावित अंक सांख्यिकी में जब अर्थशास्त्र में 30 अंक है।

अर्थशास्त्र में अंक:	25	28	85	32	31	36	29	38	34	32
सांख्यिकी में अंक:	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

हल: मान लें अर्थशास्त्र में अंक को चर X से और सांख्यिकी में अंक को चर Y से द्योतित करें।

x	y	$dx = x - \bar{x}$	$dy = y - \bar{y}$	dx^2	dy^2	$dx\,dy$
25	43	–7	5	49	25	–35
28	46	–4	8	16	64	–32
85	49	3	11	9	121	+33
32	41	0	13	0	9	0
31	36	–1	–2	1	4	2
36	32	4	–6	16	36	–24
29	31	–3	–7	9	49	+24
38	30	6	–8	36	64	–46
34	33	2	–5	4	25	–10
32	39	0	4	0	1	+0
Σx=320	Σy=360	Σdx=0	Σdy=0	Σdx^2=140	Σdy^2=398	$\Sigma dxdy$=–93

यहाँ, $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{320}{10} = 32$ और $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{380}{10} = 38$

(a) प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient)

y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है:

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(x-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2} = \frac{-93}{140} = -0.6643$$

उसी तरह से, x से y पर प्रतीपगमन का गुणांक है:

$$b_{xy} = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dy^2} = \frac{-93}{398} = -0.2337$$

(b) प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation)

x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है :

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$$

$\Rightarrow x - 32 = -0.2337(y - 38)$

$= -0.2337y + 0.2337 \times 36$

$= -0.2337y + 8.8806$

$\Rightarrow x = -0.2337y + 32 + 8.8806$

$\Rightarrow x = -0.2337y + 4.8806$

y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हैं :

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$$

$\Rightarrow y - 38 = -0.6643(x - 32)$

$\Rightarrow y = -0.6643x + 38 + 0.6643 \times 32$

$= -0.6643x + 38 + 21.2576$

$\Rightarrow y = -0.6643x + 59.2576$

…(*)

टिप्पणी

(c) सहसम्बन्ध गुणांक (Correlation Coefficient)

हमें,

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = (-0.6643) \times (-0.2337) = 0.1552 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0.1552} = \pm 0.394$$

चूँकि दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक है, r को निश्चित रूप से ऋणात्मक होना चाहिए। इसलिए, घनात्मक चिन्ह को छोड़ते हुए, हम पाते हैं

$$r = -0.394$$

(d) सांख्यिकी (y) में सबसे संभावित अंक को प्राक्कलित करने के लिए जब अर्थशाास्त्र (x) में अंक 30 हैं, हम लोग y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का प्रयोग करेंगे viz., समीकरण (*).(*) में x = 30 लेकर, वांछित प्राक्कतन दी जाती है :

$$y = -\ 0.6643 \times 30 + 59.2576 = -\ 19.929 + 59.2576$$
$$= 39.3286$$

इसलिए, सांख्यिकी में सबसे संभावित अंक है जब अर्थशास्त्र में अंक 30 है,

$$39.3286 \cong 39$$

उदाहरण 7.3: A और B जजों के एक पैनल ने सात वाद–विवादों प्रतियोगियों को ग्रेड दिया और स्वतंत्र रूप से निम्नलिखित अंक प्रदान किया :

वाद–विवाद प्रतियोगी		1	2	3	4	5	6	7
A के द्वारा अंक	:	40	34	28	30	44	38	31
B के द्वारा अंक	:	32	39	26	30	38	34	28

आठवाँ प्रतिभागी को जज A ने 36 अंक प्रदान किए जबकि जज B उपस्थित नहीं थे।

अगर जज B भी उपस्थित होते, आप कितना अंक पूर्वानुमान करते हैं कि आठवें जज ने प्रदान किया होगा यह परिकल्पना करते हुए कि न्याय में कुछ स्तर का सम्बन्ध है?

हल : मान लें कि जज 'A' द्वारा प्रदान किया गया अंक चर X द्वारा

वाद–विवाद प्रतियोगी	x	y	$U=x-A$ $=x-35$	$V=y-B=y-30$	u^2	v^2	uv
1	40	32	5	2	25	4	10
2	34	39	–1	9	1	81	–9
3	28	26	–7	–4	49	16	28
4	30	30	–5	0	25	0	0
5	44	38	9	8	81	64	72
6	38	34	3	4	9	16	12
7	31	28	–4	–2	16	4	8
कुल			$\Sigma u=0$	$\Sigma v=17$	$\Sigma u^2=206$	$\Sigma v^2=185$	$\Sigma uv=121$

जज A द्वारा प्रदत्त अंक आठवें प्रतिभागी को 36 है, i.e., हमें दिया गया है $x = 36$ हम अंक ज्ञात करना चाहते हैं जो आठवें प्रतिभागी को जज B द्वारा दिया जाएगा, अगर वह उपस्थित हैं। दूसरे शब्दों में, हम y निकालना चाहते है जब $x = 36$ ऐसा करने के लिए हमें जरूरत है x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण।

सामान्य संकेताक्षरों में हमें,

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma u}{n} = 35 + \frac{0}{7} = 35 \qquad \bar{y} = B + \frac{\Sigma v}{n} = 30 + \frac{17}{7} = 32.4286$$

$$b_{yx} = b_{xy} = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} = \frac{7 \times 121 - 0 \times 17}{7 \times 206 - 0} = \frac{121}{206} = 0.5874$$

y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण दिया जाता है

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$$

$$\Rightarrow \quad y - 32.4286 = 0.5874(x - 35)$$

$$= 0.5874 - 0.5874 \times 35$$

$$\Rightarrow \quad y = 0.5874 - 20.5590 + 32.4286$$

$$y = 0.5874 + 11.8696$$

जब $x = 36, y = 0.5874{\times}36{+}11.8696 = 21.1464{+}11.8696$

$$= 33.016 \simeq 33$$

इसलिए, अगर जज B भी उपस्थित होते, उन्होंने आठवें प्रतिभागी को 33 अंक दिए होते।

उदाहरण 7.4: एक डिपार्टमेंटल स्टोर अपने सेल्समैन को नौकरी में रहते हुए ट्रेनिंग देता है कि जिसके बाद परीक्षा होती है। यह सोचने की बात है क्या उसे किसी सेल्समैन को नौकरी से हटा देना चाहिए जो परीक्षा में अच्छा नहीं करता है। निम्नलिखित समंक 9 सेल्समैन द्वारा किसी अवधि में की गई बिक्री है और उनका परीक्षा के अंक हैं।

परीक्षा के अंक:	14	19	24	21	26	22	15	20	19
बिक्री ('000 रु.):	31	36	48	37	50	45	33	41	39

टेस्ट परीक्षा के अंक और बिक्री के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक परिकलित करें। क्या यह सूचित करता है कि कम अंक पाने वालों की नौकरी से निकाल दिया जाना उचित है? अगर प्रतिष्ठान न्यूनतम 3000 रु. की बिक्री चाहता है, न्यूनतम टेस्ट अंक क्या है जो नौकरी की अबाधता को निश्चित करती है? एक सेल्समैन का सबसे संभावित बिक्री का प्राक्कलन भी करें जिसे 28 अंक मिलते हैं।

टिप्पणी

हलः मान लें कि x सेल्समैन का अंक द्योतित करता है और y उनके संगत बिक्री ('000 रु.) द्योतित करता है

x	y	$dx = x - \bar{x}$ $= x - 20$	$dy = y - \bar{y}$ $= y - 40$	dx^2	dy^2	$dxdy$
14	31	–6	–9	36	81	54
19	36	–1	–4	11	16	04
24	48	4	8	16	64	32
21	37	1	–3	1	9	–03
26	50	6	10	36	100	60
22	45	2	5	4	25	10
15	33	–5	–7	25	49	35
20	41	0	1	0	1	0
19	39	–1	–1	1	1	01
180	360	Σdx=0	Σdy=0	Σdx^2=120	Σdy^2=346	$\Sigma dxdy$=193

तब $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{180}{9} = 20$

$b_{yx} = y$ का प्रतीगमन का गुणांक

$$= \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dx^2} = \frac{193}{120} = 1.6083$$

$\bar{y} = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{360}{9} = 40$

$b_{xy} = x$ का y पर प्रतीपगमन का गुणांक

$$= \frac{\Sigma dxdy}{\Sigma dy^2} = \frac{193}{346} = 0.5578$$

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक r, x और y के बीच दी जाती है :

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = 1.6083 \times 0.5578 = 0.8971$$

$$\Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{0.8971} = \pm 0.9471$$

चूँकि, प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक हैं, r भी धनात्मक है।

$$\therefore r = +0.9471$$

$$\text{Aliter :- } \gamma_{xy} = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2 \Sigma dy^2}} = \frac{193}{\sqrt{120 \times 346}} = \frac{193}{\sqrt{41520}} = \frac{193}{203{,}7646}$$

$$= 0.9472$$

इसलिए, हम लोग देखते हें कि टेस्ट अंक (x) और बिक्री ('00 रु.) (y) में बहुत उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है। यह उस प्रस्ताव को न्यायोचित ठहराती है जिसमें उन्हें नौकरी से निकाल देना है जिनके वेस्ट परीक्षा में कम अंक आते हैं।

प्रतीपगमन समीकरणें

टिप्पणी

टेस्ट अंक (x) प्राप्त करने के लिए दिए गए बिक्री के लिए (y), x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण प्रयोग करते हैं

x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हैं :

$$x-\bar{x}=b_{xy}(y-\bar{y})$$

$$\Rightarrow \ x-20=0.5578(y-40)$$
$$=5578\,y-22312$$

$$\Rightarrow \quad x=0.5578y-22.312+20$$

$$\Rightarrow \quad x=0.5578y-2.312 \quad \ldots(*)$$

इसलिए सेवा की नियमितता को सुनिश्चित करने के लिए, न्यूनतम टेस्ट अंक (x) के संगत न्यूनतम बिक्री 3000 रु. का = 30('00रु.) प्राप्त किया जाता है (*) में y = 30 रखकर और दिया जाता है :

$$x=0.5578\times 30-2.312=16.734-2.312$$

$$=14.422=14$$

एक सेल्समैन का बिक्री परिमाण (y) को प्राक्कलित करने के लिए, दिए गए टेस्ट अंक के साथ (x), हम y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का इस्तेमाल करते हैं,

जो दिया जाता है :

$$y-\bar{y}=b_{yx}(x-\bar{x})$$

$$\Rightarrow \ y-40=1.6083(x-20)$$
$$=1.6083x-32.1660$$

$$\Rightarrow$$
$$y=1.6083x-32.1660+40$$

$$\Rightarrow \quad y=1.6083x+7.8340$$

इसलिए एक सेल्समैन का प्राक्कलित बिक्री परिमाण टेस्ट अंक 28 के साथ है (रु. में)

$$y=1.6083\times 28+7.8340$$
$$=45.0324+7.8340$$
$$=52.8664 \text{ ('00 रु.)}$$
$$=5287.64 \text{ रुपये}$$

उदाहरण 7.5: एक प्रतिष्ठान का बिक्री और विज्ञापन खर्चे का आँकड़ा नीचे दिया गया है :

	बिक्री (करोड़ रू. में)	विज्ञापन खर्चा (करोड़ रु. में)
माध्य	40	6
प्रमाप विचलन	10	1.5

सहसम्बन्ध का गुणांक $=r=0.9$

(i) प्रस्तावित विज्ञापन खर्च पर 10 करोड़ रु. के लिए संभावित बिक्री का प्राक्कलित करें।

(ii) विज्ञापन खर्च क्या होना चाहिए अगर प्रतिष्ठान 60 करोड़ रु. का बिक्री का लक्ष्य निर्धारित करती है?

हलः मान लें चर x बिक्री (करोड़ रु. में) द्योतित करती है और चर y विज्ञापन खर्चे (करोड़ रु. में) द्योतित करती है। तब, सामान्य संकेताक्षरों में, हमें दिया गया है:

$$\bar{x} = 40, \quad \sigma x = 10, \quad \bar{y} = 6, \quad \sigma y = 1.5, \quad r = r_{xy} = 0.9$$

(i) संभावित बिक्री (*) को प्राक्कलित करने के लिए दिए गए विज्ञापन खर्चे (y) के लिए, हमें जरूरत है प्रतीपगमन समीकरण x का y पर जो दिया जाता है:

$$x - \bar{x} = \frac{r\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y}) \Rightarrow x = \frac{r\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y}) + \bar{x} \Rightarrow x = \frac{0.9 \times 10}{1.5}(y - 6) + 40$$

$$6(y-6) + 40 \qquad \ldots(*)$$

इसलिए प्राक्कलित बिक्री (x) प्रस्तावित विज्ञापन खर्चे (y) के लिए 10 करोड़ रु. का प्राप्त किया जाता है (*) में $y = 10$ रखकर और दिया जाता है:

$$x = 6(10-6) + 40 = 6 \times 4 + 40 = 64 \text{ करोड़ रुपये}$$

(ii) विज्ञापन खर्च (y) को प्राक्कलित करने के लिए प्रस्तावित बिक्री (x) के लिए, हमें जरूरत y का x पर प्रतीपगमन की रेखा के समीकरण का जो दिया जाता है:

$$y - \bar{y} = \frac{r\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x}) \Rightarrow y = \frac{r\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x}) + \bar{y} \pm y\frac{0.9 \times 1.5}{10}$$

$$(x - 40) + b = 0.135(x - 40) + 6 \qquad \ldots(**)$$

इसलिए प्रतिष्ठान का संभावित विज्ञापन खर्च (y) प्रस्तावित बिक्री लक्ष्य (x) 60 करोड़ रु. का प्राप्त किया जाता है (**) में $x - 60$ लेकर और दिया जाता है :

$$y = 0.135(60 - 40) + 6 = 0.135 \times 20 + 6 = 2.7 + 6 = 8.7 \text{ करोड़ रु.}$$

उदाहरण 7.6: निम्नलिखित वक्तव्य में, अगर कोई असंगतता है, तो उसकी ओर ध्यान आकृष्ट कराए—

''y का x पर प्रतीपगमन समीकरण $2y + 3x = 4$ है और x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है।''

हलः y का x पर प्रतीपगमन की रेखा है :

$$2y + 3x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

$\therefore\ b_{yx} = y$ का x पर प्रतीपगमन का गुणांक $= -\frac{3}{2}$

और $r_{xy} = 0.8$ (दिया गया है)

चूँकि b_{yx} और r_{xy} के चिन्ह भिन्न हैं, दिया गया वक्तव्य गलत है (असंगत)

टिप्पणीः सहसम्बन्ध गुणांक (r_{xy}) का चिन्ह और प्रतीपगमन गुणांक b_{yx} और b_{xy} निश्चित रूप से एक होना चाहिए, प्रत्येक सह प्रसरण पद $\text{Cov.}(x, y)$ के चिन्ह पर निर्भर करती है।

उदाहरण 7.7: y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक है $b_{yx} = 1.2$ अगर

$$U = \frac{X-100}{2} \text{ और } V\frac{Y-200}{3};\ b_{vu} \text{ ज्ञात करें।}$$

हलः सूत्र (7.39) का प्रयोग कर साथ ही $h = 2$ और $k = 3$ होने पर, हम पाते हैं

$$b_{yx} = \frac{k}{h} \cdot b_{vu} = \frac{3}{2} b_{vu} \Rightarrow b_{vu} = \frac{2}{3} b_{yx} = \frac{2}{3} \times 1.2 = 0.8$$

उदाहरण 7.8: निम्नलिखित समंक का प्रयोग कर, दो प्रतीपगमन की रेखाएं ज्ञात करें और उनसे कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध का गुणांक की गणना करें।

$$\Sigma X = 250; \Sigma Y = 300; \Sigma XY = 7{,}900; \Sigma x^2 = 6{,}500' \Sigma Y^2 = 10{,}000$$

$$\text{और} \quad N = 10$$

हल : हमें,

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{250}{10} = 25; \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{300}{10} = 30$$

$$b_{yx} = Y \text{ का } X \text{ पर प्रतीपगमन का गुणांक } = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

$$= \frac{10 \times 7900 - 250 \times 300}{10 \times 6500 - (250)^2} = \frac{79000 - 75000}{65000 - 62500} = \frac{4000}{2500} = 1.6$$

$$b_{xy} = X \text{ का } Y \text{ पर प्रतीपगमन का गुणांक } = \frac{N\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}$$

$$= \frac{10 \times 7900 - 250 \times 300}{10 \times 10000 - (300)^2} = \frac{75000 - 75000}{100000 - 90000} = \frac{4000}{10000} = 0.4$$

इसलिए सहसम्बन्ध गुणांक γ_{XY} X और Y के बीच दी जाती है :

$$\gamma_{XY}{}^2 = b_{YX} \cdot b_{XY} = 1.6 \times 0.4 = 0.64 \Rightarrow \lambda_{XY} = \pm\sqrt{0.64} = \pm 0.8$$

चूँकि प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक हैं, हम लेते हैं $r = +0.8$

प्रतीपगमन समीकरण

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण	X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण
$Y-\overline{Y}=b_{YX}(X-\overline{X})$	$X-\overline{X}=b_{XY}(Y-\overline{Y})$
$\Rightarrow Y=30=1.6(X-25)$	$\Rightarrow -25=0.4(Y-30)$
$\Rightarrow Y=1.6x-40+30$	$\Rightarrow \quad X=0.4y-12+25$
$\Rightarrow Y=1.6x-10$	$\Rightarrow \quad X=0.4y+13$

उदाहरण 7.9: दो चरों X और Y के प्रतीपगमन समीकरण के प्राक्कलन के बाद निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

$$\overline{X}=90,\ \overline{Y}=70,\ n=10;\ \Sigma x^2=6360,\ \Sigma y^2=2860,\ \Sigma xy=3900$$

जहाँ x और y क्रमशः माध्यों से विचलन है। दो समीकरणों को प्राप्त करें।

हल: Y का X पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया आता है क्रमानुसार,

$$b_{YX}=\frac{\text{Cov.}(X,Y)}{\sigma X^2}=\frac{\Sigma(X-\overline{X})}{\Sigma(X-\overline{X})^2}=\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}=\frac{3900}{6360}=0.6132$$

$$b_{XY}=\frac{\text{Cov.}(X,Y)}{\sigma Y^2}=\frac{\Sigma(X-\overline{X})}{\Sigma(Y-\overline{Y})^2}=\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}=\frac{3900}{2860}=1.3636$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण	X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण
$Y-\overline{Y}=b_{YX}(X-\overline{X})$	$X-\overline{X}=b_{XY}(Y-\overline{Y})$
$\Rightarrow Y=70=0.6131(X-90)$	$\Rightarrow -X-90=1.3636(Y-70)$
$\Rightarrow Y=0.6132x-55.188+70$	$\Rightarrow \quad X=1.3636Y-95.452+70$
$\Rightarrow Y=0.6132x+14.812$	$\Rightarrow \quad X=1.3636Y-5.452$

उदाहरण 7.10: x और y के 10 जोड़ों के समुच्चय के मूल्य के लिए, x का y पर प्रतीपगमन की रेखा है $x-2y+12=0$; y का माध्य और प्रमाप विचलन क्रमशः 8 और 2 है। बाद में पता चला कि एक जोड़ा ($x = 3, y = 8$) गलत रिकार्ड कर लिया गया और सही जोड़ा पाया गया (x = 8, y = 3) सही x का y पर प्रतीपगमन की रेखा ज्ञात करें।

हल: सामान्य संकेताक्षरों में हमें दिया गया है :

$$x=10,\quad y=8,\quad \sigma y=2 \qquad \ldots(*)$$

x का y प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है : $x-2y+12=0$ (दिया गया है) चूँकि प्रतीपगमन की रेखाएं बिन्दु $(\overline{x},\overline{y})$ से गुजरती है, हम पाते हैं

$$\overline{x}-2\overline{y}+12=0 \ \Rightarrow\ \overline{x}-2\overline{y}-12=2\times 8-12=4 \text{ [(*) का प्रयोग कर]}$$

और $x-2y+12=0 \ \Rightarrow\ x-2y-12 \ \Rightarrow\ b_{xy}=2$

$$\therefore \quad \frac{\text{Cov.}(x,y)}{\sigma y^2} = 2 \;\Rightarrow\; \text{Cov.}(x,y) = 2\times^2 = 8 \;[(*) \text{ से}]$$

टिप्पणी

$$\Rightarrow \frac{\Sigma xy}{n} - \overline{xy} = 8 \Rightarrow \Sigma xy = 10(8+4\times 8) = 10\times 40 = 400$$

$\therefore$ हमें $\bar{x} = 4, \;\; \bar{\text{y}} = 8 \;\; \Sigma \text{y}^2 = 680, \; \Sigma xy = 400$

गलत जोड़ा $= (x = 3, y = 8)$; गलत जोड़ा $= (x = 8, y = 3)$

संशोधित मूल्य [अनुलग्न c संशोधित मूल्य के लिए है]

$$X_C = \frac{n\bar{x} - 3 + 8}{n} = \frac{10\times 4 + 5}{10} = \frac{9}{2}$$

$$Y_C = \frac{n\bar{y} - 8 + 3}{n} = \frac{10\times 8 - 5}{10} = \frac{15}{2}$$

$$(\Sigma y^2)_C = \Sigma y^3 - 8^2 + 3^2 = 680 - 64 + 9 = 625;$$

$$(\Sigma xy)_C = \Sigma xy - 3\times 8 + 8\times 3 = 400 - 24 + 24 = 400$$

$$(\sigma y^2)_C = \frac{(\Sigma y^2)_C}{n} - [(\bar{y})_C]^2 = \frac{625}{10} - \frac{225}{4} = \frac{1250 - 1125}{20} = \frac{25}{4}$$

$$[\text{Cov.}(xy]_C = \frac{(\Sigma xy)_C}{n}(\bar{x}_C)\times(\bar{y}_C) = \frac{400}{10} - \frac{9}{2}\times\frac{15}{2} = 40 - \frac{135}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\therefore (b_{xy})_C = \frac{[Cov.(x,y)]_C}{(\sigma y^2)_C} = \frac{25/4}{25/4} = 1$$

x का y पर प्रतीपगमन की संशोधित रेखा बन जाती है :

$$x - \bar{x}_c = (bxy)_c(y - \bar{y}_c) \;\Rightarrow x - \frac{9}{2} = 1\left(y - \frac{15}{2}\right) \Rightarrow x = y - 3$$

7.5 दो प्रतीपगमन की रेखाओं से माध्य मूल्यों $(\bar{\text{x}}, \bar{\text{y}})$ को निकालना (To Find the Mean Values $(\bar{\text{x}}, \bar{\text{y}})$ from the Two Lines of Regression)

हम मान लें कि प्रतीपगमन की दो रेखाएं हैं :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots(7.41)$$

और

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots(7.42)$$

हम चर्चा कर चुके हैं कि दोनों प्रतीपगमन की रेखाएं बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ से गुजरती हैं। दूसरे शब्दों में, $(\bar{x}, \bar{y})$ दो प्रतीपगमन की रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। इसलिए (7.42) को एक साथ हल करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{\bar{x}}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\bar{y}}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \Rightarrow \left\{\bar{x} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right\},$$

$$\left\{\bar{y} = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right\} \qquad \ldots(7.43)$$

7.6 दो प्रतीपगमन की रेखाओं से प्रतीपगमन गुणांक और सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करना (To Find Regression Coefficient and Correlation Coefficient with Two Regression Lines)

मानें (7.41) और (7.42) दी गई प्रतीपगमन की रेखाएं हैं और हम मान ले कि (7. 41) प्रतीपगमन की रेखा है y का x पर और (7.42) प्रतीपगमन की रेखा है x का y पर। b_{yx} प्राप्त करने के लिए, प्रतीपगमन का गुणांक y का x पर, प्रतीपगमन समीकरण y का x पर लिखें $y = a + bx$ के रूप में। तब b, x का गुणांक b_{yx} का मूल्य देता है। उसी तरह b_{xy} प्राप्त करने के लिए, प्रतीपगमन का समीकरण x का y पर $x = A + By$ रूप में लिखें। तब B, y का गुणांक b_{xy} देता है। इसलिए (7.41) को पुनः लिखकर, हम प्रतीपगमन समीकरण y का x पर पाते हैं :

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - -\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow b_{yx} = \frac{a_1}{b_1} \qquad \ldots(7.44)$$

उसी तरह (7.42) को पुनः लिखकर, हम प्रतीपगमन समीकरण x का y पर पाते हैं :

$$x = -\frac{b_2}{a_2}y - -\frac{c_2}{a_2} \Rightarrow b_{yx} = \frac{b_2}{a_2} \qquad \ldots(7.45)$$

x का y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक r पाया जा सकता है सूत्र का प्रयोग कर

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = \left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \times \left(-\frac{b_2}{a_2}\right) = \frac{a_1b_2}{a_2b_1} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{a_1b_2}{a_2b_1}} \qquad \ldots(7.46)$$

वर्गमूल के पहले लिया जाने वाला चिन्ह वही है जो प्रतीपगमन गुणांकों का। अगर प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक है, हम घनात्मक चिन्ह लेते हैं और अगर ऋणात्मक है, हम ऋणात्मक चिन्ह लेते हैं (7.46) में।

टिप्पणीः दिए गए दो प्रतीपगमन की रेखाएं (7.41) और (7.42) में यह कैसे निर्धारित किया जा सकता है कि कौन सी रेखा y का x पर प्रतीपगमन की रेखा है और कौन सी प्रतीपगमन की रेखा x का y पर है? संयोगवश, उपर्युक्त विचेना हमें इस प्रश्न के उत्तर में समर्थ बनाता है। ऐसा मानकर कि (7.41) और (7.42) समीकरण है प्रतीपगमन की रेखाओं के क्रमशः y का x पर और x का y पर, हम

b_{yx} और b_{xy} प्राप्त कर सकते हैं और इसलिए r अगर $r^2 \le 1$, हमारी अभिधारणाएं i.e., (7.41) y का x पर प्रतीपगमन का समीकरण है और (7.42) x का y पर प्रतीपगमन का समीकरण है। यद्यपि, अगर r^2 1 से ज्यादा आता है, तब हमारी अभिधारणा गलत है क्योंकि r^2 को हमेशा 0 और 1 के बीच पड़ना चाहिए। इस स्थिति में हम निष्कर्ष निकालेंगे कि (7.41) x का y पर प्रतीपगमन का समीकरण है और (7.42) y का x पर प्रतीपगमन का समीकरण है।

उदाहरण 7.11: एक द्विचर समष्टि का प्रतीपगमन की रेखाएं हैं :

$$8x - 10y + 66 = 0 \qquad \ldots(*)$$

$$40x - 18y = 214 \qquad \ldots(**)$$

x का प्रसरण 9 है। ज्ञात करें

(i) x और y के माध्य मूल्य; (ii) x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक; (iii) y का प्रमाप विचलन।

हल : (i) चूँकि प्रतीपगमन की दोनों रेखाएं माध्य मूल्यों से गुजरती हैं, बिन्दु $(\bar{x}, \bar{y})$ को निश्चित रूप से सन्तुष्ट करना चाहिए (*) और (**) इसलिए, हम पाते हैं,

$$8\bar{x} - 10\bar{y} + 66 = 0 \quad \ldots(1) \qquad \text{और } 40\bar{x} - 18\bar{y} - 214 = 0 \quad \ldots(2)$$

(1) को 5 से गुणा करने पर हम पाते हैं $40\bar{x} - 50\bar{y} + 330 = 0 \ \ldots(3)$

(3) को (2) से घटाने पर, हम पाते हैं $32\bar{y} = 544 \Rightarrow \bar{y} = \frac{544}{32} = 17$

इसे (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$8\bar{x} - 10 \times 17 + 66 = 0 \Rightarrow 8\bar{x} = 170 - 66 = 104 \Rightarrow \bar{x} = \frac{104}{8} = 13$$

इसलिए माध्य मूल्य दिए जाते हैं : $\bar{x} = 13, \bar{y} = 17$

(ii) हम मान लें कि (*) y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है और (**) x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है।

(*) को पुनः लिखकर, हम पाते हैं $10y = 8x + 66 \Rightarrow y = \frac{8}{10}x + \frac{66}{100}$

$\therefore\ b_{yx} = y$ का x पर प्रतीपगमन का गुणांक है $= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

(**) को पुनः लिखकर, हम पाते हैं $40x = 18y + 214 \Rightarrow x = \frac{18}{40}y + \frac{214}{40}$

$\therefore\ b_{xy} = x$ का y पर प्रतीपगमन का गुणांक $= \frac{18}{40}$

टिप्पणी

इसलिए, $r^2 = b_{yx} \cdot bxu = \frac{8}{10} \times \frac{18}{40} = \frac{9}{25} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{a}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

चूँकि दोनों प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक है, r को निश्चित रूप से घनात्मक होना चाहिए। इसलिए, हम लेते हैं $r = 0.6$

(iii) हमें दिया गया है : $\sigma x^2 = a \Rightarrow \sigma x - \pm 3$

परन्तु चूँकि प्रमाप विचलन हमेशा गैर–ऋणात्मक होता है, हम लेते हैं $\sigma x = 3$

हमें, $$b_{yx} = \frac{r\sigma y}{\sigma x} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma y}{3} \Rightarrow \sigma y = 4$$

टिप्पणियाँ: 1. यह सत्यापित किया जा सकता है कि $\bar{x} = 13$ और $\bar{y} = 17$ का मूल्य जैसा (i) में पाया गया दोनों समीकरणों (*) और (**) को सन्तुष्ट करता है। इस प्रकार के संख्यात्मक प्रश्नों में, यह नियंत्रण बराबर प्रयोग कला चाहिए: उत्तर के सही होने को सुनिश्चित करने के लिए।

2. अगर हमने परिकल्पना किया था कि (*) x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है और (**) y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है, तब (*) और (**) को पुनः लिखकर हम क्रमशः पाते हैं :

$$8x = 10y - 66 \Rightarrow x = \frac{10}{8}y - \frac{66}{8} \Rightarrow b_{xy} = \frac{10}{8}$$

$$18y = 40y - 214 \Rightarrow y = \frac{40}{18}x - \frac{214}{18} \Rightarrow b_{yx} = \frac{40}{18}$$

$$r^2 = b_{xy} \cdot b_{yx} = \frac{10}{8} \times \frac{40}{18} = \frac{25}{9} = 2.78$$

परन्तु चूँकि r^2 हमेशा 0 और 1 के बीच पड़ता है, i.e., चूँकि r^2 1 से बढ़ नहीं सकता है, हमारी अभिधारणा कि (*) x का y पर प्रतीपगमन का समीकरण है और (**) प्रतीपगमन का समीकरण y का x पर है गलत है।

उदाहरण 7.12: एक वर्ग के 100 छात्रों के लिए, सांख्यिकी के अंक (X) का प्रतीपगमन समीकरण कामर्स के अंक (Y) पर $3Y - 5x + 180 = 0$ है कॉमर्स में माध्य अंक 50 है और सांख्यिकी में अंकों का प्रसरण कॉमर्स को अंक के प्रसरण का 4/a है। सांख्यिकी का माध्य अंक ज्ञात करें और दो विषयों के अंकों के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक।

हल: मान लें X सांख्यिकी के अंक को द्योतित करता है और Y कॉमर्स में अंक को द्योतित करता है। सामान्य संकेताक्षरों में हमें दिया गया है :

$$x = 100\bar{Y} = 50; \sigma x^2 = \frac{4}{9}\sigma y^2 \Rightarrow \frac{\sigma y}{\sigma x} = \sqrt{\frac{9}{4} = \frac{3}{2}} \qquad \ldots(*)$$

X का Y पर प्रतीपगमन की रेखा दी जाती है :

$$3Y = 5X + 180 = 0 \Rightarrow 5X = 3Y + 180 \Rightarrow X = \frac{3}{5}X + 56 \ldots (**)$$

टिप्पणी

चूँकि प्रतीपगमन की रेखा बिन्दु $(\overline{X}, \overline{Y})$ से गुजरती है, हम (**) से पाते हैं

$$\overline{X} = \frac{3}{5}\overline{Y} + 36 = \frac{3}{5}(50) + 36 = 66 \quad [(*) \text{ से}]$$

इसलिए, सांख्यिकी में माध्य अंक 66 हैं।

(**) से, X का Y पर प्रतीपगमन का गुणांक दिया जाता है

$$b_{XY} = r\frac{\sigma x}{\sigma y} = \frac{3}{5} \Rightarrow r = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sigma y}{\sigma x} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = 0.9 \quad [(*) \text{ से}]$$

इसलिए, सांख्यिकी और कॉमर्स के अंकों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक r है = 0.9.

उदाहरण 7.13 अगर प्रतीपगमन की दो रेखाएं हैं :

$4x - 5y + 30 = 0$ और $20x - 9y - 107 = 0$

इनमें से कौन x का y पर प्रतीपगमन की रेखा है, और y का x पर।

γ_{xy} और σy ज्ञात करें जब $\sigma x = 3$

हलः हमें प्रतीपगमन की रेखाएं दी जाती हैं

$4x - 5y + 30 = 0 \quad \ldots$(i) और $20x - 9y - 107 = 0 \quad \ldots$(ii)

मान लें (i) x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है और (ii) y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण है।

(i) से, हम पाते हैं $x = \frac{5}{4}y - \frac{30}{4} \Rightarrow b_{xy} = \frac{5}{4}$

(ii) से, हम पाते हैं $y = \frac{20}{9}x - \frac{107}{9} \Rightarrow b_{xy} = \frac{20}{9}$

$$\therefore \; r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = \frac{20}{9} \times \frac{5}{9} = 2.7778$$

चूँकि $r^2 > 1$, हमारी अभिधारणा गलत है। [$\because$ हमें हमेशा $0 \le r^2 \le 1$]

इसलिए, (i) y का x पर प्रतीपगमन की रेखा है और (ii) x का y पर प्रतीपगमन की रेखा है

(i) को पुनः लिखने पर, हम पाते है $\because$ $5y = 4x + 30 \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + 6$

$$\Rightarrow b_{xy} = \frac{4}{5}$$

(ii) को पुनः लिखने पर, हम पाते हैं : $20x = 9y + 10 \Rightarrow x = \frac{9}{20}y + \frac{107}{20}$

$$\Rightarrow b_{xy} = \frac{9}{20}$$

$$\therefore \; r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{20} = 0.36 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$$

चूँकि दोनों प्रतीपगमन गुणांक घनात्मक है, r को निश्चित रूप से घनात्मक होना चाहिए।

इसलिए हम लेते हैं $r = \gamma_{xy} = 0.6$

हमें दिया गया है, $\sigma x = 3$

हमें, $b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x} \Rightarrow \sigma y = \frac{b_{yx} \cdot \sigma x}{r} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{0.6} = 4$

उदाहरण 7.14: निम्नलिखित परिणामों पर समीक्षा करें जो दिए समंक से प्राप्त की गई है :

एक द्विचर वितरण के लिए :

(i) प्रतीपगमन का गुणांक Y का X पर 4.2 है और प्रतीपगमन का गुणांक X का Y पर 0.50 है

(ii) $b_{yx} = 2.4$ और $b_{xy} = -0.4$

हल: (i) हमें दिया गया है कि : $b_{yx} = 4.2$ और $b_{xy} = 0.5$

हमें, $r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = 4.2 \times 0.5 = 2.10 > 1$

परन्तु हम जानते हैं r संख्यात्मक मान में 1 से बढ़ नहीं सकता है, i.e.,

$$-1 \le r \le 1 \Rightarrow r^2 \le 1$$

इसलिए दिया गया वक्तव्य गलत है।

(ii) $b_{yx} = 2.4$ और $b_{xy} = -0.4$, संभव नहीं है, चूँकि दोनों प्रतीपगमन गुणांकों को एक ही चिन्ह निश्चित रूप से होना चाहिए।

7.7 एक प्राक्कलन का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of an Estimate)

प्रतीपगमन समीकरण हमें समर्थता प्रदान करते हैं प्राक्कलित (पूर्वानुमान) करने में निर्भर चर का मूल्य किसी स्वतंत्र चर के दिए गए मूल्य के लिए। इस तरह से प्रापत प्राक्कलन, यद्यपि, पूर्ण नहीं होते हैं। इस तरह से प्राप्त प्रतीपगमन समीकरणों से प्राक्कलनों की सूक्ष्मता की माप प्राक्कलन के प्रमाप विभ्रम (S.E.) से दी जाती है। प्रमाप विभ्रम शब्द है जो सदृश है प्रमाप विचलन के (जो माप है

टिप्पणी

वितरण के माध्य के चारों तरफ प्रेक्षणों के विचलनों के) और हमें प्रतीपगमन की रेखाओं के चारों ओर प्रेक्षणों के विक्षेप की माप देती है। इसलिए,

$Syx = y$ का प्राक्कलन का प्रमाप विभ्रम दिए x के लिए $= \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(y - ye)^2}$

जहाँ Ye y का प्राक्कलित मूल्य है x के दिए गए मूल्य के लिए जो प्रतीपगमन की रेखा से प्राप्त की जाती है y का x पर और N दिए जोड़ों की संख्या है प्रेक्षणों का।

उसी तरह $Sxy = x$ का प्राक्कलित का प्रमाप विभ्रम दिए x के लिए

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(X - Xe)^2} \qquad \ldots(7.47)$$

प्राक्कलनों का प्रमाप विभ्रम की गणना उपर्युक्त सूत्र से काफी जटिल है क्योंकि इसमें वांछित है प्राक्कलनों के विभ्रम $Y - Ye$ प्रत्येक y के लिए गणना करना। यद्यपि बहुत सुविधाजनक सूत्र संख्यात्मक गणनाओं के लिए नीचे दिया गया है

$$Syx = \sigma y(1 - r^2)^{1/2} \qquad \ldots(7.48)$$

$$Sxy = \sigma x(1 - r^2)^{1/2} \qquad \ldots(7.49)$$

जहाँ $r = rxy$

सहसम्बन्ध गुणांक है दो चरों x और y के बीच

उदाहरण 7.15: एक बछड़े का वजन साप्ताहिक अन्तराल में लिया गया नीचे दिया गया है :

उम्र (समूह में):	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वजन (पौंड में):	52.5	58.7	65.0	70.2	75.4	81.1	87.2	95.5	102.2	108.4

(i) इस समंक को एक उपयुक्त रैखिक प्रतीपगमन समीकरण दें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा।

(ii) औसत वृद्धि पर प्रति सप्ताह परिकलित करें।

(iii) बछड़े के वजन का प्राक्कलन 13 सप्ताह की उम्र पर परिकलित करें।

(iv) बछड़ के वजन का प्राक्कलन क्रमशः 1, 2 . . . .10 सप्ताहों तक करें (i) में प्राप्त प्रतीपगमन समीकरण का प्रयोग करें।

(v) प्रत्येक स्थिति में त्रुटि (विभ्रम e) निकालें (iv) में प्रापत प्राक्कलित मूल्यों के लिए ताकि $\Sigma e = 0$

(vi) प्राक्कलन का प्रमाप विभ्रम भी प्राप्त करें।

टिप्पणी

हलः

x (1)	y (2)	x^2 (3)	xy (4)	$Ye = 45.73 + 6.16x$ (5)	$e = y - ye$ (6)	$(Y - Ye)^2$ (7)
1	52.5	1	52.5	51.89	0.61	0.3721
2	58.7	4	117.4	58.05	0.65	0.4225
3	65.0	9	195.0	64.21	–0.79	0.6241
4	70.2	16	280.8	70.37	–0.17	0.0289
5	75.4	25	377.0	76.53	–1.13	0.2769
6	81.1	36	486.6	82.69	–1.59	2.5281
7	87.2	49	610.4	88.85	–1.65	2.7225
8	95.5	64	264.0	95.01	0.49	0.2401
9	102.2	81	919.8	101.17	1.03	1.0609
10	108.4	100	1084.0	107.33	1.07	1.1449
Σx=55	Σy=796.2	Σx^2=385	Σxy=9876		Σ (Y-Ye) =0.1	Σ (Y-Ye)^2 =10.421

(i) हम विचार करें y का x पर प्रतीपगमन समीकरण पर, viz.

$$y = a + bx \qquad \ldots(*)$$

नियतांक 'a' और 'y' दिए जाते हैं :

$$a = \frac{(\Sigma x^3)(\Sigma y) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{385 \times 796.255 - 55 \times 4887.5}{10 \times 585(55)^2}$$

$$= \frac{306537 - 268812.5}{3850 - 3025} = \frac{37724.5}{825} = 45.73$$

$$b = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{10 \times 4887.5 - 55 \times 96.2}{10 \times 385 - (55)^2}$$

$$\frac{48875 - 43791}{3850 - 3025} = \frac{5084}{825} = 6.16$$

a और b के इन मूल्यों को (*) में प्रतिस्थापित कर, y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण हो जाता है :

$$y = 45.73 + 6.16x \qquad \ldots(**)$$

(ii) बछड़े का वजन 1, 2, 3 . . . .सप्ताहों के बाद जैसा प्रतीपगमन समीकरण (*) से दिया जाता है हैं : $a + b, a + 2b, a + 3b$ . . . इसलिए, औसत वृद्धि दर प्रति सप्ताह b पौंड हैं, i.e., 7.16 पौंड

टिप्पणी

(iii) 13 सप्ताह की उम्र में बछड़े का प्राक्कलित वजन प्राप्त किया जाता है $x = 14$ (**) में रखकर और दिया जाता है :

$$(\hat{Y})_{x=13} = 45.73 + 6.16 \times 13 = 45.73 + 80.08 = 125.81 \text{ पौंड}$$

(iv) प्रतीपगमन समीकरण से, हमें,

जब $x = 1, ye = 45.73 + 6.16 = 51.89;$

जब $x = 2, ye = 45.73 + 6.16 \times 2 = 58.05$

और आगे। ये प्राक्कलित मूल्य (Ye) x के विभिन्न मूल्यों के लिए 1 से 10 तक परिकलन तालिका के स्तंभ 5 में दिया गया है।

(v) प्राक्कलनों का विभ्रम या अवशेष दिए जाते हैं :

$e = y - ye$ [स्तंभ (2) के मूल्य स्तंभ (5) के मूल्य परिकलन सारणी के] और स्तंभ (16) में दिए गए हैं परिकलन तालिका के। हम सारणी से पाते हैं कि :

$$\Sigma e = \Sigma(y - y_e) = 4.64 - 4.54 = 0.1$$

नोट : हमने पाया होता $\Sigma e = 0$ यद्यपि इस स्थिति मे ंयह शून्य नहीं है। अन्तर की वजह नियतांक a और b को दो दशमलव अंकों तक पूर्णांकित किया जाता है।

(vi) y के प्राक्कलन का प्रमाप विभ्रम (किसी दिए गए x के लिए), i.e., $\leq yx$ दिया जाता है

$$Syx = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y - ye)^2} = \sqrt{\frac{10.421}{10}} = \sqrt{1.421} = 1.02$$

उदाहरण 7.16: एक अंशतः बर्बाद रिकार्ड में, एक द्विचर समंक (X,Y) से दो प्रतीपगमन की रेखाओं के प्राक्कलन के लिए, निम्नलिखित परिणाम उपलब्ध थे :

Y का X पर प्रतीपगमन का गुणांक $= -1.6$

X का Y पर प्रतीपगमन का गुणांक $= -0.4$

Y का X पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन $= -3$

ज्ञात करें :

(i) X और Y के बीच सह–ससम्बन्ध का गुणांक

(ii) प्रमाप विचलन Σx और Σy

(iii) X का Y पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन

हल: सामान्य संकेताक्षरों में, हमें दिया गया है :

$$b_{yx} = -1.6; b_{xy} = -0.4; \leq_{yx} = 3 \qquad \ldots(1)$$

टिप्पणी

(i) सहसम्बन्ध का गुणांक $r = r(X,Y)$ दिया जाता है :

$$r^2 = b_{yx} \cdot b_{xy} = (-1.6)\times(-0.4) = 0.64 \Rightarrow r = \pm\sqrt{0.64} = \pm 0.8$$

चूँकि प्रतीपगमन गुणांक गुणात्मक हैं, r भी गुणात्मक है।

$$\therefore r = -0.8 \qquad \ldots(2)$$

(ii) Y का X पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन दिया जाता है

$$S_{yx} = \sigma y(1-r^2)^{1/2} \Rightarrow \sigma y = \frac{S_{yx}}{(1-r^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \sigma y = \frac{3}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{3}{\sqrt{0.36}} = \frac{3}{0.6} = 5 \quad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}] \qquad \ldots(3)$$

और, $b_{yx} = \frac{r\sigma y}{\sigma x} \Rightarrow \sigma x = \frac{r\sigma y}{b_{yx}}$

$$\therefore \sigma x = \frac{(-0.8)\times 5}{-1.6} = 2.5 \quad [(1), (2) \text{ और } (3) \text{ से}]$$

(iii) X का Y पर प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन दिया जाता है :

$$S_{xy} = \sigma x(1-r^2)^{1/2} = 2.5(1-0.64)^{1/2} = 2.5\times 0.6 = 1.5$$

7.8 एक द्विचर आवृत्ति सारणी के लिए प्रतीपगमन समीकरणों (Regression Equations for a Bivariate Frequency Table)

एक आवृत्ति तालिका के लिए सहसम्बन्ध गुणांक की गणना सामान्यतः सहसम्बन्ध तालिका के नाम से जानी जाती है, अध्याय 8 में वर्णित की गई है। r का परिकलन संबद्ध होता है $\bar{x}, \bar{y}, \sigma x, \sigma y$ की गणना से। चूँकि दो प्रतीपगमन की रेखाओं का समीकरण, viz., y का x पर प्रतीपगमन की रेखा, और y पर x हैं क्रमशः

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) = \frac{r\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) = \frac{r\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$$

समीकरणों को प्रापत करने का परिकलन मिला जुलाकर एक समान होगी। यद्यपि, यहाँ अवलोकित किया जा सकता है कि प्रतीपगमन गुणांक b_{xy} और b_{xy} मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतंत्र हैं परन्तु मापक्रम से नहीं i.e., अगर हम लें

$$U = \frac{x-a}{h} \text{ और } V = \frac{y-b}{k}; \text{ तब } b_{xy} = \frac{k}{h} b_{vu} \text{ और } b_{xy} = \frac{h}{k} b_{uv}$$

टिप्पणी

इस बिन्दु को ध्यान में रखना है प्रतीपगमन गुणांकों का गणन करने में। हम लोग तकनीक का वर्णन उदाहरणों की सहायता से करेंगे।

उदाहरण 7.17: निम्नलिखित तालिका नव विवाहित जोड़ों का उम्र (वर्षों में) पति और पत्नियों का देती है। दो प्रतीपगमन रेखाएं ज्ञात करें। प्राक्कलित भी करें।

(i) पति की उम्र जब पत्नी 20 की है और (b) पत्नी की उम्र जब पति 30 का है।

पत्नी की उम्र	पति की उम्र			
	20-25	25-30	30-35	कुल
16-20	9	14	-	23
20-24	6	11	3	20
24-28	-	-	7	7
कुल	15	25	10	50

हल: मानें हम पतियों की उम्र (वर्षों में) चर X से और पत्नी की उम्र चर Y से द्योतित करें। मान लें x और y संगत वर्गों क्रमशः X और Y श्रेणियों के मध्यमान को द्योतित करता है। अगर हम लें,

$$u = \frac{x-A}{h} = \frac{x-27.5}{5};\ v = \frac{y-B}{K} = \frac{y-22}{4}$$

प्रतीपगमन समीकरणों के लिए परिकलन

		पति की उम्र	20—25	25—30	30—35				
		Mid. pt. (x)	22.5	27.5	32.5				
पत्नी की उम्र	Mid. pt (y)	$v\downarrow \ u\rightarrow$	−1	0	1	f	fv	fv^2	fuv
16—20	18	−1	9 $\boxed{9}$	14 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	23	−23	23	9
20—24	22	0	6 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	3 $\boxed{0}$	20	0	0	0
24—28	26	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	7 $\boxed{7}$	7	7	7	7
		f	15	25	10	$N = 50$	$\Sigma fv = -16$	$\Sigma fv^2 = 30$	$\Sigma fuv = 16$
		fu	−15	0	10	$\Sigma fu = -5$			
		fu^2	15	0	10	$\Sigma fu^2 = 25$			
		fuv	9	0	7	$\Sigma fuv = 16$			

दो प्रतीपगमन की रेखाओं की गणन के लिए सारणी पर दी गई है

$$\bar{u} = \frac{\Sigma fu}{N} = \frac{-5}{50} = -0.1$$

$$\bar{v} = \frac{\Sigma fv}{N} = \frac{-16}{50} = -0.32$$

$$\bar{x} = A + h\bar{u} = 27.5 + 5x(-0.1) = 27.5 - 0.5 = 27$$

$$\bar{y} = B + k\bar{v} = 22 + 4x(-0.32) = 22 - 1.28 = 22.72$$

टिप्पणी

$$b_{yx} = \frac{k}{h}\left[\frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)(\Sigma fv)}{N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{50\times16-(-5)\times(-16)}{50\times25-(-5)^2}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{800-80}{1250-25}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{720}{1225} = 0.4702$$

$$b_{xy} = \frac{h}{k}\left[\frac{N\Sigma fuv - (\Sigma fu)(\Sigma fv)}{N\Sigma fv^2 - (\Sigma fu)^2}\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{800-80}{50\times30-(-16)^2}\right]$$

$$= \frac{5}{4}\times\frac{720}{1244} = 0.7235$$

y का x पर प्रतीपगमन समीकरण

$$y-\bar{y} = byx(x-\bar{x})$$
$$\Rightarrow y - 20.72 = 0.4702(x-27)$$
$$= 0.4702x - 12.6954$$
$$y = 0.4702x + 20.72 - 12.6954$$
$$= 0.4702x + 8.0246$$

x का y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$x-\bar{x} = bxy(y-\bar{y})$$
$$\Rightarrow x - 27 = 0.7235(y-20.72)$$
$$= 0.7235y - 14.991$$
$$\Rightarrow x = 0.7235y + 27.000 - 14.991$$
$$\Rightarrow x = 0.7235y + 12.009$$

इसलिए, पत्नी (y) की सबसे संभावित उम्र जब पति (x) की उम्र 30 वर्ष है दी जाती है।

$$y = 0.4702\times30 + 8.0246$$
$$= 14.1060 + 8.0246$$
$$= 22.1306$$
$= 22$ वर्ष (लगभग)

इसलिए, पति (x) की सबसे संभावित उम्र जब पत्नी (y) की उम्र 20 वर्ष है दी जाती है।

$$x = 0.7235\times20 + 12.009$$
$$= 14.470 + 12.009$$
$$= 26.479$$
$= 26.5$ वर्ष (लगभग)

प्राक्कलन के प्रमाप विभ्रम की गणना

$$\sigma x = \frac{h}{N}\sqrt{N\Sigma fu^2 - (\Sigma fu)^2} = \frac{5}{50}\sqrt{50\times25-(-5)^2} = \frac{\sqrt{1225}}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$$

$$\sigma y = \frac{k}{N}\sqrt{N\Sigma fv^2 - (\Sigma fv)^2} = \frac{4}{50}\sqrt{50\times30-(-16)^2}$$

$$= \frac{4}{50}\times\sqrt{1244} = \frac{4}{50}\times35.27 = 2.82$$

$$\gamma^2 = b_{yx}.b_{xy} = 0.4702 \times 0.7235 = 0.34$$

y के प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन (दिए x के लिए)

$$S_{yx} = \sigma y(1-r^2)^{1/2} = 2.82(1-0.34)^{1\backslash 2}$$

$$= 2.82 \times 8.124$$

$$=22.91$$

x के प्रमाप विभ्रम का प्राक्कलन (दिए y के लिए)

$$S_{xy} = \sigma x(1-r^2)^{1/2} = 3.5(1-0.34)^{1\backslash 2}$$

$$= 3.5 \times 8.124$$

$$= 28.434$$

7.9 सहसम्बन्ध विश्लेषण Vs. प्रतीपगमन विश्लेषण (Correlation Analysis Vs. Regression Analysis)

1. सहसम्बन्ध का शाब्दिक अर्थ दो या अधिक चरों के बीच सम्बन्ध है जो सहानुभूति में परिवर्तित होती है इसलिए एक में परिवर्तन प्रवृत्त करती है दूसरे में संगत परिवर्तन का। दूसरी तरफ, प्रतीपगमन का अर्थ है पीछे लौटना या औसत की ओर लौटना और यह गणितीय माप है जो दो चरों के बीच औसत सम्बन्ध को अभिव्यक्त करती है।

2. दो चरों x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 'rxy' दो चरों के बीच रैखिक सम्बन्धों की दिशा और स्तर की माप है जो पारस्परिक है। यह सममितीय है, i.e., $r_{yx} = r_{xy}$ और यह निरर्थक है कि कौन x और y निर्भर चर है और कौन स्वतंत्र चर।

प्रतीपगमन विश्लेषण दो चरों के बीच फलनक सम्बन्ध को स्थापित करने का लक्ष्य करती है और तब इस सम्बन्ध का प्रयोग कर निर्भर चर का किसी स्वतंत्र चर के दिए मान के लिए पूर्वानुमान या प्राक्कलन करती है। यह चर के प्रकृति को भी उजागर करती है, i.e., कौन निर्भर चर है और कौन स्वतंत्र चर। प्रतीपगमन गुणांक x और y में सममितीय नहीं हैं, i.e., $b_{yx} \neq b_{xy}$।

3. सहसम्बन्ध को जरूरत नहीं अध्ययनाधीन चरों के बीच कार्य–कारण सम्बन्धों को मानने का। यद्यपि प्रतीपगमन विश्लेषण स्पष्ट रूप से दो चरों के बीच कार्य–कारण सम्बन्ध निर्देशित करती है। कार्य के संगत चर को स्वतंत्र चर और कारण के संगत चर को निर्भर चर लिया जाता है।

4. सहसम्बन्ध गुणांक r_{xy} x और y के रैखिक सम्बन्ध की आपेक्षिक माप है और माप की इकाईयों से स्वतंत्र है। यह एक विशुद्ध संख्या है ± 1 के बीच पड़ने वाली।

दूसरी तरफ, प्रतीपगमन गुणांक, b_{yx} और b_{xy} नियत माप हैं जो चर $y(x)$ के मान में परिवर्तन, $x(y)$ के मान में इकाई परिवर्तन के लिए होती है प्रदर्शित करती है। एक बार जब प्रतीपगमन वक्र का फलनक रूप जान लिया जाता है, निर्भर चर का मान प्रतिस्थापित कर हम स्वतंत्र चर का मान प्राप्त कर सकते हैं और यह मान चर के माप की इकाईयों में होंगे।

5. दो चरों के बीच असंवेदी (Non-sense) सहसम्बन्ध हो सकता है जो विशुद्ध संयोगवश हो सकता है जिसका कोई व्यवहारिक संदर्भ नहीं है, i.e., जूते के आकार और व्यक्तियों के एक समूह की बुद्धि के बीच सहसम्बन्ध।

6. सहसम्बन्ध विश्लेषण सिर्फ चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध तक सीमित है और इसलिए, इसका सीमित उपयोग है। प्रतीपगमन विश्लेषण का विस्तृत प्रयोग है क्योंकि यह चरों के रैखिक और साथ ही गैर–रैखिक सम्बन्ध का भी अध्ययन करता है।

टिप्पणी

अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. सहसम्बन्ध गुणांक और प्रतीपगमन गुणांक के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है।

   (क) सही (ख) गलत

   (ग) तथ्यात्मक नहीं (घ) इनमें कोई नहीं

2. दोनों प्रतीपगमन गुणांक इकाई से अधिक नहीं हो सकते।

   (क) सही (ख) गलत

   (ग) तथ्य से परे (घ) इनमें कोई नहीं

3. अगर दो प्रतीपगमन गुणांकों में एक गुणांक इकाई ये __________ है तो दूसरा इकाई से __________ होगा।

   (क) दुगुना, चार गुना (ख) अधिक, कम

   (ग) $\sqrt{2}$ गुणा, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ गुणा (घ) इनमें कोई नहीं

4. जब सहसम्बन्ध गुणांक $\pm$ है, तब प्रतीपगमन रेखाएं __________ होंगी।

   (क) लम्बवत, असम्बद्ध (ख) लम्बवत, सम्बद्ध

   (ग) क्षैतिज, सन्निपाती (घ) लम्बवत, सन्निपाती

5. एक छात्र ने दो प्रतीपगमन रेखाएं प्राप्त की $2x-5y-7=0$ और $3x+2y-8=0$ क्या यह सही है।

   (क) सही है (ख) गलत है

   (ग) कह नहीं सकते (घ) इनमें कोई नहीं

6. $b_{xy}=0.5; r=0.8$ और y का प्रसारण $=16$ के साथ x का प्रमाप विचलन बराबर है __________

   (क) 2.5 (ख) 6.4

   (ग) 10.0 (घ) 25.6

7. निम्नलिखित प्रतीपगमन समीकरणों से, $\bar{x}$ और $\bar{y}$ ज्ञात करें।
   X पर $Y: 2Y-X-50; Y$ पर $X: 3Y-2X-10=0$

   (क) 60, 90 (ख) 130, 45

   (ग) 65, 45 (घ) 130, 90

टिप्पणी

7.10 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (ख)
2. (क)
3. (ख)
4. (ग)
5. (ख)
6. (क)
7. (घ)

7.11 सारांश (Summary)

पूर्वानुमान या प्राक्कलन एक बहुत बड़ी समस्या है मानवीय क्रिया कलापों के लगभग सभी क्षेत्रों में। हम लोग दैनानुदिनी जिंदगी में कई अन्तर–सम्बन्धित घटनाओं से रूबरू होते है। उदाहरण को लिए, एक फसल की उपज वर्षा पर निर्भर करती है, एक उत्पाद की कीमत या मूल्य निर्भर है उत्पादन और विज्ञापन खर्च पर, एक विशेष उत्पादे की माँग इसके कीमत पर निर्भर करती है, एक व्यक्ति का खर्च उसकी आय पर निर्भर करती है, और आगे। प्रतीपगमन विश्लेषण एक समय में दो चरों तक सीमित सरल प्रतीपगमन कहलाती है। परन्तु बहुत बार एक विशेष संवृत्ति बहुविध कारकों से प्रभावित हो सकती है। एक समय में दो या अधिक चरों के अध्ययन के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण बहुविध प्रतीपगमन कहलाता है।

प्रतीपगमन विश्लेषण में दो प्रकार के चर होते हैं। वह चर जिसका मूल्य प्रभावित होता है या अनुमान लगाया जाता है निर्भर चर कहलाता है और वह चर जो मूल्यों को प्रभावित करता है और पूर्वानुमान के लिए प्रयुक्त होती है, स्वतंत्र चर कहलाती है।

रैखिक और गैर–रैखिक प्रतीपगमनः अगर दिया गया द्विचर समंक एक आलेख पत्र पर खींचा जाए, विक्षेप चित्र पर प्राप्त बिन्दुओं, कमोबेश एक वक्र के चारों ओर संघनित होंगी, जो 'प्रतीपगमन का वक्र' कहलाती है। प्रतीपगमन वक्र का गणितीय समीकरण, सामान्यतः प्रतीपगमन समीकरण कहलाती हैं, हमें समर्थता प्रदान करती है अध्ययन करने में निर्भर चर के मूल्य में औस परिवर्तन स्वतंत्र चर के दिए मूल्य के लिए।

अगर प्रतीपगमन वक्र एक सीधी रेखा है, हम कहते हैं कि अध्ययनाधीन चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध हैं। इस प्रकार के वक्र का समीकरण सीधी रेखा का समीकरण है, i.e., x और y में प्रथम स्तर समीकरण। रैखिक प्रतीपगमन की स्थिति में निर्भर चर के मूल्य नियत निरपेक्ष परिमाण में बढ़ते हैं स्वतंत्र चर के मूल्य में

इकाई परिवर्तन से। यद्यपि, यदि प्रतीपगमन का वक्र सीधी रेखा नहीं है, प्रतीपगमन वक्रीय या और रैखिक प्रतीपगमन कहलाती है।

प्रतीपगमन की रेखाएं– प्रतीपगमन की रेखा x का y पर ऐसी रेखा है जो x के किसी विशिष्ट मूल्य के लिए y का सबसे उपयुक्त प्राक्कलित मूल्य देती है।

उसी तरह, x का y पर प्रतीपगमन की रेखा ऐसी रेखा है जो y के किसी विशिष्ट मूल्य के लिए x का सबसे उपयुक्त प्राक्कलित मूल्य देती है।

पद 'उपयुक्त' की व्याख्या न्यूनतम वर्ग के सिद्धान्त के अनुसार है जिसमें अवशेषों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करने या प्राक्कलन की त्रुटियों, i.e., चर के दिए प्रेक्षित मूल्य और विचलनों के बीच और उनके संगत प्राक्कलित मूल्यों जैसा उपयुक्तता की रेखा से दिया जाता है। हम विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम कर सकते हैं y-अक्ष के समानान्तर या x-अक्ष के समानान्तर पहला (i.e., विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करना y-अक्ष के समानान्तर), y का x पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण देती है और बाद का viz. x-अक्ष के समानान्तर विभ्रमों के वर्गों के योगफल को न्यूनतम करना x का y पर प्रतीपगमन की रेखा का समीकरण देती है।

(i) y का x पर प्रतीपगमन का समीकरण

$$y - \bar{y} = r.\frac{\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x})$$

(ii) x का y पर प्रतीपगमन का समीकरण

$$x - \bar{x} = r.\frac{\sigma x}{\sigma y}(y - \bar{y})$$

हमेशा दो प्रतीपगमन रेखाएं होती हैं, एक y का x पर और दूसरा x का y पर।

प्रतीपगमन रेखाओं के बीच कोण, प्रतीपगमन का गुणांक, प्रतीपगमन गुणांकों पर प्रमेय इत्यादि इस अध्याय में अच्छी तरह वर्णित है जिसके अध्ययन से रैखिक प्रतीपगमन का विश्लेषण समझा जा सकता है।

7.12 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **रैखिक प्रतीपगमन (समाश्रयण) विश्लेषण:** Linear Regression Analysis
- **प्रतीपगमन की रेखाएं:** Linear of Regression
- **प्रतीपगमन का गुणांक:** Coefficients of Regression
- **एक प्राक्कलन का प्रमाप विभ्रम:** Standard error of an Estimate
- **एक द्विचर आवृत्ति तालिका के लिए प्रतीपगमन समीकरण:** Regression Equations for a Bivariate Frequency Table

7.13 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

प्रश्नमाला 7.1

1. (a) प्रतीपगमन की संकल्पना का वर्णन करें और इसकी उपयोगिता की ओर इंगित करें व्यवसायिक समस्याओं को हल करने में।

   (b) विक्षेप चित्र क्या है? उपयुक्त विक्षेप चित्र के द्वारा दर्शाएं विभिन्न प्रकार के सहसम्बन्ध जो द्विचर समंक में चरों के बीच होते हैं। प्रतीपगमन की रेखाएं क्या है? सहसम्बन्ध विश्लेषण और प्रतीपगमन विश्लेषण के बीच विभिन्नता के मुख्य बिन्दुओं को लिखें।

2. सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन विश्लेषण के बीच प्रभेद करें और आर्थिक गतिविधियों में प्रतीपगमन विश्लेषण की उपयोगिता निर्देशित करें।

3. (a) प्रतीपगमन विश्लेषण क्या है? यह कैसे सहसम्बन्ध से भिन्न है? क्यों, सामान्यतः दो प्रतीपगमन के समीकरण होते हैं?

   (b) आप प्रतीपगमन से क्या समझते हैं? क्यों दो प्रतीपगमन रेखाएं होती हैं द्विचर श्रेणी की स्थिति में?

   (c) निम्नलिखित की समीक्षा करें :

   ''प्रतीपगमन समीकरण अनुत्क्रमणीय है'' (Irreversible)

4. रैखिक प्रतीपगमन क्या है? क्यों, सामान्यतः, दो प्रतीपगमन रेखाएं होती हैं? वे कग संपाती होते हैं? आर्थिक अन्वेषण में प्रतीपगमन समीकरणों के प्रयोग का वर्णन करें।

5. (a) यह कहा जाता है कि प्रतीपगमन समीकरण अनुत्क्रमणीय हैं जिसका अर्थ है कि आप x का y पर प्रतीपगमन समीकरण से y का x पर समीकरणनहीं प्राप्त कर सकते। इस वक्तव्य की न्यूनतम वर्ग के सिद्धान्त के विशिष्ट, विवेचना करते हुए औचित्य सिद्ध करें।

   (b) पद 'प्रतीपगमन' का वर्णन करें। क्यों, सामान्यतः हम दो प्रतीपगमन रेखाएं लेते हैं, कब प्रतीगमन की रेखाएं होती हैं (i) एक दूसरे के लम्बवत और (ii) संपाती?

6. दो प्रतीपगमन की रेखाओं के बीच का कोण क्या है? रेखाओं की प्रकृति की विवेचना निम्नलिखित विशिष्ट स्थितियों की करें :

   (i) $r = \pm 1$ (ii) $r = 0$

7. सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन गुणांकों के बीच क्या अन्तर है? क्या सहसम्बन्ध गुणांक की गणना प्रतीपगमन गुणांकों से हो सकती है? अगर हाँ, है?

8. (a) प्रतीपगमन गुणांकों को परिभाषित करें। वे कौन सी सूचनाएं उपलब्ध करवाती हैं?

(b) मान लें b_{yx} और b_{xy} क्रमशः Y का X पर और X बाद Y पर प्रतीपगमन के गुणांकों की प्रतीक हैं, इसे दर्शाएं :

$$\gamma_{xy} = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

9. x और y के निम्नलिखित दिए मूल्यों के लिए :

x:	3	5	6	8	9	11
y:	2	3	4	6	5	8

प्रतीपगमन के समीकरण को ज्ञात करें

(i) x पर y और (ii) y पर x

परिणामों की व्याख्या करें।

10. नीचे दिए गये समंक के लिए दो प्रतीपगमन की रेखाओं का समीकरण प्राप्त करें :

X:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y:	9	8	10	12	11	13	14	16	15

11. पति की उम्र और पत्नी की उम्र की निम्नलिखित समंक से, दो प्रतीपगमन की रेखाएं बनाएं और पति की उम्र जब पत्नी की उम्र 16 वर्ष है परिकलित करें।

पति की उम्रः	36	23	27	28	28	29	31	31	33	35
पत्नी की उम्रः	29	18	20	22	27	21	29	27	29	28

12. 8 छात्रों द्वारा गणित और सांख्यिकी में प्रापत अंक निम्नलिखित हैं। गणति में अंकों पर सांख्यिकी में अंकों की प्रतीपगमन रेखा श्ररत करें।

गणित में अंक (x):	50	40	60	46	50	48	59	47
सांख्यिकी में अंक (y):	30	37	42	32	35	45	50	35

13. निम्नलिखित समंक मशीन आपरेटरों और उनके प्रदर्शन रेटिंग देती है जो प्रति 100 टुकड़ों पर अच्छे पुर्जों की संख्या है :

आपरेटर:	1	2	3	4	5	6	7	8
अनुभव (वर्षों में) (X):	16	12	18	4	3	10	5	12
प्रदर्शन रेटिंग (Y):	87	88	89	68	78	80	75	83

प्रदर्शन रेटिंग का अनुभव पर प्रतीपगमन रेखा परिकलित करें और संभावित प्रदर्शन प्राक्कलित करें अगर किसी ऑपरेटर को 7 वर्ष का अनुभव है।

14. आपको समंक खरीद और बिक्री से संबंधित दिए गये हैं। दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त करें न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा और संभावित बिक्री प्राक्कलित करें जब खरीद 100 हो।

खरीदः	62	72	98	76	81	56	76	92	88	49
बिक्रीः	112	124	131	117	132	96	120	136	97	85

टिप्पणी

15. पिता और पुत्रों की ऊँचाई निम्नलिखित तालिका में दी गई है। प्रतीपगमन की दो रेखाएं प्राप्त करें और पुत्र की प्रत्याशित औसत ऊँचाई प्राक्कलित करें जब पिता की ऊँचाई 67.5 ईंच है।

पिता की ऊँचाई (ईंचों में):	65	66	67	67	68	69	71	73
पुत्र की ऊँचाई (ईंचों में):	67	68	64	68	72	70	69	70

16. निम्नलिखित तालिका 10 औसतों की उम्र और ब्लडप्रेशर देती है

उम्र (X):	56	42	36	47	49	42	60	72	63	55
ब्लड–प्रेशर (Y):	147	125	118	128	145	140	155	160	147	150

(i) X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें।

(ii) Y और X पर न्यूनतम वर्ग प्रतीपगमन समीकरण निर्धारित करें।

(iii)एक औसत का ब्लडप्रेशर आकलित करें जिसकी उम्र 45 वर्ष है।

17. दो जजों P और Q के पैनल ने सात नाटक प्रदर्शनों को ग्रेड दिया स्वतंत्र रूप से अंक जो निम्नलिखित हैं

प्रदर्शनः	1	2	3	4	5	6	7
P द्वारा अंकः	46	42	44	40	43	41	45
Q द्वारा अंकः	40	38	36	35	39	37	41

आठवाँ प्रदर्शन, जिसे जज Q नहीं देख पाए, जज P द्वारा उसे 37 अंक प्रदान किए गए। अगर जज Q भी उपस्थित होते, कितने अंकों की प्रत्याशा उनके द्वारा आँठवें प्रदर्शन पर दिया जाता?

18. निम्नलिखित समंक एक शिशु का जीवन के प्रथम छह महीने में सामान्य वजन देता है :

उम्र महीने में:	0	2	3	5	6
वजन पौंड में:	5	7	8	10	12

एक बच्चे का वजन 4 महीने उम्र पर आकलित करें।

19. दिए निम्नलिखित समंक से, y का x पर प्रतीपगमन गुणांक की गणना करें। परिणाम की व्याख्या करें।

X:	1	2	3	4	5
Y:	1	3	4	6	6

टिप्पणी

20. नीचे दिए गये समंक से दो प्रतीपगमन गुणांकों की गणना करें और r (सहसम्बन्ध गुणांक) का मान ज्ञात करें इसका प्रयोग कर :

X:	7	4	8	6	5
Y:	6	5	9	8	2

21. आपको निम्नलिखित समंक दिए गए हैं :

	x	y
समान्तर माध्य	36	85
प्रमाप विचलन	11	8

x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक $= 0.66$

(i) दो प्रतीपगमन समीरकणों को प्राप्त करें, (ii) x का मान प्राक्कलित करे जब $y = 75$

22. दी गई सूचना : X का योग $= 5,$; Y का योग $= 4$

X के माध्य से विचलनों के वर्गों का योग $= 40$

Y के माध्य से विचलनों के वर्गों का योग $= 50$

X और Y के माध्यों से विचलनों के गुणनफलों का योग $= 32$

प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या $= 10$

परिकलित करें :

(i) Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक 5, (ii) X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक

(iii) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध का गुणांक

23. दो चरों x और y के मूल्यों पर निम्नलिखित सूचना से, दो प्रतीपगमन रेखाएं और सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें :

$$n = 10,\ \Sigma x = 20,\ \Sigma y = 40,\ \Sigma x^2 = 240,\ \Sigma y^2 = 410,\ \Sigma xy = 200$$

24. निम्नलिखित परिणामों से सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित करें :

$$N = 10,\ \Sigma X = 350,\ \Sigma Y = 310,\ \Sigma(x-35)^2 = 162,\ \Sigma(Y-31)^2 = 222,\ \Sigma(x-35y-31) = 92$$

Y का X पर प्रतीपगमन रेखा भी निकालें।

25. द्विचर समंक के लिए, आपको निम्नलिखित दिया गया है :

$$\Sigma(X-58) = 46; \Sigma(Y-58) = 9, \Sigma(X-56)^2 = 3086, \Sigma(Y-58)^2 = 483$$
$$\Sigma(X-58)(Y-58) = 1095$$

प्रेक्षणों के जोड़ों की संख्या 7 है। आपसे वांछित है दो प्रतीपगमन समीकरणों को निर्धारित करना तथा X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक को।

संकेतन : माना $U = X - 58, V = Y - 58$

तब हमें दिया गया है $\Sigma U, \Sigma V, \Sigma U^2, \Sigma V^2$ और ΣUV

$$\overline{X} = 58 + \overline{U}; \overline{Y} = 58 + \overline{V}; b_{YX} \cdot b_{UV} \text{ और } b_{XY} = b_{UV}$$

टिप्पणी

26. एक द्विचर समंक के लिए X का माध्य मूल्य 20 है और Y का माध्य मूल्य 45 है। Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक 4 है और X का Y पर Y9 है। निकालें

    (i) सहसम्बन्ध का गुणांक

    (ii) X का प्रमाप विचलन अगर Y का प्रमाप विचलन 12 है।

    (iii) प्रतीपगमन रेखाओं के समीकरणों को भी लिखें।

27. निम्नलिखित परिणामों से, दो प्रतीपगमन समीकरणों को प्राप्त करें और फसल की उपज प्राक्कलित करें जब वर्षों 22 से.मी. होती है, और वर्षा जब उपज 600 कि.ग्रा. है।

	उपज कि.ग्रा. में (X)	वर्षा से.मी. में (Y)
माध्य	508.4	26.7
S.D.(प्र.वि.)	36.8	4.6

उपज और वर्षा के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक 0.52 है।

28. एक सर्वेक्षण संचालित किया गया पर खर्च (X) और भोजन और मनोरंजन (Y) पर खर्च के बीच सम्बन्ध का अध्ययन करने के लिए और निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त हुए

	माध्य	प्रमाप विचलन
आवास पर खर्च	173 रु.	63.15
भोजन और मनोरंजन पर खर्च	47.8 रु.	22.98 रु.

सहसम्बन्ध का गुणांक $= + 0.57$

X का Y पर प्रतीपगमन का समीकरण लिखें और भोजन तथा मनोरंजन पर खर्च को प्राक्कलित करें, अगर आवास पर खर्च 200 रु. है।

29. एक सहसम्बन्ध के अध्ययन में निम्नलिखित मूल्य प्राप्त होते हैं :

	X	**Y**
माध्य	65	67
प्रमाप विचलन	2.5	3.5
सहसम्बन्ध का गुणांक	0.8	

दो प्रतीपगमन समीकरणों को ज्ञात करें जो उपर्युक्त मूल्यों से जुड़ी हैं।

30. Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात करें, और X का Y पर निम्नलिखित समंक के आधार पर

    $\Sigma X = 50,\ \ X = 5,\ \ \Sigma Y = 60,\ \ \overline{Y} = 6, \Sigma XY = 350,\ \ X$ का प्रसरण $= 4$; Y का प्रसरण $= 9$

31. दो चरों X और Y के बीच 12 जोड़े प्रेक्षणों से सहसम्बन्ध गुणांक निकालने के क्रम में, निम्नलिखित परिकलन किए गए :

$\Sigma X = 30,\ \Sigma X^2 = 670,\ \Sigma Y = 5,\ \Sigma \overline{Y} = 285, \Sigma XY = 344$

क्रमानुसार जाँच के क्रम में यह पाया गया कि जोड़ा ($X = 11$, $Y = 4$) गलत कॉपी किया गया, सही मूल्य ($X = 10$, $Y = 14$) हैं। जरूरी सहसम्बन्ध बनाने के बाद, ज्ञात करें :

(a) दो प्रतीपगमन गुणांक ; (b) दो प्रतीपगमन समीकरण ; (c) सहसम्बन्ध गुणांक

प्रश्नमाला—7.2

1. दिए गए दो प्रतीपगमन की रेखाएं, वर्णन करें आप कैसे ज्ञात करेंगे :

   (i) माध्य मूल्य $(\bar{x}, \bar{y})$

   (ii) प्रतीपगमन गुणांक b_{yx} और b_{xy}

   (iii)सहसम्बन्ध गुणांक γ_{xy},

   (iv)प्रमाप विचलनों का अनुपात $\Sigma x / \Sigma y$.

2. सहसम्बन्ध विश्लेषण में प्राप्त दो प्रतीपगमन की रेखाओं के समीकरण नीचे दिए गए हैं :

   $2X = 8\text{-}3Y$ और $2Y = 5\text{-}X$

   सहसम्बन्ध गुणांक का मूल्य प्राप्त करें।

3. आपको निम्नलिखित समंक उपलब्ध करवाया जाता है :

   $4x - 5y + 33 = 0$; $20x - 9y - 107 = 0$; प्रसरण $x = 9$

   परिकलित करें:

   (i) x और y के माध्य मूल्य, (ii) y का प्रमाप विचलन, (iii) x और y के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक

4. निम्नलिखित दो प्रतीपगमन समीकरणों से X और Y के माध्य मूल्य परिकलित करें, और X तथा Y के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक।

   $4y - 5x = 0$ और $5y - x - 63 = 0$

5. एक द्विचर वितरण का प्रतीपगमन की रेखाएं निम्न हैं :

   $5x - 145 = -10Y$; $14Y - 208 = -8X$

   यदि दिया गया है कि X का प्रसरण = 4। आपसे वांछित है X और Y का माध्य मूल्य निकालना, और Y का प्रमाप विचलन। X और Y के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक भी ज्ञात करें।

6. दो चरों X और Y के प्रतीपगमन समीकरण निम्न हैं :

   $3X + 2Y = 26$ ....(*) और $6X + Y = 31$ ....(**)

ज्ञात करें :

(i) X और Y के माध्य

(ii) X का Y पर और Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक

(iii) X और Y के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक

(iv) Y का सबसे संभावित मूल्य जब $x = 5$

(v) चरों के प्रसरणों का अनुपात

7. प्रतीपगमन रेखाएं दी गई हैं जैसे : $3x + 2y = 25$ और $6x + y = 31$, उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात करें और इसकी व्याख्या करें। x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक भी ज्ञात करें।

8. दो प्रतीपगमन की रेखाएं दी जाती हैं

   $3x + 5y - 42 = 0$ और $2x + y - 80 = 0$

   y का प्रक्कलन प्राप्त करें जब $x = 10$ और x का जब $y = 20$

9. दो चरों के बीच दो प्रतीपगमन रेखाओं का समीकरण अभिव्यक्त किया जाता है

   $2x - 3y = 0$ और $4y - 5x - 8 = 0$

   (i) चिन्हित करें इन दोनों में कौन प्रतीपगमन y का x पर, और x का y पर कहा जाए

   (ii) $\bar{x}$ और $\bar{y}$ ज्ञात करें और सहसम्बन्ध गुणांक (γ) समीकरणों से।

10. एक वर्ग के 50 छात्रों में, सांख्यिकी के अंकों (x) का प्रतीपगमन समीकरण लेखा के अंकों (y) पर : $3y - 5x + 180 = 0$ है। लेखा में माध्य अंक 44 है और सांख्यिकी में अंकों का प्रसरण $9/16$वाँ है लेखा में अंकों के प्रसरण का। सांख्यिकी के माध्य अंक और दो विषयों के अंकों के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक ज्ञात करें।

11. एक वर्ग के 50 छात्रों के लिए, सांख्यिकी में अंक (y) का प्रतीपगमन समीकरण लेखा के अंकों (x) पर $4y - 5x - 8 = 0$ है। लेखा में औसत अंक 40 हैं। प्रमाप विचलन का अनुपात $\Sigma y : \Sigma x :$ है 5:2। सांख्यिकी में औसत अंक ज्ञात करें और दो विषयों के बीच सहसम्बन्ध का गुणांक।

12. एक परिवार के बचत (S) का प्रतीपगमन आय (Y) पर अभिव्यक्त किया जा सकता है जैसे $S = a + \frac{y}{m}$, जहाँ a और m नियतांक हैं। 100 परिवारों के यादृच्छिक प्रतिदर्श में, बचत का प्रसरण एक–चौथाई है आय के प्रसरण का और सहसम्बन्ध गुणांक पाया जाता है। 0.41 m का प्राक्कलन प्राप्त करें।

13. एक प्राक्कलन के प्रमाप विभ्रम (S.E.) से आप क्या समझते हैं? y के प्राक्कलन का S.E. दिए x के लिए और x का प्राक्कलन का S.E. दिए y के लिए, अभिव्यक्तियाँ दें, x और y के बीच रैखिक सम्बन्ध परिकल्पित करें।

14. Y का X पर रैखिक प्रतीपगमन का प्राक्कलन के प्रमाप विभ्रम की अभिधारणा वर्णित करें। क्या आप इसे सहसम्बन्ध गुणांक के क्रम में अभिव्यक्त कर सकते हैं? Y को X से प्राक्कलित करने का प्रमाप विभ्रम क्या है अगर $\gamma = 1$ हो?

15. X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण और Y का X पर (जरूरी नहीं उस क्रम में) हैं :

    $10X + 3Y = 25$ और $6X + 5Y = 31$ X का प्रसरण 4 है।

    ज्ञात करें :

    (i) X और Y का माध्य

    (ii) X का पूर्वानुमानित मूल्य जब $Y = 1$ है और Y का पूर्वानुमानित मूल्य जब $X = 2$ है।

    (iii) X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक

    (iv) Y का X पर प्रतीपगमन में प्राक्कलित का प्रमाप विभ्रम

16. एक बड़े प्रतिदर्श में दो सहसंबंधित चरों का प्रमाप विचलन Σx और Σy दिया गया है।

    (a) प्रमाप विभ्रम क्या है प्राक्कलित करने में y को x से अगर $\gamma = 0$ हो?

    (b) किस सीमा तक त्रुटि कम की जा सकती है अगर γ को बढ़ाकर 0.5 तक कर दिया जाए।

    (c) प्रमाप विभ्रम क्या है प्राक्कलित करने में y को x से अगर $\gamma = 1$ हो?

17. निम्नलिखित समंक से दो प्रतीपगमन की रेखाएं और सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित करें :

बिक्री राजस्व (लाख रुपये)	**विज्ञापन खर्च**			
	5–15	15–25	25–35	35–45
75–125	3	4	4	8
125–175	8	6	5	7
175–225	2	2	3	4
225–275	3	3	2	2

18. दिए गये निम्नलिखित समंक से दो प्रतीपगमन का गुणांक और कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध के गुणांक की गणना करें।

Y / X	0–20	20–40	40–60
10–25	10	5	3
25–40	4	40	8
40–55	6	9	15

टिप्पणी

प्रश्नमाला–7.3

(वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न)

1. अगर दो प्रतीपगमन गुणांक 0.8 और 1.2 हैं, क्या मूल्य होगा सहसम्बन्ध गुणांक का?

   उत्तर : 0.9798
2. दिया गया $b_{yx} = -1.4$ और $b_{xy} = -0.5$, γ_{xy} परिकलित करें।

   उत्तर : $\gamma_{xy} = 0.84$
3. (a) निम्नलिखित पर समीक्षा प्रस्तुत करें :

   एक द्विचर वितरण के लिए, y का x पर प्रतीपगमन का गुणांक 4.2 है और x का y पर प्रतीपगमन का गुणांक 0.5 है।

   (b) अगर दो प्रतीपगमन गुणांक 0.8 और 0.6 हैं, सहसम्बन्ध के गुणांक का मूल्य क्या होगा?

   (c) एक छात्र ने सिगरेट पीने और शराब पीने के बीच सहसम्बन्ध का अध्ययन करते वक्त r का मान = 2.46 पाया। विवेचना करें।

   (d) द्विचर वितरण के लिए : $b_{yx} = 2.8$; $b_{xy} = -0.3$ समीक्षा करें
4. $b_{xy} = 0.5$, $\gamma = 0.8$ और y का प्रसरण = 16 के साथ, x का प्रमाप विचलन बराबर है...............

   (a) 2.5 (b) 6.4 (c) 10.0 (d) 25.6
5. दिए गए x का y पर और y का x पर प्रतीपगमन गुणांक 0.85 और 0.89 हैं, सहसम्बन्ध के गुणांक का मूल्य ज्ञात करें।
6. निम्नलिखित प्रतीपगमन समीकरणों से, $\bar{x}$ और $\bar{y}$ ज्ञात करें।

   X पर $Y : 2Y - X\text{-}50 = 0$; Y पर $X : 3Y - 2X - 10 = 0$
7. एक छात्र ने दो प्रतीपगमन रेखाएं प्राप्त की

   $2x - 5y - 7 = 0$ और $3x + 2y - 8 = 0$

   क्या आप उससे सहमत हैं?
8. निम्नलिखित वक्तव्य की समीक्षा करें :

   (i) X और Y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक (γ_{xy}) 0.90 है और प्रतीपगमन गुणांक $\beta_{xy} -1$ है।

   (ii) अगर दो प्रतीपगमन का गुणांक ऋणात्मक हैं तब उनका सहसम्बन्ध धनात्मक है।

   (iii) $\gamma_{xy} = 0.9$, $\beta_{xy} = 2.04$, $\beta_{yx} = -3.2$
9. प्रतीपगमन विश्लेषण के महत्व का संक्षिप्त विवरण दें। निम्नलिखित मूल्यों की व्याख्या करें :

   (i) सहसम्बन्ध का गुणन–आघूर्ण गुणांक शून्य है।

   (ii) Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक है -1.75।

   (iii) कोटि सहसम्बन्ध का गुणांक = 1

10. (i) "Y का X पर और X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण उत्क्रमणनीय हैं" वर्णन करें।

(ii) "एक सहसम्बन्ध गुणांक $\gamma = 0.8$ सम्बन्ध दर्शाती है दुगुना नजदीक γ के $= 0.4$" समीक्षा करें।

(iii) "सहसम्बन्ध का उच्च स्तर का भी अर्थ नहीं है कि दो सहसंबंधित चर के बीच कार्य और कारण का सम्बन्ध है", क्यों?

7.14 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamentals of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

टिप्पणी

इकाई—5

अध्याय 8 सूचकांक निर्देशांक (Index Numbers)

संरचना (Structure)

8.0 परिचय (Introduction)

टिप्पणी

सूचकांक निर्देशक हैं जो किसी दी अवधि में (या विशिष्ट अवधि में) किसी संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन को दर्शाती हें जो चालू अवधि (Current Period) कहलाती है किसी नियत अवधि में इसके मूल्य के सापेक्ष, आधार अवधि कहलाती है जो तुलना के लिए चुनी जाती है। विचारों धीक संवृत्ति या चर हो सकती हैः

(i) कीमत किसी विशेष वस्तु जैसे– स्टील, ससोना, चमड़ा इत्यादि या वस्तुओं या समूह जैसे– उपभोक्ता वस्तुएं, अनाज, दूध और दूध उत्पाद, श्रृंगार सामग्री आदि।

(ii) व्यापार का विस्तार, फैक्टरी उत्पाद, औद्योगिक या कृषि उत्पाद, आयात या निर्यात, स्टॉक और शेयर, एक व्यापारिक घराने की बिक्री और लाभ और इसी तरह आगे।

(iii) एक देश की राष्ट्रीय आय, विभिन्न क्षेत्रों मे ंवेतन का स्वरूप, बैंक जमा, विदेश विनिमय रिजर्व, एक खास समुदाय के लोगों का जीवन यापन का मूल्य, वर्ग या व्यवसाय ओर आगे।

परिभाषाः ''सूचकांक सांख्यिकीय साधन हैं जिनकी संरचना एक संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन को मापने के लिए किया जाता (चर या चरों का समूह) समय, भौगोलिक स्थान या दूसरे अभिलक्षणों जैसे आय, व्यवसाय इत्यादि के सापेक्ष।'' दूसरे शब्दों में, सूचकांक विशेष प्रकार की दर, अनुपात, प्रतिशत हैं जो दो या अधिक परिस्थितियों में विशिष्ट परन्तु संबंधित चरों के समूह के परिमाण का साधारण स्तर देता है।

उदाहरण के लिए, मान लें हमें रुचि है उपभोक्ता वस्तुओं की कीमत के स्तर के सामान्य परिवर्तन के अध्ययन में, i.e., माल या वस्तुएं जो सामज के एक विशेष वर्ग के लोगों द्वारा उपभोग किया जाता। कहें, निम्न आय वर्ग या मध्यम आय वर्ग या मजदूर वर्ग और इसी तरह स्पष्टतः ये परिवर्तन प्रत्यक्ष रूप से मापने योग्य नहीं हैं क्यों? विभिन्न वस्तुओं की मूल्य तालिका भिन्न इकाईयों में उपलब्ध होती है, e.g., अनाज (चावल, गेहूं, दाल इत्यादि) प्रति क्विंटल या कि.ग्रा. में सूचीबद्ध रहती है, पानी रू. प्रति गैलन, दूध, पेट्रोल, किरासन इत्यादि रू. प्रति लीटर, कपड़े रू. प्रति मीटर और इसी तरह।

आगे, कुछ वस्तुओं के मूल्य बढ़ने वाले हो सकते हैं जबकि दूसरे के घटने वाले दो अवधियों के दरम्यान और दर बढ़ने या घटने की विभिन्न वस्तुओं की भिन्न हो सकती है। सूचकांक एक सांख्यिकी साधन है जो हमें एक प्रतिनिधि अंक तक पहुँचने में समर्थ बनाता है जो संवृत्ति (उपभोक्ता वस्तु) के सामान्य मूल्य स्तर को एक विस्तृत समूह के लिए देती है।

ह्वेलउन के अनुसार,

''सूचकांक एक सांख्यिकी साधन है समंक के अपेक्षिक परिवर्तन को दर्शाने का जहाँ वास्तविक परिवर्तन की माप होना कठिन या असम्भव है।''

टिप्पणी

एफ.वाई. एजवर्थ ने सूचकांक की परंपरागत परिभाषा निम्न प्रकार से की हैः

सूचकांक अपने विचरण से दर्शाती है परिमाण में परिवर्तन को होना तो अपने परिशुद्ध माप के प्रति सुग्राह्य है ना ही व्यवहार में प्रत्यक्ष मूल्य निर्धारण में।

8.1 उद्देश्य (Objectives)

सूचकांक सांख्यिकीय साधन हैं जिनकी संरचना एक संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन को मापने के लिए किया जाता है (चर या चरों का समूह) समय, भौगोलिक स्थान या दूसरे अभिलखणों जैसे आय, व्यवसाय इत्यादि के सापेक्ष। दूसरे शब्दों में सूचकांक विशेष प्रकार की दर, अनुपात, प्रतिशत हैं जो दो या अंधिक परिस्थितियों में विशिष्ट परन्तु सम्बन्धित चरों के समूह के परिमाण का साधारण स्तर देता है।

यद्यपि वास्तविकता में कीमतों के सामान्य स्तर की अध्ययन की रूपरेखा बनाने में या क्रमानुसार मुद्रा के क्रय शक्ति, आजकल सूचकांक का विस्तृत प्रयोग किया जाता है विभिन्न उद्देश्यों के लिए अर्थशास्त्र में, व्यवसाय, प्रबंधन इत्यादि और परिमाणात्मक समंक के उत्पादन, उपयोग, लाभ, कार्मिक और वित्तीय मामलों इत्यादि दो अवधियों के लिए स्थान इत्यादि की संवृत्ति के स्तर में परिवर्तन की तुलना के लिए। वास्तव में, मुश्किल से संख्यात्मक माप का कोई क्षेत्र है जहाँ सूचकांक निर्मित नहीं है। वे करीब सभी विज्ञानों मे ंप्रयुक्त होती है– प्राकृतिक, सामाजिक और शारीरिक।

सूचकांक अर्थव्यवस्था की नब्ज पकड़ने में प्रयुक्त होते हैं। ये निर्देशांक के तौर पर मुद्रास्फीति और अवस्फीति प्रवृत्तियों के लिए होने लगा है। सूचकांक यर्थार्थ में ही 'आर्थिक बैरोमीटर' या अर्थिक क्रियाकलाप का बैरोमीटर कहा जाता है जो आर्थिक दबाव और व्यापारिक गतिविधि को भापता है।

सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिाति बिंदुओं का ध्यानपूर्वक अध्ययन वांछित है।

सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित बिंदुओं का ध्यानपूर्वक अध्ययन वांछित है।

सूचकांकों का उद्देश्य, वस्तुओं या मदों का चुनाव, आधार वर्ष का चुनाव, प्रयुक्त होने वाली औसत का प्रकार, भारतण का तरीका, सूत्रों का चुनाव इत्यादि। इस पुस्तक का उद्देश्य सूचकांक निर्देशांकों के निर्माण में उपयुक्त गुणों का स्पष्ट विवेचना से है।

8.2 निर्देशांक की विशेषताएँ (Features of Index Numbers)

1. **संख्या द्वारा व्यक्त**– निर्देशांक सदैव ही संख्या में व्यक्त किए जाते हैं और यह संख्या केवल एक ही होती है।
2. **माध्य के रूप में प्रस्तुत**– सूचकांक परिवर्तन की केन्द्रीय प्रवृत्ति को औसत रूप में प्रकट करते हैं।

3. **सापेक्ष माप (Relative Measure)**– निर्देशांक द्वारा समूह के तुलनात्मक या सापेक्ष परिवर्तनों का माप किया जाता है। यदि कहा जाए कि सूचकांक 200 है तो इसका कोई अर्थ नहीं निकलता, परन्तु यदि हम कहें कि सन् 1998 में सूचकांक 100 और 2005 में 200 था तो उक्त कथन सार्थक होता है और सूचित करता है कि 1998 की तुलना से 2005 में वस्तुओं के मूल्य दुगुने हो गए हैं।
4. **प्रतिशतों का माध्य**– आधार वर्ष या आधार स्थान के मूल्य को 100 मानकर प्रचलित वर्ष के मूल्यों को प्रतिशतों में बदल दिया जाता है, जिन्हें 'मूल्यानुपात' कहते हैं। फिर सभी मूल्यानुपातों का माध्य निकाला जाता है। प्रतिशतों का यह माध्य ही सूचकांक कहलाता है। आधार वर्ष-दो वर्षों में से जिस वर्ष को आधार मानकर तुलना की जाती है, उसे 'आधार वर्ष' कहते हैं।
5. **तुलना का आधार**– सूचकांक तुलना का आधार होते हैं। आधार वर्ष की तुलना प्रचलित वर्ष से की जाती है।
6. **प्रचलित वर्ष**– जिस वर्ष के प्रचलित मूल्य–स्तर की तुलना आधार वर्ष से की जाती है, उसे प्रचलित वर्ष कहा जाता है।
7. **सर्वव्यापी उपयोगिता**– निर्देशकों की उपयोगिता सर्व व्यापी है क्योंकि इसे केवल मूल्य स्तर के माप के लिए ही प्रयुक्त नहीं किया जाता बल्कि किसी भी ऐसी घटना की सापेक्ष माप के लिए प्रयोग किया जा सकता है, जिसका प्रत्यक्ष या निरपेक्ष अध्ययन नहीं किया जा सकता।

8.3 सूचकांकों के उपयोग (Uses of Index Numbers)

पहला सूचकांक एक इटालियन मि. कार्ली द्वारा 1764 में निर्मित किया गया कीमतों में परिवर्तन की तुलना के लिए 1750 ई. के लिए (चालू वर्ष) कीमत का स्तर 1500 का (आधार वर्ष) के साथ अध्ययन करने के लिए अमेरिका का अन्वेषण का प्रभाव इटली में कीमत स्तर पर। यद्यपि वास्तविकता में कीमतों के सामान्य स्तर का अध्ययन की रूपरेखा बनाने में या क्रमानुसार मुद्रा के क्रय शक्ति, आजकल सूचकांक का विस्तृत प्रयोग किया जाता है विभिन्न उद्देश्यों के लिए अर्थशास्त्र में, व्यवसाय, प्रबंधन इत्यादि, और परिमाणात्मक समंक के लिए उत्पादन, उपभोग, लाभ, कार्मिक और वित्तीय मामलों इत्यादि, दो अवधियों के लिए स्थान इत्यादियों से वृत्ति के स्तर में परिवर्तन की तुलना के लिए। वास्तव में, मुश्किल से संख्यात्मक माप का कोई क्षेत्र है। जहाँ सूचकांक निर्मित नहीं है। वे करे सभी विज्ञानों में प्रयुक्त होती हैं– प्राकृतिक, सामाजिक और शारीरिक। सूचकांक के प्रमुख उपयोग का निम्नलिखित प्रकार से सारांश किया जा सकता है:

1. सूचकांक आर्थिक बैरोमीटर जैसा– सूचकांक अपरिहार्य साधन है किसी सरकारी संस्थान के प्रबंधन वर्ग या व्यक्तिगत व्यवसायिक प्रतिष्ठान और व्यवसायिक योजना और कार्यकारी निर्णय के निर्माण में। कीमतों का घातांक (थोक बिक्री और खुदरा) निर्गम (व्यापार का विस्तार, आयात और निर्यात, औद्योगिक

टिप्पणी

और कृषि उत्पाद) और बैंक जमाओं विदेशी विभिन्न और रिजर्व इत्यादि सामान में देश की आर्थिक और व्यवसायिक गतिविधि में विचरण और प्रकृति पर प्रकाश डालती है। इन घातांको का ध्यानपूर्वक अध्ययन हमें सामान्य व्यापार देश के आर्थिक विकास और व्यापारिक कार्यकलाप का बहुत अच्छा मूल्यांकन देता है।

जीवसिम्पसन और एफ. काफका के शब्दों में,

''सूचकांक आजकल प्रयोग में सबसे व्हिस्की साधनों में से एक है. वे अर्थव्यवस्था की नब्ज पकड़ने में प्रयुक्त होते हैं और उनका उपयोग निर्देशांक के तौर पर मुद्रास्फीति या अवस्फीति प्रवृत्तियों के लिए होने लगा है।''

बैरोमीटर को सामान जो भौतिकी या रसायन शास्त्र में वायुमंडलीय दबाव को मापने में प्रयुक्त होती है, सूचकांक यथार्थ में ही 'आर्थिक बैरोमीटर' या 'आर्थिक क्रियाकलाप का बैरोमीटर' कहा जाता है जो आर्थिक दबाव और व्यापारिक गतिविधि को मापता है।

2. सूचकांक उपनति और प्रवृत्तियों के अध्ययन में सहायता करता है– चूंकि सूचकांक विभिन्न कालाविधियों में संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन का अध्ययन करता है, विशेष रूप से उपयोगी होते हैं एक काल श्रेणी समंक में एक समूह आवृत्ति के साधारण अध्ययन के लिए। उत्पादन का घातांक (औद्योगिक और कृषि उत्पादन), व्यापार का विस्तार, आयात और निर्यात याद बहुत उपयोगी होते हैं, सृवत्ति के स्तर में परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए कालश्रेणी के विभिन्न अवयवों की वजह से, viz., दीर्घकालिक उपनति (Secular Trend), और अनियमित अवयवों और उत्पादन और व्यापारिक कार्यकलाप के साधारण उपनति पर प्रतिबिंब डालती है। विस्तृत समूह में औसत परिवर्तन के माप के तौर पर, सूचकांक प्रयुक्त हो सकती है पूर्वानुमान के लिए भविष्य की घटनाओं का। उदाहरण के लिए, अगर एक व्यवसाई एक नया उद्योग लगाने में अभिरुचि रखने वाला है, मूल्यों में परिवर्तन का अध्ययन, वेतन और आय विभिन्न उद्योगों में बहुत सहायता होता है उसके लिए तुलनात्मक विषयों के लिए सामान्य धारणा बनाने में जो भविष्य में विभिन्न उपक्रम धारण करते हैं।

3. सूचकांक निर्णय और नीतियों को सन्निबद्ध करने में सहायक होती है– समंक का सूचकांक कीमतों, उत्पादन, लाभों, आयातों और निर्यातों, कार्मिक और वित्तीय मामलों से संबंधित समंक अपरिहार्य है किसी संस्थान के कुशल योजना और कार्यकारी निर्णयों को व्यवस्थित करने में। उदाहरण के लिए, जीवनयापन का सूचकांक सरकार और औद्योगिक तथा व्यवसायिक प्रतिष्ठानों द्वारा महंगाई भत्ता (Dearness Allowance, D.A.) के निर्धारण या अपने कर्मचारियों को बोनस प्रदान करने में प्रभावी होता है ताकि वे समय-समय पर जीवनयापन के बड़े मूल्य से निपट सकें। एक वस्तु के उत्पादन या बिक्री पर उत्पादन शुल्क सूचकांक के अनुसार होती हैं। वस्तु के उपभोग का समय-समय पर उसी तरह से, विभिन्न वस्तुओं के उपभोग का घातांक उनके भविष्य के उत्पादन की योजना बनाने में सहायता करती है। यद्यपि सूचकांक बहुत विस्तृत रूप से समाज के सामान्य आर्थिक और व्यवसायिक स्थित के अध्ययन में प्रयुक्त होता है, परंतु वे सार्थकता से समाजशास्त्रियों (जनसंख्या घातांक) मनोवैज्ञानिकों (I.Q.S.), स्वास्थ्य और शैक्षणिक

अधिकारियों इत्यादि द्वारा प्रयोग में लाई जाती हैं, अपनी नीतियों को समय–समय पर व्यवस्थित करने और संशोधित करने के लिए।

टिप्पणी

4. मूल्य घातांक मुद्रा की क्रय शक्तियों को मापते हैं– जीवनयापन का सूचकांक निर्धारित करती हैं कि क्या वास्तविक वेतन बढ़ रही है या घट रही हैं, यह परिवर्तित रह रही हैं। दूसरे शब्दों में, वे हमारी सहायता वास्तविक वेतन की गणना में करती हैं जो प्राप्त की गई हैं रुपयों में वेतन को संगत मूल्य घातांक से भाग देकर और 100 से गुणा करके। वास्तविक वेतन हमारी सहायता मुद्रा की क्रय शक्ति के निर्धारण में करती हैं। उदाहरण के लिए, मान लें कि किसी वर्ष के लिए जीवन यापन का निर्देशांक कहें, 1979 एक विशेष वर्ग के लोगों के लिए 1970 आधार वर्ष के साथ 150 है। अगर एक व्यक्ति उस वर्ग का 1970 में 300 पाता है, जो उसे जीवन स्तर को बनाए रखने के लिए (दूसरे कारक हैं) उनका वेतन 1979 में होना चाहिए $150/100 \times 300 = 450$ रुपये। दूसरे शब्दों में, अगर एक व्यक्ति 1979 में रु 450 पाता है तब उसका वास्तविक वेतन $450/150 \times 100 = 300$ रु. है, i.e., मुद्रा की क्रय शक्ति घटकर 2/3 रह गई है।

5. सूचकांक अपस्फीति के लिए प्रयुक्त होती है– उपभोक्ता मूल्य सूचकांक या जीवन में जीवन यापन का सूचकांक प्रयुक्त होती है सकल राष्ट्रीय उत्पाद के अपस्फीति के लिए, राष्ट्रीय लेखा में आय मूल्य श्रेणियों के लिए। वास्तविक वेतन प्राप्त करने की तकनीक दिए गए काल्पनिक वेतन से। (जैसा उपर्युक्त वर्णित उपयोग 4 में) प्रयुक्त हो सकती है वास्तविक वेतन निकालने के लिए स्फीति युक्त मौद्रिक आय से, वास्तविक वेतन निकालने के लिए स्फीति युक्त मौद्रिक आय से, वास्तविक बिक्री काल्पनिक बिक्री से और इसी तरह उपयुक्त सूचकांकों को लेकर।

8.4 सूचकांकों के प्रकार (Types of Index Numbers)

सूचकांक मोटे तौर पर विभिन्न संवर्गों में वर्गीकृत की जा सकती है संवृत्ति के प्रकार पर निर्भर या चर जिनमें आपेक्षिक परिवर्तनों का अध्ययन किया जाना है। यद्यपि सूचकांकों का निर्माण किसी भी क्षेत्र के परिणात्मक माप के आपेक्षिक परिवर्तनों को मापने के लिए हो सकती है, हम लोग चर्चा को प्राथमिकता से अर्थ और व्यापार संबंधित समंक तक सीमित रखेंगे, i.e., मूल्यों के संबंधित आंकड़े उत्पादन (बहिर्वेशन) और उपभोग। इस संदर्भ में सूचकांक मोटे तौर पर निम्नलिखित तीन संवर्गों में वर्गीकृत की जा सकती है–

(i) मूल्य सूचकांक (Price Index Numbers)– मूल्य सूचकांक मूल्यों में सामान्य परिवर्तनों को मारती है। वे आगे निम्नलिखित वर्गों में विभाजित की जाती है–

(a) थोक बिक्री मूल्य सूचकांक (Wholesale Price Index Numbers)— थोक बिक्री मूल्य सूचकांक एक देश के सामान्य मूल्य स्तर के परिवर्तनों को प्रतिबिंबित करती हैं। भारत में ऑफिशियल सामान्य उद्देश्य थोक मूल्य सूचकांक पहली बार संगणित किया गया आर्थिक सलाहकार द्वारा वाणिज्य और उद्योग मंत्रालय (अब वाणिज्य मंत्रालय) 1947 में (अगस्त

टिप्पणी

1947 को आधार वर्ष के साथ) और संशोधित श्रेणी शुरू की गई अप्रैल 1956 में (1952–53 आधार वर्ष के साथ) थोक बिक्री मूल्य के सूचकांक की नई श्रृंखला (1961–62 आधार वर्ष) "थोक बिक्री मूल्य घातांक संशोधन कमिटी" की अनुशंसा पर शुरू की गई। 139 वस्तुओं को शामिल किया 225, 225 बाजार और 774 बाजार भाव। थोक बिक्री मूल्यों के सूचकांक की संशोधित श्रेणी 1970–1971 आधार वर्ष के साथ प्रस्तुत की गई जनवरी के प्रथम सप्ताह 1977 से।

(b) खुदरा मूल्य सूचकांक (Retail Price Index Numbers)— ये घातांक विभिन्न वस्तुओं के खुदरा मूल्यों में सामान्य परिवर्तनों को प्रतिबिंबित करती है, जैसे उपभोग की वस्तुएं, स्टॉक और शेयर, बैंक जमा, सरकारी बाण्ड इत्यादि। भारत में, ये घातांक श्रम मंत्रालय द्वारा निर्मित की गई है श्रम ब्यूरो खुदरा मूल्यों का सूचकांक शहरी केन्द्र और ग्रामीण केन्द्र के रूप में।

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक, सामान्यतः जीवन यापन सूचकांक के रूप में जानी जाती है एक विशेष प्रकार की खुदरा मूल्य सूचकांक है और हमें समर्थ बनाती है बहुत सारे माल या वस्तुओं की कीमतों में परिवर्तन का प्रभाव क्रय शक्ति या एक विशेष वर्ग या समुदाय के लोगों के जीवन यापन मूल्यों पर जैसे श्रमिक वर्ग,औद्योगिक या कृषि कर्मियों, निम्न आय या मध्य आय वर्गीय इत्यादि का अध्ययन करने में। भारत में, जीवन यापन मूल्य सूचकांक उपलब्ध है– (i) केंद्रीय सरकार कर्मचारियों, (ii) मध्य आय वर्ग के लोगों और (iii) श्रमिक वर्ग के लिए।

(ii) मध्य आय परिमाण सूचकांक (Quantity Index Numbers)– परिमाण सूचकांक अध्ययन करती है उत्पादित मालों के परिमाण में परिवर्तन, खपत या वितरित, जैसे कृषि उत्पादों का घातांक, औद्योगिक उत्पादन, आयात और निर्यात आदि। यह बहुत सहायक होती है अर्थव्यवस्था के भौतिक उत्पादों के स्तर का अध्ययन करने में।

(iii) मूल्य सूचकांक (Value Index Numbers)– ये उत्पाद का पूर्ण प्रति मूल्य (मूल्य और परिमाण का गुणन) के परिवर्तन का अध्ययन करने के इरादे से जैसे खुदरा बिक्री का लाभ या माल का स्टाक का घातांक यद्यपि, यह घातांक उतने सामान नहीं जितना कीमत और परिमाण घातांक।

8.5 सूचकांक के निर्माण में समस्याएं (Problems in Making Index Numbers)

जैसा पहले ही निर्देशित किया जा चुका है, सूचकांक बहुत मजबूत सांख्यकीय साधन हैं किसी सम्रत के स्तर में परिवर्तन की माप के लिए दो विभिन्न कालावधियों में। इसलिए, इन घातांको के निर्माण और गणना में अत्यधिक सतर्कता उपयोग में लाई जाती है जो अत्यावश्यक है। सूचकांक जो सही ढंग से संगणित नहीं होती सिर्फ गलत और भ्रामक निष्कर्ष की ओर ही अग्रसर नहीं होती है बल्कि खतरनाक भी साबित हो सकती है। सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित बिंदुओं

का ध्यान पूर्वक अध्ययन वांछित है जिन्हें ''प्राथमिक'' कहा जा सकता है सूचकांकों के निर्माण में।

1. सूचकांकों का उद्देश्य (objectives of Index Numbers)– पहला और सर्वप्रथम समस्या सूचकांकों के निर्माण में है स्पष्ट और मूर्त क्रम में परिभाषित करना वस्तुनिष्ठता या उद्देश्य जिसके लिए सूचकांक वांछित है। सूचकांक का उद्देश्य समंक (आंकड़े) की प्रकृति के बारे में निर्णय लेने में सहायता करना। जिसे संग्रहित किया जाना है, सांख्यकीय तकनीक (सूत्र) जिसका प्रयोग होना है, और कुछ दूसरे संबंधित समस्याओं पर निर्धारित प्रभाव भी है, जैसे-वस्तुओं का चुनाव, आधार वर्ष का चुनाव, औसत जिसका प्रयोग होना है और इसी तरह आगे। उदाहरण के लिए, अगर हम जीवन यापन के मूल्यों में परिवर्तन का अध्ययन करना चाहते हैं (i.e., उपभोक्ता., मूल्य सूचकांक) उस वर्ग के लोग जिनके लिए सूचकांक निर्मित होती है viz., कृषि या औद्योगिक कामगार, निम्न आय वर्ग, माध्यम आय वर्ग, इत्यादि स्पष्ट रूप से निरूपित होना चाहिए क्योंकि वस्तुओं का उपयोग प्रतिमान विभिन्न वर्ग के लोगों का काफी भिन्न है। उसी तरह, अगर उद्देश्य है एक देश के मूल्य स्तर में परिवर्तन का सामान्य अध्ययन तब मूल्य सूची प्राप्त किया जाना है ''थोक बाजार से'' और अपेक्ष्या बहुत बड़ी संख्या में वस्तुओं या मदों का समावेश किया जाना है। इसके निर्माण में तुलनात्मक रूप से मदों की संख्या से जो विशेष वर्ग के लोगों के जीवन यापन सूचकांक के लिए किया जाता है। सूचकांक के उद्देश्य के अभाव में अगर स्पष्टतः निर्देशित नहीं है, हम लोग अभिमुख हो सकते हैं कुछ अवांछनीय सूचनाओं को एकत्रित करने के जिसका उपयोग कभी नहीं हो सकता और कुछ ऐसे जरूरी समंक (आंकड़े) यादों को छोड़ सकते हैं जो अंततः भ्रामक निष्कर्षों की ओर अभिमुख कर देगी और संसाधनों की बर्बादी।

2. वस्तुओं या मदों का चुनाव– एक बार जब सूचकांक का उद्देश्य साफ–साफ निर्देशित कर दी जाती है, दूसरी समस्या वस्तुओं या मदों का चुनाव इसके निर्माण में प्रयुक्त होने के लिए। वस्तुओं के चुनाव में निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखना चाहिए–

(i) चुनी गई वस्तुएं सूचकांक के उद्देश्य के लिए संदर्भयुक्त होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, अगर हम चाहते हैं निम्न आय वर्ग (गरीब परिवारों) के लोगों के जीवन यापन पर मूल्यों के परिवर्तन के प्रभाव का अध्ययन करना, तब हमें सिर्फ उन वस्तुओं या मदों का चुनाव करना चाहिए जो सामान्यतः इस आय वर्ग के लोगों द्वारा उपभोग या इस्तेमाल में लाई जाती हैं और उचित सतर्कता रखी जानी चाहिए उन मदों को शामिल नहीं करना चाहिए जो मध्यम आय वर्ग और उच्च आय वर्ग के लोगों द्वारा उपयोग में ली जाती हैं। इस संबंध में उच्च श्रेणी के श्रृंगार प्रसाधन का चुनाव, और विलासिता बाद जैसे स्कूटर, टेलीविजन, रेफ्रिजरेटर इत्यादि कोई प्रासंगिकता नहीं होगी। वस्तुओं को इसलिए प्रतिनिधि होना चाहिए आदतों, पसंद, परंपरा और उपयोग पर उस वर्ग के लोगों का जिनके लिए यह सूचकांक अभीष्ट है।

जैसा पहले ही इंगित किया गया है, सूचकांक एक आवृत्ति का सामान्य स्तर देता है एक विस्तृत वर्ग में। यह व्यावहारिक रूप से असंभव है समूह में सभी मदों का ब्यौरा देना। उदाहरण के लिए, मूल्य सूचकांक के निर्माण में, तकनीकी

टिप्पणी

दृष्टिकोण से हमें सभी मदों या वस्तुओं के मूल्य परिवर्तन का अध्ययन करना चाहिए। यद्यपि, व्यावहारिक दृष्टिकोण से, यह तो संभव है न ही इच्छित कि सभी मदों का ब्यौरा दिया जाए। हम प्रतिदर्श अपनाते हैं और सिर्फ कुछ प्रतिनिधि मदों का चुनाव करते हैं। संपूर्ण विक्रय वस्तु पुंज से। व्यावहारिक समाधान है :

(a) संपूर्ण संदर्भ युक्त मदों का वस्तुओं के समूह को वर्गीकृत करना आपेक्षिक रूप से सजातीय समूहों में जैसे : (i) भोजन (अन्य– चावल, गेहूं, दाल, चना इत्यादि दूध और दूध उत्पादे, फलें, सब्जियाँ, मांस, चिकन और मछली; बेकरी उत्पादें और इसी तरह) (ii) वस्त्र, (iii) ईंधन और प्रकाश (इलेक्ट्रिक उपकरणों के साथ) (iv) घर भाड़ा–(v) विविध (समाविष्ट करते हुए मदों जैसे शिक्षा, मनोरंजन, चिकित्सा खर्च, धोबी, समाचार पत्र) इत्यादि।

(b) प्रत्येक समूह से पर्याप्त संख्या में प्रतिनिधि मदों को चुनकर (इसलिए कि अंतिम प्रतिदर्श स्तरित प्रतिदर्श है ना कि यादृच्छिक प्रतिदर्श)। आगे, प्रत्येक समूह के अंदर उपयोग का अधिक महत्वपूर्ण मद जो विशेष वर्ग द्वारा उपयोग में लाई जाती है पहले, चुनी जाती है और बचे मदों में से बहुत सारे मद चुने जाते हैं जैसा हमारे संसाधन (समय, पैसे और प्रशासन के क्रम में) इजाजत देते हैं। इसलिए, प्रत्येक स्तरीकृत (उप-समूह) के अंदर भी चुना गया प्रतिदर्श यादृच्छिक नहीं है।

(ii) सूचकांक के लिए चुने गए पूर्ण वस्तुओं की संख्या ना तो बहुत बड़ी होनी चाहिए ना ही बहुत छोटी, क्योंकि अगर यह बहुत छोटी है, तब सूचकांक प्रतिनिधि नहीं होगी और अगर यह बहुत बड़ी है, तब संगठन महंगी हो जाएगी समय और पैसे के लिहाज से और जटिल तक हो सकती है। चुने गए मदों की संख्या काफी पर्याप्त होनी चाहिए प्रबंधन और गणना के आसान के साथ।

(iii) उपयुक्त और वैध तुलनाओं तक पहुँचने के क्रम में यह आवश्यक है कि वस्तुओं का चुनाव सूचकांक के निर्माण के लिए एक ही गुण या श्रेणी की हैं विभिन्न अवधियों में, या दूसरे शब्दों में वे तर्कयुक्त लम्बी अवधियों के लिए कमोबेश स्थायी रहती हैं। इसलिए, किसी भी भ्रम को टालने के लिए समय की कमी के कारण वस्तुओं की गुणवत्ता के बारे में, श्रेणीबद्ध या मानक मदों या वस्तुओं का ही चुनाव करना चाहिए जहाँ तक संभव हो।

3. सूचकांक के लिए समंक– सूचकांक के निर्माण के लिए अपरिष्कृत समंक चुनी गई वस्तुओं की कीमतें हैं उनके परिमाण के उपभोग के साथ विभिन्न अवधियों के लिए। ये समंक निश्चित रूप से विश्वसनीय स्रोतों से प्राप्त की जानी चाहिए जैसे प्रमाणिक व्यापारिक जारनल (चैम्बर ऑफ कॉमर्स के प्रकाशन); विख्यात पाक्षिक और समाचार पत्र जैसे– इस्टर्न इकॉनॉमिस्ट, इकॉनामिक्स टाईम्स, द फाइनेन्सियल एक्सप्रेस, इण्डियन जॉरनल ऑफ इकॉनॉमिक्स; इत्यादि; पाक्षिक विशेष रिपोर्ट उत्पादकों और निर्यातकों से आदि या इनकी अनुपस्थिति में विश्वसनीय और अनगिनत फील्ड एजेंसी के द्वारा। समंक संग्रहण का बुनियादी सिद्धान्त viz. परिशुद्धता, उपयुक्तता या तुलनीयता, और पर्याप्तता दिमाग में रखना चाहिए द्वितीयक समंक प्रयुक्त करने में। उदाहरण के लिए, अगर हम एक देश के साधारण मूल्य स्तर में परिवर्तन का अध्ययन करना चाहते हैं, तब मूल्य सूची चुनी

गई वस्तुओं के लिए निश्चित रूप से थोक विक्रय बाजार से लिया जाना चाहिए ना कि खुदरा दुकानों से। चूँकि ना यह संभव है और ना ही वांछित एक वस्तु की मूल्य सूची देश के सभी बाजारों से संग्रहित करना, पर्याप्त मात्रा की प्रतिनिधि बाजारों जो व्यवसाय के लिए अच्छी तरह से जाने जाते हैं उस खास वस्तु के लिए का चुनाव यादृच्छिक कर लिया जाता है। स्थान या बाजार जहाँ से मूल्य सूची प्राप्त करनी है, चुन लिया जाता है, दूसरा काम है उस अधिकारी को बहाल करना, जो मूल्य सूची की पूर्ति समय–समय पर नियमित अंतराल पर करता रहे, चूँकि मूल्य घातांक अधिकतर वार्षिक, मासिक या साप्ताहिक भी प्रगणित किए जाते हैं। यह प्राप्त किया जा सकता है अतिरिक्त कर्मचारी को बहाल करके चुनी गई जगहों पर या किसी निजी एजेंसी को कहकर या स्थानीय फील्ड एजेंसी को कहकर काम करने को। सतर्कता जरूर रखी जानी चाहिए यह देखने के लिए कि एजेंसी अनभिनत हैं। इसके अतिरिक्त, प्रति जाँच की प्रक्रिया अपनाने के लिए एजेंसी द्वारा अपूरित मूल्य सूचियाँ का मिलान, उसी किसी जगह के दूसरे स्वतंत्र एजेंसी द्वारा दिए गए मूल्य सूची से समय–समय पर किया जाना चाहिए।

4. आधार वर्ष का चुनाव– जैसा पहले ही निर्देशित किया गया है आधार वर्ष वह काल है जो समय–समय पर संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तनों की तुलना के लिए चुना जाता है। आधार वर्ष के लिए घातांक हमेशा 100 लिया जाता है। निम्नलिखित बिंदु सूचकांक के उद्देश्यों की अनुकूलता के लिए आधार वर्ष चुनने में नीति–निर्धारण का काम करेगा–

(i) आधार वर्ष एक सामान्य और स्थायी आर्थिक स्थिति वाला काल होना चाहिएः i.e. इसे हर प्रकार की असमान्यता से स्वतंत्र होना चाहिए या अनियमित उतार–चढ़ाव जैसे– भूकंप, युद्धों, बाढ़, अकाल, श्रमिक हड़तालों, तालाबंदी, आर्थिक तेजी और मंदी। उदाहरण के लिए, अगर आधार वर्ष आर्थिक तेजी का काल लिया जाता है ताकि विभिन्न सामानों और वस्तुओं का मूल्य काफी कम है, तब सूचकांक अधिक–वर्णित (Over-Stated) होगा जबकि आधार वर्ष आर्थिक मंदी या अस्थायित्व का काल है, ताकि उपभोक्ता सामानों का मूल्य असामान्य रूप से ऊँचा है, तब सूचकांक कम-वर्णित (Under-Stated) होगा। यद्यपि, दृढ़ सामान्य अवधि का चुनाव आसान काम नहीं है। एक अवधि जो एक वजह से सामान्य है दूसरे वजह से असामान्य हो सकता है। क्रमानुसार, कभी–कभी दो या अधिक वर्षों का औसत आधार वर्ष किया जाता है और औसत मूल्य और वस्तुओं का परिमाण उपभोक्ता इन वर्षों में आधार मूल्य लिए जाते हैं और परिमाण।

(ii) आधार वर्ष को दिए अवधि से बहुत दूर नहीं होना चाहिए– द्रुतगामी और गतिशील घटनाओं की वजह से इन दिनों, यह इच्छित है कि आधार वर्ष को चालू वर्ष से बहुत दूर नहीं होना चाहिए क्योंकि तुलनाएं बैध और सार्थक हैं जब वे किए जाते हैं ऐसी अवधियों के बीच आपेक्षिक रूप से जाने पहचाने परिस्थितियों के समुच्चय के साथ। अगर समय का अंतर बहुत ज्यादा है चालू और आधार वर्षों के बीच तब यह बहुत संभावित है कि लोगों के आस्वादन, रिवाजों, आदतों और फैशन में पर्याप्त परिवर्तन हो जाए जो उपभोग स्वरूप विभिन्न वस्तुओं पर प्रभाव

टिप्पणी

डाले बाजार सीमा तक। यह भी संभव है कि इस लम्बी अवधि में कुछ वस्तुएँ और सामान जो आधार वर्ष में उपभोग की जाती थी वह अप्रचलित या पुराना हो जाए और उसका स्थान नई वस्तु ग्रहण कर ले बेहतर गुणवत्ता का। इन परिस्थितियों में, तुलनाएं बहुत कठिन होंगी करने में। इस बिंदु को ध्यान में रखते हुए आधार वर्ष हाल में इकॉनामिक एडवाइजर का सूचकांक थोक मूल्यों के लिए भारत में 1960–61 से बदलकर 1970–71 हो गई है। उसी तरह से, महँगाई भत्ता (D.A.) के अनुदान के लिए या कामगारों के वेतन वृद्धि में, मूल्य उस अवधि से तुलना की जाय जिसमें पिछला महँगाई भत्ता दिया गया था या घोषित किया गया था।

(iii) **नियत आधार या श्रृंखला आधार ((Fixed Base or Chain Base)–** अगर तुलना की अवधि नियत रखी जाती है सभी चालू वर्षों के लिए, यह नियत–आधार वर्ष कहलाती है। यद्यपि उपर (ii) में उठाई गई बिंदुओं के कारण, कभी–कभी श्रृंखला–आधार रीति प्रयुक्त होती है, जिसमें मूल्यों में परिवर्तन किसी दिए वर्ष के लिए पूर्ववर्ती वर्ष के मूल्यों से तुलना की जाती है। [विस्तार के लिए देखें श्रृंखला–आधार सूचकांक वर्णित है]

5. प्रयुक्त होने वाली औसत का प्रकारः विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन संयुक्त होना है एक अकेले सूचकांक तक पहुँचने के लिए जो वस्तुओं के मूल्य स्तर में औसत परिवर्तन संघटित समूह में प्रतिबिंबित करेगी। यह उनका औसत प्राप्त कर किया जाता है। चूँकि सूचकांक विशेष औसत हैं, प्रयुक्त होने वाला औसत का विवेचनात्मक न्यायसंगत चुनाव उनके निर्माण में बहुत महत्व की है। सामान्यतः प्रयुक्त होने वाले औसत हैं :

(i) समान्तर माध्य (A.M.)

(ii) गुणोत्तर माध्य (G.M.)

(iii) माध्यिका (Median)

माध्यिका इन तीनों में सबसे सरल है परिकलन में परन्तु चूँकि यह पूर्ण रूप से आत्यंतिक अवलोकनों की उपेक्षा करती है और कुछ मध्य पदों से ज्यादा प्रभावित होती है यह शायद ही प्रयुक्त होती है। समान्तर माध्य की भी अनुशंसा सैद्धान्तिक रूप से नहीं की जाती है चूँकि यह बहुत प्रभावित होती है आत्यंतिक अवलोकनों से। यद्यपि, सैद्धान्तिक विचारों से, गुणोत्तर माध्य ही सबसे उपयुक्त औसत है इस स्थिति में क्योंकि–

(i) सूचकांक में हम अनुपातों और आपेक्षिक परिवर्तनों से कार्य करते हैं और गुणोत्तर माध्य समभार देती है परिवर्तन के सम अनुपातों को [अनुपातों का G.M. = G.M.'s का अनुपात]। उदाहरण के लिए, अगर एक वस्तु की कीमत दुगुनी होती है और दूसरे का आधा हो जाता है तब गुणोत्तर माध्य प्रभावित होती है जबकि समान्तर माध्य 25% की वृद्धि दर्शाएगी।

(ii) यह छोटे मदों को अधिक महत्व देती है और बड़े मदों को कम, इसलिए, आत्यंतिकों से गलत ढंग से प्रभावित और अवलोकनों में तीव्र उच्चावचन।

(iii) सूचकांक गुणोत्तर माध्य पर आधारित उत्क्रमणीय हैं।

(देखें समय उत्क्राम्य परीक्षण, Time Reversal Test)

इसलिए सैद्धान्तिक विचारों से, अधिक परिशुद्धता और सूक्ष्मता के लिए, गुणोत्तर माध्य को अधिमान दिया जाता है। यद्यपि, व्यवहार में, इसकी गणन की कठिनाईयों के कारण, गुणोत्तर माध्य उतना प्रयुक्त नहीं होती है जितना समान्तर माध्य/बुनियादी तौर पर, उपयुक्त औसत का प्रभावित चुनाव सूचकांक के निर्माण के लिए समान्तर माध्य और गुणोत्तर माध्य के बीच, जिनमें से प्रत्येक सामान्यतः व्यवहार में प्रयुक्त होती है परन्तु सूचकांक के लिए भिन्न अंक देता है।

6. भारण का तरीका (System of Weighting)— सूचकांक के निर्माण के लिए शामिल वस्तुएँ जैसे— भोजन, कपड़े, घर, प्रकाश और ईंधन इत्यादि बराबर महत्व की नहीं है। सूचकांक प्रतिनिधि के क्रम में औसत परिवर्तनों का संवृत्ति के स्तर पर संघटित समूह के लिए, उचित भार नियत की जाती है विभिन्न वस्तुओं को समूह में उनके आपेक्षिक महत्व के अनुरूप। इसलिए, व्यवहार में, हमें दो प्रकार का सूचकांक हो सकता है—

(i) अभारित सूचकांक (Unweighted Index-Numbers): सूचकांक जो निर्मित होती हैं बगैर नियत भारण के विभिन्न मदों के लिए अभारित सूचकांक कहलाते हैं।

(ii) भारित सूचकांक (Weighted Index Numbers): ये प्राप्त की जाती हैं विभिन्न मदों को भारण नियत करने के बाद समूह में उनके आपेक्षिक महत्व के अनुसार। वास्तव में, अभारित सूचकांकों को भी भारित सूचकांक की तरह ही देखा जाना चाहिए जहाँ प्रत्येक वस्तु का भार इकाई है।

भारण का तरीका और उपयुक्त भारण के निर्धारण का सवाल विभिन्न मदों को प्राथमिक महत्व की है और सूचकांक के निर्माण का एक महत्वपूर्ण पक्ष संघटित करता है। विभिन्न वस्तुओं को भारण किसी ऐसे तरीके से दी जाती है जो उपयुक्त हो उनके आर्थिक महत्व को उद्घाटित करने में। उदाहरण के लिए, उत्पादन आँकड़े, उपभोक्ता आँकड़े या वितरण आँकड़े भारण के तौर पर लिए जा सकते हैं। भारण का सबसे सामान्य ग्रहण करने के तरीके हैं—

(i) परिमाण भारण जिसमें विभिन्न मदों को महत्व उनके प्रयुक्त परिमाण, खरीदे या उपभोग किए के अनुरूप होती है।

(ii) मूल्य भारण जिसमें विभिन्न मदों को भारण उन पर किए गए खर्चे के अनुरूप होती है।

भारण के विभिन्न तरीकों का चुनाव उपभोग किए गए मात्रा के अनुरूप या कुल मूल्य आधार वर्ष में या चालू वर्ष में या कभी-कभी समान्तर या गुणोत्तर गुणन कई सूत्रों को जन्म देती है सूचकांक के निर्माण के लिए, जिसकी चर्चा 8.5 में की गई है और बहुत ज्यादा निर्भर करती है सूचकांक के उद्देश्य और समंक की उपलब्धता पर।

भारण के तरीके को ग्रहण करने के संबंध में सूचकांक के निर्माण के लिए, यह सार्थक होगा ए.एल. बाउले के शब्दों को उद्धृत करना :

टिप्पणी

''उचित भारों की विवेचना जो प्रयुक्त होनी हैं ने सांख्यिकी साहित्य में एक जगह घेर लिया है इसकी सार्थकता के सभी समानुपातों से ऊपर, क्योंकि यह एक बारगी कहा जा सकता है कि कोई अत्यधिक महत्व संयुक्त नहीं है भारों के विशेष चुनाव को एक बहुत ही सुविधाजनक तथ्य है सांख्यिकीय सिद्धान्त का कि; किसी दी गई परिस्थिति में, एक ही परिणाम प्राप्त किए जाते हैं पर्याप्त नजदीकी से कोई भी तर्कयुक्त भारण का तरीका प्रयुक्त करने पर।''

यद्यपि, वह पूर्ण रूप से भारण के विरुद्ध नहीं हैं और उन्होंने लासपियरे और पाशे के अंकगणितीय गुणन के सूत्र का सुझाव दिया 8.5.2 में वर्णित।

7. सूत्रों का चुनाव (Choice of Formula)– प्रयुक्त होने वाली सूत्र का चुनाव निर्भर करती है समंक की उपलब्धता, मूल्यों और परिमाणों से संबंधित चुनी हुई वस्तुओं का आधार और/या चालू वर्ष में। विभिन्न सूत्रों की विवेचना से पहले, हम संकेतन और शब्दावली नीचे देते हैं–

संकेतन और शब्दावली (Notations and Terminology)

आधार वर्ष: वर्ष जिसका चुनाव तुलना के लिए होता है, i.e., वर्ष जिसके सापेक्ष तुलनाएं की जाती हैं। यह अनुलग्न शून्य '0' से द्योतित होती है।

चालू वर्ष (Current Year): वह वर्ष जिसके लिए तुलना अपेक्षित या वांछित है। यह अनुलग्न (Suffix) से द्योतित होती है।

P_o : एक वस्तु का मूल्य आधार वर्ष में

P_l : एक वस्तु का मूल्य चालू वर्ष में

q_o : एक उपभोक्त वस्तु का परिमाण या क्रय किया गया आधार वर्ष के दरम्यान

q_i : एक वस्तु उपभोक्त का परिमाण या क्रय किया गया चालू वर्ष में

w : एक वस्तु को निर्धारित भारण समूह में उसके आपेक्षिक महत्व के अनुरूप

I : सरल सूचकांक या आपेक्षिक मूल्य जो अभिव्यक्त किया जाता है चालू वर्ष मूल्य को प्रतिशत आधार वर्ष मूल्य के और दिया जाता है।

$$\text{I : आपेक्षिक मूल्य} = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \qquad \ldots(8.1)$$

P01 : मूल्य सूचकांक चालू वर्ष के लिए आधार वर्ष के सापेक्ष

P10 : मूल्य सूचकांक आधार वर्ष के लिए चालू वर्ष के सापेक्ष

Q01 : परिमाण सूचकांक चालू वर्ष के लिए आधार वर्ष के सापेक्ष

Q10 : परिमाण सूचकांक आधार वर्ष के लिए चालू वर्ष के सापेक्ष

Voi : उपयोगिता सूचकांक चालू वर्ष के लिए आधार वर्ष के सापेक्ष

टिप्पणी : अधिक सूक्ष्म और सुस्पष्ट होने के लिए हमें :

Po_j : jth वस्तु की कीमत आधार वर्ष में, j = 1, 2-------n, (कहें)

P_j : jth वस्तु की कीमत चालू वर्ष में ; i = 1, 2-----n

उसी तरह, Qoj और Qj परिमाण हैं jth वस्तु का क्रमशः आधार वर्ष और चालू वर्ष में।

Poj : कुल मूल्य है n वस्तुओं का आधार वर्ष में और $\sum_{j=1}^{n} Q_{oj}$ पूर्ण परिमाण है सभी उपभोक्त वस्तुओं का आधार वर्ष में, उसी तरह

$$\Sigma P_{oj} \,.\, Q_{oj} = \sum_{j=1}^{n} Voj$$

कुल उपयोगिता (परिमूल्य) है सभी n वस्तुओं का आधार वर्ष में। यद्यपि संकेतनों की सुविधा के लिए इसे हम लिखेंगे—

$$\sum_{j=1}^{n} P_{oj} = \Sigma P_o \qquad \sum_{j=1}^{n} Q_{oj} = \Sigma_{qo}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{oj}\, Q_{oj} = \Sigma po\ qo\ ; \qquad \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\, Q_{ij} = \Sigma P_1 Q_1$$

और आगे, योग चिन्ह n चुनी गई वस्तुओं तक लिया जाता है।

8.6 सूचकांक विनिर्मित करने की विधियाँ (Methods of Constructing Index Numbers)

अब हम विभिन्न तकनीकों या विधियों की विवेचना करेंगे सूचकांक के विनिर्माण की—

चूँकि मूल्य घातांक सभी घातांकों में सबसे महत्वपूर्ण हैं, हम लोग उनके निर्माण का वर्णन निम्नलिखित खण्ड में, विस्तार से करेंगे। परिमाण घातांक मूल्य घातांक से प्राप्त की जा सकती है मूल्यों (p) को परिमाण (q) से अदल–बदलकर अन्तिम सूत्र में।

8.6.1 सरल (अभारित) सामूहिक विधि (Simple (Unweighted) Aggregate Method)

यह सूचकांकों के निर्माण की सभी विधियों में सबसे सरल है और सहवर्ती है कुल मूल्य को अभिव्यक्त करने में, i.e., मूल्यों का समूहन (सभी चुनी वस्तुओं का) चालू वर्ष में आधार वर्ष के मूल्यों के समूहन का प्रतिशत रूप में। इसलिए, चालू वर्ष के लिए मूल्य घातांक आधार वर्ष के सापेक्ष दी जाती है—

$$P_{01} = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \times 100 \qquad \ldots(8.2)$$

जहाँ ΣP_1 मूल्यों का समूहन है (सभी चुनी वस्तुओं का) चालू वर्ष में और ΣP_0 मूल्यों का समूहन है आधार वर्ष में।

टिप्पणी

यह विधि, यद्यपि सरल, विश्वसनीय नहीं है और निम्नलिखित सीमाएं हैं– (i) विभिन्न वस्तुओं का मूल्य भिन्न ईकाईयों में सूचीबद्ध की जा सकती हैं, i.g., अनाज को रुपये प्रति क्विंटल या किग्रा. में सूचीबद्ध की जा सकती है, द्रव पदार्थ जैसे– दूध, पेट्रोल, केरोसीन तेल सूचीबद्ध की जा सकती है रुपये प्रति लीटर में, कपड़े रु. प्रति मीटर और इसी तरह। इसलिए, घातांक बहुत ज्यादा ईकाईयों से प्रभावित होती है जिसमें वस्तुऐं सूचीबद्ध होती हैं और क्रमानुसार कुछ वस्तुऐं अधिक महत्व पा सकती हैं क्योंकि वे एक खास ईकाई में सूचीबद्ध की जाती हैं। उदाहरण के लिए, अगर गेहूँ का मूल्य रु. प्रति किग्रा. सूचीबद्ध है, सूचकांक बिल्कुल भिन्न होगी इसकी अपेक्षा कि अगर यह रु. प्रति क्विंटल में, बाद का निरूपन इसके महत्व को बहुत अच्छी तरह बल देती है। इस सूचकांक का गलत उपयोग होने की संभावना है चूँकि बेईमान और स्वार्थी लोग इसके प्रतिमूल्य को अपनी आवश्यकता के अनुकूल जोड़–तोड़ कर सकता है कुछ मदों का माप की इकाई को बदलकर 100 ग्राम से किग्रा. में; किग्रा. से क्विंटल में और आगे।

(ii) इस विधि में विभिन्न वस्तुओं का भारण उनके मूल्यों के परिमाण के अनुसार की जाती है और क्रमानुसार वस्तुएं जो बहुत अधिक मूल्य की हैं सूचकांक के प्रतिमूल्य पर बहुत अधिक प्रभाव डालती है कम–मूल्य की जो वस्तुएं हैं उसकी अपेक्षा। इसलिए, यह सूचकांक बड़े अंक सूची को वस्तुओं से हावी रहता है।

(iii) विभिन्न वस्तुओं का आपेक्षिक महत्व ध्यान में नहीं किया जाता है।

टिप्पणी:–इस विधि पर आधारित, परिमाण सूचकांक सूत्र से दिया जाता है :

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.3)$$

जहाँ Σq_0 और Σq_1 परिमाण है सभी चुनी गई उपभोक्त का क्रमशः आधार वर्ष और चालू वर्ष में।

उदाहरण 8.1 निम्नलिखित समंक से सूचकांक परिकलित करें सरल समूहन विधि द्वारा

वस्तु :	A	B	C	D
1980 में मूल्य (रुपये) :	162	256	257	132
1981 में मूल्य (रुपये) :	171	164	189	145

टिप्पणी

हल :

मूल्य सूचकांक सरल समूहन विधि का प्रयोग कर दी जाती है :

$$Poi- \;=\; \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$$

$$= \frac{669}{807} \times 100$$

$$= 82.90$$

वस्तु	मूल्य (रु. में)	
	1980(P_0)	1981(P_1)
A	162	171
B	256	164
C	257	189
D	132	145
कुल	ΣP_0=807	ΣP_1=669

8.6.2 भारित समूहन विधि (Weighted Aggregate Method)

इस विधि में, उचित भार नियत की जाती है विभिन्न वस्तुओं का आपेक्षिक महत्व समूह में प्रतिबिंबित करने में। भारण उत्पाद आँकड़े, उपभोक्ता आँकड़े या वितरण आँकड़े हो सकती हैं। मूल्य सूचकांक के निर्माण में, परिमाण भारणों का प्रयोग होता है i.e., उपभोक्त परिमाण की मात्रा, खरीदी गई या बेची गई। अगर w भारण किसी वस्तु से संयुक्त है, तब मूल्य सूचकांक दी जाती है,

$$P_{01} = \frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0} \times 100 \qquad \ldots(8.4)$$

विभिन्न भारणों की विधि प्रयुक्त कर हम कई सूत्र निकालते हैं। कुछ महत्वपूर्ण सूत्र नीचे दिए जाते हैं :

(Las Peyre's Price Index or Base Year Method)

लासपियरे का मूल्य घातांक या आधार वर्ष विधिः आधार वर्ष के परिमाणों को भारण लेते हुए, i.e. $w = q_o$ (8.4 में), हम लासपियरे का मूल्य सूचकांक पाते हैं :

$$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.5)$$

यह सूत्र 1817 में फ्रेंच अर्थशास्त्री द्वारा निर्मित किया गया था।

पाशे का मूल्य सूचकांक (Paasche's Price Index): अगर हम चालू वर्ष परिमाणों को भारण लें (8.4 में); हम पाशे का मूल्य सूचकांक पाते हैं, जो दिया जाता है।

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1} \times 100 \qquad \ldots(8.6)$$

यह सूत्र जरमन सांख्यिकीविद पाशे द्वारा 1874 में दिया गया था।

डॉरबिश-बॉउले मूल्य सूचकांक (Dorbish-Bowley Price Index): यह सूचकांक दी जाती है लासपियरे और पाशे के मूल्य सूचकांकों के समान्तर माध्य से और हमें :

$$P_{01}^{DB} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma P_1 q_0}{\Sigma P_0 q_0} + \frac{\Sigma P_1 q_1}{\Sigma P_0 q_1}\right] \times 100 \qquad \ldots(8.7)$$

टिप्पणी

यह कभी–कभी L-P सूत्र से भी जाना जाता है।

फिशर का मूल्य सूचकांक (Fisher's Price Index): इरविंश फिशर ने वकालत की लासपियरे और पाशे के मूल्य सूचकांकों का गुणोत्तर गुणन की और दी जाती है ;

$$P_{01}^{F} = *[P_{01} * P_{01}\, P_a]^{1/2} = \left[\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}\right]^{1/2} \times 100 \qquad \ldots(8.8)$$

फिशर का सूचकांक, आदर्श सूचकांक कहा जाता है चूँकि यह समय उत्क्रमणीय और अवयव उत्क्रमणीय परीक्षणों को संतुष्ट करता है सूचकांकों के संगतता के लिए [विस्तार के लिए देखें 8.6]

मार्शल–एजवर्थ मूल्य सूचकांक (Marshall-Edgworth Price Index)– आधार वर्ष के परिमाणों का समान्तर क्रास लेकर और चालू वर्ष को भारण i.e. w =$(q_0 + q_1)/2$, हम मार्शल–एजवर्थ सूत्र (M.E.) प्राप्त करते हैं–

$$P_{01}^{ME} = \frac{\Sigma P_1 (q_0 + q_1)/2}{\Sigma P_0 (q_0 + q_1)/2} \times 100 = \frac{\Sigma P_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma P_0 (q_0 + q_1)} \times 100 \qquad \ldots(8.9)$$

$$= \left[\frac{\Sigma P_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma P_0 (q_0 + q_1)}\right] \times 100 \qquad \ldots(8.9a)$$

वाल्श मूल्य सूचकांक (Walseh Price Index)– आधार वर्ष और चालू वर्ष परिमाणों के समान्तर माध्य लेने के बदले, यदि हम उनका गुणोत्तर माध्य लें, i.e. $w = \sqrt{q_0 . q_1}$ तब हम वॉल्श का सूचकांक प्राप्त करते हैं जो दिया जाता है सूत्र द्वारा–

$$P_{01}^{wa} = \frac{\Sigma P_1 \sqrt{q_0 \times q_1}}{\Sigma P_0 \sqrt{q_0 \times q_1}} \times 100 \qquad \ldots(8.10)$$

केली का सूचकांक या नियत भारण सूचकांक (Kelly's Price Index or Fixed Weight Index)– यह सूत्र, जिसका नाम टूमैन एल. केली के नाम पर है, से वांछित है सभी कालों में भारों को नियत रहने का कभी–कभी सामूहिक सूचकांक नियत भारों के साथ कही जाती है और दी जाती है सूत्र–

$$P_{01}^{k} = \frac{\Sigma P_1 Q}{\Sigma P_0 Q} \times 100 \qquad \ldots(8.11)$$

जहाँ भारण परिमाण (q) हैं जो किसी अवधि के संदर्भ में हैं (जरूरी नहीं कि वे आधार वर्ष या चालू वर्ष हों) और नियत रखे जाते हैं सभी अवधियों में। परिमाणों

जो दो, या अधिक वर्षों में हैं को भार जैसा प्रयुक्त कर। का औसत (A.M. या G.M.) जो दो, तीन या अधिक वर्षों में उपभोक्त हैं को भार जैसा प्रयुक्त करते हैं।

केली के नियत आधार घातांक को स्पष्ट लाभ प्राप्त है लासपियरे के घातांक पर क्योंकि लासपियरे के घातांक के विपरीत आधार वर्ष में परिवर्तन के साथ जरूरत नहीं कि भारों में संगत परिवर्तन हो क्योंकि इसे नियत रखा जा सकता है जब तक नया समंक उपलब्ध न हो जाए घातांक को संशोधित करने के लिए। ऐसा होने की वजह से, अभी यह सूचकांक काफी अनुग्रह पा रहा है और बहुत लोकप्रिय हो रहा है। यू.एस.ए. में लेबर ब्यूरो थोक मूल्य सूचकांक इस विधि पर आधारित है।

टिप्पणियाँ– इस सभी उपर्युक्त सूत्रों में, योग चिन्ह ली जाती है चुने गए विभिन्न वस्तुओं के ऊपर सूचकांक के निर्माण के लिए।

लासपियरे के सूचकांक Vs. पाशे का सूचकांक– लासपियरे का मूल्य सूचकांक इस अभिकल्पना पर आधारित है कि उपभोक्ता परिमाण आधार वर्ष में और चालू वर्ष में एक है, एक परिकल्पना जो सामान्य में यथार्थ नहीं है। अगर कुछ वस्तुओं या मदों का उपभोग चालू वर्ष में घट जाता है उनके मूल्य में वृद्धि की वजह से या आदतों में परिवर्तन की वजह से, आश्वादन और लोगों के रिवाज, तब लासपियरे का सूचकांक जो आधार वर्ष परिमाणों को भार लेने पर आधारित है इन वस्तुओं (जिनका मूल्य तेजी से चढ़ता है) के लिए अपेक्षया अधिक भारण देती है और क्रमानुसार (8.5) में अंश अपेक्षया बड़ा है। लासपियरे के सूचकांक से अपेक्षित है 'ऊपर की ओर अभिनति' (Upward Bias) चूँकि यह यथार्थ मूल्य को अधिक प्राक्कलित करती है। उसी तरह से, अगर किसी वस्तु का उपभोग चालू वर्ष में बढ़ता है उनके कीमत में कमी की वजह से (या लोगों के आस्वासन, आदतों या रिवाजों में परिवर्तन की वजह से), तब पाशे का सूचकांक जो चालू वर्ष के परिमाणों को भार के तौर पर लेता है ऐसी वस्तुओं को अधिक भारण देता है (जिनकी कीमतें अधिक गिरती हैं)। क्रमानुसार, पाशे के सूचकांक को नीचे की ओर अभिनति (Downward Bias) है और अपेक्षित है कि यथार्थ मूल्य का कम–प्राक्कलन करना। यद्यपि, यह निष्कर्ष नहीं निकाला जाना चाहिए कि लासपियरे का सूचकांक हमेशा पाशे के सूचकांक से बड़ी होगी। परिस्थिति जिसमें लासपियरे का सूचकांक बड़ा, बराबर या कम है पाशे के सूचकांक से उदाहरण 8.11 में प्राप्त किया गया है। इस संदर्भ में यह सार्थक होगा उद्धृत करना करमाल के निम्न शब्द–

''अगर सभी सामानों के मूल्य में परिवर्तन समान अनुपात में हो तब लासपियरे और पाशे के सूचकांक बराबर होंगे, तब भारण पद्धति निरर्थक होगी, या अगर सभी सामानों के परिमाणों में परिवर्तन समान अनुपात में हो, वे बराबर होंगे तब दोनों भारण पद्धतियाँ आपेक्षिक रूप से बराबर है।''

प्रमाण के लिए उदाहरण 8.10 देखें।

साधारणतः, मूल्य सूचकांक का यथार्थ मूल्य इन दोनों के बीच कहीं पड़ता है।

चूँकि भार प्रत्येक वर्ष के लिए परिवर्तित होते हैं, पाशे का मूल्य सूचकांक को गणन कार्य की अधिक आवश्यकता पड़ती है तुलनात्मक रूप से लासपियरे के मूल्य सूचकांक से।

टिप्पणी

मार्शल-एजवर्थ और फिशर का सूचकांक– ये सूत्र एक प्रकार का समझौता है लासपियरे के मूल्य सूचकांक (जिसे ऊपर की ओर अभिनति है) और पाशे का मूल्य सूचकांक (जिसे नीचे की ओर अभिनति है) और किसी ज्ञात दिशा में कोई अभिनति नहीं है। ये यथार्थ मूल्य सूचकांक का बेहतर प्राक्कलन देती है। यद्यपि, चूँकि इन दोनों सूत्रों को आधार वर्ष और चालू वर्ष मूल्यों और परिमाणों की आवश्यकता है अपनी गणनाओं के लिए, अपेक्षया लासपियरे या पाशे के मूल्य सूचकांक के। इसके अतिरिक्त, यद्यपि फिशर के सूचकांक को एक आदर्श सूचकांक कहते हैं चूँकि यह सूचकांकों के संगतता का समय उत्क्रमणीय और अवयव उत्क्रमणीय परीक्षण को संतुष्ट करती है (बाद में वर्णित), यह व्यवहार में बिरले ही प्रयुक्त होती है इसके गणनाओं में कठिनाई की वजह से और सांख्यिकीविद श्रेयस्कर समझते हैं विश्वास करने में सरल, यद्यपि कम परिशुद्ध, लासपियरे और पाशे के सूचकांकों पर। यह चिन्हित किया जा सकता है कि दोनों फिशर का सूचकांक और मार्शल–इजवर्थ का सूचकांक लासपियरे और पाशे के घातांकों के बीच पड़ता है।

परिमाण घातांक (Quantity Indices)– जैसा कि पहले ही वर्णित है, परिमाण सूचकांक उत्पादित मालों की मात्रा या परिमाण में आपेक्षिक परिवर्तन को प्रतिबिंबित करती है, उपभोक्ता, बिक्री किया गया या वितरित किसी दिए वर्ष में किसी आधार वर्ष के सापेक्ष। परिमाण घातांक के लिए सूत्र (8.4) से (8.11) तक प्राप्त किया जाता है मूल्यों (p) और परिमाणों (q) को अदला–बदला करके। इसलिए, उदाहरण के लिए–

$$Q_{01}^{La} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.12)$$

$$Q_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.13)$$

$$Q_{01}^{F} = \left[Q_{01}^{La} \times Q_{01}^{Pa}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}} \times 100 \qquad \ldots(8.14)$$

$$Q_{01}^{ME} = \frac{\Sigma q_1 (p_0 + p_1)}{\Sigma q_0 (p_0 + p_1)} \times 100 = \frac{\Sigma q_1 p_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma q_0 p_0 + \Sigma q_0 p_1} \times 100 \qquad \ldots(8.15)$$

प्रतिमूल्य घातांक (Value Indices)– प्रतिमूल्य सूचकांक प्राप्त किए जाते हैं कुल मूल्य (या खर्च) को अभिव्यक्त कर किसी दिए वर्ष में उसी का आधार वर्ष के प्रतिशत के रूप में संकेताक्षरों में, हम लिखते हैं–

$$\text{Vo} = \frac{\text{चालू वर्ष में कुल प्रतिमूल्य}}{\text{आधार वर्ष में कुल प्रतिमूल्य}} \times 100 \Rightarrow \text{Vo} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.16)$$

अब हम कुछ संख्यात्मक दृष्टांतों की विवेचना करेंगे उपर्युक्त सूत्र पर आधारित।

उदाहरण 8.2 निम्नलिखित समंक से मूल्य सूचकांक परिकलित करें 1980 के लिए 1970 को आधार वर्ष के साथ (i) लासपियरे विधि, (ii) पाशे की विधि (iii) मार्शल–इजवर्थ विधि, और (iv) फिशर की आदर्श विधि।

वस्तुएँ	1970		1980	
	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण
A	20	8	40	6
B	50	10	60	5
C	40	15	50	15
D	20	20	20	25

(b) यह वर्णित किया जाता है कि मार्शल–इजवर्थ सूचकांक फिशर के आदर्श सूचकांक का अच्छा सन्निकटन है। इसका सत्यापन अंश (a) के समंक के लिए करें।

हल : (a) मूल्य सूचकांकों के लिए परिकलन विभिन्न सूत्रों द्वारा

	1970		1980					
वस्तुएँ	p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
A	20	8	40	6	160	120	320	240
B	50	10	60	5	500	250	600	300
C	40	15	50	15	600	600	750	750
D	20	20	20	25	400	500	400	500
					$\Sigma p_0q_0=1660$	$\Sigma p_0q_1=1470$	$\Sigma p_1q_0=2070$	$\Sigma p_1q_1=1790$

(i) लासपियरे का मूल्य सूचकांक

$$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{2070}{1660} \times 100 = 1.24699 \times 100 = 124.699$$

(ii) पाशे मूल्य सूचकांक

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{1790}{1470} \times 100 = 1.2177 \times 100 = 121.77$$

(iii) मार्शल इजवर्थ मूल्य सूचकांक

$$P_{01}^{ME} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{2070}{1660} \times \frac{1790}{1470}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.24699 \times 1.2177} \times 100 = \sqrt{1.51846} \times 100 = 1.23226 \times 100 = 123.23$$

Aliter : $P_0^F = \sqrt{P_{01}^{La} \times P_{01}^{Pa}} = \sqrt{124.699 \times 121.77} = \sqrt{15184.597} = 123.23$

टिप्पणी

(b) चूँकि $P_{01}^{ME} = 123.32$ और $P_{01}^{F} = 123.23$ करीब–करीब बराबर हैं, मार्शल एजवर्थ सूचकांक फिशर के आदर्श सूचकांक का अच्छा सन्निकटन है।

उदाहरण 8.3: नीचे दिए गए समंक से चार वस्तुओं के समूह का एक सूचकांक निर्मित करें फिशर के आदर्श सूत्र का प्रयोग कर :

	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
वस्तुएं	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

हल : इस प्रश्न में हमें खर्च (e) और मूल्य (p) प्रति इकाई दी गई है विभिन्न वस्तुओं के लिए। हमें

$$\text{खर्च} = \text{मूल्य x परिमाण} \Rightarrow \text{परिमाण} = \text{खर्च}/\text{मूल्य} \Rightarrow q = \frac{e}{p} \quad \text{-------(*)}$$

(*) का प्रयोग कर हम सबसे पहले उपभोक्ता परिमाण प्राप्त करेंगे आधार वर्ष के लिए और चालू वर्ष के लिए जैसा निम्नलिखित तालिका में दिया गया है

फिशर के आदर्श मूल्य सूचकांक का प्रगणन

वस्तुएं	p_0	p_0q_0	q_0	p_1	p_1q_1	q_1	p_1q_0	p_0q_1
A	2	40	20	5	75	15	100	30
B	4	16	4	8	40	5	32	20
C	1	10	10	2	24	12	20	12
D	5	25	5	10	60	6	50	30
		$\Sigma p_0q_0=91$			$\Sigma p_1q_1=199$		$\Sigma p_1q_0=202$	$\Sigma p_0q_1=92$

इसलिए, फिशर का आदर्श मूल्य सूचकांक दिया जाता है :

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{202 \times 199}{91 \times 92}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{40198}{8372}} \times 100 = \sqrt{4.8015} \times 100 = 2.1912 \times 100 = 219.12$$

उदाहरण 8.4: मूल्य सूचकांक और परिमाण सूचकांक की गणना करें वर्ष 2000 और 1995 आधार वर्ष के लिए, प्रयोग करके।

टिप्पणी

वस्तुएँ	परिमाण (इकाईयाँ)		परिमूल्य (रु0)	
	1995	2000	1995	2000
A	100	150	500	900
B	80	100	320	500
C	60	72	150	360
D	30	33	360	297

(i) लासपियरे की विधि

(ii) पाशे की विधि

(iii) फिशर का मूल्य और परिमाण सूचकांक की भी गणना करें।

हल : हमें वस्तुओं का परिमाण और परिमूल्य आधार वर्ष में दिया गया है और चालू वर्ष में। हम जानते हैं

$$\text{परिमूल्य} = \text{मूल्य x परिमाण} \Rightarrow \text{मूल्य} = \frac{\text{परिमूल्य}}{\text{परिमाण}} - - - (*)$$

(*) का प्रयोग कर हम उपभोक्ता वस्तु प्राप्त कर सकते हैं आधार वर्ष में और चालू वर्ष में।

सारणी क्र. 8.1: लाशपियरे, पाशे और फिशर के सूचकांकों के लिए परिकलन

q_0 (1)	q_1 (2)	p_0q_0 (3)	p_0 (4)=(3)÷(1)	p_1q_1 (5)	p_1 (6)=(5)÷(2)	p_1q_0	p_0q_1
10 0 80 60 30	15 0 10 0 72 33	500 320 150 360	5 4 2.5 12	900 500 360 297	6 5 5 9	600 400 300 270	750 400 180 396
		Σp_0q_0 =1330		Σp_1q_1 =2057		Σp_1q_0 =1570	Σp_0q_1 =1726

(i) लासपियरे का मूल्य और परिमाण घातांक

$$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{1570}{1330} \times 100$$
$$= 118.045$$

$$Q_{01}^{La} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100 = \frac{1726}{1330} \times 100 = 129.744$$

(ii) पाशे को मूल्य और परिमाण घातांक

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{2057}{1726} \times 100$$
$$= 119.177$$

$$Q_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100 = \frac{2057}{1570} \times 100 = 131.019$$

टिप्पणी

(b) फिशर का मूल्य और परिमाण घातांक

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{La} \times P_{01}^{Pa}} = \sqrt{118.045 \times 119.177} = \sqrt{14068.248} = 118.610$$

$$Q_{01}^{F} = \sqrt{Q_{01}^{La} \times Q_{01}^{Pa}} = \sqrt{129.774 \times 131.019} = \sqrt{17002.859} = 130.395$$

उदाहरण 8.5: फिशर के सूत्र से नीचे दिए गए समंक से परिमाण सूचकांक की गणना करें :

वस्तुएँ	1994		1996	
	मूल्य (रु.)	कुल मूल्य (रु.)	मूल्य (रु.)	कुल मूल्य (रु.)
A	5	50	4	48
B	8	48	7	49
C	6	18	5	20

हलः यहाँ हमें कुल प्रतिमूल्य (v) चालू और आधार वर्ष के लिए दिया गया है।

कुल प्रतिमूल्य = मूल्य x परिमाण $\Rightarrow v = Pxq \Rightarrow q = v/p ---(*)$

इसलिए, आधार और चालू वर्ष के लिए उपभोक्ता सामग्री प्राप्त की जाती है कुल प्रतिमूल्य को संगत मूल्य से भाग देकर

वस्तुएँ	p_0	$v_0=p_0q_0$	q_0	p_1	$v_1=p_1q_1$	q_1	p_0q_1	p_1q_0
A	5	50	10	4	48	12	60	40
B	8	48	6	7	49	7	56	42
C	6	18	3	3	20	4	24	15
		$\Sigma p_0q_0=116$			$\Sigma p_1q_1=117$		$\Sigma p_0q_1=140$	$\Sigma p_1q_0=97$

फिशर का परिमाण सूचकांक 1996 के लिए आधार वर्ष 1994 के साथ सूत्र द्वारा दिया जाता है :

$$Q_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_1 q_0}} \times 100 = \sqrt{\frac{140 \times 117}{116 \times 97}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{16380}{11252}} \times 100 = \sqrt{1.4557} \times 100 = 1.2065 \times 100 = 120.65$$

उदाहरण 8.6: समंक जो संलग्न तालिका में दी गई है जहाँ p और q क्रमशः मूल्य और परिमाण के प्रतीक हैं और पादांक (Subscript) प्रतीक हैं समय अवधि का, x ज्ञात करें, यदि लासपियरे (L) और पाशे (P) के बीच सूचकांक का अनुपात है

	वस्तुएं	
	A	B
p_0	1	1
q_0	10	5
p_1	2	x
q_1	5	2

L : P : : 28:27

हल :

वस्तुएं	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_0q_1	P_1q_0	P_1q_1
A	1	10	2	5	10	5	20	10
B	1	5	x	2	5	2	5x	2x
					ΣP_0q_0 =15	ΣP_0q_1=7	ΣP_1q_0 =20+5x	ΣP_1q_1 =10+2x

हमें दिया गया है $\dfrac{P_{01}^{La}}{P_{01}^{Pa}} = \dfrac{28}{27}$ …(*)

$$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \left(\frac{20+5x}{15}\right) \times 100 = \left(\frac{4+x}{3}\right) \times 100$$

$$= P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \left(\frac{10+2x}{7}\right) \times 100$$

(*) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$\frac{\left(\dfrac{4+x}{3}\right)}{\left(\dfrac{10+2x}{7}\right)} = \frac{28}{27} \quad \Rightarrow \quad \frac{7(4+x)}{3(10+2x)} = \frac{28}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{4+x}{10+2x} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad 9(4+x) = 4(10+2x)$$

$$\Rightarrow 36+9x = 40+8x \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

उदाहरण 8.7: निम्नलिखित समंक से भारित सूचकांक परिकलित करें–

वांछित माल	**इकाई**	**परिमाण वांछित**	**मूल्य (रु.)**	
			1963	**1973**
सीमेंट	100 पौंड		5.00	8.00
लकड़ी	सी.फुट		9.50	14.20
स्टील शीट	सी.डब्लू.सी.		34.00	42.20
ईंट	प्रति' 000		12.00	24.00

टिप्पणी

हल : चूँकि परिमाण (भार) विभिन्न मालों का वांछित नियत हैं दोनों आधार और चालू वर्षों के लिए, हम लोग केली के मूल्य सूचकांक सूत्र का प्रयोग करेंगे।

आगे, सीमेंट इकाई 100 इकाई है और वांछित 500 पौंड है। इसलिए, लगने वाला सीमेंट प्रति इकाई सीमेंट के लिए है 500 ⁄ 100 = 5। उसी तरह से, लगने वाला परिमाण प्रति इकाई ईंट के लिए है 20,000 ⁄ 1000 = 20

सारणी क्र. 8.2: केली के सूचकांक की गणनाएं

वांछित माल	इकाई	वांछित परिमाण	q	कीमत (रु.)			
				P_0	P_1	qP_0	qP_1
सीमेंट	100 पौंड	500 पौंड	5	50	8.00	25	40
लकड़ी	सी.फुट	2000 सी.फुट	2000	9.50	14.20	19,000	28,400
स्टील शीट	सी.डब्लू.टी.	50 सी. डब्लू. टी.	50	34.00	42.00	1,700	2,100
ईंट	प्रति' 000	20,000	20	12.00	24.00	240	480
ΣqP_0=20,965 ΣqP_1=31020							

केली का मूल्य सूचकांक दिया जाता है :

$$P_{01}^{k} = \frac{\Sigma_q P_1}{\Sigma_q P_0} \times 100 = \frac{31020}{20965} \times 100 = 147.96$$

8.6.3 मूल्यानुपात का सरल औसत (Simple Average of Price Relatives)

इस विधि में, सबसे पहले हम प्रत्येक वस्तु के लिए मूल्यानुपात (Price Relatives) प्राप्त करते हैं। मूल्यानुपात प्राप्त किए जाते हैं वस्तु का मूल्य चालू वर्ष में इसके प्रतिशत के रूप में आधार वर्ष में अभिव्यक्त कर, i.e.,

$$P = \text{एक वस्तु के लिए मूल्यानुपात} = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \qquad \ldots(8.17)$$

मूल्यानुपात प्रत्येक वस्तु के लिए सूचकांकों का सबसे सरल रूप है। समूहन समूह के लिए मूल्य सूचकांक प्राप्त की जाती है इन मूल्यानुपातों का औसत निकालकर कोई उपयुक्त केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप प्रयुक्त कर, सामान्यतया समान्तर माध्य (A.M.) या गुणोत्तर माध्य (G.M.) मूल्य सूचकांक साधारण समान्तर माध्य का प्रयोग कर दी जाती है :

$$P_0(A.M.) = \frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) = \frac{1}{n}\Sigma P \qquad \ldots(8.18)$$

जहाँ n समूह में वस्तुओं की संख्या है।

टिप्पणी

मूल्यानुपातों का गुणोत्तर माध्य प्रयोग करने पर, सूचकांक दी जाती है :

$$P_{01}^{(G.M.)} = \left[II\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)\right]^{1/n} = [\pi P]1/n \qquad \ldots(8.19)$$

जहाँ II द्योतित करती है मूल्यानुपातों का n वस्तुओं से गुणनफल। (8.19) का परिगणन करने के लिए हम लघुगुणकों का प्रयोग करते हैं। दोनों तरफ (8.19) में log लेने पर, हम पाते हैं :

$$\log_{01}^{G.M.)} = \frac{1}{n}\sum \log\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right) = \frac{1}{n}\sum \log P$$

$$\Rightarrow P_{01}^{G.M.)} = Anti\log\left(\frac{1}{n}\sum \log P\right) \qquad \ldots(8.19a)$$

गुण और अवगुणः—सूचकांक मूल्यानुपातों के सरल अनुपात पर आधारित सरल समूहन विधि की कुछ कमियों को दूर कर देती है, viz.

(i) मूल्य—समानुपात विशुद्ध अंक हैं माप की इकाईयों से स्वतंत्र और इसलिए उनके औसत पर आधारित सूचकांक उन इकाईयों से प्रभावित नहीं होती है जिसमें मूल्य सूचीबद्ध की गई है।

(ii) आत्यंतिक अवलोकन (बड़ी और छोटी मूल्य सूचियाँ) सूचकांक को गलत तरीके से प्रभावित नहीं करती है। यह सभी अवलोकनों को बराबर महत्व देती है।

इस विधि की कमी है कि यह सभी वस्तुओं को बराबर भारण देती है इसलिए समूह में उनके आपेक्षिक महत्व को नकार देती है। यह कमी दूर कर दी जाती है मूल्यानुपातों के भारित औसत लेकर जैसी चर्चा 10.5.4 पृष्ठ) में की गई है।

दूसरी सीमितता इस विधि की है औसत का चुनाव जिसे प्रयुक्त किया जाना है। जैसा पहले ही चर्चा की जा चुकी है, G.M. यद्यपि गणन में कठिन होता है, परन्तु सैद्धान्तिक रूप से A.M. से बेहतर माध्य है। जबकि, गणन की सुविधा की वजह से, व्यवहार में A.M. प्रयुक्त होती है। कुछ अर्थशास्त्री, जैसे एफ.वाई. इजवर्थ ने हरात्मक माध्य के प्रयोग की वकालत की मूल्यानुपातों के औसतन के लिए परन्तु इसने दूसरे लोगों का साथ नहीं पाया और इसलिए शायद ही प्रयुक्त होती है।

उदाहरण 8.8: प्रत्येक वर्ष के लिए सूचकांक निर्मित करें निम्नलिखित रूई के वार्षिक थोक मूल्यों से 1993 आधार वर्ष के साथ :

वर्ष	थोक मूल्य (रुपये)	वर्ष	थोक मूल्य (रु.)
1993	75	1998	70
1994	50	1999	69
1995	65	2000	75
1996	60	2001	84
1997	72	2002	80

टिप्पणी

हल : प्रत्येक वर्ष के लिए सूचकांक प्राप्त किए जाते हैं चालू वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष 1993 की कीमतों के प्रतिशत में अभिव्यक्त कर–

वर्ष	**थोक मूल्य (रु.)**	**सूचकांक (आधार : 1993 = 100)**
1993	75	100
1994	50	$\frac{70}{75}\times 100 = 93.33$
1995	65	$\frac{65}{75}\times 100 = 86.67$
1996	60	$\frac{60}{75}\times 100 = 80.00$
1997	72	$\frac{72}{75}\times 100 = 96.00$
1998	70	$\frac{70}{75}\times 100 = 93.33$
1999	69	$\frac{69}{75}\times 100 = 92.00$
2000	75	$\frac{70}{75}\times 100 = 100.00$
2001	84	$\frac{84}{75}\times 100 = 112.00$
2002	80	$\frac{80}{75}\times 100 = 106.67$

उदाहरण 8.9: निम्नलिखित मूल्य हैं (रुपये में) वस्तुओं के 1995 और 2000 में। एक मूल्य सूचकांक मूल्यानुपातों पर आधारित परिकलित करें समान्तर माध्य साथ ही गुणोत्तर माध्य का भी प्रयोग कर।

वर्ष			**वस्तुएँ**			
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1995	45	60	20	50	85	120
2000	55	70	30	75	90	130

टिप्पणी

हल :

वस्तु	मूल्य		मूल्यानुपात	
	1995 में (p_0)	**2000 में (p_1)**	$P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	log P
A	45	55	122.22	2.0871
B	60	70	116.67	2.0667
C	20	30	150.00	2.1761
D	50	75	150.00	2.1761
E	85	90	105.88	2.0246
F	120	130	108.33	2.0347
			ΣP = 753.1	Σlog P = 12.5653

समान्तर माध्य पर आधारित सूचकांक है :

$$P_{01}^{(A.M.)} = \frac{1}{n}\ \Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \times\ 100 = \frac{1}{n}\ \Sigma P = \frac{753.1}{6} = 125.517$$

गुणोत्तर माध्य पर आधारित सूचकांक दिया जाता है :

$$\log P_{01}\ (G.M.) = \frac{1}{n}\ \Sigma\ \log P\ = \frac{1}{6} \times 12.5653\ =\ 2.0942$$
$$\Rightarrow\ P_{01}\ (G.M.)\ =\ Anti\log\ (2.0942) = 124.3$$

उदाहरण 8.10: 1995 और 1996 के लिए 1990 को आधार वर्ष लेते हुए निम्नलिखित समंक से मूल्य सूचकांक परिकलित करें :

वस्तु	मूल्य (रु. प्रति इकाई)		
	1990	**1995**	**1996**
A	5	6	4
B	7	10	7
C	8	12	6
D	20	17	16
E	500	550	540

टिप्पणी

हलः

वस्तु	मूल्य			मूल्यानुपात	
	1990 P_0	**1995 P_1**	**1996 P_2**	**1995 के लिए $(P_1/P_0)\times100$**	**1996 के लिए $(P_2/P_0)\times100$**
A	5	6	4	120.00	80.00
B	7	10	7	142.86	100.00
C	8	12	6	150.00	75.00
D	20	17	16	85.00	80.00
E	500	550	540	110.00	108.00
				607.86	443.00

1995 के लिए मूल्य सूचकांक $= \frac{1}{5}\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right) = \frac{607.86}{5} = 121.57$

1996 के लिए मूल्य सूचकांक $= \frac{1}{5}\Sigma\left(\frac{P_2}{P_0}\times 100\right) = \frac{443.00}{5} = 88.6$

8.6.4 मूल्यानुपातों का भारित औसत (Weighted Average of Price Relatives)

सरल अनुपातों की विधि का औसत की कमी जिसमें परिकल्पना है कि सभी अनुपात बराबर महत्व के हैं इस विधि द्वारा दूर की जाती है जिसमें अनुपातों को उपयुक्त भारण प्रदान कर समूह में विभिन्न वस्तुओं का आपेक्षिक महत्व के समरूप दिया जाता है। इसलिए, पूरे समूह के लिए सूचकांक भारित औसत को लेकर प्राप्त किया जाता है, ज्यादातर मूल्यानुपातों का A.M. या G.M. लेकर। इसलिए, भारित A.M. पर आधारित, मूल्य सूचकांक दिया जाता है–

$$P_{01}\,(A.M.) = \frac{\Sigma\left[W\left(\frac{P_1}{P_0}\times 100\right)\right]}{\Sigma W} = \frac{\Sigma WP}{\Sigma W} \qquad \ldots(8.20)$$

जहाँ W भारण हैं मूल्यानुपात P से संयुक्त।

(8.20) में P_{01} (A.M.) की गणना का चरण

1. प्रत्येक वस्तु के लिए मूल्यानुपात (P) ज्ञात करें i.e., P की गणना करें

$$P = \frac{P_1}{P_0}\times 100$$

2. चरण 1 में मूल्यानुपात को संगत भार (W) से गुणा कर गुणनफल WP प्राप्त करने के लिए।
3. चरण 2 में गुणनफलों का योग प्राप्त करने के लिए सभी वस्तुओं के लिए ΣWP प्राप्त करें।
4. चरण 3 में योग को ΣW से भाग दें, कुल प्रदान किया गया भार।

परिणामी अंक मूल्य सूचकांक देता है मूल्यानुपातों के भारित औसत पर आधारित।

मूल्यानुपात का भारित गुणोत्तर माध्य पर आधारित मूल्य घातांक दिया जाता है : P_{01} (भारित G.M.)

$$= \left[\Pi\left\{\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)^W\right\}\right]^{1/\Sigma W} \qquad \ldots(8.21)$$

दोनों तरफ logarithm लेने पर, हम पाते हैं

log [P_{01} (भारित G.M.)]

$$= \frac{1}{\Sigma W}\left[\Sigma W \log\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)\right] = \frac{\Sigma W \log P}{\Sigma W}$$

$$\Rightarrow \quad P_{01} \text{ (भारित G.M.)]} = Anti \log \left[\frac{\Sigma W \log P}{\Sigma W}\right] \qquad \ldots(8.22)$$

गणन उद्देश्यों के लिए, सूत्र (8.22) प्रयुक्त होती है और इसके लिए निम्नलिखित चरण की आवश्यकता है :

(8.22) में P_{01} (G.M.) की गणना का चरण :

1. मूल्यानुपात की गणना करें $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ प्रत्येक वस्तु के लिए
2. सभी मूल्यानुपातों का Logarithm ज्ञात करें। यह log P मूल्य देता है।
3. प्रत्येक वस्तु के log P मूल्य को संगत प्रदत्त मूल्य से गुणा करें। यह (W. log P) मूल्य देगा।
4. चरण 3 में (W. log P) मूल्यों का योगफल सभी वस्तुओं के लिए ΣW. log P प्राप्त करने के लिए करें।
5. चरण 4 में प्राप्त योगफल को ΣW, भारणों का योगफल से भाग दें।
6. चरण 5 में प्राप्त प्रतिमूल्य का Antilog, वांछित मूल्य सूचकांक देता है।

टिप्पणियाँ 1 : चूँकि मूल्यानुपात सूचकांक का सबसे सरल रूप है हम संकेताक्षर I का प्रयोग भी P के लिए कर सकते हैं i.e. हम लिख सकते हैं

$$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

टिप्पणी

2. सामान्य संकेताक्षरों में, हमें :

$$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{\Sigma\left[\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)(p_0 q_0)\right]}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\Sigma\ pw}{\Sigma\ W} ----(*)$$

जहाँ $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100,$ वस्तु का मूल्यानुपात है

और $W = p_0\ q_0$, वस्तु का आधार वर्ष में प्रति मूल्य है।

योग का चिन्ह विभिन्न वस्तुओं के ऊपर लिया जाता है।

(*) से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि लासपियरे का मूल्य सूचकांक मूल्यानुपातों का भारित माध्य है, संगत भार आधार वर्ष में वस्तुओं का प्रतिमूल्य है।

उसी तरह, पाशे का मूल्य सूचकांक दिया जाता है :

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{\Sigma\left[\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)(p_0 q_1)\right]}{\Sigma p_0 q_1} = \frac{\Sigma\ pw}{\Sigma\ W}$$

जहाँ $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$ और $W = P_0 q_1$

इसलिए, पाशे का मूल्य सूचकांक मूल्यानुपातों के भारित माध्य के रूप में अभिव्यक्त होती है, संगत भार होते हैं $w = p_0\ q_1$, i.e., प्रतिमूल्य प्राप्त किए जाते हैं चालू वर्ष के परिमाण को आधार वर्ष के मूल्य पर लेकर।

उदाहरण 8.11: निम्नलिखित तालिका कुछ भोजन सामग्रियों का मूल्य आधार वर्ष और चालू वर्ष में देती है और परिमाण बेची गई आधार वर्ष में। भारित सूचकांक परिकलित करें भारित और मूल्यानुपातों का प्रयोग कर।

मदें	आधार वर्ष परिमाण (इकाईयाँ)	आधार वर्ष मूल्य (रु. में)	चालू वर्ष मूल्य (रु. में)
A	7	18.00	21.60
B	6	3.00	4.65
C	16	7.50	9.00
D	21	2.50	2.25

हल :

मदें	आधार वर्ष परिमाण भार (W)	मूल्य (रुपये में)		मूल्यानुपात $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	W.P.
		आधार वर्ष (P_0)	चालू वर्ष (P_1)		
A	7	18.00	21.60	120	840
B	6	3.00	4.65	155	930
C	16	7.50	9.00	120	1920
D	21	2.50	2.25	90	1890
	ΣW=50				ΣWP=5580

मूल्य सूचकांक चालू वर्ष के लिए (आधार वर्ष = 100), भारित औसत मूल्यानुपात का दिया जाता हैः

$$P_{01}\,(\text{भारित A.M.}) = \frac{\Sigma WP}{\Sigma W} = \frac{5580}{50} = 111.6$$

उदाहरण 8.12 मूल्यों का सूचकांक 1995 के लिए 1990 के आधार पर परिकलित करें नीचे दिये गए समंक सेः–

वस्तु	भार	मूल्य प्रति इकाई 1990 (रु.)	मूल्य प्रति इकाई 1995 (रु.)
A	40	16	20
B	25	40	5
C	20	12	15
D	15	2	3

अगर वस्तुएँ A, B, C, D के भार 1:2:3:4 के अनुपात में बढ़ा दिए जाएं, सूचकांक में क्या वृद्धि होगी?

हल :

वस्तु	भार (W)	मूल्य प्रति ईकाई (रु. में)		मूल्यानुपात $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	W.P.	भार में वृद्धि (W_1)	W_1P
		1990 (P_0)	1995 (P_1)				
A	40	16	20	125	5000	$40 + \frac{40}{10} = 44$	5500
B	25	40	50	125	3125	$25 + \frac{2 \times 25}{10} = 30$	3750

टिप्पणी

C	20	12	15	125	2500	$20+\frac{3\times 20}{10}=26$	3250
D	15	2	3	150	2250	$15+\frac{4\times 15}{10}=21$	3150
	$\Sigma W=$ 100				$\Sigma WP=$ 12875	$\Sigma W_1=121$	$\Sigma W_1P=$ 15650

चूँकि वस्तुओं का भार में वृद्धि 1:2:3:4 के अनुपात में (कुल = 10), भार में वृद्धि है:

(a) $\frac{1}{10}\times 40 = 4$ (b) $\frac{2}{10}\times 25 = 5$

(c) $\frac{3}{10}\times 20 = 6$ (d) $\frac{4}{10}\times 15 = 6$

वास्तविक सूचकांक $(I) = \frac{\Sigma wp}{\Sigma w} = \frac{12875}{100} = 128.75$

नया सूचकांक $(I_1) = \frac{\Sigma w_1 p}{\Sigma w_1} = \frac{15650}{121} = 129.34$

$\therefore$ सूचकांक में वृद्धि $= I_1 - I = 0.59$

उदाहरण 8.13: मध्य वित्त परिवारों के बजट में अन्वेषण के दौरान एक परिवार से निम्नलिखित सूचना मिली :

खर्च →	भोजन	भाड़ा	कपड़ा	ईंधन	दूसरे
	30%	15%	20%	10%	25%
मूल्य (रु. में) 1997 में	100	20	70	20	40
मूल्य (रु. में) 1998 में	90	20	60	15	55

मूल्य सूचकांक की गणना करें प्रयोग कर :

(a) मूल्यानुपात का भारित A.M. (ii) मूल्यानुपात का भारित G.M.

टिप्पणी

		मूल्य					
समूह	भार (W)	1997 (P_0)	1998 (P_1)	मूल्यानुपात $P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	W.P.	log P	W. log P
भोजन	30	100	90	90.0	2700	1.9542	58.626
भाड़ा	15	20	20	100.0	1500	2.0000	30.000
कपड़े	20	70	60	85.7	1714	1.9330	38.660
ईंधन	10	20	15	75.0	750	1.8751	18.751
दूसरे	25	40	55	137.5	3437.5	2.1383	53.457
					ΣWP = 10101.5		ΣW log P = 199.494

(i) 1998 के लिए सूचकांक आधार वर्ष 1997 के सापेक्ष, मूल्यानुपात के भारित समान्तर माध्य पर आधारित दी जाती है :

$$P_0\,(A.M.) = \frac{\Sigma WP}{\Sigma W} = \frac{10101.5}{100} = 101.015$$

(ii) 1998 के लिए सूचकांक आधार वर्ष 1997 के सापेक्ष, मूल्यानुपात के भारित गुणोत्तर माध्य पर आधारित दी जाती है :

$$\log\ P_{01}\,(G.M.) = \frac{\Sigma W \log P}{\Sigma W} = \frac{199.494}{100} = 1.9949$$

$$P_{01}\,(G.M.) = Anti\log(1.9949) = 98.83$$

8.7 सूचकांक सूत्रों की संगति का परीक्षण (Tests of Consistency of Index Numbers)

8.5 में हमने सूचकांकों के निर्माण की विभिन्न सूत्रों की विवेचना की है। कोई भी सूत्र मूल्य परिवर्तन या परिमाण परिवर्तनों को परिशुद्धता या पूर्णता से मापित नहीं करती है, और उनमें कुछ अभिनति है, समस्या है, दिए परिस्थिति में सबसे उपयुक्त सूत्र का चुनाव। सूत्र त्रुटि के माप के तौर पर कई गणितीय परीक्षण, जा जानी जाती है सूचकांक सूत्र की संगति का परीक्षण (Tests of Consistency) सुझाई गई है। इस खंड में हम इन परीक्षणों की विवेचना करेंगे, जो कभी-कभी एक अच्छे सूचकांक की कसौटी भी कही जाती है।

8.7.1 इकाई परीक्षण (Unit Test)

इस परीक्षण में वांछित है कि सूचकांक सूत्र इकाईयों से स्वतंत्र हों जिनमें विभिन्न वस्तुओं के मूल्य या परिमाण सूचीबद्ध हैं। 8.5 में उल्लेखित सभी सूत्र सिवाय

सरल मूल्य का समूहन (परिमाण) पर आधारित सूचकांक को छोड़कर इस परीक्षण को संतुष्ट करते हैं।

8.7.2 समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)

समय उत्क्राम्यता परीक्षण, प्रो. इरविंग फिशर द्वारा प्रस्तावित, में वांछित है सूचकांक सूत्र को समय संगति धारण करना, कार्य करते हुए दोनों आगे और पीछे समय के सापेक्ष। उनके (फिशर के) के शब्दों में :

''एक सूचकांक के परिकलन के सूत्र को ऐसा होना चाहिए कि यह समान अनुपात दें एक बिंदु से दूसरे के बीच, कोई मायने न रखते हुए कि दोनों में से कौन आधार की तरह लिया गया है या दूसरी तरह से रखने पर, सूचकांक जो आगे संगणित किया गया है को वयत्क्रमानुपाती होना चाहिए उसका (सूचकांक का) जो पीछे संगणित किया गया है।''

दूसरे शब्दों में, अगर सूचकांक समान समंक दो अवधियों के लिए एक सूत्र से ही संगणित किए गए हैं परन्तु आधार उलटकर, तब इस तरह से प्राप्त सूचकांक को एक दूसरे का व्यत्क्रमानुपाती होना चाहिए। गणितीय रूप से, हमें होना चाहिए (कारक 100 को हटाकर)

$$P_{01} \times P_{10} = 1 \qquad \ldots(8.23)$$

या ज्यादा सामान्यतया,

$$P_{ab} \times P_{ba} = 1 \qquad \ldots(8.24)$$

जहाँ P_{ab} मूल्य घातांक है (बगैर अवयव 100 के) 'b' वर्ष के लिए 'a' वर्ष आधार के साथ और P_{ba} मूल्य घातांक है (बगैर अवयव 100 के) 'a' वर्ष के लिए 'b' वर्ष आधार के साथ।

समय उत्क्राम्यता परीक्षण निम्नलिखित सूचकांक सूत्रों से संतुष्ट होती हैं :

(i) सरल समूहन सूचकांक (Simple Aggregate Index)

(ii) मार्शल–एजवर्थ सूत्र

(iii) वॉल्श सूत्र

(iv) फिशर का आदर्श सूत्र

(v) केली का नियत भारण सूत्र (नीचे सिद्ध किया गया है)

(vi) मूल्यानुपात सूत्र का सरल गुणोत्तर माध्य (नीचे सिद्ध किया गया है)

(vii) मूल्यानुपात सूत्र का भारित गुणोत्तर माध्य नियत भारों के साथ

लासपियरे और पाशे का सूचकांक इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करते

आइए हम परीक्षण का सत्यापन केली के नियत भार सूत्र के लिए करें।

हमें (बगैर अवयव 100 के)

टिप्पणी

$$P_{01}^{K} = \frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0} \quad \text{और} \quad P_{01}^{K} = \frac{\Sigma WP_0}{\Sigma WP_1}$$

$$\therefore\ P_{01}^{K} \times P_{10}^{K} = \frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0} \times \frac{\Sigma WP_0}{\Sigma WP_1} = 1$$

इसलिए, केली का नियत भार सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

सूचकांक के लिए जो आधारित है मूल्यानुपातों के G.M. पर, हमें :

$$P_{01}\,(G.M.) = \left[\left(\Pi\frac{P_1}{P_0}\right)\right]^{1/n} \quad \text{और } P_{10}\,(G.M.) = \left[\left(\Pi\frac{P_0}{P_1}\right)\right]^{1/n}$$

$$P_{01}\,(G.M.) \times P_{10}\,(G.M.) = \left[\left(\Pi\frac{P_1}{P_0}\right)\right] \times \left[\Pi\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\right]^{1/n}$$

$$= \left[\Pi\left(\frac{p_1}{p_0}\right) \times \Pi\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\right]^{1/n} = 1$$

इसलिए, मूल्यानुपात सूत्र का गुणोत्तर माध्य समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है। उसी तरह से, परीक्षण का सत्यापन मूल्यानुपात घातांक के भारित गुणोत्तर माध्य नियत भार के साथ के लिए भी हो सकती है।

टिप्पणियाँ 1: P_{10} को प्राप्त किया जा सकता है P_{01} के लिए सूत्र द्वारा 0 और 0 अनुलग्नों को अदल–बदल कर, i.e., 0 को। से परिवर्तित कर और 1 को 0 से।

2. अगर लासपियरे का मूल्य सूचकांक पाशे के मूल्य सूचकांक के बराबर है, तब सामान्य संकेताक्षरों में, हमें :

$$P_{01}^{La} = P_{01}^{Pa} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 \ \Rightarrow$$

$$(\Sigma p_1 q_0)(\Sigma p_0 q_1) = (\Sigma p_0 q_0)(\Sigma p_1 q_1) ------(*)$$

योग का चिन्ह विभिन्न वस्तुओं के ऊपर लिया जाता है

$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ (बगैर अवयव 100 के)	$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ (बगैर अवयव 100 के)
$Q_{10}^{La} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$	$Q_{10}^{Pa} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$
$\therefore\ P_{01}^{La} \times Q_{10}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$	$\therefore\ P_{01}^{Pa} \times Q_{10}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$

टिप्पणी

= 1---(*से)	= 1---(*से)
⇒ लासपियरे का मूल्य घातांक अवयव उत्क्रम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है	⇒ पाशे का मूल्य घातांक अवयव उत्क्रम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है

इसलिए, लासपियरे का मूल्य घातांक पाशे के मूल्य घातांक के बराबर है, तब इनमें से दोनों समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

8.7.3 अवयव (कारक) उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)

यह संगति के दो महत्वपूर्ण परीक्षणों में दूसरा है जो प्रो. इरविंग फिशर द्वारा प्रस्तावित है। उनके अनुसारः

''जैसे हमारा सूत्र दो अवधियों के अदला–बदली की अनुमति देता है बगैर असंगति का परिणाम दिए, इसलिए इसे मूल्यों और परिमाणों के अदला–बदली की अनुज्ञा देनी चाहिए बगैर असंगति का परिणाम दिए, i.e., दो परिणामों का एक साथ गुणन को यथार्थ प्रतिमूल्य अनुपात देना चाहिए, सिवाय एक समानुपात के नियतांक का।''

इसका मतलब है कि अगर मूल्य और परिमाण घातांक एक ही समंक के लिए प्राप्त किए जाते हैं, समान आधार और चालू अवधि और एक ही सूत्र का प्रयोग कर, तब उनका गुणनफल (अवयव 100 के बगैर) को यथार्थ प्रतिमूल्य अनुपात देते हैं, चूँकि मूल्य का परिमाण से गुणनफल कुल प्रतिमूल्य देता है। संकेताक्षरों में, हमें होना चाहिए (बगैर 100 अवयव के)।

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = V_{01} \qquad \ldots(8.25)$$

जहाँ ΣP_1Q_1 और ΣP_0Q_0 कुल प्रतिमूल्य क्रमशः चालू और आधार वर्ष में द्योतित करता है।

फिशर का सूत्र अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है। वास्तव में, फिशर का सूचकांक अकेला सूचकांक है जो इस परीक्षण को संतुष्ट करता है क्योंकि 8.5 में विवेचित दूसरा कोई भी सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है। उनमें से कुछ का सत्यापन, viz. लासपियरे, पाशे, मार्शल–एजवर्थ, सरल समूहन और वॉल्श सूचकांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करते उदाहरण 8. 22 में दिया गया है।

टिप्पणियाँ 1. चूँकि फिशर का सूचकांक अकेला सूचकांक है जो दोनों समय उत्क्राम्यता और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है, यह कभी–कभी फिशर का आदर्श सूचकांक भी कहलाता है।

2. अगर लासपियरे का मूल्य सूचकांक पाशे के मूल्य सूचकांक के बराबर है, तब सामान्य संकेताक्षरों में, हमें :

$$P_{01}^{La} = P_{01}^{Pa} \quad \Rightarrow \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 \Rightarrow (\Sigma p_1 q_0)(\Sigma p_0 q_1)$$

$$= (\Sigma p_0 q_0)(\Sigma p_1 q_{1)} - - - - - (**)$$

योग का चिन्ह विभिन्न वस्तुओं के ऊपर लिया जाता है

$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ (बगैर अवयव 100 के) $Q_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0} - -$[(**) से] $\therefore P_{01}^{La} \times Q_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}$ $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = V_{01}$ $\Rightarrow$ लासपियरे का मूल्य घातांक अवयव उत्क्रम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है	$P_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$ (बगैर अवयव 100 के) $Q_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_1} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} - -$[(**) से] $\therefore P_{01}^{Pa} \times Q_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = V_{01}$ $\Rightarrow$ पाशे का मूल्य घातांक अवयव उत्क्रम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है

इसलिए, अगर लासपियरे का मूल्य घातांक पाशे के मूल्य घातांक के बराबर है, तब इनमें से दोनों सूचकांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

8.7.4 चक्रीय परीक्षण (Circular Text)

चक्रीय परीक्षण, वेस्टगार्ड द्वारा सबसे पहले सुझाई गई, समय उत्क्राम्यता परीक्षण का विस्तार है दो या दो से अधिक अवधियों के लिए और आधार वर्ष के परिवर्तनशीलता पर आधारित है। इसमें वांछित है घातांक को चक्रीय रूप से कार्य करना और यह गुण हमें समर्थता देता है सूचकांकों को अवधि से अवधि में प्राप्त करने में बगैर वास्तविक आधार पर हर बार लौटने के। तीन अवधियों a, b, c के लिए परीक्षण से वांछनीय है :

$$P_{ab} \times P_{bc} \times P_{ca} = 1, \qquad a \neq b \neq c \qquad \ldots(8.26)$$

जहाँ P_{ij} मूल्य घातांक है (बगैर अवयव 100 के) 'j' अवधि के लिए 'i' आधार के साथ। सामान्य संकेताक्षरों में (8.20) वर्णित किया जा सकता है ऐसे :

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1 \qquad \ldots(8.27)$$

उदाहरण के लिए,

$$P_{01}^{La} \times P_{12}^{La} \times P_{20}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_2}{\Sigma p_2 q_2} \neq 1$$

इसलिए, लासपियरे का घातांक चक्रीय परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है। उसी तरह, यह सत्यापित किया जा सकता है कि पाशे, M.E. वॉल्श और फिशर के घातांकों में से कोई इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है। वास्तव में, चक्रीय परीक्षण किसी भी भारित समूहन सूत्र से संतुष्ट नहीं होता है बदलते भारों के साथ,

i.e., अगर भार जो P_{01}, P_{12} और P_{20} सूचकांकों के निर्माण में प्रयुक्त बदलता है। यह परीक्षण सिर्फ संतुष्ट होता है सूचकांक सूत्र जो आधारित हैं:

(i) मूल्यानुपातों के सरल गुणोत्तर माध्य, और

(ii) केली के नियत आधार विधि पर।

उदाहरण के लिए, सूचकांकों के लिए जो आधारित हैं मूल्यानुपातों के सरल गुणोत्तर माध्य पर, हमें:

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} \quad \left[\Pi\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\right]^{1/n} \times \left[\Pi\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\right]^{1/n} \times \left[\Pi\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\right]^{1/n}$$

$$= \left[\Pi\left(\frac{p_1}{p_0}\right) \times \Pi\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \times \Pi\left(\frac{P_0}{P_2}\right)\right]^{1/n} = 1$$

इसलिए इस स्थिति में चक्रीय परीक्षण कायम रहता है।

उसी तरह से, सूचकांक केली के नियत भार सूत्र पर आधारित देता है

(बगैर अवयव 100 के)

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = \frac{\Sigma WP_1}{\Sigma WP_0} \times \frac{\Sigma WP_2}{\Sigma WP_1} \times \frac{\Sigma WP_0}{\Sigma WP_2} = 1$$

टिप्पणियाँ 1. (8.21) का सामान्यीकरणः–

चक्रीय परीक्षण का सामान्यीकरण तीन अवधियों से अधिक की स्थिति में हो सकता है :

$$P_{01} \times P_{12} \times P_{23} \times \text{---------} \times P_{n-1,\, n} \times P_{n,\, 0} = 1 \qquad \ldots(8.28)$$

जहाँ घातांकों का विचार बगैर अवयव 100 के होता है।

उदाहरण 8.14: निम्नलिखित समंक के लिए सिद्ध करें कि फिशर का आदर्श सूचकांक दोनों समय उत्क्राम्यता परीक्षण और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है और इसके परिमूल्य को परिकलित करें।

	आधार वर्ष		**चालू वर्ष**	
वस्तु	**मूल्य**	**परिमाण**	**मूल्य**	**परिमाण**
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24

टिप्पणी

हल :

वस्तु	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	p_0q_1	P_1q_0	P_1q_1
A	6	50	10	56	300	336	500	560
B	2	100	2	120	200	240	200	240
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	30	12	24	300	240	360	288
					Σp_0q_0 =1040	Σp_1q_1 =1056	Σp_0q_0 =1020	Σp_1q_1 =1448

फिशर का सूचकांक दिया जाता है

$$P_{01}^{F} = 100 \times \frac{\Sigma p_1 q_0 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1} = 100 \times \sqrt{\frac{1420 \times 1448}{1440 \times 1056}}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{2056160}{1098240}} = 100 \times \sqrt{1.8722} = 100 \times 1.3683$$

$$= 136.83$$

समय उत्क्राम्यता परीक्षणः– हमें $P_{01}^{F} = 1.3683$ (बगैर अवयव 100 के)

और $P_{10}^{F} = \dfrac{\Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_1 \times \Sigma p_1 q_0}$ (बगैर अवयव 100 के)

$$= \sqrt{\frac{1056 \times 1040}{1448 \times 1420}} = \sqrt{\frac{1098\,240}{2056160}} = \sqrt{0.5341} = 0.7308$$

$$\therefore P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = 1.3683 \times 0.7308 = 0.9999 \cong 1$$

इसलिए, फिशर का घातांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणः हमें (बगैर अवयव 100 से)

$$Q_{01}^{F} = \left[\frac{\Sigma q_1 p_0 \times \Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0 \times \Sigma q_0 p_1}\right]^{1/2} = \left[\frac{\Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_1 q_0}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1056 \times 1448}{1040 \times 1420}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{1529088}{1476800}} = \sqrt{1.035406} = 1.0175$$

$$\therefore P_{01}^{F} \times Q_{01}^{F} = 103683 \times 1.0175 = 1.3922$$

और $\dfrac{\Sigma V_1}{\Sigma V_0} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \dfrac{1448}{1040} = 1.3923$

$$\therefore P_{01}^{F} \times Q_{01}^{F} = \frac{\Sigma V_1}{\Sigma V_0}$$

टिप्पणी

इसलिए, फिशर का घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को भी संतुष्ट करता है।

Aliter: हमें (बगैर अवयव 100 के)

$$P_{01}^{F} = \frac{\Sigma p_1 q_0 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1} = \sqrt{\frac{1420 \times 1448}{1040 \times 1056}};$$

$$P_{01}^{F} = \frac{\Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_1 \times \Sigma p_1 q_0} = \sqrt{\frac{1056 \times 1040}{1448 \times 1420}}$$

$$\therefore P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = \sqrt{\frac{1420 \times 1448 \times 1056 \times 1040}{1040 \times 1056 \times 1448 \times 1420}} = \sqrt{1} = 1$$

इसलिए, फिशर का घातांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण के संतुष्ट करता है

$$Q_{01}^{F} = \frac{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1} = \sqrt{\frac{1056 \times 1448}{1040 \times 1420}}$$

$$\therefore P_{01}^{F} \times Q_{01}^{F} = \sqrt{\left(\frac{1420 \times 1448}{1040 \times 1056}\right) \times \left(\frac{1056 \times 1448}{1440 \times 1420}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1448}{1040}\right)^2}$$

$$= \frac{1448}{1040} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए, फिशर का घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

टिप्पणी: अगर हमें पूछा नहीं जाता है फिशर के घातांक की गणना के बारे में परन्तु सरल रूप से परीक्षण का कि अगर यह समय उत्क्राम्यता या/और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणों को संतुष्ट करती है, तब वैकल्पिक विधि उपर्युक्त दी गई ज्यादा सुविधाजनक है संख्यात्मक संगणनाओं के लिए।

उदाहरण 8.15: निम्नलिखित समंक के लिए लासपियरे, पाशे और फिशर के घातांकों को परिकलित करें। यह भी जाँच करें उपर्युक्त में कौन संतुष्ट करता है (i) समय उत्क्राम्यता परीक्षण (ii) अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण

वस्तु	**आधार वर्ष**		**चालू वर्ष**	
	मूल्य	**परिमाण**	**कीमत**	**परिमाण**
A	6.5	500	10.8	560
B	2.8	124	2.9	148
C	4.7	60	8.2	78
D	10.9	38	13.4	24
E	8.6	49	10.8	27

हल :

वस्तु	P_0	q_0	P_1	q_1	P_0q_0	P_1q_0	P_0q_1	P_1q_1
A	6.5	500	10.8	560	3250.0	5400.0	3640.0	6048.0
B	2.8	124	2.9	148	347.2	359.6	414.4	429.2
C	4.7	69	8.2	78	324.3	565.8	366.6	639.6
D	10.9	38	13.4	24	414.2	509.2	261.6	321.6
E	8.6	49	10.8	27	421.4	529.2	232.2	291.6
					4757.1	7363.8	4914.8	7730.0

टिप्पणी

(i) $P_{01}^{La} = \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \dfrac{7363.8}{4757.1} \times 100 = 1.5480 \times 100 = 154.80$

(ii) $P_{01}^{Pa} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \dfrac{7730.0}{4914.8} \times 100 = 1.5728 \times 100 = 157.28$

(iii) $P_{01}^{F} = \left(P_{01}^{Pa} \times P_{01}^{La}\right)^{1/2} = (154.80 \times 157.28)^{1/2} = 156.03$

(iv) $q_{01}^{La} = \dfrac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100 = \dfrac{4914.8}{4757.1} \times 100 = 1.0121 \times 100 = 101.21$

(v) $Q_{01}^{Pa} = \dfrac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100 = \dfrac{7730.0}{7363.8} \times 100 = 1.0497 \times 100 = 104.97$

(vi) $Q_{01}^{F} = \sqrt{Q_{01}^{La} \times P_{01}^{Pa}} = \sqrt{101.21 \times 104.97} = 10.06 \times 10.24 = 103.01$

समय उत्क्राम्यता परीक्षण : हमें होना चाहिए (बगैर अवयव 100 के)

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

(vii) $P_{01}^{La} = \dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times 100 = \dfrac{4914.8}{7730.0} \times 100 = 0.6358 \times 100 = 63.58$

(viii) $P_{01}^{Pa} = \dfrac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times 100 = \dfrac{4757.1}{7363.8} \times 100 = 0.6460 \times 100 = 64.60$

(ix) $P_{01}^{F} = \left(P_{01}^{La} \times P_{01}^{Pa}\right)^{1/2} = \sqrt{63.58 \times 64.60} = 7.97 \times 8.04 = 64.08$

इसलिए,

$$P_{01}^{La} \times P_{10}^{La} = 1.5480 \times 0.6358 = 0.9842 \neq 1$$

$$P_{01}^{La} \times P_{10}^{La} = 1.5728 \times 0.6460 = 1.0161 \neq 1$$

$$P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = 1.5602 \times 0.6408 = 0.9998 \cong 1$$

इसलिए, फिशर का सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है। लासपियरे और पाशे का सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

टिप्पणी

अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण: हमें होना चाहिए : $P_{01} \times Q_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$

(x) $P_{01}^{La} \times Q_{01}^{La} = 1.5480 \times 1.0121 = 1.5667$

(xi) $P_{01}^{Pa} \times Q_{01}^{Pa} = 1.5728 \times 1.0497 = 1.6510$

(xii) $P_{01}^{F} \times Q_{01}^{F} = 1.5603 \times 1.0301 = 1.6073$

(xiii) $\dfrac{\Sigma v_1}{\Sigma v_0} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \dfrac{7730}{4757.1} \times 1.6249$

फिशर का सूत्र अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को भी संतुष्ट करता है। लासपियरे और पाशे का सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करती है।

उदाहरण 8.16: पूर्ण रूप से सूचकांक की अभिधारणा और प्रयोग का वर्णन करें। सूचकांक के निर्माण में भारण की भूमिका की विवेचना करें। सूचकांक के लिए उत्क्राम्यता परीक्षणों का वर्णन करें और इन परीक्षणों के प्रकाश में निम्नलिखित सूत्रों की जाँच करें:

(i) $\dfrac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$ (iv) $\dfrac{\Sigma \sqrt{q_0 q_1}\ p_1}{\Sigma \sqrt{q_0 q_1}\ p_0} \times 100$

(ii) $\dfrac{\Sigma q_0 p_1}{\Sigma q_0 p_0} \times 100$ (v) $\sqrt{\dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100\ \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

(iii) $\dfrac{\Sigma (q_0 + q_1) p_1}{\Sigma (q_0 + q_1) p_0} \times 100$ (ii) $\dfrac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0} \times 100$

हल:

हमें (बगैर अवयव 100 के)

(i) $P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}, \qquad P_{10} = \dfrac{\Sigma p_0}{\Sigma p_1}, \qquad Q_{01} = \dfrac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0}$

यह सरल समूहन प्रकार का सूचकांक है।

$$P_{01} \times P_{10} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times \frac{\Sigma p_0}{\Sigma p_1} = 1$$

इसलिए, दिया गया घातांक (सरल समूहन मूल्य घातांक) समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

और $$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times \frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए दिया गया घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

(ii) $P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}, \qquad P_{10} = \dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}, \qquad Q_{01} = \dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$

दिया गया घातांक और कुछ नहीं बल्कि लासपियरे का मूल्य घातांक है।

$$\therefore\ P_{10}^{La} \times P_{10}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \neq 1$$

इसलिए, दिया घातांक (लासपियरे का घातांक) समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

$$P_{01}^{La} \times Q_{01}^{La} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए, लासपियरे का घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

(iii) $P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)}; \qquad P_{10} = \dfrac{\Sigma p_0 (q_1 + q_0)}{\Sigma p_1 (q_1 + q_0)};$

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 (p_0 + p_1)}{\Sigma q_0 (p_0 + p_1)}$$

दिया गया घातांक और कुछ नहीं परन्तु मार्शल–इजवर्थ का मूल्य सूचकांक है।

$$P_{01}^{ME} \times P_{10}^{ME} = \frac{\Sigma p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)} \times \frac{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_1 (q_1 + q_0)} = 1$$

इसलिए, मार्शल–एजवर्थ सूचकांक समय उत्क्राम्य परीक्षण को संतुष्ट करता है।

$$P_{01}^{ME} \times Q_{01}^{ME} = \frac{\Sigma p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)} \times \frac{\Sigma q_1 (p_0 + p_1)}{\Sigma q_0 (p_0 + p_1)} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए मार्शल–एजवर्थ सूचकांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

(iv) $P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma p_0 \sqrt{q_0 q_1}}; \quad P_{10} = \dfrac{\Sigma p_0 \sqrt{q_1 q_0}}{\Sigma p_1 \sqrt{q_1 q_0}} \quad Q_{01} = \dfrac{\Sigma q_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma q_0 \sqrt{p_0 q_1}}$

दिया गया सूचकांक वॉल्श का मूल्य सूचकांक है।

$$P_{01}^{wa} \times P_{10}^{wa} = \frac{\Sigma p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma p_0 \sqrt{q_0 q_1}} \times \frac{\Sigma p_0 \sqrt{q_1 q_0}}{\Sigma p_1 \sqrt{q_1 q_0}} = 1$$

इसलिए, वॉल्श का मूल्य घातांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

$$\therefore\ P_{01}^{wa} \times Q_{01}^{wa} = \frac{\Sigma p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma p_0 \sqrt{q_0 q_1}} \times \frac{\Sigma q_1 \sqrt{p_0 p_1}}{\Sigma q_0 \sqrt{p_0 p_1}} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए, वॉल्श का मूल्य घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

टिप्पणी

(v) $P_{01} = \sqrt{\dfrac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$; $\quad P_{10} = \sqrt{\dfrac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \dfrac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$

दिया गया सूचकांक फिशर का मूल्य सूचकांक है।

$$\therefore \quad P_{01}^F \times P_{10}^F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0 \times \Sigma p_1 q_1 \times \Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_1 q_1 \times \Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{1} = 1$$

इसलिए, फिशर का घातांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

$$Q_{01}^F = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$\therefore \quad P_{01}^F \times Q_{01}^F = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\Sigma p_1 q_0 \times \Sigma p_1 q_1 \times \Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1 \times \Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_1 q_0}\right]} = \sqrt{\frac{(\Sigma p_1 q_1)^2}{(\Sigma p_0 q_0)^2}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए फिशर का मूल्य घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

(vi) $P_{01} = \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$; $\quad P_{10} = \dfrac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$; $\quad Q_{01} = \dfrac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}$

यह घातांक पाशे का घातांक है।

$$P_{01}^{Pa} \times P_{10}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \neq 1$$

इसलिए, पाशे का मूल्य घातांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

$$\therefore \quad P_{01}^{Pa} \times Q_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0} \neq \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

इसलिए, पाशे का मूल्य घातांक अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता है।

टिप्पणी

8.8 श्रृंखला सूचकांक या आधार से श्रृंखलाबद्ध सूचकांक (Chain Indices or Chain Base Index Numbers)

सूचकांकों के लिए विवेचित विभिन्न सूत्र निश्चित वर्ष पर आधारित हैं और वे एक संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तनों को प्रतिबिंबित करती हैं, किसी अवधि में जो चालू अवधि कहलाती हैं, किसी खास नियत वर्ष के सापेक्ष जो आधार वर्ष कहलाती है। निश्चित आधार वाले सूचकांक, यद्यपि निर्मित करने में आसान हैं उनकी सीमाएं हैं, जिनमें से कुछ नीचे चित्रित हैं:–

(i) इन दिनों घटनाओं की तीव्र गति की वजह से, बहुत परिवर्तन हो सकता है आस्वादन रिवाजों, फैशनों इत्यादि समाज में और क्रमानुसार लोगों के उपभोग के स्वरूप में। इसलिए, अगर आधार वर्ष चालू वर्ष से बहुत अधिक दूर है, तब नियत आधार घातांकों के आधार पर तुलनाएं अव्यवहारिक, अविश्वनीय और यहाँ तक की भ्रामक भी हो सकती हैं।

(ii) फैशन और लोगों की आदतों में परिवर्तन से, दो अवधियों के बीच (चालू वर्ष और नियत आधार वर्ष) नवीनता की ओर निदेशित कर सकता है और बाजार में नए उत्पाद भी आ सकते हैं। इसके अतिरिक्त कुछ वस्तु या मद जो आधार वर्ष में बहुत मात्रा में उपभोग में लाई जाती थी आधार वर्ष में, पुरानी पड़ गई हो और इसलिए उसे अमान्य कर दी गई हो। यह नियत आधार विधि के लिए संभव नहीं है क्योंकि इसके लिए वांछित है कि दोनों अवधियों में एक ही समुच्चय की वस्तुओं या मदों की आवश्यकता है।

(iii) लोगों के उपभोग के स्वरूप में वर्तमान परिवर्तनों के कारण समय के अंतराल की वजह से, दो अवधियों में विभिन्न वस्तुओं के आपेक्षिक महत्व में भी काफी परिवर्तन हो सकता है, इसलिए, वास्तविक भारणों में परिवर्तन की आवश्यकता पड़ जाती है।

इन सीमाओं का ध्यान रखते हुए, यह महसूस किया गया कि दो अवधियों के समंक जिनकी तुलना की जाती है जहाँ तक संभव हो समांगी होनी चाहिए और यह सबसे अच्छी तरह प्राप्त की जाती है दो आसन्न (निकटवर्ती c) अवधियों को लेकर। क्रमानुसार, नियत आधार विधि के बदले, हम श्रृंखला आधार विधि प्रयुक्त करते हैं जिसमें संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन किसी अवधि के लिए तुलना की जाती है ठीक पार्श्ववर्ती अवधि से।

इसलिए, श्रृंखला आधार विधि में सूचकांकों की श्रृंखलाओं की गणना (एक उपयुक्त विधि द्वारा) प्रत्येक वर्ष के लिए की जाती है अनुवर्ती वर्ष को आधार वर्ष लेते हुए। अगर P_{ab} चालू अवधि 'b' के लिए मूल्य घातांक आधार अवधि 'a' के सापेक्ष द्योतित करती है, तब हम प्रगणित करते हैं घातांकों की श्रृंखला $P_{01},\ P_{12},\ P_{23} -----P_{r-1},$ अगर हमें (r-1) अवधियों का समंक दिया गया है। ये घातांक **श्रृंखला सूचकांक** या **श्रृंखला मूल्यानुपात** कहलाती हैं। प्राथमिक श्रृंखला घातांक (C.I.) इन श्रृंखला मूल्यानुपातों से प्राप्त की जाती है अनुवर्ती, अवधि के गुणन से जैसा नीचे दिया गया है :

टिप्पणी

$$P_{01} \quad = \quad \text{पहला श्रृंखला}$$

$$\left.\begin{array}{lll} P_{02} & = P_{01} \times P_{12} & \\ P_{03} & = (P_{01} \times P_{12}) \times P_{23} & = P_{12} \times P_{03} \\ : \quad : & \quad : \quad : & \\ : \quad : & \quad : \quad : & \\ Por = & P_{0,r-1,} \times P_{r-1.\,r} & \end{array}\right\} \qquad \ldots(8.29)$$

इसलिए, श्रृंखलाबद्ध आधार सूचकांक के निर्माण के चरण निम्न प्रकार से सारांश है:

1. प्रत्येक वस्तु के लिए, किसी वर्ष में मूल्य को इसके परवर्ती वर्ष के मूल्य से प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त करें। यह श्रृंखला मूल्यानुपात (L.R.) देती है। इसलिए,

$$\text{अवधि के लिए L.R.} = \frac{\text{Pi}}{\text{Pi - 1}} \times 100,\ (i = 1, 2 - - - - -, r) \qquad \ldots(8.30)$$

2. श्रृंखला आधार घातांक (C.B.I.) प्राप्त किए जाते हैं श्रृंखला मूल्यानुपातों को क्रमानुसार गुणा करके जैसा (8.29) में वर्णित है,

इसलिए, किसी वर्ष के लिए,

$$\text{C.B.I.} = \frac{\text{चालू वर्ष } L.R.X. \text{ अनुवर्ती वर्ष C.B.I.}}{100}$$

टिप्पणियाँ 1 : स्पष्टत, सूचकांकों की गणना की तकनीक 'नियत आधार' से और श्रृंखला आधार' विधि से भिन्न हैं, पहला (F.B.I.) वास्तविक अपरिष्कृत (Raw) समंक का प्रयोग करती है जबकि बाद का (C.B.I.) मूल्यानुपातों का प्रयोग करती है।

अगर अवलोकनों का सिर्फ एक श्रृंखला है i.e. अगर हमें सिर्फ एक वस्तु (मद) का मूल्य (परिमाण) विभिन्न वर्षों के लिए दिया गया है, तब नियत आधार घातांक और श्रृंखला आधार घातांक हमेशा एक बराबर होंगे [देखें उदाहरण 8.23] इसलिए, ऐसी स्थिति में हमें हमेशा नियत अवधि विधि का प्रयोग करना चाहिए चूँकि इसमें बहुत कम परिकलन करना पड़ता है श्रृंखला आधार विधि की तुलना में।

यद्यपि, अगर दो से अधिक श्रृंखलाएं हैं, तब श्रृंखला आधार घातांक और नियत आधार घातांक सामान्यतः भिन्न होंगी सिवाय प्रथम दो वर्षों के लिए, जिसमें दोनों हमेशा बराबर होंगे [देखें उदाहरण 8.25]

2. श्रृंखला आधार सूचकांकों का नियत आधार सूचकांकों में रूपांतरण (Conversion of Chain Base Index to Fixed Base Index Numbers)

नियत आधार सूचकांक (F.B.I.) प्राप्त किए जा सकते हैं श्रृंखला आधार सूचकांक (C.B.I.) से निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर :

$$\text{चालू वर्ष F.B.I.} = \frac{\text{चालू वर्ष C.B.I.} \times \text{पिछले वर्ष का F.B.I.}}{100} \quad \ldots(8.31)$$

पहली अवधि के लिए F.B.I. वही होती है जो पहली अवधि के लिए C.B.I.

टिप्पणी

8.8.1 श्रृंखला आधार सूचकांकों का उपयोग (Uses of Chain Base Index Numbers)

1. श्रृंखला आधार विधि में तुलनाएं तुरंत विगत (अनुवर्ती वर्ष) वर्ष से की जाती है और क्रमानुसार समंक (दो अवधियाँ जिनमें तुलना होनी हैं) आपेक्षिक रूप से समांगी हैं। तुलनाएं, इसलिए अधिक वैध और सार्थक हैं और परिणामी घातांक चालू अभिनति का अधिक निर्देशक है आस्वादन, आदतों, रिवाजों और फैशन में समाज का। इसलिए, श्रृंखला आधार घातांक विशेष रूप से एक व्यवसायिक के लिए उपयोगी है जिसकी प्राथमिकता से एक संवृत्ति के मूल्य के बीच तुलना में रूचि है दो क्रमिक अवधियों के लिए बनिस्वत् किसी संवृत्ति के मूल्य में किसी अवधि का किसी दूर आधार अवधि के इसके मूल्य के साथ।

मजेट के अनुसार, श्रृंखला आधार विधि तीव्र गति के परिवर्तन के संक्रमण का बेहतर लेखा देती है आधार वर्ष से दिए वर्ष का दूसरी विधियों की अपेक्षा।

2. श्रृंखला आधार विधि में, नई वस्तुएँ या मदें अन्तर्विष्ट की जा सकती है और पुरानी और अप्रचलित मदों को निकाल दिया जा सकता है बगैर तुलनीयता को क्षति पहुँचाए और बगैर पूरी श्रेणी के सूचकांकों के पुनः परिकलन की आवश्यकता के, जो आवश्यक है नियत आधार विधि की स्थिति में। इसके अतिरिक्त, विभिन्न वस्तुओं का भार बारंबार व्यवस्थापित किया जा सकता है। यह लचीलापन श्रृंखला घातांकों की उपयोगिता काफी बढ़ा देती है नियत आधार सूचकांक विधि पर।

मार्शल और एजवर्थ के अनुसार, श्रृंखला आधार घातांक कम–अवधि की तुलनाओं के सबसे अच्छे साधन हैं।

8.8.2 श्रृंखला आधार सूचकांकों की सीमाएं (Limits of Chain base Index Numbers)

श्रृंखला घातांक आपेक्षिक रूप से जटिल और समय खपत करने वाली हैं परिकलित करने में तुलनात्मक रूप से नियत आधार घातांकों के साथ। वे उपयुक्त हैं सिर्फ छोटी अवधि की तुलनाओं के लिए और श्रृंखला घातांकों की लम्बी अवधि तुलनाएं वास्तविकता में वैध नहीं हैं। यह समझने में काफी कठिन है इन घातांकों की सार्थकता, और उनकी भौतिक व्याख्या देना।

उदाहरण 8.17: निम्नलिखित नियत आधार सूचकांकों को श्रृंखला आधार सूचकांकों में परिवर्तित करें :

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995
F.B.I. :	376	392	408	380	392	400

टिप्पणी

हल : F.B.I. का रूपांतरण C.B.I. में

वर्ष	**F.B.I.**	**श्रृंखला मूल्यानुपात (L.R.)**	**श्रृंखला घातांक (Chain indices)**
1990	376	....	376
1991	392	$\frac{392}{376} \times 100 = 104.26$	$\frac{376 \times 104.26}{100} = 392$
1992	408	$\frac{408}{392} \times 100 = 104.08$	$\frac{392 \times 104.08}{100} = 408$
1993	380	$\frac{380}{408} \times 100 = 93.14$	$\frac{408 \times 93.14}{100} = 380$
1994	392	$\frac{392}{380} \times 100 = 103.16$	$\frac{380 \times 103.16}{100} = 392$
1995	400	$\frac{400}{392} \times 100 = 102.04$	$\frac{393 \times 102.04}{100} = 400$

टिप्पणी:— यह नोट किया जा सकता है कि श्रृंखला आधार घातांक बराबर हैं नियत आधार घातांकों के। वास्तव में यह हमेशा यथार्थ होगा सूचकांकों के अकेले नियत श्रेणियों के लिए।

उदाहरण 8.18: नीचे दिए गए श्रृंखला आधार सूचकांक के लिए, नियत आधार सूचकांक ज्ञात करें :

वर्ष :	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
श्रृंखला आधार घातांक :	80	110	120	90	140

हल : सूत्र (8.31) का प्रयोग करने पर, viz.

$$\text{चालू वर्ष F.B.I.} = \frac{\text{चालू वर्ष C.B.I.} \times \text{पिछले वर्ष का F.B.I.}}{100}$$

प्रथम वर्ष का F.B.I. वही होगा जो प्रथम वर्ष का C.B.I.; हम F.B.I. संख्याओं को प्राप्त करते हैं सारणी 8.3 में।

सारणी क्र. 8.3: C.B.I. संख्याओं का F.B.I संख्याओं में रूपांतरण

वर्ष	**श्रृंखला सूचकांक**	**नियत आधार सूचकांक**
1995	80	80
1996	110	$\frac{80 \times 110}{100} = 88$
1997	120	$\frac{88 \times 120}{100} = 105.60$

1998	90	$\frac{105.60 \times 90}{100} = 95.04$
1999	140	$\frac{95.04 \times 140}{100} = 133.06$

टिप्पणी

उदाहरण 8.19: वस्तुओं के तीन समूहों के निम्नलिखित मूल्यों से 1995 से 1999 तक वर्षों के लिए, (a) श्रृंखला आधार सूचकांक ज्ञात करें 1995 तक श्रृंखलित

समूह	1995	1996	1997	1998	1999
I	4	6	8	10	12
II	16	20	24	30	36
III	8	10	16	20	24

(b) नियत आधार सूचकांक भी ज्ञात करें 1995 आधार वर्ष के साथ।

हलः— (a) श्रृंखला आधार सूचकांकों की गणना

समूह	मूल्यानुपात (1995-100)				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
I	100	$\frac{6}{4} \times 100 = 150$	$\frac{8}{6} \times 100 = 133.33$	$\frac{10}{8} \times 100 = 125$	$\frac{12}{10} \times 100 = 120$
II	100	$\frac{20}{16} \times 100 = 125$	$\frac{24}{20} \times 100 = 120.00$	$\frac{30}{24} \times 100 = 125$	$\frac{36}{30} \times 100 = 120$
III	100	$\frac{10}{8} \times 100 = 125$	$\frac{16}{10} \times 100 = 160.00$	$\frac{20}{16} \times 100 = 125$	$\frac{24}{20} \times 100 = 120$
कुल L.R.	300	400	413.33	375	360
और L.R. (A.M.)	100	133.33	137.78	125	120
श्रृंखला घातांक	100	$\frac{100}{100} \times 133.33$ $= 133.33$	$\frac{137.78}{100} \times 133.33$ $= 183.70$	$\frac{125}{100} \times 183.70$ $= 229.63$	$\frac{120}{100} \times 229.63$ $= 275.56$

(b) नियत आधार सूचकांकों की गणना

समूह	मूल्यानुपात (1995-1999)				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
I	100	$\frac{6}{4} \times 100 = 150$	$\frac{8}{4} \times 100 = 200$	$\frac{10}{4} \times 100 = 250$	$\frac{12}{4} \times 100 = 300$

टिप्पणी

II	100	$\frac{20}{16}\times 100 = 125$	$\frac{24}{16}\times 100 = 150$	$\frac{30}{16}\times 100 = 187.5$	$\frac{36}{16}\times 100 = 225$
III	100	$\frac{10}{8}\times 100 = 125$	$\frac{16}{8}\times 100 = 200$	$\frac{20}{8}\times 100 = 250$	$\frac{24}{8}\times 100 = 300$
कुल मूल्यानुपातों का सूचकांक	300	400	550	687.5	825
सूचकांक (मूल्यानुपातों का औसत)	100	133.33	183.33	229.17	275

टिप्पणीः यह अवलोकित किया जा सकता है कि दोनों विधियों से प्राप्त सूचकांक प्रथम दो वर्षों के लिए बराबर हैं और वे बाकी वर्षों के लिए भिन्न हैं। यह विभिन्न समूहों के मूल्यों का औसतन (संयुक्त कर) करने की वजह से है।

8.9 आधार वर्ष परिवर्तन, शिरोबन्धन और सूचकांक का अपस्फीति (Base Shifting, Splicing and Deflating of Index Numbers)

8.9.1 आधार परिवर्तन (Base Shifting)

आधार वर्ष का परिवर्तन का अर्थ है दिए आधार अवधि (वर्ष में एक श्रेणी का सूचकांक का परिवर्तन का और उसे एक नई श्रेणी में फिर से परिकलित किया जाता है किसी नजदीकी आधार वर्ष पर आधारित। यह कदम कभी-कभी काफी आवश्यक हो जाता है निम्नलिखित परिस्थितियों में:

(i) जब आधार वर्ष बहुत पुराना या बहुत दूर होता है चालू वर्ष से सार्थक और वैध तुलनाओं के लिए। जैसा पहले ही इंगित किया जा चुका है (आधार वर्ष का चुनाव 8.4), आधार वर्ष को सामान्य वर्ष होना चाहिए आर्थिक स्थायित्व का और दिए वर्ष से बहुत दूर नहीं होना चाहिए।

(ii) अगर हम चाहते हैं सूचकांकों की श्रेणी की तुलना करना विभिन्न आधार वर्षों के साथ, तो तीव्र और वैध तुलनीयता के लिए दोनों श्रेणियों को अभिव्यक्त किया जाना चाहिए एक उभयनिष्ठ आधार वर्ष के साथ।

आधार परिवर्तन के लिए वांछित है सम्पूर्ण श्रेणियों के सूचकांकों का पुर्नगणना नए आधार वर्ष के साथ। यद्यपि, यह बहुत कठिन और समय खपत करने वाला काम है। आपेक्षिक रूप से सरल, यद्यपि सन्निकट विधि है नए आधार वर्ष के सूचकांकों के लिए 100 लेकर और तब दिए गए सूचकांकों की श्रेणियों को सूचकांक के प्रतिशत के रूप में चुने गए काल अवधि नए आधार वर्ष के रूप में अभिव्यक्त करना। इसलिए, सूचकांकों की श्रेणियों, एक नए आधार वर्ष पर पुनः परिकलित करने का सूत्र प्राप्त किया जाता है :

टिप्पणी

पुनः परिकलित सूचकांक (I.No.) किए वर्ष का

$$= \frac{\text{पुराना I.No. वर्ष का}}{\text{नए आधार वर्ष का I.No.}} \times 100 \qquad \ldots(8.32)$$

$$= \left(\frac{100}{\text{नए आधार वर्ष का सूचकांक}}\right) \times \text{पुराना I.No. वर्ष का} \qquad \ldots(8.32a)$$

दूसरे शब्दों में, सूचकांकों की नई श्रृंखला प्राप्त की जाती है। पुराने सूचकांक को उभयनिष्ठ अवयव से गुणा करके,

$$\frac{100}{\text{नए आधार वर्ष का I.No.}} \qquad \ldots(8.32b)$$

इस तकनीक को नीचे वर्णित किया गया है संख्यात्मक दृष्टांत द्वारा।

टिप्पणी: यथार्थता (सख्तीपूर्वक) से कहने पर उपर्युक्त विधि प्रयुक्त होती है सिर्फ और सिर्फ अगर दिया गया सूचकांक चक्रीय परीक्षण की संतुष्ट करती है (i.e., केली के नियत आधार विधि पर आधारित सूचकांक या मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य)। यद्यपि, सूचकांकों में से ज्यादातर दूसरे विधियों पर आधारित भी परिणाम देती हैं, जो व्यवहार में, बहुत नजदीक होती है सैद्धान्तिक सही मूल्यों के।

उदाहरण 8.20: निम्नलिखित घातांकों को पुनःनिर्मित करें 2000 को आधार वर्ष प्रयुक्त कर :

वर्ष :	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
सूचकांक :	110	130	150	175	180	200	220

हलः सूचकांक (आधार 2000 = 100)

वर्ष	**सूचकांक**	**सूचकांक (आधार 2000 = 100)**
1996	110	$\frac{100}{180} \times 110 = 61.11$
1997	130	$\frac{100}{180} \times 130 = 72.22$
1998	150	$\frac{100}{180} \times 150 = 83.33$
1999	175	$\frac{100}{180} \times 175 = 97.22$
2000	180	100.00
2001	200	$\frac{100}{180} \times 200 = 111.11$
2002	220	$\frac{100}{180} \times 220 = 122.22$

टिप्पणी

8.9.2 शिरोबन्धन (Splicing)

आधार परिवर्तन के सिद्धान्त का प्रयोग शिरोबन्धन के तकनीक में है जो दो या दो से अधिक सूचकांकों की श्रेणी को अतिच्छादित कर लेता है एक अकेला सतत श्रेणी प्राप्त करने के लिए। सूचकांक की श्रेणी की इस निरंतरता की आवश्यकता तुलनाओं को सुगम बनाती है। हम मान लें कि हमें सूचकांकों की एक श्रेणी है आधार वर्ष के साथ कहें, 'a' और यह अवधि 'b' में विच्छिन्न (Discontinued) हो जाती है और पहली श्रेणी की समापन अवधि के साथ आधार जैसा i.e., अवधि 'b' आधार के समान, सूचकांकों की दूसरी श्रेणी (उन्हीं मदों के साथ) निर्मित होती है उसी विधि (सूत्र) से। तुलनीयता की निरंतरता को आश्वस्त करने के क्रम में दो श्रेणियाँ एक साथ रखी जाती हैं या एक साथ शिरोबन्धन किया जाता है सतत श्रेणी पाने के लिए। विधि का वर्णन सारणी 8.4 में किया गया है।

सारणी क्र. 8.4: दो सूचकांक श्रेणियों का शिरोबन्धन

वर्ष	श्रेणी I आधार 'a'	श्रेणी II आधार 'b'	श्रेणी II शिरोबन्धित श्रेणी I के (आधार 'a')	श्रेणी I शिरोबन्धित श्रेणी II के (आधार 'b')
a	100		100	100/arx100
a+1	a_1		a_1	100/arxa_1
a+2	a_2		a_2	100/arxa_2
:	:	:	:	:
b-1	a_{r-1}		a^{r-1}	100/arxa^{r-1}
b	ar	100	ar	100
b+1	:	b_1	ar/100xb_1	b_1
b+2	:	b_2	ar/100xb_2	b_2
b+3	:	b_3	ar/100xb_3	b_3

स्पष्टीकरण व्याख्याः जब श्रेणी II शिरोबन्धित होती है श्रेणी I के सतत श्रेणी पाने के लिए आधार 'a' के साथ, श्रेणी II का 100 a_r हो जाता है,

$\Rightarrow$ समूह II का b_1 हो जाता है $\dfrac{ar}{100} \times b_1$

और समूह II का b_2 हो जाता है $\dfrac{ar}{100} \times b_2$

और आगे। इसलिए, समूह II के प्रत्येक घातांक को नियत अवयव $\frac{a_r}{100}$ के साथ गुणा करने पर, सूचकांकों के एक नई श्रेणी पाती है श्रेणी I (नियत 'a') के शिरोबन्धित। इस स्थिति में श्रेणी I भी कही जाती है आगे शिरोबन्धित।

अगर हम श्रेणी I को शिरोबन्धित करें श्रेणी II के एक नई सतत श्रेणी आधार 'b' के साथ पाने के लिए, तब

Ist श्रेणी का a_r हो जाता है 100,

Ist श्रेणी का a_{r-1} हो जाता है $\frac{100}{ar} \times ar_{-1}$

Ist श्रेणी का a_2 हो जाता है $\frac{100}{ar} \times a_2$

और आगे। इस तरह, सूचकांकों की नई श्रेणी श्रेणी I के साथ श्रेणी II को (आधार 'b') प्राप्त किया जाता है श्रेणी I के प्रत्येक घातांक को नए अवयव $\frac{100}{ar}$ के द्वारा गुणन करके। इस स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि श्रेणी II पीछे शिरोबन्धित है। हम नीचे कुछ संख्यात्मक दृष्टांत देते हैं तकनीक का वर्णन करने के लिए।

टिप्पणी: यह इंगित किया जा सकता है कि आधार परिवर्तन जैसा शिरोबन्धन की तकनीक परिशुद्ध परिणाम देगी सूचकांकों के लिए जो चक्रीय परीक्षण को संतुष्ट करती है, i.e., केली के नियत भारण विधि पर आधारित सूचकांक या मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य।

उदाहरण 8.21: दिए गए निम्नलिखित मूल्यों से :

	A	B
1964	$\Sigma p_0q_0 = 10$ रु	
1965	$\Sigma p_1q_0 = 12$ रु	
1966	$\Sigma p_2q_0 = 15$ रु	
1967	$\Sigma p_3q_0 = 20$ रु	$\Sigma p_3q_3 = 25$ रु
1968		$\Sigma p_4q_3 = 30$ रु
1969		$\Sigma p_5q_3 = 30$ रु
1970		$\Sigma p_6q_3 = 45$ रु

(i) दो मूल्य घातांकों को परिकलित करें : q_0 के साथ A भारों जैसा और q_3 के साथ B भारों जैसा।

(ii) दो श्रेणियों को शिरोबन्धित करें 'A' को एक सतत श्रेणी बनाने के लिए।

टिप्पणी

हल : सूचकांक B शिरोबंधित श्रेणी A के

वर्ष	सूचकांक श्रेणियाँ		सूचकांक श्रेणियाँ 'B'
(1)	A (q_0 भारों जैसा) आधार 1964(2)	B (q_3 भारों जैसा) आधार 1967(3)	शिरोबन्धित श्रेणियाँ 'A' के आधार 1964 (4)=200/100x(3)
1964	100		100
1965	$\frac{12}{10} \times 100 = 120$		120
1966	$\frac{15}{10} \times 100 = 150$		150
1967	$\frac{20}{10} \times 100 = 200$	100	200
1968		$\frac{30}{25} \times 100 = 120$	$\frac{200}{100} \times 120 = 240$
1969		$\frac{40}{25} \times 100 = 160$	$\frac{200}{100} \times 160 = 320$
1970		$\frac{45}{25} \times 100 = 180$	$\frac{200}{100} \times 180 = 360$

(i) A श्रेणी के लिए सूचकांक भारों जैसा q_0 के साथ (आधार 1964 = 100) उपर्युक्त सारणी का स्तंभ (2) में दी जाती है और श्रेणी B के लिए सूचकांक भारों जैसा q_3 के साथ (आधार 1967 = 100) उपर्युक्त सारणी के स्तंभ (3) में दिया गया है।

(ii) दो श्रेणियों को शिरोबन्धित करने के लिए 'A' को बनाने के लिए, एक सतत श्रेणी (आधार 1964 = 100 के साथ), हमें श्रेणी 'B' को श्रेणी 'A' का शिरोबन्धित करना है, उपर्युक्त सारणी के अंतिम स्तंभ में जैसा किया गया है।

उदाहरण 8.22: नीचे दी गई हैं दो मूल्य घातांक श्रेणियाँ। उनहें 1994 = 100 आधार पर शिरोबन्धित करें। किस प्रतिशत से स्टील की कीमत 1990 और 1995 के बीच बढ़ती है?

टिप्पणी

वर्ष	स्टील के लिए पुराना मूल्य घातांक : (आधार 1985=100)	स्टील का नया मूल्य घातांक : (आधार 1994=100)
1990	141.5	
1991	163.7	
1992	158.2	
1993	156.2	99.8
1994	157.1	100.0
1995		102.3

हलः

वर्ष	स्टील के लिए पुराना मूल्य घातांक : (आधार 1985=100)	स्टील का नया मूल्य घातांक : (आधार 1994=100)
1990	141.5	$\frac{100}{157.1} \times 141.5 = 90.07$
1991	163.7	$\frac{100}{157.1} \times 163.7 = 104.20$
1992	158.2	$\frac{100}{157.1} \times 158.2 = 100.70$
1993	156.8	$\frac{100}{157.1} \times 156.8 = 99.81$
1994	157.1	100.0
1995		102.3

इसलिए, स्टील के मूल्य में प्रतिशत वृद्धि 1990 और 1995 के बीच है

$$\frac{102.30 - 90.07}{90.07} \times 100 = 0.1358 \times 100 = 13.58$$

इसलिए वांछित वृद्धि 13.58% है।

टिप्पणीः जब पुराने घातांक को नए घातांक में शिरोबन्धित किया जाता है (आधार 1994), 1994 के लिए सूचकांक, viz. 157.1 हो जाता है 100

इसलिए, शिरोन्धन के लिए गुणन अवयव है $\frac{100}{157.1} = 0.6365$

उदाहरण 8.23: 1920 में, एक सांख्यिकीय ब्यूरो ने उत्पादन का घातांक शुरू किया 1914 पर आधारित निम्नलिखित परिणामों के साथ :

वर्ष	1914 (आधार)	1920	1929
घातांक	100	120	200

टिप्पणी

1936 में, ब्यूरो घातांक को पुर्ननिर्मित करता है एक योजना से आधार 1929 के साथ

वर्ष :	1929 (आधार)	1935
घातांक :	100	150

1936 में, ब्यूरो ने फिर घातांक पुर्ननिर्मित किया दूसरी योजना पर आधार वर्ष 1935 के साथ।

वर्ष :	1935 (आधार)	1939	1943
घातांक :	100	120	150

सतत श्रेणी प्राप्त करें 1935 आधार के साथ, तीन श्रेणियों के शिरोबन्धन द्वारा।

हलः सबसे पहले हम प्रथम श्रेणी को शिरोबन्धित करेंगे (आधार 1914) दूसरी श्रेणी का (आधार 1929)। ऐसा करके 1929 के लिए पुराना सूचकांक viz. 200 हो जाता है 100 इसलिए शिरोबन्धन के लिए गुणन अवयव है

$$\frac{100}{200} = 0.5$$

तब हम नए सतत श्रेणी (आधार 1929) के साथ तीसरी श्रेणी (आधार 1935) को शिरोबन्धित करते हैं। यहाँ 1935 का पुराना सूचकांक, viz. 150 हो जाता है 100। इसलिए, शिरोबन्धन के लिए गुणन अवयव है

$$\frac{100}{150} = 0.6667$$

वर्ष	**प्रथम श्रेणी (आधार 1914)**	**प्रथम श्रेणी शिरोबन्धित दूसरी श्रेणी का (आधार 1929)**	**प्रथम दो श्रेणियाँ तीसरी श्रेणी को शिरोबन्धित (आधार 1935)**
1914	100	$\frac{100}{200} \times 100 = 50$	$\frac{100}{150} \times 50 = 33.33$
1920	120	$\frac{100}{200} \times 120 = 60$	$\frac{100}{150} \times 60 = 40.00$
1929	200	100	$\frac{100}{150} \times 100 = 66.67$
1935		150	100
1939			120
1943			150

8.9.3 सूचकांकों का अपस्फीति (Deflating of Index Numbers)

अपस्फीति का अर्थ है मूल्य का व्यवस्थापन, सही करना या घटना जो स्फीत है। इसलिए, सूचकांकों के अपस्फीति से हम समझते हैं उन्हें व्यवस्थापित करना बदलते मूल्य स्तरों के स्वीकृत प्रभाव के लिए। यह विशेष रूप से इच्छित है वैसी अर्थव्यवस्था की स्थिति में जिसमें अपस्फीति की अभिनति है क्योंकि ऐसी अर्थव्यवस्था में, वस्तुओं या मदों के मूल्य में वृद्धि वर्षों के ऊपर का अर्थ है उनकी वास्तविक आय में गिरावट (जो मुद्रा के क्रय शक्ति से परिभाषित है), और क्रमानुसार उनके मौद्रिक आय या अवास्तविक आय में वृद्धि उनकी वास्तविक आय में वृद्धि की मात्रा तक नहीं हो सकती है। इसलिए, यह आवश्यक हो जाता है व्यवस्थापित करना अवास्तविक वेतनवृद्धि को संगत मूल्य घातांक के अनुसार ताकि वास्तविक आय तक पहुँच सकें। क्रय शक्ति सूचकांक के व्युत्क्रम से दी जाती है और क्रमानुसार वास्तविक आय (या वेतन) प्राप्त किया जाता है मुद्रा या अवास्तविक आय को भाग देकर संगत उपयुक्त मूल्य घातांक से और परिणाम को 100 से गुणा करके।

संकेताक्षरों में,

$$\text{वास्तविक वेतन} = \frac{\text{मुद्रा या अवास्तविक वेतन}}{\text{मूल्य घातांक}} \times 100$$

वास्तविक आय स्फीत आय (Deflated Income) भी कहलाती है।

इस तकनीक का विस्तृत प्रयोग होता है मूल्य श्रेणियों या मूल्य घातांकों रुपए की बिक्री, वस्तुओं के भंडार, आय, वेतन और इसी तरह आगे को स्फीत करने में।

उदाहरण 8.24: एक समूह के कामगारों का उपभोक्ता सामग्री मूल्य घातांक 1994 में 250 था 1980 आधार वर्ष के साथ।

(i) एक रुपये की क्रय शक्ति की गणना 1994 में करें 1980 की तुलना में।

(ii) उपभोक्ता सामग्री मूल्य घातांक किस मूल्य पर एक रुपये के क्रय शक्ति का 25 पैसा होगी ?

हलः (i) 1994 में एक रुपये की क्रय शक्ति आधार वर्ष 1980 के सापेक्ष दिया जाता है :

$$\text{एक रुपये की क्र. श.} = \frac{100}{\text{1994 के लिए उपभोक्ता मूल्य घातांक}} \quad \text{-----(*)}$$

आधार 1980 के सापेक्ष मूल्य घातांक

$$= \frac{100}{250} \text{ रुपये} = 0.40 \text{ रु.}$$

इसका मतलब है कि अगर एक व्यक्ति 0.40 रु. 40 पैसा खर्च करता था मालों को खरीदने में 1980 में, उसे 1994 में उसी माल को खरीदने के लिए एक रु. खर्च करना पड़ता है।

टिप्पणी

(ii) अगर हम चाहते हैं एक रुपये की क्रय शक्ति 1994 में 0.25 रु. हो जाए, तब (*) से हम पाते हैं

1994 के लिए उपभोक्ता मूल्य घातांक 1980 के सापेक्ष

$$= \frac{100}{\text{एक रुपये की क्रय}} = \frac{100}{0.25} = 400$$

उदाहरण 8.25: नीचे दी गई सारणी एक औद्योगिक कामगारों के एक समूह की औसत मजदूरी रुपये प्रति सप्ताह में दर्शाता है 1980–87 के दरम्यान। उपभोक्ता मूल्य घातांक इन वर्षों का 1980 आधार वर्ष के साथ भी दर्शाए गए हैं

वर्ष :	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
कामगारों का औसत : मजदूरी (रु.)	119	133	144	157	175	184	189	194
उपभोक्ता : मूल्य घातांक	100	107.6	106.6	107.6	116.2	118.9	119.8	120.2

(i) कामगारों का वास्तविक मजदूरी निर्धारित करें 1980–87 के दरम्यान 1980 में उनके मजदूरी की तुलना में।

(ii) रुपये के क्रय शक्ति का निर्धारण 1987 के लिए करें 1980 की तुलना में। इस परिणाम की सार्थकता क्या है?

हल : वास्तविक वेतन प्राप्त किए जाते हैं औसत वेतन को संगत सूचकांक से भाग देकर और 100 से गुणा करके, और नीचे सारणी में दी गई हैं।

वर्ष	**कामगारों की औसत मजदूरी (1)**	**उपभोक्त मूल्य सूचकांक आधार 1980 = 100 (2)**	**कामगारों की वास्तविक मजदूरी (3) =(1)/(2) x 100**
1980	119	100	$\frac{119}{100} \times 100 = 119.00$
1981	133	107.6	$\frac{133}{107.6} \times 100 = 123.61$
1982	144	106.6	$\frac{144}{106.6} \times 100 = 135.08$
1983	157	107.6	$\frac{157}{107.6} \times 100 = 145.91$
1984	175	116.2	$\frac{175}{116.2} \times 100 = 150.60$
1985	184	118.9	$\frac{184}{118.9} \times 100 = 154.78$

टिप्पणी

1986	189	119.8	$\frac{189}{119.8} \times 100 = 157.76$
1987	194	120.2	$\frac{194}{120.2} \times 100 = 161.39$

रुपये की क्रय शक्ति किसी वर्ष में 1980 की तुलना में दी जाती है संगत उपभोक्ता मूल्य घातांक के व्यत्क्रम से।

इसलिए, रुपये की क्रय शक्ति 1987 में 1980 की तुलना में,

$$= \frac{100}{120.2} = 0.83$$

इसका अर्थ है कि 1987 में हमें एक रु. खर्च करना है उस वस्तु के लिए

जिसका मूल्य 1980 में 83 पैसा है। इसका मतलब है कि यद्यपि 1987 में उसकी मजदूरी बहुत ज्यादा है 1980 की अपेक्षा, परन्तु उसकी माली हालत 1980 से बेहतर नहीं है, क्योंकि वास्तव में रुपये की क्रय शक्ति घटकर 0.83 रु. i.e., सिर्फ 83 पैसे रह गई है।

वर्ष	**वार्षिक आय (रु. में)**	**मूल्य सूचकांक**
1988	36,000	100
1989	42,000	120
1990	50,000	145
1991	55,000	160
1992	60,000	250
1993	64,000	320
1994	68,000	450
1995	72,000	530
1996	75,000	600

उदाहरण 8.26: संलग्न सारणी एक व्यक्ति की वार्षिक आय और सामान्य मूल्य सूचकांक 1988 से 1996 तक देती है। सूचकांक तैयार करें उस व्यक्ति के वास्तविक आय में परिवर्तन दर्शाने के लिए।

टिप्पणी

हल :

वर्ष (1)	वार्षिक आय (रु में) (2)	मूल्य सूचकांक (3)	वास्तविक आय (4)=(2)/(3) × 100	वास्तविक आय घातांक (1988=100) (5) =100/36,000 × (4)
1988	36,000	100	$\frac{36,000}{100}\times 100 = 36,000$	100
1989	42,000	120	$\frac{42,000}{120}\times 100 = 35,000$	$\frac{35,000}{36,000}\times 100 = 97.22$
1990	50,000	145	$\frac{50,000}{145}\times 100 = 34,482.75$	$\frac{34,482.75}{36,000}\times 100 = 95.48$
1991	55,000	160	$\frac{55,000}{160}\times 100 = 34.375$	$\frac{34,375}{36,000}\times 100 = 95.48$
1992	60,000	250	$\frac{60,000}{250}\times 100 = 24,000$	$\frac{24,000}{36,000}\times 100 = 66.66$
1993	64,000	320	$\frac{64,000}{320}\times 100 = 20,000$	$\frac{20,000}{36,000}\times 100 = 55.55$
1994	68,000	450	$\frac{68,000}{450}\times 100 = 15,111.11$	$\frac{15,111.11}{36,000}\times 100 = 41.97$
1995	72,000	530	$\frac{32,000}{530}\times 100 = 13,589.90$	$\frac{13,589.90}{36,000}\times 100 = 37.75$
1996	75,000	600	$\frac{75,000}{600}\times 100 = 12,500$	$\frac{12,500}{36,000}\times 100 = 34.72$

8.10 जीवन निर्वाह सूचकांक (Cost of Living Index Number)

थोक मूल्य सूचकांक मूल्यों के सामान्य स्तर में परिवर्तनों को मापती है और वे असफल हो जाती हैं मूल्यों की वृद्धि या ऱ्हास से एक समाज को विभिन्न वर्गों या समूहों के लोगों पर जीवन निर्वाह पर इसके पड़ने वाले असर को प्रतिबिंबित करने में। जीवन निर्वाह सूचकांक, जिसे ''उपभोक्ता मूल्य सूचकांक'' या ''खुदरा मूल्य सूचकांक'' भी कहा जाता है जो बहुत सारी वस्तुओं और सेवाओं के मूल्यों में परिवर्तन का समाज के खास समुदाय या वर्ग की क्रय शक्ति पर प्रभाव को मापने के लिए रूपांकित किया जाता है किसी दी गई अवधि (चालू) के दौरान किसी नियत (आधार) अवधि के सापेक्ष। वे प्रतिबिंबित करती हैं एक वर्ग के लोगों द्वारा उपभोक्ता सामग्री के औसत मूल्य में वृद्धि का ताकि वे वही जीवन निर्वाह का स्तर

कायम रख सकें चालू, वर्ष में जैसा आधार वर्ष में था। विभिन्न वर्ग या समुदाय के लोगों के आस्वादन, रिवाजों और फैशन में विस्तृत विभेद के कारण, उनका उपभोग पैटर्न भी विभिन्न उपभोक्ता सामग्रियों का विस्तृत रूप से भिन्न होता है वर्ग से वर्ग का या समूह से समूह का (जैसे गरीब, निम्न आय वर्ग, उच्च आय वर्ग, श्रमिक वर्ग, औद्योगिक कामगार, कृषि कामगार इत्यादि) और यहाँ तक कि समान वर्ग या समूह के अन्तर्गत क्षेत्र–क्षेत्र के बीच (ग्रामीण, शहरी, तराई, पहाड़ी इत्यादि)। क्रमानुसार मूल्य में परिवर्तन इन लोगों को प्रभावित करती है (विभिन्न वर्गों या समूह या क्षेत्र के लोगों को) विभिन्न तरीके से। इसलिए, विभिन्न उपभोक्ता वस्तुओं के मूल्यों में वृद्धि या गिरावट के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए एक खास समूह या वर्ग के लोगों का उनके जीवन निर्वाह पर, 'जीवन निर्वाह' सूचकांक निर्मित की जाती है अलग–अलग समाज के विभिन्न समुदायों या समूहों या वर्गों के लोगों के लिए और विभिन्न भौगोलिक क्षेत्रों जैसे शहर, महानगर, ग्रामीण क्षेत्र, शहरी क्षेत्र, पहाड़ी क्षेत्र इत्यादि के लिए।

टिप्पणीः इसे स्पष्ट रूप से समझ लिया जाना चाहिए कि जीवन निर्वाह सूचकांक जीवन निर्वाह में होने वाले परिवर्तनों या एक खास वर्ग के लोगों की क्रय शक्ति पर सिर्फ खुदरा मूल्यों के परिवर्तनों (उठना या गिरना) के कारण पड़ने वाले प्रभाव का मापन करती है। वे जीवन निर्वाह के ऐसे परिवर्तनों जो जीवन स्तर में बदलाव के कारण उत्पन्न होती है का मापन नहीं करती है। जीवन निर्वाह सूचकांक का 'जीवन यापन स्तर' की तरह व्याख्या नहीं किया जाना चाहिए। जीवन निर्वाह सूचकांक खुदरा मूल्यों पर आधारित है और मूल्य एक ऐसा अवयव है जो वर्ग के लोगों की क्रय शक्ति को प्रभावित करती है। परन्तु वस्तुओं या उपभोक्ता सामग्रियों का मूल्य सिर्फ एक अवयव है जिस पर लोगों का जीवन स्तर निर्भर करता है, कुछ दूसरे अवयव हैं परिवार का आकार इसकी उम्र और लिंग के अनुसार संरचना, इसकी आय और पेशा, स्थान, क्षेत्र इत्यादि जिनमें से किसी का भी लेखा जीवन निर्वाह सूचकांक की गणना करते वक्त नहीं रखा जाता है। क्रमानुसार, श्रम सांख्यिकीविदों का छठा अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन जो अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संगठन (आई.एल.ओ.) के तत्वावधान में 1949 में आयोजित किया गया ने, 'जीवन निर्वाह' पद की जगह एक ज्यादा उपयुक्त पद 'उपभोक्ता मूल्य सूचकांक' या 'खुदरा मूल्य सूचकांक' की अनुशंसा की।

8.10.1 जीवन निर्वाह सूचकांकों के निर्माण में मुख्य चरण (The important steps in preparation of Living Index Numbers)

(a) उद्देश्य और विस्तारः किसी सूचकांक की स्थिति में, पहला कदम जीवन निर्वाह सूचकांकों के निर्माण की है स्पष्ट रूप से उल्लेख करना लोगों का वर्ग (निम्न आय, उच्च आय, श्रमिक वर्ग, औद्योगिक कामगार, कृषि कामगार, इत्यादि) जिनके लिए घातांक वांछित है। लोगों के वर्ग के साथ–साथ, भौगोलिक क्षेत्र जैसे ग्रामीण क्षेत्र, शहरी क्षेत्र, शहर या महानगर, एक शहर का इलाका इत्यादि स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए। वर्ग ऐसी बनावट की हो, जहाँ तक संभव हो, एक समांगी समूह आय के सापेक्ष।

टिप्पणी

टिप्पणी: जैसा पहले ही इंगित किया गया है, जीवन निर्वाह सूचकांक जीवन निर्वाह के परिवर्तनों को अध्ययन करने के इरादे से (मूल्यों के परिवर्तन की वजह से) एक खास वर्ग के लोगों का एक खास क्षेत्र में रहने वालों के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए, हम एक अकेला जीवन निर्वाह सूचकांक नहीं निर्मित कर सकते हैं, कहें निम्न आय वर्ग के लोगों का पूरे देश के लिए क्योंकि वस्तुओं के खुदरा मूल्यों और इस वर्ग के लोगों का देश के विभिन्न क्षेत्रों (राज्यों) में उपभोग पैटर्न में विस्तृत भिन्नता है। इसलिए, विभिन्न वस्तुओं का आपेक्षिक महत्व विभिन्न क्षेत्रों में भिन्न होती है। उदाहरण के लिए, बंगाल में चावल और मछली का अपेक्षया अधिक महत्व है गेहूं और माँस की तुलना में। क्रमानुसार 'लोगों का वर्ग' उनके क्षेत्र या रहने की जगह के साथ स्पष्ट रूप से उल्लिखित होना चाहिए।

(b) पारिवारिक बजट अन्वेषण (पूछ-ताछ): चरण (a) के बाद, दूसरा चरण है प्रतिदर्श 'पारिवारिक बजट अन्वेषण' को संचालित करना। यह किया जाता है प्रतिनिधि परिवारों के पर्याप्त संख्या के प्रतिदर्शों का चुनाव करके लोगों के वर्गों के लिए जिनके लिए सूचकांक की संरचना की गई है। अन्वेषण आर्थिक स्वामित्व को सामान्य अवधि में संचालित किया जाना चाहिए। अन्वेषण का उद्देश्य है उन खर्चों को ज्ञात करना जो एक औसत परिवार (दिए वर्ग का) उपभोग के विभिन्न मदों पर करती है। अन्वेषण निम्नलिखित बिंदुओं पर सूचना एकत्रित करती है :

1. दिए वर्ग के लोगों द्वारा उपभोक्ता वस्तुओं की प्रकृति, गुणवत्ता और परिमाण।

उपभोक्ता सामग्रियाँ मोटे तौर पर निम्नलिखित पाँच बड़े समूहों में वर्गीकृत की जाती हैं (i) भोजन, (ii) वस्त्र, (iii) ईंधन और प्रकाश-व्यवस्था (iv) घर–भाड़ा और (v) विविध

इनमें से ये प्रत्येक बड़े समूह आगे छोटे समूहों में उप–विभाजित की जाती हैं जिन्हें 'उप–समूह' कहते हैं। उदाहरण के तौर पर, भोजन उपविभाजित की जा सकती है अनाज (गेहूं, चावल, दाल इत्यादि) में; माँस, मछली और चिकेन; दूध और दूध उत्पादों; वसा और तेल; फलों और सब्जियाँ; मसाले और गर्म मसाले; चीनी; गैर–अल्कोहालिक पेय; पान, सुपारी और तंबाकू इत्यादि। उसी तरह से वस्त्र के अन्तर्गत आ सकती है पहनने के कपड़े, बिछावन, पैर में पहनने वाले इत्यादि। अन्तिम मद 'विविध' अन्तर्विष्ट करता है जैसे चिकित्सा खर्च, शिक्षा और पठन–पाठन, आमोद–प्रमोद और मनोरंजन, गिफ्ट और अनुदान, परिवहन और संचार–व्यवस्था, घरेलू अधिग्रहण, वैयक्तिक देखभाल और प्रभाव और इसी तरह आगे। यह हालाँकि, गैर–उपभोक्ता मुद्रा को अर्न्तवेशित नहीं करता है जैसे– भविष्य–निधि का भुगतान, इन्श्योरेस प्रीमियम, सेविंग सर्टिफिकेट और बॉण्डों की खरीद इत्यादि।

वस्तुओं के चुनाव की विधि सूचकांक के निर्माण की विस्तार से विचार की गई है 8.4 में। सावधानी रखी जानी चाहिए कि उन्हीं मदों या वस्तुओं को अन्तर्विष्ट करना चाहिए जो दिए वर्ग के लोगों द्वारा प्राथमिक रूप से उपभोक्त होती है जिनके लिए सूचकांक का निर्माण किया गया है।

2. विभिन्न उपभोक्ता वस्तुओं का खुदरा मूल्य जो सूचकांक के लिए चुनी गई है:– चुनी गई उपभोक्ता वस्तुओं की मूल्य सूची स्थानीय बाजार से ली जानी चाहिए जहाँ ऐसे वर्गों के लोग रहते हैं या सुपर बाजार से, उचित मूल्य की दुकानों या सहकारिता स्टोर्स या डिपार्टमेंटल स्टोर्स से जहाँ वो दुकानदारी करते हैं।

(विस्तार के लिए देखें 8.4)

3. वस्तुओं के मूल्य और उनके उपभोक्त परिमाण से, हम प्राप्त कर सकते हैं:

(i) प्रत्येक मद (मद समूह में) पर खर्च जो पूरे समूह पर खर्च के अनुपात के रूप में अभिव्यक्त की जाती है, और

(ii) प्रत्येक समूह पर खर्च अभिव्यक्त की जाती है सभी समूहों पर खर्च के समानुपात के रूप में।

8.10.2 जीवन निर्वाह सूचकांकों का निर्माण (Construction of Cost of Living Index Number)

जैसा पहले ही इंगित किया जा चुका है, उपभोग के विभिन्न वस्तुओं का आपेक्षिक महत्व भिन्न है लोगों के भिन्न वर्गों या समूहों के लिए और यहाँ तक उसी वर्ग के अंतर्गत भी क्षेत्र से क्षेत्र के बीच। क्रमानुसार, जीवन निर्वाह घातांक भारित घातांकों जैसे प्राप्त किए जाते हैं, वस्तुओं के आपेक्षिक महत्व को विचार में लेकर जिसका निर्णय विभिन्न मदों पर खर्च की राशि के आधार पर लिया जाता है। जीवन निर्वाह सूचकांक निम्नलिखित विधियों से निर्मित की जाती है :

विधि 1. समूहन खर्च विधि या भारित समूहन विधि (Aggregate Expenditure Method or Weighted Aggregate Method): इस विधि में, आधार वर्ष में उपभोक्ता परिमाण भारणों (Weights) जैसे प्रयुक्त होते हैं। इसलिए सामान्य संकेताक्षरों में :

$$\text{जीवन निर्वाह घातांक} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 \qquad \ldots(8.33)$$

$$= \frac{\text{चालू वर्ष में कुल खर्च}}{\text{आधार वर्ष में कुल खर्च}} \times 100$$

चालू वर्ष में कुल खर्च आधार वर्ष परिमाण को भारणों (Weights) जैसे के साथ प्राप्त की जाती है :

सूत्र (8.33) और कुछ नहीं बल्कि लासपियरे का मूल्य घातांक है।

विधि 2. पारिवारिक बजट विधि या भारित मूल्यानुपातों की विधि: इस विधि में जीवन निर्वाह घातांक प्राप्त की जाती है मूल्यानुपातों के भारित औसत को लेकर, भार होते हैं आधार वर्ष में उपभोक्त परिमाण के मूल्य। इस तरह, हम लिखते हैं

$$I = \text{मूल्यानुपात} = \frac{P_1}{P_0} \times 100 \qquad \text{और} \qquad W = p_0 q_0, \text{ तब}$$

$$\text{जीवन निर्वाह घातांक} = \frac{\Sigma WI}{\Sigma W} \qquad \ldots(8.34)$$

टिप्पणी

W और I के मूल्यों को व्यवस्थापन करने पर, हम पाते हैं

$$\text{जीवन निर्वाह घातांक} = \frac{\Sigma p_0 q_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

जो बराबर है (8.34) के।

टिप्पणीः इस तरह हम देखते हैं कि जीवन निर्वाह सूचकांक बराबर हैं दोनों विधियों से प्राप्त करने पर।

8.10.3 जीवन निर्वाह सूचकांकों के उपयोग (Uses of Cost of Living Index Number)

1. जीवन निर्वाह सूचकांक प्रयुक्त होती हैं मुद्रा की क्रय शक्ति का निर्धारण करने में और वास्तविक वेतन (आय) की गणना के लिए अवास्तविक या मौद्रिक वेतन (आय) से। हमें है :

$$\text{मुद्रा की क्रय शक्ति} = \frac{1}{\text{जीवन निर्वाह सूचकांक}} \qquad \ldots(8.35a)$$

$$\text{वास्तविक वेतन} = \frac{\text{मौद्रिक वेतन}}{\text{जीवन निर्वाह घातांक}} \times 100 \qquad \ldots(8.35b)$$

इस तरह, जीवन निर्वाह सूचकांक हमें समर्थ बनाता है ज्ञात करने में कि अगर वास्तविक वेतन बढ़ या घट रहा है, मौद्रिक वेतन अपरिवर्तनशील रहता है।

2. सरकारें (केन्द्रीय और/या राज्य) और बहुत सारे औद्योगिक और व्यापारिक इकाईयों सूचकांकों का प्रयोग महँगाई भत्ता (D.A.) के विनियमन या कर्मचारियों को बोनस भुगतान करने में करती हैं उन्हें मूल्य वृद्धि की वजह से बढ़े हुए जीवन निर्वाह के मूल्य के लिए क्षति–पूर्ति करने में। वे प्रयुक्त होती हैं सरकार द्वारा मूल्य नीतियों के, वेतन नीति और सामान्य आर्थिक नीतियों के नियमन में।

3. जीवन निर्वाह घातांकों का प्रयोग राष्ट्रीय लेखा के अपस्फीति आय और मूल्य श्रेणियों के लिए होता है। [विस्तार के लिए देखें —सूचकांकों का अपस्फीति]

4. जीवन निर्वाह सूचकांकों का विस्तृत प्रयोग वेतन संधि वार्ताओं और वेतन अनुबंधों में होता है। उदाहरण के लिए वे वेतनों के स्वतः विनियमन के लिए प्रयुक्त होती हैं सामूहिक समझौतों में 'सोपान वृद्धि धाराओं' के अन्दर। सोपान वृद्धि धारा वेतन में स्वतः वृद्धि कुछ बिंदु (सीमा) तक प्रदान करती है जो उपभोक्ता मूल्य घातांक के इकाई परिवर्तन के संगत होता है।

उदाहरण 8.27 किसी जीवन निर्वाह सूचकांक के निर्माण में, निम्नलिखित समूह सूचकांक पाए गए। जीवन निर्वाह सूचकांक का परिकलन करें प्रयुक्त करके

(i) भारित समान्तर माध्य, और (ii) भारित गुणोत्तर माध्य

	समूह	सूचकांक	भारण (Weights)
1.	भोजन	350	5
2.	ईंधन और प्रकाश	200	1
3.	वस्त्र	240	1
4.	मकान किराया	160	1
5.	विविध	250	2

टिप्पणी

हल :

उपभोक्ता मूल्य घातांक की गणना A.M.
और G.M. का प्रयोग कर

समूह	सूचकांक (I)	भार (W)	W.I.	log I	W log I
भोजन	350	5	1750	2.5441	12.7205
ईंधन और प्रकाश	200	1	200	2.3010	2.3010
वस्त्र	240	1	240	2.3802	2.3802
मकान किराया	160	1	160	2.2041	2.2041
विविध	250	2	500	2.3979	4.7958
		ΣW = 10	ΣWI = 2850		ΣW log I=24.4016

उपभोक्ता मूल्य घातांक, समान्तर माध्य का प्रयोग कर है

$$P_{01}\,(A.M.) = \frac{\Sigma WI}{\Sigma W} = \frac{2850}{10} = 285$$

गुणोत्तर माध्य का प्रयोग कर, उपभोक्ता मूल्य घातांक दिया जाता है,

$$\log P_{01}\,(G.M.) = \frac{\Sigma W \log I}{\Sigma W} = \frac{24.4016}{10} = 2.4401$$

$$\Rightarrow P_{01}\,(G.M.) = Anti\log(2.4401) = 275.4$$

उदाहरण 8.28: निम्नलिखित समंक से जीवन निर्वाह सूचकांक परिकलित करें:

मदें	आधार वर्ष	चालू वर्ष	भारें
भोजन	30	47	4
ईंधन	8	12	1
वस्त्र	14	18	3
मकान किराया	22	15	2
विविध	25	30	1

टिप्पणी

हल :

मदें	भार	मूल्य		मूल्यानुपात	
	W	आधार वर्ष (P_0)	चालू वर्ष (P_1)	$P = \frac{A}{P_0} \times 100$	W.P.
भोजन	4	30	47	156.67	626.67
ईंधन	1	8	12	150.00	150.00
वस्त्र	3	14	18	128.57	385.71
मकान किराया	2	22	15	68.18	136.36
विविध	1	25	30	120.00	120.00
	$\Sigma W = 11$				$\Sigma WP =$ 1418.74

जीवन निर्वाह सूचकांक $= \frac{\Sigma WP}{\Sigma W} = \frac{1418.74}{11} = 128.98$

उदाहरण 8.29: 1981 में कामगार वर्ग के लोगों के लिए गेहूँ 16 रु0 में प्रति 10 किलो ग्राम, कपड़ा 4 रु. प्रति मीटर, मकान किराया 50 रु. प्रति घर और विविध मदें 20 रु. प्रति इकाई बिक रहा था। 1991 तक गेहूँ 8 रु. प्रति 10 किलों से बढ़ गया, मकान किराया 30 रु. प्रति मकान और विविध मदों की कीमत दुगुनी हो गई। समूहों के भार क्रमानुसार 1:2:4:1 के अनुपात में थे। कामगार वर्ग का जीवन निर्वाह सूचकांक 1991 के लिए आधार वर्ष 1981 के साथ 175% था। कपड़े की कीमत कितनी बढ़ी 1981–91 की अवधि के दरम्यान?

हलः हम मान लें कि 1991 में कपड़ा का मूल्य x रु. प्रति मीटर था और चार समूहों के लिए भार : गेहूँ, कपड़ा, मकान किराया और विविध क्रमशः K, 2K, 4K और K थे, ताकि वे अनुपात 1:2:4:1 में हैं।

सारणी क्र. 8.5: जीवन निर्वाह सूचकांक का परिकलन

समूह	इकाई	मूल्य		भार	$P = \frac{P}{P_\cdot} \times 100$	WP
		1981 (P_0)	1991 (P_1)			
गेहूँ	10 कि.	16	16+8=24	k	150	150k
कपड़ा	1 मीटर	4	x	2k	25x	50xk
मकान किराया	1 मकान	50	50+30=80	4k	160	640k
विविध	1 इकाई	20	2×20=40	k	200	200k
				ΣW=8k		ΣWP= (99ok+50xk)

1991 के लिए जीवन निर्वाह सूचकांक 1981 आधार वर्ष पर दी जाती है

टिप्पणी

$$\frac{\Sigma WP}{\Sigma W} = 175 \text{ (दिया गया है) } \Rightarrow \frac{(990+50x)K}{8K} = 175$$

$$\therefore 990 + 50\,x = 175 \times 8 \Rightarrow x = \frac{1400-900}{8} = \frac{410}{8} = 8.20$$

इसलिए, 1981–91 अवधि के दरम्यान, कपड़े की कीमत बढ़ी

रुपये (x-4) = रुपये (8.20-4) = रु. 4.20 प्रति मीटर

उदाहरण 8.30 किसी जीवन निर्वाह सूचकांक के परिकलन में, निम्नलिखित भार प्रयुक्त हुए : भोजन 15, वस्त्र 3, किराया 4, ईंधन और प्रकाश 2, विविध 1. एक समंक के लिए घातांक परिकलित करें जब विभिन्न समूहों में मदों की कीमतों में औसत प्रतिशत वृद्धि आधार वर्ष के ऊपर क्रमशः 32, 54, 47, 78 और 58 थे।

मान लें कि एक बिजनेस एक्जीक्यूटिव आधार वर्ष में 2,050 रु. कमाता था। चालू अवधि में उसका वेतन क्या होना चाहिए अगर उसका जीवन का स्तर समान रहना है?

हलः प्रत्येक मद के लिए चालू सूचकांक प्राप्त किया जाता है मूल्य प्रतिशत वृद्धि में 100 जोड़कर

जीवन मूल्य घातांक के लिए परिकलन

समूह	और % वृद्धि मूल्यों में	समूह घातांक (I)	भार	WI
(1)	(2)	(3)=100+(2)	(W)	
भोजन	32	132	15	1,980
वस्त्र	54	154	3	462
किराया	47	147	4	588
ईंधन और प्रकाश	78	178	2	356
विविध	58	158	1	158
			ΣW=25	ΣWI=3,544

जीवन निर्वाह घातांक $= \frac{\Sigma WI}{\Sigma W} = \frac{3,544}{25} = 141.76$

इसका अर्थ है कि अगर एक व्यक्ति 100 रु. पाता था आधार वर्ष में, तो मूल्य वृद्धि का पूर्णतः क्षति–पूर्ति करने में, उसका वेतन चालू अवधि में 141.76 रु. होना चाहिए। इसलिए अगर एक बिजनेस एग्जीक्यूटिव आधार वर्ष में 2050 रु. कमा रहा था, उसका वेतन चालू अवधि में होना चाहिए :

$$\frac{141.76}{100} \times 2,050 = 2906.08 \text{ रुपये}$$

उसे समर्थता प्रदान करने के क्रय में ताकि समान जीवन स्तर मूल्य वृद्धि के सापेक्ष वह बनाए रख सके, दूसरे अवयव नियत रहें।

टिप्पणी

उदाहरण 8.31 : एक वस्त्र कर्मचारी मुम्बई शहर में 3500 रु. प्रति माह कमाता है। एक विशेष माह के लिए जीवन निर्वाह सूचकांक 136 दिया गया है। निम्नलिखित समंक का प्रयोग कर, ज्ञात करें वह राशि जो उसने मकान भाड़ा और वस्त्र में खर्च किया।

समूह	खर्च	समूह घातांक
भोजन	1400	180
वस्त्र	?	150
मकान किराया	?	100
ईंधन और प्रकाश	560	110
विविध	630	80

हल : मान लें कि मकान किराया और ईंधन और प्रकाश में खर्च क्रमशः x और y हैं।

समूह	**खर्च (W)**	**समूह घातांक (I)**	**W.I.**
भोजन	1400	180	252000
वस्त्र	x	150	150 x
मकान किराया	y	100	100 y
ईंधन और प्रकाश	560	110	61600
विविध	630	80	50400
	ΣW=3500=x+ y+2590		ΣWI=364000+150 x+100y

जीवन निर्वाह का घातांक $= \dfrac{\Sigma EI}{\Sigma E} = \dfrac{364000 + 150x + 100y}{3500} = 136$ (दिया गया है)

$$\Rightarrow 364000 + 150x + 100 = 136 \times 3500 = 476000$$

$$\Rightarrow 150x + 100y = 476000 - 364000 = 112000 ------(*)$$

और $\Sigma W = x + y + 2590 = 3500$ (दिया गया है)

$$\Rightarrow x + y = 3500 - 2590 = 910 ----- (**)$$

(**) को 100 से गुणा करने पर हम पाते हैं,

$$100x + 100y = 91000----------------------(***)$$

(***) को (*) से घटाने पर,

हमें: $50x = 112000 - 91000 = 21000 \Rightarrow x = \frac{21000}{50} = 420$

(**) में व्यवस्थापित करने पर, हम पाते हैं

y = 910 – x = 910 – 420 = 490

इसलिए, कर्मचारी ने 420 रु. वस्त्र पर और 400 रु. मकान किराया पर खर्च किया।

उदाहरण 8.32: निम्नलिखित समंक से एक शहर के श्रमिक वर्ग के उपभोक्ता मूल्य घातांक से संबंधित, 1998 और 1999 के लिए सूचकांक परिकलित करें।

समूह :	**भोजन**	**वस्त्र**	**ईंधन और प्रकाश**	**मकान किराया**	**विविध**
भार :	48	18	7	13	14
समूह घातांक 1998 :	110	120	110	100	110
समूह घातांक 1999 :	130	125	120	100	135

1999 में वेतन में 8% की वृद्धि की गई। क्या यह वृद्धि पर्याप्त है?

हल : 1988 और 1999 के लिए सूचकांकों की गणना

समूह	**भार (W)**	**समूह घातांक 1998 (I)**	**समूह घातांक 1999(I_2)**	WI_1	WI_2
भोजन	48	110	130	5280	6240
वस्त्र	18	120	125	2160	2250
ईंधन और प्रकाश	7	110	120	770	840
मकान किराया	13	100	100	1300	1300
विविध	14	110	135	1540	1890
	$\Sigma W=100$			ΣW_1 =11050	ΣWI_2 =12520

1998 के लिए सूचकांक $= \frac{\Sigma WI_1}{\Sigma W} = \frac{11050}{100} = 110.5$

1999 के लिए सूचकांक $= \frac{\Sigma WI_2}{\Sigma W} = \frac{12520}{100} = 125.20$

इसलिए, उपभोक्ता मूल्य सूचकांक में वृद्धि 1998 से 1999 में है 125.2–110.5 = 14.7

इसलिए, 1999 के मूल्य में प्रतिशत वृद्धि है $\frac{147}{110.5} \times 100 = 13.3$

टिप्पणी

इसलिए, 1999 में वेतन में 8% की वृद्धि अपर्याप्त है 1998 के समान जीवन स्तर कायम रखने में।

उदाहरण 8.33: किसी शहर के मध्यमवर्गीय परिवारों के बजट के अन्वेषण ने प्रकट किया कि विभिन्न समूहों पर औसत प्रतिशत खर्च थे।

भोजन 45, किराया 15, वस्त्र 12, ईंधन और प्रकाश 8 विविध 20

चालू वर्ष के लिए समूह सूचकांक नियत आधार वर्ष की तुलना में क्रमशः 410, 150, 343, 248 और 285 थे। चालू वर्ष के लिए जीवन निर्वाह सूचकांकों को परिकलित करें।

मि. × 2400 रु. आधार वर्ष में पा रहे थे और चालू वर्ष में 4,300 रु. पा रहे हैं। बताएं कि उन्हें अतिरिक्त कितना भत्ता मिलना चाहिए। उनके पहले के जीवन स्तर को कायम रखने के लिए।

हलः विभिन्न समूहों पर प्रतिशत खर्चों को उनसे संयुक्त भार के रूप में माना जा सकता है।

जीवन निर्वाह सूचकांक दिया जाता है :

$$\frac{\Sigma WI}{\Sigma W} = \frac{45 \times 410 + 15 \times 150 + 12 \times 343 + 8 \times 246 + 20 \times 285}{45 + 15 + 12 + 8 + 20}$$

$$= \frac{32500}{100} = 325$$

इसका अर्थ है कि अगर एक व्यक्ति आधार वर्ष में 100 रु. पा रहा था, तो मूल्य वृद्धि के लिए उसको पूर्ण रूप से क्षतिपूर्ति के लिए, उसका वेतन चालू वर्ष में 325 रु. होना चाहिए। इसलिए, अगर मि. X आधार वर्ष में 2,400 रु. पा रहा था, उसका वेतन चालू वर्ष में होना चाहिए।

रुपये $\frac{325}{100} \times 2{,}400 = 7{,}800$ रु. प्रति माह

उसे समर्थ बनाने के क्रम में समान जीवन स्तर कायम रखने में मूल्य के सापेक्ष, दूसरे अवयव नियत रखते हुए। परन्तु मि. X का चालू वर्ष का वेतन 4300 रु. दिया गया है। इसलिए, उसे अतिरिक्त भत्ता मिलना चाहिए 7800 – 4300 = 3500 रु. समान जीवन स्तर कायम रखने के लिए जैसा आधार वर्ष में है।

उदाहरण 8.34: एक खास शहर के कामगार वर्ग का उपभोक्ता सूचकांक, विभिन्न मदों के विभिन्न समूहों के संगत भार निम्न हैं–

भोजन–55, ईंधन–15, वस्त्र–10, भाड़ा–12 और विविध–8

अक्टूबर 1999 में, उस शहर के एक मिल द्वारा कामगारों के लिए 182 प्रतिशत नियत किया गया है जिसने पूर्ण रूप से भोजन और किराया के मूल्यों में

वृद्धि की क्षतिपूर्ति कर दी परन्तु दूसरी किसी चीज के लिए क्षतिपूर्ति नहीं की। उसी शहर का दूसरा मिल 46.5 प्रतिशत भत्ता भुगतान किया जिसने ईंधन और विविध के मूल्य वृद्धि की क्षतिपूर्ति कर दी। यह जान लिया गया है कि भोजन के मूल्य में वृद्धि दुगुनी है ईंधन से और विविध समूह में वृद्धि किराए का दुगुना है।

भोजन, ईंधन, किराया और विविध समूहों की वृद्धि ज्ञात करें।

हल : हम मान लें कि ईंधन में प्रतिशत वृद्धि x है और किराया y है। तब हमें दिया गया है कि प्रतिशत वृद्धि भोजन में 2x है और विविध समूह में 2y है। चूँकि वस्त्र में वृद्धि के बारे में कोई जानकारी नहीं दी गई है इसलिए हम अभिकल्पना करते हैं कि वह अप्रभावित है i.e. वस्त्र के लिए चालू घातांक वही है जो आधार वर्ष में थी viz. 100।

पहला मिलः चूँकि पहले मिल ने D.A. 182% घोषित किया, प्राप्त चालू घातांक है 100 + 182 = 282। आगे, चूँकि मिल ने पूर्ण क्षतिपूर्ति सिर्फ भोजन और किराए के मूल्य वृद्धि के लिए की है और दूसरे समूहों के लिए नहीं, भोजन के लिए प्रयुक्त मूल्य घातांक (100 + 2x) था और किराए के लिए (100 + y) था। इसलिए, दूसरे समूह के लिए प्रत्येक का घातांक 100 लेकर, उपभोक्ता मूल्य घातांक दिया जाता है :

$$\frac{\Sigma WI}{\Sigma W} = \frac{55(100 + 2x) + 15 \times 100 + 10 \times 100 + 12(100 + y) + 8 \times 100}{100} = 282$$

$$\Rightarrow \; 110x + 12y + 100 \times 100 = 282 \times 100 \;\Rightarrow\; 110x + 12y = 18,\ 200$$

दूसरा मिलः– चूँकि दूसरे मिल ने D.A. 46.5% घोषित किया इसके कामगारों को पूर्णतः क्षतिपूर्ति किया ईंधन और विविध समूहों के मूल्य वृद्धि का परन्तु दूसरे समूहों का नहीं, उसी तर्क का प्रयोग करते हुए जैसा ऊपर में, हम पाएंगे

$$\frac{1}{100}[55 \times 100 + 15(100 + x) + 10 \times 100 + 12 \times 100 + 8(100 + 2y)] = 100 + 46.5$$

$$\Rightarrow \; 15x + 16y + 100 \times 100 = 146.5 \times 100 \;\Rightarrow\; 15x + 16y = 4{,}650 ------(**)$$

(*) को 4 से गुणा करके और (**) को उसे, और घटाने पर, हम पाते हैं

$$(440 - 45)x = 72,\ 800 - 13,\ 950 \;\Rightarrow\; x = \frac{58{,}850}{16} = 150.95$$

इसलिए विभिन्न समूहों में प्रतिशत वृद्धि निम्न है :

समूह	भोजन	ईंधन	किराया	विविध
प्रतिशत वृद्धि	2x = 297.98	x = 148.99	y = 150.95	2y = 301.90

8.11 सूचकांकों की सीमाएं (Limitations of Index Numbers)

टिप्पणी

यद्यपि सूचकांक बहुत महत्वपूर्ण साधन हैं एक देश के आर्थिक या व्यवसायिक कार्यकलापों का अध्ययन करने के लिए, उनकी अपनी सीमाएं हैं और इसलिए इनका प्रयोग और व्याख्या सतर्कता से होनी चाहिए। निम्नलिखित उनकी कुछ सीमाएं हैं :

(1) चूँकि सूचकांक प्रतिदर्श समंक पर आधारित हैं, वे सिर्फ सन्निकट सूचक हैं और एक संवृत्ति के आपेक्षिक स्तर में परिवर्तनों को शुद्धता से प्रदर्शित नहीं कर सकते हैं।

(2) त्रुटि की संभावना सूचकांक के निर्माण में प्रत्येक चरण पर हो सकती है viz.

(i) उपभोक्ता वस्तुओं का चुनाव

(ii) आधार वर्ष का चुनाव

(iii) समंक का संग्रहण वस्तुओं के मूल्यों और परिमाणों से संबंधित,

(iv) सूत्र का चुनाव–भारण की प्रणाली जो प्रयुक्त होने वाली है।

(v) प्रयुक्त होने वाली औसत घातांकों को प्राप्त करने के लिए वस्तुओं के संयुक्त समूह के लिए।

जैसा पहले ही इंगित किया जा चुका है, विभिन्न उपभोक्ता वस्तुओं का चुनाव जो घातांक के निर्माण में अन्तर्वेशित होने वाली है और विभिन्न बाजारों या स्टोरों का चुनाव जहाँ से वस्तुओं का मूल्य और परिमाण से संबंधित समंक एकत्रित करना है यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर नहीं है क्योंकि प्रतिदर्शता प्रतिनिधित्व के बिना पर होगी परन्तु की जाती है स्तरीकृत–बनाम–सुविचारित या सोद्देश्य प्रतिदर्श के आधार पर होती है। उपभोक्ता सामग्रियाँ सामान्यतः अपेक्षया समांगी समूहों (या स्तरों) में वर्गीकृत की जाती है और प्रत्येक समूह के अन्दर से (या स्तर) ज्यादा महत्वपूर्ण वस्तुओं का चुनाव पहले किया जाता है और बाकी बचे हुए से बहुत वस्तुएं यादृच्छिक चुनी जाती है जो हमारे संसाधन के संगत होता है समय और मुद्रा के क्रम में। या सोद्देश्य प्रतिदर्शता, प्रतिदर्श को विषयपरक प्रकृति की बना देती है और क्रमानुसार कुछ तरह का व्यक्तिगत अभिनति संभावित है घुस आए और प्रयास होना चाहिए इन त्रुटियों को कम से कम करने की।

(3) इन दिनों तेज गति की घटनाओं और वैज्ञानिक प्रगतियों की वजह से, एक समाज में लोगों के विभिन्न वस्तुओं के उपभोग पैटर्न में क्रमानुसार आस्वादन, रिवाजों, फैशन में त्वरित परिवर्तन होती हैं यथोचित रूप से, सूचकांक (जिनकी वांछितता है कि मदों और उनकी गुणवत्ता एक ही रहनी चाहिए समयावधि में) वस्तुओं के प्रकृति और गुणवत्ता के परिवर्तनों के साथ कदमताल करने में समर्थ नहीं हो सकती है और इसलिए वास्तव में प्रतिनिध नहीं हो सकती है।

(4) कोई सूत्र नहीं है जो मूल्य परिवर्तन को मापती है या समंक के दिए अभिरचना के परिमाण परिवर्तन को परिशुद्धता या पूर्णता के साथ। जैसा कि,

प्रत्येक घातांक में अन्तर्निहित त्रुटि है जिसे 'सूत्र–त्रुटि' कहते हैं। उदाहरण के लिए, लासपियरे के घातांक में उर्ध्व अभिनति है जबकि पाशे के घातांक में निम्न अभिनति सूत्र त्रुटि की माप इन दोनों घातांकों के बीच के अंतर द्वारा प्रदान की जाती है। इसके अतिरिक्त, सूचकांक विशेष प्रकार के औसत हैं उनके निर्माण में प्रयुक्त होती हैं इसका अपना उपयोगिता और सीमाओं का क्षेत्र है।

(5) उपयुक्त आधार वर्ष के चुनाव, उपभोक्ता वस्तुओं, मूल्य और परिमाण सूचियों द्वारा सूचकांक संभाव्य हैं बेईमान और स्वार्थी व्यक्तियों द्वारा हेर फेर करके वांछित परिणाम प्राप्त कर लें।

उपर्युक्त सभी सीमाओं के बावजूद, सूचकांक, यदि ठीक ढंग से निर्मित हैं और जानबूझकर विरूपित नहीं किए जाएं तो बहुत उपयोगी 'आर्थिक' बैरोमीटर हैं।

8.12 सारांश (Summary)

सूचकांक निर्देशक है जो किसी भी अवधि में (या विशिष्ट अवधि में) किसी संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन को दर्शाती है जो चालू अवधि कहलाती है किसी नियत अवधि में इसके मूल्य के सापेक्ष, आधार अवधि (Base Period) कहलाती है जो तुलना के लिए चुनी जाती है। विचाराधीन संवृत्ति या चर हो सकती है।

(i) कीमत किसी विशेष वस्तु, जेसे– स्टील, सोना, चमड़ा इत्यादि या वस्तुओं का समूह जैसे– उपभोक्ता वस्तुएं, अनाज, दूध और दूध उत्पाद, श्रृंगार–सामग्री आदि।

(ii) व्यापार का विस्तार, फैक्टरी उत्पाद, आद्योगिक या कृषि उत्पाद, आयात या निर्यात, स्टॉक और शेयर, एक व्यापारिक धराने की बिक्री और लाभ और इसी तरह आगे।

(iii) एक देश की राष्ट्रीय आय, विभिन्न क्षेत्रों मे ंवेतन का स्वरूप, बैंक जमा, विदेश विनिमय रिजर्व, एक खास समुदाय के लोगों का जीवन यापन का मूल्य वर्ग या व्यवसाय और आगे।

वास्तव में, मुश्किल से संख्यात्मक माप का कोई क्षेत्र है जहाँ सूचकांक निर्मित नहीं है। वे करीब सभी विज्ञानों मे ंप्रयुक्त होती हैं– प्राकृतिक, सामाजिक और शारीरिक। सूचकांक के प्रमुख उपयोग का निम्नलिखित प्रकार से सारांश किया जा सकता है।

सूचकांक आर्थिक बैरोमीटर जैसा है। सूचकांक आजकल प्रयोग में सबसे विस्तृत सांख्यिकीय साधनों में से एक है। वे अर्थव्यवस्था की नब्ज पकड़ने में प्रयुक्त होते हैं और उनका उपयोग निर्देशांक के तौर पर मुद्रास्फीति या अवस्फीति प्रवृत्तियों के लिए होने लगा है।

चूँकि सूचकांक में संवृत्ति के स्तर में आपेक्षिक परिवर्तन का अध्ययन करता है, वे विशेष रूप से उपयोगी होते हैं एक काल श्रेणी समंक में एक समूह आवृत्ति के साधारण उपनति के अध्ययन के लिए।

टिप्पणी

सूचकांक कीमतों, उत्पादन, लाभों, आयातों और निर्यातों, कार्मिक और वित्तीय मामलों से संबंधित समंक अपरिहार्य हैं किसी संस्थान के कुशल योजना और कार्यकारी निर्णयों को व्यवस्थित करने में। उदाहरण के लिए, जीवनयापन का सूचकांक सरकार और औद्योगिक तथा व्यवसायिक प्रतिष्ठानों द्वारा महंगाई भत्ता के निर्धारण या अपने कर्मचारियों को बोनस प्रदान करने में प्रयुक्त होती है ताकि वे समय–समय पर जीवनयापन के बढ़े मूल्य से निपट सकें।

जवनी यापन का सूचकांक निर्धारित करती है कि क्या वास्तविक में बढ़ रही है या घट रही है, या अपरिवर्त्तित रह रही है।

सूचकांक अपस्फीति के लिए प्रयुक्त होती है।

सूचकांक मोटे तौर पर निम्नलिखित तीन संवर्गों में वर्गीकृत की जा सकती हैं।

1. मूल्य सूचकांक–मूल्य सूचकांक मूल्यों में सामान्य परिवर्तन को मापती हैं। वे निम्नलिखित वर्गों में उपविभाजित होती हैं।

(a) थोक बिक्री मूल्य सूचकांक (b) खुदरा मूल्य सूचकांक

2. परिमाण सूचकांक– वे बहुत सहायक होती हैं अर्थव्यवस्था के भौतिक उत्पादों के स्तर का मध्ययन करने में।

3. मूल्य सूचकांक–ये उत्पाद का पूर्ण प्रतिमूल्य (मूल्य और परिमाण का गुणन) के परिवर्तन का अध्ययन करने के इरादे से जैसे खुदरा बिक्री या लाभ या माल के स्टॉक का घातांक। यद्यपि, ये घातांक।

सूचकांक बहुत मजबूत सांख्यिकीय साधन हैं किसी संवृत्ति के स्तर में परिवर्तन की माप के लिए विभिन्न कालावधियों में। इसलिए इन घातांकों के निर्माण और गणना में अत्यधिक सतर्कता उपभोग में लाई जाती है। सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित बिंदुओं का ध्यानपूर्वक अध्ययन वांछित हैं।

सूचकांकों का उद्देश्य, वस्तुओं या मदों का चुनाव, सूचकांक के लिए समंक, आधार वर्ष का चुनाव, प्रयुक्त होने वाली औसत का प्रकार, भारण का तरीका और सूत्रों का चुनाव।

सूत्रों का चुनावः–प्रयुक्त होने वाली सूत्रों का चुनाव निर्भर करती है समंक की उपलब्धता, मूल्यों और परिमाणों से संबंधित चुनी हुई वस्तुओं का आधार और/या चालू वर्ष में।

लासपियरे का मूल्य घातांक या आधार वर्ष विधि

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

पाशे का मूल्य सूचकांक

$$P_{01}^{Pa} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

फिशर का मूल्य सूचकांक

फिशर ने लासपियरे और पाशे के मूल्य सूचकांकों के गुणोत्तर गुणन की वकालत की :–

$$P_{01}^{F} = [P_{01} * P_{01}P_a] = \left[\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}\right] \times 100 *$$

फिशर का सूचकांक, आदर्श सूचकांक कहा जाता है चूँकि यह समय उत्क्रमणीय और अवयव उत्क्रमणीय, परीक्षणों को संतुष्ट करता है सूचकांकों के संगतता के लिए।

8.13 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **सूचकांक निर्देशांक:** Index Numbers
- **सूचकांक विनिर्मित करने की विधियाँ:** Methods of Consntructing Index Numbers
- **सरल (अभारित) समूहिक विधियाँ:** Simple (Unweighted) Aggregate Method
- **भारित समूहन विधि:** Weighted Aggregate Method
- **मूल्यानुपात का सरल औसत:** Simple Average of Price Relatives
- **मूल्यानुपातों का भारित औसत:** Weighted Average of Price Relatives
- **इकाई परीक्षण:** Unit Test
- **समय उत्क्राम्यता परीक्षण:** Time Reversal Test
- **अवयव (कारक) उत्क्रामयता परीक्षण:** Factor Reversal Test
- **चक्रीय परीक्षण:** Circular Test
- **श्रृंखला सूचकांक या आधार से श्रृंखलाबद्ध सूचकांक:** Chain Indices or Chain base Index Numbers
- **आधार वर्ष परिवर्तन, शिरोबन्धन और सूचकांक का अफस्पीति:** Base Stifling, Splicing and Deflating of Index Numbers
- **जीवन निर्वाह सूचकांक:** Cost of living Index Number

टिप्पणी

8.14 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Questions and Exercises)

प्रश्नमाला–8.1

1. (a) सूचकांक क्या है? सूचकांक के निर्माण में संलग्न विभिन्न समस्याओं का वर्णन करें।

   (b) एक सूचकांक निर्मित करते वक्त उत्पन्न समस्याएं की विवेचना करें।

   (c) वह कौन सी आवश्यक बिंदुए हैं जिनका ध्यान सूचकांक के निर्माण में दिया जाना चाहिए।

2. ''सूचकांक के निर्माण में सैद्धान्तिक रूप से सर्वाधिक अच्छी विधि व्यवहारिक दृष्टिकोण से सबसे अच्छी विधि नहीं है।'' विवेचना करें।

3. यह कहा गया है कि सूचकांक निर्माण की तकनीक चार बड़े कारकों पर अवलम्बित है :

   (a) मदों का चुनाव; (b) आधार वर्ष; (c) औसत का प्रकार; (d) भारण की विधि

   क्या आप इस दृष्टिकोण से सहमत हैं? अगर ऐसा है; इन चार कारकों का वर्णन करें और उन समस्याओं की चर्चा करें जिसे वे उत्पन्न करती हैं। अगर आप सहमत नहीं हैं, आप अपने प्रमुख विचार मुख्य समस्याओं की जो सूचकांक के निर्माण में होती हैं।

4. ''एक सूचकांक विशेष प्रकार का औसत है।'' विवेचना करें।

5. ''सूचकांक के निर्माण में, गुणोत्तर माध्य के लाभ समान्तर माध्य से अधिक हैं।'' विवेचना करें।

6. सूचकांक क्या हैं? क्यों वे आर्थिक बैरोमीटर कहे जाते हैं?

7. (a) सूचकांक निर्माण के क्रम में भारण का क्या अर्थ है? यह क्यों आवश्यक है? सामान्य प्रस्तावित भारण योजनाएं क्या हैं?

   (b) सूचकांक के निर्माण में भारण का क्या महत्व है? तीनों में से कौन–माध्य, माध्यिका और गुणोत्तर माध्य– को सूचकांक के परिकलन में आप प्राथमिकता देंगे और क्यों?

8. (a) सूचकांक क्या हैं? उनका निर्माण कैसे होता है? भारों की भूमिका का सामान्य मूल्य सूचकांक के निर्माण में वर्णन करें।

   (b) अभारित और भारित सूचकांकों के बीच अंतर करें। एक मूल्य सूचकांक के भारण की कुछ महत्वपूर्ण विधियाँ गिनाएं और उनके आपेक्षिक गुणों और अवगुणों की विवेचना करें।

9. (a) लासपियरे की विधि में उर्ध्व अभिनति है जबकि पाशे की विधि में निम्न अभिनति है वर्णन करें। सूचित करें, किन परिस्थितियों में

   (i) वे बराबर परिमाण देती हैं (ii) लासपियरे की विधि कम परिणाम देती है पाशे की विधि से

   (b) लासपियरे और पाशे के सूचकांकों में भारों को प्रदान करने की विधि के बीच अंतर स्पष्ट करें। दर्शाएं कि लासपियरे का सूचकांक बड़ा है पाशे के मूल्य सूचकांक से बढ़ते मूल्यों की स्थिति में।

10. ''लासपियरे का सूचकांक प्रवृत्त होता है बड़ा पाशे के सूचकांक की अपेक्षा।'' समीक्षा करें।

11. पाशे के परिमाण सूचकांक और लासपियरे के मूल्य सूचकांक को निम्नलिखित समंक से परिकलित करें :

वस्तुएँ	परिमाण (इकाईयाँ)		परिमूल्य (रु. में)	
	1995	**1999**	**1995**	**1999**
A	100	150	500	900
B	80	100	320	500
C	60	72	120	360
D	30	33	360	297

12. एक मूल्य सूचकांक के भारण के तरीके के संगणन में लासपियरे और पाशे के बीच क्या अन्तर है? दोनों लासपियरे और पाशे के समूहन मूल्य घातांकों को वर्ष 2000 के लिए निम्नलिखित समंक से परिकलित करें :

वस्तुएँ	परिमाण		मूल्य प्रति इकाई (रु. में)	
	1999	**2000**	**1999**	**2000**
A	3	5	20	25
B	4	6	25	30
C	2	3	30	25
D	1	2	10	7.50

13. नीचे दिए गए समंक से लासपियरे और पाशे के सूचकांक को प्रगणित करें :

वस्तुएँ	मूल्य		परिमाण	
	1995	**2001**	**1995**	**2001**
A	4	10	50	40
B	3	9	10	2
C	2	4	5	2

टिप्पणी

14. निम्नलिखित समंक के लिए, लासपियरे और पाशे का मूल्य और परिमाण सूचकांक 1980 के लिए 1970 के साथ आधार वर्ष जैसा लेकर परिकलित करें:

वस्तु	1970		1980	
	परिमाण	परिमूल्य	परिमाण	परिमूल्य
A	50	350	60	420
B	120	600	140	700
C	30	330	20	200
D	20	360	15	300
E	5	40	5	50

15.(a) पाशे के सूत्र का प्रयोग कर, परिमाण घातांक और मूल्य सूचकांक प्रगणित करें 2000 के लिए 1996 को आधार वर्ष लेकर :

वस्तु	परिमाण इकाईयाँ		परिमूल्य (रु. में)	
	1996	2000	1996	2000
A	100	150	500	900
B	80	100	320	500
C	60	72	150	360
D	30	33	360	297

(b) उपर्युक्त प्रश्न के लिए मूल्य घातांक भी प्रगणित करें :

(i) मार्शल–एजवर्थ सूत्र; (ii) फिशर का सूत्र; (iii) डॉरबिश–बॉउले सूत्र; (iv) वाल्श सूत्र

16. ''मार्शल–एजवर्थ सूचकांक फिशर के आदर्श सूचकांक का एक अच्छा सन्निकटन है।'' इस वक्तव्य की सच्चाई को निम्नलिखित समंक से सत्यापित करें :

वर्ष	चावल		गेहूँ		ज्वार	
	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण
1970	9.3	100	6.4	11	5.1	5
1977	4.5	90	3.7	10	2.7	3

17. एक कंपनी ने 1998 के दौरान खर्च किए 50 रु., 48 रु., 18 रु. और 42 रु.। कंपनी ने खर्च में वृद्धि की क्रमशः 100 रु., 98 रु., 60 रु. और 102 रु. चार वस्तुओं पर। अगर खरीदे गए चार वस्तुओं की इकाईयाँ 1998 और 1999 के दौरान समरूप हैं, i.e., 5 3 2, 6 और 17, 1999 के लिए मूल्य घातांक की गणना सबसे उपयुक्त विधि से करें।

टिप्पणी

18. नीचे दिए गए समंक से एक सूचकांक निर्मित करें चार वस्तुओं के समूह का प्रयोग कर (i) सरल समूहन विधि और (ii) फिशर का आदर्श सूत्र

वस्तुएँ	आधार वर्ष (1996)		चालू वर्ष (1997)	
	मूल्य प्रति इकाई	खर्च (रुपये)	मूल्य प्रति इकाई	खर्च (रु.)
1	2	40	5	75
2	4	16	8	40
3	1	10	2	24
4	5	25	10	60

19. फिशर के आदर्श सूत्र का प्रयोग कर, मूल्य और परिमाण सूचकांक प्रगणित करें 1984 के लिए 1982 आधार वर्ष के साथ, दिए गए निम्न सूचना से :

वर्ष	वस्तु A		वस्तु B		वस्तु C	
	मूल्य रु.	परिमाण किग्रा.	मूल्य रु.	परिमाण (किग्रा.)	मूल्य (रु.)	परिमाण (किग्रा.)
1982	5	10	8	6	6	3
1984	4	12	7	7	5	4

20. सूचकांक क्या है? क्यों वे आर्थिक बैरोमीटर कहे जाते हैं?

निम्नलिखित सूचकांकों के आधार पर, फिशर का आदर्श मूल्य सूचकांक परिकलित करें :

वस्तुएँ	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण
A	2	40	6	50
B	4	50	8	40
C	6	20	9	30
D	8	10	6	20
E	10	10	5	20

21. (a) सूचकांक क्या है? सूचकांकों के उपयोग का संक्षिप्त वर्णन करें।

(b) फिशर के आदर्श सूचकांक परिकलित करें निम्नलिखित समंक से :

मदें	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	परिमाण	मूल्य	परिमाण	मूल्य
A	15	4	10	6
B	20	3	25	4
C	10	6	20	5
D	30	5	25	5

टिप्पणी

22. निम्नलिखित समंक से सूचकांक परिकलित करें प्रयोग कर :

(i) लासपियरे का (ii) पाशे का और (iii) फिशर का आदर्श सूत्र

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	परिमाण	मूल्य	परिमाण	मूल्य
A	8	4	10	9
B	7	3	8	5
C	6	4	5	8
D	5	2	7	4

23. दिया गया है कि $\Sigma p_1q_1 = 250$, $\Sigma p_0q_0 = 150$ पाशे का सूचकांक = 150 और डॉरबिश–बॉउले का सूचकांक = 145, ज्ञात करें (i) फिशर का आदर्श सूचकांक और (ii) मार्शल–एजवर्थ का सूचकांक

24. निम्नलिखित समंक से, एक सूचकांक निर्मित करें चार वस्तुओं के समूह का फिशर के आदर्श सूत्र का प्रयोग कर :

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य प्रति इकाई	खर्च (रु.)	मूल्य प्रति इकाई	खर्च (रु.)
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

25. निम्नलिखित समंक से फिशर का आदर्श सूचकांक निर्मित करें :

वस्तु	1988		1998	
	मूल्य	प्रतिमूल्य (रु.)	मूल्य	प्रतिमूल्य (रु.)
A	5	50	6	72
B	7	84	10	80
C	10	80	12	96
D	4	20	5	30
E	8	56	8	64

26. निम्नलिखित समंक से, परिमाण सूचकांक निर्मित करें :

(i) फिशर की विधि द्वारा और (ii) मार्शल–एजवर्थ विधि द्वारा

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य (रु.)	परिमाण (किग्रा.)	खर्च (रु.)	परिमाण (किग्रा.)
A	25	40	2,000	50
B	22	18	1,200	40
C	54	16	1,320	44
D	20	40	1,350	45
E	18	30	630	15

27.(a) एक सूचकांक क्या है? पदों का वर्णन करें – मूल्यानुपात; परिमाणानुपात; परिमूल्यानुपात – एक अकेले वस्तु के संदर्भ के साथ

(b) आप मूल्यानुपात से क्या समझते हैं? सूचकांक के निर्मित करने की विधि की विवेचना करें उन पर आधारित।

28.(a) दर्शाएं कि क्या लासपियरे के मूल्य घातांक मूल्यानुपातों के भारित औसत के रूप में लिखे जा सकते हैं? भारण क्या हैं?

(b) क्या पाशे का मूल्य घातांक मूल्यानुपातों के भारित औसत के रूप में अभिव्यक्त किए जा सकते हैं? अगर हाँ, भारणों की पहचान करें।

29.(a) एक दिए समुदाय में, उपभोग के उद्देश्य के लिए खरीदी और बेची गई सामग्री पॉवरोटी, दूध और गोमांस हैं। उनके आपेक्षिक मूल्य दो अवधियों के लिए निम्नलिखित हैं :

	अवधि I	अवधि II
पॉवरोटी	0.15 शिलिंग	0.20 शिलिंग
दूध (पिंट)	0.10 शिलिंग	0.15 शिलिंग
गोमांस (पौंड)	0.30 शिलिंग	0.25 शिलिंग

उपर्युक्त से एक सूचकांक निर्मित करें। काल्पनिक भार प्रदान कर क्रमशः 2000; 5000 और 1000 इकाईयाँ क्रमशः पॉवरोटी, दूध और गोमाँस को, भारित सूचकांक भी निर्मित करें।

30. गुणोत्तर माध्य का प्रयोग कर सूचकांक परिकलित करें।

वस्तु	आधार वर्ष मूल्य	चालू वर्ष मूल्य
A	2	7
B	4	5

टिप्पणी

31. निम्नलिखित वस्तुओं के मूल्य हैं 1998 और 1999 में। एक मूल्य घातांक परिकलित करें मूल्यानुपातों पर आधारित, गुणोत्तर माध्य का प्रयोग कर

वर्ष	वस्तु					
	A	B	C	D	E	F
1998	45	60	20	50	85	120
1999	60	70	30	75	90	130

32. नीचे चार विभिन्न वस्तुओं की मूल्य सूची 1998 और 1995 के लिए दी गई है। 1995 के लिए सूचकांक निर्मित करें 1990 के साथ आधार वर्ष जैसा प्रयोग कर (i) मूल्यानुपातों का सरल औसत, (ii) मूल्यानुपातों का भारित औसत

वस्तु	भार	कीमत रुपयों में	
		1995	**1990**
A	5	4.50	2.00
B	7	3.20	2.50
C	6	4.50	3.00
D	2	1.80	1.00

33. निम्नलिखित समंक से मूल्य घातांक परिकलित करें आधार 1995 = 100 लेकर, आनुपातिक विधि का भारित औसत द्वारा

वस्तु	**1995** मूल्य (रु.)	परिमाण	**1996** मूल्य (रु.)
A	20	2	25
B	10	3	12
C	12	5	18
D	16	4	16
E	5	7	4

34. 1998 के लिए सूचकांक 1990 को आधार वर्ष के साथ मूल्यानुपात विधि का भारित औसत प्रयोग कर निम्नलिखित समंक के लिए :

वस्तु	भार	मूल्य (रु. में)	
		1990	**1998**
A	2	12	24
B	8	8	12
C	4	15	27
D	5	6	18
E	1	10	12

टिप्पणी

35. मूल्यानुपातों का भारित औसत प्रयुक्त कर मूल्य घातांक परिकलित करें :

वस्तुएँ	P_0(रु.)	q_0	P_1(रुपये)
चीनी	10	6 किग्रा.	15
चावल	20	10 किग्रा.	25
दूध	10	8 ली.	14

36. भारित सूचकांक प्रगणित करें 1997 और 1999 के लिए (1996 के आधार पर) आनुपातिक विधि द्वारा निम्नलिखित समंक से। प्रगणित सूचकांकों की व्याख्या भी करें।

वर्ष		वस्तुएँ			
		A	B	C	D
1996	मूल्य	6	8	9	12
	भार	5	3	1	1
1997	मूल्य	9	10	6	10
1998	मूल्य	12	12	9	15
1999	मूल्य	15	14	12	20

37. वस्तुओं के एक समुच्चय का मूल्यानुपात और भार निम्नलिखित तालिका में दिए गए हैं :

वस्तु	:	C_1	C_2	C_3	C_4
मूल्यानुपात	:	120	127	125	119
भार	:	$2W_1$	W_2	W_1	W_2+3

अगर समुच्चय के लिए घातांक 122 है और भारों का योग 40 है, W_1 और W_2 ज्ञात करें।

38. दिए गए वस्तुओं का मूल्य और भार नीचे दिए गए हैं 1990, 1991 और 1992 वर्षों के लिए :

वस्तु	भार	मूल्य रुपयों में		
		1990	1991	1992
A	20	12.00	18.00	24.00
B	15	3.00	6.00	15.00
C	10	12.50	18.75	25.00
D	40	10.00	30.00	30.00
E	15	4.50	9.00	13.50

या तो समूहन विधि या आनुपातिक विधि प्रयुक्त कर, 1991 और 1992 के लिए भारित मूल्य सूचकांक परिकलित करें, 1990 को आधार वर्ष लेकर।

टिप्पणी

प्रश्नमाला–8.2

1 . (a) एक सूचकांक के लिए संगति के परीक्षण से आप क्या समझते हैं?

(b) सूचकांक की पर्याप्तता के विभिन्न परीक्षण क्या हैं?

2. समय उत्क्राम्यता और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणों का वर्णन करें। जाँच करें कि क्या लासपियरे और पाशे का सूचकांक इन परीक्षणों को संतुष्ट करता है।

3. पाशे का, लासपियरे का और फिशर के सूचकांकों की विवेचना करें। आप तीनों में से किसको अधिमान्यता देंगे और क्यों?

4. आप क्या समझते हैं :

(i) अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण ; और (ii) समय उत्क्राम्यता परीक्षण से सिद्ध करें कि फिशर का सूचकांक इन दोनों परीक्षणों को संतुष्ट करता है।

5. (a) फिशर के सूचकांक की श्रेष्ठता की विवेचना करें लासपियरे और पाशे के सूचकांकों पर।

(b) एक सूचकांक की उत्क्राम्यता से आप क्या समझते हैं? सूचकांक के सिद्धान्त में समय और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणों का वर्णन करें।

6. (a) फिशर का आदर्श सूचकांक क्या है? क्यों यह आदर्श कहा जाता है? दर्शाएं कि यह दोनों समय उत्क्राम्यता परीक्षण के साथ–साथ अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

(b) क्या फिशर का सूचकांक वास्तव में आदर्श सूचकांक है? अपने उत्तर के समर्थन में तर्क दें।

7. लासपियरे और पाशे के सूचकांकों के बीच अन्तर स्पष्ट करें। कब वे बराबर होंगे? क्यों यह ऐसा है कि फिशर के सूचकांक को आदर्श सूचकांक कहते हैं?

8. (a) समय उत्क्राम्यता और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणों का वर्णन करें। जाँच करें कि क्या फिशर का मूल्य सूचकांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

(b) समय उत्क्राम्यता परीक्षण और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण की अभिधारणा का वर्णन करें और दर्शाएं कि फिशर का आदर्श सूचकांक इन दोनों परीक्षणों को संतुष्ट करता है।

9. (a) लासपियरे के मूल्य सूचकांक और पाशे का मूल्य सूचकांक का वर्णन करें। समय उत्क्राम्यता परीक्षण को वर्णन करें और जाँच करें कि क्या यह परीक्षण पाशे के मूल्य सूचकांकों से संतुष्ट होता है।

(b) आप सूचकांकों के समय उत्क्राम्यता परीक्षण से क्या समझते हैं? दर्शाएं कि लासपियरे और पाशे का सूचकांक इसे संतुष्ट नहीं करता है और फिशर का आदर्श सूचकांक करता है।

10. (a) किन परिस्थितियों में अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण लासपियरे के मूल्य सूचकांक से संतुष्ट होता है?

(b) सिद्ध करें कि लासपियरे का और पाशे का मूल्य सूचकांक संतुष्ट करता हैः

(i) समय उत्क्राम्यता परीक्षण; (ii) अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण

सिर्फ और सिर्फ अगर दोनों बराबर है।

11. फिशर का आदर्श, सूचकांक क्या है? दर्शाएं कि यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है परन्तु 'चक्रीय परीक्षण' को नहीं। दर्शाएं कि अगर कीमतें बढ़ रही हैं, पाशे का मूल्य सूचकांक सामान्यतः मूल्य वृद्धि को कम आँकती है और लासपियरे का मूल्य सूचकांक इसे अधिक बढ़ा–चढ़ा देती है।

12. समय उत्क्राम्यता और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण क्या हैं? उनके उपयोग का वर्णन करें।

    परीक्षण करें कि क्या वॉल्श द्वारा दिया गए सूचकांक के अनुसार

    $$I = \text{मूल्य सूचकांक} \quad = \frac{\Sigma p_1 \sqrt{q_0 q_1}}{\Sigma p_0 \sqrt{q_0 q_1}} \times 100$$

    समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है।

13. सामान्य संकेताक्षरों के साथ मार्शल–एजवर्थ सूचकांक परिभाषित है :

    $$\frac{\Sigma p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma p_0 (q_0 + q_1)} \times 100$$

    और फिशर का आदर्श सूचकांक परिभाषित है $\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$

    दर्शाएं कौन परीक्षण इन सूत्रों से संतुष्ट होती हैं।

14. सूचकांक सिद्धान्त में अवयव और समय–उत्क्राम्यता परीक्षण क्या हैं? क्या आप इन गुणों को सूचकांकों के लिए आवश्यक वांछितता विचार करते हैं।

    निम्नलिखित सूचकांकों की जाँच उपर्युक्त दोनों गुणों की उपस्थिति या अनुपस्थिति के लिए करें।

    (i) $100 \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma p_1 p_0}$ (ii) $100 \times \sqrt{\left(\frac{\Sigma q_0 p_1 \ \Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0 \ \Sigma q_1 p_0} \right)}$

    जहाँ p और q, सामान्य तौर पर क्रमशः मूल्य और परिमाण द्योतित करते हैं।

15. तर्क देते हुए बताएं, क्या निम्नलिखित वक्तव्य सही हैं या गलत :

    सूचकांक का अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण है : $P_{01} \times Q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$

16. संलग्न समंक से चालू वर्ष और आधार वर्ष के लिए सूचकांक ज्ञात करें एक दूसरे पर आधारित और दर्शाएं कि गुणोत्तर माध्य इन्हें उत्क्रमणीय बना देती हैं समान्तर माध्य नहीं।

वस्तु	मूल्य	
	आधार वर्ष	चालू वर्ष
A	25	55
B	30	45

टिप्पणी

17. निम्नलिखित समंक के आधार पर फिशर का सूचकांक की गणना करें:—

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य (00' रु. में)	खर्च ('00 रु. में)	मूल्य ('00 रु. में)	खर्च ('00 रु. में)
A	5	25	10	60
B	1	10	2	24
C	4	16	8	40
D	2	40	5	75

उपर्युक्त सूचकांक के लिए अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण का भी प्रयोग करें।

18. नीचे दिए गए समंक से, फिशर का आदर्श सूचकांक निर्मित करें और सत्यापित करें कि क्या यह समय उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है :

वस्तु	मूल्य/इकाई (रु. में)		इकाईयों की संख्या	
	आधार वर्ष	चालू वर्ष	आधार वर्ष	चालू वर्ष
A	2	4	10	12
B	4	4	5	8
C	5	7	10	15
D	10	12	12	10
E	15	20	15	10

19. निम्नलिखित समंक का इस्तेमाल कर यह दर्शाएं कि फिशर का आदर्श सूचकांक दोनों समय उत्क्राम्यता और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षणों को संतुष्ट करता है।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य	परिमाण	मूल्य	परिमाण
A	6	50	10	60
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60

20. निम्नलिखित मूल्य हैं :

$$\Sigma p_0 q_0 = 425 \qquad \Sigma p_1 q_0 = 505$$
$$\Sigma p_1 q_1 = 530 \qquad \Sigma p_0 q_1 = 470$$

दर्शाएं कि फिशर की विधि, पाशे और मार्शल की विधि या तो समय उत्क्राम्यता परीक्षण और अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता है या दोनों को संतुष्ट नहीं करता है या उनमें से एक।

21. समय उत्क्राम्यता परीक्षण, अवयव उत्क्राम्यता परीक्षण और चक्रीय परीक्षण से आप क्या समझते हैं। सूत्रों की सूची दें। जो इन परीक्षणों को क्रमशः संतुष्ट करती है।

टिप्पणी

प्रश्नमाला–8.3

1. (a) श्रृंखला आधार सूचकांक क्या है? वे कैसे निर्मित होते हैं? उनका क्या उपयोग हैं?
   (b) श्रृंखला घातांकों का स्थिर आधार घातांकों पर क्या लाभ हैं, विवेचना करें। उनकी सीमाओं को भी बतावें।
   (c) स्थिर आधार घातांक और श्रृंखला आधार घातांक के बीच अंतर स्पष्ट करें। श्रृंखला आधार घातांक को स्थिर आधार घातांक में रूपांतरित करने का सूत्र लिखें।
2. (a) 'नियत' और 'श्रृंखला' आधार घातांकों के बीच अंतर स्पष्ट करें। एक उपयुक्त दृष्टांत से अंतर दर्शाएं।
   (b) नियत आधार और श्रृंखला आधार सूचकांकों के बीच अंतर स्पष्ट करें।
   (c) सूचकांक निर्मित करने की स्थिर आधार विधि और श्रृंखला आधार विधि का संक्षेप में वर्णन करें। इन दोनों विधियों के लाभों और हानियों की ओर ध्यान आकृष्ट करें।
3. नीचे दी गई स्थिर आधार सूचकांकों से, श्रृंखला आधार सूचकांक ज्ञात करें :

वर्ष :	1996	1997	1998	1999	2000	2001
सूचकांक :	200	220	240	250	280	300

4. निम्नलिखित सूचकांकों की श्रेणियों को श्रृंखला आधार घातांकों में रूपांतरित करें :

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
सूचकांक : (आधार 1990)	100	110	125	133	149	139	159	65

5. निम्नलिखित श्रृंखला मूल्यानुपातों को मूल्यानुपातों में रूपांतरित करें, 1995 को आधार वर्ष लेकर :

वर्ष :	1995	1996	1997	1998	1999	2000
श्रृंखला मूल्यानुपात :	120	150	180	225	270	324

6. नीचे दिए गए स्थिर आधार सूचकांकों से श्रृंखला आधार सूचकांक प्राप्त करें

वर्ष :	1993	1994	1995	1996	1997	1998
सूचकांक :	150	180	120	120	80	96

7. नीचे दिए गए श्रृंखला आधार सूचकांक से, स्थिर आधार सूचकांक तैयार करें:

वर्ष	:	1994	1995	1996	1997	1998
सूचकांक	:	90	180	115	120	130

टिप्पणी

8. नीचे दिए गए श्रृंखला आधार सूचकांक से, स्थिर आधार सूचकांक तैयार करें :

वर्ष	:	1991	1992	1993	1994	1995
सूचकांक	:	110	160	140	100	150

9. नीचे दिए गए श्रृंखला आधार सूचकांकों से स्थिर आधार सूचकांक तैयार करें।

वर्ष	:	1991	1992	1993	1994	1995
सूचकांक	:	92	102	140	100	150

10. तीन वस्तुओं की निम्नलिखित वार्षिक औसत मूल्यों से जो रुपये प्रति इकाई में दी गई हैं, श्रृंखला सूचकांक ज्ञात करें, 1997 पर आधारित :

वस्तुएँ	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**
X	8	10	12	15	12
Y	10	12	15	18	20
Z	6	9	12	15	18

11. सभी माल को बराबर भार प्रदान किए जाते हैं परिकल्पना कर, श्रृंखला आधार सूचकांक परिकलित करें 1996 से 2000 वर्ष के लिए निम्नलिखित मूल्यानुपात के आधार पर :

$$\text{मूल्यानुपात} = \left[\frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times 100\right]$$

	माल A	**माल B**	**माल C**	**माल D**	**माल E**
1996	100	100	100	100	100
1997	90	125	134	118	133
1998	89	61	60	115	125
1999	112	200	80	93	140
2000	122	66	150	86	86

12. निम्नलिखित समंक से श्रृंखला आधार सूचकांक परिकलित करें :

रु. में मूल्य					
मदें	1986	1987	1988	1989	1990
A	5	8	10	12	15
B	3	6	8	10	12
C	2	3	5	7	10.5

टिप्पणी

13. निम्नलिखित समंक से श्रृंखला आधार सूचकांक परिकलित करें :

मूल्य रु. में					
वस्तुएँ	1991	1992	1993	1994	1995
A	2	3	4	2	7
B	3	6	9	4	3
C	4	12	20	8	16
D	5	7	18	11	22

14. नीचे दिए गए समंक से श्रृंखला आधार सूचकांक परिकलित करें:—

वर्ष	वस्तुओं का मूल्य (रु. में)				
	A	B	C	D	E
1996	10	20	12	40	100
1997	12	22	14	45	110
1998	11	25	18	49	106
1999	14	28	10	43	102
2000	15	23	9	42	101

प्रश्नमाला—8.4

1. 'आधार परिवर्तन' क्या है? सूचकांकों के आधार को परिवर्तित करना क्यों आवश्यक हो जाता है? सूचकांकों के आधार के परिवर्तन का एक उदाहरण दें।
2. उदाहरणों के साथ वर्णन करें, सूचकांकों में परिवर्तन और शिरोबंधन की तकनीक।
3. निम्नलिखित सूचकांक हैं (आधार 1985 = 100)

वर्ष :	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
सूचकांक :	100	120	122	116	120	120	137	136	149	156	137

आधार को 1990 में परिवर्तित करें और सूचकांकों को पुनः जोड़ें।

4. निम्नलिखित सूचकांक हैं किसी वस्तु के थोक मूल्यों का 1992 पर आधारित :

वर्ष :	1992	1993	1994	1995	1996
सूचकांक :	100	108	120	150	210

आधार को 1994 में परिवर्तित करें और नया सूचकांक प्राप्त करें।

5. निम्नलिखित सूचकांकों की श्रेणियों में आधार को 1990 से 1993 में परिवर्तित करें।

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
सूचकांक :	100	105	110	125	135	180	195	205

टिप्पणी

6. दो समुच्चयों के लिए घातांक नीचे दिए गए हैं 1985 आधार के साथ और दूसरा 1992 आधार के साथ :

(a) वर्ष	सूचकांक	(b) वर्ष	सूचकांक
1985	100	1992	100
1986	115	1993	105
1987	122	1994	118
1988	150	1995	98
1989	200	1996	102
1990	220	1997	105
1991	240	1998	120
1992	250	1999	125

सूचकांक (a) 1985 आधार वर्ष के साथ 1992 में विच्छिन्न की गई। यह इच्छित है दूसरा सूचकांक (b) को शिरोबन्ध करना आधार 1992 के साथ पहले सूचकांक को निरंतरता के अभिप्राय से। यह कैसे किया जाएगा ताकि संयुक्त श्रेणी का उभयनिष्ठ आधार है 1985 का?

7. नीचे दो समुच्चयों के घातांक दिए गए हैं। रिकार्डों की निरंतरता के उद्देश्य से, आपसे वांछित है एक संयुक्त श्रेणी का निर्माण करना वर्ष 1883 को आधार लेकर :

वर्ष	प्रथम समुच्चय–मूल्यानुपात	द्वितीय समुच्चय–श्रृंखला मूल्यानुपात
1980	100	
1981	120	
1982	125	
1983	150	
1984		100
1985		120
1986		95
1987		105

8. नीचे लिए गए दो श्रेणियों के सूचकांकों को संयुक्त करें एक नई श्रेणी प्राप्त करने के लिए (i) 1963 = 100 (ii) 1960 = 100 के साथ अपने परिकलनों के लिए परिकल्पनाओं का वर्णन करें।

थोक मूल्य घातांक

वर्ष	पुरानी श्रृंखला 1958 = 100	संशोधित श्रेणी 1963 = 100
1960	111	–
1961	113	–
1962	115	–
1963	119	100
1964	134	112
1965	–	122

9. नीचे सूचकांकों के दो समुच्चय दिए गए हैं– एक 1985 आधार के साथ और दूसरा 1998 आधार के साथ।

वर्ष	सूचकांक (पुराना)	सूचकांक (नया)
1985	100	
1986	103	
1987	108	
1988	110	100
1989		104
1990		112
1991		110
1992		115

नई श्रृंखला का शिरोबन्ध पुरानी श्रेणी से करें।

10. नीचे दो सूचकांकों की श्रेणी दी गई है, उन्हें शिरोबन्धित करें आधार 1974 = 100 पर

वर्ष :	1970	1971	1972	1973	1974	1975
स्टील के लिए पुराना मूल्य घातांक (आधार 1965 = 100) :	141.5	163.7	158.2	156.8	157.1	
नया मूल्य घातांक (आधार 1974 = 100) :				99.8	100.0	102.3

11. किसी उद्योग में एक प्रतिष्ठान के घातांकों का उपादान टुकड़े जो चुनी हुई उपादानों के भार पर आधारित हैं आधार वर्ष में उपभोक्ता परिमाण से। मूल्य घातांक श्रेणी 1980 पर आधारित =100 और 1990 से 1995 वर्ष के लिए निम्न है :

1990	1991	1992	1993	1994	1995
120.3	122.1	126.4	125.2	127.0	131.6

1995 में, घातांक पूरी तरह संशोधित कर दिया गया प्रयुक्त उपादान के प्रकार में परिवर्तन का संज्ञान लेकर। नया घातांक आधारित 1995 = 100 पर, निम्नलिखित मूल्यों को दर्शाता है :

1995	1996	1997
100	106.3	109.4

टिप्पणी

(i) नए घातांक को पुराने के शिरोबंधित करें, i.e., 'आगे' शिरोबंधित

(ii) पुराने घातांक को नए के शिरोबन्धित करें i.e., 'पीछे' शिरोबंधित

12.(a) क्या अर्थ लगाया जाता है (i) आधार परिवर्तन (ii) शिरोबन्धन और अपस्फीति सूचकांकों का से? वर्णन करें और दृष्टांत दें।

(b) आप सूचकांकों के अपस्फीति से क्या समझते हैं? सूचकांकों के अपस्फीति की क्या जरूरत है? आप अपने उत्तर का वर्णन एक उदाहरण की सहायता से करें।

13.(a) कैसे सूचकांक प्रयुक्त होता है मुद्रा की क्रय शक्ति को मापने में।

(b) आप सूचकांकों के अपस्फीति से क्या समझते हैं? अपने उत्तर का वर्णन एक उदाहरण की सहायता से करें।

14. समंक संलग्न तालिका में दी गई है :

वर्ष	साप्ताहिक हाथ में मिला, वेतन (मजदूरी) '00 (रु.)	उपभोक्ता मूल्य घातांक
1993	109.50	112.8
1994	112.20	118.2
1995	116.40	127.4
1996	125.08	138.2
1997	135.40	143.5
1998	138.10	149.8

(i) प्रत्येक वर्ष के लिए वास्तविक औसत मजदूरी क्या थी?

(ii) किस वर्ष कर्मचारियों को सबसे अधिक क्रय शक्ति थी?

(iii)वर्ष 1998 के लिए साप्ताहिक मजदूरी में कितना प्रतिशत वृद्धि वांछित है (अगर कोई) समान क्रय शक्ति प्रबंध करने में जो कर्मचारियों ने अनुभव किया था जब उनका उच्चतम वास्तविक मजदूरी थी।

15. माध्य मासिक वेतन (x) और जीवन निर्वाह सूचकांक (y) वर्ष 1990 से 1995 नीचे दिए गए हैं :

वर्ष	:	1990	1991	1992	1993	1994	1995
रुपये x	:	360	400	480	520	550	590
y	:	100	104	115	160	210	260

किस वर्ष में वास्तविक आय थी (i) उच्चतम (ii) निम्नतम?

16. नीचे की तालिका औद्योगिक कामगारों के समूह का औसत मजदूरी प्रत्येक दिन रुपये में दर्शाती है वर्ष 1960 से 1971 के दरम्यान। इन वर्षों के लिए उपभोक्ता मूल्य घातांक आधार (1960 = 100) के साथ भी दर्शाई गई है।

(a) कामगारों के वास्तविक मजदूरी का निर्धारण 1960–1971 के दौरान करें उनके 1960 के मजदूरी की तुलना में।

वर्ष :	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
कामगारों की औसत मजदूरी :	1.19	1.33	1.44	1.57	1.75	1.84	1.89	1.94	1.97	2.13	2.28	2.45

उपभोक्ता मूल्य घातांक 100 107.6 106.6 107.6 116.2 118.8 119.8 120.2 119.9 121.7 1259

(b) 1971 के लिए रुपये की क्रय शक्ति का निर्धारण 1960 की तुलना में करें। इस परिणाम की क्या सार्थकता है?

17. निम्नलिखित समंक लोगों की आय और सामान्य मूल्य सूचकांक किसी क्षेत्र से संबंधित हैं। परिकलित करें–

(i) वास्तविक आय, और

(ii) वास्तविक आय का सूचकांक 1983 आधार वर्ष के साथ

वर्ष :	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
आय ('00 रु. में) :	800	819	825	876	920	938	924
सामान्य मूल्य सूचकांक :	100	105	110	120	125	140	140

18. नीचे दिया गया समंक 1975–80 के लिए एक फैक्टरी के अकुशल श्रमिकों का औसत मजदूरी रुपये में प्रति घंटा है। इन वर्षों के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक भी दर्शाई गई हैं (1975 को आधार वर्ष लेकर)

श्रमिकों के वास्तविक मजदूरी का निर्धारण करें और रुपये के क्रय शक्ति का निर्धारण 1980 में 1975 की तुलना में करें।

वर्ष :	1975	1976	1977	1978	1979	1980
उपभोक्ता मूल्य घातांक :	100	120.2	121.7	125.9	129.3	140
औसत मजदूरी (रु. में) :	1.2	1.9	2.2	2.3	2.4	3.1

19. एक अमेरिकन कंपनी के कर्मचारियों ने निम्नलिखित समंक को प्रस्तुत किया है अपनी मान्यता के समर्थन में कि वे वेतन समायोजन के हकदार हैं। समूह का औसत साप्ताहिक हाल में मिलने वाला वेतन दर्शाया गया है डॉलर में

वर्ष :	1983	1984	1985	1986
वेतन :	240	250	260	280
घातांक :	120	150	160	200

(i) वास्तविक वेतनों की गणना करें।

(ii) 1986 में जरूरी वेतन की राशि की गणना करें क्रय शक्ति प्रबंध करने के लिए जो 1983 में उनके द्वारा अनुभव किया गया।

टिप्पणी

20. निम्नलिखित समंक एक शिक्षक का वार्षिक आय देता है और मूल्य का सामान्य घातांक 1990 से 1997 के दरम्यान। सूचकांक तैयार करें शिक्षक के वास्तविक आय में परिवर्तन को दर्शाने के लिए और मूल्य वृद्धि पर समीक्षा प्रस्तुत करें।

वर्ष :	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
आय :	4,000	4,400	4,800	5,200	5,600	6,000	6,400	6,800
घातांक :	100	130	160	220	270	330	400	490

प्रश्नमाला–8.5

1.(a) जीवन निर्वाह सूचकांक क्या हैं? यह किस चीज को मापती है? संक्षेप में इसके उपयोग और सीमाओं पर विचार–विमर्श करें।

(b) आप जीवन निर्वाह सूचकांकों से क्या समझते हैं? उनके निर्माण के विभिन्न चरणों का संक्षेप में वर्णन करें।

(c) ''जीवन निर्वाह सूचकांक आवश्यक रूप से एक उपभोक्ता मूल्य सूचकांक हैं।'' विचार–विमर्श करें। इसके निर्माण में अन्तर्वेशित महत्वपूर्ण चरणों का वर्णन करें। इसके उपयोग क्या हैं?

2. वे बिंदु क्या हैं जो ध्यान में लिए जाते हैं आधार वर्ष को चुनने में और मूल्य सूचकांकों के भारों के आयोजन को निर्धारित करने में?

3. उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों के निर्माण की विधि का विस्तार से लेखा प्रस्तुत करें। उस सूत्र की व्याख्या करें जिसको आप इस संबंध में प्रयुक्त करेंगे।

4. सूचकांक क्या है? सामान्य धाराओं का वर्णन करें जिस पर आप आगे बढ़ेंगे मूल्य सूचकांक के निर्माण में फैक्टरी कामगारों के लिए एक औद्योगिक क्षेत्र में।

5. उपभोक्ता मूल्य घातांक के निर्माण की विधि कैसे थोक मूल्य घातांक से भिन्न होती है? एक दृष्टांत देकर इसका वर्णन करें।

6. सूचकांक कैसे निर्मित होती है? आधार वर्ष के चुनाव के महत्व की विवेचना करें और भारों के चुनाव का जीवन निर्वाह सूचकांक के निर्माण में।

7. (a) सूचकांकों के उपयोग और सीमाओं का वर्णन करें।

(b) 'सूचकांक' क्या है? सूचकांक की सार्थकता का वर्णन करें।

(c) उन क्षेत्रों की चर्चा करें जिनमें सूचकांक उपयोगी हैं उनकी सीमाओं के बावजूद।

8. निम्नलिखित समंक के लिए जीवन निर्वाह घातांक ज्ञात करें :

समूह	समूह घातांक	भार
भोजन	180	140
वस्त्र	150	42
किराया	100	49
ईंधन और प्रकाश	110	56
विविध	80	63

9. किसी जीवन निर्वाह सूचकांक के निर्माण में, निम्नलिखित समूह सूचकांक पाए गए। जीवन निर्वाह सूचकांक परिकलित करें प्रयुक्त करके :

(i) भारित समान्तर माध्य; और (ii) भारित गुणोत्तर माध्य :

समूह	सूचकांक	भार
भोजन	352	48
ईंधन और प्रकाश	200	10
वस्त्र	230	8
मकान किराया	160	12
विविध	190	15

10. किसी संस्थान के कर्मचारियों का औसत वेतन पिछले दस वर्षों में तिगुना हो जाती है। इसलिए, इस अवधि में उनका जीवन स्तर तीन गुणा बढ़ गई है। क्या आप सहमत है? वर्णन करें।

11. एक कामगार ने 1990 में 900 रु. प्रति महीना कमाया। 1990 और 1993 के बीच जीवन निर्वाह सूचकांक 70% बढ़ गया। कितना अतिरिक्त आय 1993 में एक कामगार ने कमाया ताकि वह 1990 के समान परिमाण खरीद सकें?

12. किसी अवधि के दरम्यान जीवन निर्वाह सूचकांक 110 से बढ़कर 200 हो जाती है और वेतन कामगार का 325 रु. से बढ़कर 550 रु. हो जाता है। क्या कामगार वास्तविक लाभ पाता है, और ऐसा अगर, तो वास्तविक क्रमों में कितना?

13. निम्नलिखित सूचना कामगारों से संबंधित एक औद्योगिक शहर में दी जाती है :

उपभोक्ता सामग्रियाँ	उपभोक्ता मूल्य घातांक 2000 में 1990 = 100	खर्च का समानुपात मदों पर
(i) भोजन, पीना और तंबाकू	225	52%
(ii) वस्त्र	175	8%
(iii) ईंधन और प्रकाश	155	10%
(iv) मकान	250	14%
(v) विविध	150	16%

1990 में प्रति माह औसत वेतन 2000 रु. था। 2000 में प्रति माह प्रति कर्मचारी औसत वेतन क्या होना चाहिए ताकि कामगारों का जीवन स्तर 1990 के स्तर से नीचे नहीं गिरे?

टिप्पणी

14. संलग्न तालिका विभिन्न समूहों का जीवन निर्वाह सूचकांक उनके क्रमानुसार भारों के साथ 1992 (आधार वर्ष 1982) के लिए देती है। पूर्ण जीवन निर्वाह सूचकांक परिकलित करें।

समूह	जीवन निर्वाह घातांक	भार
भोजन	525	40
वस्त्र	325	16
ईंधन और प्रकाश	240	15
किराया	180	20
विविध	200	9

मि. बोस 1982 में 550 रु. वेतन पाता है। निर्धारित करें कि उसे वेतन के रूप में 1992 में कितना वेतन पाना चाहिए 1982 के समान जीवन स्तर कायम रखने के लिए।

15.संलग्न तालिका में दिया गया सूचना एक औद्योगिक शहर के कामगारों से संबंधित हैः सम्पूर्ण जीवन निर्वाह सूचकांक को परिकलित करें।

औसत वेतन प्रति माह 1990 में 1400 रु. था। क्या औसत वेतन प्रति माह 1993 में होना चाहिए उस शहर में, ताकि कामगारों का जीवन स्तर 1990 स्तर के नीचे नहीं गिरे।

उपभोक्ता सामग्री	उपभोक्ता मूल्य घातांक 1993 में (आधार वर्ष 1990 = 100)	मदों पर खर्च का समानुपात
भोजन	220	50%
वस्त्र	150	10%
प्रकाश	140	10%
मकान	240	15%
विविध	200	15%

16. नीचे जीवन निर्वाह विश्लेषण का अंशतः नष्ट रिकार्ड से अपूर्ण सूचना प्राप्त किया गया :

समूह	समूह घातांक	कुल खर्च का %
भोजन	130	60
वस्त्र	140	उपलब्ध नहीं
मकान	105	20
ईंधन और विद्युत	120	5
विविध	130	उपलब्ध नहीं

जीवन निर्वाह घातांक भार के रूप में कुल खर्च का 127.9% पाया गया। प्रयुक्त भारों को प्राक्कलित करें वस्त्रों और विविध के लिए।

टिप्पणी

17. एक व्यक्ति की मासिक आय 10,500 रु. है। यह दिया गया है कि एक खास महीने के लिए जीवन निर्वाह घातांक 136 है। उस व्यक्ति द्वारा खर्च की गई राशि ज्ञात करें :

मद	खर्च (रु.)	घातांक
भोजन	?	180
किराया	1470	100
वस्त्र	?	150
ईंधन और क्षमता	1680	110
विविध	1890	80

(i) भोजन पर; और

(ii) वस्त्र पर

18. अहमदाबाद शहर में एक टेक्सटाइल कामगार 750 रु0 प्रतिमाह कमाता है। जनवरी 1986 के लिए जीवन मूल्य घातांक दिया गया है 160 निम्नलिखित समंक का प्रयोग कर, राशि ज्ञात करें वह खर्च करता है (i) भोजन और (ii) किराया पर।

समूह	खर्च (रु.)	समूह घातांक
(i) भोजन	?	190
(ii) वस्त्र	125	181
(iii) किराया	2	140
(iv) ईंधन और प्रकाश	100	118
(v) विविध	75	101

19. जीवन निर्वाह घातांक को परिकलित करने के लिए निम्नलिखित भार प्रयुक्त होते हैं : भोजन $8\frac{1}{2}$, किराया 2, वस्त्र $2\frac{1}{2}$, ईंधन और प्रकाश 1 ; विविध 11 एक समंक के लिए सूचकांक परिकलित करें जब प्रतिशत वृद्धि मूल्यों में विभिन्न मदों का जुलाई 1998 = 100 के मूल्यों पर क्रमशः 31, 57, 90, 75 और 88 थे।

20. किसी जीवन निर्वाह सूचकांकों के परिकलन में, निम्नलिखित भार प्रयुक्त हुए। भोजन 15, वस्त्र 3, किराया 4, ईंधन और प्रकाश 2, विविध 1। एक समंक के लिए सूचकांक परिकलित करें जब औसत प्रतिशत वृद्धि मदों के मूल्य में विभिन्न समूहों में आधार वर्ष पर क्रमशः 32, 54, 47, 78 और 58 थे।

मान लें कि एक बिजनेस एक्जुक्युटिव आधार वर्ष में 2,050 रु0 कमा रहा था। चालू अवधि में उसका वेतन क्या होना चाहिए अगर उसका जीवन स्तर समान रहना है?

टिप्पणी

21. किसी तिथि पर, मंत्रालय का खुदरा मूल्य घातांक 204.6 था। मूल्य में प्रतिशत वृद्धि किसी आधार वर्ष पर थे : किराया और दरें 65, वस्त्र 220, ईंधन और प्रकाश 110, विविध 125 भोजन समूह में प्रतिशत वृद्धि क्या थी? दिया गया है विभिन्न मदों का समूह में भार निम्न थे :

    भोजन 60, किराया और दरें 16, वस्त्र 12, ईंधन और प्रकाश 8, विविध 4

22. निम्नलिखित आठ समूहों का पारिवारिक खर्च का आपेक्षिक महत्व पाया गया भोजन–348, किराया 88, वस्त्र 97, ईंधन और प्रकाश 65, घरेलू स्थायी सामान 71, विविध सामान 35, सेवाएं 79, पीना और तंबाकू 217। संगत प्रतिशत मूल्य में वृद्धि अक्टूबर 1975 के लिए निम्नलिखित मूल्य दिया– 25, 1, 22, 18, 14, 13, ? और 4। समूह में प्रतिशत वृद्धि परिकलित करें– सेवाएं, अगर पूरे समूह के लिए प्रतिशत वृद्धि 15.278 है।

23. कुछ दिए गए समंक से, पाँच मदों पर आधारित खुदरा मूल्य घातांक viz., भोजन, किराया और दरें, ईंधन और प्रकाश, वस्त्र और विविध परिकलित किया गया 205 मूल्यों में प्रतिशत वृद्धि आधार वर्ष पर नीचे दिया गया है :

    किराया और दरें 60, वस्त्र 210 ; ईंधन और प्रकाश 120, विविध 130 भोजन समूह में प्रतिशत वृद्धि परिकलित करें, विभिन्न मदों का भार निम्न हैं :

    भोजन 60, किराया और दरें 16, ईंधन और प्रकाश 8, वस्त्र 12, विविध 4, सभी मदें 100.

24. निम्नलिखित समंक से जीवन निर्वाह सूचकांक परिकलित करें :

समूह/वस्तुएँ	भार (W)	समूह/वस्तु सूचकांक (I)
भोजन	71	370
वस्त्र	3	423
ईंधन, इत्यादि	9	469
मकान किराया	7	110
विविध	10	279

25. समूह घातांक और संगत भार कामगार वर्ग के लिए एक औद्योगिक शहर का जीवन निर्वाह सूचकांक 1996 और 2000 वर्षों के लिए नीचे दिया गया है :

समूह	भार	समूह घातांक	
		1996	**2000**
भोजन	71	370	380
वस्त्र	3	423	504
ईंधन, इत्यादि	9	469	336
मकान किराया	7	110	116
विविध	10	279	283

(a) दो वर्षों 1996 और 2000 के लिए जीवन निर्वाह घातांकों को परिकलित करें।

(b) अगर एक कामगार 1996 में 3000 रु0 प्रति माह पा रहा था, क्या आप सोचते हैं कि उसे कुछ अतिरिक्त भत्ता दिया जाना चाहिए ताकि वह 1996 के जीवन स्तर को कायम रख सके? अगर हाँ, तो न्यूनतम राशि क्या होनी चाहिए इस अतिरिक्त भत्ता का?

26. उत्पाद A और B में दो भिन्न समानुपातों में श्रम और पूँजी प्रयुक्त की जाती है, परन्तु दोनों उत्पादों के लिए इनपुट (अवयवों) की कीमत बराबर हैं। संलग्न तालिका में दिए गए सूचना के आधार पर, 2000 वर्ष के लिए श्रम और पूँजी के लिए अलग मूल्य घातांक तैयार करें।

	उत्पाद A	उत्पाद B
श्रम के लिए भार	60	70
पूँजी के लिए भार	40	30

2000 के लिए उत्पाद मूल्य का घातांक

(आधार वर्ष 1990 = 100) 340 330

27. किसी शहर में (भारत) मध्यम वित्त परिवारों के बजट के अन्वेषण से निम्नलिखित सूचनाएं मिलीं :

खर्च	भोजन	ईंधन	कपड़े	किराया	विविध
	35%	10%	20%	15%	20%
मूल्य 1995 (रु.)	150	25	75	30	40
मूल्य 1996 (रु.)	145	23	65	30	45

1996 का जीवन निर्वाह सूचकांक क्या है 1995 की तुलना में?

28. सूत्र का प्रयोग करें $I_x = \frac{\Sigma q_0 p_1}{\Sigma q_0 p_0} \times 100,$ और 2000 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक ज्ञात करें आधार वर्ष 1989 के साथ निम्नलिखित समंक की सहायता से। इस तरह से प्राप्त सूचकांक की व्याख्या करें।

मद संख्या	उपभोक्ता परिमाण 1989 में (q_0)	मूल्य प्रति इकाई 1989 में (p_0)	2000 के मूल्य प्रति इकाई (p_x)
1	75	3.4	9.6
2	16	2.5	8.5
3	15	7.6	12.6
4	22	4.5	7.5
5	13	7.0	11.0
6	3	2.0	4.0

टिप्पणी

29. नीचे दिए गए घातांक से 1999 और 2000 के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक निर्मित करें :

वर्ष	भोजन	किराया	वस्त्र	ईंधन	संगीत
1998	100	100	100	100	100
1999	102	100	103	100	97
2000	106	102	105	101	98

विभिन्न समूहों के लिए निम्नलिखित भारों की परिकल्पना करें :

भोजन	किराया	वस्त्र	ईंधन	संगीत
60	16	12	8	4

30. औद्योगिक उत्पादन का सूचकांक तीन उद्योगों के समूह को आच्छादित करता है। यह सूचकांक समय के एक बिंदु से दूसरे बिंदु के लिए 106.4 से 150.2 तक बढ़ा। व्यक्तिगत तीन उद्योगों के समूह का सूचकांक, समान अवधि में, निम्न प्रकार से परिवर्तित हुआ : खनन और प्रस्तर खनि (Mining and Quarrying) 102.0 से 144.1; उत्पादन 106.5 से 146.6; विद्युत 110.4 से 189.9.

    व्यक्तिगत उद्योगों के समूह के लिए भार को निर्धारित करें।

31. अगर उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (उसी वर्ग के लोगों का समान आधार वर्ष के साथ) दिल्ली के लिए उच्चतर है मुम्बई से, क्या आवश्यक रूप से इसका अर्थ है दिल्ली अधिक खर्चीली है (इस वर्ग के लोगों के लिए) मुम्बई की अपेक्षा। अपने उत्तर के समर्थन में तर्क दें।

32. एक विशेष शहर के कामगार वर्ग में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक, विभिन्न समूहों के मदों के संगत भार निम्न थे:

    भोजन 55, ईंधन 15, वस्त्र 10, किराया 8 और विविध 12

    अक्टूबर 2000 में, उस शहर के एक मिल द्वारा D.A. नियत किया गया कामगारों के लिए 182 प्रतिशत जिसने भोजन और किराया के मूल्यों को पूर्णतः समायोजित कर दिया परन्तु किसी दूसरे चीज को नहीं। उसी शहर के दूसरे मिल ने D.A. भुगतान किया 46.5% जिसने ईंधन और विविध समूह के मूल्य वृद्धि को समायोजित किया। यह ज्ञातव्य है कि भोजन में मूल्य वृद्धि ईंधन से दुगुनी है और विविध समूह की दुगुनी है किराए से।

    भोजन, ईंधन, किराया और विविध समूह के मूल्य वृद्धि को ज्ञात करें।

8.15 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस	किताब का महल
2.	सांख्यिकी के सिद्धान्त	–	एस.पी. सिंह	S. Chand & Co.
3.	Fundamentals of Statistics	–	S.C. Gupta& V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
4.	Applied Statistics	–	S.C. Gupta & V.K. Kapoor	S. Chand & Co.
5.	Fundamentals of Statistics	–	G.M. Gupta & Das Gupta	S. Chand & Co.
6.	Mathematical Statistics	–	H.C. Saxena	S. Chand & Co.

अध्याय 9 समंक का आरेखीय चित्रमय और लेखाचित्रीय प्रदर्शन (Diagrammatic and Graphic Representation of Data)

संरचना (Structure)

9.0 परिचय (Introduction)

वर्गीकरण और सारणीयन सांख्यिकीय समंकों को साफ सुथरे संक्षिप्त, व्यवस्थित और तुरंत समझने योग्य और बोधगम्य रूप में प्रदर्शित करने के साधन हैं। दूसरा आवश्य, विश्वसनीय, प्रभावोत्पादक और आसानी से समझ में आने वाली सांख्यिकीय समंक का प्रदर्शन चित्रमय और बिन्दु रेखीय प्रदर्शन है। वे और कुछ नहीं बल्कि ज्यामितीय आकार जैसे बिन्दु, रेखाएं, डंडे, वर्गों, आयतों, घनों (Cubes) इत्यादि तस्वीरों, नक्शे या चार्ट हैं।

9.1 उद्देश्य (Objectives)

चित्रमय और रेखाचित्र चाक्षुष (दृश्यमान) सहायक हैं जो संख्यात्मक समंक के दिए समुच्चय (दृश्यमान) सहायक हैं जो संख्यात्मक समंक के दिए समुच्चय पर विहंगम दृष्टि डालते हैं। वे समंक को आसान और आसानी से समझ आने योग्य रूप में प्रस्तुत करते हैं।

चित्ररेखा सामान्यतया अधिक आकर्षक, बाँघने वाले और असरदार होते हैं बनिस्पत संख्यात्मक समंक के समुच्चय से। वे आँखों पर अधिक असरकारक हैं और दिमाग पर अधिक स्थाई प्रभाव डालते हैं रूखे और रूचिहीन सांख्यिकीय आँकड़ों की तुलना में।

यह अधिक मोहक है और सांख्यिकीय आँकड़ों और तथ्यों को प्रदर्शित करने में काफी प्रयुक्त होती है, ज्यादातर प्रदर्शनियों व्यापार या औद्योगिक मेलों, सार्वजनिक कार्यक्रमों इत्यादि में। मनुष्य के दिमाग में सुन्दर चित्रों के लिए प्राकृतिक तृष्णा और प्यार होता है और मनुष्य के दिमाग के इस मनोविज्ञान का आधुनिक विज्ञापन एजेन्सियाँ व्यापक रूप से लाभ उठाती हैं जो अपने विज्ञापनों को आकर्षक और सुन्दर चित्रों के रूप में देती हैं। इस प्रकार चित्रमय और रेखाचित्रों की सर्वव्यापी प्रयोज्यता है।

9.2 समंक का आरेखीय प्रदर्शन (Diagrammatic Representation of Data)

'आरेख' दृश्यमान सहायक हैं समंक को चित्रों, ज्यामितीय रेखाचित्रों और दण्डों में प्रस्तुत करने के लिए। वे संख्यात्मक समंक के विशाल परिमाण को संघनित रूप में आकर्षक रूप से प्रदर्शित करते हैं। वे सामान्य जन के मानसपटल पर चिरस्थाई प्रभाव छोड़ते हैं जो संख्यात्मक समंक में अधिक समय देने में अभिरूचि नहीं रखते हैं। वे समय की बचत करते हैं जो ऐसे संख्यात्मक समंक के अध्ययन में बीत जाता। वे सम्पूर्ण समंक को एकबारगी दृष्टिगोचर कर देते हैं।

आरेख सिर्फ सामान्य जन के लिए उपयोगी है; उनकी उपयोगिता विशेषज्ञों के लिए सीमित है। वे विस्तृत सूचना उपलब्ध कराने में विफल हो जाती है। वे सिर्फ सन्निकट मूल्यों को उद्‌घाटित करती हैं। वे समंक को चर के एक खास मूल्य की सीमा में प्रदर्शित करती हैं। वे समंक के सिर्फ दो या तीन समुच्चयों का लेखा रखती हैं। वे आगे के गणितीय विश्लेषण के लिए नहीं होती है। कभी–कभी, वे गलत आधार रेखा पर आधारित होती हैं और उपयुक्त मापक्रम पर नहीं। वे सिर्फ निष्कर्ष निकालने की युक्ति हैं पर विश्वसनीय नहीं।

सावधानी बरतना आवश्यक है आरेख की 'संरचना' करते वक्त; नहीं तो वे गलत प्रभाव छोड़ते हैं और भ्रामक निष्कर्ष देते हैं। वे साफ सुथरे और आकर्षक ढंग से खींचे जाने चाहिए। आरेख में प्रयुक्त ज्यामितीय आकार परिशुद्ध और समानुपाती होना चाहिये। आरेख को ना तो बहुत छोटा होना चाहिए ना ही बहुत बड़ा आकार में। इसका छोटे में उपयुक्त शीर्षक होना चाहिये। आरेख में खींचा गया चित्र मापक्रम के अनुसार होना चाहिये। विभिन्न गुणधर्मों के लिए विभिन्न रंग प्रयुक्त होती हैं आरेख को अधिक आकर्षक बनाने के लिए।

टिप्पणी

9.3 आरेख के प्रकार (Types of Diagram)

विभिन्न प्रकार हैं समंक को आरेखीय प्रदर्शित करने के निम्न :

1. **एक–विमतीय (One-Dimensional) :** रेखा, सरल दण्ड (Bar), बहुविध दण्ड, अन्तर्विभक्त दण्ड, अन्तर्विभक्त प्रतिशत दण्ड, विचलन दण्ड (Deveation Bar), द्वि–दिशा दण्ड (Duo-Directional Bar), युग्म दण्ड (Paired Bar) और विच्छेद–दण्ड (Broken-Bar)
2. **द्वि–विमतीय (Two-Dimensional) :** आयताकार, वर्ग और वृत्त।
3. **त्रि–विमतीय (Three-Dimensional) :** घन, बेलन और ब्लॉक।
4. **दूसरे (Others) :** मानारेख (Cartograms), चित्ररेख (Pictograms)

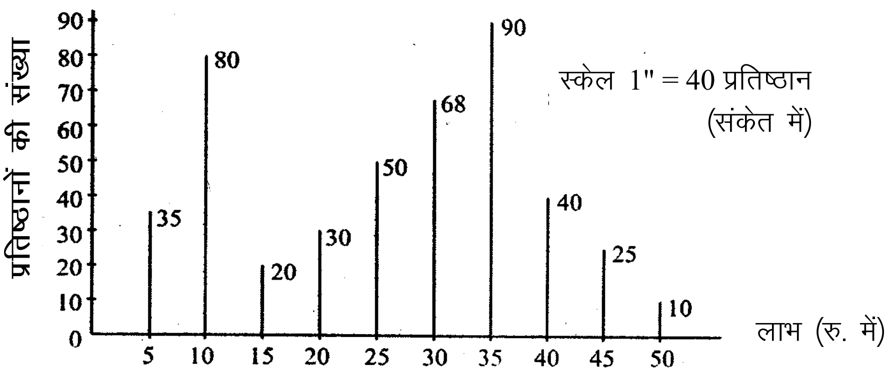
9.3.1 एक–विमतीय आरेख (One-Dimensional Diagrams)

(i) रेखा आरेख (Line Diagrams): ये आरेख उपयुक्त हैं जब चर के मूल्यों की बड़ी संख्या हैं उनके मूल्यों में विचरणता के साथ एक छोटी सीमा में। ये उदग्र रेखा (या पहले दण्ड) की आकृति में हैं।

उदाहरण 9.1: निम्न समंक को एक उपयुक्त आरेख से प्रदर्शित करें:

लाभ (लाख रु. में) :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
प्रतिष्ठानों की संख्याः	35	80	20	30	50	68	90	40	25	10

हलः



(ii) सरल दण्ड आरेख (Simple Bar Diagrams): ये आरेख व्यक्तिगत प्रेक्षणों और काल श्रेणी के लिए उपयुक्त हैं। दण्ड (मोटी रेखाओं) की एकरूप चौड़ाई है। हम प्रत्येक दण्ड के लिए अलग रंग या शेड या बिन्दु इस्तेमाल करते हैं समंक के विभिन्न गुणधर्मों की पहचान करने के लिए।

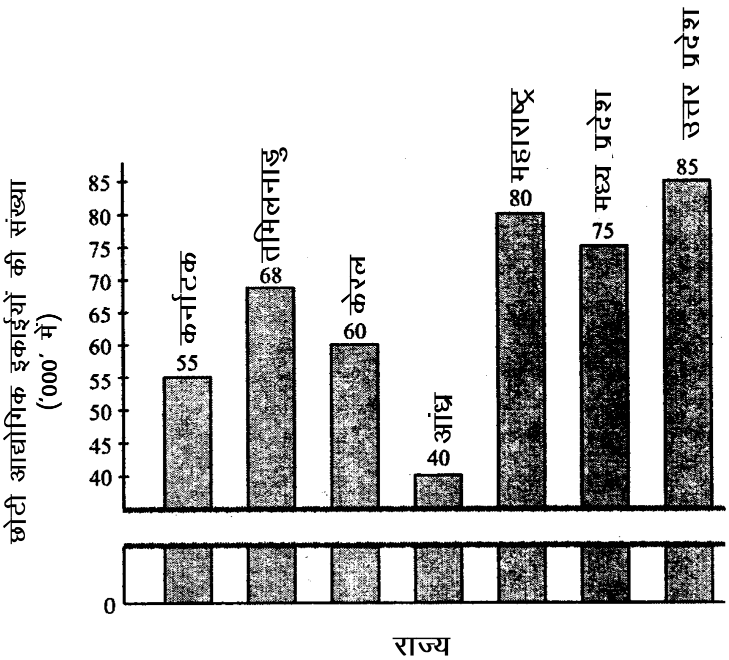
उदाहरण 9.2: निम्न समंक से उदग्र सरल दण्ड आरेख खींचे वर्ष 2008 के दरम्यान लघु उद्योग इकाई की संख्या से संबंधित।

राज्यः	कर्नाटक	तमिलनाडु	केरल	आंध्र	महाराष्ट्र	एम.पी.	यू.पी.
उद्योग इकाईयाँः	55	68	60	40	80	75	85

हलः

विभिन्न राज्यों में लघु इकाईयों को दर्शाती आरेख वर्ष 2008 के दरम्यान मापक्रम
(0 से 4 खंडित)

1" = 20 इकाईयाँ



नोटः चूँकि मूल्यों के सिर्फ दूसरे भाग में विस्तृत विचरणता है, i.e., 40,000 से 85,000। 0 से 40,000 के बीच की दूरी ''खंडित दण्ड'' से घटाई जाती है।

(iii) बहुविध दण्ड आरेख (संयुक्त दण्ड आरेख): ये आरेख तब प्रयुक्त होती हैं जब दो या दो से अधिक संवृत्ति कई वर्षों के ऊपर एक दूसरे से तुलना की जाती है। विभिन्न गुणधर्मों की पहचान के लिए, एक सूची बनायी जाती है। (हम अंतर्विभक्त दण्ड आरेख भी प्रयुक्त कर सकते हैं। देखें– उदाहरण 9.4)

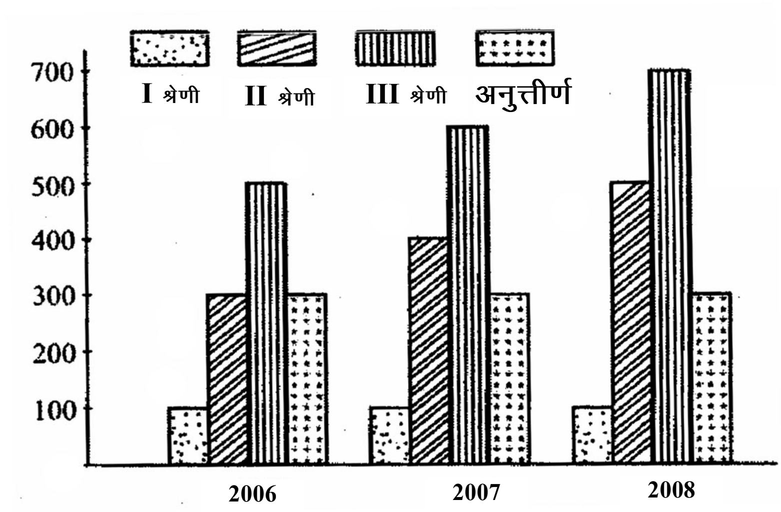
उदाहरण 9.3: जून 2006, 2007 और 2008 में ली गई बंगलौर विश्वविद्यालय के B.B.M. छात्रों की संख्यिकी विषय में परीक्षा के परिणाम के निम्न समंक को प्रस्तुत करें।

वर्ष	I Class	II Class	III Class	अनुत्तीर्ण
जून 2006	100	300	500	300
जून 2007	120	400	600	280
जून 2008	100	500	700	300

टिप्पणी

हल:

बंगलोर विश्वविद्यालय के B.B.M. परीक्षा का तीन वर्षों का परिणाम



(iv) अन्तर्विभक्त दण्ड आरेख (अवयव दण्ड आरेख): ए आरेख प्रयुक्त होती है जब दो या अधिक अवयव एक ही संवृत्ति में होते हैं। प्रत्येक दण्ड अवयव के अनुसार अन्तर्विभक्त होती हैं। सम्पूर्ण दण्ड चर के कुल मूल्यों को प्रदर्शित करते हैं। (हम बहुविध दण्ड आरेख भी प्रयुक्त कर सकते हैं– देखें उदाहरण संख्या 9. 3)।

उदाहरण 9.4: निम्न तालिका बंगलोर विश्वविद्यालय के एम.बी.ए. छात्रों का परिणाम पिछले तीन वर्षों का दर्शाती है। समंक को एक उपयुक्त आरेख से दर्शाएं।

वर्ष	प्रथम श्रेणी	द्वितीय श्रेणी	तृतीय श्रेणी	अनुत्तीर्ण	योग
2006	60	160	260	163	643
2007	70	210	310	150	740
2008	60	260	360	160	840

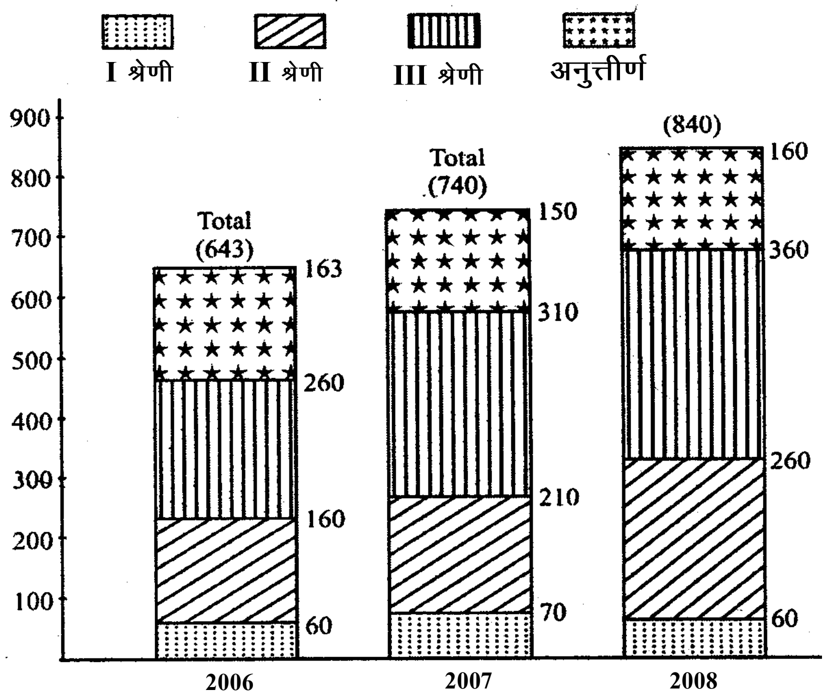
(छात्रों की संख्या '000' में)

हल: उपर्युक्त समंक को संचई अंकों में परिवर्तित किया जाना है विभिन्न अवयवों और उनके विभाजन को दर्शाने के लिए।

वर्ष	प्रथम श्रेणी	प्रथम और द्वितीय श्रेणी	प्रथम, द्वि., तृतीय श्रेणी	सभी अनुत्तीर्ण
2006	60	220	480	643
2007	70	280	590	740
2008	60	320	680	840

टिप्पणी

बंगलोर विश्वविद्यालय का M.B.A. परीक्षा परिणाम तीन वर्षों के लिए



(v) अंतविभक्त प्रतिशत दण्ड आरेखः ये आरेख प्रयुक्त होती हैं चर के मूल्यों को प्रतिशत में दर्शाने में। सभी दण्ड ऊँचाई में बराबर दिखते हैं जो मूल्य 100 को प्रतिशत में दर्शाते हैं।

उदाहरण 9.5: निम्न समंक को प्रतिशत अंतविभक्त दण्ड आरेख से प्रदर्शित करें:

प्रति उपकरण कीमत	2006 (रु.)	2007 (रु.)	2008 (रु.)
कच्चा माल	2,160	2,600	2,700
श्रम	540	700	810
प्रत्यक्ष खर्चे	600	300	350
कारखाना खर्चे	360	200	360
कार्यालय खर्चे	180	200	270
कुल	3,840	4,000	4,490

हलः उपर्युक्त समंक को प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना है और तब संचई प्रतिशतों में विभिन्न अवयवों और उनके विभाजन को दर्शाने के लिए।

कीमत के अवयव	2006		2007		2008	
	%	c.f.%	%	c.f.%	%	c.f.%
कच्चा माल	56.25	56.25	65	65.00	60.13	60.13
श्रम	14.06	70.31	17.50	82.50	18.04	78.17

टिप्पणी

प्रत्यक्ष खर्चे	15.63	85.94	7.50	90.00	7.80	85.97
कारखाना खर्चे	9.38	95.32	5.00	95.00	8.02	93.99
कार्यालय खर्चे	4.68	100.00	5.00	100.00	6.01	100.00
	100.00		100.00		100.00	

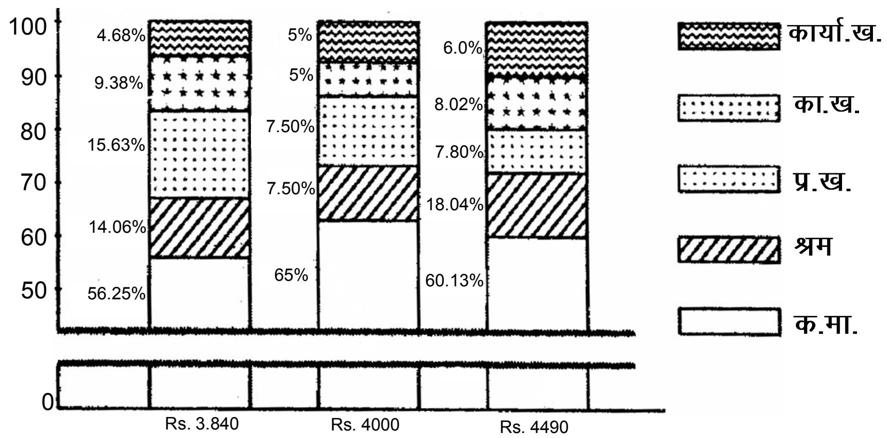
संकेतनः कच्चा माल...... $\frac{100 \times 2160}{3840} = 56.25$ का.ख....... $\frac{100 \times 360}{3840} = 9.38$

श्रम...... $\frac{100 \times 540}{3840} = 14.06$ का.ख........ $\frac{100 \times 180}{3840} = 4.68$

प्र.ख....... $\frac{100 \times 600}{3840} = 15.63$ इसी तरह 2007 और 2008 के लिए

उपकरण की कीमत दर्शाता आरेख

मापक्रम 1 सेमी. = 10%



उपकरण की कीमत

(vi) विचलन दण्ड (Deviation Bars): ये आरेख प्रयुक्त होती हैं, विभिन्न मूल्यों में कुल विचलन व्यक्त करने के लिए। घनात्मक विचलन 'OX' अक्ष के ऊपर ली जाती हैं और ऋणात्मक विचलन इसके नीचे। दो विपरीत संवृत्तियाँः लाभ या हानि, व्यापार का अनुकूल संतुलन या व्यापार का प्रतिकुल संतुलन और बचत या घाटा– अभिव्यक्त किए जाते हैं विचलन दण्ड आरेखों से।

उदाहरण 9.6: निम्नलिखित आँकड़ें हैं 6 वर्षों का निर्यात और आयात से संबंधित। सूचना को विचलन दण्ड से प्रदर्शित करें।

वर्ष	निर्यात (लाख रु. में)	आयात (लाख रु. में)	भुगतान का संतुलन (लाख रु. में)
2003	25	5	+20
2004	110	70	+40

टिप्पणी

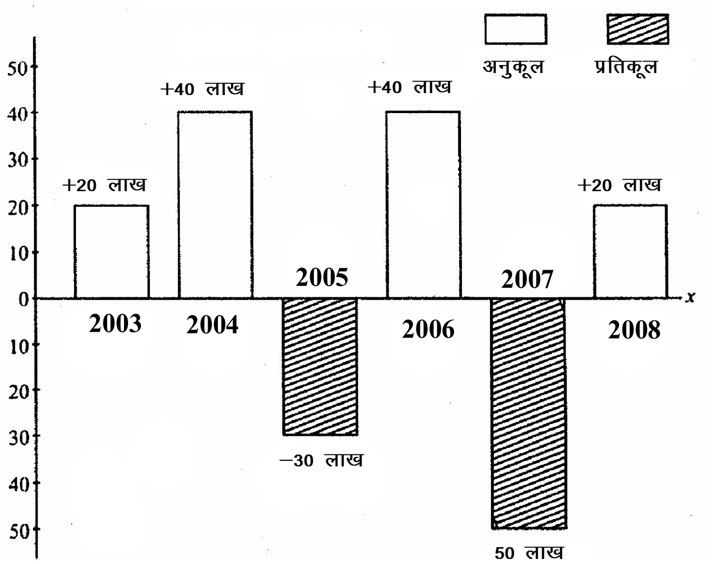
2005	80	110	-30
2006	130	90	+40
2007	90	140	-50
2008	150	130	+20

हलः

भुगतान का संतुलन दर्शाते हुए आरेख

(लाख रुपयों में) 6 वर्षों के लिए

मापक्रम = 1" = 40 लाख रु.



(vii) द्वि–दिशा दण्ड (Duo-Directional Bars): ये आरेख खींचे जाते हैं एक ही संवृत्ति के भिन्न और विपरीत अवयवों के कुल परिणाम को दर्शाने के लिए। चर का सकल मूल्य दो भागों में विभक्त किया जाता है ताकि एक भाग 'OX' अक्ष से ऊपर पड़े और दूसरा इसके नीचे। दोनों भागों को जोड़ने पर चर के मूल्य का सकल परिणाम हमें प्राप्त होता है।

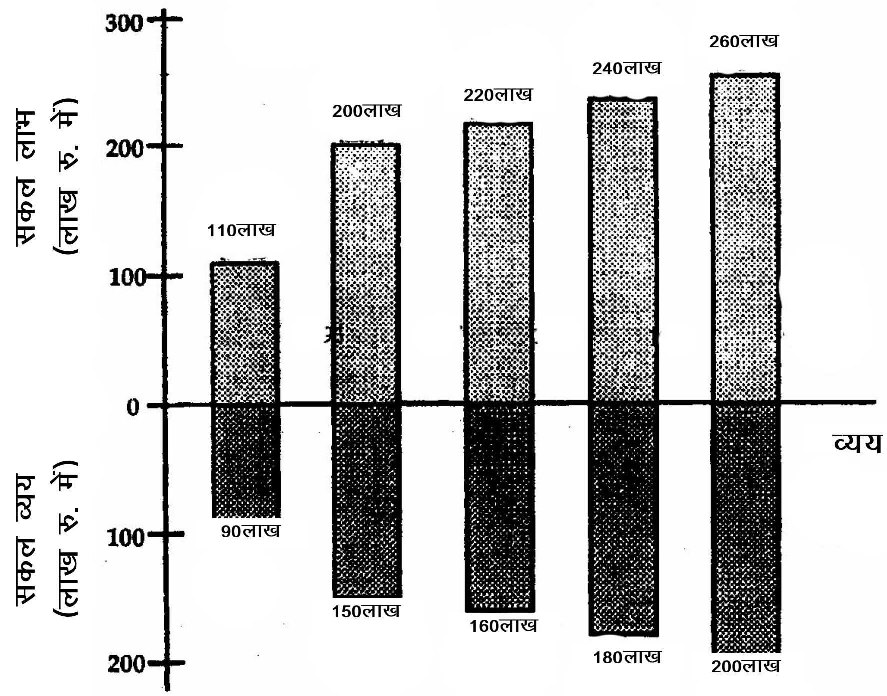
उदाहरण 9.7: निम्नलिखित समंक है सकल लाभ और व्यय से संबंधित (लाख रु. में) मेसर्स अमित इलेक्ट्रीकल्स लि. का पाँच वर्षों के लिए। समंक को द्वि–दिशा दण्ड से प्रदर्शित करें।

वर्ष	सकल लाभ (लाख रुपयों में)	व्यय (लाख रुपयों में)	वास्तविक लाभ (लाख रुपयों में)
2004	200	90	110
2005	350	150	200
2006	380	160	220
2007	420	180	240
2008	460	200	260

टिप्पणी

हल:

सकल लाभ और वास्तविक लाभ पाँच वर्षों के लिए मेसर्स अमित इलेक्ट्रिकल लि. का दर्शाते हुए आरेख



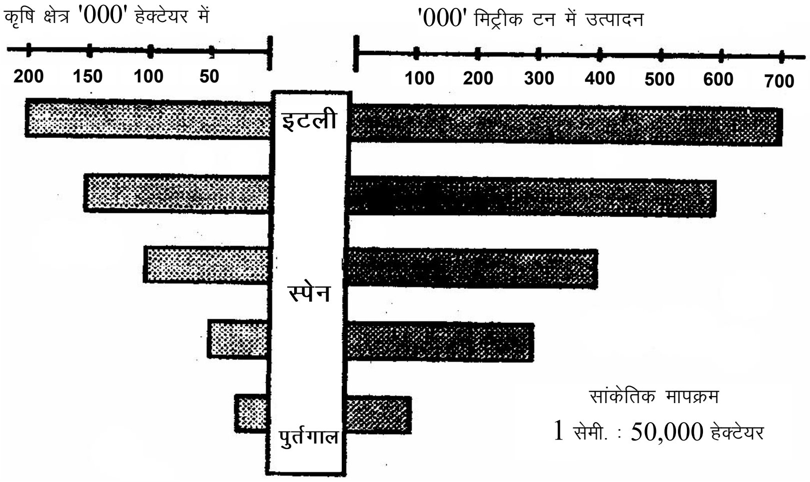
(viii) युग्म दण्ड (Paired Bars): ये आरेख समान संवृत्ति की संबंधित समंक को दर्शाने के लिए खींचे जाते हैं। युग्म दण्ड एक दूसरे से संबंधित होते हैं और उनका अध्ययन संयुक्त रूप से किया जाता है। वे भी द्वि–दिशा दण्डों जैसे दिखते हैं। द्वि–दिशा दण्ड OX अक्ष से विभक्त होते हें उदग्र रूप से जबकि युग्म दण्ड क्षैतिज रूप से मदों से विभक्त होते हैं जिनसे समंक संबंधित हैं। प्राकृतिक रूप से यह फैले हुए बाँह का प्रभाव देता है।

उदाहरण 9.8: निम्न समंक को युग्म दण्ड से प्रदर्शित करें जो 2008 के दरम्यान कृषि क्षेत्र और चावल के उत्पादन को दर्शाता है।

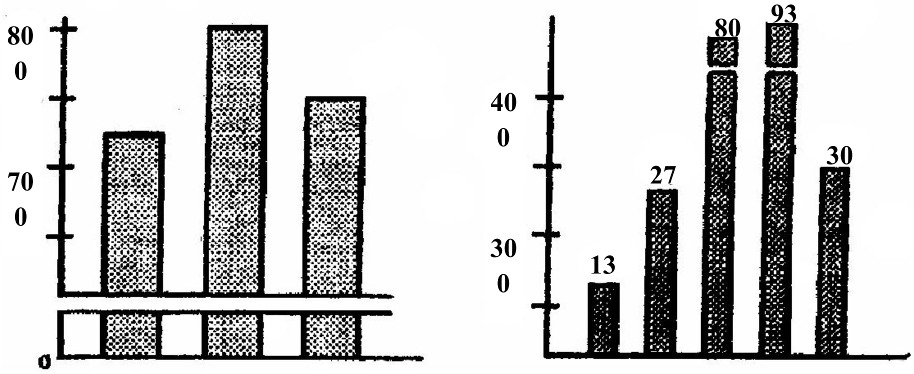
देश	इटली	स्पेन	पुर्तगाल	ग्रीस	फ्रांस
क्षेत्र ('000' हेक्टेयर में)	200	150	100	60	30
उत्पादन ('000' मिट्रिक टन में)	700	600	400	300	100

हल: 2008 में पाँच देशों के चावल के उत्पादन और कृषि क्षेत्र को दर्शाता हुआ आरेख

टिप्पणी



(ix) विच्छेद दण्ड (Broken Bars): ये दण्ड किसी विशेष आरेख से संबंधित नहीं हैं। यह मापक्रम के समायोजन के उपाय से संबंधित है, दण्ड खींचते वक्त अगर '0' और वह मूल्य जिससे मूल्य परिवर्तित होना शुरू होता है (देखें उदाहरण 9.2 और 9.3) के बीच काफी बड़ी दूरी है। दण्डों को एक खास बिन्दु पर विच्छेद कर दिया जाता है और दूरी घटा दी जाती है। हम कुछ दण्डों को दिखला सकते हैं जो मापक्रम में घटाए जाते हैं सिर्फ ऊपर में विच्छेद कर। ऐसे विच्छेद दण्डों को सावधानीपूर्वक पढ़ा जाना चाहिए। वे दर्शाएं जाते हैं निम्न जैसेः—



9.3.2 द्वि–विमतीय आरेख (Two-Dimensional Diagrams)

द्वि–विमतीय आरेख में, आरेख खींचते वक्त लम्बाई और चौड़ाई दोनों का विचार किया जाता है समंक को प्रदर्शित करने के लिए। ये आरेख 'फलक आरेख (Surface Diagrams)' या क्षेत्रफल आरेख (Area Diagrams) भी कहे जाते हैं। निम्नलिखित कुछ द्वि–विमतीय आरेख हैं जो सामान्यतया प्रयुक्त होते हैं :

(i) आयतें (Rectangles)

(ii) वर्ग (Squares)

(iii) वृत्त (Circles)

(i) आयतें: एक 'आयात' चार–भुजी चित्र है, चार सम कोणों (Right Angles) के साथ जिसकी आसन्न भुजाएं असमान होती हैं। आयतें दो या अधिक मूल्यों का आपेक्षिक परिणाम प्रदर्शित करती हैं। वे अगल–बगल रखी जाती हैं दण्डों के समान और दण्ड आरेखों के संशोधित रूप हैं। दण्ड–आरेखों के समान, आयतें भी

टिप्पणी

अन्तर्विभक्त होती हैं और प्रतिशतों में दर्शाई जाती हैं अवयवों के संबद्ध। प्रत्येक आयत का कुल क्षेत्रफल आनुपातिक रूप से घटाया जाता है इसके मूल्य के हिसाब से इसकी चौड़ाई और ऊँचाई में समायोजन करके। दो प्रकार के आयत आरेख होते हैं।

(a) सरल अन्तर्विभक्त आयत (Simple Sub-Divided Rectangles)

(b) प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयत (Percentage Sub-Divided Rectangles)

(a) सरल अन्तर्विभक्त आयतें: इस विधि के अधीन, दण्डों की चौड़ाई और ऊँचाई परिवर्तित होते हैं इनके मूल्यों के समानुपाती। अंकों को उसी तरह प्रदर्शित किया जाता है जैसे वे दिए जाते है। ऐसे आरेख सामान्यता तीन संबंधित संवृत्ति को दर्शाने के लिए प्रयुक्त होते हैं, उदाहरण के लिए, प्रति इकाई कीमत, बिक्री का परिमाण और बिक्री का मूल्य।

उदाहरण 9.9: निम्न समंक को एक उचित आरेख से प्रदर्शित करें

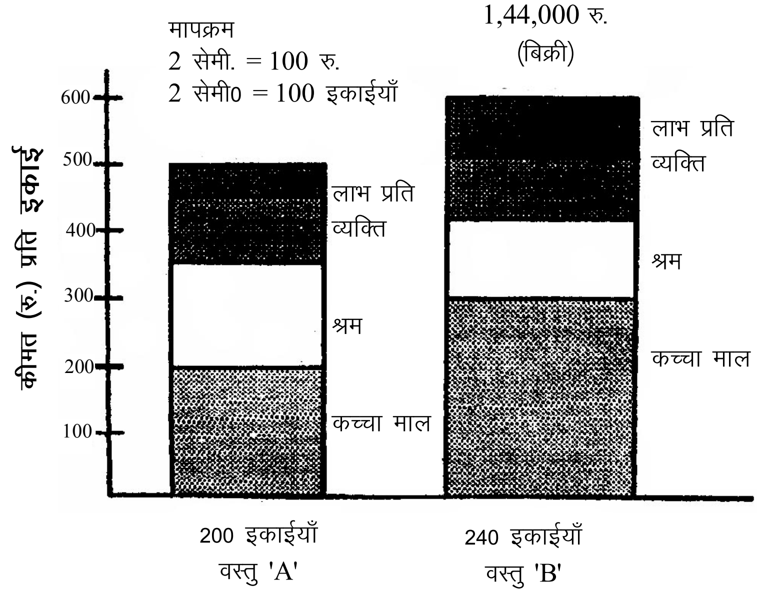
वस्तुएं	A	B
परिमाण बिक्री किया गया	200 इकाईयाँ	240 इकाईयाँ
प्रति इकाई मूल्य	500 रु.	600 रु.
कच्चे माल की कीमत प्रति इकाई	200 रु.	300 रु.
वेतन प्रति इकाई	150 रु.	120 रु.
दूसरी कीमतें प्रति इकाई	100 रु.	90 रु.
लाभ प्रति इकाई	50 रु.	90 रु.

हलः

वस्तुएं	वस्तु A		कीमत B	
	प्रति इकाई रु.	200 इकाईयाँ रु.	प्रति इकाई रु.	240 इकाईयाँ रु.
कच्चा माल	200	40,000	300	72,000
श्रम	150	30,000	120	28,800
प्रति व्यक्ति	100	20,000	90	21,600
लाभ	50	10,000	90	21,600
	500	1,00,000	600	1,44,000

संचई योगफल	A (रु.)	B (रु.)
कच्चा माल	40,000	72,000
श्रम	70,000	100,800
प्रति व्यक्ति	90,000	122,400
लाभ	1,00,000	144,000

A और B वस्तुओं की कीमत और लाभ का विस्तृत आरेख दर्शाते हुए



नोटः आयत की चौड़ाई और ऊँचाई समानुपाती होना चाहिए। चौड़ाई 2 : 2.4 के अनुपात में और ऊँचाई 5 : 6 के अनुपात में।

***(b)* प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयतेंः** इस विधि के अधीन, आयतों की चौड़ाईयाँ अनुपात में कुल मूल्यों के अनुसार समानुपात में रखी जाती हैं। आयत की लम्बाई के बावत, सभी मूल्य प्रतिशत में परिवर्तित की जाती हैं। समंक भी सरल अन्तर्विभक्त आयतों में दर्शाई जा सकती है।

उदाहरण 9.10ः एक उपयुक्त आरेख से निम्न समंक को प्रदर्शित करेंः

ब्यौरा	2006	2007	2008
माल का मूल्य	320 रु.	320 रु.	450 रु.
श्रम का मूल्य	240 रु.	280 रु.	400 रु.
पोलिश का मूल्य	160 रु.	200 रु.	250 रु.
कुल कीमत	720 रु.	800 रु.	1,100 रु.
बिक्री	800 रु.	800 रु.	1,000 रु.
लाभ या हानि	+80 रु.	शून्य रु.	(–100) रु.

हलः आयतों की चौड़ाई ली जाती है 4 : 4 : 5 के अनुपात में क्रमशः 2006, 2007 और 2008 के लिए।

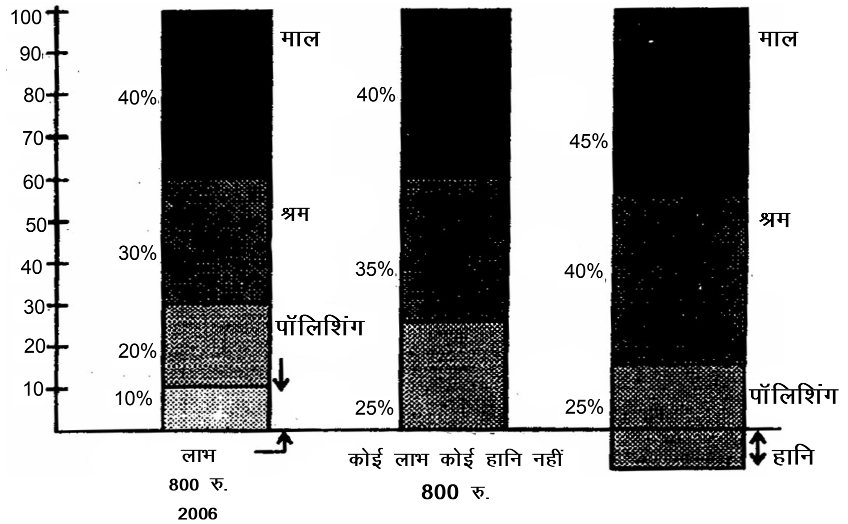
मूल्य को प्रतिशत में निम्न प्रकार से परिवर्तित किया जाता हैः

ब्यौरा	2006			2007			2008		
मूल्य	रु.	%	संचई	रु.	%	संचई	रु.	%	संचई
माल	320	40	100	320	40	100	450	45	100

टिप्पणी

श्रम	240	30	60	280	35	60	400	40	55
पॉलिसिंग	160	20	30	200	25	25	250	25	25
लाभ/हानि	80	10	10	—	—	—	(-100)	(-10)	(-10)
कुल रु.	800	100		800	100		1,000		

2006, 2007 और 2008 के दरम्यान मूल्य, विक्रय और प्रति इकाई लाभ या हानि को दर्शाता आरेख



(ii) वर्ग (Squares): वर्ग चित्र हैं चार बराबर भुजाओं और चार समकोणों के साथ। जब चरों के मूल्य लम्बे विस्तार के अनुपात धारण करते हैं जैसे, 1 : 100 या 4 : 400 या 10 : 1000, आयत आरेख खींचने के उद्देश्य को पूरा नहीं कर पाते हैं। इन परिस्थितियों में, दण्डों और आयतों को वर्गों से स्थानांतरित किया जाता है। एक वर्ग में, इसका आकार इसके क्षेत्रफल के वर्गमूल से परिवर्तित होता हैं इसलिए, चरों के दो तुलनात्मक मूल्यों को क्षेत्रफल के वर्गमूल से प्रदर्शित किया जा सकता है वर्ग की एक भुजा लेकर। उदाहरण के लिए, अगर मूल्य 400, 81 और 16 हैं, हम उन्हें प्रदर्शित कर सकते हैं तीन वर्ग खींचकर जिनमें प्रत्येक की भुजा होगी क्रमशः 20, 9 और 4, i.e., $\sqrt{400}$, $\sqrt{81}$ और $\sqrt{16}$ । हम उन्हें अनुपातों में बदल सकते हैं 10, 4.5 और 2। जहाँ तक संभव हो हम अनुपात के मूल्यों को घटा सकते हैं न्यूनतम स्तर का। चूँकि वर्ग का क्षेत्रफल इसकी भुजा के वर्ग से दी जाती है, वर्ग आरेख की भुजा दिए अवलोकनों के वर्गमूल के समानुपाती होगी।

उदाहरण 9.11: निम्नलिखित सूचना है वर्ष 2008 के दरम्यान चार देशों में ईख के उत्पादन से संबंधित। समंक को उचित आरेख से प्रदर्शित करें।

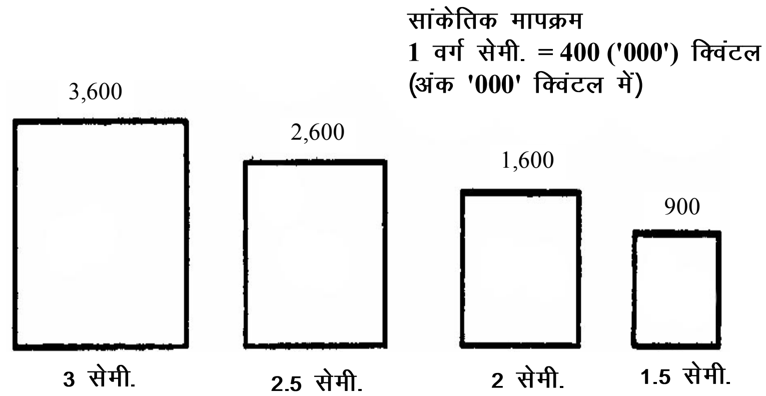
देश	भारत	जावा	हवाई	कोलम्बिया
ईख का उत्पादन ('000' क्विंटल में)	3600	2500	1600	900

टिप्पणी

हलः निम्न परिकलन किये जाते हैं वर्ग की भुजा की माप प्राप्त करने के लिए।

देश	ईख का उत्पादन ('000' क्विंटल में)	वर्गमूल	वर्ग की भुजा (अनुपात न्यूनीकृत)
भारत	3,600	60	3.0 सेंमी.
जावा	2,500	50	2.5 सेंमी.
हवाई	1,600	40	2.0 सेंमी.
कोलम्बिया	900	30	1.5 सेंमी.

2008 के दरम्यान चार देशों में ईख के उत्पादन को दर्शाती आरेख



(iii) वृत्त (Circles): एक वृत्त वक्र रेखा द्वारा घिरा स्थान है जो केन्द्र से समान दूरी रखता है। एक वृत्त का क्षेत्रफल निम्न जैसा दिया जाता है।

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\gamma^2$ (जहाँ $\pi = \dfrac{22}{7}$ और $\gamma =$ त्रिज्या)

वृत्त का क्षेत्रफल इसके त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती होता है। 'π' उभयनिष्ठ कारक है जिसे नजरअंदाज किया जा सकता है। वृत्त आरेख दो प्रकार के होते हैं:

(a) सरल वृत्त आरेख (Simple Circle Diagrams)

(b) अन्तर्विभक्त वृत्त आरेख [पाई चार्ट, खण्ड चार्ट (Sector Charts या कोणिक चार्ट (Angular Charts)]

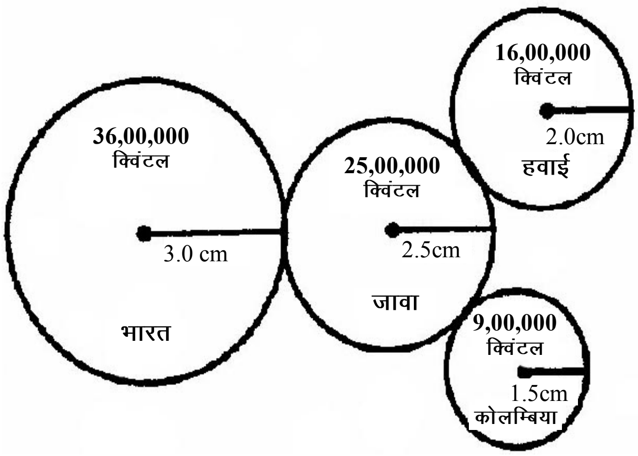
(a) सरल वृत्त आरेख (Simple Circle Diagrams): एक वृत्त का क्षेत्रफल इसकी त्रिज्या के वर्ग से परिवर्तित होती है। अगर वृत्त '*A*' का क्षेत्रफल वृत्त *B* के क्षेत्रफल से चार गुनी है तब वृत्त '*A*' की त्रिज्या वृत्त '*B*' की त्रिज्या से दोगुनी है। इसका अर्थ है कि अगर बहुत सारे वृत्तों की त्रिज्या समान समानुपात में हैं वर्ग की भुजाओं के समान वृत्त के क्षेत्रफल भी समान समानुपात में होंगे जैसे, वर्ग के क्षेत्रफल। इसलिए, समान विधि अपनाई जा सकती है विभिन्न वृत्तों की त्रिज्या या विभिन्न वर्गों की भुजा प्रयुक्त कर। हम उदाहरण 9.11 में लिए गए आँकड़ों को वृत्त आरेख खींचने के लिए निम्न जैसा लें।

टिप्पणी

देश	भारत	जावा	हवाई	कोलम्बिया
ईख का उत्पादन ('000' क्विंटल में) :	3,600	2,500	1,600	900
वृत्त की त्रिज्या :	3 cm.	2.5 cm.	2.00 cm.	1.5 cm.

हल :

2008 के दरम्यान चार देशों का ईख का उत्पादन दर्शाते हुए आरेख



उदाहरण 9.12: तीन देशों का प्रति व्यक्ति आय नीचे दी गई है :

देश	प्रति व्यक्ति आय (रुपयों में)
आस्ट्रेलिया	7,744
इंग्लैंड	5,929
न्यूजीलैंड	4,356

समंक को वृत्तीय आरेख से प्रदर्शित करें।

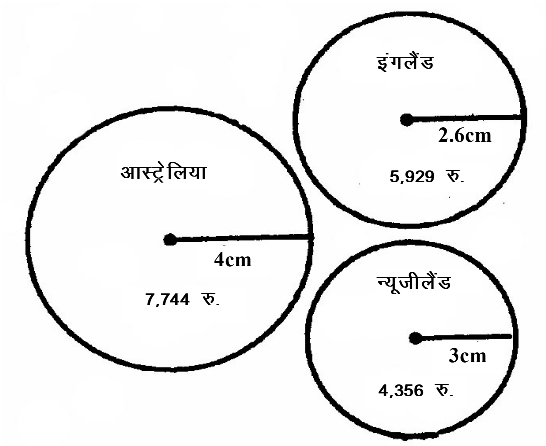
हल: सर्वप्रथम हम प्रति व्यक्ति आय के आँकड़ें का वर्गमूल ज्ञात करें तीन वृत्तों की त्रिज्यायें जानने के लिए निम्न जैसा :

देश	प्रति व्यक्ति आय (रु0)	वर्ग मूल	त्रिज्या
आस्ट्रेलिया	7,744	88	4
इंग्लैंड	5,929	77	3.5
न्यूजीलैंड	4,356	66	3

टिप्पणी

तीन देशों का प्रति व्यक्ति आय दर्शाता वृत्तीय आरेख

सांकेतिक मापक्रम



वृत्तीय आरेख उन सभी स्थितियों में खींचा जा सकता है जहाँ वर्ग प्रयुक्त होती हैं। यद्यपि, वे खींचने में आसान नहीं हैं और आपेक्षिक परिणाम के साथ तुलना करने में परिशुद्धता से। इसलिए वे सांख्यिकीय प्रस्तुतीकरण में लोकप्रिय नहीं है।

(b) अन्तर्विभक्त वृत्तीय आरेख (Sub-divided Circle Diagrams)

अन्तर्विभक्त दण्ड आरेखों के समान, वृत्त भी परिच्छेदों या खण्डों में अन्तर्विभक्त हो सकती हैं, समंक के विभिन्न गुणधर्मों के अनुसार वृत्त के भिन्न परिच्छेदों में। ऐसे आरेख वृत्तीय (Circular) या कोणीय (Angular) या पाई (Pie) चार्ट भी कहा जाती हैं। वृत्त के केन्द्र पर 360 डिग्री होते हैं। संपूर्ण समंक को 360 डिग्री लेते हुए समानुपाती परिच्छेद काटी जाती हैं उसी समंक के विभिन्न गुणधर्मों को प्रदर्शित करने के लिए। इस प्रकार के आरेख प्रयुक्त होते हैं कुल मूल्यों के टुकड़ों को अवयव भागों में दर्शाने के लिए। निम्नलिखित चरण का अनुगमन किया जाना चाहिए पाई चित्रों के निर्माण में :

(i) संपूर्ण समंक को प्रतिशतों में अभिव्यक्त करें विभिन्न गुण धर्मों के अनुसार। उदाहरण के लिए, कच्चे माल के उत्पादन की कीमत, श्रम और ऊपरी व्यय– क्रमशः 50%, 30% और 20%।

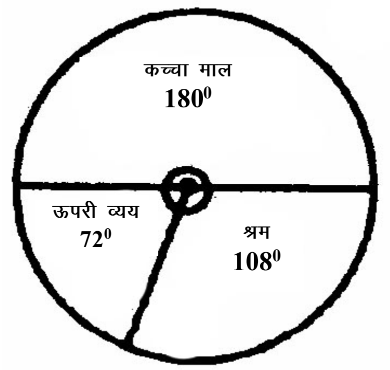
(ii) इस प्रकार से प्राप्त प्रतिशत डिग्री में परिवर्तित किए जाते हैं 360/100 या 3.6 से गुणा करके इस तरह हम 180^0, 108^0 और 72% प्राप्त करते हैं।

(iii) वृत्त उचित त्रिज्या से खींचे जाते हें और यह केन्द्र से 3 कोणीय भागों में विभक्त किए जाते हैं 180^0, 108^0 और 72^0 बनाते हुए चाँद (Protractor) की सहायता से।

टिप्पणी

उत्पादन की लागत (Cost of Production)

अवयव	राशि (रु.)	%	डिग्री
कच्चा माल	100 रु.	50	180^0
श्रम	60 रु.	30	108%
ऊपरी व्यय	40 रु.	20	72%
कुल	200 रु.		



यह सामान्य चलन है कि सबसे बड़े खण्ड को ऊपर दर्शाना, फिर बड़े को क्रमवार घड़ी की सुई की दिशा (Clockwise) में। पाई चार्ट में प्रत्येक खण्ड के लिए एक वर्णनात्मक टिप्पणी होनी चाहिए पहचान के लिए।

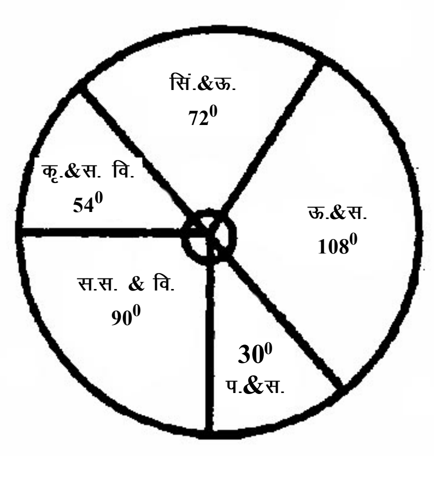
उदाहरण 9.13: एक पाई चित्र खींचे दसवें पंच वर्षीय योजना में निवेश पैटर्न के निम्न समंक को प्रस्तुत करने के लिए।

कृषि और सामुदायिक विकास	सिंचाई और ऊर्जा	उद्योग और खनिज	परिवहन और संचार	सामाजिक सेवा और विविध
15%	20%	30%	10%	25%

हलः

क्रम संख्या	मद	% निवेश	डिग्री
1.	कृषि और सामुदायिक विकास	15%	$15 \times 360/100 = 54^0$
2.	सिंचाई और ऊर्जा	20%	$20 \times 360/100 = 72^0$
3.	उद्योग और खनिज	30%	$30 \times 360/100 = 108^0$
4.	परिवहन और संचार	10%	$10 \times 360/100 = 36^0$
5.	सामाजिक सेवा और विविध	25%	$25 \times 360/100 = 90^0$
कुल		100%	$= 360^0$

10 वें पंचवर्षीय योजना में निवेश पैटर्न दर्शाते हुए पाई आरेख



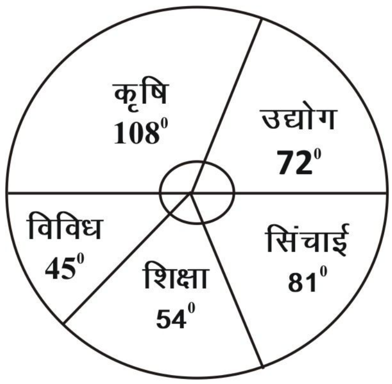
उदाहरण 9.14: 2007–2008 में कर्नाटक के राज्यपाल द्वारा प्रस्तावित खर्चे के निम्न समंक को पाई चार्ट से दर्शाएं।

मद	कृषि	उद्योग	सिंचाई	शिक्षा	विविध
खर्चे (लाख रु. में)	600	400	450	300	250

हल :

क्रम संख्या	**मद**	**% निवेश**	**डिग्री**
1.	कृषि	(600 × 100)/2000 = 30%	$(30 \times 360)/100 = 108^0$
2.	उद्योग	(400 × 100)/2000 = 20%	$20 \times 360/100 = 72^0$
3.	सिंचाई	(450 × 100)/2000 = 22.5%	$22.5 \times \frac{360}{100} = 81^0$
4.	शिक्षा	(300 × 100)/2000 = 15%	$15 \times \frac{360}{100} = 54^0$
5.	विविध	(250 × 100)/2000 = 12.5%	$12.5 \times \frac{360}{100} = 45^0$
कुल		कुल = 100%	कुल = 360^0

2007–2008 के लिए कर्नाटक के राज्यपाल द्वारा प्रस्तावित खर्चे को दर्शाता पाई–चित्र



9.3.3 त्रि–विमतीय आरेख (Three-Dimensional Diagrams)

जब यह वांछित होता है राशियों की तुलना करना जिनका अनुपात होता है 8 : 27 : 64 और 125 या 8 और 512, हम चर के मूल्यों में बहुत बड़ा अन्तर पाते हैं। ऐसी स्थितियों में, दो विमतीय चित्र समंक को आसानी से प्रदर्शित करने में असफल हो जाते हैं। तब यह अधिमान्य हो जाता है त्रि–विमतीय आरेख का होना जैसे– शंकु, ब्लॉक, गोले, धन और दूसरी चीजें।

घन सबसे प्रचलित साधन हैं त्रि–विमतीय आरेख में प्रयुक्त करने के लिए। एक 'घन' का अर्थ है एक ठोस वस्तु जिसमें 6 बराबर वर्ग भुजाएं हैं। घन

टिप्पणी

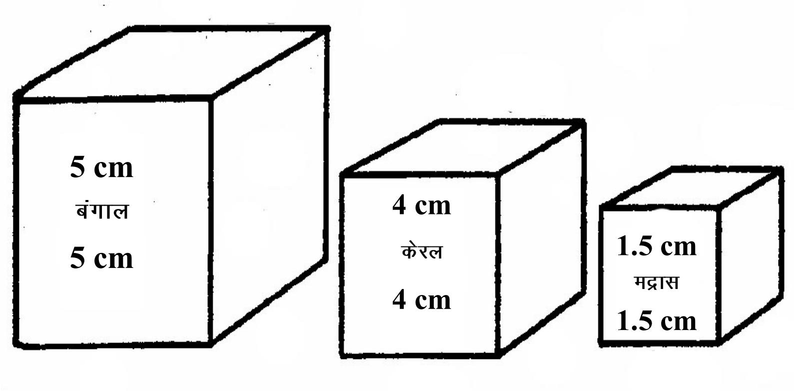
की भुजाएं प्रदर्शित करने वाले समंक के धनमूल के बराबर होती हैं। दो घनों की भुजाएं जो। और 216 को प्रदर्शित करती हैं होंगी $\sqrt[3]{1}$ और $\sqrt[3]{216}$ या 1 और 6। घन सिर्फ केवल तब प्रयुक्त होती हैं जब दो या अधिक चर के मूल्यों में काफी बड़ा अन्तर होता है।

उदाहरण 9.15: निम्न समंक चाय उत्पादन (किलों में) से संबंधित हैं सप्ताह के अन्तर्गत तीन राज्यों में:

राज्य	बंगाल	केरल	मद्रास
चाय उत्पादन (किग्रा. में)	1,25,000	64,000	3,375

हल: आँकड़ें को घनमूल में परिवर्तित किया जाता है निम्न प्रकार से :

राज्य	चाय उत्पादन (किग्रा. में)	घनमूल	प्रत्येक घन की भुजा
बंगाल	1,25,000	50	5 cm.
केरल	64,000	40	4 cm.
मद्रास	3,375	15	1.5 cm.



9.3.4 दूसरे (Others)

(a) चित्रारेख (Pictograms)

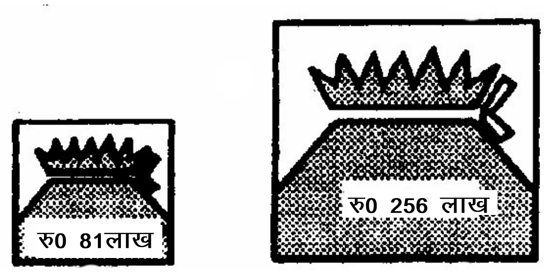
'चित्रारेख' साधन है चित्र का जिससे समंक प्रदर्शित हो सकती है। यह तकनीक डॉ. ओटो न्यूरथ, विमना के निवासी द्वारा विकसित की गई। इसलिए यह साधन 'विमना विधि' या 'समप्ररूप विधि (Isotype Method) कही जाती है। सांख्यिकीय समंक की तुलना के लिए चित्रों का प्रयोग किया जाता है। नीरस समंक को रूचिकर और आकर्षक रूप में दैनिक प्रेक्षण की वस्तुओं से परिवर्तित कर प्रस्तुत की जाती है। संपूर्ण समंक का प्रतिबिंब चित्र में नियत की जाती है। अंकों के बीच संबंध और उनकी तुलना का अध्ययन चित्रारेख की सहायता से बड़ी आसानी से किया जा सकता है।

टिप्पणी

उदाहरण 9.16 निम्न कोलार और बंगलोर जिलों के जून 30, 2008 को बैंक जमा से संबंधित आँकड़ें हैं।

जिले	जून 30, 2008 को जमा
कोलार	81,00,000 रु.
बंगलोर	2,56,00,000 रु.

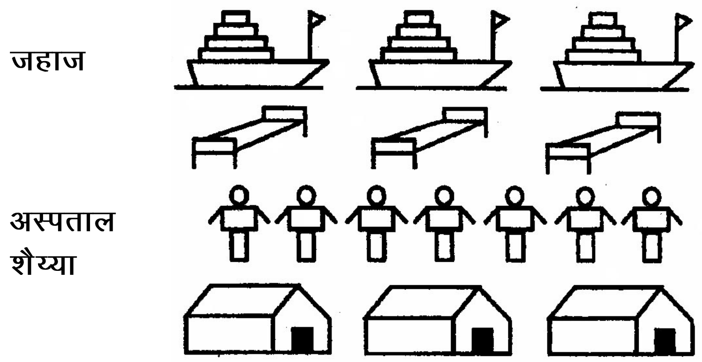
हलः जमा के आँकड़ें क्रमशः 81 लाख रुपये और 256 लाख रुपये है। हम चित्रों को वर्गों से घिरे 'मनी बैग' से दर्शा सकते हैं जिनका क्षेत्रफल 81 और 256 के अनुपात में है जिनकी भुजाएं $\sqrt{81}$ और $\sqrt{256}$ के समानुपात में हैं, i.e., 9 और 16। हम आगे इसका अनुपात क्रमशः 2.25 और 4 तक कम कर सकते हैं।



2.25 cm. कोलार　　**4.00 cm.** बंगलोर

काफी सावधानी की आवश्यकता है सांख्यिकीय समंक को चित्र रूप में प्रदर्शित करने में। चित्र अविवेकपूर्ण ढंग से प्रयुक्त नहीं हो सकती है। उन्हें प्रयुक्त करने से पहले गंभीर विचार करना चाहिए। चित्र सामान्यतया वर्गों, वृत्तों या आयतों से घिरी होती हैं क्योंकि तब चित्र का क्षेत्रफल परिकलन करना आसान हो जाता है।

निम्न कुछ तस्वीरें हैं जो समंक को प्रस्तुत करने के लिए प्रयुक्त होती हैं:



तस्वीरों की संख्या या तस्वीरों का आकार को मूल्यों के विभिन्न परिमाणों के समानुपाती होना चाहिए जिसे प्रस्तुत किया जाना है। एक संकेत को एक जन सामान्य की अवधारणा को प्रस्तुत करना चाहिए जो स्पष्ट रूप से और आसानी से समझी जा सके। एक संकेत को ना तो बहुत छोटा होना चाहिए ना हीं बहुत बड़ा।

(b) माना–रेख या मानचित्र आरेख (Cartograms या Mapographs)

चित्रों के प्रयोग के बदले, विभिन्न प्रकार के मानचित्र प्रयुक्त होती हैं समंक को प्रस्तुत करने लिए। मानचित्र क्षेत्रीय समंकों जैसे– भाषा, धर्म, शिक्षा और दूसरे गुणों को प्रदर्शित करते हैं। एक मानचित्र पर, समंक विभिन्न रंगों, शेडों या बिन्दुओं से प्रदर्शित की जाती हैं विभिन्न गुणधर्मों के लिए। हम मानचित्रावली (Atlas Book) का अध्ययन कर यह जान सकते हैं कि कैसे मानचित्र दुनियाँ के विभिन्न भागों से संबंधित विभिन्न प्रकार के आँकड़ों को प्रदर्शित करती हैं।

इस प्रकार, बहुत प्रकार के साधन प्रयुक्त होती हैं समंक को आरेखीय प्रदर्शन के लिए– एक–विमितीय, द्वि–विमितीय, त्रि–विमितीय, चित्रारेख और मानारेख। दिए गए स्थिति में एक विशिष्ट आकृति के संबंध में पूर्व धारणा और व्यवहार में आरेख खींचना एक महत्वपूर्ण कारक है। दण्ड और वृत्त सबसे आसान हैं और सामान्य प्रयोग के लिए उपयुक्त। एक विशिष्ट स्थिति, यद्यपि आवश्यकता पैदा कर सकता है वर्ग, आयत या एक घन खींचने का। आरेख खींचने में ध्यान हमेशा उनकी सफाई और शुद्धता पर केन्द्रित किया जाना चाहिए जिससे वे तथ्य को प्रदर्शित करते हैं। खासकर आरेख जो काल श्रेणी को प्रदर्शित करने में प्रयुक्त होती हैं। इस तरह, एक आरेख को खींचने की विधि का चुनाव समंक की प्रकृति पर निर्भर करता है।

9.4 समंक का आलेखीय प्रदर्शन (Graphic Representation of Data)

'आलेख' चाक्षुण साधन हैं काल श्रेणी और आवृत्ति वितरण के प्रदर्शन, अंतर व्याख्या और विश्लेषण को बिन्दुओं, रेखाओं, क्षेत्रफलों और दूसरे ज्यामितीय आकारों से प्रस्तुत करने की। संख्यात्मक समंक के प्रभावी और स्पष्ट अभिव्यक्तिकरण और मूल्यांकन के लिए, आलेख महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं मूल्यों की तुलना, अभिनति और संबंधों को सुगम बनाकर।

आलेख समंक को अधिक आकर्षक ढंग से दर्शाते हैं तालिका और आरेख की अपेक्षा। समंक अधिक आसानी से समझ में आता है। आलेखीय प्रदर्शन रूचि पैदा करने में और दिमाग पर असर डालने में प्रभावी है पढ़ने वालों के लिए। यह समंक के प्रदर्शन के किसी भी दूसरी विधि से ज्यादा सरल है। यह समंक में अवस्थित छुपे तथ्यों और संबंधों को बहुधा उभारकर प्रकट कर देती है।

आलेखीय तकनीक, यद्यपि उपयोगी हैं, तालिकाओं और आरेखों के उपयुक्त स्थानापन्न नहीं हैं। वे कभी–कभी संतोषजनक सूचना देने में असफल हो जाते हैं। आलेख तैयार करने वाले कुछ तथ्यों पर अनावश्यक जोर डाल सकता है जो न्यायसंगत नहीं भी हो सकता है। आलेख चरों के विस्तृत मान देने में असफल हो जाते हैं। वे कभी–कभी भ्रामक सूचना प्रदर्शित करते हैं। आलेखों में परिशुद्धता नहीं बनाए रखी जा सकती है। सभी सीमितताओं के बावजूद, आलेखीय प्रस्तुतीकरण समंक के प्रदर्शन की एक महत्वपूर्ण तकनीक है।

टिप्पणी

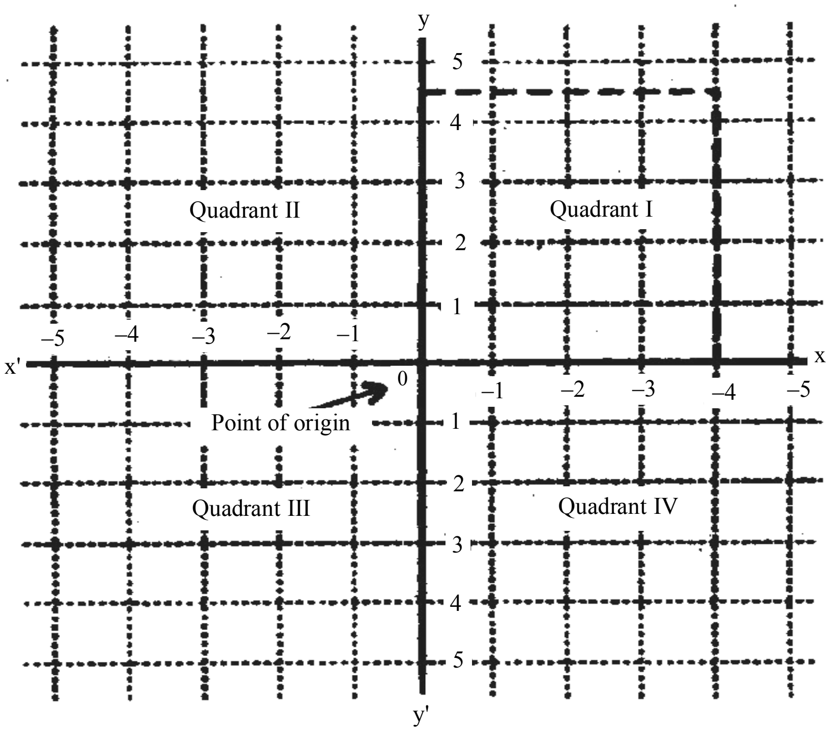
आरेख (Diagrams)		आलेख (Graphs)	
(i)	वे सिर्फ समतल सतह या आलेख पत्र पर खींचे जा सकते हैं।	*(i)*	वे सिर्फ आलेख पत्र पर खींचे जा सकते हैं।
(ii)	आलेख में रेखाएं, दण्ड, आयतें, वृत्त, घन, चित्र प्रयुक्त होते हैं।	*(ii)*	बिन्दु, डैश, बिन्दु–डैश और वक्र आलेख में प्रयुक्त होती हैं।
(iii)	वे सन्निकट सूचना को उपलब्ध कराते हैं।	*(iii)*	वे विस्तार में सूचना उपलब्ध कराते हैं।
(iv)	वे श्रेणीकृत और भौगोलिक समंक को चित्रित करते हैं।	*(iv)*	वे काल श्रेणी और आवृत्ति वितरण को चित्रित करते हैं।
(v)	ये खींचने में आसान नहीं हैं।	*(v)*	ये खींचने में आसान हैं।

A. आलेख का निर्माण

एक 'आलेख पत्र' एक कागज है जिसमें रेखाएं खींची जाती है प्रत्येक ईंच या सें.मी. को 10 बराबर भागों में विभक्त करने के लिए। प्रतिच्छेद रेखाओं का एक समुच्चय भी खींची जाती हैं जो समकोणों पर खींची जाती हैं। क्षैतिज रेखाएं 'X'-अक्ष (भुज Absicct) जैसा प्रयुक्त होती हैं और 'Y'-अक्ष (कोटि Ordinates) जैसा। ये दो अक्ष समतल के क्षेत्र को चार भागों में बाँटती हैं जो 'चतुर्थांश (Quadrants)' कहलाती हैं।

निम्न चार्ट आयताकार निर्देशांक (Coordinate) पद्धति के आधारभूत संख्यात्मक गुणों को सूचित करता है।

आयताकार निर्देशांक पद्धति से खींचा गया आलेख जब Y = + 4.5 और X = + 4



चतुर्थांश I में दो X और Y अक्षों के मूल्य घनात्मक हैं। चतुर्थांश II में Y-अक्ष के मूल्य घनात्मक हैं और X-अक्ष के मूल्य ऋणात्मक हैं। चतुर्थांश III में, दोनों X और Y अक्ष के मूल्य ऋणात्मक हैं। चतुर्थांश IV में, Y अक्ष के मूल्य ऋणात्मक हैं और X अक्ष के मूल्य घनात्मक हैं।

ज्यादातर सांख्यिकीय समंक चतुर्थांश I और IV में प्रदर्शित होते हैं। ज्यादातर चर के स्वतंत्र मूल्य OX-अक्ष पर लिए जाते हैं और निर्भर चर OY-अक्ष पर।

एक उपयुक्त मापक्रम चुनी जाती है उपलब्ध समंक को समायोजित करने के लिए। खींचे गए आलेख को उपयुक्त समंक होना चाहिए ताकि उसकी सही व्याख्या की जा सके। अगर उपलब्ध समंक बेजरूरत ज्यादा जगह घेर लेती है, गैर–इच्छित मापक्रम के एक भाग की उपेक्षा की जा सकती है और यह ''अवास्तविक आधार रेखा (False Base Line)'' से निर्देशित होती है। एक सूची भी दी जानी चाहिए मापक्रमों को दर्शाने के लिए और विभिन्न वक्रों का अर्थ बताने के लिए। एक टिप्पणी, अगर आवश्यक हो, भी दी जानी चाहिए स्रोत के संबंध में जहाँ से समंक संकलित की जाती हैं।

इस तरह, समंक के प्रदर्शन की आलेखीय विधि अधिक प्रभावशाली और शक्तिशाली बनता जा रहा है आरेखीय प्रदर्शन की अपेक्षा। आलेख उन तथ्यों पर प्रकाश डालते हैं जो छिपी हुई हैं। वे अधिक से अधिक शक्तिशाली होते जा रहे है अध्ययन के सभी क्षेत्रों में।

B. आलेखों के प्रकार (Types of Graphs)

आलेख सामान्यतया दो कोटियों में वर्गीकृत की जाती हैं समंक के गुणधर्मों के आधार पर काल श्रेणी का आलेख और आवृत्ति वितरण का आलेख

A. काल श्रेणी का आलेख (ऐतिहासिक)

काल श्रेणी या ऐतिहासिक श्रेणी अभिमुख होता है एक दिए कालावधि के दौरान चर में परिवर्तन का संख्यात्मक रिकार्ड रखने के लिए। समय इकाईयाँ OX-अक्ष पर रखी जाती हैं और चर के मूल्य OY-अक्ष पर मापी जाती हैं। मापक्रम ऐसी चुनी जानी चाहिए कि वे पूर्ण समंक को आलेख पत्र पर प्रदर्शित करने की गुंजाइश दें। समंक OX और OY अक्ष पर आलेखित की जाती है बिन्दुओं को क्रमवार रखकर। सभी बिन्दुएं सतत समतल रेखाओं से संयुक्त होती हैं, प्रत्येक बिन्दु एक पारंपरिक रोक स्थान होती हैं। ऐसी समतल रेखा 'वक्र' कहलाती है, जो संभावित परिवर्तन दर्शाती है सभी संभव समय अन्तरालों पर जिससे समंक संबंधित है। यह वक्र कालिक चित्र (Historigram) भी कहलाती है जो आयत–चित्र (Histogram) से अलग है। एक समतल वक्र खींचने के लिए अभ्यास और निपुणता वांछित होती है जिसे सभी सामान्यतया धारणा नहीं करते हैं। इसलिए, सभी बिन्दुएं सीधी रेखा से संयुक्त होते हैं वक्र के वैकल्पिक विधि के रूप में।

काल श्रेणी ऐतिहासिक समंक को चित्रित करता है और वे खींचने और समझने में आसान होते हैं। उन्हें अधिक निपुणता और अनुभव की आवश्यकता नहीं होती है। वे तीन प्रकार की होती हैं निम्न जैसी,

टिप्पणी

(a) एक चर आलेख

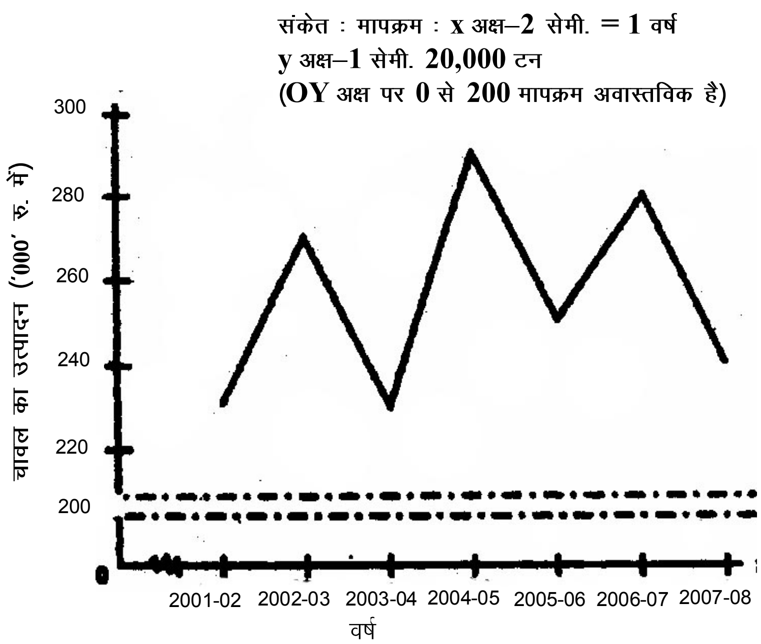
(b) दो चर आलेख

(c) तीन चर आलेख

(a) एक चर आलेख (One Variable Graph): एक चर आलेख में, OY-अक्ष पर सिर्फ एक चर दर्शाया जाता है और OX-अक्ष पर समय की माप की जाती है। निम्न केरल में चावल का उत्पादन ('000' टन में) विभिन्न वर्षों में है।

वर्ष	2001-02	2002-03	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07	2007-08
चावल उत्पादन ('000' टन में)	220	270	220	290	250	280	240

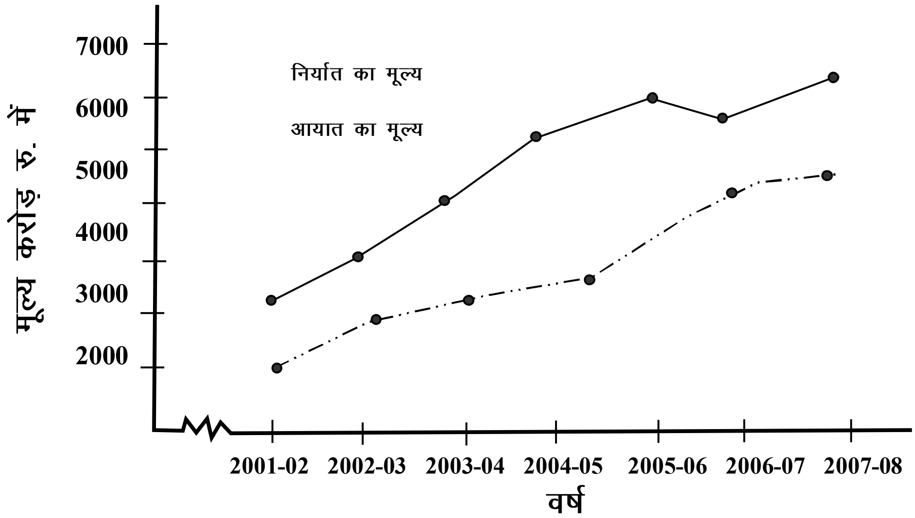
सात वर्षों के दरम्यान केरल में चावल उत्पादन को दर्शाता आलेख



***(b)* दो चर आलेख (Two Variable Graph) :** दो चर आलेख में, कारक OY-अक्ष पर होते हैं और समय OX-अक्ष पर मापित होता है। निम्न समंक है विगत सात वर्षों में भारत के विदेश व्यापार से संबंधित :

वर्ष	2001-02	2002-03	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07	2007-08
निर्यात (करोड़ रु. में)	3300	4000	5700	6300	6700	6000	6500
आयात (करोड़ रु. में)	2000	2500	2800	3000	3500	3800	4000

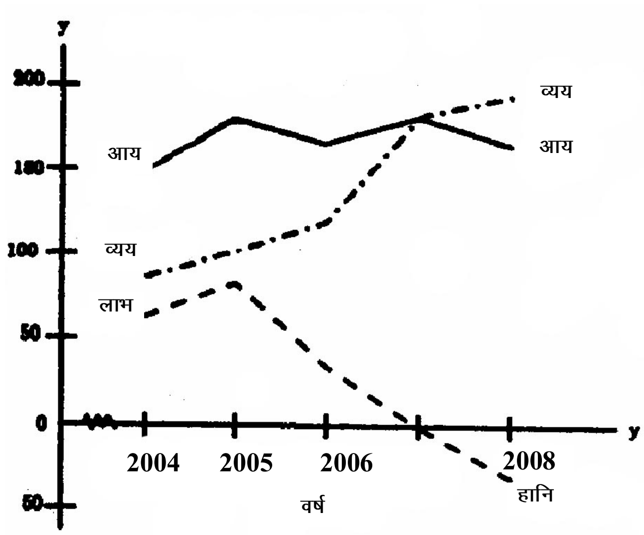
भारत के पिछले सात वर्षों में आयात और निर्यात दर्शाते हुए आलेख



***(c)* तीन चर आलेख (Three Variable Graph) :** तीन चर आलेख में, तीन कारक होते हैं OY-अक्ष पर और समय OX-अक्ष पर मापा जाता है। निम्न समंक है पाँच वर्षों के लिए स्पोर्ट्स क्लब ऑफ बंगलोर का आय और व्यय से संबंधित,

वर्ष :	2004	2005	2006	2007	2008
आय ('000' रु. में) :	150	180	160	190	170
व्यय ('000' रु. में) :	90	100	120	190	200
लाभ/हानि ('000' रु. में)	+60	+60	+40	0	-30

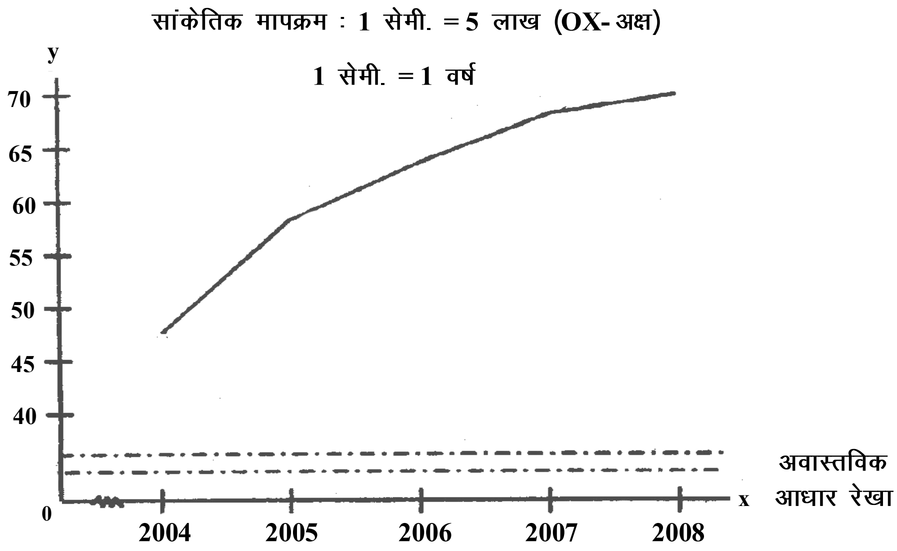
पाँच वर्षों के दरम्यान स्पोर्ट्स क्लब ऑफ बंगलोर की आय, व्यय और व्यापार संतुलन को दर्शाता आलेख



अवास्तविक आधार रेखा (False Base line) : सामान्यतः हम OY-अक्ष पर शून्य से शुरू होने वाले मूल्य को मापते हैं। जब चर के मूल्य परिवर्तित होते हैं या उच्चावचन करते हैं सिर्फ उच्च मूल्यों पर (i.e., 4900, 5100, 5250 और 5280), हम शून्य से उच्च मूल्यों तक सम्पूर्ण विस्तार को नहीं माप सकते हैं (i.e., शून्य से 4900 तक),

OY-अक्ष का उदग्र भाग, जो वक्र के लिए गैर जरूरी है, लेखा में बिल्कुल नहीं ली जाती है और नहीं खींची जाती है क्योंकि यह आकर्षक नहीं है। वह भाग जो आलेख में गैर–जरूरी है और शून्य और दूसरे उच्च चर के बीच है छोड़ यह आलेख के खींचने को सरल बनाता है और कम जगह का इस्तेमाल करता है। प्राकृतिक ढंग से चर के मूल्यों के सभी उच्चावचन प्रवर्धित होते हैं। इसलिए अनचाही जगह, शून्य से चर के आगामी उच्च मूल्य, न्यूनतम तक घटा दी जाती है दो क्षैतिज रेखाओं को आरा दंत (Saw Teeth) के रूप में निम्न आलेख है अवास्तविक आधार रेखा को दर्शाते हुए :

चार वर्षों में बंगलोर जिला में जनसंख्या दर्शाता आलेख



अवास्तविक आधार रेखा का इस्तेमाल आलेख पत्र पर काफी स्थान की बचत करता है। यह समंक पर अधिक जोर डालता है जिसमें काफी उच्चावचन है।

9.5 आवृत्ति वितरण का आलेख (Graphs of Frequency Distribution)

जब समंक आवृत्ति के घटित होने के क्रम में अभिव्यक्त होती है, तब आवृत्ति वक्र खींचना आवश्यक हो जाता है। आवृत्ति वितरण, चाहे विच्छिन्न या सतत, आलेखीय रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। चर के मूल्य या वर्ग अन्तराल का मध्य–मान OX-अक्ष पर मापे जाते हैं और आवृत्तियाँ OY-अक्ष पर। चार प्रकार की आवृत्ति आलेख हैं :

(a) आयत चित्र (Histogram)

(b) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

(c) आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

(d) तोरण वक्र (Ogive Curves)

(a) आयत चित्र (Histogram): आयत चित्र एक साधन है आवृत्ति वितरण के आलेखीय प्रदर्शन का। यह निर्मित किया जाता है प्रत्येक वर्ग अन्तराल पर आयतों का समुच्चय खड़ा करके क्षैतज आपेक्षिक वर्ग आवृत्तियों पर। आवृत्तियाँ OY-अक्ष पर दर्शाई जाती हैं। आयत की ऊँचाई आपेक्षिक वर्ग अन्तराल की आवृत्ति प्रदर्शित

करती है। ऊँचाई OY-अक्ष पर मापी जानी चाहिए संबंधित वर्ग अन्तराल के उच्च वर्ग सीमा की बिन्दु से। सभी आयतों का क्षेत्रफल एक साथ जोड़कर कुल आवृत्तियाँ देता है। इस प्रकार का आलेखीय प्रदर्शन सीढ़ी या ब्लॉक आलेख (Stair Case or Block Diagram) भी कहलाता है।

जब वर्ग अन्तराल बराबर नहीं हैं, आवृत्ति के सघनता (Density) का परिकलन करना होता है। आवृत्ति सघनता का संबंध आवृत्ति के संघनन से है जो वर्ग अन्तराल के कुल आकार के इकाई मूल्य में है। असमान वर्ग अन्तरालों में, प्रत्येक वर्ग की आवृत्ति समायोजित की जाती है वर्ग के विस्तार के निम्नतम आकार के साथ। उच्चतम वर्ग अन्तराल की समायोजित आवृत्ति,

$$= \frac{\text{उच्चतम वर्ग अन्तराल की आवृत्ति} \times \text{न्यूनतम C.I. का विस्तार}}{\text{उच्चतम C.I. का विस्तार}}$$

उदाहरण के लिए, अगर एक वर्ग अन्तराल निम्नतम वर्ग अन्तराल का तीन गुणा है, हमें इसकी आवृत्ति को उसे विभाजित करना है, अगर यह चार गुणा चौड़ा है, हमें इसे चार से विभाजित करना है।

उदाहरण 9.17: निम्न आवृत्ति वितरण के लिए आयत चित्र निर्मित करें:

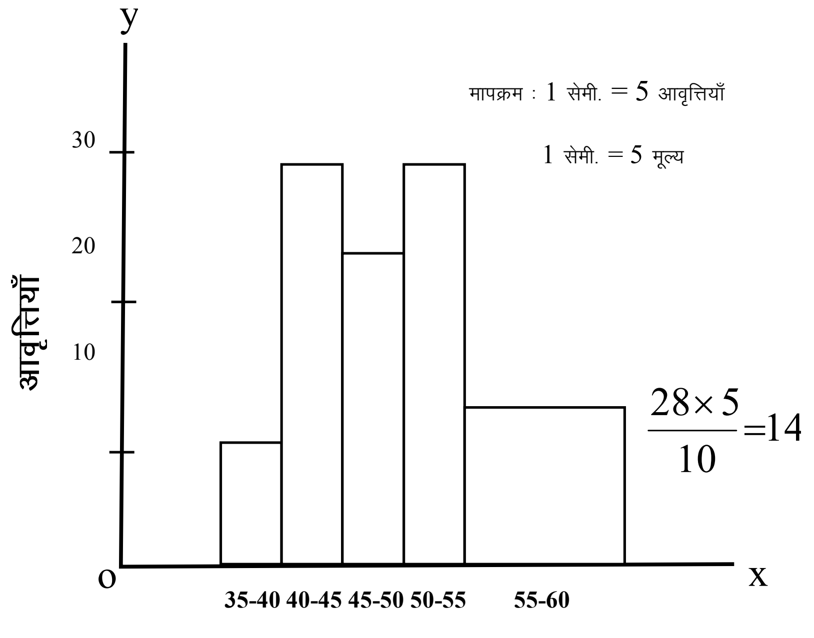
चर	:	35-40	40-45	45-50	50-55	55-65
आवृत्ति	:	12	30	22	30	28

हल : प्रथम चार वर्ग अन्तराल बराबर है, जबकि अन्तिम वर्ग अन्तराल नहीं। निम्नतम वर्ग अन्तराल 5 है। हमें अंतिम वर्ग अन्तराल को निम्न जैसा घटाना है :

उच्चतम C.I. का समायोजित आवृत्ति

$$= \frac{\text{उच्चतम C.I. की आवृत्ति} \times \text{न्यूनतम C.I. का विस्तार}}{\text{उच्चतम C.I. का विस्तार}} = \frac{28 \times 5}{10} = 14$$

आवृत्ति वितरण दर्शाता आयत चित्र



टिप्पणी

उदाहरण 9.18: निम्न समंक का आवृत्ति वितरण तैयार करें 10 का वर्ग अन्तराल लेते हुए (वर्हिवेशी विधि)।

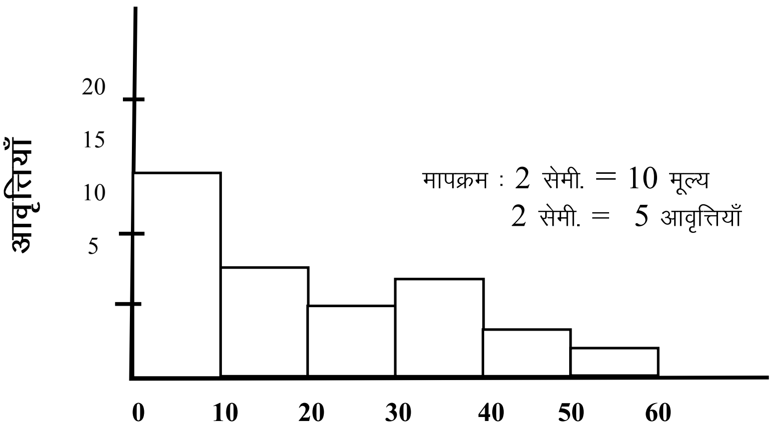
12	30	29	22	35	39	40	42	40	16
30	18	12	5	15	3	4	9	45	50
0	5	6	8	15	25	22	3	4	9
12	5	9	3	4	30	32	29	1	8

एक आयत चित्र भी खींचे।

हलः सर्वप्रथम हम एक सतत श्रेणी लें की अन्तराल 10 के साथ तथा मिलान चिन्ह से आवृत्तियों की गणना निम्न जैसा करें–

वर्ग अन्तराल	मिलान चिन्ह	आवृत्तियाँ
0-10	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
10-20	~~||||~~ ||	7
20-30	~~||||~~	5
30-40	~~||||~~ |	6
40-50	||||	4
50-60	|	1
		कुल 40

आवृत्ति वितरण दर्शाता आयत चित्र



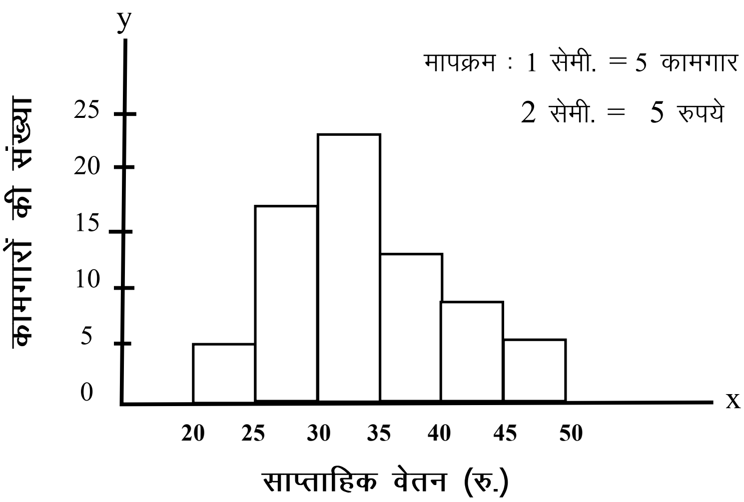
उदाहरण 9.19: निम्न समंक को एक आयत चित्र से प्रदर्शित करें।

साप्ताहिक वेतन (रु. में) :	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
कामगारों की संख्या :	6	18	25	14	10	8

टिप्पणी

हलः

साप्ताहिक वेतन दर्शाता आयत चित्र



उदाहरण 9.20: निम्न आवृत्ति वितरण के लिए आयत चित्र खींचें :

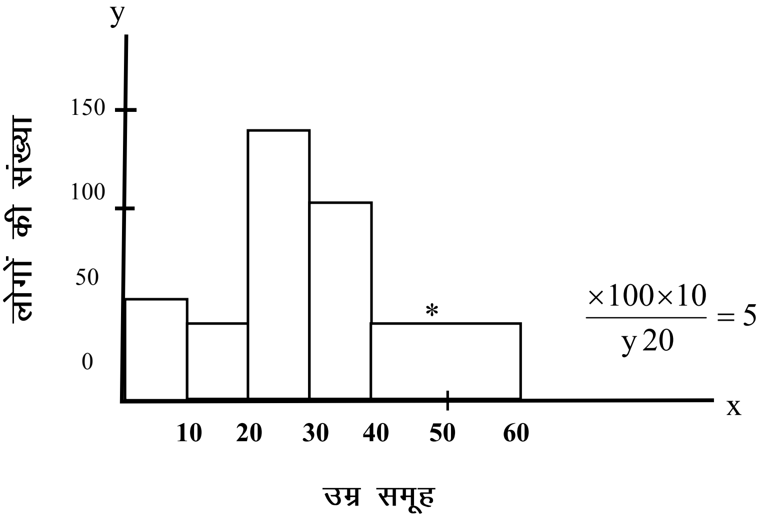
उम्र–समूह :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-60
लोगों की संख्या :	60	40	150	110	100

हलः पहले चार वर्ग अन्तराल बराबर हैं, जबकि अन्तिम वर्ग अन्तराल नहीं। हमें अन्तिम वर्ग अन्तराल को निम्न प्रकार से घटाना है :

उच्चतम C.I. का समायोजित आवृत्ति

$$= \frac{\text{उच्चतम } C.I. \text{ की आवृत्ति} \times \text{निम्नतम } C.I. \text{ का विस्तार}}{\text{उच्चतम } C.I. \text{ का विस्तार}} = \frac{100 \times 10}{20} = 50$$

उम्र के आवृत्ति वितरण को दर्शाता आयत चित्र



टिप्पणी

उदाहरण 9.21 निम्न श्रेणी से आलेखीय रूप से बहुलक निर्धारित करें और परिणाम का सत्यापन करें।

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-40	40-60	60-80
कामगारों की संख्या	7	19	27	15	12	12	8

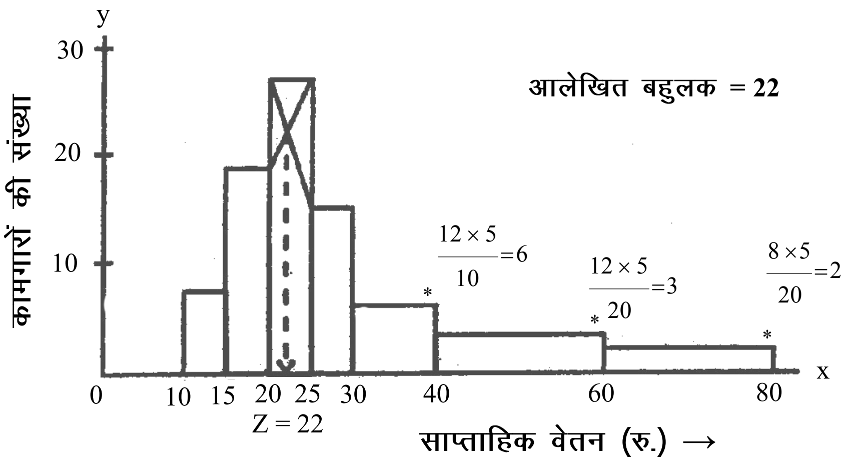
हल: पहले चार वर्ग अन्तराल बराबर हैं जब कि तीन अंतिम वर्ग अन्तराल नहीं। निम्नतम वर्ग अन्तराल 5 हैं। हमें अन्तिम तीन वर्ग अन्तराल न्यून करने होंगे निम्न प्रकार से,

C.I.	समायोजित	आवृत्ति
30-40	$\frac{12\times 5}{10}=6$	$f_0 = 19$
40-60	$\frac{12\times 5}{20}=3$	$f_1 = 27$ (उच्चतम आवृत्ति)
60-80	$\frac{8\times 5}{20}=2$	$f_2 = 15$

$$z = \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c \qquad = 20 + \frac{27-19}{54-19-15} \times 5$$

$$= 20 + \frac{8}{20} \times 5 = 20 + \frac{40}{20} = 20 + 2 = 22$$

बहुलक मान और साप्ताहिक वेतन दर्शाता आयत चित्र



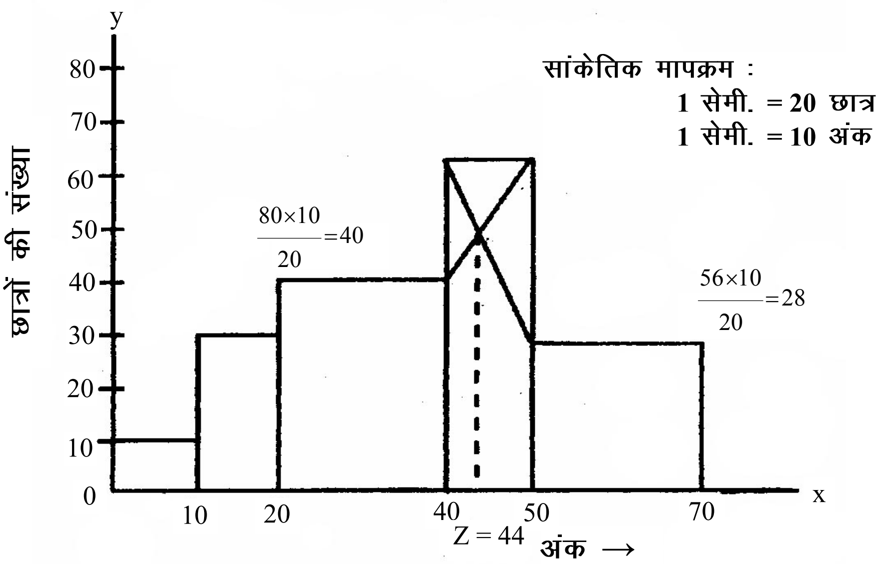
उदाहरण 9.22: निम्न से आयत चित्र निर्मित करें और बहुलक का निर्धारण करें।

अंक :	0-10	10-20	20-40	40-50	50-70
छात्रों की संख्या :	10	30	80	64	56

टिप्पणी

हलः तीसरा वर्ग अन्तराल और अंतिम वर्ग अन्तराल भिन्न हैं। उनकी आवृत्तियाँ निम्न जैसी समायोजित की जाती हैं :

छात्रों के अंक और बहुलक अंक दर्शाता आयत चित्र



C.I.	समायोजित	आवृत्ति
20-40	$\frac{18\times10}{20}=40$	$f_0 = 40$
50-70	$\frac{56\times10}{20}=28$	$f_1 = 64$ (उच्चतम आवृत्ति)
		$f_2 = 28$

$$z = 1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c \qquad = 40 + \frac{64-40}{128-40-28} \times 10$$

(बहुलक वर्ग 40–50 है) $\qquad = 40 + \frac{24}{60} \times 10$

$$= 40 + \frac{240}{60} = 40 + 4 = 44$$

(b) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon): यह आवृत्ति वितरण के आलेखीय प्रदर्शन का साधन है। यह आलेख खींचने की सरल विधि है आयत चित्र की सहायता से। पहले, आयत चित्र निर्मित करें। तब प्रत्येक आयत के शीर्ष का मध्य बिन्दु मिलाएं। एक आवृत्ति बहुभुज बनाने के लिए हमें सभी आयतों के शीर्ष के मध्य–बिन्दुओं को जोड़ा जाता है सीधी रेखा से। यह इस परिकल्पना के अधीन किया जाता है कि आवृत्ति में प्रत्येक वर्ग अन्तराल समरूप से वितरित हैं।

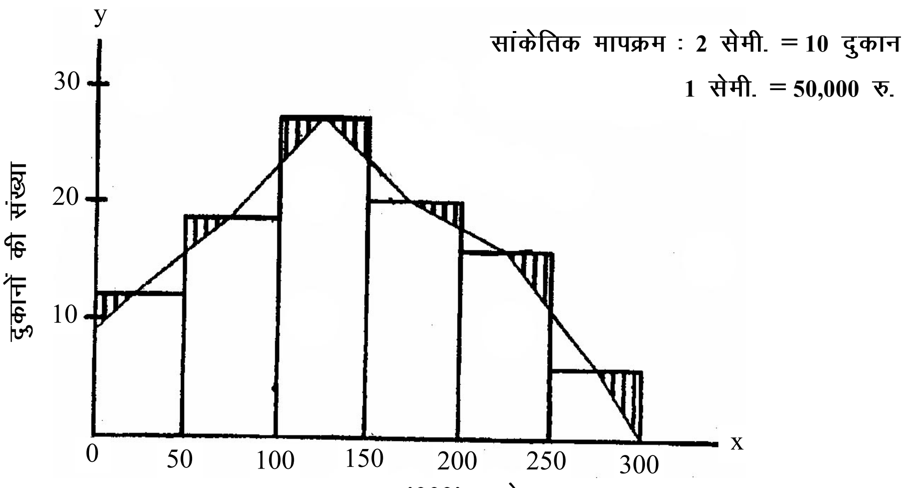
आवृत्ति बहुभुज का क्षेत्रफल आयत चित्र के क्षेत्रफल के बराबर है, जो क्षेत्रफल बाहर छूट जाती है ज्यामितीय रूप से इसमें अन्तर्निहित क्षेत्रफल के बराबर है।

उदाहरण 9.23: 100 दुकानों का मासिक लाभ निम्न प्रकार से वितरित है :

प्रति दुकान लाभ :('000' रु. में)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
दुकानों की संख्या	12	18	27	20	17	6

एक आयत चित्र और एक आवृत्ति बहुभुज इसके लिए खींचे।

हलः दुकानों के लाभ का आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज दर्शाता आलेख–



उदाहरण 9.24: एक आयत चित्र खींचें और निम्न के लिए आवृत्ति बहुभुज दर्शाएं :

अंक :	40-50	50-60	60-70	70-80	80-100
छात्रों की संख्या :	5	12	20	13	8

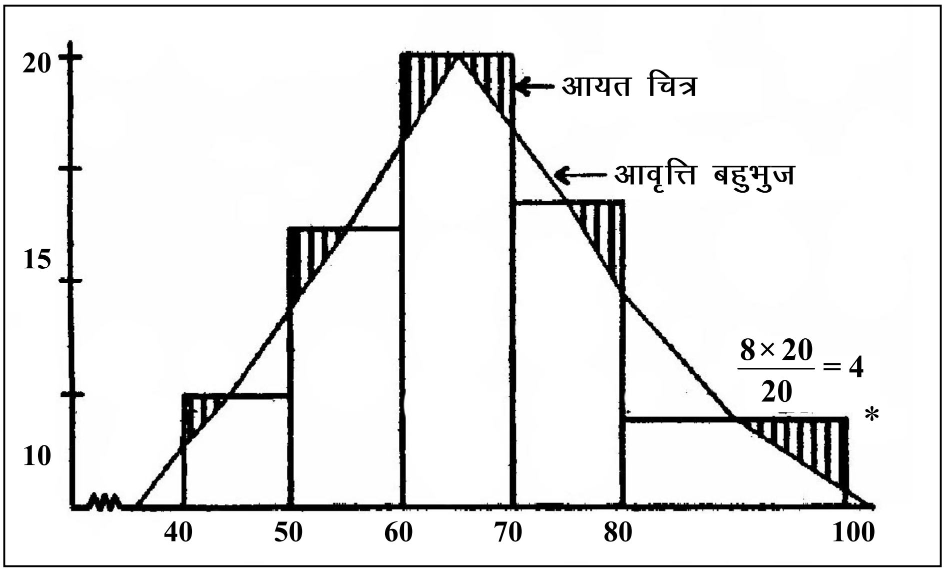
हलः अंतिम वर्ग अन्तराल बराबर नहीं है दूसरों की तुलना में। इसलिए अन्तिम वर्ग अन्तराल की आवृत्ति निम्न प्रकार से समायोजित की जाती है।

उच्चतम C.I. का समायोजित आवृत्ति

$$= \frac{\text{उच्चतम C.I. की आवृत्ति} \times \text{न्यूनतम C.I. का विस्तार}}{\text{उच्चतम C.I. का विस्तार}} = \frac{8 \times 10}{20} = 4$$

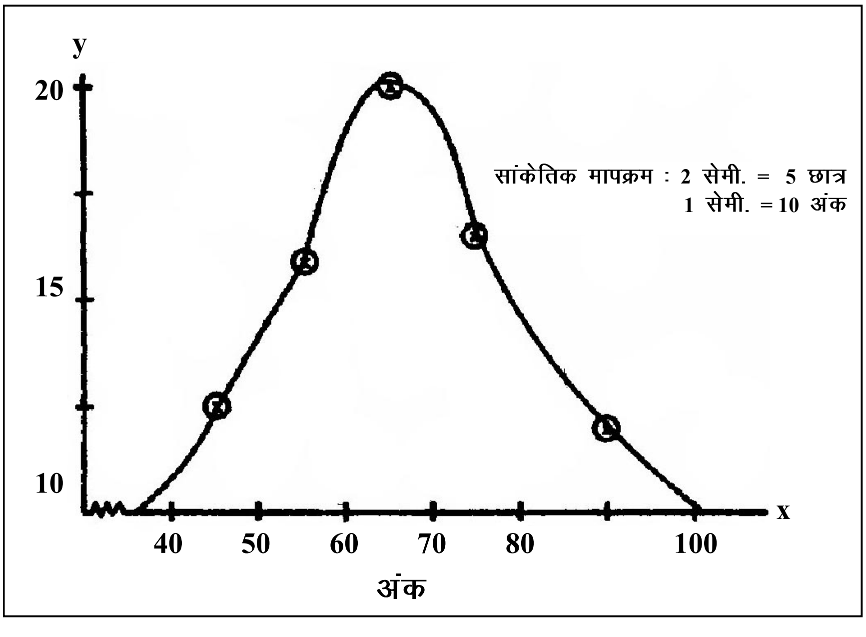
टिप्पणी

छात्रों द्वारा स्कोर किए अंक का आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज दर्शाता आलेख



(c) आवृत्ति वक्रः आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज की सहायता से, हम समतल वक्र खींच सकते हैं समंक में आई आकस्मिक अनियमितताओं को कम करने या खत्म करने के लिए। एक समतल आवृत्ति वक्र समंक के सामान्यीकृत अभिगुणों को प्रदर्शित करते हैं जिसमें समंक जनसंख्या या समष्टि से संकलित किए जाते हैं। एक वक्र को समतल करने में, यह नोट करना महत्वपूर्ण है कि वक्र के अधीन कुल क्षेत्रफल आयत चित्र या बहुभुज के अधीन क्षेत्रफल के बराबर हो। जब वक्र परिशुद्धता से खींची जाती है, हम इसका इस्तेमाल अंकों के आन्तरगणन के लिए भी कर सकते हैं।

समतल आवृत्ति वक्र (उदाहरण 9.24 को देखें)



सामान्यतया, हमें लेखा में लेना चाहिए आयत चित्रों के आयतों के सभी शीर्ष के मध्य–बिन्दुओं का आवृत्ति वक्र के लिए।

(d) तोरण वक्र (Ogive Curves): इन वक्रों का संबंध संचई आवृत्ति वक्र के सतत रूप से है– संचई आवृत्ति वक्र का 'से कम' और संचई आवृत्ति वक्र का 'से अधिक'। वक्रों को खींचने की यह विधि दूसरे प्रकारों में सबसे अच्छी है क्योंकि यह बहुत उद्देश्यों की पूर्ति करती है। तोरण वक्र संचई आवृत्तियों पर आधारित हैं। इसलिए वें 'संचई आवृत्ति वक्र' भी कहलाती हैं।

एक तोरण वक्र या तो बढ़ता हुआ अभिनति (से कम आवृत्ति) दर्शाता है या गिरता हुआ (से अधिक आवृत्ति) अभिनति। चर का मूल्य OX-अक्ष पर ली जाती है और संचई आवृत्ति OY-अक्ष पर ली जाती हैं। आलेख पर द्रष्टव्य बिन्दु संयुक्त होती है मुक्तहस्त सरल वक्र से।

तोरण वक्र या 'ओजाईव' प्रयुक्त हो सकती हैं सांख्यिकी के समूहों की तुलना के लिए जिसमें समय कारक नहीं है। यद्यपि, इसका आसानी से जनसामान्य द्वारा व्याख्या नहीं किया जाता है। वे प्राथमिक रूप से विभाजन मूल्यों– माध्यिका, चतुर्थक, दशमक, शतमक और दूसरे विभाजन मूल्यों को निर्धारित करने के लिए खींची जाती हैं।

तोरण एक सतत श्रेणी के संचई आवृत्ति का आलेखीय प्रदर्शन है। चूँकि दो प्रकार की संचई आवृत्तियाँ हैं, क्रमानुसार दो प्रकार के तोरण हैं– 'से कम' आवृत्ति वक्र (तोरण) और 'से अधिक' आवृत्ति वक्र (तोरण)।

(i) **'से कम' तोरण:** यह अवस्थित है 'से कम' आवृत्तियों को वर्ग अन्तराल या परिसीमा की उच्च सीमा के विरुद्ध खींचकर। इस तरह से प्राप्त बिन्दुओं को एक सरल वक्र से संयुक्त किया जाता है। यह बढ़ता हुआ वक्र है ऊपर की ओर ढाल आलेख पर बायें से दायें है और यह 'S' के विस्तारित आकार में है।

(ii) **'से अधिक' तोरण:** यह अवस्थित है 'से अधिक' आवृत्तियों को वर्ग अन्तराल या परिसीमाओं के उच्च सीमा के विरुद्ध खींचा जाता है। इस तरह से प्राप्त बिन्दुओं को एक सरल वक्र से संयुक्त किया जाता है। यह एक घटता हुआ वक्र है नीचे की ओर ढलानयुक्त आलेख के बायें से दाहिने और यह 'S' का उल्टा होता है।

माध्यिका के निर्धारण की गाल्टन की विधि

फ्रांसिस गाल्टन ने आलेखीय विधि दी है जिससे माध्यिका निर्धारित की जा सकती है। उदग्र रेखा (OY) बराबर भागों में विभाजित की जाती है माप की इकाई के संगत।

OY-अक्ष के आधे से, एक क्षैतिज रेखा बायें से दाहिने खींची जाती है। यह रेखा 'से कम' आवृत्ति वक्र को एक खास बिन्दु पर काटती है। इस बिन्दु से OX-

टिप्पणी

अक्ष पर लम्बवत रेखा खींचें। प्रतिच्छेद बिन्दु OX-अक्ष पर माध्यिका मूल्य होगी। उसी प्रकार से हम सभी विभाजन मूल्य जैसे– चतुर्थक, दशकम, शतमक और दूसरे ज्ञात कर सकते हैं।

तोरण के अभिलक्षण: निम्न 'से कम' और 'से अधिक' तोरण के अभिलक्षण हैं :

(i) जब दोनों तोरण एक ही आलेख पर खींचें जाते हैं, वे एक खास बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं। इस प्रतिच्छेद–बिन्दु से, अगर हम OX-अक्ष पर लम्ब खींचें, यह माध्यिका का मूल्य देता है।

(ii) से कम तोरण उपयोगी है चतुर्थक, माध्यिका और दूसरे विभाजन मूल्य के प्रगणन में।

(iii) तोरण स्पष्ट तस्वीर पेश करते हैं समंक के बारे में जिससे हमारा तुलनात्मक अध्ययन हो सकता है।

(iv) तोरण विभाजन मूल्य हमेशा संगत हैं स्थैतिक औसतों के साथ।

इस तरह, दो तोरण संचई आवृत्ति से संबंधित समंक को प्रदर्शित करने में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है।

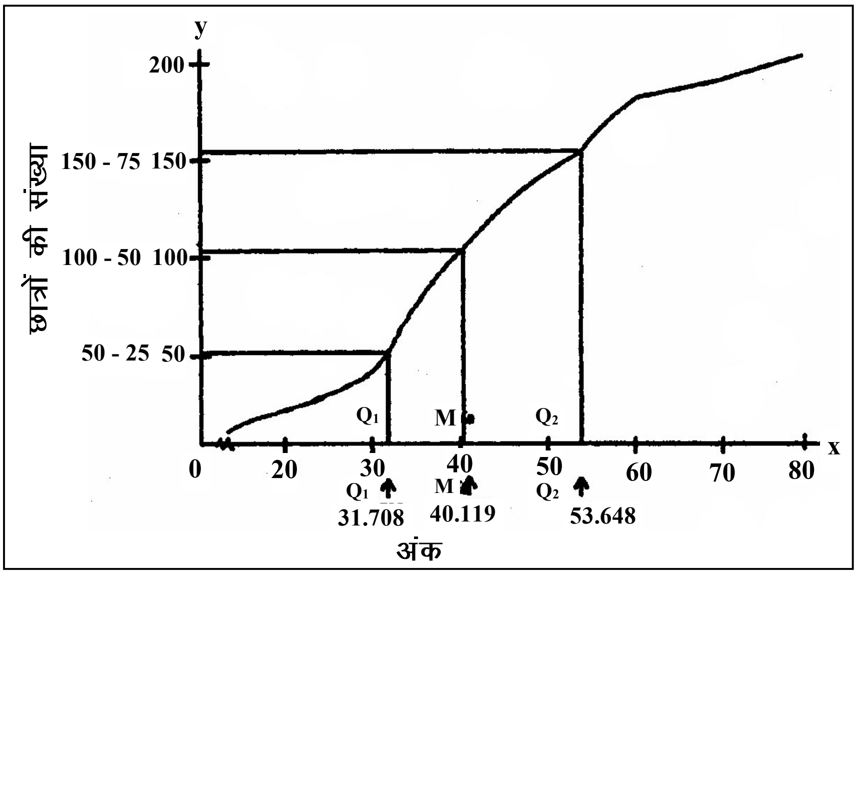
उदाहरण 9.25: एक 'तोरण खींचें' और इससे माध्यिका और चतुर्थक पढ़ें।

अंक:	0-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या:	21	19	60	42	24	18	17

हल : विभाजन मूल्यों को ज्ञात करने के लिए हमें समंक को 'से कम' आवृत्ति वितरण में परिवर्तित करना होगा।

से कम अंक:	20	30	40	50	60	70	80
छात्रों की संख्या:	21	40	100	142	166	184	201

छात्रों की माध्यिका और चतुर्थक अंक दर्शाता आलेख



टिप्पणी

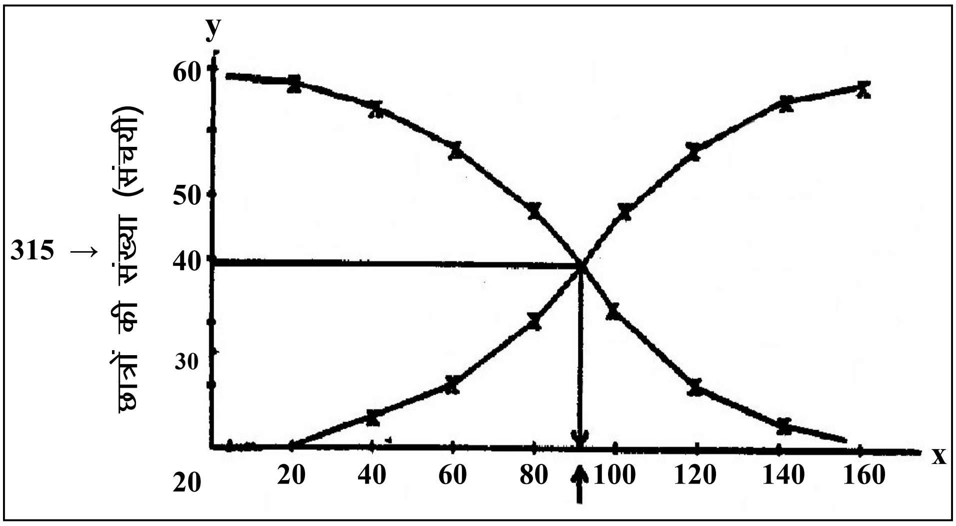
उदाहरण 9.26: निम्न समंक से दो तोरण खींचें, और माध्यिका मूल्य निर्धारित करें।

अंकः	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
छात्रों की संख्याः	4	6	10	16	12	7	3

हलः तोरण वक्र के लिए हमें समंक को दो संचई आवृत्तियाँ में परिवर्तित करना है।

अंक C.I.	छात्रों की संख्या	अंक		से कम c.f.	अंक		से अधिक c.f.
20-40	4	से कम	40	4	से अधिक	20	58
40-60	6	" "	60	10	" "	40	54
60-80	10	" "	80	20	" "	60	48
80-100	16	" "	100	36	" "	80	38
100-120	12	" "	120	48	" "	100	22
120-140	7	" "	140	55	" "	120	10
140-160	3	" "	160	58	" "	140	3

छात्रों द्वारा प्राप्त अंक का तोरण दर्शाता आलेख



उदाहरण 9.27: निम्न से 'से कम तोरण' खींचें और माध्यिका का निर्धारण करें:

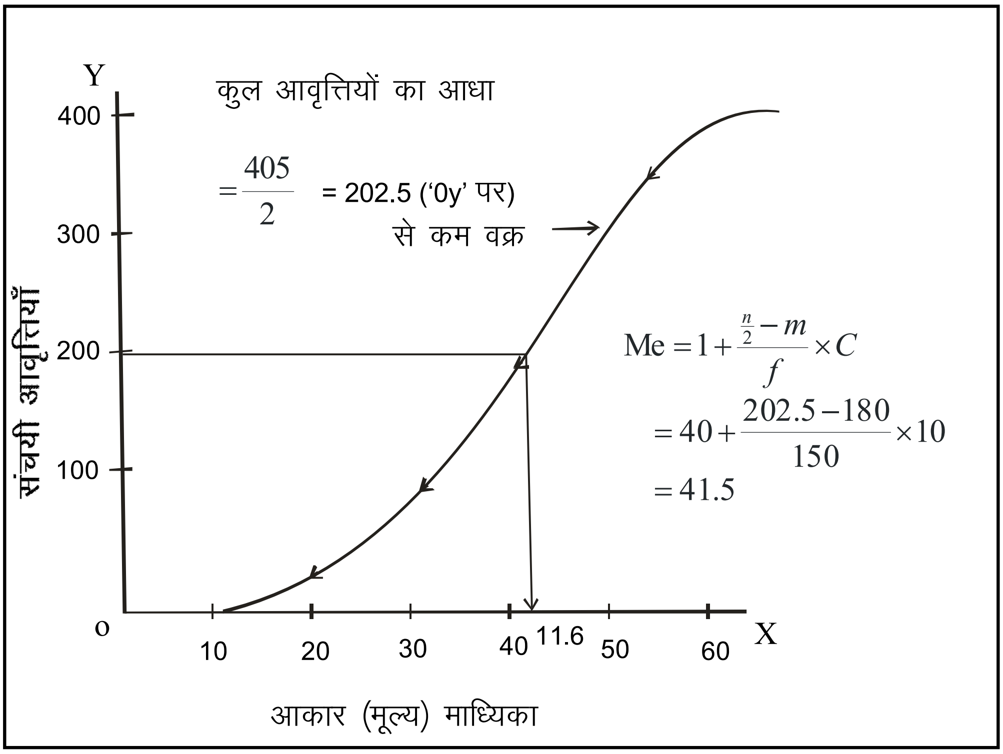
आकार :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
आवृत्ति :	20	60	100	150	75

टिप्पणी

हलः हम समंक को से कम मूल्य वितरण में परिवर्तित करें

आकार C.I.	f		आकार	से कम c.f.
10-20	20	से कम	20	20
20-30	60	" "	30	80
30-40	100	" "	40	180
40-50	150	" "	50	330
50-60	75	" "	60	405

से कम तोरण दर्शाता आलेख



उदाहरण 9.28: निम्न समंक से दो तोरण खींचें और माध्यिका निर्धारित करें :

वर्ग :	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
आवृत्ति :	20	40	60	80	100	120

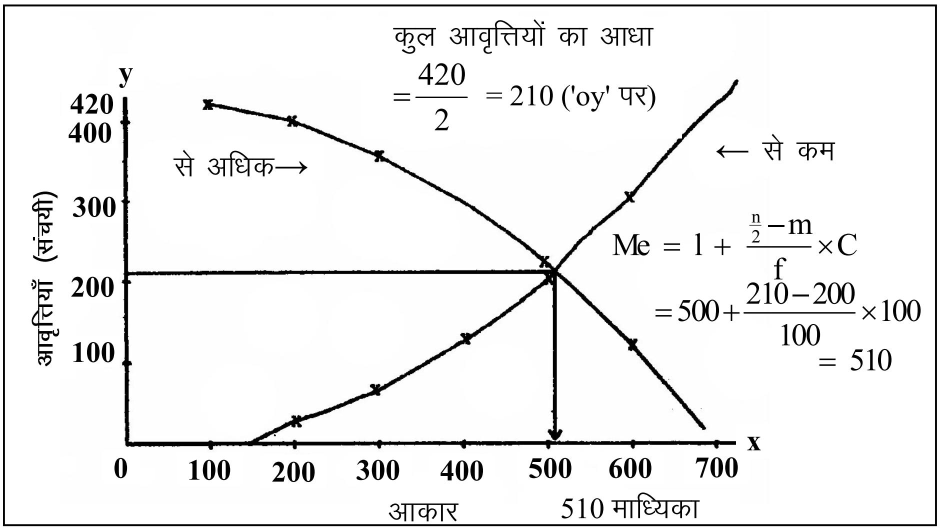
हलः सर्वप्रथम हम समंक को 'से कम' और 'से अधिक' आवृत्ति वितरण में परिवर्तित करें।

C.I.	*f*	आकार		से कम *c.f.*	आकार		से अधिक *c.f.*
100-200	20	से कम	200	20	से अधिक	100	420
200-300	40	से कम	300	60	" "	200	400

टिप्पणी

300-400	60	से कम	400	120	" "	300	360
400-500	80	से कम	500	200	" "	400	300
500-600	100	से कम	600	300	" "	500	220
600-700	120	से कम	700	420	" "	600	120

तोरण और माध्यिका दर्शाता आलेख



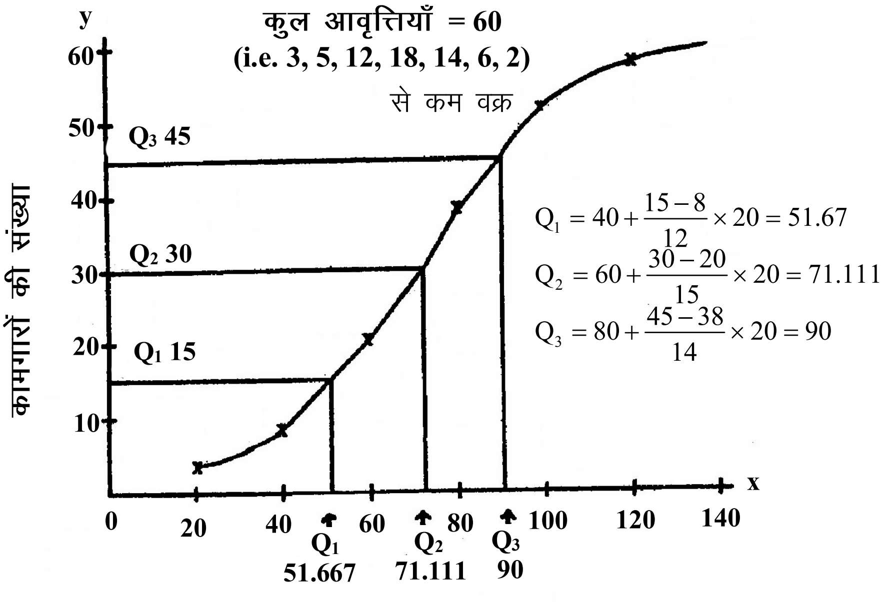
उदाहरण 9.29: 'से कम' तोरण खीचें और चतुर्थकों के मूल्य ज्ञात करें निम्न के लिए।

वेतन से कम :	20	40	60	80	100	120	140
कामगारों की संख्या :	3	8	20	38	52	58	60

हल: चूँकि आवृत्तियाँ पहले से 'से कम' मूल्यों के रूप में हैं।

'से कम' तोरण और चतुर्थक दर्शाती आलेख

टिप्पणी



वेतन (रु. में)

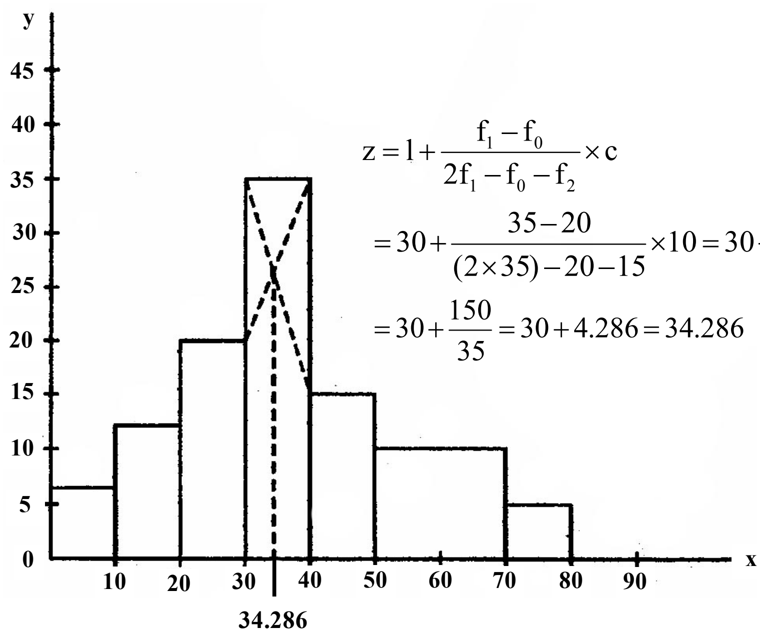
उदाहरण 9.30: एक आयत चित्र बनाएं और तब बहुलक निर्धारित करें निम्न समंक के लिए।

अंक :	0-5	5-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-70	70-80
छात्रों की संख्या	2	5	12	20	35	15	20	5

हलः पहला और दूसरा वर्ग अन्तराल संयुक्त है। C.I. 50-70 भिन्न है। इसकी आवृत्ति को समायोजित किया जाना है।

अंक	f	
0-10	7	
10-20	12	समायोजित आवृत्ति
20-30	20 f_0	$\frac{20 \times 10}{20} = 10$
30-40	35 f_1	
40-50	15 f_2	
50-70	20	
70-80	5	

सत्यापनः बहुलक वर्ग 30–40 (उच्चतम आवृत्ति 35 है)



$$z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$= 30 + \frac{35-20}{(2\times 35)-20-15} \times 10 = 30 + \frac{15}{70-35} \times 10$$

$$= 30 + \frac{150}{35} = 30 + 4.286 = 34.286$$

इस तरह, समंक का आलेखीय प्रदर्शन सांख्यिकीय समंक को प्रस्तुत करने का एक शक्तिशाली और प्रभावकारी माध्यम है। सभी परिस्थितियों के अधीन, यद्यपि, यह सम्पूर्ण स्थानापन्न नहीं है तालिका रूप में प्रस्तुतीकरण का। इसके बावजूद आलेख काफी महत्वपूर्ण भूमिका अदा करते हैं मूल्यों की अभिनति और संबंधों की तुलना को सुगम बनाकर।

9.6 दक्षता वृद्धि (Skill Development)

'दक्षता वृद्धि' एक कला है प्राप्त ज्ञान से कौशल प्रदान करने का। यह संबंधित है अतिरिक्त परिशोधन सीखे गए कौशल का।

'ज्ञान' सीखने से शुरू होता है और 'अनुभव' के साथ समाप्त होता है। छात्र कक्षाओं में प्राथमिक ज्ञान सिखाएं जाते हैं। उन्हें सीमित ही दक्षता प्राप्त होती है जो प्रकृति में तकनीकी हैं। व्यवहारिक जीवन में कई ऐसे कौशल हैं, जो महत्वपूर्ण होते हैं व्यापार, रोजगार और व्यवसाय में सफलता के लिए। ऐसी दक्षताएं शैक्षणिक योग्यता से अलग प्राप्त की जाती है। वे पढ़ाई नहीं जातीं पर अर्जित की जाती है।

दक्षता वृद्धि को जीवनकाल के प्रयास या उपलब्धि के रूप में देखा जाता है। एक विद्यार्थी अपनी पढ़ाई में तेज हो सकता है। वह परीक्षा में प्रथम श्रेणी अंक स्कोर कर सकता है, परन्तु वह व्यवहारिक ज्ञान या अनुभव या दक्षता में कम हो सकता है। वह जीवन में उन्नति नहीं करेगा।

दक्षता वृद्धि उतना ही महत्वपूर्ण है जितना कक्षा में सीखा गया बुनियादी ज्ञान। यह छात्र को बताता है कि उसे वास्तव में व्यवहार में क्या करना है। यह उसे शैक्षणिक ज्ञान को दैनानुदिनी व्यवहारिक ज्ञान में परिवर्तित करने में सक्षम बनाता है। यह उसके सीखे गए ज्ञान को अधिक से अधिक पूर्ण बनाता है।

टिप्पणी

ज्ञान को व्यवहार में लाने के लिए आवश्यक है प्रेरणा की। एक छात्र को, उसकी दक्षता में वृद्धि के लिए, अंदर से प्रेरित होना चाहिए। सिर्फ तभी उसका सीखा गया ज्ञान पूर्ण होगा। यह सभी शिक्षकों, प्रशिक्षकों या कोचों के लिए संभव नहीं कि वो अपने छात्रों को दक्षता वृद्धि में अभिप्रेरित कर सकें। निश्चित रूप से प्रतिपुष्टि की विधि शिक्षकों, प्रशिक्षकों या कोचों के द्वारा चलाई जानी चाहिए अपने छात्रों के दक्षता वृद्धि के लिए।

मासिक अभ्यास उतना ही शक्तिशाली है जितना शारीरिक अभ्यास दक्षता वृद्धि विधि में। हरेक को अपने दिमाग का उपयोग करना चाहिए अपनी दक्षता बनाने में। दक्षता कई तरह के अनुभवों से बढ़ता है, दोनों कक्षा के भीतर और कक्षा के बाहर। यह सम्भव है दक्षता को बढ़ाना निम्न कारकों की सहायता से

• अन्तरव्यक्तिगत समागम (Interpersonal Communication) • तकनीकी ज्ञान (Technical Knowledge) • क्रियाशीलता अभिमुख (Action Oriented) • नेतृत्व गुण (Leadership Qualities) • क्रियात्मक आचरण (Functional Characters) • एक साथ काम करने की प्रवृत्ति (Working Together)	• समीक्षात्मक सोच (Critical Thinking) • विशेषज्ञों द्वारा मार्गदर्शन (Guidelines from Experts) • प्रेरणा (Motivation) • भ्रम के लिए सहनशक्ति Tolerance for Confusion • सृजनात्मक बुद्धि (Creative Mind) • प्रारंभ (Initiation)

प्रत्येक छात्र को अपनी पढ़ाई में रूचि रखनी चाहिए। उसे निश्चित रूप से बुनियादी दक्षता सीखनी चाहिए। उसे सीखने के प्रत्येक अवसर का उपयोग करना चाहिए। उसे पढ़ने, लिखने, सुनने और नोट लेने में उपयुक्त मार्गदर्शन की आवश्यकता होती है। उसे नियमित रूप से सभी तथ्यों और घटनाओं का अवलोकन करते जाना चाहिए जो उसके दक्षता वृद्धि से संबद्ध है। उसे हमेशा बुनियादी दक्षता और उन्हें क्रम में जारी रखने के लिए परिष्कृत करने के लिए प्रयत्न करते रहना चाहिए।

निम्न कुछ व्यवहारिक प्रश्न हैं जो छात्रों के हित को ध्यान में रखकर हल किया गया है :

1. विभिन्न आरेखों और आलेखों को तैयार करना
2. सूचना का आलेखीय प्रदर्शन
3. औसत का परिकलन
4. प्रमाप विचलन का परिकलन
5. विचरण के गुणांक का प्रयोग
6. चल माध्य में समंक का प्रस्तुतीकरण

टिप्पणी

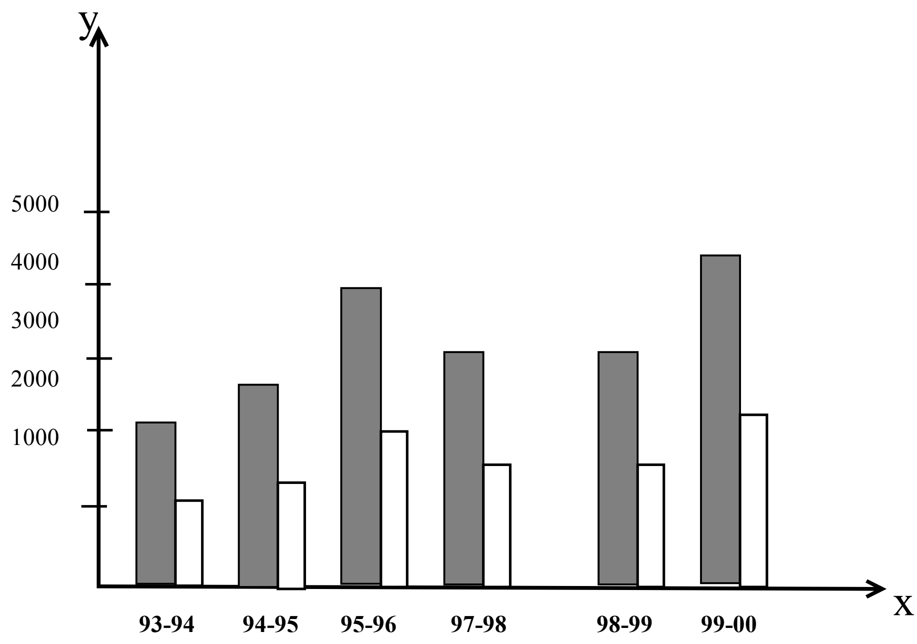
1. विभिन्न आरेखों और आलेखों को तैयार करना

निम्न सूचना को आरेख में प्रदर्शित करें

वर्ष	निर्यात	आयात (मूल्य करोड़ में)
1993-94	2037	807
1994-95	2537	1584
1995-96	3496	2864
1996-97	2880	2231
1997-98		
1998-99	2985	2295
1999-00	4123	2676

हलः चरण

- वास्तविक समंक से संबंधित महत्वपूर्ण प्राचल को संकलित करें।
- उपयुक्त मापक्रम OX-अक्ष और OY-अक्ष पर चुनें।
- समंक को आरेख पर प्रदर्शित करें एक चर को OX-अक्ष पर और दूसरे को OY-अक्ष पर।



टिप्पणी

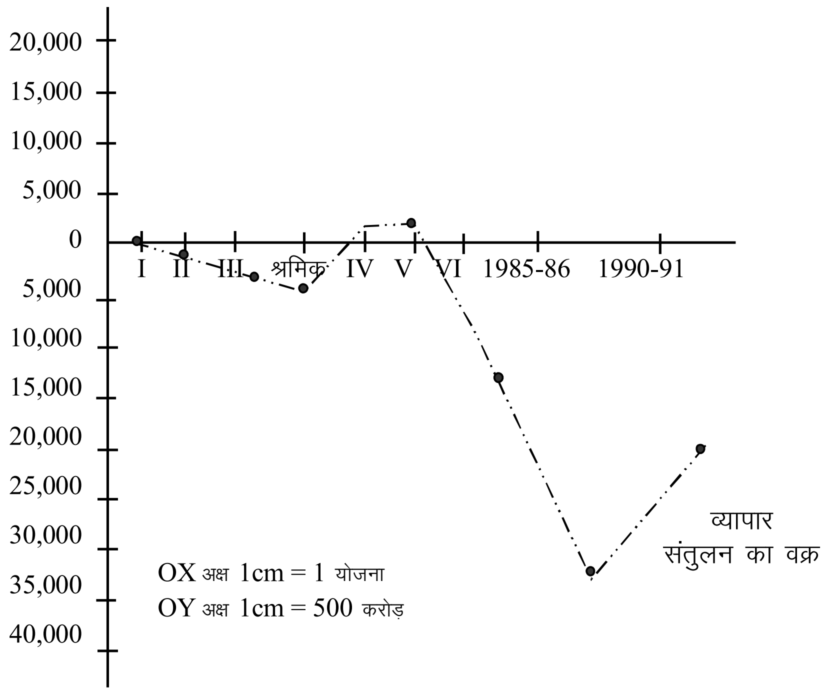
2. निम्नलिखित सूचना को आलेखीय रूप से प्रस्तुत करें:

चालू लेख पर भारत का भुगतान का संतुलन
प्रथम पँचवर्षीय योजना से (करोड़ रु. में)

अवधि	व्यापार में कमी	नेट गोपन	व्यापार संतुलन
पहली योजना	–542	+500	–42
दूसरी योजना	–2339	+614	–1725
तीसरी योजना	–2382	+431	–1951
वार्षिक योजना	–2067	+52	–2015
चतुर्थ योजना	–1564	+1664	–100
पंचम योजना	–3197	+6221	+3082
छठी योजना	–30456	+19072	–11384
1985-86 से 89-90	–54204	+15891	–38313
1990-91	–16934	–435	–17369

हलः चरण

1. वास्तविक समंक महत्वपूर्ण प्राचल या चर से संबंधित संकलित करें।
2. उपयुक्त मापक्रम चुने OX-अक्ष और OY-अक्ष के लिए
3. एक चर को OX-अक्ष पर और दूसरे को OY-अक्ष पर प्रस्तुत करें।



3. निम्न समंक से औसत परिकलित करें जो प्राइमरी मार्केट में नए ईश्यू से संबंधित हैं 1990–91 से 1996–97 तक (राशि करोड़ रु. में)

वर्ष	साधारण शेयर
1990-91	3964
1991-92	5669
1992-93	18124
1993-94	22974
1994-95	36019
1995-96	19648
1996-97	7976
	114374

हलः चरण

1. वितरण के प्रकार की पहचान करें।
2. सूत्र का चुनाव करें।
3. निष्कर्ष निकालें

* यह व्यक्तिगत अवलोकन है

$$\therefore \text{ सूत्र } = \frac{\Sigma x}{N}$$

साधारण शेयर X चर को इंगित करें और X के कुल योगफल को निकालें

N = मदों की संख्या

$\Sigma x = 114374$ N = 7

$$\overline{x} = \frac{114374}{7} = 16339.14$$

औसतन 16,339 करोड़ रु. मूल्य की शेयर राशि उगाही जाती है।

4. औसत प्रमाप विचलन (Average Standard Deviation)

विचरण का सहसंबंध गुणांक

कोलार जिला के लघु उद्योगों की रूपरेखा

वर्ष	इकाईयों की संख्या	निवेश (लाख रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
1988-89	349	480	2253
1989-90	340	403	2515
1990-91	376	785	2188

1991-92	335	1196	2279
1992-93	311	1650	2828
1993-94	480	1556	2828
1994-95	395	1559	4202
1995-96	402	1850	5281
1996-97	404	3870	5062
1997-98	2814	5635	19497
1998-99	509	3352	5686
1999-00	1210	4527	10596
2000-01	1310	4943	11515
2001-02	1410	5359	12434

हलः

$\overline{x}$	760	2655	6460
प्रमाप विचलन	710	1889	5152
सह–संबंध गुणांक	0.80	0.90	0.97
विचरण का गुणांक	93.36	71.16	79.76

चरण :

(1) प्रत्येक चर एक स्वतंत्र इकाई माना गया है।

(2) सूत्र प्रयोग करें $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$

(3) प्रमाप विचलन का सूत्र प्रयोग करें

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}} - - - - - (x = X - \overline{X})$$

(4) सह संबंध का सूत्र प्रयुक्त करें

$$\gamma = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

5. विचरण के गुणांक का सूत्र प्रयुक्त करें i.e., C.V. $= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$

कोलार जिला को एक लाभ है कि यह देश के सबसे तेजी से बढ़ने वाले बंगलोर जिला के एकदम नजदीक है। यह सबसे बड़ा आकर्षक बाजार मुहैया कराता है जो पहुँच में आसान है। पूरी तरह से वर्षा पर आधारित रहने के कारण, जिला वाम सिंचाई पर निर्भर है इसके कृषि और कृषि से जुड़े कार्यों पर जो बहुत

मँहगा साध्य है। परिणामी न्यून वर्षा तालिका का अर्थ है कि उद्योगों में निवेश, खासकर लघु उद्योगों में, एक बेहतर विकल्प है। जिला को दूध, सिल्क और आलुओं के लिए जाना जाता है। इसके अतिरिक्त, बागवानी लोकप्रिय है जो बहुत ज्यादा वर्षा पर निर्भर है।

इस बीच, जिले में निवेश 1996–97 से लगता है जोर पकड़ा है। 1995-96 में 1850 लाख रु. से घट गया 1996-97 में। 1997-98 में आँकड़ा 5635 लाख था जो 1998-99 में घटकर 3359 लाख रुपये हो गया। इस अवनति के पीछे के कारण को सरकारी और संबंधित एजेंसियों को जाँच करना चाहिए।

प्रतिदर्श की संख्या या रजिस्टर्ड इकाईयों का प्रमाप विचलन और विचरण का गुणांक क्रमशः 710 और 93.36% है। प्रमाप विचलन और इसका विस्तार, विचरण का गुणांक इस स्थिति में बहुत ऊँची है, रजिस्टर्ड इकाई का वार्षिक औसत संख्या देखते हुए viz. 760। सिर्फ 371 इकाईयाँ 1992–93 में रजिस्टर्ड थीं। सबसे अधिक, 2815 इकाईयाँ 1997–98 में रजिस्टर्ड हुईं। रजिस्टर्ड लघु उद्योगों में रजिस्टर्ड की संख्या इसलिए आवेशमूलक हैं। ये आँकड़ें लघु उद्योगों के लगातार वृद्धि को द्योतक नहीं है।

रजिस्टर्ड इकाई की संख्या और किए गए निवेश के बीच सह–संबंध गुणांक है, i.e., 0.80, करीब-करीब पूर्णता की ओर। इसका अर्थ है कि रजिस्टर्ड लघु उद्योग की संख्या में वृद्धि कमोबेश लघु उद्योग में वृद्धि के साथ प्रगति पर है।

वार्षिक निवेश के प्रतिदर्श के सापेक्ष प्रमाप विचलन और विचरण का गुणांक क्रमशः 1889 और 71.16% है। प्रमाप विचलन और विस्तार से, विचरण का गुणांक, इस स्थिति में उच्च हैं, वार्षिक औसत निवेश के विरुद्ध देखने पर viz., 1989-90 में 2655 करोड़ जो 4 करोड़ से कुछ ऊपर है। 1997-98 में 56-35 करोड़ का अतिरिक्त अन्तर्वाह है। कोई आश्चर्य नहीं, कि प्रमाप विचलन बहुत ऊँचा है। परिणामस्वरूप यह क्षेत्र स्थायित्व से काफी दूर है। रोजगार उत्पन्न करने और निवेश के बीच सह–संबंध गुणांक 0.90 है। यह निराशा के बादल में एक आशा की किरण है। यह घनात्मक सह–संबंध, उच्च स्तर का, संकेत करता हैं कि रोजगार सृजन ने लघु उद्योग में निवेश के सापेक्ष प्रगति की है।

रोजगार सृजन 1990-91 में न्यूनतम पर था, 2188 पर। यह 1997-98 में शीर्ष पर पहुँचा जब 19497 नौकरियाँ सृजित हुई। रोजगार प्राप्त लोगों की संख्या के प्रतिदर्श के सापेक्ष प्रमाप विचलन और विचरण का गुणांक वार्षिक क्रमशः 5152 और 79.75% हैं। प्रमाप विचलन और इसका विस्तार विचरण का गुणांक बहुत उच्च हैं वर्ष भर में रोजगार प्राप्त लोगों की संख्या के लिहाज से, i.e., 6460। स्पष्ट रूप से रोजगार सृजन नियमित नहीं रहा है। वार्षिक रजिस्टर्ड इकाईयों की संख्या और रोजगार प्राप्त व्यक्तियों के बीच का सह–संबंध गुणांक ने बहुत उच्च स्तर का घनात्मक सह–संबंध प्राप्त किया है viz., 0.97 करीब–करीब पूर्ण। इस उच्च स्तर के घनात्मक सह–संबंध ने सूचित किया कि रजिस्टर्ड इकाईयों में वृद्धि के परिणामस्वरूप रोजगार सृजन में समानुपातिक वृद्धि हुई।

टिप्पणी

6. वर्षवार कोलार जिले में निवेश, रोजगार प्राप्त व्यक्तियों की संख्या और इकाईयों की संख्या का पूर्ण प्रदर्शन

उत्तर : (1) वर्ष के लिए OX-अक्ष चुनें,

(2) इकाईयों की संख्या, निवेश और कर्मचारियों की संख्या के लिए OY-अक्ष चुनें, अलग–अलग तीन समूहों में viz.,

(a) इकाईयों की संख्या और निवेश।

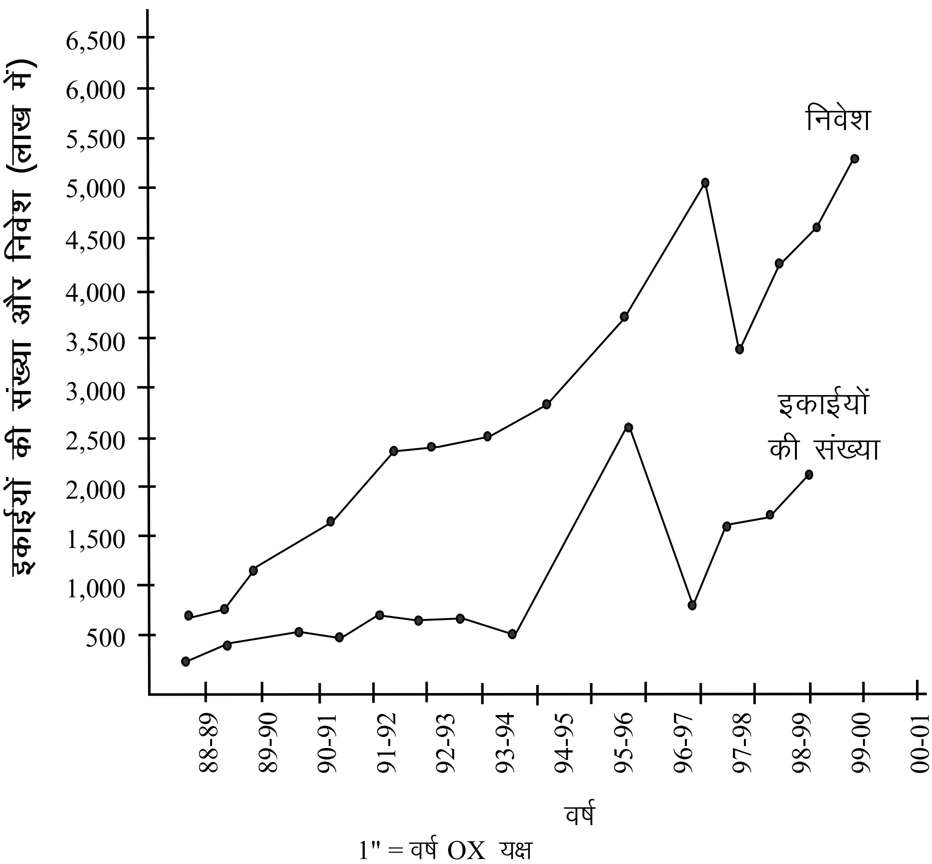
(b) निवेश और कर्मचारियों की संख्या।

(c) कर्मचारियों की संख्या और इकाईयों की संख्या।

(a) **नोटः** आलेख खींचने के लिए कृपया समंक प्रश्न के वर्ष से लें– इकाईयों की संख्या और निवेश।

(b) **नोटः** दूसरा आलेख खींचने के लिए कृपया समंक प्रश्न वर्ष से लें– निवेश और कर्मचारियों की संख्या।

(c) **नोटः** तीसरा आलेख खींचने के लिए कृपया समंक प्रश्न वर्ष से लें– रोजगारों की संख्या और इकाईयों की संख्या।



1" = वर्ष OX यक्ष

1" = 500 लाख या 500 इकाईयाँ OY- इकाई

टिप्पणी

चल माध्य (Moving Average)

निम्न समंक को आलेख रूप में प्रस्तुत करें केन्द्रीय सरकार के मार्केट लोन के भुगतान कार्यक्रम को 3 वर्षीय और 5 वर्षीय चल माध्य लेकर।

(जैसा अन्तर में–मार्च 2001) (रुपये करोड़ में)

स्रोतः आर.बी.आई. बुलेटिन

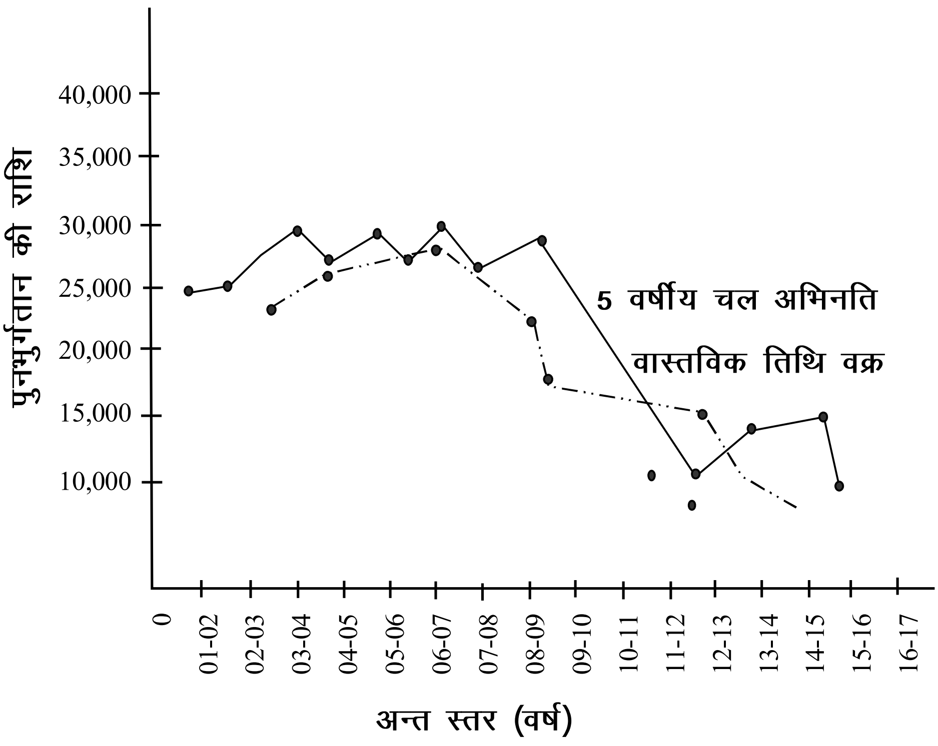
वर्ष	भुगतान की राशि	3 वर्षीय योगफल	3 वर्षीय चल योगफल
2001-02	26,499	—	—
2002-03	27,420	86828	28943
2003-04	32,909	94645	31548
2004-05	34,316	99862	33284
2005-06	32,631	101,841	33,947
2006-07	34,894	101,676	33,892
2007-08	34,151	105,278	35093
2008-09	36,233	104,579	34860
2009-10	34,195	109,037	36346
2010-11	38,609	92,414	30805
2011-12	19,610	69,474	23158
2012-13	11,255	46,556	15519
2013-14	15,691	45,534	15178
2014-15	18,588	53,136	17712
2015-16	18,857	50,575	16858
2016-17	13,130	—	—

5 वर्षीय चल माध्य

मार्च अन्त	भुगतान की राशि	5 वर्षीय योगफल (M)	5 वर्षीय अभिनति (M)
2001-02	26,499	—	—
2002-03	27,420	—	—
2003-04	32,909	1,53,775	30755
2004-05	34,316	1,62,170	32434
2005-06	32,631	1,68,901	33780

टिप्पणी

2006-07	34,894	1,72,225	34445
2007-08	34,151	1,72,104	34421
2008-09	36,233	1,78,082	35616
2009-10	34,195	1,62,798	32560
2010-11	38,609	1,39,902	27980
2011-12	19,610	1,19,360	23872
2012-13	11,255	1,03,753	20751
2013-14	15,691	84,001	16800
2014-15	18,588	77,701	15540
2015-16	18,857	—	—
2016-17	13,130	—	—



अपनी प्रगति जाँचिए (Check Your Progress)

1. रेखा आरेख धारण करते है __________ पतली रेखाएं।

   (क) उदग्र (ख) पहले दण्ड

   (ग) दूसरे दण्ड (घ) इनमे कोई नहीं

टिप्पणी

2. सरल दण्ड आरेख धारण करते हैं __________ श्रेणी।

(क) व्यक्तिगत प्रेक्षण (ख) काल

(ग) अलग रंग (घ) शेड

3. बहुविध दण्ड आरेख कहलाते हैं __________ दण्ड आरेख।

(क) एक–विमितीय (ख) द्वि–विमितीय

(ग) अन्त–विभक्त (घ) इनमें कोई नहीं

4. अन्तर्विभक्त दण्ड आरेख संबंधित हैं __________ अवयवों से।

(क) अन्त–विभक्त (ख) एक–विमतीय

(ग) द्वि–विमतीय (घ) इनमें कोई नहीं

5. विचलन दण्ड विभिन्न मूल्यों में वास्तविक __________ दर्शातें हैं।

(क) लाभ या हानि (ख) व्यापार का अनुकूल संतुलन

(ग) विपरीत संवृत्तियाँ (घ) इनमें कोई नहीं

6. समान संवृत्ति के भिन्न और विपरीत घटक दर्शाने वाले दण्ड __________ दण्ड कहलाते हैं।

(क) विचलन दण्ड (ख) अन्तर्विभक्त

(ग) द्वि–दिशा (घ) इनमें कोई नहीं

7. दण्ड जो फैली हुई भुजाओं का प्रभाव देते हैं कहलाते हैं __________ दण्ड।

(क) द्वि–दिशा (ख) विचलन

(ग) युग्म (घ) इनमें कोई नहीं

8. आयत प्रदर्शित करते हैं दो या अधिक मूल्यों का आपेक्षिक __________।

(क) परिणाम (ख) प्रतिशत

(ग) गुण–धर्म (घ) इनमें कोई नहीं

9. वर्ग की चार भुजाएं चार सम __________ होते हैं।

(क) प्रतिशत (ख) मूल्य

(ग) परिणाम (घ) गुण–धर्म

10. एक वक्र रेखा से घिरा स्थान कहलाता है __________ केन्द्र से दूरी बरतते हुए।

(क) भुज (ख) कोटि

(ग) चतुर्थांश (घ) इनमें कोई नहीं

11. चित्र का आलेखीय साधन कहलाता है __________।

    (क) सतत (ख) विच्छिन्न

    (ग) काल (घ) इनमें कोई नहीं

12. मानचित्र से अवस्थित आलेख कहलाता है __________।

    (क) आवृत्ति वक्र (ख) तोरण वक्र

    (ग) आवृत्ति बहुभुज (घ) इनमें कोई नहीं

9.7 अपनी प्रगति जाँचिए प्रश्नों के उत्तर (Answers to Check Your Progress)

1. (क)
2. (ख)
3. (ग)
4. (क)
5. (ग)
6. (ग)
7. (ग)
8. (क)
9. (ख)
10. (ग)
11. (ग)
12. (ख)

9.8 सारांश (Summary)

समंक का आरेखीय चित्रमय और लेखाचित्रीय प्रदर्शन मनुष्य के दिमाग पर एक अर्थयुक्त प्रभाव अंकित करते हैं करीब–करीब हमारे सोचने से पहले। वे बहुत समय की भी बचत करते हैं क्योंकि बहुत थोड़ा ही परिश्रम वांछित है उन्हें समझने के लिए और उनसे अर्थयुक्त निष्कर्ष निकालने के लिए। एक व्यक्ति सांख्यिकीय आँकड़ों को देखना नहीं भी पसन्द कर सकता है परन्तु वह थोड़ी देर रूककर भी एक नजर डाल सकता है रेखाचित्रों पर। इसी कारणवश समाचार पत्रों के वित्तीय/व्यापारिक स्तंभों में रोज, आर्थिक और व्यापारिक पाक्षिकों, व्यापारिक घरानों के वार्षिक प्रतिवेदनों इत्यादि में आरेखों, लेखाचित्रों और चार्टों को जगह रहती है।

जब उचित ढंग से निर्मित हों, आरेख और लेखाचित्र आसानी से दर्शाती है जिसका विवरण संख्यात्मक सारणीयन में हो सकता है खो जाए। वे संकलित

समंक के विशेष गुणों को प्रकाशमय करती है, दो या दो से अधिक समंक के समुच्चयों के बीच तुलना सुसाध्य बना देती है और हमें उनके बीच के संबंध का ज्यादा तत्परता से अध्ययन करने में समर्थ बनाती है।

आरेख प्रवृत्ति को प्रगट करती है, अधिक स्पष्टता से अगर समंक में कोई है सारणीकृत संख्यात्मक आँकड़ों की तुलना की अपेक्षा और किस तरह प्रवृत्ति (Trends) बदल रही है वह दर्शाती है। यद्यपि यह सूचना एक सारणी में भी अन्तर्निहित है, यह बहुत कठिन और समय खपत करने वाली हो सकती है (कभी–कभी असंभव हो सकती है) समंक के सारणीयन से प्रवृत्ति का अस्तित्व और प्रकृति निर्धारित करना।

चित्रमय प्रदर्शन

1. सफाई– जैसा कि पहले इंगित किया जा चुका है, चित्र, सांख्यिकीय समंकों को प्रस्तुत करने के लिए दृष्टिगत चित्रण है और आँखों के लिए अधिक प्रभावोत्पादक, आकर्षक और मस्तिष्क पर स्थाई प्रभाव डालता है। इसलिए यह अनिवार्य है कि वे बहुत साफ–सुथरे और आकर्षक बने हों, सही प्रकार और अक्षरों के साथ और उपयुक्त साधनों जैसे विभिन्न रंगों, विभिन्न आवरणों (हल्का और गाढ़ा) बिन्दुओं, डैश, बिन्दु रेखाओं (Dotted Lines), टूटी रेखाओं (Broken Lines), बिन्दु और डैश रेखाओं इत्यादि, जो दण्डों (Bars), आयतों (Rectangles), वृत्तों (Circles) इत्यादि और उनके अवयवों के बीच की जगह को भरने में किया जाता है।

2. शीर्षक और पाद टिप्पणियाँ– प्रत्येक चित्र को एक उपयुक्त शीर्षक दिया जाना चाहिए विषय वस्तु को दर्शाने के लिए और विभिन्न तथ्य जो चित्र में निरूपित है।

3. पैमाने का चुनाव– चित्रों के निर्माण में सबसे आवश्यक कारकों में एक उचित पैमाने का चुनाव है। अगर एक ही संख्यात्मक समंक के समुच्चय विभिन्न पैमानों पर खींचे जाएं तो चित्र भिन्न होंगे और कई बार गलत और भ्रामक व्याख्या देंगे।

4. चौड़ाई और ऊँचाई के बीच एक उचित अनुपात बनाए रखना चाहिए।

5. एक चित्र का चुनाव कोई आसान काम नहीं है यह प्रमुख रूप से समंक की प्रकृति, अवलोकनों के परिमाण और विभिन्न प्रकार के लोगों जिनके लिए चित्र सार्थक हैं पर निर्भर करता है और इसके लिए वांछित है विशेषज्ञता, चतुराई और बद्धिमता।

6. अनुक्रमणिका– चित्र की स्पष्ट समझ के लिए एक संक्षिप्त अनुक्रमणिका होनी चाहिए जो चित्र के निर्माण में प्रयुक्त विभिन्न तरह के आच्छादनों, रंगों, पंक्तियों और नमूनों का संक्षिप्त विवरण दे।

7. सरलीकरण– अन्तिम में, चित्रों को जहाँ तक संभव हो इतना सरल होना चाहिए कि एक आम आदमी भी जिसे कोई गणितीय या सांख्यिकीय आधार नहीं है समझ सके। इसलिए, यह वांछित होगा कि अधिक संख्या में कई तालिका खींचना अच्छा हो बनिस्पत एक या दो जटिल तालिका खींचने के।

चित्रों के प्रकार (Types of Diagram)

व्यवहार में सांख्यिकीय समंकों को प्रस्तुत करने के लिए बहुत प्रकार के चित्रमय साधन प्रयुक्त होते हैं। जबकि हम यहाँ सामान्यतः सबसे अधिक प्रयुक्त होने वाले चित्रों का वर्णन करेंगे जो मोटे तौर पर निम्नलिखित रूप से वर्गीकृत किए जा सकते हैंः–

1. एक–आयामी चित्र (विमित्री) viz. (Line Diagram and Bar Diagram,) रेखीय चित्र और दण्ड–चित्र
2. द्वि–आयामी (विमित्तीय) चित्र जैसे– आयत, वर्ग और वृत्त या पाई–चित्र (Rectangle, Spheres and Circle or Piecharts)
3. त्रि–आयामी चित्र (Cubes, Spheres, Prism, Cylinder and Blocks) जैसे– घन, गोले, प्रिज्म, बेलन और ब्लॉक
4. चित्रलेख (Pictograms)
5. मानचित्र (Cartograms)

उपर्युक्त सभी प्रकार के आरेख का पुस्तक के अध्याय में विस्तृत चर्चा की गई है।

9.9 मुख्य शब्दावली (Key Terminology)

- **समंक का आरेखीय प्रदर्शनः** Diagrammatic Representation of Data
- **एक–विमितीय आरेखः** One-Dimensional Diagrams
- **द्वि–विमितीय आरेखः** Two–Dimensional Diagrams
- **त्रि–विमितीय आरेखः** Three-Dimenssional Diagrams
- **समंक का आलेखीय प्रदर्शनः** Graphic Representation of Data
- **आवृत्ति वितरण का आलेखः** Graphs of Frequency Distibution
- **दक्षता वृद्धिः** Skill Development
- **मानरेखाः** Cartograms
- **चित्र रेखाः** Pictograms
- **सरल दण्ड आरेखः** Simple Bar Diagrams
- **विच्छेद दण्डः** Broken Bars
- **आयतेंः** Rectangles
- **वर्गः** Squares
- **वृत्तः** Circles
- **सरल अन्तर्विभक्त आयतः** Simple Sub-divided Rectangles
- **प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयतः** Percentage Sub-divided Rectangles
- **तोरण वक्रः** Dgive Curves

9.10 स्व-मूल्यांकन प्रश्न एवं अभ्यास (Self Assessment Question and Exercises)

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

1. दण्ड आरेख क्या है?
2. आरेख निर्मित करने के दो नियम दें।
3. दो वस्तु आरेख का उल्लेख करें।
4. आप 'विच्छेद दण्डों' से क्या समझते हैं?
5. एक 'पाई चार्ट' क्या है?
6. दण्ड आरेखों की दी सीमाओं का उल्लेख करें।
7. एक 'आरेख' का अर्थ बतावें।
8. 'अवास्तविक आधार रेखा' क्या है?
9. आप एक 'आरेख' से क्या समझते हैं?
10. 'तोरण' का अर्थ दें।
11. आलेखों का क्या महत्व है?
12. आरेखों का क्या महत्व है?
13. एक 'आयत–चित्र' का अर्थ दें।
14. आप 'आवृत्ति बहुभुज' से क्या समझते हैं?
15. एक 'चित्ररेखा' क्या है?
16. एक 'मानरेखा' का अर्थ बतावें।
17. वर्ग और घन क्या हैं?
18. पद 'युग्म दंड' का वर्णन करें।
19. आप 'विचलन दण्ड' से क्या समझते हैं?
20. एक 'वृत्त आलेख' क्या है?

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (Long Answer Type Questions)

1. विभिन्न प्रकार के आलेखों का वर्णन करें।
2. आरेख के निर्माण में विभिन्न चरणों का उल्लेख करें।
3. निम्न के लिए एक उपयुक्त दण्ड आरेख निर्मित करें।

छात्रों की संख्या

कोलज	कला	विज्ञान	वाणिज्य	कुल
A	1200	800	600	2600
B	700	500	600	1800

टिप्पणी

4. परिवार 'A' के निम्न खर्चें को पाई चित्र से प्रदर्शित करें

व्यय :	भोजन	भाड़ा	कपड़ा	दूसरे	बचत
खर्च की गई राशि :	540	180	150	190	40

5. निम्न समंक को एक उपयुक्त आरेख से प्रदर्शित करें :

अखबार	अखबार की प्रतियाँ बिक्री की गई
टाईम्स ऑफ इन्डिया	42,200
नवभारत टाईम्स	64,800
हिन्दुस्तान टाईम्स	54,000
विजय कर्णाटक	57,600
प्रजावाणी	68,400

6. निम्न समंक को एक उपयुक्त आरेख से प्रदर्शित करेंः

संकाय :	बी.बी.एम.	बी.सी.ए.	एम.बी.ए.	एम.सी.ए.
छात्रों की संख्या :	72,00	10,800	3,600	5400

9.11 सहायक पाठ्य सामग्री (Suggested Readings)

1. सांख्यिकी के सिद्धान्त – डी.एन. एलहांस और वीणा एलहांस किताब का महल
2. सांख्यिकी के सिद्धान्त – एस.पी. सिंह S. Chand & Co.
3. Fundamentals of Statistics – S.C. Gupta & V.K. Kapoor S. Chand & Co.
4. Applied Statistics – S.C. Gupta & V.K. Kapoor S. Chand & Co.
5. Fundamentals of Statistics – G.M. Gupta & Das Gupta S. Chand & Co.
6. Mathematical Statistics – H.C. Saxena S. Chand & Co.